

ISSN 2712-8687

# ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

4/2023

CONTROL  SCIENCES

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

С. Н. Васильев, академик РАН,  
И. А. Каляев, академик РАН,  
В. А. Левин, академик РАН,  
Н. А. Махутов, чл.-корр. РАН,  
А. Ф. Резчиков, чл.-корр. РАН,  
Е. А. Федосов, академик РАН

## РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ф. Т. Алескеров, д-р техн. наук,  
В. Н. Афанасьев, д-р техн. наук,  
Н. Н. Бахтадзе, д-р техн. наук,  
В. Н. Бурков, д-р техн. наук,  
В. М. Вишнеvский, д-р техн. наук,  
А. О. Калашников, д-р техн. наук,  
В. В. Клочков, д-р экон. наук,  
С. А. Краснова, д-р техн. наук,  
Н. В. Кузнецов, д-р физ.-мат. наук,  
О. П. Кузнецов, д-р техн. наук,  
В. В. Кульба, д-р техн. наук,  
А. А. Лазарев, д-р физ.-мат. наук,  
В. Г. Лебедев, д-р техн. наук,  
В. Е. Лепский, д-р психол. наук,  
Н. Е. Максимова, канд. техн. наук  
(ответственный секретарь),  
А. С. Мандель, д-р техн. наук,  
Р. В. Мещеряков, д-р техн. наук,  
А. И. Михальский, д-р биол. наук,  
Д. А. Новиков, академик РАН  
(гл. редактор),  
Б. В. Павлов, д-р техн. наук,  
Ф. Ф. Пашченко, д-р техн. наук  
(зам. гл. редактора),  
Л. Б. Рапопорт, д-р физ.-мат. наук,  
С. В. Ратнер, д-р экон. наук,  
Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук,  
М. В. Хлебников, д-р физ.-мат. наук,  
А. Д. Цвиркун, д-р техн. наук,  
П. Ю. Чеботарёв, д-р физ.-мат. наук,  
И. Б. Ядыкин, д-р техн. наук

## РУКОВОДИТЕЛИ РЕГИОНАЛЬНЫХ РЕДСОВЕТОВ

Владивосток – О. В. Абрамов, д-р техн. наук,  
Волгоград – А. А. Воронин, д-р физ.-мат. наук,  
Воронеж – С. А. Баркалов, д-р техн. наук,  
Курск – С. Г. Емельянов, д-р техн. наук,  
Липецк – А. К. Погодаев, д-р техн. наук,  
Пермь – В. Ю. Столбов, д-р техн. наук,  
Ростов-на-Дону – Г. А. Угольницкий,  
д-р техн. наук,  
Самара – М. И. Гераськин, д-р экон. наук,  
Саратов – В. А. Кушников, д-р техн. наук,  
Тамбов – М. Н. Краснянский, д-р техн. наук,  
Уфа – Б. Г. Ильясов, д-р техн. наук,  
Челябинск – О. В. Логиновский, д-р техн. наук

## ADVISORY BOARD

E. A. Fedosov, Academician of RAS<sup>1</sup>,  
I. A. Kalyaev, Academician of RAS,  
V. A. Levin, Academician of RAS,  
N. A. Makhutov, Corr. Member of RAS,  
A. F. Rezchikov, Corr. Member of RAS,  
S. N. Vassilyev, Academician of RAS

## EDITORIAL BOARD

V. N. Afanas'ev, Dr. Sci. (Tech.),  
F. T. Aleskerov, Dr. Sci. (Tech.),  
N. N. Bakhtadze, Dr. Sci. (Tech.),  
V. N. Burkov, Dr. Sci. (Tech.),  
P. Yu. Chebotarev, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
A. O. Kalashnikov, Dr. Sci. (Tech.),  
V. V. Klochkov, Dr. Sci. (Econ.),  
M. V. Khlebnikov, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
S. A. Krasnova, Dr. Sci. (Tech.),  
V. V. Kulba, D. Sc. (Tech.),  
N. V. Kuznetsov, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
O. P. Kuznetsov, Dr. Sci. (Tech.),  
A. A. Lazarev, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
V. G. Lebedev, Dr. Sci. (Tech.),  
V. E. Lepskiy, D. Sc. (Phych.),  
A. S. Mandel, Dr. Sci. (Tech.),  
N. E. Maximova, Cand. Sci. (Tech),  
Executive Editor-in-Chief,  
R. V. Meshcheryakov, Dr. Sci. (Tech.),  
A. I. Michalski, Dr. Sci. (Biol.),  
D. A. Novikov, Academician of RAS,  
Editor-in-Chief,  
F. F. Pashchenko, Dr. Sci. (Tech.),  
Deputy Editor-in-Chief,  
B. V. Pavlov, Dr. Sci. (Tech.),  
L. B. Rapoport, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
S. V. Ratner, Dr. Sci. (Econ.),  
E. Ya. Rubinovich, Dr. Sci. (Tech.),  
A. D. Tsvirkun, Dr. Sci. (Tech.),  
V. M. Vishnevsky, Dr. Sci. (Tech.),  
I. B. Yadykin, Dr. Sci. (Tech)

## LEADERS OF REGIONAL BOARDS

Chelyabinsk – O. V. Loginovskiy, Dr. Sci. (Tech.),  
Kursk – S. G. Emelyanov, Dr. Sci. (Tech.),  
Lipetsk – A. K. Pogodaev, Dr. Sci. (Tech.),  
Perm – V. Yu. Stolbov, Dr. Sci. (Tech.),  
Rostov-on-Don – G. A. Ougolnitsky,  
Dr. Sci. (Tech.),  
Samara – M. I. Geraskin, Dr. Sci. (Econ.),  
Saratov – V. A. Kushnikov, Dr. Sci. (Tech.),  
Tambov – M. N. Krasnyanskiy, Dr. Sci. (Tech.),  
Ufa – B. G. Ilyasov, Dr. Sci. (Tech.),  
Vladivostok – O. V. Abramov, Dr. Sci. (Tech.),  
Volgograd – A. A. Voronin, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
Voronezh – S. A. Barkalov, Dr. Sci. (Tech.)

<sup>1</sup>Russian Academy of Sciences.



**CONTROL SCIENCES**  
Научно-технический  
журнал

6 номеров в год  
ISSN 1819-3161 (Print)  
ISSN 2712-8687 (Online)  
Издается с 2003 года

**УЧРЕДИТЕЛЬ и ИЗДАТЕЛЬ**

Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор  
академик РАН  
Д.А. Новиков

Заместитель главного редактора  
Ф.Ф. Пащенко

Ответственный секретарь  
Н.Е. Максимова

Выпускающий редактор  
Л.В. Петракова

Адрес редакции  
117997, ГСП-7, Москва,  
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410

Тел./факс (495) 198-17-20, доб. 1410

E-mail: pu@ipu.ru

Интернет: <http://pu.mtas.ru>  
<http://controlsciences.org>

Опубликовано: 31 августа 2023 г.

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.  
выдано Министерством Российской  
Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств массовых  
коммуникаций

Свидетельство о регистрации  
Эл № ФС 77-80482 от 17 февраля 2021 г.  
выдано Федеральной службой  
по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и  
массовых коммуникаций

Журнал входит в RSCI на платформе  
Web of Science и Перечень  
рецензируемых научных изданий ВАК

Журнал включен в Российский индекс  
научного цитирования (РИНЦ).  
На сайте Научной электронной  
библиотеки ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)) доступны  
полные тексты статей.

© Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

# ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

## 4.2023

### СОДЕРЖАНИЕ

---

#### Анализ и синтез систем управления

---

**Афанасьев В.Н., Фролова Н.А.** Параметрическая  
оптимизация нелинейной модели в задаче идентификации  
роста раковых клеток ..... 3

---

#### Управление в социально-экономических системах

---

**Губанов Д.А., Новиков Д.А.** Модели совместной динамики  
мнений и действий в онлайн-социальных сетях.  
Ч. 3. Бинарные модели ..... 14

---

#### Управление техническими системами и технологическими процессами

---

**Круглов С.П., Ковыршин С.В.** Идентификационное  
скоростное управление мостовым краном с сокращенной  
моделью переноса груза ..... 28

---

#### Управление подвижными объектами и навигация

---

**Гаракоев А.М., Гладышев А.И.** Формирование программных  
траекторий движения летательного аппарата при  
аэрогеофизической съемке ..... 38

**Саввина Е.В.** Оптимизация траектории межорбитального  
перелёта космического аппарата: выбор начальных  
приближений на основе корреляционного анализа данных ..... 48



**CONTROL SCIENCES**  
Scientific Technical  
Journal

6 issues per year

ISSN 1819-3161 (Print)

ISSN 2712-8687 (Online)

Published since 2003

**FOUNDER and PUBLISHER**

**V.A. Trapeznikov**

Institute of Control Sciences  
of Russian Academy of Sciences

**Editor-in-Chief**

**D.A. Novikov, RAS Academician**

**Deputy Editor-in-Chief**

**F.F. Pashchenko**

**Executive Editor-in-Chief**

**N.E. Maximova**

**Editor**

**L.V. Petrakova**

Editorial address

65 Profsoyuznaya st., office 410,  
Moscow 117997, Russia

☎ +7(495) 198-17-20, ext. 1410

✉ [pu@ipu.ru](mailto:pu@ipu.ru)

URL: <http://pu.mtas.ru>

<http://controlsciences.org>

Published: August 31, 2023

Registration certificate of

ПИ № ФС 77-49203 of 30 March 2012

issued by the Ministry of Press,

Broadcasting, and Mass Media

of the Russian Federation

Registration certificate of

Эл № ФС 77-80482 of 17 February 2021

issued by the Federal Service

for Supervision of Communications,

Information Technology, and Mass Media

The Journal is indexed in RSCI (Russian

Science Citation Index) on the platform

Web of Science and in the list of peer-

reviewed scientific publications of HAC

On the website of the Scientific electronic

library ([www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)) full texts of

articles are available

© V.A. Trapeznikov

Institute of Control Sciences

of Russian Academy of Sciences

# CONTROL SCIENCES

## 4.2023

### CONTENTS

---

#### Analysis and Design of Control Systems

---

**Afnas'ev, V.N. and Frolova, N.A.** Parametric Optimization

of a Nonlinear Model in Tumor Cell Growth Identification . . . . . 3

---

#### Control in Social and Economic Systems

---

**Gubanov, D.A. and Novikov, D.A.** Models of Joint Dynamics

of Opinions and Actions in Online Social Networks.

Part III: Binary Models . . . . . 14

---

#### Control of Technical Systems and Industrial Processes

---

**Kruglov, S.P. and Kovyrshin, S.V.** Identification-Based

Speed Control of an Overhead Crane with a Reduced Cargo

Transfer Model . . . . . 28

---

#### Control of Moving Objects and Navigation

---

**Garakoev, A.M. and Gladyshev, A.I.** Aircraft Motion Control

Algorithms for Airborne Geophysical Survey . . . . . 38

**Savvina, E.V.** Inter-orbital Spacecraft Transfer Optimization:

Choosing Initial Approximations Based on Correlation Analysis

of Key Parameters . . . . . 48

# ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ РОСТА РАКОВЫХ КЛЕТОК

В.Н. Афанасьев, Н.А. Фролова

**Аннотация.** Представлен метод решения задачи идентификации нестационарных объектов с использованием соответствующих математических моделей с параметрической настройкой. Оценка отклонения переходных процессов объекта и его математической модели производится с применением квадратичного функционала качества, сама же задача параметрической настройки модели объекта относится к задачам условной оптимизации. Алгоритм параметрической оптимизации разработан с использованием свойства векторной проекции в пространстве Крейна и второго метода Ляпунова, обеспечивающего целенаправленное изменение параметров модели. Предложенный метод применяется для оценки параметров в модели роста раковых клеток. Нелинейная модель описывает взаимосвязь между популяциями нормальных, иммунных и опухолевых клеток, которую можно измерить в присутствии гауссовского белого шума. Численное моделирование иллюстрирует процедуру проектирования и показывает эффективность предложенного метода.

**Ключевые слова:** параметрическая оптимизация, идентификация, функция стоимости, нелинейные дифференциальные уравнения, Крейн-пространство, метод Ляпунова, уравнение Винера – Хопфа.

## ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на более чем полувековую историю развития теории управления объектами с неполной информацией о состоянии, параметрах и взаимодействии со средой (класс неопределенных объектов), появления огромного количества книг, статей и докладов научно-практических конференций различного уровня, посвященных этой тематике, интерес к данной проблеме сохраняется и не снижается [1–11]. Объясняется этот факт, с одной стороны, появлением более сложных неопределенных объектов различной физической природы, предъявлением более высоких требований к точности и надежности выполняемых такими объектами задач и, с другой стороны, развитием компьютерных средств реализации сложных алгоритмов, уменьшения или парирования нежелательных последствий неопределенности. Отдельным направлением теории автоматического управления является теория идентификации неопределенных объектов, т. е. построение их математических представлений с параметрической настройкой.

Применение методов аналитического конструирования [12] в случае нестационарных систем управления не дает реализуемых решений задач идентификации. Поэтому правомерен подход к конструированию таких систем, основанный на использовании дополнительных цепей, на которые возлагаются задачи оптимизации системы в смысле выбранного критерия качества в процессе работы системы и по мере накопления и обработки необходимой для этих целей информации [7–11]. Реализованные решения могут быть получены с помощью специальных алгоритмических процедур. В данной работе, в приложении к задаче идентификации роста раковых клеток с использованием математической модели с настраиваемыми параметрами, представлен метод алгоритмического конструирования [13] нестационарной системы с неполной информацией о параметрах и среде, который содержит набор алгоритмов, позволяющих оптимизировать систему в соответствии с заданным критерием качества ее работы [14–17].

Идентификация динамических объектов в общем случае состоит в определении их структуры и

параметров модели объекта по наблюдаемым данным: входному воздействию и выходному значению. Отметим, что этап выбора структуры модели чрезвычайно ответствен [9, 10]. Уместность, применимость и эффективность построенной оценки существенно зависят от степени достоверности, с которой математическая модель описывает реальную ситуацию (объект, измерения, внешние параметрические возмущения). В большинстве практических задач полная, точная модель вообще отсутствует, и ее построение связано с большими трудностями, а потому задачу построения оценки по измеряемым характеристикам процесса приходится решать при неполном знании модели. Еще больше усложняется задача, когда внешние воздействия или/и параметры объекта меняются неконтролируемым образом. Кроме того, определение состояния стохастического объекта, описываемого нелинейными дифференциальными уравнениями, по измерениям его фазовых составляющих на фоне помех требует реализации решений нелинейных дифференциальных уравнений. Причем точное построение, например, нелинейного фильтра, невозможно и, что очень важно, получение оценки точности аппроксимации при субоптимальной реализации нелинейного фильтра либо затруднено, либо невозможно.

Альтернативным предложением в приведенных ситуациях может быть построение модели с перестраиваемыми параметрами. Оценка качества решения задачи идентификации производится с помощью функции потерь, представляющей собой четную функции невязки выходов объекта, и путем решения его математической модели. Метод минимизации квадратичного функционала, который используется в данной статье для настройки параметров модели объекта, соответствует широко распространенному методу наименьших квадратов [7, 9, 14–17].

В том случае, когда модель объекта описывается обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением, для ее более удобного с точки зрения практической реализации представления достаточно часто применяется метод расширенной линеаризации [9].

Различные задачи параметрической идентификации, сформулированные в неопределенно-метрических пространствах с разными детерминированными и стохастическими критериями, могут быть решены в единой геометрической структуре. Это так называемые пространства Крейна [18, 19]. При разработке алгоритмов параметрической оптимизации нелинейной модели в задаче идентифи-

кации используется проекция линейного преобразования выхода модели и ошибки идентификации. При этом целенаправленное изменение значений настраиваемых параметров модели обеспечивается соответствующими операторами (функциями чувствительности), которые определяются с применением соответствующей функции Ляпунова.

Сформированный алгоритм параметрической оптимизации применяется в работе при исследовании процесс роста опухоли, математическая модель которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений [20, 21]. Математическая модель включает рост популяций нормальных, иммунных и опухолевых клеток по отдельности и межпопуляционные отношения. Эта модель уже использовалась для построения различных методов протоколов химиотерапии, когда известны все параметры модели [21, 22], для проектирования расширенного фильтра Калмана [23], для определения дозы препарата при отсутствии полного набора параметров [20].

Статья организована следующим образом. В § 1 вводится общее описание решения задачи идентификации и объясняется метод алгоритмической параметризации. Определяются условия успешной идентификации нестационарного объекта путем целенаправленной настройки параметров модели. В § 2 статьи проиллюстрированы результаты математического моделирования задачи идентификации нестационарной системы (рост клеток опухоли) с применением модели с настраиваемыми параметрами. Полученные результаты могут быть использованы для определения дозы препарата для химиотерапии онкологического больного.

## 1. ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

### 1.1. Постановка задачи идентификации

Рассмотрим наблюдаемый неопределенный объект, описываемый нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f(x(t), \eta(t), w(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \\ y &= Cx(t) + n(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния;  $y \in R^m$  – вектор измерений состояния,  $n \geq m$ ;  $\eta \in R^k$  – вектор неизвестных параметров (изменяющихся во времени);  $w \in R^h$ ,  $n \in R^m$  – шумы с характеристиками



$$\begin{aligned}
 M[w(t)] &= 0, \quad M[n(t)] = 0, \\
 M[w(t)w^T(\tau)] &= W_w \delta(t - \tau), \\
 M[n(t)n^T(\gamma)] &= N_n \delta(t - \gamma), \\
 M[n(t)w^T(t)] &= 0, \quad M[x(t_0)w^T(t)] = 0, \\
 M[x(t_0)n^T(t)] &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

где  $W_w$  и  $N_n$  - интенсивности соответствующих шумов; вектор скорости изменения неизвестных параметров объекта (1.1) ограничен:

$$\left| \frac{d\eta(t)}{dt} \right| \leq \Lambda, \quad \Lambda = \text{const} > 0.
 \tag{1.3}$$

Для настраиваемой модели используется уравнение

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= f_m(y(t), \alpha(t)), \\
 \hat{x}(t_0) &= x_0,
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

где  $\hat{x}(t) \in R^n$  - вектор оценки состояния;  $\alpha \in R^k$ ,  $\alpha(t) \in A$  - вектор настраиваемых параметров в модели, введенный для выполнения задачи параметрической идентификации исходного объекта.

**Предположения 1.1.** Предполагаем, что

**(П1)** Функция  $f(x(t), \eta(t), w(t)): [t_0, t_f] \times R^n \times R^k \times W_w \times R^n$  является непрерывной и удовлетворяет ограничениям  $\|f(x(t), \eta(t), w(t))\| \leq (1 + \|x\|)R_f$  для всех  $(t, x, \eta, w) \in [t_0, t_f] \times R^n \times R^k \times W_w$ ,  $R_f > 0$ .

Функция  $f_m(y(t), \alpha(t)): [t_0, t_f] \times R^n \times R^k \times R^n$  является непрерывной и удовлетворяет ограничениям  $\|f_m(y(t), \alpha(t))\| \leq (1 + \|\hat{x}(t)\|)R_s$  для всех  $(t, y, \alpha) \in [t_0, t_f] \times R^n \times R^k$ ,  $R_s > 0$ .

**(П2)** Функция  $f(x(t), \eta(t), w(t))$  удовлетворяет условию Липшица по переменной  $x$   $\|f(x+z, \eta, w) - f(x, \eta, w)\| \leq \mu \|z\|$ ,  $\mu > 0$ , для всех  $(t, x, \eta, w) \in [t_0, t_f] \times R^n \times R^k \times W_w$ ,  $z \in R^n$ .

Функция  $f_m(y(t), \alpha(t))$  удовлетворяет условию Липшица по переменной  $y$   $\|f_m(y+v, \alpha) - f_m(y, \alpha)\| \leq \varsigma \|v\|$ ,  $\varsigma > 0$ , для всех  $(t, y, \alpha) \in [t_0, t_f] \times R^n \times R^k$ ,  $R_s > 0$ .

**(П3)** Функция  $f(x(t), \eta(t), w(t))$  гладкая и непрерывно дифференцируема по набору переменных  $\eta$  столько раз, сколько необходимо.

Функция  $f_m(y(t), \alpha(t))$  гладкая и непрерывно дифференцируема по набору переменных  $\alpha$  столько раз, сколько необходимо. ♦

Запишем рассогласования состояний объекта (1.1) и модели (1.4) в виде

$$\varepsilon(t) = \Phi x(t) - \Psi \hat{x}(t).
 \tag{1.5}$$

Здесь  $\varepsilon(t) \in R^l$  - ошибка слежения за состоянием;  $\Phi: R^n \rightarrow R^l$  и  $\Psi: R^n \rightarrow R^l$  - линейные операторы, которые преобразуют размерность вектора состояния и вектора оценки состояния.

Задача идентификации объекта (1.1) ставится как задача минимизации функционала (функции стоимости)

$$\min_{\alpha \in A} J(\varepsilon) = M[F(\varepsilon(\eta, \alpha))]
 \tag{1.6}$$

путем перестройки параметров модели (1.4). В формуле (1.6)  $F(\varepsilon(\eta, \alpha))$  - скалярная неотрицательная симметричная и/или квадратичная функция.

**Предположение 1.2.** Область настраиваемых параметров  $A$  модели (1.4) содержит параметры  $\alpha \in R^k$ , при настройке которых выполняется задача идентификации (1.6). ♦

### 1.2. Необходимые условия минимума функции стоимости

С учетом сделанных предположений 1.1 запишем условия локального минимума функционала (1.6) относительно изменяющихся параметров  $\eta(t)$  объекта (1.1) и настраиваемых параметров  $\alpha(t)$  модели (1.4)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \alpha} J(\varepsilon) &= M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \alpha} \right] = 0, \\
 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} J(\varepsilon) &= M \left[ \frac{\partial^2 F(\varepsilon(\eta, \alpha^0))}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right] > 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

$i, j = 1, \dots, k.$

Вектор в первом уравнении (1.7) представляет градиенты средних потерь [6, 9]

$$\frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \alpha} = \left( \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \alpha_k} \right).$$

Матрицы во втором уравнении (1.7) являются матрицами Гессе и описывают градиенты средних потерь. Используя необходимые условия локального минимума, можно записать алгоритм параметрической оптимизации [7, 9, 14]

$$\frac{d}{dt} \alpha(t) = -\Gamma M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \alpha} \right], \quad (1.8)$$

$$\alpha(t_0) = \alpha_0,$$

где  $\Gamma$  – положительно определенная матрица усиления. Матрица усиления влияет на сходимость алгоритма и способность алгоритма противостоять возмущениям.

**Теорема 1.1.** Пусть относительно модели (1.2) и объекта (1.1) выполняются предположения 1.1 и 1.2 и пусть заданы начальные состояния параметров модели и объекта  $\alpha(t_0) \neq \eta(t_0)$ . Тогда алгоритм (1.8) асимптотически оптимизирует функционал (1.6), если скорости изменения параметров  $\alpha(t)$  и  $\eta(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  связаны соотношением

$$\left| \frac{d}{dt} \alpha(t) \right| > \left\{ M \left[ \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \eta} \right]^T \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \alpha} \right] \right] \right\}^{-1} \times$$

$$\times \left| M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \eta} \right]^T M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \eta} \right] \Lambda \right|.$$

**Доказательство.** Введем функцию Ляпунова

$$V_L(\varepsilon(\eta, \alpha)) = J(\varepsilon(\eta, \alpha)).$$

Полная производная функции Ляпунова, учитывая, что функционал (1.6) в явном виде не зависит от времени, имеет вид

$$\frac{d}{dt} J(\varepsilon(\eta, \alpha)) = \frac{\partial J(\varepsilon(\cdot))}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} \alpha(t) + \frac{\partial J(\varepsilon(\cdot))}{\partial \eta} \frac{d}{dt} \eta(t) =$$

$$= - \left\{ M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \alpha} \right] \right\} \frac{d}{dt} \alpha(t) +$$

$$+ \left\{ M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \eta} \right] \right\} \frac{d}{dt} \eta(t) \leq 0.$$

Учитывая выражение (1.8) и то, что на скорость изменения параметров объекта наложено ограничение (1.3), из полученного выше будем иметь

$$\left| M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \alpha} \right] \frac{d}{dt} \alpha(t) \right| \geq \left| M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \eta} \right] \Lambda \right|. \quad (1.9)$$

Умножив слева выражение (1.9) на вектор  $M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \eta} \right]^T$  и учитывая ограничение (1.3), получим

$$\left| M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \eta} \right]^T \left\| M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \alpha} \right] \frac{d}{dt} \alpha(t) \right\| \right| \geq$$

$$\geq \left| M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \eta} \right]^T \left\| M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \eta} \right] \Lambda \right\| \right|.$$

Из этого нестрогого неравенства получаем условие асимптотической оптимизации функционала (1.6) путем решения задачи параметрической идентификации нестационарного объекта (1.1) с использованием модели (1.4) и алгоритма оптимизации (1.8):

$$\left| \frac{d}{dt} \alpha(t) \right| > \left\{ M \left[ \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \eta} \right]^T \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \alpha} \right] \right] \right\}^{-1} \times$$

$$\times \left| M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \eta} \right]^T M \left[ \frac{\partial F(\varepsilon(\eta, \alpha))}{\partial \eta} \right] \Lambda \right|. \quad \blacklozenge$$

### 1.3. Задача идентификации нестационарного объекта в Крейн-пространстве

В этом разделе будут рассматриваться модели вида (1.2) и с квадратическим критерием качества

$$J(\varepsilon) = M \|\varepsilon(t)\|^2 = M \|\Phi x(t) - \Psi \hat{x}(t)\|^2 = J(x, \hat{x}). \quad (1.10)$$

Как уже отмечалось в п. 1.1, различные задачи параметрической идентификации, сформулированные в неопределенно-метрических пространствах, с разными детерминированными и стохастическими критериями могут быть решены в единой геометрической структуре. К таким пространствам относится пространство Крейна [18, 19] (К-пространство). Пространство Крейна является расширением пространства Гильберта и обладает его основными свойствами. Основным отличием пространства Крейна является его допустимая декомпозиция на два ортогональных подпространства  $K = K_+ \oplus K_-$  такая, что  $K_+$  и  $K_-$  являются пространствами Гильберта и  $\langle v, z \rangle = 0$  для любого  $v \in K_+$  и  $z \in K_-$ . Отмечается, что проекция  $\langle v, z \rangle = 0$  для обоих подпространств существует и единственна [18, 19]. Запишем это свойство проекции в терминах рассматриваемой задачи идентификации. Пусть  $\mathfrak{I}\{y(t)\}$ ,  $\mathfrak{I} \in \mathfrak{R}$ , – линейный оператор. Тогда для случая, когда выполняется



задача идентификации (1.6), для обоих Крейн-подпространств выполняется условие  $\mathfrak{Z}\{y(t)\} \perp \varepsilon(t)$ , т. е.  $\langle \mathfrak{Z}\{y(t)\}, \varepsilon(t) \rangle = 0$  и с учетом сделанных обозначений ортогональная проекция может быть записана в виде

$$M \left[ \left\{ \mathfrak{Z}\{y(t)\} \right\}^T \left\{ \Phi x(t) - \Psi \hat{x}(t) \right\} \right] = 0. \quad (1.11)$$

В Крейн-пространствах эта проекция существует и единственна, т. е. она должна выполняться для любых операторов  $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{R}$ . Нетрудно заметить, что выражение (1.11) не что иное, как уравнение Винера – Хопфа [9, 23]

$$\begin{aligned} \text{tr} M \left[ \left\{ \mathfrak{Z}\{y(t)\} \right\} \left\{ \Phi x(t) - \Psi \hat{x}(t) \right\}^T \right] &= 0, \\ \mathfrak{Z} \in \mathfrak{R}, t \in [t_0, t_f], \end{aligned} \quad (1.12)$$

которое является необходимым и достаточным условием минимума функционала (1.10). Так как условие (1.12) нарушается при  $\alpha(t) \neq \eta(t)$ , то оно может быть применено при организации алгоритма параметрической оптимизации модели объекта. Пусть  $\mathfrak{Z}\{y(t)\} = \left\{ \partial \Psi \hat{x}(t) / \partial \alpha \right\}^T$ , где  $\partial \Psi \hat{x}(t) / \partial \alpha$  – функция чувствительности процесса  $\hat{x}(t)$  к изменению параметров модели  $\alpha(t)$ . Тогда алгоритм параметрической оптимизации модели (1.4) может иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha(t) &= -\Gamma M \left[ \left\{ \frac{\partial \Psi \hat{x}(t)}{\partial \alpha} \right\}^T \left\{ \Phi x(t) - \Psi \hat{x}(t) \right\} \right], \\ \alpha(t_0) &= \alpha_0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Однако заметим, что для рассматриваемого случая (объект (1.1), модель (1.4) с параметрической настройкой) использовать это условие в качестве основы алгоритма параметрической оптимизации в общем случае невозможно. Это видно из следующего примера.

Перепишем, несколько упростив, условие (1.11):

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{Z}\{y(t)\}, \varepsilon(t) \rangle &= \text{tr} M C \left[ x(t) x^T(t) \right] - \\ &- \text{tr} M C \left[ \hat{x}(t) \hat{x}^T(t) \right] C^T - \text{tr} M \left[ n(t) \hat{x}^T(t) \right] C^T. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь было использовано то, что в силу постановки задачи и с учетом условия (1.12):

$$x(t) = \varepsilon(t) + \hat{x}(t), \text{tr} M \left[ \varepsilon(t) \hat{x}^T(t) \right] = 0.$$

Рассмотрим второе слагаемое из уравнения (1.14):

$$\begin{aligned} \text{tr} M \left[ \hat{x}(t) n^T(t) \right] &= \text{tr} M \left[ \hat{x}(t_0) n^T(t) + \right. \\ &+ \left. \int_{t_0}^t f(Cx(\tau) + n(\tau), \alpha(\tau)) n^T(t) d\tau \right] = \\ &= \text{tr} \left[ \int_{t_0}^t M \left[ f(Cx(\tau) + n(\tau), \alpha(\tau)) n^T(t) \right] d\tau \right]. \end{aligned}$$

Из этого выражения следует, что при  $\alpha(t) = \eta(t)$  значение уравнения (1.14) будет зависеть от неизвестной в общем случае интенсивности  $N_n$  белого шума  $n(t)$  в измерениях  $y(t)$ . Для того, чтобы исключить эту зависимость, учитывая, что  $M \left[ n(t) n^T(\gamma) \right] = N_n \delta(t - \gamma)$ , введем в формулу (1.12) линейный оператор такой, что

$$\mathfrak{Z}^* \{y(t)\} = \mathfrak{Z} \{y(t + \xi)\}, \xi > \gamma.$$

Учитывая то, что в силу сформулированных при постановке задачи условий  $\text{tr} M \left[ n(t) n^T(t + \xi) \right] = 0$ , получим:

$$\text{tr} M \left[ \left\{ \mathfrak{Z}^* \{y(t)\} \right\} \left\{ \Phi x(t) - \Psi \hat{x}(t) \right\}^T \right] = 0,$$

что является необходимым и достаточным условием минимума функционала  $J^*(\varepsilon) = M \left[ \varepsilon^T(t) \varepsilon(t + \xi) \right]$ .

Отметим, что минимумы функционалов  $J(\varepsilon)$  и  $J^*(\varepsilon)$  достигаются при одном и том же соотношении значений параметров объекта (1.1) и модели (1.5), т. е. при выполнении условия  $\alpha(t) = \eta(t)$ .

С учетом вышесказанного, алгоритм параметрической оптимизации модели (1.5), связанной с решением задачи идентификации, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha(t) &= -\Gamma M \left[ \left\{ \frac{\partial \Psi \hat{x}(t + \xi)}{\partial \alpha} \right\}^T \times, \right. \\ &\times \left. \left\{ \Phi x(t) - \Psi \hat{x}(t) \right\} \right], \xi > \gamma, \alpha(t_0) = \alpha_0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для демонстрации эффективности предлагаемого метода параметрической оптимизации модели нелинейной системы рассмотрим в качестве «объекта» (1.1) математическую модель роста

опухоли [20, 21]. Модель состоит из трех компонентов: количества нормальных клеток ( $N$ ), количества опухолевых клеток ( $T$ ) и количества иммунных клеток ( $I$ ). Нелинейная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N &= r_2 N(1 - b_2 N) - c_4 NT + w_N, \\ \frac{d}{dt} T &= r_1 T(1 - b_1 T) - c_2 IT - c_3 TN + w_T, \\ \frac{d}{dt} I &= s + \frac{\rho IT}{\alpha + T} - c_1 IT - d_1 I + w_I, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $N(t)$ ,  $T(t)$ ,  $I(t)$  – нормированное количество нормальных, раковых и иммунных (лимфоцитов и др.) клеток. Описание параметров модели приведено в табл. 2.1 ниже.

Для описания роста численности популяций нормальных клеток с плотностно-зависимым механизмом, на динамику которых влияют эффекты перенаселения и ограниченности ресурсов, так же, как и для популяции раковых клеток, используется логистическая функция роста (первые слагаемые уравнений для  $N$  и  $T$ ), недостатком которой является априорное знание параметра предельной численности клеточной популяции (параметры  $1/b_1$ ,  $1/b_2$ , каждый интерпретируется как потенциальная емкость популяции, которая определяется доступным количеством ресурсов). Предполагается, что клетки опухоли и нормальные клетки размножаются с постоянной удельной скоростью  $r_1$  и  $r_2$  соответственно, ограничение скорости роста опухоли происходит из-за уничтожения злокачественных клеток лимфоцитами-киллерами (иммунными клетками; слагаемое  $c_2 T(t)I(t)$ ). Кроме того, уравнение динамики лимфоцитов содержит слагаемое  $\rho T(t)I(t)/[\alpha + T(t)]$ , описывающее их размножение, где  $\rho$  – коэффициент размножения лимфоцитов при их максимальной стимуляции, параметр  $\alpha$  характеризует антигенность (индексирование иммунного ответа) опухоли. В модели предполагается, что при малом количестве клеток  $T$  опухоль стимулирует пролиферацию (увеличение роста) лимфоцитов, а при большом – подавляет. Два других члена во втором уравнении соответствуют естественной гибели лимфоцитов (слагаемое  $d_1 I(t)$ ) и постоянному притоку лимфоцитов из стволовых клеток (параметр третьего урав-

нения  $s$ ) [23]. Гибель лимфоцитов при взаимодействии с опухолевыми клетками явно не учитывается, так как один лимфоцит может убить несколько опухолевых клеток.

Нелинейная система имеет несколько положений равновесия  $(N_E, T_E, I_E)$ , зависящих от параметров, описанных выше, определяемых пересечением плоскостей, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow \begin{cases} N_E = 0, \\ N_E = \frac{r_2 - c_4 T_E}{r_2 b_2}, \end{cases}$$

$$\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow \begin{cases} T_E = 0, \\ T_E = \frac{r_1 - c_2 I_E - c_3 N_E}{r_1 b_1}, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow I_E = \frac{s(\alpha + T_E)}{(\alpha + T_E)(d_1 + c_1 T_E) - \rho T_E}.$$

В зависимости от значений параметров модель (2.1) может иметь одно, два или три положения равновесия. Устойчивость точек равновесия (2.2) так же зависит от значений параметров. Для оценки устойчивости необходимо линеаризовать систему в окрестности выбранного положения равновесия и исследовать собственные значения матрицы системы.

Безопухоловое состояние (раковые клетки отсутствуют) определяется соотношениями  $N_E = 1$ ,  $T_E = 0$ ,  $I_E = s/d_1$ ; безжизненное состояние (нормальные клетки отсутствуют) – соотношениями  $N_E = 0$ ,  $T_E = 0$ ,  $I_E = s/d_1$  либо

$$N_E = 0, \quad T_E = \frac{r_1 - c_2 I_E}{r_1 b_1},$$

$$I_E = \frac{s(\alpha + T_E)}{(\alpha + T_E)(d_1 + c_1 T_E) - \rho T_E}.$$

Отметим, что одна из точек безжизненного равновесия  $(0, 0, s/d_1)$  всегда неустойчива и зависит от значений соответствующих параметров. Вторая точка безжизненного равновесия может быть устойчивой или неустойчивой. Выбирая значения параметров в соответствии с табл. 2.1, получаем, что модель (2.1) имеет 4 точки равновесия: 3 неустойчивого (2 безжизненного равновесия, 1 безопухолового равновесия) и 1 устойчивого равновесия (1 точка сосуществования).



Таблица 2.1

**Значения параметров модели с диапазонами их изменения**

Параметр	Описание	Значение	Ограничения
$b_1$	Емкость популяции раковых клеток	1,0	$b_1^{-1} < b_2^{-1}$
$b_2$	Емкость популяции нормальных клеток	1,0	–
$c_1$	Коэффициент уничтожения иммунных клеток раковыми	1,0	$c_1 > 0$
$c_2$	Коэффициент уничтожения раковых клеток иммунными	0,5	$c_2 > 0$
$c_3$	Коэффициент уничтожения раковых клеток нормальными	1,0	$c_3 > 0$
$c_4$	Коэффициент уничтожения нормальных клеток раковыми	1,0	$c_4 > 0$
$d_1$	Коэффициент естественной гибели иммунных клеток	0,2	–
$r_1$	Скорость размножения раковых клеток	1,5	$r_1 > r_2, r_1 < \frac{sc_2}{d_1} + c_3$
$r_2$	Скорость размножения нормальных клеток	1,0	–
$s$	Приток лимфоцитов из стволовых клеток	0,33	$0 < s < 0,5$
$\alpha$	Показатель антигенности опухоли	0,3	$\alpha > 0$
$\rho$	Коэффициент размножения лимфоцитов при максимальной стимуляции	0,01	$0 < \rho < 2$

Перепишем систему (2.1), сдвинув точку равновесия без опухоли к началу координат [23]:

$$x_1 = N - 1/b_2, \quad x_2 = T, \quad x_3 = I - s/d_1.$$

Тогда система (2.1) в новых координатах имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = -r_2 x_1 (1 + b_2 x_1) - \frac{c_4}{b_2} x_2 - c_4 x_1 x_2 + w_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_1 x_2 (1 - b_1 x_2) - \left( \frac{sc_2}{d_1} + \frac{c_3}{b_2} \right) x_2 - c_3 x_1 x_2 - c_2 x_2 x_3 + w_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{c_2 s}{d_1} x_2 - d_1 x_3 + \rho \frac{s}{d_1} \frac{x_2}{(\alpha + x_2)} + \rho \frac{x_2 x_3}{\alpha + x_2} - c_2 x_2 x_3 + w_3,$$

$$y(t) = x(t) - \hat{x}(t) + n(t),$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  – вектор состояния системы. Значения параметров приведены во многих работах с использованием этой модели, например, в статье [23]. Значения неизвестных параметров процесса, которые необходимо идентифицировать, приведены в табл. 2.2 (отмечены полужирным начертанием).

Таблица 2.2

**Значения параметров объекта и модели**

Параметр	Значение параметра модели	Значение параметра объекта	Параметр	Значение параметра модели	Значение параметра объекта
$b_1$	1,0	1,0	$d_1$	0,2	0,2
$b_2$	1,0	1,0	$r_1$	1,7	<b>1,5</b>
$c_1$	1,0	<b>1,1</b>	$r_2$	1,0	<b>1,3</b>
$c_2$	0,45	<b>0,58</b>	$S$	0,3	0,3
$c_3$	0,9	<b>1,0</b>	$A$	0,3	0,3
$c_4$	1,0	1,0	$\rho$	0,01	0,06

Система уравнений для оценки вектора состояния, т. е. модель, которая следит за поведением объекта, выглядит аналогично (при этом все или некоторые значения параметров могут не совпадать) [24, 25]:

$$\frac{d\hat{N}(t)}{dt} = \tilde{r}_2 \hat{N}(t) [1 - \tilde{b}_2 \hat{N}(t)] - \tilde{c}_4 \hat{T}(t) \hat{N}(t),$$

$$\frac{d\hat{T}(t)}{dt} = \tilde{r}_1 \hat{T}(t) [1 - \tilde{b}_1 \hat{T}(t)] - \tilde{c}_2 \hat{T}(t) \hat{I}(t) - \tilde{c}_3 \hat{T}(t) \hat{N}(t),$$

$$\frac{d\hat{I}(t)}{dt} = \tilde{s} + \frac{\tilde{\rho} \hat{T}(t) \hat{I}(t)}{\tilde{\alpha} + \hat{T}(t)} - \tilde{d}_1 \hat{I}(t) - \tilde{c}_1 \hat{T}(t) \hat{I}(t),$$

где  $\hat{N}(t)$ ,  $\hat{T}(t)$  и  $\hat{I}(t)$  – оценки численности нормальных, раковых и иммунных клеточных популяций. Предварительно преобразуем модель следующим образом:  $\hat{x}_1 = \hat{N} - 1/\tilde{b}_2$ ,  $\hat{x}_2 = \hat{T}$ ,  $\hat{x}_3 = \hat{I} - \tilde{s}/\tilde{d}_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_1}{dt} &= -\tilde{r}_2\hat{x}_1(1 + \tilde{b}_2\hat{x}_1) - \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{b}_2}\hat{x}_2 - \tilde{c}_4\hat{x}_1\hat{x}_2, \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} &= \tilde{r}_1\hat{x}_2(1 - \tilde{b}_1\hat{x}_2) - \left(\frac{\tilde{s}\tilde{c}_2}{\tilde{d}_1} + \frac{\tilde{c}_3}{\tilde{b}_2}\right)\hat{x}_2 - \\ &\quad - \tilde{c}_3\hat{x}_1\hat{x}_2 - \tilde{c}_2\hat{x}_2\hat{x}_3, \\ \frac{d\hat{x}_3}{dt} &= -\frac{\tilde{c}_2\tilde{s}}{\tilde{d}_1}\hat{x}_2 - \tilde{d}_1\hat{x}_3 + \tilde{\rho}\frac{\tilde{s}}{\tilde{d}_1}\frac{\hat{x}_2}{(\tilde{\alpha} + \hat{x}_2)} + \\ &\quad + \tilde{\rho}\frac{\hat{x}_2\hat{x}_3}{\tilde{\alpha} + \hat{x}_2} - \tilde{c}_1\hat{x}_2\hat{x}_3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В соответствии с методом расширенной линеаризации (SDC-линеаризации, от англ. *State Dependent Coefficient*) [9] уравнения (2.3) в векторной форме представляются как

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A(\hat{x}(t), \alpha(t))\hat{x}(t) + k(t)\varepsilon(t + \xi),$$

$$\hat{x}(0) = M[\hat{x}(0)]$$

где матрица  $A(\hat{x}(t), \alpha(t))$  имеет вид

$$A(\hat{x}(t), \tilde{\alpha}(t)) = \begin{pmatrix} -\tilde{r}_2(1 + \tilde{b}_2\hat{x}_1) & -\frac{\tilde{c}_4}{\tilde{b}_2} - \tilde{c}_4\hat{x}_1 & 0 \\ -\tilde{c}_3\hat{x}_2 & \tilde{r}_1(1 - \tilde{b}_1\hat{x}_2) - \left(\frac{\tilde{s}\tilde{c}_2}{\tilde{d}_1} + \frac{\tilde{c}_3}{\tilde{b}_2}\right) & -\tilde{c}_2\hat{x}_2 \\ 0 & -\frac{\tilde{c}_2\tilde{s}}{\tilde{d}_1} + \tilde{\rho}\frac{\tilde{s}}{\tilde{d}_1}\frac{\hat{x}_2}{(\tilde{\alpha} + \hat{x}_2)} + \tilde{\rho}\frac{\hat{x}_3}{\tilde{\alpha} + \hat{x}_2} - \tilde{c}_1\hat{x}_3 & -\tilde{d}_1 \end{pmatrix}.$$

Будем осуществлять процедуру параметрической идентификации в соответствии с алгоритмом (1.15), в котором вектор  $\alpha(t) = (\tilde{c}_1(t) \ \tilde{c}_2(t) \ \tilde{c}_3(t) \ \tilde{r}_1(t) \ \tilde{r}_2(t))^T$ .

На рис. 2.1 и 2.2 показана зависимость функционала качества (1.10) при различных значениях оцениваемых параметров.

Алгоритм (1.15) для рассматриваемой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\alpha(t) &= -M \left[ \left\{ \frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial \alpha} \right\}^T \varepsilon(t + \xi) \right], \\ \frac{d}{dt}k(t) &= -M \left[ \left\{ \frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial k} \right\}^T \varepsilon(t + \xi) \right], \quad \xi > \gamma, \\ \alpha(t_0) &= \alpha_0, \quad k(t_0) = k_0, \end{aligned}$$

где  $\alpha(t) = (\tilde{c}_1(t) \ \tilde{c}_2(t) \ \tilde{c}_3(t) \ \tilde{r}_1(t) \ \tilde{r}_2(t))^T$ .

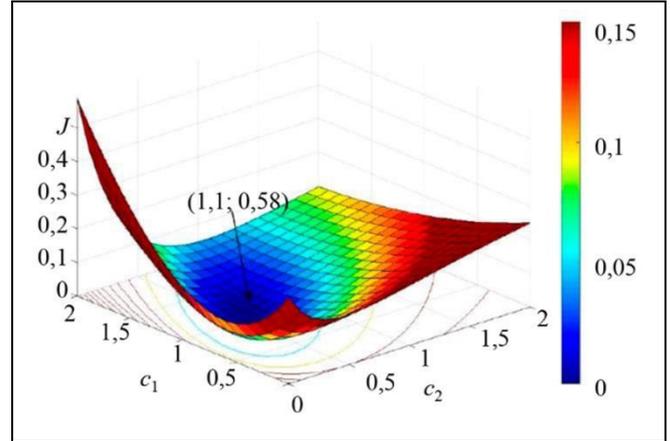


Рис. 2.1. График зависимости значения функционала от величины оценок параметров  $\tilde{c}_1$  и  $\tilde{c}_2$  при фиксированных значениях параметров  $\tilde{r}_1$  и  $\tilde{r}_2$  ( $\tilde{c}_1 = 1, 1$ ;  $\tilde{c}_2 = 0, 58$ )

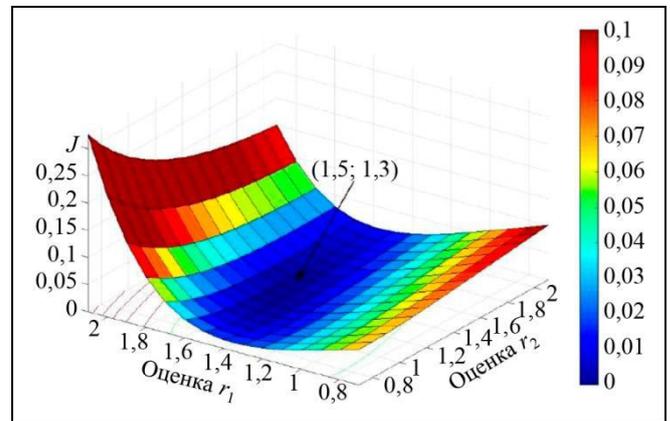


Рис. 2.2. График зависимости значения функционала от величины оценок параметров  $\tilde{r}_1$  и  $\tilde{r}_2$  при фиксированных значениях параметров  $\tilde{c}_1$  и  $\tilde{c}_2$  ( $\tilde{r}_1 = 1, 5$ ;  $\tilde{r}_2 = 1, 3$ )

$$\text{Функции чувствительности } \zeta_a = \left\{ \frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial \alpha} \right\}^T \in R^{5 \times 3},$$

$$\zeta = \left\{ \frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial k} \right\}^T \in R^{3 \times 3} \text{ рассчитываются по формулам}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\zeta_j(t) &= \frac{\partial A(\hat{x}(t), \alpha(t))}{\partial \alpha_j} \hat{x}(t) + \\ &\quad + [A(\hat{x}(t), \alpha(t)) - k(t)C] \left\{ \frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial \alpha_j} \right\}^T, \quad j = 1, \dots, 5, \\ \frac{d}{dt}\zeta_l(t) &= \frac{\partial A(\hat{x}(t), \alpha(t))}{\partial k_l} \hat{x}(t) + \\ &\quad + [A(\hat{x}(t), \alpha(t)) - k(t)C] \left\{ \frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial k_l} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial k(t)}{\partial k_l} \right\}^T \varepsilon(t), \\ &\quad l = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$



На рис. 2.3 представлены графики настраиваемых параметров модели при постоянных заданных значениях параметров объекта (см. табл. 2.2).

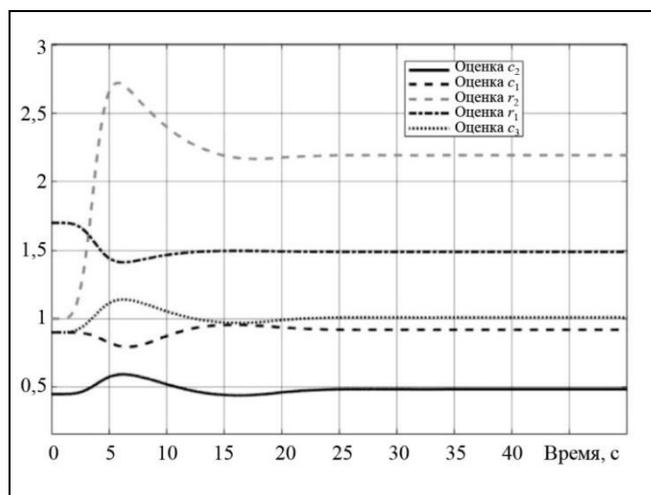


Рис. 2.3. Графики настраиваемых параметров модели  $(\hat{c}_1(t) \ \hat{c}_2(t) \ \hat{c}_3(t) \ \hat{r}_1(t) \ \hat{r}_2(t))^T$

Основная работа алгоритма идентификации происходит на временном отрезке, равном длительности переходного процесса по состоянию, что хорошо проиллюстрировано на рис. 2.4.

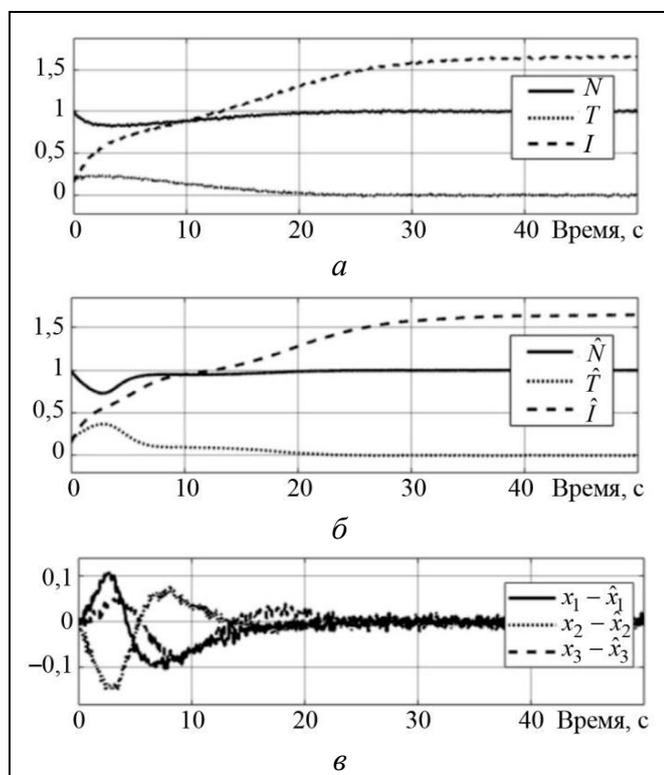


Рис. 2.4. Работа алгоритмов идентификации и переходные процессы по состоянию: а – параметры состояния, б – оценки параметров, в – ошибки оценивания

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен метод идентификации нестационарного объекта с использованием модели с параметрической оптимизацией. Проблема рассматривается в Крейн-пространстве с применением для построения алгоритма параметрической оптимизации модели свойства проекции линейного преобразования выхода модели и ошибки идентификации. Показано условие успешного отслеживания алгоритмом оптимизации параметров модели изменений нестационарных параметров объекта. Представлена экспериментальная проверка эффективности решения задачи идентификации с привлечением математической модели роста раковых клеток.

Отметим, что представленные в статье алгоритмы параметрической оптимизации нелинейной системы в задаче идентификации могут быть использованы в задачах управления неопределенными объектами различной физической природы, например, техническими системами электротехники, машиностроения, подвижными системами, а также нетехническими системами из таких различных областей, как биология, медицина, химия, физика, экономика и многие другие, которые могут быть описаны соответствующими математическими моделями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Wensing, P.M., Kim, S., and Slotine, J.E. Linear Matrix Inequalities for Physically Consistent Inertial Parameter Identification: A Statistical Perspective on the Mass Distribution // IEEE Robotics and Automation Letters. – 2017. – Vol. 3, no. 1. – P. 60–67.
2. Brunton, S.L., Proctor, J.L., and Kutz, J.N. Discovering Governing Equations from Data by Sparse Identification of Nonlinear Dynamical Systems // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2016. – Vol. 113, no. 15. – P. 3932–3937.
3. Tabo, Z., Kalinda, C., Breuer, L., and Albrecht, C. Adapting Strategies for Effective Schistosomiasis Prevention: A Mathematical Modeling Approach // Mathematics. – 2023. – Vol. 11, no. 12. – Art. no. 2609. – DOI: <https://doi.org/10.3390/math11122609>.
4. Wu, L., Liu, F., Gu, H., and Wang, P. Adaptive Finite-Time Control of Stochastic Genetic Regulatory Networks with Time-Varying Delays // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, no. 21. – Art. no. 4071. – DOI: <https://doi.org/10.3390/math10214071>.
5. Жирабок А. Н., Зуев А. В., Сергиенко О. Ю., Шумский А. Е. Идентификация дефектов в нелинейных динамических системах и их датчиках на основе скользящих наблюдателей // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 2. – С. 63–89. [Zhirabok, A.N., Shumsky, A.E., Zuev, A.V., Sergiyenko, O. Identification of Faults in Nonlinear Dynamical Systems and Their Sensors Based on Sliding Mode Observers // Automation and Remote Control. – 2022. – Vol. 83, no. 2. – P. 214–236.]

6. Бобцов А.А., Николаев Н.А., Оськина О.В., Низовцев С.И. Идентификация нестационарного параметра незашумленного синусоидального сигнала // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 7. – С. 137–151. [Bobtsov, A.A., Nikolaev, N.A., Oskina, O.V., Nizovtsev, S.I. Identification of Time-Varying Parameter of Noiseless Sinusoidal Signal // Automation and Remote Control. – 2022. – Vol. 83, no. 7. – P. 1123–1135.]
  7. Афанасьев В.Н., Каперко А.Ф., Кулагин В.П., Колюбин В.А. метод адаптивной фильтрации в задаче восстановления параметров космического излучения // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 3. – С. 15–33. [Afanas'ev, V.N., Kaperko, A.F., Kulagin, V.P., Kolyubin, V.A. Method of Adaptive filtering in the problem of restoring parameters of cosmic radiation. Automation and Remote Control. – 2017. – Vol. 78, no. 3. – P. 397–412.]
  8. Deng, X., Huang, Y., Xu, B., and Tao, L. Position and Attitude Tracking Finite-Time Adaptive Control for a VTOL Aircraft Using Global Fast Terminal Sliding Mode Control // Mathematics. – 2023. – Vol. 11, no. 12. – Art. no. 2732. – DOI: <https://doi.org/10.3390/math11122732>.
  9. Афанасьев В.Н. Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 224 с. [Afanas'ev, V.N. Upravlenie nelineinymi neopredelennymi dinamicheskimi ob'ektami. – М.: LENAND, 2015. – 224 s. (In Russian)]
  10. Isermann, R., Minchef, M. An Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Applications. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. – 705 p.
  11. Farza, M., Bouraoui, I., Menard, T., et al. Adaptive Observers for a Class of Uniformly Observable Systems with Nonlinear Parametrization and Sampled Outputs // Automatica. – 2014. – Vol. 50, no. 11. – P. 2951–2960.
  12. Летов А.М. Динамика полета и управление. – М: Наука, 1969. – 360 с. [Letov, A.M. Dinamika poleta i upravlenie. – М: Nauka, 1969. – 360 s.]
  13. Петров Б.Н., Крутько П.Д. Алгоритмическое конструирование оптимальных регуляторов при неполной информации о состоянии объекта и возмущений // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1972. – № 6. – С. 188–199. [Petrov, B.N., Krut'ko, P.D. Algoritmicheskoe konstruirovaniye optimal'nykh re-gulyatorov pri nepolnoj informacii o sostoyanii ob'ekta i vozmushchenij // Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. – 1972. – No. 6. – P. 188–199. (In Russian)]
  14. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. – М.: Наука, 1968. – 400 с. [Cypkin, Ya.Z. Adaptatsiya i obuchenie v avtomaticheskikh sistemah. – М.: Nauka, 1968. – 400 s. (In Russian)]
  15. Zhang, Q. Adaptive Observer for Multiple-Input-Multiple-Output (MIMO) Linear Time Varying Systems // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2002. – Vol. 47, no. 3. – P. 525–529.
  16. Toth, R., Willems, J., Heuberger, P., Van den Hof, P. The Behavioral Approach to Linear Parameter Varying Systems // IEEE Trans. Automatic Control. – 2011. – Vol. 56, no. 11. – P. 2499–2514.
  17. Hassibi, B., Sayed, A.H., and Kailath, T. Indefinite Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to  $H^2$  and  $H^\infty$  Theories. – Philadelphia: SIAM, 1999. – 555 p.
  18. Iohvidov, I.S., Krein, M.G., Longin, H. Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with Indefinite Metric. – Berlin: Academie Verlag, 1982.
  19. Лакеев А.В., Русанов В.А., Козырев В.В. К реализации непрерывных квазилинейных систем с автономными операторами в гильбертовом пространстве // Проблемы управления. – 2013. – № 1. – С. 7–18. [Lakeev, A.V., Rusanov, V.A., Kozerev, V.A. On Realization of Quasi-Linear Systems Described by Stationary Differential Equations in Hilbert Space // Control Sciences. – 2013. – No. 1. – P. 7–18. (In Russian)]
  20. de Pillis, L.G., Radunskaya, A.E. The Dynamics of an Optimally Controlled Tumor Model: A Case Study // Mathematical and Computer Modelling. – 2003. – Vol. 37, no. 11. – P. 1221–1244.
  21. Itik, M., Salamci, M.U., Banks, S.P. Optimal Control of Drug Therapy in Cancer Treatment // Nonlinear Analysis. – 2009. – Vol. 71. – P. 1473–1486.
  22. Kadiri, M., Louaked, M., and Trabelsi, S. Optimal Control and Parameters Identification for the Cahn–Hilliard Equations Modeling Tumor Growth // Mathematics. – 2023. – Vol. 11, no. 7. – Art. no. 1607. – DOI: <https://doi.org/10.3390/math11071607>.
  23. Batmani, Y., Khaloozadeh, H. Optimal Chemotherapy in Cancer Treatment: State Dependent Riccati Equation Control and Extended Kalman Filter // Optimal Control Applications and Methods. – 2012. – Vol. 34. – P. 562–577.
  24. Babaei, N., Salamci, M.U. Personalized Drug Administration for Cancer Treatment Using Model Reference Adaptive Control // Journal of Theoretical Biology. – 2015. – Vol. 371. – P. 24–44.
  25. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. Монография. – М.: Наука, 1975. – 344 с. [Romanovskij, Yu.M., Stepanova, N.V., Chernavskij, D.S. Matematicheskoe modelirovaniye v biofizike. Monografiya. – М.: Nauka, 1975. – 344 s. (In Russian)]
- Статья представлена к публикации членом редколлегии  
Н.Н. Бахтмадзе.
- Поступила в редакцию 23.10.2022,  
после доработки 23.02.2023.  
Принята к публикации 14.03.2022.
- Афанасьев Валерий Николаевич** – д-р техн. наук, Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», ✉ [afanval@mail.ru](mailto:afanval@mail.ru), ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8979-2451>
- Фролова Наталья Алексеевна** – аспирант, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ✉ [matveeva.natalija@physics.msu.ru](mailto:matveeva.natalija@physics.msu.ru),
- © 2023 г. Афанасьев В.Н., Фролова Н.А.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



# PARAMETRIC OPTIMIZATION OF A NONLINEAR MODEL IN TUMOR CELL GROWTH IDENTIFICATION

V.N. Afanas'ev<sup>1</sup> and N.A. Frolova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics, Moscow, Russia,

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University

<sup>1</sup>✉ [afanval@mail.ru](mailto:afanval@mail.ru), <sup>2</sup>✉ [matveeva.natalija@physics.msu](mailto:matveeva.natalija@physics.msu)

**Abstract.** This paper presents an identification method for time-varying objects that involves mathematical models with parametric tuning. The deviation of object's transients and its mathematical model are estimated in terms of a quadratic performance criterion; the parametric tuning of the object model is a constrained optimization problem. The parametric optimization algorithm is developed using the vector projection property in a Krein space and the second Lyapunov method for a targeted change in the model parameters. The method is applied to estimate parameters in a tumor cell growth model. The nonlinear model describes the relationship between the populations of normal, immune, and tumor cells that can be measured in the presence of Gaussian white noise. Numerical simulation illustrates the design procedure and shows the effectiveness of this method.

**Keywords:** parametric optimization, identification, cost function, nonlinear differential equations, Lyapunov method, Wiener–Hopf equation.

# МОДЕЛИ СОВМЕСТНОЙ ДИНАМИКИ МНЕНИЙ И ДЕЙСТВИЙ В ОНЛАЙНОВЫХ СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ.

## Ч. 3. Бинарные модели

Д.А. Губанов, Д.А. Новиков

**Аннотация.** В серии статей исследуется подход к идентификации и анализу математических моделей совместной динамики мнений и действий агентов на примере реальных данных онлайн-социальной сети ВКонтакте. Данная работа завершает исследование, в ней представлены результаты идентификации и анализа бинарных моделей (пороговых моделей и моделей со скрытыми переменными), описывающих изменение мнений и действий агентов в социальной сети. На основе бинарных моделей проведена оценка влияния различных факторов на мнения и действия агентов: общественного мнения, собственных мнений и действий агента, мнений и действий социального окружения, а также механизмов доверия агента к источникам информации и содержанию информации. Проведено сравнение линейных и бинарных моделей, представлены качественные выводы по итогам результатов исследования.

**Ключевые слова:** социальная сеть, агент, мнение, действие, социальное влияние, когнитивный диссонанс, доверие к информации.

### ВВЕДЕНИЕ

В первой части настоящего исследования [1] был проведен первичный анализ совместной динамики мнений и действий<sup>1</sup> на примере отношения к ношению медицинских масок в онлайн-социальной сети ВКонтакте в первый год пандемии COVID-19 – с марта 2020 г. по февраль 2021 г. включительно. Во второй части исследования [2] на основе полученных результатов была проведена идентификация формальных линейных моделей динамики мнений и действий, частично были получены ответы на следующие вопросы:

1) Насколько согласованы между собой мнения агентов и их действия?

2) Изменяют ли со временем агенты свои мнения и действия?

3) Кто эти (изменившие свои мнения и действия) агенты, отличаются ли они от других по своим социально-демографическим характеристикам?

<sup>1</sup> Мнением условно считалась оцениваемая автоматическим классификатором «тональность» комментария, написанного агентом; действием условно считалась тональность комментария, которому агент поставил лайк.

4) Какие модели лучше описывают динамику мнений и действий агентов – линейные, пороговые и т. п.?

5) Существенно ли влияние действий на мнения (эффект *когнитивного диссонанса*) и наоборот?

6) Под влиянием каких факторов происходит изменение мнений и действий агентов:

- его собственные предыдущие мнения или/и действия;

- социальное влияние:

- «общественное мнение» (усредненные доли тех или иных мнений и действий социальной сети в целом – так называемая «макро модель», в которой сеть условно рассматривается как один агент);

- мнения или/и действия окружения агента (агенты, связанные с ним отношением «дружбы») – усредненные и/или индивидуальные (так называемая «микро модель»);

- те или иные ненаблюдаемые (*латентные*) характеристики агента?

7) Зависит ли изменение мнения/действий агента от его доверия к источнику получаемой информации? А от содержания этой информации?



В данной работе будут даны ответы на вопросы 4–7 на основе бинарных моделей. Структура изложения следующая. В § 1 кратко описаны ключевые факторы для анализа и моделирования сетевых взаимодействий. В § 2 рассматриваются результаты идентификации бинарных микромоделей совместной динамики мнений и действий. В заключении представлены качественные выводы по всем частям проведенного исследования и обозначены перспективные направления дальнейших исследований.

## 1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ КЛЮЧЕВЫХ ФАКТОРОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА СЕТЕВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Кратко рассмотрим введенную ранее [1] формализацию факторов (согласно изложенному в работах [3, 4]), необходимых для анализа и идентификации моделей совместной динамики мнений и действий. Участниками сети являются *агенты* из множества  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , которые совершают акты<sup>2</sup> того или иного вида из фиксированного множества  $K = \{1, 2, \dots, k\}$  в те или иные моменты времени  $t$  из интервала  $T$ . Ограничимся рассмотрением следующих видов актов ( $K = \{1, 2\}$ ):

- публикация комментария к посту или комментарию,
- постановка лайка комментарию.

Обозначим множество актов через  $\Delta$ <sup>3</sup>. Каждый акт  $a \in \Delta$  характеризуется тремя параметрами – совершившим его агентом, видом акта и моментом времени, в который акт был совершен. Введем характеризующие акт функции:

- $f_a: \Delta \rightarrow N$ , которая каждому акту  $a \in \Delta$  ставит в соответствие совершившего его агента  $i \in N$ ,
- $f_t: \Delta \rightarrow T$ , которая каждому акту  $a \in \Delta$  ставит в соответствие время его совершения  $t \in T$ ,
- $f_k: \Delta \rightarrow K$ , которая каждому акту  $a \in \Delta$  ставит в соответствие его вид  $j \in K$ .

На множестве актов зададим бинарное отношение частичного порядка « $a$  является причиной  $b$ »:  $a \rightarrow b$ . Если  $a \rightarrow b$  и  $a \neq b$ , но при этом не существует такого  $c \in \Delta$ , что  $a \rightarrow c$  и  $c \rightarrow b$ , то  $a$  является *непосредственной причиной*  $b$ :  $a \downarrow b$ . Считаем, что

<sup>2</sup> Термин «действие», используемый в работе [4], здесь заменен на «акт» во избежание путаницы с действием в моделях совместной динамики мнений и действий.

<sup>3</sup> Множество релевантных ношению масок комментариев (см. § 2) и лайков к ним.

бинарное отношение  $a \rightarrow b$  выполнено в следующих случаях:

- $a$  – комментарий,  $b$  – поставленный ему лайк,
- $a$  – комментарий,  $b$  – комментарий к нему,
- $a$  и  $b$  совпадают.

Для каждого агента  $i \in N$  определим множество всех совершенных им актов  $\delta_i = \{a \in \Delta \mid f_a(a) = i\}$ , а также множество его друзей  $N_i \subseteq N$  (формальное отношение «дружбы» в онлайн-социальной сети предполагает, что агент может получать информацию о публикуемых друзьями комментариях, поставленных ими лайках и т. д.).

**Мнения и действия.** При рассмотрении моделей совместной динамики мнений и действий *мнением* агента будем условно считать отношение к ношению медицинских масок, выраженное в комментарии. Формально определим *мнение агента*, выраженное в комментарии  $b \in \Delta$  ( $f_k(b) = 1$ ), в трех вариантах:

- $r' \in \{0, 1, 2\}$ , где 0 – результат классификации «против масок» (или «←»), 1 – «за маски» (или «+»), 2 – «непонятно/нейтрально» (или «=»). Результат определяется на основании рассчитанного классификатором стохастического вектора  $(p_-, p_+, p_+)$ .

- $r'' = \frac{p_+}{p_+ + p_-} \in [0; 1]$  – уверенность в том, что комментарий отражает мнение «за ношение масок» (при этом для данного комментария  $r' = 0$  или  $r' = 1$ ).

- $r = \frac{p_+ - p_-}{p_+ + p_-} \in [-1; 1]$  (при этом либо  $r' = 0$ , либо  $r' = 1$ ), где  $r = 1$  означает сильную уверенность в том, что выражено мнение «за ношение масок», а  $r = -1$  означает сильную уверенность в том, что выражено мнение «против».

Будем считать *действием* лайк к некоторому комментарию; оценка лайка совпадает с оценкой комментария, к которому поставлен лайк:  $y' \in \{0, 1, 2\}$ ,  $y'' \in [0; 1]$  и  $y \in [-1; 1]$ . Например, для лайка  $a \in \Delta$   $y'(a) = r'(b)$ , где  $b$  – комментарий, к которому поставлен лайк (т. е.  $b \downarrow a$ ). Для упрощения записи примем соглашение:  $r'(a) = y'(a)$ ,  $r''(a) = y''(a)$ ,  $r(a) = y(a)$ . Считаем, что момент постановки лайка совпадает с моментом публикации комментария, которому поставлен лайк.

## 2. БИНАРНЫЕ МОДЕЛИ СОВМЕСТНОЙ ДИНАМИКИ МНЕНИЙ И ДЕЙСТВИЙ АГЕНТОВ

Напомним, что базовой для нашего исследования является математическая модель совместной динамики мнений и действий агентов, предложенная в работе [5]. Эта модель стала основой для построения более простых и идентифицируемых моделей, например для линейных моделей [2]. В линейных и бинарных микромоделях рассматривается динамика мнений и действий агента  $i \in N$ , который в течение интервала времени  $\tau$  совершает акты «за» и «против»:

- $\delta_i^\pm(\tau) = \{a \in \delta_i \mid f_i(a) \in \tau, r'(a) \in \{0,1\}\}$  – множество актов,
- $\delta_{i,1}^\pm(\tau) = \{a \in \delta_i^\pm(\tau) \mid f_k(a) = 1\}$  – множество комментариев,
- $\delta_{i,2}^\pm(\tau) = \{a \in \delta_i^\pm(\tau) \mid f_k(a) = 2\}$  – множество лайков.

На агента  $i$  оказывают воздействие следующие факторы.

*Воздействие всей сети:*

$$\circ \bar{r}_{-i}(\tau) = \frac{\sum_{a \in \Delta(\tau) \mid f_k(a)=1, r'(a) \in \{0,1\}} r(a)}{|\{a \in \Delta(\tau) \mid f_k(a) = 1, r'(a) \in \{0,1\}\}|} \in [-1; 1],$$

$$\circ \bar{y}_{-i}(\tau) = \frac{\sum_{a \in \Delta(\tau) \mid f_k(a)=2, r'(a) \in \{0,1\}} r(a)}{|\{a \in \Delta(\tau) \mid f_k(a) = 2, r'(a) \in \{0,1\}\}|} \in [-1; 1].$$

Сетевое воздействие является массовым/фоновым для агента: учитываются все мнения и действия сети безотносительно того, информирован о них агент или нет.

*Воздействие на агента его собственных действий и мнений:*

$$\circ \bar{r}_i(\tau) = \frac{\sum_{a \in \delta_{i,1}^\pm(\tau)} r(a)}{|\delta_{i,1}^\pm(\tau)|},$$

$$\circ \bar{y}_i(\tau) = \frac{\sum_{a \in \delta_{i,2}^\pm(\tau)} r(a)}{|\delta_{i,2}^\pm(\tau)|}.$$

Косвенное воздействие друзей на мнение/действие агента  $h \in [-1; 1]$ :

$$\circ \bar{r}_{N_i}(\tau) = \sum_{j \in N_i, \delta_{j,1}^\pm(\tau) \neq \emptyset} e_{ij} \frac{\sum_{a \in \delta_{j,1}^\pm(\tau)} E_i(h, r(a))r(a)}{|\delta_{j,1}^\pm(\tau)|},$$

$$\circ \bar{y}_{N_i}(\tau) = \sum_{j \in N_i, \delta_{j,2}^\pm(\tau) \neq \emptyset} e_{ij} \frac{\sum_{a \in \delta_{j,2}^\pm(\tau)} E_i(h, r(a))r(a)}{|\delta_{j,2}^\pm(\tau)|}.$$

где  $e_{ij} \in [0; 1]$  – доверие агента к другу  $j$ ,  $\sum_{j \in N_i} e_{ij} = 1$ ,

$E_i$  – функция доверия агента к информации (область значений  $[0; 1]$ ). Здесь оценивается воздействие на мнение (или на действие), высказанное агентом в начале интервала  $\tau$ .

В итоге изменение мнения агента  $i \in N$  между последовательными моментами его высказываний  $m-1$  и  $m$  (которые задают интервал времени  $\tau = [t_{m-1}; t_m]$ ) определяется воздействием сети ( $\bar{r}_{-i}^{m-1} = \bar{r}_{-i}(\tau)$ ,  $\bar{y}_{-i}^{m-1} = \bar{y}_{-i}(\tau)$ ), воздействием действий агента ( $\bar{y}_i^{m-1} = \bar{y}_i(\tau)$ ) и воздействием друзей ( $\bar{r}_{N_i}^{m-1} = \bar{r}_{N_i}(\tau)$ ,  $\bar{y}_{N_i}^{m-1} = \bar{y}_{N_i}(\tau)$ ). В свою очередь, изменение действия агента  $i \in N$  между последовательными моментами совершения действий  $l-1$  и  $l$  ( $\tau = [t_{l-1}; t_l]$ ) определяется воздействием сети ( $\bar{r}_{-i}^{l-1} = \bar{r}_{-i}(\tau)$ ,  $\bar{y}_{-i}^{l-1} = \bar{y}_{-i}(\tau)$ ), воздействием мнений агента ( $\bar{r}_i^{l-1} = \bar{r}_i(\tau)$ ) и воздействием друзей ( $\bar{r}_{N_i}^{l-1} = \bar{r}_{N_i}(\tau)$ ,  $\bar{y}_{N_i}^{l-1} = \bar{y}_{N_i}(\tau)$ ). Соответствующие бинарные микромодели совместной динамики мнений и действий будем строить для значимых агентов<sup>4</sup>.

### 2.1. Пороговые модели

Вторым «классическим» (помимо рассмотренных ранее линейных моделей) подходом к описанию динамики коллективного поведения являются *пороговые* микромодели, в которых агент выполняет определенное действие или соглашается с определенным мнением только тогда, когда социальное давление выше/ниже его индивидуального порога [6–13]. Пороговые модели отражают известные в социальной психологии эффекты, согласно которым склонность личности к конформному, пороговому поведению является предиктором его решений.

Будем считать, что агенты в социальной сети являются либо *конформистами*, либо *антиконформистами*, испытывающими социальное давление и  $u \in [-1; 1]$ . Условно, конформисты поддаются давлению, в то время как *антиконформисты* вы-

<sup>4</sup> Агенты, проявившие в сети минимально необходимую для моделирования активность. Критерии отбора значимых агентов приведены в первой части работы [1].



сказывают мнения и совершают действия, противоположные воздействию. Частным случаем базовой модели является пороговая модель, в которой мнение/действие конформиста определяется так:

$$r_i^m = \begin{cases} 1, & u_{-i}^{m-1} \geq \theta_{i,1}, \\ -1, & u_{-i}^{m-1} < \theta_{i,1}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $m=1, 2, \dots$ ,  $\theta_{i,1} \in [-1; 1 + \epsilon]$  – индивидуальный порог агента по мнению;

$$y_i^l = \begin{cases} 1, & u_{-i}^{l-1} \geq \theta_{i,2}, \\ -1, & u_{-i}^{l-1} < \theta_{i,2}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $l=1, 2, \dots$ ,  $\theta_{i,2} \in [-1; 1 + \epsilon]$  – индивидуальный порог агента по действию.

Мнение/действие антиконформиста:

$$r_i^m = \begin{cases} -1, & u_{-i}^{m-1} \geq \theta_{i,1}, \\ 1, & u_{-i}^{m-1} < \theta_{i,1}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $m=1, 2, \dots$ ,  $\theta_{i,1} \in [-1; 1 + \epsilon]$  – индивидуальный порог агента по мнению;

$$y_i^l = \begin{cases} -1, & u_{-i}^{l-1} \geq \theta_{i,2}, \\ 1, & u_{-i}^{l-1} < \theta_{i,2}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $l=1, 2, \dots$ ,  $\theta_{i,2} \in [-1; 1 + \epsilon]$  – индивидуальный порог агента по действию.

Качество моделей типа (1)–(4) будем оценивать при помощи меры *сбалансированной верности* (англ. *balanced accuracy*) [14], позволяющей учесть дисбаланс высказываемых агентами мнений (как правило, в высказываниях агента преобладает одно мнение):

$$\frac{1}{2} \left( \frac{TP}{TP + FN} + \frac{TN}{TN + FP} \right), \quad (5)$$

где  $TP$  – число верно определенных моделью агента мнений «за»;  $FN$  – число неверно определенных мнений «за»;  $TN$  – число верно определенных мнений «против»;  $FP$  – число неверно определенных мнений «против».

Далее рассмотрим все более сложные виды пороговых микромоделей:

(I) микромоделей, в которых изменение мнений/действий объясняется воздействием сети;

(II) унифицированные микромоделей, в которых изменение мнений/действий агента объясняется воздействием (одинаковым для всех агентов) на него его друзей;

(III) персонифицированные микромоделей, в которых изменение мнений/действий агента объясняется воздействием на него его друзей, а вид функций доверия для каждого агента свой.

### (I) Пороговые микромоделей с воздействием сети в целом

В такого рода моделях мнение (действие) агента в текущий момент времени зависит от воздействия на него всей сети в целом в предыдущий момент времени и индивидуального порога агента. Будем определять воздействие сети в двух вариантах:

- $u_{-i}^{m-1} = \bar{r}_{-i}^{m-1}$ ;
- $u_{-i}^{m-1} = \bar{y}_{-i}^{m-1}$ .

В данном классе моделей дополнительно рассмотрим случай, когда у агента имеются два порога – нижний и верхний:  $\check{\theta}_i, \hat{\theta}_i \in [-1; 1 + \epsilon]$ ,  $\check{\theta}_i \leq \hat{\theta}_i$ . Мнение конформиста в момент  $m$  определяется так (ср. с выражением (1)):

$$r_i^m = \begin{cases} 1, & u_{-i}^{m-1} \geq \hat{\theta}_{i,1}, \\ -1, & u_{-i}^{m-1} < \check{\theta}_{i,1}, \\ r_i^{m-1}, & u_{-i}^{m-1} \in [\check{\theta}_{i,1}; \hat{\theta}_{i,1}]. \end{cases} \quad (6)$$

Мнение антиконформиста определяется по формуле (ср. с выражением (3))

$$r_i^m = \begin{cases} -1, & u_{-i}^{m-1} \geq \hat{\theta}_{i,1}, \\ 1, & u_{-i}^{m-1} < \check{\theta}_{i,1}, \\ r_i^{m-1}, & u_{-i}^{m-1} \in [\check{\theta}_{i,1}; \hat{\theta}_{i,1}]. \end{cases} \quad (7)$$

Выражения динамики действий задаются сходным образом. Возможные варианты моделей динамики мнений и результаты идентификации их параметров представлены в табл. 1 и 2.

Из табл. 1 и 2 можно заключить следующее:

- в среднем качество моделей (6)–(7) является удовлетворительным;
- учет как конформистов, так и антиконформистов приводит к существенному улучшению среднего качества пороговых моделей;
- введение двух порогов приводит к не столь значимому улучшению качества.

### (II) Унифицированные пороговые микромоделей

В такого рода моделях будем оценивать изменение мнений и действий агента  $i$  в зависимости от воздействия друзей:

- $u_{-i}^{m-1} = \bar{r}_{N_i}^{m-1}$ ;
- $u_{-i}^{m-1} = \bar{y}_{N_i}^{m-1}$ .

Агенты не «различают» друзей (рассматривают их как одного мета-агента) и доверяют получаемой информации независимо от ее содержания.

Таблица 1

**Результаты идентификации пороговых моделей динамики мнений**

Виды агентов	Вид воздействия	Один порог	Два порога
Конформисты	Мнения сети	Качество – 0,73 (медиана 0,71)	Качество – 0,79 (медиана 0,78)
	Действия сети	Качество – 0,72 (медиана 0,68)	Качество – 0,78 (медиана 0,77)
Конформисты и антиконформисты	Мнения сети	Качество – 0,83 (медиана 0,83)	Качество – 0,86 (медиана 0,87)
	Действия сети	Качество – 0,83 (медиана 0,82)	Качество – 0,86 (медиана 0,88)

Таблица 2

**Результаты идентификации пороговых моделей динамики действий**

Виды агентов	Вид воздействия	Один порог	Два порога
Конформисты	Мнения сети	Качество – 0,73 (медиана 0,69)	Качество – 0,76 (медиана 0,73)
	Действия сети	Качество – 0,71 (медиана 0,70)	Качество – 0,75 (медиана 0,73)
Конформисты и антиконформисты	Мнения сети	Качество – 0,78 (медиана 0,75)	Качество – 0,81 (медиана 0,8)
	Действия сети	Качество – 0,76 (медиана 0,75)	Качество – 0,80 (медиана 0,78)

Неожиданно, что учет только воздействия друзей приводит к ухудшению качества по сравнению с моделями с макропеременными (табл. 3).

Таблица 3

**Результаты идентификации моделей динамики**

Виды агентов	Вид воздействия	Модели динамики мнений	Модели динамики действий
Конформисты и антиконформисты	Мнения друзей	Качество – 0,66 (медиана 0,61)	Качество – 0,66 (медиана 0,62)
	Действия друзей	Качество – 0,70 (медиана 0,67)	Качество – 0,68 (медиана 0,65)

**(III) Персонализованные пороговые микромодели**

В таких моделях для каждого агента подбирается наилучшая конфигурация гиперпараметров пороговой модели: вид функции доверия к информации и вид функции доверия к друзьям.

В качестве типовых, как и ранее, рассматриваются следующие виды функций доверия к информации  $E(\cdot)$ :  $E_C(h, g)$  (доверчивые агенты),  $E_e^+(h, g)$  (агенты-консерваторы) и  $E_e^-(h, g)$  (агенты-новаторы, см. вторую часть статьи [2]). В качестве типовых функций доверия к друзьям  $e(\cdot)$  рассматривается «не дифференцирующая» функция (агент рассматривает друзей как одного мета-агента), а также функции, в которых доверие пропорционально: единице; числу друзей друга; числу общих друзей с другом; единице (если друг активен, т. е. высказывает мнения и/или совершает действия); числу друзей друга (если друг активен); числу общих друзей с другом (если друг активен); активности друга по комментариям, активности друга по лайкам, популярности друга.

Персонализованный учет воздействия друзей приводит к улучшению качества в среднем (табл. 4), но все же не превосходит качество моделей с макропеременными (т. е. моделей с воздействием сети).

Таблица 4

**Результаты идентификации моделей динамики**

Виды агентов	Вид воздействия	Модели динамики мнений	Модели динамики действий
Конформисты и антиконформисты	Мнения друзей	Качество – 0,69 (медиана 0,62)	Качество – 0,72 (медиана 0,68)
	Действия друзей	Качество – 0,75 (медиана 0,70)	Качество – 0,76 (медиана 0,75)

*Предпочтительность вида функции доверия к информации.* Если рассмотреть модели, в которых агент испытывает влияние мнений соседей, то оказывается, что для большей части агентов не существенен вид функции доверия к информации. «Чистыми» новаторами являются 12 % агентов в случае моделей динамики мнений и 27 % агентов в случае моделей динамики действий. Чистыми консерваторами являются 4 % агентов в случае моделей динамики мнений и 10 % агентов в случае моделей динамики действий. «Чистые» доверчивые агенты отсутствуют (рис. 1).



Если рассмотреть модели, в которых агент испытывает влияние действий соседей, то вид функции доверия к информации не существен для 44 % агентов в случае моделей динамики мнений и для 39 % агентов в случае моделей динамики действий (рис. 2). «Чистыми» новаторами являются

14 % агентов в случае моделей динамики мнений и 26 % агентов в случае моделей динамики действий. Чистыми консерваторами являются 10 % агентов в случае моделей динамики мнений и 24 % агентов в случае моделей динамики действий. «Чистые» доверчивые агенты отсутствуют.

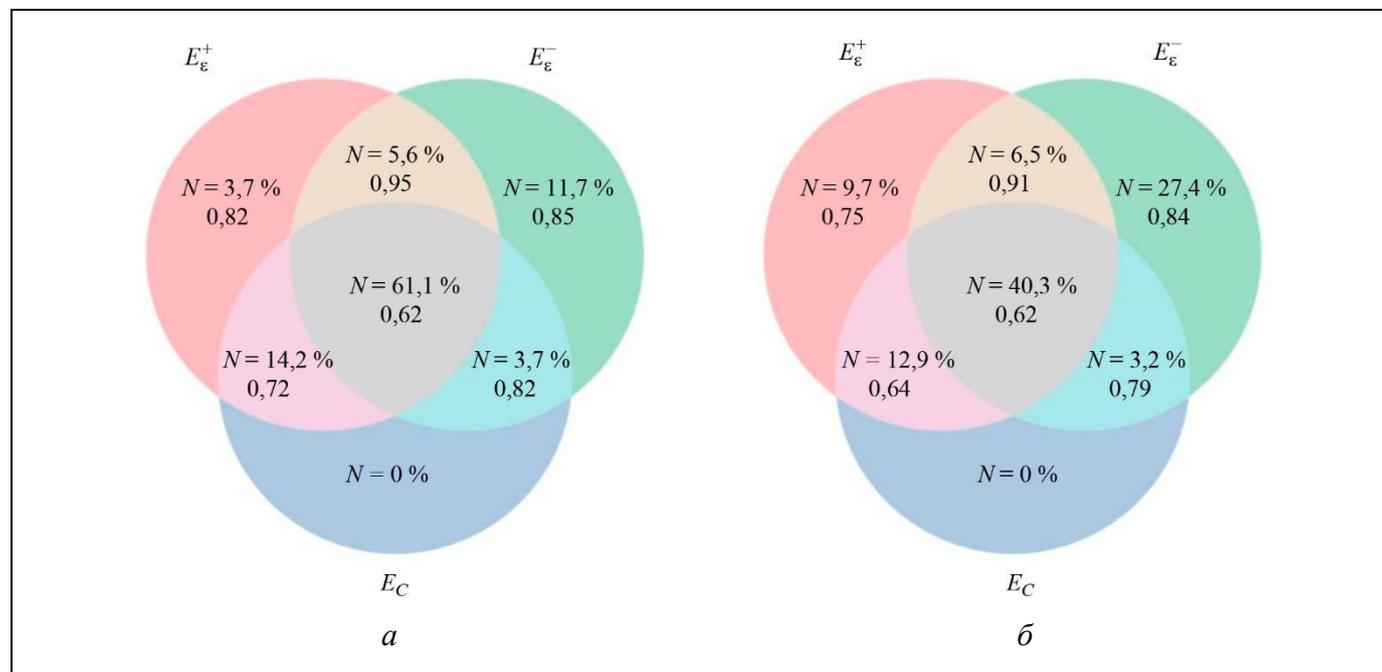


Рис. 1. Диаграмма Эйлера – Венна предпочтительности видов функций доверия к информации в случае воздействия мнений со стороны друзей: *a* – для моделей динамики мнений, *б* – для моделей динамики действий

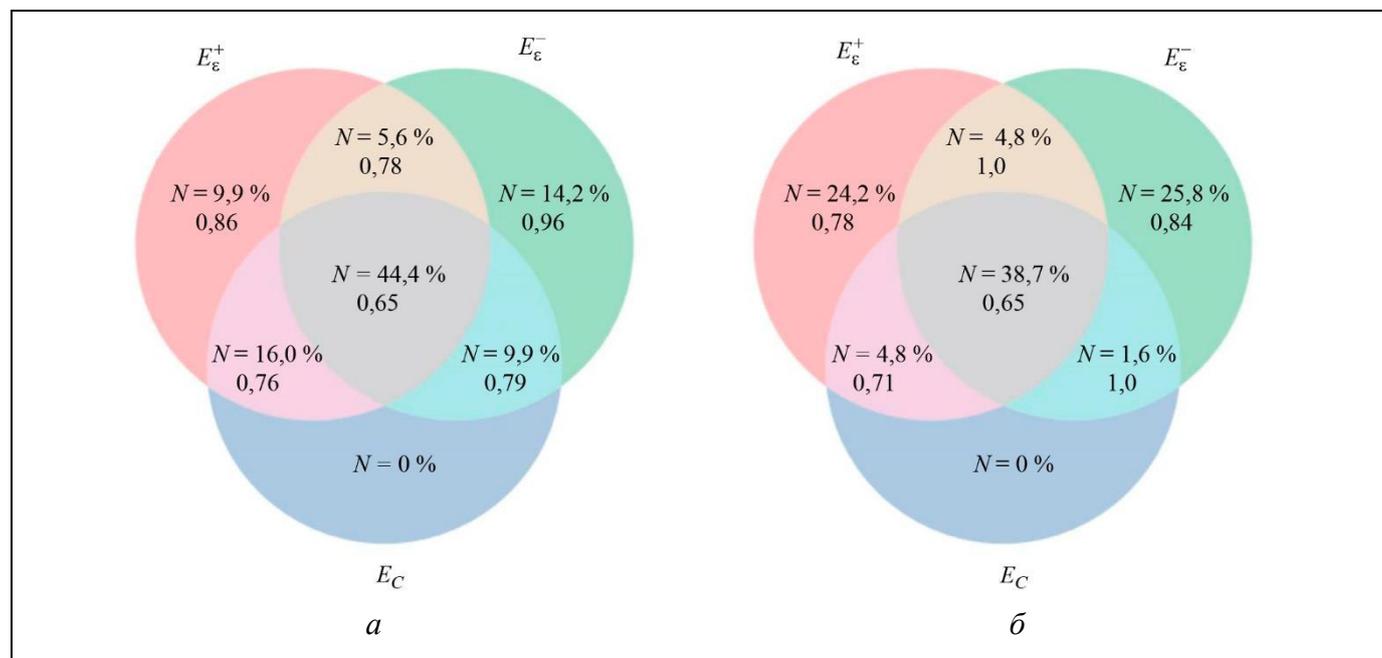


Рис. 2. Диаграмма Эйлера – Венна предпочтительности видов функций доверия к информации в случае влияния действий со стороны друзей: *a* – для моделей динамики мнений, *б* – для моделей динамики действий

Предпочтительность вида функции доверия к друзьям. В целом можно констатировать, что для агентов не существенен вид функции доверия к друзьям, также имеется значимая доля тех агентов, для которых выбор доверия к друзьям как к мета-агенту или выбор одинакового доверия к друзьям дает одно и то же значение качества (рис. 3 и 4).

## 2.2. Сравнение линейных и пороговых моделей

Для ответа на четвертый вопрос, сформулированный во введении, – сравнения линейных и пороговых моделей – необходимо использовать один и тот же критерий качества. В пороговых моделях рассматриваются дискретные мнения/действия

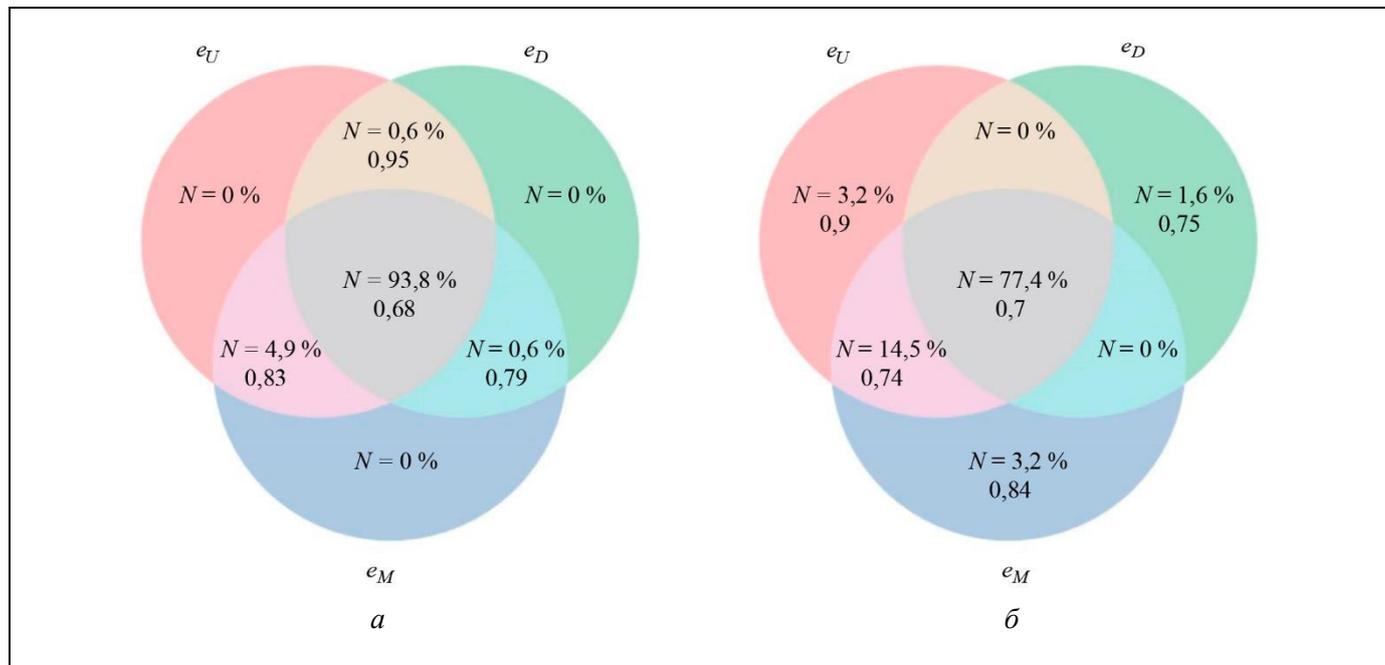


Рис. 3. Диаграмма Эйлера – Венна предпочтительности видов функций доверия к друзьям в случае воздействия мнений со стороны друзей: а – для моделей динамики мнений, б – для моделей динамики действий

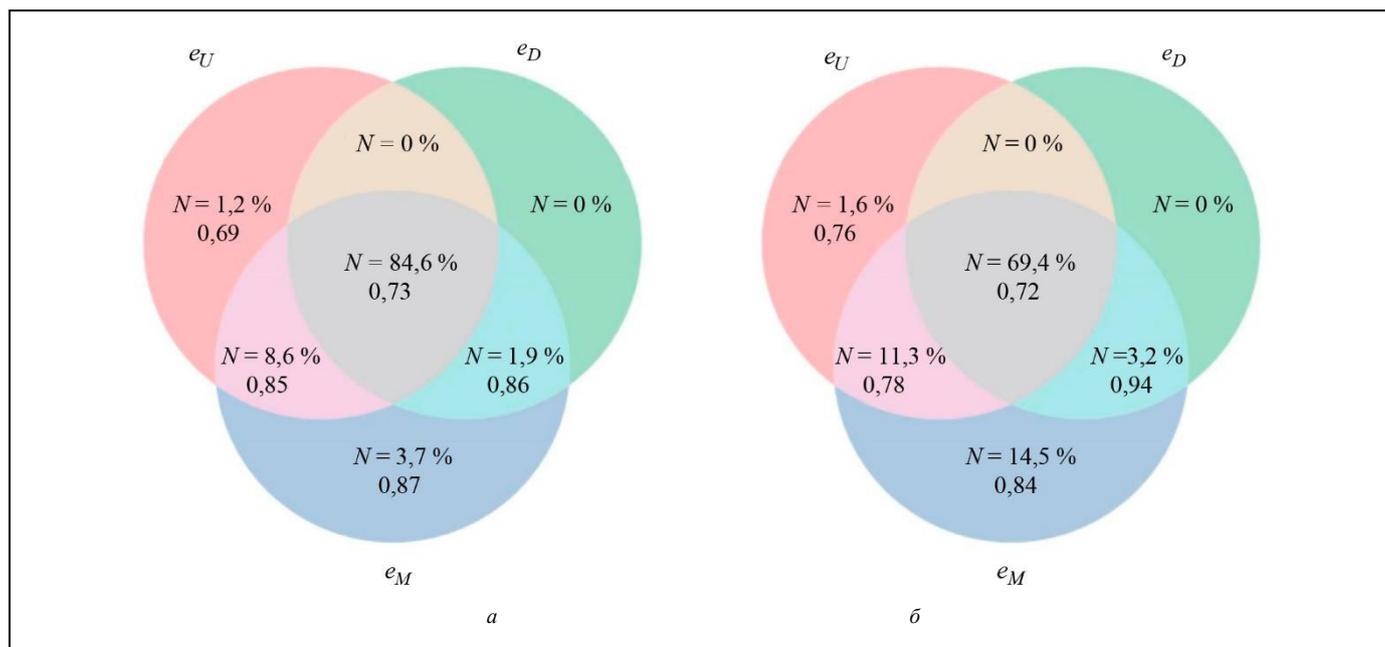


Рис. 4. Диаграмма Эйлера – Венна предпочтительности видов функций доверия к друзьям в случае влияния действий со стороны друзей: а – для моделей динамики мнений, б – для моделей динамики действий



агентов, поэтому в линейных моделях для того, чтобы рассчитать качество (5), необходимо предварительно провести дискретизацию результатов прогноза: будем считать, что если прогноз больше нуля, то его дискретное значение 1, иначе –1.

Качество линейных и пороговых моделей (усредненное по агентам) приведено в табл. 5.

Таблица 5

### Сравнение качества линейных и пороговых моделей

Класс моделей	Вид моделей	Качество моделей	
		Модели мнений	Модели действий
Линейные модели	Воздействие сети	0,62	0,58
	Унифицированные	0,70	0,62
	Персонафицированные	0,80	0,77
Пороговые модели	Воздействие сети	0,78	0,76
	Унифицированные	0,70	0,68
	Персонафицированные	0,75	0,76

**Примечание.** В табл. 5 приводятся наилучшие результаты пороговых моделей. Например, если результаты унифицированных моделей с влиянием действий друзей лучше результатов унифицированных моделей с воздействием мнений друзей, то указываются результаты первых моделей.

Следует учесть, что в линейных моделях используется полный набор объясняющих переменных, в то время как в пороговых моделях используется только одна из следующих объясняющих переменных: действия сети, мнения сети, действия друзей, мнения друзей. Несмотря на это, пороговые модели показывают сопоставимое качество, а в случае пороговых моделей с воздействием сети – существенно лучшее.

### 2.3. Модели со скрытыми состояниями и наблюдаемыми действиями

Альтернативой использованному ранее разделению мнений (комментарии) и действий (лайки) является введение скрытых переменных (мнений) и их идентификация по наблюдаемым «действиям» – комментариям и лайкам – в рамках тех или иных скрытых марковских моделей, байесовских сетей и т. п. (см. работы [15, 16]).

Рассмотрим модель, в которой скрытой (латентной) переменной агента является его *состоя-*

*ние*, принимающее в момент времени  $t$  значение  $\theta_t \in [0; 1]$ . Предположим, что состояние не наблюдается непосредственно, но определяет бинарные наблюдаемые «действия» агента (тональности его комментариев и тех комментариев, которым он ставит лайки)  $x_t \in \{0; 1\}$  следующим вероятностным образом: в каждом периоде, в котором агент осуществляет «действие», это «действие» независимо с вероятностью  $\theta_t$  равно «1» («ЗА» ношение масок), а с вероятностью  $1 - \theta_t$  «действие» агента равно «0» («ПРОТИВ» ношения масок). То есть «действие» является случайной величиной, описываемой распределением Бернулли с плотностью

$$p(x, \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}. \quad (8)$$

Если имеется вектор результатов наблюдений «действий»  $x = (x_1, x_2, \dots, x_T)$  за  $T$  периодов времени, наблюдаемых последовательно, то оптимальной (по критерию максимального правдоподобия) текущей оценкой состояния будет

$$\theta(t) = \frac{1}{t} \sum_{\tau=1}^t x_{\tau}.$$

Если известно, что состояние агента изменилось однократно (и известны начальное значение  $\theta^1$  и конечное  $\theta^2$ ), то апостериорной оценкой момента разладки  $t_p$  методом кумулятивных сумм (см. выражение (2.3.3) в работе [17]) будет

$$t_p = \inf \left\{ t : S_{t-1} \geq S_{\tau}, \tau = \overline{2, T} \right\},$$

где

$$S_t = t \ln \frac{1 - \theta^1}{1 - \theta^2} + \sum_{\tau=1}^t x_{\tau} \ln \frac{\theta^1 (1 - \theta^2)}{\theta^2 (1 - \theta^1)}.$$

Если известно, что состояние агента изменилось однократно, но начальное и конечное значения неизвестны, то апостериорной оценкой момента разладки будет [18]

$$t_p = \arg \max_{t=1, T-1} d(x, t), \quad (9)$$

$$\text{где } d(x, t) = t(T-t) \left[ \frac{1}{t} \sum_{\tau=1}^t x_{\tau} - \frac{1}{T-t} \sum_{\tau=t+1}^T x_{\tau} \right]^2.$$

В случае, когда однократность возможной разладки не может быть обоснована, можно использовать оценки латентных переменных методом скользящего среднего:

$$\theta_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\tau=t-\Delta}^t x_{\tau},$$

подбирая «окно»  $\Delta$  в зависимости от имеющихся экспериментальных данных.

Перейдем к идентификации скрытых переменных (состояний агентов) на основе имеющейся информации об их «действиях» в социальной сети. При помощи процедуры (9) можно найти момент однократной разладки для последовательности «действий» агента сети. Будем рассматривать только таких агентов, которые совершили не менее десяти «действий» «0» или «1», при этом как минимум одно «действие» «1» и одно «действие» «0». Всего таких оказалось около 2 тыс. агентов (4 % от общего числа агентов, совершивших действия «1» или «0»). Для каждого агента определим момент разладки  $t_p$  и соответствующие оценки  $\theta^1$  и  $\theta^2$ . Найдем величины  $D = \max_{t=1, T-1} d(x, t)$  и  $\tilde{D} = D/T^2$ . Для оценки качества обнаружения момента разладки будем использовать величину  $\tilde{D}$  и величину изменения максимального правдоподобия в случае учета однократной разладки:

$$L_+ = \max_{t=1, T-1} \left( \max_{\theta} L(x_{1:t}, \theta) + \max_{\theta} L(x_{t+1:T}, \theta) \right) - \max_{\theta} L(x_{1:T}, \theta),$$

где  $L(x_{a,b}, \theta) = \sum_{\tau=a}^b [x_{\tau} \ln(\theta) + (1-x_{\tau}) \ln(1-\theta)]$  – логарифмическая функция правдоподобия на интервале  $a, b$ .

Получены следующие результаты. Распределение нормированных моментов разладки приведено на рис. 5 (момент нормируется на  $T$ ). Видно, что во многих случаях момент разладки смещен к началу активности агентов.

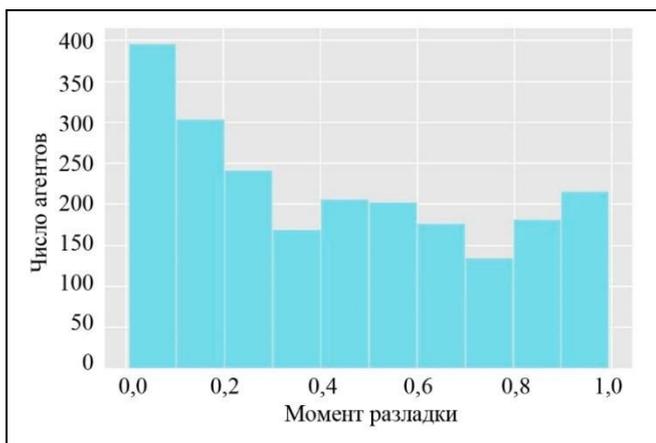


Рис. 5. Распределение моментов разладки

На рис. 6 приведена гистограмма распределения величины различий между  $\theta^1$  и  $\theta^2$ . Для 18 % пользователей «скрытое» состояние изменилось не

слишком существенно (не более чем на 0,2), для половины – как минимум на 0,5. Таким образом, состояние основной массы пользователей претерпевает существенное изменение (но, конечно, сам момент разладки должен «осмысленно» разделять последовательность «действий» каждого агента).

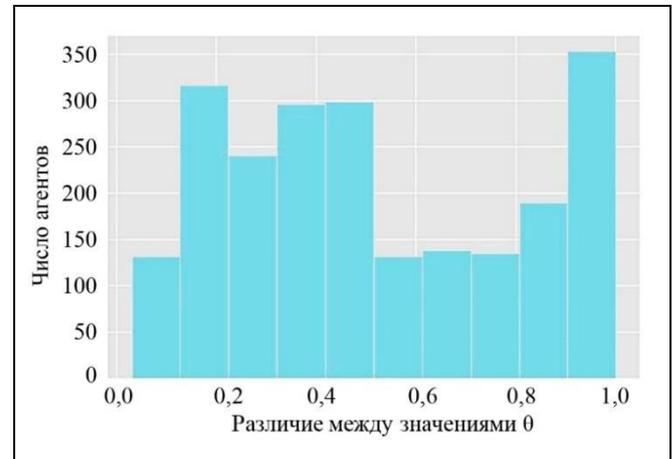


Рис. 6. Распределение величины  $|\theta^1 - \theta^2|$

На рис. 7 приведена гистограмма распределения величины  $L_+$ . Для четверти агентов из рассматриваемого множества величина улучшения правдоподобия составляет не меньше 3,25.

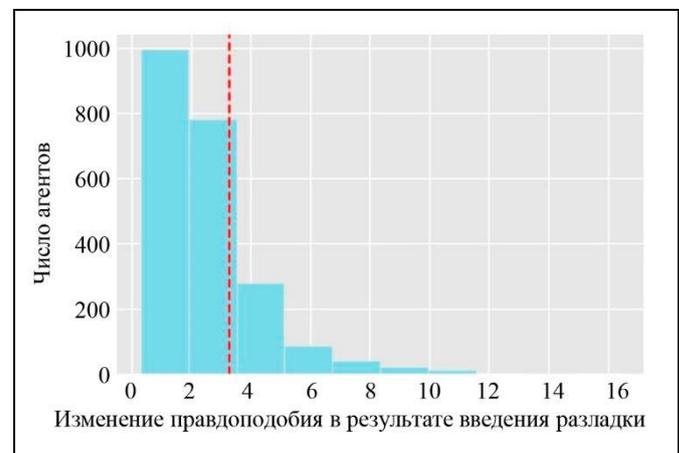


Рис. 7. Распределение величины изменения правдоподобия в результате введения разладки

На рис. 8 приведена гистограмма распределения величины  $\tilde{D}$ . Для четверти агентов величина  $\tilde{D}$  не меньше 0,06, это значение можно использовать в качестве порога для отсеивания «плохих» случаев.

Величины  $L_+$  и  $\tilde{D}$  хорошо коррелируют между собой, значение корреляции Спирмена для них равно 0,64. Кроме того, неплохо коррелируют

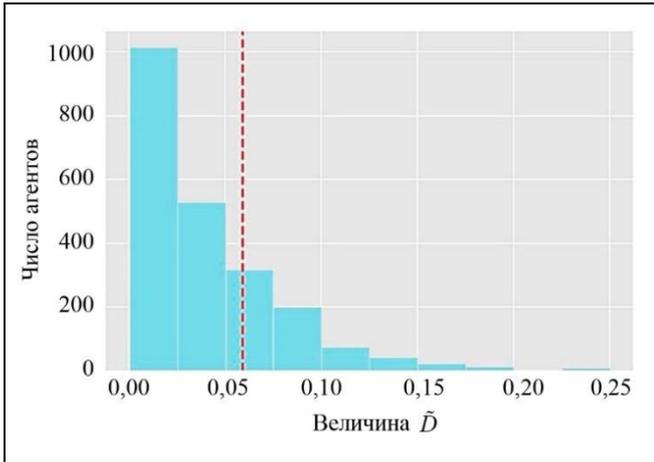


Рис. 8. Распределение величины  $\tilde{D}$

между собой величины  $|\theta^1 - \theta^2|$  и  $L_+$  (корреляция 0,65), а также  $|\theta^1 - \theta^2|$  и  $\tilde{D}$  (корреляция 0,83). В дальнейшем для оценки качества разладки будем использовать главным образом величину  $L_+$ .

На рис. 9 приведена диаграмма рассеяния или, что точнее, тепловая карта идентифицированных скрытых параметров агентов сети (до и после разладки).

Диагональ диаграммы является «пустой», т. е. агенты изменяют свое состояние.

На рис. 10, а в качестве примера приведен временной ряд «действий» агента, для которого определено значение  $L_+ = 11,09$  (улучшение правдоподобия, полученное путем введения разладки). Значения «0» и «1» показаны крупными точками, момент разладки обозначен штриховой красной линией, слева и справа от момента разладки приведены найденные значения скрытого состояния агента. На рис. 10, б приведен график функции агента  $d(t)$ , а также величина  $D$  (максимум функции) и  $\tilde{D}$  (нормированный максимум функции).

Метод выявления разладки (9) работает довольно хорошо для однородных последовательностей (в которых наблюдается относительно четкое переключение с «0» на «1» и наоборот), но хуже

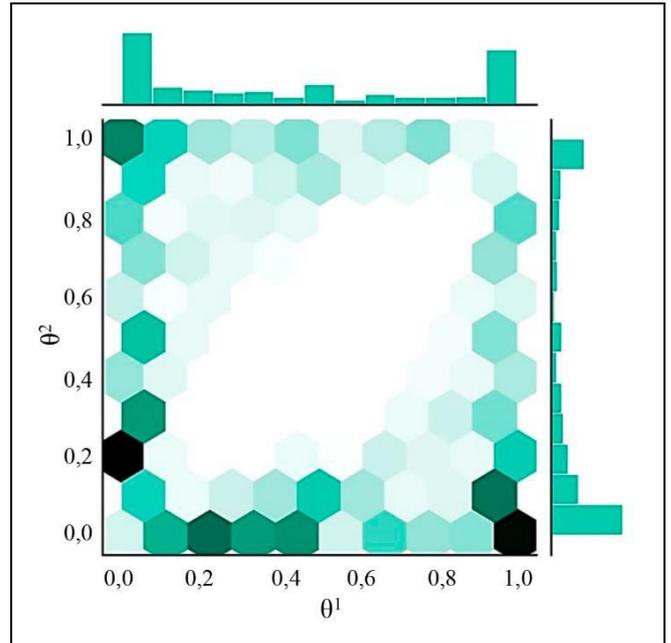


Рис. 9. Тепловая карта параметров агента  $\theta^1$  и  $\theta^2$  (скрытого состояния до и после разладки). Чем темнее цвет шестиугольника, тем больше в нем агентов

для последовательностей, в которых  $\theta^1$  и  $\theta^2$  близки или «действия» «0» и «1» чередуются. Поэтому для выявления агентов с однократной разладкой сформируем следующие эвристические критерии:

- момент разладки в последовательности  $1 < t_p < T - 1$ ,
- последовательность содержит как минимум два «действия» «ЗА» и два «действия» «ПРОТИВ»,
- дисперсия величины  $\theta_{\Delta=2}(t)$  и до разладки, и после нее не должна превышать 0,12,
- изменение оценки состояния  $\theta$  должно быть не меньше 0,1,
- изменение правдоподобия  $L_+ > 2,86$ .

Пороговые значения критериев были найдены в результате экспертной проверки последовательностей агентов, упорядоченных по ухудшению значения критерия. Всего найдено 320 агентов с однократной разладкой.

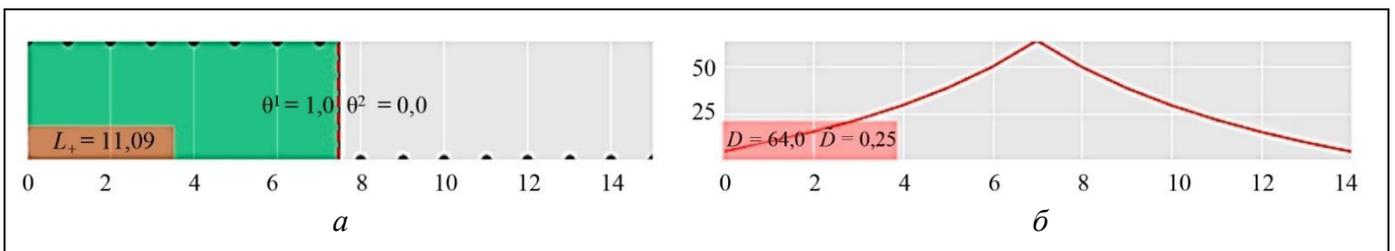


Рис. 10. Временной ряд «действий» агента (а), график функции агента  $d(x, t)$  (б)

### Линейные микромоделли и скрытое состояние агента

Рассмотрим микромоделли совместной динамики мнений и действий для значимых агентов (см. вторую часть статьи [2]), включив в них учет скрытого состояния агента.

• **Модель с переменной  $\theta$ .** Для каждого агента найдем момент разладки и рассчитаем значения скрытого состояния до момента разладки ( $\theta = \theta^1$ ) и после него ( $\theta = \theta^2$ ). Проведем серию вычислительных экспериментов, в каждом из которых сгенерируем согласно модели (8) со скрытыми состояниями и наблюдаемыми действиями последовательность «действий» агентов и оценим степень ее сходства с наблюдаемой последовательностью. Усредним полученные оценки и получим качество модели с переменной  $\theta$ .

• **Инерционная модель с учетом  $\theta$ .** Добавим в инерционную модель переменную  $\theta$  и оценим качество новой модели.

• **Унифицированная модель с учетом  $\theta$ .** Добавим в унифицированную модель переменную  $\theta$  и оценим качество новой модели.

• **Персонализированная модель с учетом  $\theta$ .** Добавим в персонализированную модель переменную  $\theta$  и оценим качество новой модели.

Оказывается, что сбалансированная верность модели с переменной  $\theta$  составляет 0,70 (модель мнений) и 0,64 (модель действий). В табл. 6 приведены оценки прироста качества линейных микромоделей вследствие учета переменной  $\theta$ .

Таблица 6

#### Прирост качества линейных микромоделей вследствие учета переменной $\theta$

Вид моделей	Относительное уменьшение величины ошибки для модели мнений	Относительное уменьшение величины ошибки для модели действий
Инерционные модели	– 59 %	– 56 %
Унифицированные модели	– 17 %	– 7 %
Персонализированные модели	– 17 %	– 8 %

Максимальный прирост качества возникает для инерционной модели (уменьшение ошибки на 56–59 %), меньше вклад скрытого состояния для унифицированной модели (7–17 %) и для персонали-

зированной (8–17 %). В целом, введение латентных переменных дает примерно дополнительные «чистые» 2 % прироста качества моделей динамики мнений и действий.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе, состоящей из трех частей, выполнено исследование совместной динамики мнений и действий агентов в онлайн-социальной сети ВКонтакте (на примере отношения к ношению медицинских масок в период первого года пандемии COVID-19), на основе результатов которого верифицированы математические модели взаимосвязи изменений мнений и действий. Отметим наиболее важные результаты (см. первую и вторую части статьи [1, 2]).

В первой части работы [1] сначала была решена задача идентификации мнений пользователей ВКонтакте, а затем выполнен первичный анализ совместной динамики мнений и действий в сети. В том числе обнаружена поляризация выраженных в сети позиций (мнений и действий) и увеличение со временем доли позиций «против». Анализ сетевых взаимодействий показал, что в сети отсутствуют эхо-камеры, а агенты подвергаются информационному воздействию различных позиций социального окружения и – как следствие – могут изменить свои мнения. Выявлена согласованность и взаимовлияние мнений и действий агентов (см. вопросы 1 и 5 во введении). Кроме того, найдены и охарактеризованы так называемые *значимые агенты*, изменившие свои мнения в течение исследуемого периода (см. вопросы 2 и 3).

Во второй [2] и настоящей части работы были проведены идентификация и исследование формальных моделей динамики мнений и действий (см. вопрос 6). Рассмотрены различные варианты макромоделей, в которых «общественное» мнение и действие в сети (т. е. доля мнений и действий «за» или «против») на текущем шаге зависит от мнений и действий на предыдущем шаге. Рассмотрены различные варианты микромоделей (как линейных, так и пороговых), в которых учитываются воздействие сети, воздействие друзей агента и его персональные особенности. Результаты идентификации макромоделей подтвердили наличие связи между действиями и мнениями в сети.

Микромоделли рассматривались только для значимых агентов. Качество таких микромоделей является приемлемым и улучшается по мере их усложнения. В классе линейных микромоделей наибольшую ошибку дает инерционная модель

(рис. 11), меньшую – модель с макропеременными (с числом от одного до четырёх, см. рис. 11) и унифицированная модель (см. «Униф.» на рис. 11), а наименьшую – персонифицированная модель (см. «Перс.» на рис. 11), в которой у каждого агента может быть своя функция доверия. Вклад латентных переменных для линейных моделей составляет около 2 % (см. «Перс.+ $\theta$ » на рис. 11).

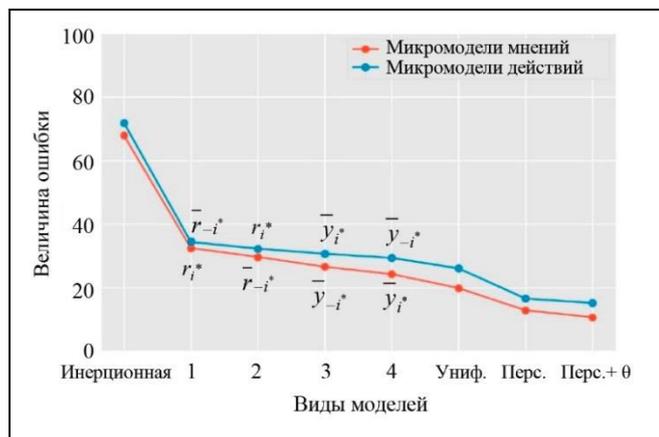


Рис. 11. Качество различных видов линейных микромоделей мнений и действий агентов

Что касается пороговых микромоделей (см. вопрос 4), то наилучшее качество показывают модели с сетевым воздействием, затем персонифицированные и унифицированные модели с воздействием друзей. Учет возможности антиконформизма значительно повышает качество моделей в среднем, а вот введение второго порога не оказывает столь же значимого эффекта. В случае с персонифицированными пороговыми моделями высока доля агентов, для которых не существенен вид функции доверия к информации (около 40 %); доля доверяющих информации, расходящейся с их мнением, превышает долю агентов, доверяющих совпадающей с их мнением информацией; в то же время практически отсутствуют агенты, которые доверяют информации независимо от ее содержания. Можно также констатировать, что в пороговых моделях выбор функции доверия к друзьям не является определяющим (см. вопрос 7).

Пороговые и линейные модели показывают примерно одинаковое качество, однако в пороговых моделях используется меньшее число параметров, поэтому они могут оказаться более предпочтительными (см. вопрос 4).

«Рекламный» вариант результатов проведенного исследования можно сформулировать следующим образом. Очень малая доля людей (около 1 %) изменяет свои мнения (убеждения, действия

и т. п.). На эту динамику в значительной мере влияют наши первоначальные убеждения<sup>5</sup> (условно в среднем около 67 % влияния, рис. 12), меньше – социальное окружение (около 15 % влияния мнений и действий других агентов в сети) и наши собственные действия (около 3 % влияния – вклад когнитивного диссонанса), а также латентные (около 2 % влияния) и другие (внемоделльные и/или случайные) факторы (около 13 % влияния). При этом больше мы прислушиваемся к информации, сильнее отличающейся от наших текущих представлений.

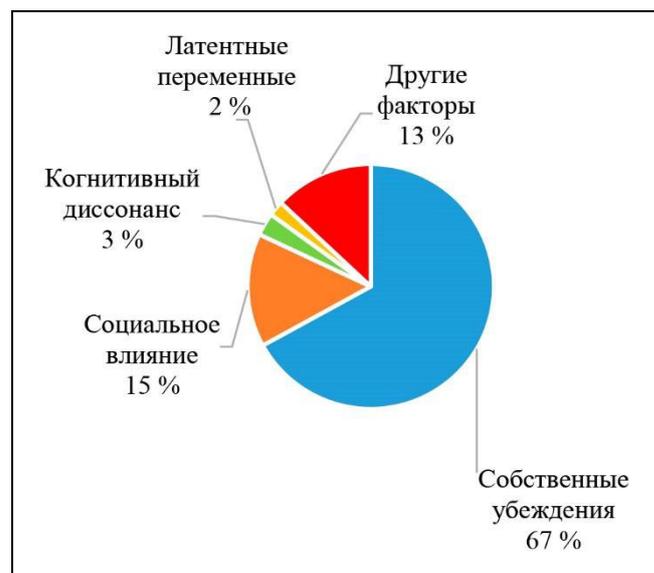


Рис. 12. Влияние различных факторов на изменение мнений агента

Перспективным направлением дальнейших исследований является анализ более сложных механизмов изменения мнений и действий агентов социальной сети, в которых может, например, учитываться «память» агента, воздействие на сеть внешних факторов и еще более «тонкие» эффекты: взаимосвязь мнения агента по текущему вопросу с мнениями по смежным вопросам (например, по аспектам COVID-19), воздействие на мнение агента аргументов и эмоций, содержащихся в сообщениях/действиях сети, влияние индивидуальных особенностей агента, например степени рациональности агента и т. д.

<sup>5</sup> Отдельный, очень важный и интересный, вопрос – откуда берутся и как формируются эти «первоначальные убеждения», ведь в настоящей работе рассматривается период с самого начала пандемии коронавируса (март 2020 г.), до которой мало кто из жителей Земли задумывался о пользе ношения медицинских масок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Губанов Д.А., Новиков Д.А. Модели совместной динамики мнений и действий в онлайн-социальных сетях. Ч. 1. Исходные данные и первичный анализ // Проблемы управления. – 2023. – № 2. – С. 37–53. [Gubanov, D.A., Novikov, D.A. Models of Joint Dynamics of Opinions and Actions in Online Social Networks. Part I: Primary Data Analysis // Control Sciences. – 2023. – No. 2. – P. 31–45.]
2. Губанов Д.А., Новиков Д.А. Модели совместной динамики мнений и действий в онлайн-социальных сетях. Ч. 2. Линейные модели // Проблемы управления. – 2023. – № 3. – С. 40–64. [Gubanov, D.A., Novikov, D.A. Models of Joint Dynamics of Opinions and Actions in Online Social Networks. Part II: Linear Models // Control Sciences. – 2023. – No. 3. – P. 31–54.]
3. Gubanov, D.A. A Study of Formalizations of User Influence in Actional Model / Proceedings of the 13th International Conference "Management of Large-Scale System Development" (MLSD). – Moscow, 2020. – P. 1–5. – URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9247658>.
4. Губанов Д.А., Чхартушвили А.Г. Влиятельность пользователей и метапользователей социальной сети // Проблемы управления. – 2016. – № 6. – С. 12–17. [Gubanov, D.A., Chkhartishvili, A.G. An Actional Model of User Influence Levels in a Social Network // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76, iss 7. – P. 1282–1290.]
5. Новиков Д.А. Модели динамики психических и поведенческих компонент деятельности в коллективном принятии решений // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 85. – С. 206–237. [Novikov, D.A. Dynamics Models of Mental and Behavioral Components of Activity in Collective Decision-Making // Large-Scale Systems Control. – 2020. – Vol. 85. – P. 206–237. (In Russian)]
6. Новиков Д.А., Бреер В.В., Рогаткин А.Д. Управление толпой: математические модели порогового коллективного поведения. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 168 с. [Novikov, D.A., Breer, V.V., Rogatkin, A.D. Upravlenie tolpoj: matematicheskie modeli porogovogo kollektivnogo povedeniya. – М.: LENAND, 2016. – 168 s. (In Russian)]
7. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартушвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. 3-е изд., перераб. и дополн. – М.: МЦНМО, 2018. – 224 с. [Gubanov, D.A., Novikov, D.A., Chkhartishvili, A.G. Social Networks: Models of Information Influence, Control and Confrontation. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2019. – 158 p.]
8. Flache, A., Mäs, M., Feliciani, T., et al. Models of Social Influence: Towards the Next Frontiers // The Journal of Artificial Societies and Social Simulation. – 2017. – Vol. 20, no. 4. – DOI: 10.18564/jasss.3521.
9. Granovetter, M. Threshold Models of Collective Behavior // The American Journal of Sociology. – 1978. – Vol. 83, no. 6. – P. 1420–1443.
10. Karimi, F., Holme, P. Threshold Model of Cascades in Empirical Temporal Networks // Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications. – 2013. – Vol. 392, no. 16. – P. 3476–3483.
11. Kempe, D., Kleinberg, J., Tardos, E. Maximizing the Spread of Influence through a Social Network // Theory of Computing. – 2015. – Vol. 11, no. 4. – P. 105–147.
12. Schelling, T. Micromotives and Macrobehaviour. – New York, London: Norton & Co Ltd, 1978. – 256 p.
13. Semenov, A., Veremyev, A., Pasiliao, E.L., Boginski, V. Double-Threshold Models for Network Influence Propagation // Computational Data and Social Networks: 9th International Conference, CSoNet 2020. – Dallas, 2020. – P. 512–523.
14. Brodersen, K., Ong, C., Stephan, K., Buhmann, J. The Balanced Accuracy and Its Posterior Distribution // Proceedings of the 20th International Conference on Pattern Recognition. – Istanbul, 2010. – P. 3121–3124.
15. Elliott, R.J., Aggoun, L., Moore, J.B. Hidden Markov Models: Estimation and Control. – Luxembourg: Springer Science & Business Media, 2008.
16. Koller, D., Friedman, N. Probabilistic Graphical Models: Principles and Techniques. – MIT Press, 2009.
17. Нукифоров И.В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. – М.: Наука, 1983. – 199 с. [Nikiforov, I.V. Posledovatel'noe obnaruzhenie izmeneniya svoystv vremennyh ryadov. – М.: Nauka, 1983. – 199 s. (In Russian)]
18. Дарховский Б.С., Бродский Б.Е. Апостериорное обнаружение момента «разладки» случайной последовательности // Теория вероятностей и ее применения. – 1980. – Т. 25. – Вып. 3. – С. 635–639. [Darhovskij, B.S., Brodskij, B.E. Aposteriorное obnaruzhenie momenta «razladki» sluchajnoj posledovatel'nosti // Teoriya veroyatnostej i ee primeneniya. – 1980. – Т. 25. – Вып. 3. – С. 635–639. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии  
Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 28.12.2022,  
после доработки 27.03.2023.  
Принята к публикации 05.04.2023.

Губанов Дмитрий Алексеевич – д-р техн. наук,  
✉ [dmitry.a.g@gmail.com](mailto:dmitry.a.g@gmail.com),  
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0099-3386>

Новиков Дмитрий Александрович – академик РАН,  
✉ [novikov@ipu.ru](mailto:novikov@ipu.ru),  
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9314-3304>

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
г. Москва.

© 2023 г. Губанов Д.А., Новиков Д.А.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)  
«Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



# MODELS OF JOINT DYNAMICS OF OPINIONS AND ACTIONS IN ONLINE SOCIAL NETWORKS. PART III: Binary Models

D.A. Gubanov and D.A. Novikov

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ dmitry.a.g@gmail.com, ✉ novikov@ipu.ru

**Abstract.** Based on *Vkontakte* data, we study the influence of various factors on the dynamics of opinions and actions both at the macro level (“public opinion”) and at the micro level (opinions and actions of individual agents). This paper concludes the multi-part study. Identification results are presented for binary models (threshold models and models with latent variables) that describe the dynamics of agents’ opinions and actions in a social network. These models are used to estimate the influence of various factors on agents’ opinions and actions (public opinion, the agent’s individual opinions and actions, the opinions and actions of the social environment, and the mechanisms of the agent’s trust in information sources and information content). Finally, linear models are compared with threshold models and qualitative findings of the multi-part study are drawn.

**Keywords:** social network, agent, opinion, action, social influence, cognitive dissonance, trust in information.

# ИДЕНТИФИКАЦИОННОЕ СКОРОСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МОСТОВЫМ КРАНОМ С СОКРАЩЕННОЙ МОДЕЛЬЮ ПЕРЕНОСА ГРУЗА<sup>1</sup>

С.П. Круглов, С.В. Ковыршин

**Аннотация.** Рассмотрен подход к автоматизации управления тележкой мостового крана в условиях текущей неопределенности параметров крана, переносимого груза и внешних возмущений. Он реализует формирование заданной скорости тележки, что соответствует современной аппаратной реализации управления кранами с асинхронными двигателями и частотными преобразователями. Данный подход основан на схеме управления с алгоритмом текущей параметрической идентификации, неявной эталонной модели и «упрощенных» условиях адаптируемости с нацеленностью на непосредственное отслеживание перемещения груза. В качестве основы для алгоритма идентификации применяется рекуррентный метод наименьших квадратов с фактором забывания. В отличие от ранее опубликованных работ по рассматриваемой тематике предложено использовать сокращенную модель объекта «кран – груз» при перемещении груза по одной горизонтальной оси, что требует оценивания только двух параметров, упрощает построение алгоритма управления и улучшает качество функционирования замкнутой системы управления. Приведено доказательство устойчивости замкнутой системы управления и найдены требования к параметрам назначаемого эталонного движения. В силу свойства самоподстройки системы управления очевидны обобщения на возможность построения системы управления мостовым краном по двум горизонтальным осям и трем осям (с одновременным вертикальным перемещением груза). Приведен модельный пример, показывающий возможность реализации предлагаемой системы управления краном на основе современных контроллеров и датчиков.

**Ключевые слова:** автоматизация управления мостовым краном, адаптивная система управления, алгоритм параметрической идентификации, текущая параметрическая неопределенность, устойчивость замкнутой системы управления.

## ВВЕДЕНИЕ

Вопросы автоматизации управления кранами с подвешенным грузом, в частности мостовым краном, являются очень важными в силу массовости их использования и необходимости повышения производительности крановых работ, безопасности, снижения эксплуатационных затрат и пр. От системы управления краном требуется обеспечение максимально быстрого и точного перемещения груза в заданную точку с устранением маятникового раскачивания подвеса груза. Причины возникновения последнего могут быть разными: инерционное раскачивание при старте и останове движения, влияние ветрового воздействия на груз, волнение моря на судовых кранах и др.

При этом, как правило, современные краны характеризуются многообразием режимов работы: большой вариацией параметров переносимых грузов, длины подвеса, вероятностью появления внешних возмущений. Поэтому часто работа системы управления краном связана с текущей неопределенностью собственных характеристик, характеристик переносимого груза и внешних возмущений.

Многие работы, посвященные автоматизации управления мостовым краном, основаны на априорной информации о параметрах крана и груза либо требуют предварительной настройки системы управления. К ним относятся, например, работы, посвященные использованию ПИД- и ПД-регуляторов [1–3], систем управления на основе скользящих режимов [4–8]. Но такие системы принципиально не могут решить задачу качественного управления краном в указанном много-

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-29-00654, <https://rscf.ru/project/23-29-00654/>.

образии режимов его работы при одной настройке. Априорная информация об объекте управления требуется при построении оптимального управления (см., например, публикации [9, 10]). Немало работ посвящается использованию нечеткой логики и нейроконтроллеров (см., например, статьи [11, 12]). Однако стратегии с нечетким управлением достаточно сложны для настройки, а также не учитывают заранее не определенные факторы. Нейроконтроллеры же требуют значительного времени для обучения.

Известны подходы к построению адаптивной системы управления краном на основе использования функции Ляпунова (см., например, статьи [13, 14]), но для настройки параметров закона управления здесь применяется градиентный алгоритм, сопряженный с проблемой подбора параметров дискретной настройки для конкретного случая.

В работах [15, 16] предложен подход по адаптивному управлению тележкой мостового крана на основе непосредственного отслеживания горизонтального перемещения груза с формированием управляющей силы или заданной скорости. Управление по заданной скорости соответствует современным подходам к управлению краном с использованием асинхронных электродвигателей и частотных преобразователей. Подход основан на схеме управления с алгоритмом текущей параметрической идентификации, неявной эталонной моделью и «упрощенных» условиях адаптируемости [17]. Решение дает возможность относительно просто строить управление мостовым краном в условиях текущей неопределенности параметров крана, переносимого груза и внешних возмущений.

Настоящая статья является логическим продолжением работ [15, 16], и, в отличие от них, предлагает использовать сокращенную модель объекта «кран – груз» при перемещении груза по одной горизонтальной оси, что упрощает построение алгоритмов идентификации и управления, улучшает качество функционирования замкнутой системы управления. Также приведены доказательства устойчивости замкнутой системы управления для сформированного закона управления и требования к параметрам назначаемого эталонного движения.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим одномаятниковую модель мостового крана, переносящего груз по одной горизонтальной оси. Будем пренебрегать весом троса, на котором подвешен груз, а также сопротивлением при его перемещении. Схема мостового крана при

перемещении груза по одной оси представлена на рис. 1.

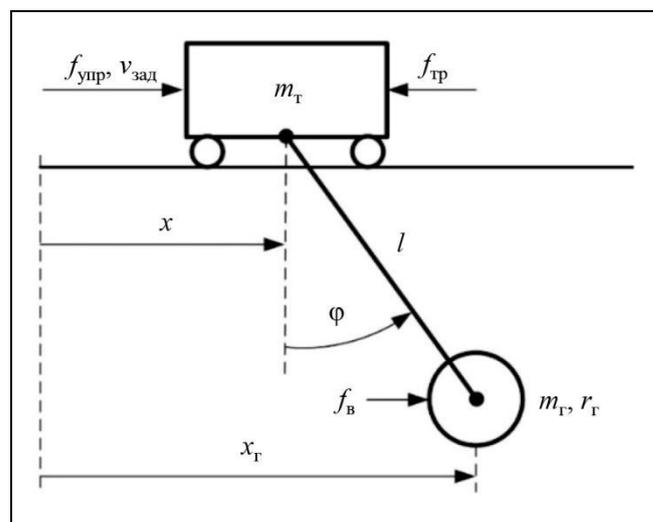


Рис. 1. Схема мостового крана при перемещении груза по одной оси

На рис. 1 обозначено  $m_T, m_T$  – массы тележки крана и переносимого груза соответственно;  $r_T$  – радиус инерции груза;  $l$  – длина подвеса груза, или расстояние от точки крепления подвеса на тележке до центра груза;  $x$  – горизонтальное перемещение тележки от назначенного положения;  $\dot{x} = v$  – скорость перемещения тележки, а  $v_{зад}$  – заданное значение этой скорости;  $f_{упр}$  – управляющая сила, формируемая приводом тележки крана;  $f_{тр} = k_{тр}v$  – сила трения, противодействующая перемещению тележки,  $k_{тр}$  – коэффициент вязкого трения (ограничимся такой моделью трения без потери общности последующих выводов, что очевидно при управлении по скорости);  $f_в$  – сила ветрового воздействия, приложенная в центре масс груза;  $\varphi$  – угол отклонения подвеса груза от вертикальной оси;  $x_T = x + l \sin \varphi$  – горизонтальное перемещение груза. Будем считать, что движение тележки вместе с грузом подвергается внешнему возмущению, которое представляет изменение силы трения и ветрового воздействия, имеет ступенчатый характер с произвольным моментом времени с ограниченной интенсивностью.

Динамика движения объекта, представленного на рис. 1, достаточно хорошо изучена; без учета начального состояния по линейному и угловому перемещению и их скорости на основе уравнений Эйлера – Лагранжа она может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений (аналогично изложенному в работах [2, 6] и др.):

$$\begin{cases} (m_T + m_T) \ddot{x} + (m_T l \cos \varphi) \ddot{\varphi} = f_{\text{упр}} - k_{\text{тр}} \dot{x} + m_T l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ (m_T l \cos \varphi) \ddot{x} + m_T (l^2 + r_T^2) \ddot{\varphi} = -m_T g l \sin \varphi - l f_B \cos \varphi, \\ x_T = x + l \sin \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Поскольку угол отклонения груза небольшой (не практике не более  $10 - 20^\circ$ ), угловая скорость также невысокая, с учетом кинематики движения можно принять  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$ ,  $\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \approx 0$ . Поэтому систему (1) можно описать в линеаризованном виде так:

$$\begin{cases} \ddot{x} \approx a_x^{f_{\text{упр}}} (f_{\text{упр}} - k_{\text{тр}} \dot{x}) + a_x^\varphi \varphi + a_x, \\ \ddot{\varphi} \approx a_\varphi^{f_{\text{упр}}} (f_{\text{упр}} - k_{\text{тр}} \dot{x}) + a_\varphi^\varphi \varphi + a_\varphi, \\ x_T \approx x + l \varphi, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{где } a_x^{f_{\text{упр}}} &= \gamma^{-1} m_T (l^2 + r_T^2); & a_x^\varphi &= \gamma^{-1} g (m_T l)^2; \\ a_x &= \gamma^{-1} m_T [- (l^2 + r_T^2) f_{\text{тр}} + l^2 f_B]; & a_\varphi^{f_{\text{упр}}} &= -\gamma^{-1} m_T l; \\ a_\varphi^\varphi &= -\gamma^{-1} (m_T + m_T) m_T g l; & a_\varphi &= \gamma^{-1} l [m_T f_{\text{тр}} - (m_T + \\ &+ m_T) f_B]; & \gamma &= m_T [m_T l^2 + (m_T + m_T) r_T^2]. \end{aligned}$$

Подставляя первое и второе уравнения в дважды продифференцированное третье равенство системы (2), выражая сигнал  $(f_{\text{упр}} - k_{\text{тр}} \dot{x})$  из первого равенства (2) и подставляя его в полученный результат, определим, что движение груза можно описать через скорость тележки следующим приближительным равенством:

$$\ddot{x}_T \approx a_T^\dot{\varphi} \dot{\varphi} + a_T^\varphi \varphi + a_T, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{где } a_T^\dot{\varphi} &= r_T^2 / (r_T^2 + l^2); & a_T^\varphi &= l (a_\varphi^\varphi - a_x^\varphi a_\varphi^{f_{\text{упр}}} / a_x^{f_{\text{упр}}}) = \\ &= -g \mu, & \mu &= l^2 / (l^2 + r_T^2) - \text{безразмерный коэффициент влияния радиуса инерции груза;} \\ a_T &= l (a_\varphi - a_x a_\varphi^{f_{\text{упр}}} / a_x^{f_{\text{упр}}}). \end{aligned}$$

Для дальнейших рассуждений вначале примем утверждение, что  $l^2 \gg r_T^2$ , что соответствует большинству случаев практики. Тогда  $a_T^\dot{\varphi} \approx 0$  и уравнение (3) можно переписать в виде

$$\ddot{x}_T \approx a_T^\varphi \varphi + a_T. \quad (4)$$

Такую линеаризованную модель переноса груза по одной оси назовем сокращенной, в сравнении с моделью (3), которая в работе [16] использовалась для синтеза адаптивного управления краном. Она

отличается тем, что содержит только два неизвестных параметра. Столь значительное упрощение модели динамики линейного перемещения груза объясняется не только приведенными доводами, но и тем, что модель (4) далее используется лишь для аппроксимации указанного движения.

Из уравнения (4) можно определить собственную частоту угловых колебаний груза ( $\omega_0$ ). Известно, что собственные колебания описываются уравнением [18]  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ . Равенство (4) можно записать как  $\ddot{x} + l \ddot{\varphi} \approx a_T^\varphi \varphi + a_T$ . Частота  $\omega_0$  находится при  $\ddot{x} \equiv 0$  и отсутствии внешних возмущений, т. е.  $a_T \equiv 0$ . Следовательно, с учетом уравнения (3) получим:

$$\omega_0 \approx \sqrt{-a_T^\varphi / l} = \sqrt{\mu g / l}. \quad (5)$$

Ставится задача: в условиях текущей неопределенности параметров крана, груза и указанных возмущений сформировать закон управления в виде заданной скорости перемещения тележки крана, отработка которой приводом тележки (будем считать  $\dot{x} \equiv v_{\text{зад}}$ ) обеспечит выполнение условия

$$x_T \rightarrow x_{T \text{ зад}}, \quad \dot{\varphi} \rightarrow 0, \quad (6)$$

где  $x_{T \text{ зад}}$  – заданное положение груза, или его целевая точка. Также будем считать, что приближительная априорная информация о собственной частоте угловых колебаний имеется. В качестве датчиков информации будем использовать измерители сигналов  $\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{x}_T$ ,  $x$ , это «по силам» современным датчикам. Так, для измерения первых двух сигналов предлагается использовать микромеханический датчик, например расположенный рядом с грузом с дистанционной передачей данных.

## 2. АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ

Примем в качестве следующего равенства желаемое (модельное) поведение второй производной линейного перемещения груза ( $\ddot{x}_T^M$ ), соответствующее колебательному процессу, которое назовем «эталонным движением» (обоснование такого решения по сравнению с обычной эталонной моделью приведено в приложении):

$$\ddot{x}_T^M = -2\omega_M \xi_M \dot{x} - \omega_M^2 (x_T - x_{T \text{ зад}}), \quad (7)$$

где  $\omega_M$  – задаваемая собственная частота эталонного движения, а  $\xi_M$  – относительный коэффициент затухания.



Приравнивая правые части уравнений (4) и (7), найдем закон управления тележкой крана в виде ее заданной скорости ( $v_{\text{зад}}$ ):

$$\dot{x} \approx v_{\text{зад}} = -T_M^{-1} \left[ (x_{\Gamma} - x_{\Gamma \text{ зад}}) + \omega_M^{-2} (a_{\Gamma}^{\phi} \phi + a_{\Gamma}) \right], \quad (8)$$

где  $T_M = 2\xi_M / \omega_M$  – задаваемая (модельная) постоянная времени линейного перемещения.

На основании рис. 1 ошибку слежения за положением груза можно переписать в следующем виде:

$$x_{\Gamma} - x_{\Gamma \text{ зад}} = x - x_{\text{зад}}, \quad (9)$$

где  $x_{\text{зад}} = x_{\Gamma \text{ зад}} - l\phi_{\text{уст}} = \text{const}$ , предполагая, что  $\phi_{\text{уст}}$  – установившееся постоянное значение угла  $\phi$  по окончании регулирования.

Уравнение (8) можно записать в виде зависимости, описывающей динамику замкнутой системы управления

$$T_M \dot{x} + x \approx x_{\text{зад}} - \omega_M^{-2} (a_{\Gamma}^{\phi} \phi + a_{\Gamma}). \quad (10)$$

Если бы не было углового движения ( $\phi \equiv 0$ ) и не было возмущения ( $a_{\Gamma} \equiv 0$ ), из выражения (10) следовало бы, что  $x \rightarrow x_{\text{зад}}$  по аperiodическому закону с постоянной времени  $T_M$  (отсюда название этого параметра). В общем случае это аperiodическое движение тележки крана возмущается угловым движением и составляющей  $a_{\Gamma}$  [19].

Из формул (4) и (10) также следует, что если в замкнутой системе управления достигается установившееся состояние  $\dot{x} \rightarrow 0$ ,  $\dot{\phi} \rightarrow 0$ ,  $\dot{x}_{\Gamma} \rightarrow 0$ , то это может быть только в случае, когда  $\phi \rightarrow \phi_{\text{уст}} = -a_{\Gamma} / a_{\Gamma}^{\phi}$  и  $x \rightarrow x_{\text{зад}}$ , а значит, по формуле (9)  $x_{\Gamma} \rightarrow x_{\Gamma \text{ зад}}$ .

**Утверждение.** При  $\omega_M < \omega_0$  для замкнутой системы управления (2), (4), (8) при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t$  – текущее время) справедливо  $\dot{x} \rightarrow 0$ ,  $\dot{\phi} \rightarrow 0$ ,  $\dot{x}_{\Gamma} \rightarrow 0$ , а значит, достигается заданная цель управления (6).

**Доказательство.** Для простоты рассуждений примем, что  $x_{\Gamma \text{ зад}} = \text{const}$  (из последующих выводов следует, что также можно принять  $x_{\Gamma \text{ зад}} \approx \text{const}$ ). Назначим функцию Ляпунова

$$\Lambda = 0,5 \left[ \dot{x}_{\Gamma}^2 + \omega_M^2 (x_{\Gamma} - x_{\Gamma \text{ зад}})^2 \right] \geq 0.$$

Заметим, что  $\Lambda = 0$  только при  $\dot{x}_{\Gamma} = 0$  и  $x_{\Gamma} = x_{\Gamma \text{ зад}}$ .

В силу указанного приравнивания правых частей уравнений (4) и (7) производная функции Ляпунова равна

$\Lambda' = -2\omega_M \xi_M \dot{x}_{\Gamma}$ . Отсюда следует, что для уменьшения во времени функции Ляпунова достаточно выполнения на подавляющей части периода колебаний условия  $\text{sign}(\dot{x}) = \text{sign}(\dot{x}_{\Gamma})$ . Определим, когда оно может быть достигнуто.

С учетом третьего равенства (2) уравнение (7), где  $\ddot{x}_{\Gamma}^M$  заменено на  $\ddot{x}_{\Gamma}$  (замкнутая система управления с законом управления (8) будет описываться именно так), можно переписать в виде

$$\ddot{x} + 2\xi_M \omega_M \dot{x} + \omega_M^2 (x - x_{\Gamma \text{ зад}}) \approx -l(\ddot{\phi} + \omega_M^2 \phi).$$

Прибавляя к правой части этого равенства нуль  $\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0$ , умноженный на  $l$ , получим:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\xi_M \omega_M \dot{x} + \omega_M^2 (x - x_{\Gamma \text{ зад}}) &\approx \\ &\approx (\omega_0^2 - \omega_M^2) l \phi \approx (\omega_0^2 - \omega_M^2) (x_{\Gamma} - x). \end{aligned}$$

Дифференцируя это равенство и выполняя дальнейшие преобразования, можно записать

$$\ddot{x} + 2\tilde{\xi}_M \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x \approx (\omega_0^2 - \omega_M^2) \dot{x}_{\Gamma},$$

где  $\tilde{\xi}_M = \xi_M \omega_M / \omega_0$  – результирующий относительный коэффициент затухания.

Как известно из теории автоматического управления, полученное уравнение означает, что динамика движения тележки по переменной  $\dot{x}$  соответствует колебательному звену с собственной частотой выходного сигнала  $\omega_0^{\dot{x}} = \omega_0 \sqrt{1 - \tilde{\xi}_M^2}$  и со стремлением по времени  $\dot{x} \rightarrow \left[ (\omega_0^2 - \omega_M^2) / \omega_0^2 \right] \dot{x}_{\Gamma}$  [19].

Потребуем выполнения условия:  $\omega_M < \omega_0$ . Тогда соотношение собственных частот выходного сигнала замкнутой системы управления  $\omega_0^{\dot{x}}$  и назначенного эталонного движения по формуле (7)  $\omega_0^M = \omega_M \sqrt{1 - \xi_M^2}$  будет следующим:

$$\omega_0^{\dot{x}} = \omega_0 \sqrt{1 - (\xi_M \omega_M / \omega_0)^2} = \omega_M \sqrt{(\omega_0 / \omega_M)^2 - \xi_M^2} > \omega_0^M.$$

Поскольку закон управления (8) нацелен на изменение переменной  $x_{\Gamma}$  по свойствам (7), то преобладающей частотой движений по  $\dot{x}_{\Gamma}$  будет собственная частота выходного сигнала эталона  $\omega_0^M$ . То есть в замкнутой системе управления на переходных процессах движение по  $\dot{x}$  более быстрое, чем движение по  $\dot{x}_{\Gamma}$ . Отсюда и на основании изложенного следует, что  $\dot{x}$  имеет на подавляющей части периода колебательных движений тот же знак, т. е.  $\text{sign}(\dot{x}) \equiv \text{sign}(\dot{x}_{\Gamma})$ .

Таким образом, если  $\omega_M < \omega_0$ , то функция Ляпунова будет уменьшаться во времени. А по указанным ее свойствам получим:  $\dot{x}_{\Gamma} \rightarrow 0$  ( $\ddot{x}_{\Gamma} \rightarrow 0$ ) и  $x_{\Gamma} \rightarrow x_{\Gamma \text{ зад}}$ . Тогда из формул (8) и (4) следует, что  $\dot{x} \rightarrow 0$ . Из зависимости  $x_{\Gamma} \approx x + l\phi$  также следует, что  $\dot{\phi} \rightarrow 0$ . ♦

Как правило, желаемое движение груза к целевой точке представляет собой процесс, близкий к апериодическому, без перерегулирования с минимально возможным временем. Также нужно учесть, что выбор параметров  $T_M$ , или  $\omega_M$  необходимо увязывать с максимальной реализуемой скоростью со стороны привода и необходимым перемещением груза. С учетом этих положений, свойств максимальной скорости колебательного движения, а также результатов приведенного доказательства следуют требования к параметрам назначенного эталонного движения (7) [19]:

$$\omega_M < \omega_0, \quad \xi_M = 0,8, \quad \omega_M \leq 2,3 v_{\max} / |x_{r \text{ зад}} - x_{r0}|, \quad (11)$$

$$T_M = 1,6 / \omega_M,$$

где  $v_{\max}$  – модуль максимальной скорости тележки крана, реализуемой приводом;  $x_{r0}$  – начальное положение груза.

Закон управления (8) построен на точных значениях параметров рассматриваемого объекта управления (4)  $a_r^0, a_r$ . Но на практике при многообразии типов переносимых грузов, длин подвеса, внешних возмущениях в текущий момент времени они, как правило, неизвестны. Если бы можно было точно измерять переменную  $\ddot{x}_r$ , то на основании уравнения (4) можно было бы в законе управления (8) вместо скобки  $(a_r^0 \varphi + a_r)$  использовать эту переменную. Но, как правило, на практике измерение переменной  $\ddot{x}_r$  сильно зашумлено, что снижает качество управления. Использование обычного низкочастотного фильтра вносит фазовую задержку, что также отрицательно сказывается на качестве управления.

Для решения указанных проблем предлагается использовать аппроксимацию величины  $\ddot{x}_r$  на основе текущей параметрической идентификации, дающей низкочастотную фильтрацию без сдвига по фазе. Это является частью подхода, названного «упрощенными» условиями адаптируемости [17].

Поэтому вместо формулы (8) предлагается строить закон управления на текущих оценках этих параметров:

$$\dot{x} \approx v_{\text{зад}} = -T_M^{-1} \left[ (x_r - x_{r \text{ зад}}) + \omega_M^{-2} (\hat{a}_r^0 \varphi + \hat{a}_r) \right], \quad (12)$$

где верхним символом «крышка» обозначены текущие оценки соответствующих параметров, доставляемых алгоритмом текущей параметрической идентификации. В качестве последнего, например, можно использовать рекуррентный метод

наименьших квадратов с фактором забывания (процедура оценивания по методу наименьших квадратов обладает лучшими аппроксимационными свойствами, что общепризнано) [20]:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_i = \hat{\theta}_{i-1} + P_i y_i \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = \ddot{x}_{r_i} - y_i^T \hat{\theta}_{i-1}, \\ P_i = \left[ P_{i-1} - P_{i-1} y_i y_i^T P_{i-1} (1 + y_i^T P_{i-1} y_i)^{-1} \right] / \beta, \\ P_0 = \vartheta E_2, \quad \beta < 1, \quad \beta \rightarrow 1, \end{cases} \quad (13)$$

где индекс  $i = 1, 2, 3, \dots$  означает  $i$ -й момент времени с временным шагом  $\Delta t$ ;  $\hat{\theta} = [\hat{a}_r^0, \hat{a}_r]^T$  – вектор оценок искомых параметров;  $y = [\varphi, 1]^T$  – вектор факторных переменных;  $\varepsilon$  – невязка идентификации;  $P_i$  – матричный коэффициент усиления алгоритма ( $2 \times 2$ );  $\beta$  – назначаемый фактор забывания предыдущих измерений для слежения за изменяющимся во времени искомыми параметрами;  $\vartheta$  – большое положительное число, определяющее начальную скорость изменения оценок параметров;  $E_2$  – единичная ( $2 \times 2$ ) матрица.

В приложении показано, что невязка идентификации алгоритма (13) при линейной независимости элементов вектор-функции  $y_i$  на скользком временном интервале и на достаточно малом шаге  $\Delta t$  очень быстро сходится в область нуля (буквально с первых шагов работы алгоритма) и остается там, при этом сами оценки параметров могут быть далекими от истинных значений [17]. В статье [21] это также было показано при более жестких условиях работы замкнутой системы управления.

Таким образом, алгоритм (13) обеспечит выполнение условия

$$\ddot{x}_r \cong \hat{\ddot{x}}_r = \hat{a}_r^0 \varphi + \hat{a}_r, \quad (14)$$

т. е. аппроксимацию переменной  $\ddot{x}_r$  даже при неточных значениях оценок параметров.

А это значит, что с самого начала работы алгоритма идентификации оценки можно подставлять в закон управления (12). Отсюда также следует справедливость приведенного доказательства по достижению цели управления для текущих оценок параметров и  $\hat{\ddot{x}}_r$  (в приближительном плане).

В заключение теоретической части отметим, что все приведенные выше выводы получены при условии, что  $l^2 \gg r_r^2$  и справедливости уравнения (4). Модельные исследования показывают, что в случае нарушения этого условия, например,  $l = r_r$ , система управления с законом управления (12) и



алгоритмом идентификации (13) обеспечивает также высокое качество управления. Это объясняется, в частности, хорошими аппроксимационными свойствами алгоритма идентификации (13) с соблюдением условия (14) даже при умеренной некорректности сокращенной модели (4).

### 3. МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР

Модельный пример по анализу свойств замкнутой системы управления строился на основании зависимостей (1), (12), (13) с использованием формул (5), (7), (11). Моделирование проводилось в компьютерной среде Matlab/Simulink/SimMechanics. Дифференциальные уравнения решались методом Рунге – Кутты четвертого и пятого порядков с шагом 0,01 с.

Рассматривалось управление тележкой типового среднего крана со следующими значениями параметров:  $m_T = 450$  кг,  $m_m = 100 \div 10\,000$  кг,  $l = 3 \div 10$  м,  $r_T = 0,2 \div 5$  м,  $k_{тр} = 0,3$  Н·с/м,  $x_{T\text{зад}} = 10$  м. Привод, точнее, сервопривод, формирующий скорость перемещения тележки крана ( $\dot{x}$ ) по заданной скорости ( $v_{\text{зад}}$ ), моделировался аperiodическим звеном с единичным коэффициентом усиления и с постоянной времени 0,1 с, а также имел дополнительные нелинейности: временную задержку 0,03 с и ограничения по выходному сигналу:  $v_{\text{max}} = 0,67$  м/с,  $|\dot{v}| \leq 3$  м/с<sup>2</sup>. Многие из указанных значений параметров соответствуют изложенному в стандарте [22] и многообразию типовых переносимых грузов.

Предполагалось, что на переносимый груз в момент времени 50 с действует ступенчатое ветровое возмущение интенсивностью 10 % от веса груза («ступенька» сглажена аperiodическим звеном с постоянной времени 1 с).

Считалось, что угловая скорость  $\dot{\varphi}$  и ускорение  $\ddot{x}_T$  измеряются с помощью микромеханического датчика типа MPU-6050, расположенного рядом с грузом с передачей данных по беспроводному каналу. Эти данные зашумлены центрированными гауссовскими шумами со среднеквадратическими ошибками по угловой скорости 0,1 град/с, а по ускорению 0,1 м/с<sup>2</sup> [23]. Сигнал  $\varphi$  формировался путем интегрирования измеренной угловой скорости. Линейное перемещение тележки ( $x$ ) определялось энкодером с аналогичным шумом со среднеквадратической ошибкой 0,01 м. По измеренным сигналам  $x$ ,  $\varphi$  и по оценке длины подвеса ( $\hat{l}$ ) определялось положение груза:  $x_T = x + \hat{l}\varphi$ .

В описываемых здесь исследованиях принято  $\hat{l} = l$ , поскольку, согласно представленным выше зависимо-

стям, при ошибке такой оценки рассмотренный алгоритм управления краном породит постоянную неточность позиционирования груза, которая будет возникать только при наличии внешнего возмущения. При организации автоматизированной системы управления краном оператор всегда легко это компенсирует. Ошибка в определении параметра  $\omega_0$  на основе  $\hat{l}$  для задания  $\omega_M$  остается малой даже при больших погрешностях  $\hat{l}$  в силу выражения (5). Так, ошибка в оценке  $\hat{l}$  до 30 % дает ошибку в определении  $\omega_0$  до 16 %.

Для алгоритма идентификации (13) приняты следующие параметры:  $\Delta t = 0,01$  с, с таким же временным шагом реализуется закон управления (12); значения параметров  $\vartheta = 10$ ,  $\beta = 0,998$ . В представленных вариантах работы крана собственная его частота изменяется в диапазоне  $\omega_0 = 0,9 \div 1,8$  с<sup>-1</sup>. Значения параметров закона управления (12) в силу выражения (11) приняты такими:  $\omega_M = 0,15$  с<sup>-1</sup>,  $\xi_M = 0,8$ ,  $T_M = 10,7$  с.

Поведение замкнутой системы управления по переменным  $x$  и  $x_T$  сравнивалось с переменной  $x_M$ , которая является выходом динамического звена, соответствующего эталонному движению (7):  $\ddot{x}_M = -2\omega_M\xi_M\dot{x}_M - \omega_M^2(x_M - x_{T\text{зад}})$  с указанными выше параметрами.

На рис. 2 представлены результаты исследования при средних значениях параметров работы крана:  $m_T = 3\,000$  кг,  $l = 5$  м,  $r_T = 2$  м. Другие значения этих параметров из указанного выше их диапазона дают практически такие же кривые (расхождение – единицы процентов). Исключением являются только более высокочастотные переходные процессы около моментов времени  $t = 0$  и  $t = 50$  с по переменным  $v$ ,  $\varphi$ ,  $\hat{x}_T$  при большом отношении  $r_T/l$ , но в любом случае их продолжительность не превышает 5 с. Стабильность реакции замкнутой системы управления при большом многообразии параметров крана, груза и при действии внешнего возмущения говорит о более качественных характеристиках системы управления в условиях текущей неопределенности в сравнении с подходом, предложенным в работах [15, 16] и использующим модель объекта (3) с тремя неизвестными параметрами. В указанных работах, например, по вариантам грузов имела небольшая (но более существенная, чем указано выше) вариация времени переходного процесса и его характера.

Кроме того, на рис. 2 приведены графики изменения значений переменной  $\dot{x}_T$  и ее оценки  $\hat{\dot{x}}_T$  по формуле (14), основанной на текущих оценках параметров по алгоритму (13). Как видим, алгоритм идентификации

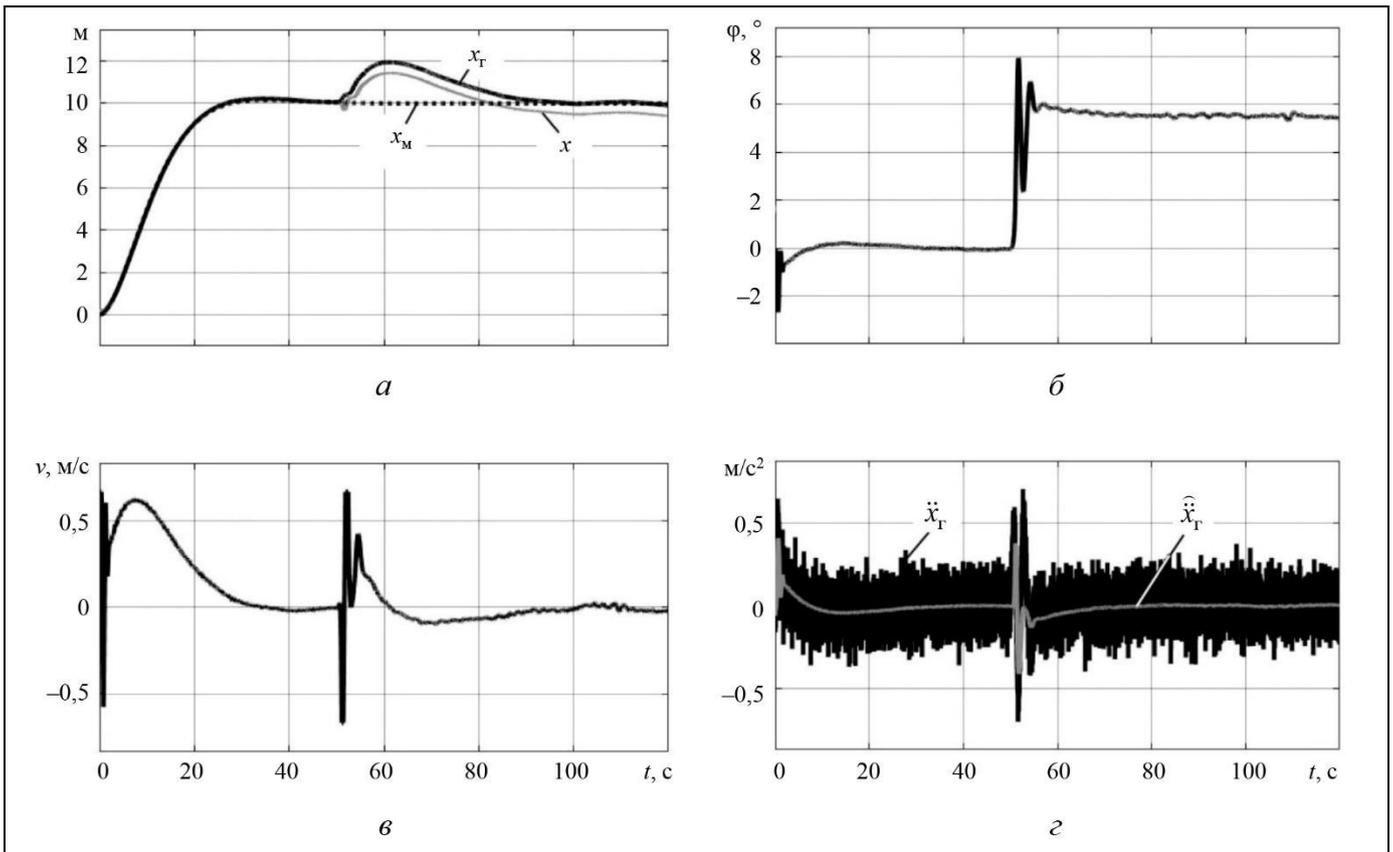


Рис. 2. Результаты исследования системы управления краном: *a* – линейные перемещения тележки и груза в сравнении с переменной  $x_m$ , *б* – изменение угла отклонения подвеса груза, *в* – скорость тележки, формируемая сервоприводом, *з* – вторая производная линейного перемещения груза, измеренная датчиком, и ее оценка

обеспечивает превосходные качества низкочастотного сглаживания без фазового сдвига, причем даже при нарушении принятого выше условия  $l^2 \gg r_r^2$ , т. е. при «не совсем корректном» использовании сокращенной модели переносимого груза.

Отметим, что также было проведено исследование факта нарушения третьего условия из выражения (11). В этом случае на участках движения, связанных с переходным процессом, когда тележка крана не может обеспечить нужную скорость перемещения, координата груза просто отстает от «эталонной» кривой. При приближении к установившемуся состоянию тождественность с эталоном восстанавливается. На практике небольшие такие отставания на переходных процессах не являются критическими.

Можно утверждать, что приведенные выше теоретические выкладки полностью подтверждены модельными исследованиями. Они показывают, что при большом разнообразии параметров груза его перемещение близко к поведению назначенного эталонного движения с достижением целевой точки. При возникновении ступенчатого ветрового воздействия оно успешно парируется. Все это выполняется в условиях текущей неопределенности указанных параметров. Подобные свойства без изменения алгоритма управления были получены и при других параметрах крана.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача автоматизации управления тележкой мостового крана для переноса груза в заданную точку и гашения его угловых колебаний в условиях текущей неопределенности параметров крана, переносимого груза и внешних возмущений. Основой служат линеаризованная модель динамики перемещения груза в зависимости от скорости тележки, содержащей два неизвестных параметра, и идентификационный алгоритм на основе «упрощенных» условий адаптируемости.

Для реализации предложенного подхода нужно: выбрать параметры эталонного движения (7) с соблюдением условий (11), построить алгоритм текущей идентификации (13) и закон управления (12). Для выбора параметров эталонного движения необходима априорная информация о частоте собственных колебаний подвеса крана, определяемая по формуле (5) на основании данных о длине подвеса. Но эту частоту достаточно знать лишь очень приблизительно в силу условий (11). Также длина подвеса необходима для вычисления горизонталь-



ной координаты груза. Но неточность в определении длины подвеса сказывается лишь на постоянной ошибке позиционирования груза, к тому же только при наличии внешнего возмущения. Последнее может быть легко парировано оператором крана в автоматизированной системе управления. При создании полностью автоматической системы управления (например, при создании системы дистанционного управления краном), конечно, потребуется дополнительный датчик определения длины подвеса.

В качестве датчика информации о движении груза предлагается использовать современный микромеханический датчик, определяющий ускорение и угловую скорость, расположенный около груза с беспроводной передачей информации. Как вариант, возможно расположение такого, но уже проводного датчика на тележке крана.

В работе рассматривалась задача горизонтального перемещения по одной оси. Но представленные результаты, в силу свойства самоподстройки системы управления, могут быть обобщены на управление по двум горизонтальным осям и даже по трем осям – с одновременным вертикальным движением груза.

Предложенный алгоритм управления мостовым краном предполагается также исследовать на экспериментальной установке.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Обоснование эталонного движения (7).

Использование эталонной модели вместо модели (7) в обычном понимании (выходная переменная скалярного эталона соответствует регулируемой переменной) при управлении по координате груза невозможно. Это вытекает из следующих доводов.

$$\ddot{x}_M \approx -2\omega_M \xi_M \dot{x}_M - \omega_M^2 (x_M - x_{Г\text{зад}}),$$

где  $x_M$  соответствует переменной  $x_T$ ; тогда желаемая вторая производная линейного перемещения груза, которая выше обозначена как  $\ddot{x}_T^M$ , будет

$$\ddot{x}_T^M \approx -2\omega_M \xi_M \dot{x}_T - \omega_M^2 (x_T - x_{Г\text{зад}}),$$

а закон управления (8) будет иметь вид:

$$\dot{x} \approx v_{\text{зад}} = -T_M^{-1} \left[ (x_T - x_{Г\text{зад}}) + \omega_M^{-2} (a_T^0 \varphi + a_T) \right] - l \dot{\varphi}.$$

Из-за последнего слагаемого в законе управления  $\text{sign}(\dot{x}) = -\text{sign}(\dot{\varphi})$  получаем внутреннюю неустойчивость (см. рис. 1) формирования заданной скорости –

аналог неминимально-фазовой (неустойчивой по входу) системы. ♦

Доказательство сходимости невязки идентификации в алгоритме (13).

Исключим из рассмотрения тривиальные случаи, когда  $y_i = 0$ . А также примем, что норма вектора оценок ограничена. Умножив первое равенство (13) на ненулевой вектор  $y_i^T$  слева, прибавив к левой и правой части полученного слагаемое  $(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)$ , разлагая последнее на составные слагаемые в левой части уравнения и упрощая зависимость, найдем:

$$(\ddot{x}_{T_{i+1}} - \ddot{x}_{T_i}) - (y_{i+1} - y_i)^T \hat{\theta}_i = \varepsilon_{i+1} - (1 - \eta_i) \varepsilon_i,$$

где  $\eta_i = y_i^T P_i y_i$ ,  $0 < \eta_i < 1$ .

Поскольку  $P_i^{-1} = \sum_{k=1}^i (\mathcal{G}^{-1} + y_i y_i^T) \beta^{i-k}$ , указанное ограничение величины  $\eta_i$  легко доказывается непосредственным ее вычислением, когда  $y$  – скаляр. Это также доказывается и для многомерного случая путем рассмотрения диапазона собственных чисел матрицы  $P_i$  на основании отношения Рэлея. При этом для невырожденности матрицы  $P_i^{-1}$  требуется линейная независимость элементов вектор-функции  $y_i$  на скользком временном интервале «памяти» алгоритма.

В правой части представленного равенства описано «собственное движение» невязки идентификации, а слева – его «возмущение». «Собственное движение» этой дискретной системы является устойчивым в силу диапазона значений величины  $\eta_i$ . Норма «возмущения» тем меньше, чем меньше шаг  $\Delta t$ . Действительно, при уменьшении  $\Delta t$  нормы векторов в круглых скобках левой части равенства даже в условиях замкнутой системы управления становятся меньше: в принятых условиях по формуле (4) формируемая законом управления скорость тележки фактически не влияет на переменную  $\ddot{x}_T$ , а угол  $\varphi$  в составе вектора  $y$  связан с формируемой скоростью через интеграл, т.е. очень слабо. Последнее следует из третьего равенства в системе (2). Линейная независимость элементов  $\varphi_i$  и 1 вектор-функции  $y_i$  на скользком временном интервале, по крайней мере на переходных процессах, соблюдается.

Отсюда следует, что с уменьшением шага  $\Delta t$  устойчивое «собственное движение» невязки идентификации порождает все более узкую область ее притяжения около нуля [19]. ♦

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мещеряков В.Н., Колмыков В.В. Способы определения параметров грузов, перемещаемых мостовыми кранами с системой автоматического успокоения колебаний // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 7. – С. 79–84.

- [Mescheryakov, V.N., Kolmykov, V.V. Methods for Determining Parameters of Cargo Transported by Bridge Cranes with Automatic Swinging Suppression System // *Fundamental Research*. – 2015. – No. 7. – P. 79–84. (In Russian)]
2. Рогова Н.С., Юркевич В.Д. Разработка алгоритмов управления для перемещения груза порталным краном // *Сборник научных трудов НГТУ*. – 2017. – № 2(88). – С. 7–18. [Rogova, N.S., Yurkevich, V.D. Razrabotka algoritmov upravleniya dlya peremeshcheniya gruzha portal'nykh kranom // *Sbornik nauchnykh trudov NGTU*. – 2017. – No. 2(88). – S. 7–18. (In Russian)]
  3. Корытов М.С., Щербаков В.С., Шершнева Е.О. Обоснование значений коэффициентов регуляторов гашения колебаний груза мостового крана // *Вестник СибАДИ*. – 2017. – № 1(53). – С. 12–19. [Korytov, M.S., Sherbakov, V.S., Shersheva, E.O. Justification of Values Factor Controller Vibration Damping Shipping Bridge Cranes // *The Russian Automobile and Highway Industry Journal*. – 2017. – No. 1(53). – P. 12–19. (In Russian)]
  4. Антупов А.С., Краснова С.А. Система стабилизации положения тележки крана с использованием сигмоидальной функции // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2019. – Т. 20, № 10. – С. 609–614. [Antipov, A. S., Krasnova, S. A. Stabilization System of Convey-crane Position Via Sigmoidal Function // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. – 2019. – Vol. 20, no. 10. – P. 609–614. (In Russian)]
  5. Chen, Z.M., Meng, W.J., Zhang, J.G. Intelligent Anti-swing Control for Bridge Crane // *Journal of Central South University*. – 2012. Vol. 19, no. 10. – P. 2774–2781.
  6. Qian, D., Yi, J. Hierarchical Sliding Mode Control for Underactuated Cranes. Design, Analysis and Simulation. – Springer, 2015. – 199 p.
  7. Wu, X., Xu, K., Lei, M., He, X. Disturbance-Compensation-Based Continuous Sliding Mode Control for Overhead Cranes with Disturbances // *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*. – 2020. – 17(4). – P. 2182–2189.
  8. Qian, Y., Hu, D., Chen, Y., Fang, Y. Programming-Based Optimal Learning Sliding Mode Control for Cooperative Dual Ship-Mounted Cranes Against Unmatched External Disturbances // *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*. – 2023. – 20(2). – P. 969–980.
  9. Кабанов С.А., Никулин Е.Н., Якушев Б.Э., Якушева Д.Б. Оптимальное управление перемещением груза мостовым краном // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. – 2011. – Т. 54, № 5. – С. 56–65. [Kabanov, S.A., Nikulin, E.N., Yakushev, B.E., Yakusheva, D.B. Optimal Control over Load Movement with Bridge Crane // *Journal of Instrument Engineering*. – 2011. – Vol. 54, no. 5. – P. 56–65. (In Russian)]
  10. Romasevych, Y.O., Loveikin, V.S., Khoroshun, A.S., et al. Synthesis of Optimal Feedback Control of the Crane–Load System // *International Applied Mechanics*. – 2022. – Vol. 58. – P. 199–207.
  11. Петренко Ю.Н., Алави С.Э., Александровский С.В. Исследование работы мостового крана с контроллером нечеткой логики на основе трехмерной имитационной модели // *Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ*. – 2011. – № 3. – С. 20–25. [Petrenko, Yu.N., Alavi, S.Eh., Aleksandrovskii, S.V. Issledovanie raboty mostovogo kрана s kontrollerom nechetkoi logiki na osnove trekhmernoii imitatsionnoi modeli // *Ehnergetika. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii i ehnergeticheskikh ob"edinenii SNG*. – 2011. – No. 3. – S. 20–25. (In Russian)]
  12. Drag, L. Model of an Artificial Neural Network for Optimization of Payload Positioning in Sea Waves // *Ocean Engineering*. – 2016. – Vol. 115. – P. 123–134.
  13. Sun, N., Fang, Y., Chen, H. Adaptive Antiswing Control for Cranes in the Presence of Rail Length Constraints and Uncertainties // *Nonlinear Dynamics*. – 2015. – Vol. 81. – P. 41–51.
  14. Zhang, M., Ma, X., Rong, X., et al. Adaptive Tracking Control for Double-Pendulum Overhead Cranes Subject to Tracking Error Limitation, Parametric Uncertainties and External Disturbances // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2016. – Vol. 76–77. – P. 15–32.
  15. Круглов С.П., Аксаментов Д.Н. Метод адаптивного управления мостовым краном с прямым отслеживанием перемещения груза // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2020. – Т. 21, № 12. – С. 682–688. [Kruglov, S.P., Aksamentov, D.N. A Method of Adaptive Control of an Overhead Crane with Direct Tracking of the Load Movement // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. – 2020. – Vol. 21, no. 12. – P. 682–688. (In Russian)]
  16. Круглов С.П., Аксаментов Д.Н. Адаптивное управление мостовым краном по скорости перемещения тележки // *Доклады ТУСУР*. – 2022. – Т. 25, № 1. – С. 86–92. [Kruglov, S.P., Aksamentov, D.N. Adaptive Control of the Overhead Crane by the Trolley Speed // *Proceedings of TUSUR University*. – 2022. – Vol. 25, no. 1. – P. 86–92. (In Russian)]
  17. Круглов С.П. Адаптивная автоматизация пилотирования самолетом на больших углах атаки на основе упрощенных условий адаптируемости. – Иркутск: ИФ МГТУ ГА, 2012. – 248 с. [Kruglov, S.P. Adaptivnaya avtomatizatsiya pilotirovaniya samoletom na bol'shikh uglakh ataki na osnove uproshchennykh uslovii adaptiruемости. – Irkutsk: IF MGTU GA, 2012. – 248 s. (In Russian)]
  18. Сивухин Д.В. Общий курс физики. В 5 т. Т. I. Механика. 4-е изд. – М.: Физматлит, Изд-во МФТИ, 2005. – 560 с. [Sivukhin, D.V. Obshchii kurs fiziki. V 5 t. Tom I. Mekhanika. 4-e izd. – M.: Fizmatlit, Izd-vo MFTI, 2005. – 560 s. (In Russian)]
  19. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. Учеб. пособие для вузов. – СПб: Лань, 2015. – 624 с. [Pervozvanskii, A.A. Kurs teorii avtomaticheskogo upravleniya. Ucheb. posobie dlya vuzov. – SPb: Lan', 2015. – 624 s. (In Russian)]
  20. Лjung Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит. – 1991. – 432 с. [Ljung, L. System Identification: Theory for the User. – New Jersey: Prentice Hall Inc., 1991. – 519 p.]
  21. Круглов С.П. Адаптивное управление неминимально-фазовым скалярным объектом второго порядка с обеспечением заданных характеристик переходного процесса // *Научный вестник НГТУ*. – 2016. – № 4 (65). – С. 33–53. [Kruglov, S.P. Adaptive Control of a Non-minimal-phase Scalar Object of the Second Order with the Maintenance of the Preset Transient Characteristics // *Science Bulletin of the NSTU*. – 2016. – Vol. 64, no. 3. – P. 33–53 (In Russian)]
  22. ГОСТ 3332-54. Краны мостовые электрические общего назначения грузоподъемностью от 5 до 50 т среднего и тяжелого режимов работы. Основные параметры и размеры. – М: Изд-во стандартов, 1974. [GOST 3332-54. Krany mostovye ehlektricheskie obshchego naznacheniya gruzopod'emnost'yu ot 5 do 50 t srednego i tyazhelogo rezhimov raboty. Osnovnye parametry i razmery. – M: Izd-vo standartov, 1974. (In Russian)]



23. Жмудь В.А., Кузнецов К.А., Кондратьев Н.О. и др. Акселерометр и гироскоп MPU6050: первое включение на STM32 и исследование показаний в статике // Автоматика и программная инженерия. – 2018. – № 3 (25). – С. 9–22. [Zhud, V.A., Kuznetsov, K.A., Kondratyev, N.O., et al. Accelerometer and Gyroscope MPU6050: The First Inclusion on STM32 and the Study of its Indications in Statics // Automatics & Software Engineering. – 2018. – No. 3 (25). – P. 9–22 (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 29.06.2023,  
после доработки 13.07.2023.  
Принята к публикации 18.07.2023.

**Круглов Сергей Петрович** – д-р техн. наук,  
✉ [kruglov\\_s\\_p@mail.ru](mailto:kruglov_s_p@mail.ru)  
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9241-3352>

**Ковыршин Сергей Владимирович** – канд. техн. наук,  
✉ [sergkow@mail.ru](mailto:sergkow@mail.ru)  
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5564-0951>

ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет путей сообщения», г. Иркутск.

© 2023 г. Круглов С.П., Ковыршин С.В.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

## IDENTIFICATION-BASED SPEED CONTROL OF AN OVERHEAD CRANE WITH A REDUCED CARGO TRANSFER MODEL

S.P. Kruglov and S.V. Kovyrshin

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

✉ [kruglov\\_s\\_p@mail.ru](mailto:kruglov_s_p@mail.ru), ✉ [sergkow@mail.ru](mailto:sergkow@mail.ru)

**Abstract.** This paper considers an automatic control approach for an overhead crane trolley under the current parametric uncertainty of the crane, transported cargo, and exogenous disturbances. It generates a given trolley speed, which corresponds to the modern hardware implementation of control of cranes with asynchronous motors and frequency converters. The approach is based on a control scheme with a current parametric identification algorithm, an implicit reference model, and “simplified” adaptability conditions to track cargo movements directly. This algorithm involves a recursive least-squares method with the forgetting factor. Unlike previous publications on the topic, the idea is to use a reduced model of the “crane–cargo” object when moving the cargo along one horizontal axis. In this case, it is necessary to estimate only two parameters; moreover, the construction of the control algorithm becomes simpler and the closed-loop control system has a better performance. The stability of the closed-loop control system is proved and requirements for the parameters of the assigned reference motion are found. Due to the self-tuning property of the control system, the approach can be obviously generalized to construct an overhead crane control system along two horizontal axes and three axes (with simultaneous vertical movement of the cargo). A model example is given to demonstrate the implementability of this crane control system based on modern controllers and sensors.

**Keywords:** automatic control of overhead crane, adaptive control system, parametric identification algorithm, current parametric uncertainty, stability of the closed-loop control system.

**Funding.** This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 23-29-00654; <https://rscf.ru/project/23-29-00654/>.

## ФОРМИРОВАНИЕ ПРОГРАММНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ АЭРОГЕОФИЗИЧЕСКОЙ СЪЕМКЕ

А.М. Гараков, А.И. Гладышев

**Аннотация.** Управление подвижными объектами при аэрогеофизической съемке требует решения определенных задач, связанных с формированием программных (заданных) траекторий, которые должны быть оптимальными. Наиболее очевидным критерием оптимальности является время, за которое объект из начального положения переходит в положение, требуемое полетным заданием. Задачи, в которых рассматривают такой критерий, известны как задачи быстрогодействия. Поскольку аэрогеофизическая съемка традиционно выполняется по сети параллельных маршрутов, в данной работе рассмотрены две задачи быстрогодействия. Первая – заход на очередной маршрут съемки. Вторая – сближение с прямолинейным участком текущего маршрута съемки. Для каждого из режимов поставлены и решены задачи быстрогодействия. Результат решения – программные траектории захода и сближения. Представлен формальный анализ решений и описаны способы формирования оптимальных траекторий и соответствующих управлений, реализующих эти траектории. Описана реализация полученных алгоритмов в составе бортового программного обеспечения.

**Ключевые слова:** машина Дубинса, задача быстрогодействия, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина.

### ВВЕДЕНИЕ

Планирование траекторий движения объектов в задачах автоматического управления применяется в различных технических системах – например, для управления пилотируемыми аппаратами, беспилотными системами или же различными робототехническими комплексами и т. д. Одним из качественных критериев оптимальности запланированных траекторий можно рассматривать минимальное время их прохождения подвижным объектом.

Часто при планировании оптимальных траекторий кратчайшей длины рассматривают систему, известную как машина Дубинса [1, 2]. Такая модель задается нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка. Две фазовые переменные характеризуют положение объекта управления на плоскости, а третья переменная – угол направления вектора скорости. Величина скорости считается постоянной. Скалярное управляющее воздействие при геометрических ограничениях определяет мгновенный радиус разворота.

Первым эту систему рассматривал А.А. Марков в 1887 г. [3]. Машина Дубинса исследуется как управляемый объект с простейшей моделью движения в горизонтальной плоскости. С точки зрения геометрии траектория Дубинса представляет собой кратчайшую кривую ограниченной кривизны, соединяющую две точки на плоскости в евклидовом пространстве. В 1957 г. Л. Дубинс доказал [4], что оптимальная по быстроддействию траектория является траекторией, составленной из сегментов дуг окружностей максимальной кривизны и прямых линий.

Управление движением вдоль траектории, составленной из фрагментов, возникает во многих приложениях: управление манипуляторами на автоматизированных линиях сборок, мониторинг тепловых и энергетических сетей, аэросъемочные работы определенной территории по сети параллельных маршрутов и т. д. В данной работе траектории Дубинса рассматриваются применительно к управлению летательным аппаратом (ЛА) при выполнении аэрогеофизических съемочных работ.



При выполнении таких работ требуется последовательно переключать два основных режима управления:

- заход на очередной участок траектории с заданным курсом,
- движение вдоль прямолинейного участка траектории с минимальным боковым отклонением.

Существуют различные подходы к решению данной задачи. В случае пилотируемого объекта навигационную информацию для пилота формируют программные комплексы, в основе которых могут быть заложены те или иные алгоритмы управления. Один из распространенных подходов предполагает демонстрацию на графических дисплеях карты с изображенными на ней линиями пути и положением управляемого объекта [5, 6]. Недостатками таких систем информационного обеспечения можно считать избыточную для восприятия пилота информацию и отсутствие алгоритмов управления. Имеются подходы, в которых для пилотируемой авиации вырабатываются управляющие команды, позволяющие оптимизировать заход на траекторию и улучшить прохождение прямолинейного участка [7, 8]. Основа одного из описанных в этих работах подходов – построение новой программной траектории в каждый отсчет времени, отвечающий новой навигационной информации, и использование ПИД-регулятора для демонстрации пилоту отклонения от программной траектории. В работах [7, 8] акцент делается прежде всего на алгоритмическую составляющую процесса управления. Учитывается множество параметров, прямо или косвенно влияющих на качество формируемой в конечном итоге навигационной информации. А сама информация доставляется пилоту на дисплей в привычной для пилота форме индикатора траекторного управления.

Настоящая статья посвящена алгоритмам управления движением ЛА при выполнении аэрогеофизической съемки. Для реализации этих алгоритмов в каждый момент времени вычисляется программная траектория, отклонение от которой выводится на индикатор пилота. Программные траектории получаются как решение одной из двух задач быстрого действия, возникающих на этапе захода ЛА на очередной маршрут и при сближении с прямолинейным участком текущего маршрута съемки. Управление по высоте выносится за рамки данной работы. Как правило, пилот выполняет съемку с обтеканием рельефа, и управление высотой ЛА представляет собой отдельную сложную задачу [9].

## 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Наиболее общий вид кусочно-фрагментарной траектории в географических координатах показан на рис. 1. Здесь режиму «заход» соответствуют фрагменты (2–3), (4–5), а режиму «стабилизация на маршруте» фрагменты (1–2), (3–4), (5–6).

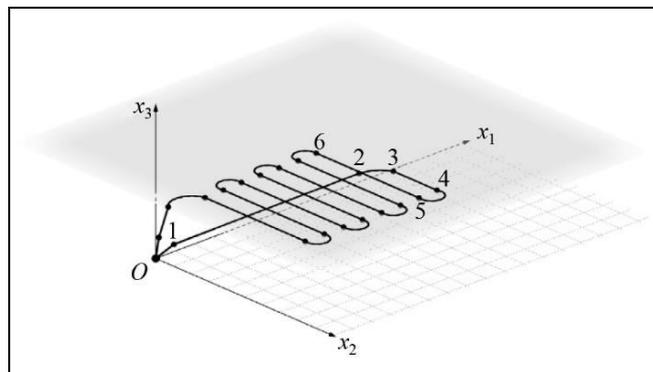


Рис. 1. Пример фрагментарной траектории

Будем рассматривать упрощенную постановку задачи. Основные допущения следующие. Во-первых, высота полета в данной работе не рассматривается, задача решается в проекции на горизонтальную плоскость. Во-вторых, на данном этапе исследований пренебрегается изменением горизонтальной скорости объекта. Наконец, предполагается, что управление ЛА сводится к кратковременным моментам действия постоянного вертикального углового ускорения для изменения направления движения. В случае самолета это соответствует кратковременному отклонению элеронов на фиксированный угол. При достижении определенного угла крена управление прекращается.

В случае скоординированного разворота, когда он совершается так, что сумма центробежного и гравитационного ускорений компенсируется подъемной силой крыла, угол крена при фиксированной скорости однозначно связан с радиусом разворота.

Введем следующие обозначения:  $T$  – время (с);  $x_1, x_2$  – локальные декартовы координаты объекта (м);  $\varphi$  – курс (путевой угол) движения объекта (рад);  $\omega$  – скорость изменения курса (рад/с);  $V$  – модуль горизонтальной скорости движения объекта (м/с);  $U$  – управляющее воздействие (рад/с<sup>2</sup>).

Уравнения движения ЛА [8] с учетом сделанных предположений и введенных обозначений можно записать в следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = V \cos \varphi, \\ \dot{x}_2 = V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\omega} = U. \end{cases} \quad (1)$$

Приведем систему уравнений (1) к безразмерной форме. Для этого введем следующие масштабные коэффициенты:  $V^* = V = 50 \text{ м/с}$  – характерная скорость ЛА, например самолета Ан-3; максимальное значение угла крена –  $\gamma^* = 0,35 \text{ рад}$ , или примерно 20 градусов. Запишем радиус скоординированного разворота  $R^*$ .

Согласно схеме, приведенной на рис. 2, соотношение для радиуса скоординированного разворота будет иметь следующий вид:

$$\tan \gamma^* = \frac{|\vec{F}_{\text{цб}}|}{|\vec{F}_{\text{тяж}}|} = \frac{m\omega^* R^*}{mg} = \frac{V^{*2}}{gR^*} \Rightarrow R^* = \frac{V^{*2}}{g \tan \gamma^*}, \quad (2)$$

где  $m$  – масса ЛА;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $|\vec{F}_{\text{цб}}|$  – модуль центробежной силы;  $|\vec{F}_{\text{тяж}}|$  – модуль силы тяжести, откуда  $R^* \approx \frac{2500}{10 \cdot 0,36} \approx 700 \text{ м}$ . Теперь можно получить константу времени движения по траектории как  $T_1 = \frac{R^*}{V^*} \Rightarrow T_1 = \frac{700}{50} \approx 14 \text{ с}$ . Это время, за которое угол курса изменяется на один радиан. Также мы должны взять в рассмотрение постоянную времени для четвертого уравнения системы (1) – время задания угла крена  $T_2 \sim 1 \text{ с}$ . Значение времени  $T_2$  выбрано опытно-экспериментальным путем при выполнении полетов на ЛА, таких как Ан-2, Ан-3, Cessna и др.

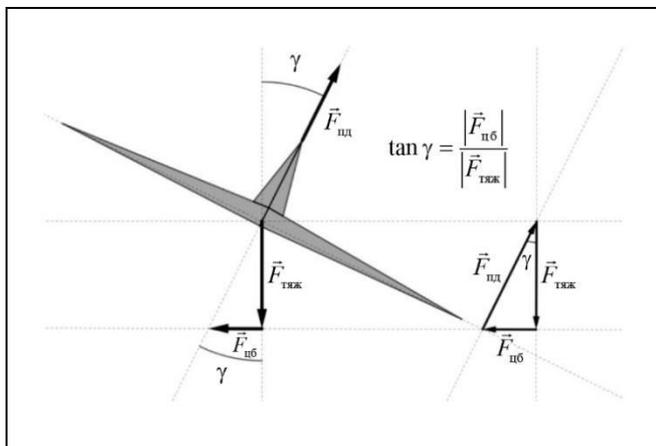


Рис. 2. Силы, действующие на ЛА

Очевидно, что характерное значение угловой скорости  $\omega^* = \frac{V^*}{R^*} = \frac{1}{T_1} \Rightarrow \omega^* = \frac{1}{14} \sim 0,07 \text{ рад/с}$ , а угловое ускорение  $U^* = \frac{\dot{\omega}^*}{T_2} = \frac{1}{T_1 T_2} \Rightarrow U^* = \frac{1}{1 \cdot 14} \sim 0,07 \text{ рад/с}^2$ .

Важно понимать, что величина  $U$  в уравнении (1) отлична от нуля только в моменты изменения угловой скорости, т. е. на интервалах времени  $\Delta T \leq T_2$ .

Таким образом, решение системы (1) для угла курса  $\varphi$  – это функция, линейная на интервалах времени порядка  $T_1$  и более и квадратичная на коротких переходных участках.

Введем безразмерные величины

$$t = \frac{T}{T^*}, \quad x = \frac{x_1}{R^*}, \quad y = \frac{x_2}{x_2^*}, \quad w = \frac{\omega}{\omega^*}, \quad u = \frac{U}{U^*},$$

где  $T^* = T_1$  или  $T_2$ ; тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{T^*}{T_1} \cos \varphi, \\ \dot{y} = \frac{T^*}{T_1} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \frac{T^*}{T_1} w, \\ \dot{w} = \frac{T^*}{T_2} u. \end{cases} \quad (3)$$

Применяя теорию разделения движений [10], можно рассмотреть систему (3) в «быстром» ( $T^* = T_2$ ) и в «медленном» ( $T^* = T_1$ ) времени. Рассмотрение в «быстром» времени имеет смысл только на интервале действия управления  $u = \pm 1$ . Действительно, если ввести малый параметр  $\varepsilon = \frac{T_2}{T_1} \sim 0,07$ , то в нулевом приближении объект неподвижен и меняется только безразмерная угловая скорость  $w$ :

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{w} = u.$$

В «медленном» времени малый параметр возникает только в последнем уравнении системы (3):

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \varphi, \\ \dot{y} = \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = w, \\ \dot{w} = 0, \end{cases} \quad (4)$$



Таким образом, исходная система уравнений (1), описывающая движение нашего объекта, сведена к уравнению движений меньшей размерности (4), в котором управлением является величина  $\omega$ , ограниченная значениями  $[-1, 1]$ . В размерном времени это соответствует диапазону изменения угловой скорости от  $-0,07$  до  $+0,07$  рад/с.

Согласно теореме Пуанкаре [8] решение системы (4) на интервале времени  $T_1$  будет отличаться от решения системы (1) на величину порядка  $\varepsilon$ . Поскольку предполагается постоянно вычислять оптимальную траекторию исходя из текущих координат, которые обновляются несколько раз в секунду, данное расхождение не оказывает влияния на дальнейшее решение задачи управления.

## 2. ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

### 2.1. Уравнения движения

Будем рассматривать систему (4) в размерном варианте, что соответствует задаче (1) без последнего уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = V \cos \varphi, \\ \dot{x}_2 = V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \omega, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\omega \in [-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$  – управляющее воздействие.

### 2.2. Задача быстрогодействия для режима «заход»

Прежде чем ставить задачу быстрогодействия, введем новые переменные  $(y_1, y_2, y_3)$  для системы (5) таким образом, чтобы начало координат  $O$  совпадало с началом маршрута захода, ось  $Oy_1$  совпадала с направлением этого маршрута, а ось  $Oy_2$  дополняла систему координат до правой ортонормированной пары; параметр  $y_3$  задает угол отклонения направления движения от направления маршрута в радианах:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos \varphi_0 + x_2 \sin \varphi_0 - x_{10}, \\ y_2 = -x_1 \sin \varphi_0 + x_2 \cos \varphi_0 - x_{20}, \\ y_3 = \varphi - \varphi_0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $(x_{10}, x_{20})$  – координаты начала маршрута  $O$ ;  $\varphi_0$  – курс маршрута.

С учетом замены (6) система (5) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = V \cos y_3, \\ \dot{y}_2 = V \sin y_3, \\ \dot{y}_3 = \omega. \end{cases} \quad (7)$$

Функционалом качества движения объекта будет интегральное выражение

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \rightarrow \min. \quad (8)$$

Учитывая выражения (7) и (8), рассмотрим задачу быстрогодействия для режима «заход»:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = V \cos y_3, \\ \dot{y}_2 = V \sin y_3, \\ \dot{y}_3 = \omega, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = y_1^0, \\ y_2(0) = y_2^0, \\ y_3(0) = y_3^0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(t_f) = 0, \\ y_2(t_f) = 0, \\ y_3(t_f) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь параметры  $\{y_1^0, y_2^0, y_3^0\}$  – заданное начальное состояние объекта;  $t_f$  – минимизируемое время захода.

**Требуется:** найти оптимальное управление  $\omega^+(t)$  и соответствующую ему траекторию  $y^+(t)$ , при реализации которых управляемый объект из заданного начального состояния переходит в начало координат за минимальное время  $t_f$  [11].

Для решения задачи (9) в соответствии с принципом максимума Понтрягина введем вектор сопряженных переменных  $(\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ , выпишем гамильтониан и сопряженную систему уравнений [11]

$$H = \psi_1 V \cos y_3 + \psi_2 V \sin y_3 + \psi_3 \omega, \quad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_3 = \psi_1 V \sin y_3 - \psi_2 V \cos y_3, \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{где } \dot{\psi}_i = \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Согласно условию принципа максимума для задачи быстрогодействия необходимо  $\exists \psi(t) \neq 0$  решения системы (10) такого, что  $\max_{\omega} H(\psi, y^+, \omega) = H(\psi, y^+, \omega^+) \equiv \text{const} \geq 0$  [11].

Очевидно, что из первого уравнения системы (10)  $\psi_1(t) \equiv \psi_1^* = \text{const}$  и из второго уравнения  $\psi_2(t) \equiv \psi_2^* = \text{const}$ . Введем следующую замену переменных для  $\psi_1^*, \psi_2^* : \psi_1^* = \rho \cos \alpha, \psi_2^* = \rho \sin \alpha$ . Тогда  $\rho = \sqrt{\psi_1^{*2} + \psi_2^{*2}}$ , а  $\tan \alpha = \frac{\psi_2^*}{\psi_1^*}$ . С учетом данной замены перепишем гамильтониан:

$$H = \rho V \cos(y_3 - \alpha) + \psi_3 \omega. \quad (11)$$

Условия для задачи быстрогодействия: а)  $H \equiv \text{const}$ ; б)  $H = \max_{\omega}$ .

Если  $\rho = 0$ , то  $H = \psi_3 \omega$  ( $\psi_3 \neq 0!$ ). Следовательно,  $\omega^+(t) = \text{sign } \psi_3 = \begin{cases} \omega_{\max}, & \psi_3 > 0, \\ -\omega_{\max}, & \psi_3 < 0, \end{cases}$  так как при

$$|\omega| < \omega_{\max} \Rightarrow \psi_3 \text{ sign } \psi_3 > \psi_3 \omega \Rightarrow \psi_3 = C = \text{const.}$$

Условия а) и б) выполнены.

При  $\rho \neq 0$  в формуле (11), управление будет

$$\omega^+(t) = \begin{cases} \omega_{\max}, & \psi_3 > 0, \\ 0, & \psi_3 = 0, \\ -\omega_{\max}, & \psi_3 < 0. \end{cases}$$

Здесь  $\psi_1^* \neq 0$  и/или  $\psi_2^* \neq 0 \Rightarrow \psi_3^* = \psi_1^* y_2^+(t) - \psi_2^* y_1^+(t) + C$ ,  $C = \text{const}$ , где  $y_1^+(t)$ ,  $y_2^+(t)$  – оптимальная траектория.

Значение  $\omega^+(t) = 0$  также является решением задачи быстродействия, так как, когда  $\omega(t) = 0$  в формуле (11), то при  $(y_3 - \alpha) = \pm \frac{\pi}{2}$  также достигается значение максимума  $H = \rho V \cos(y_3 - \alpha) = \text{const}$ . Данное решение соответствует  $\psi_3^* = 0$ , что отвечает движению по прямой [12], так как  $\psi_1^*$ ,  $\psi_2^*$ ,  $C$  – константы:

$$\psi_1^* y_2^+ - \psi_2^* y_1^+ + C = 0. \quad (12)$$

Управления, удовлетворяющие принципу максимума, могут изменять свое значение только на прямой (12), которая называется прямой переключения. Движение вне прямой будет представлять собой дугу окружности.

Решение задачи быстродействия для объекта, движение которого описывается уравнениями (7) – это решение задачи Дубинса [4]. Полученные оптимальные по быстродействию траектории будут называться траекториями Дубинса.

На рис. 3 оптимальная траектория состоит из трех фрагментов. Первый – дуга  $L_a A$  окружности с центром в точке  $C_1$ , второй – отрезок  $AB$ , сопряженный с дугой  $L_a A$  в точке касания с окружностью  $C_1$ , а третий – это дуга  $BO$  окружности с центром  $C_2$ . Величины  $y_i^0$ ,  $i=1, 2, 3$  – начальные условия задачи (8):  $y_1^0$  – начальное значение продольного отклонения от начала маршрута,  $y_2^0$  – начальное значение поперечного отклонения,  $y_3^0$  – начальное значение угла отклонения курса объекта от направления маршрута. Прямая переключений представлена как отрезок прямой с концами  $AB$ .

Первое переключение происходит при переходе с фрагмента  $L_a A$  на  $AB$ . Второе – при переходе с  $AB$  на  $BO$ . Маршрут захода ограничен участком  $OD$ .

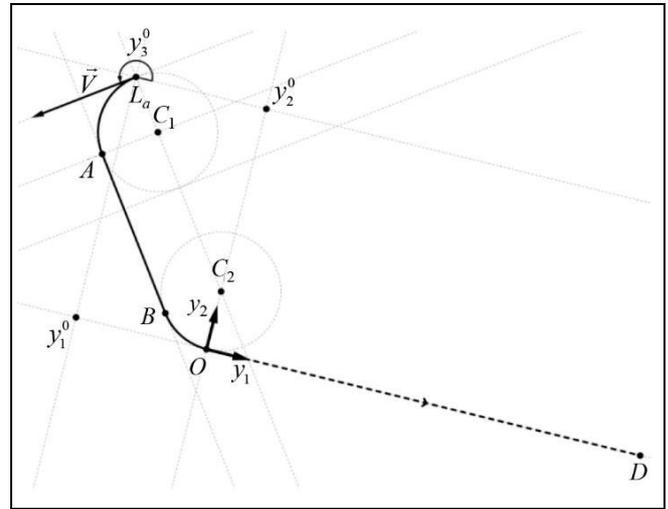


Рис. 3. Пример траектории для режима «заход»

### 2.3. Задача быстродействия для режима «сближения»

Задача сближения заключается в следующем. Если ЛА ушел с маршрута съемки, необходимо его вернуть на соответствующую прямую максимально быстро. При этом уже не важно, в какой именно точке вдоль прямой произойдет возврат. Получается, что задача (9) решается для меньшей размерности:  $y_2$  – отклонение от прямой в метрах, а  $y_3$  – угол отклонения курса от направления маршрута:

$$\begin{cases} \dot{y}_2 = V \sin y_3, & \begin{cases} y_2(0) = y_2^0, \\ y_2(t_f) = 0, \end{cases} \\ \dot{y}_3 = \omega, & \begin{cases} y_3(0) = y_3^0, \\ y_3(t_f) = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

Запишем гамильтониан для выражения (13):

$$H = \psi_2 V \sin y_3 + \psi_3 \omega. \quad (14)$$

Соответствующая сопряженная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_3 = \psi_2 V \cos y_3. \end{cases} \quad (15)$$

Следовательно,  $\psi_2(t) \equiv \psi_2^* = \text{const}$ .

Анализируя уравнение (14), имеем, что если  $\psi_2^* = 0 \Rightarrow \psi_3^* = \text{const} \neq 0$ , тогда  $\omega^+(t) = \text{sign } \psi_3 = \begin{cases} \omega_{\max}, & \psi_3 > 0, \\ -\omega_{\max}, & \psi_3 < 0, \end{cases}$  так как  $\psi(t) \neq 0$ . Если  $\psi_3^* \equiv 0$  при  $\psi_2^* \neq 0$ , тогда в силу второго уравнения системы (15) управление



$$\omega^+(t) = \begin{cases} \omega_{\max}, \psi_3 > 0, \\ 0, \psi_3 = 0, \\ -\omega_{\max}, \psi_3 < 0. \end{cases}$$

Вариант  $\omega^+ = 0$  будет иметь место только при  $y_3 = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Отметим, что выражение (14) эквивалентно формуле (11) при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  и  $\psi_2 = \rho$ . Таким образом, задача сближения – это частный случай задачи захода.

На рис. 4 изображены два варианта траектории сближения. Первый вариант оптимальной траектории, как и в режиме «заход», имеет два переключения. Второй – одно переключение, которое происходит в точке  $A$ , а именно при переходе с фрагмента  $L_a A$  на фрагмент  $AB$ .

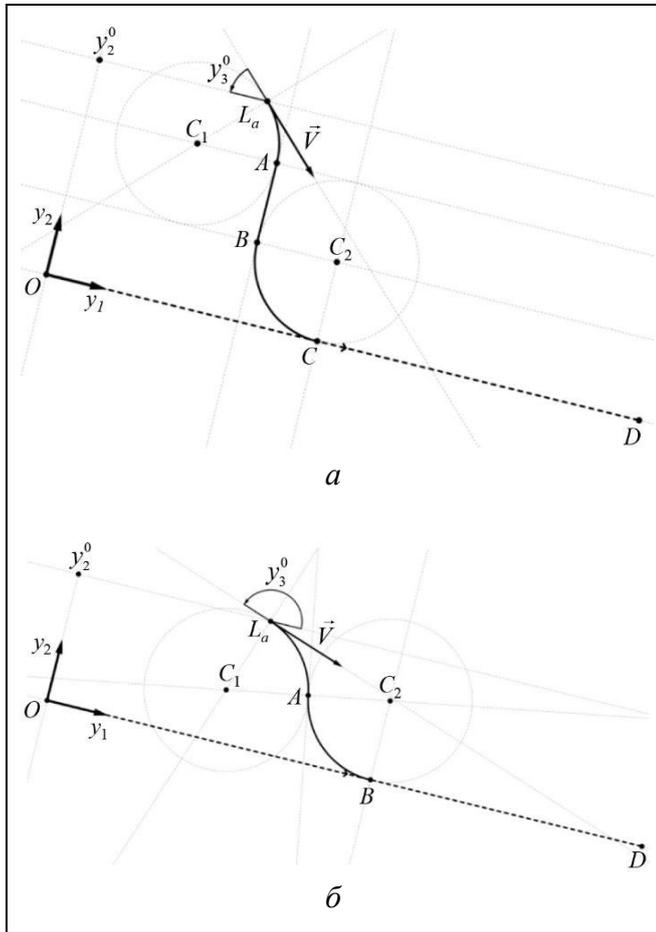


Рис. 4. Примеры траекторий для режима «сближение»:  $a$  – траектория с двумя переключениями,  $b$  – с одним

### 2.4. Численное решение задачи быстродействия

Введем обозначения для дуги окружности и отрезка прямой следующим образом:  $C$  – дуга,  $S$  –

отрезок. Согласно теореме, доказанной в работе [13], траектория Дубинса будет принадлежать типу  $CSC$  и  $CCC$  или же подмножеству этих типов. Дуга  $C$ , для которой  $\dot{y}_3 > 0$ , будет дугой левого поворота  $L$  (левая дуга), а при  $\dot{y}_3 < 0$  дугой правого поворота  $R$  (правая дуга). С учетом направления поворота траектория Дубинса может быть охарактеризована как один из типов, представленных в наборе

$$\{LRL, RLR, LSL, LSR, RSL, RSR\},$$

или же как подмножество одного из этих типов, например  $LR, RL, RS, L$  и т. д., что в общем дает 15 возможных вариантов. Предложенный в работе [13] подход для получения кратчайшей (оптимальной) траектории Дубинса заключается в параметризации задачи быстродействия по конечному времени  $t_f$  и моментам времени переключений.

Пусть  $L_{\xi_1}$  – левая дуга длины  $V\xi_1$ ,  $R_{\xi_2}$  – правая дуга длины  $V\xi_2$  и  $S_{\xi_3}$  – отрезок длиной  $V\xi_3$ . Также и для дуги  $L_{\xi_4}$  введем длину  $V\xi_4$ , а для дуги  $R_{\xi_5}$  длину  $V\xi_5$ . В результате получаем следующую последовательность:

$$L_{\xi_1} R_{\xi_2} S_{\xi_3} L_{\xi_4} R_{\xi_5}.$$

С одной стороны, например, тип траектории  $RLR$  можно получить, когда  $\xi_1 = \xi_3 = 0$ , а  $\xi_2, \xi_4, \xi_5 > 0$ . С другой стороны, тип  $LR$  может быть получен, если  $\xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0$ , а  $\xi_1, \xi_2 > 0$ , или же  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ ,  $\xi_4, \xi_5 > 0$ . Начальное время положим как  $t_0 = 0$ , а конечное как  $t_5 = t_f$ . Также определим моменты времени переключений  $t_j, j = 1, \dots, 4$  такие, что

$$\xi_j = t_j - t_{j-1}, j = 1, \dots, 5.$$

Отметим, что вдоль дуги  $L$  управление будет  $\omega^+(t) = \omega_{\max}$ , а в случае  $R$ :  $\omega^+(t) = -\omega_{\max}$ . Вдоль отрезка  $S$ :  $\omega^+(t) = 0$ . С учетом изложенного численный подход в решении задач быстродействия будет следующим. Для  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$

$$y_3(t) = y_3(t_{j-1}) + \omega^+(t)(t - t_{j-1}), \text{ если } j = 1, \dots, 5,$$

$$y_1(t) = \begin{cases} y_1(t_{j-1}) + V(\sin y_3(t) - \sin y_3(t_{j-1})) / \omega^+(t), \\ \text{если } j = 1, 2, 4, 5, \\ y_1(t_{j-1}) + V \cos y_3(t)(t - t_{j-1}), \\ \text{если } j = 3, \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} y_2(t_{j-1}) + V(\cos y_3(t) - \cos y_3(t_{j-1})) / \omega^+(t), & \text{если } j = 1, 2, 4, 5, \\ y_2(t_{j-1}) + V \sin y_3(t)(t - t_{j-1}), & \text{если } j = 3, \end{cases}$$

где

$$\omega^+(t) = \begin{cases} \omega_{\max}, & \text{если } j = 1, 4, \\ -\omega_{\max}, & \text{если } j = 2, 5, \\ 0, & \text{если } j = 3. \end{cases}$$

Решение задачи быстрогодействия сводится к решению оптимизационной задачи

$$\begin{cases} \min t_f = \sum_{j=1}^5 \xi_j, \\ y_1^0 + \frac{V}{\omega_{\max}}(-\sin y_3^0 + 2 \sin y_3^1 - 2 \sin y_3^2 + \\ + 2 \sin y_3^4) + V \xi_3 \cos y_3^2 = 0, \\ y_2^0 + \frac{V}{\omega_{\max}}(\cos y_3^0 - 2 \cos y_3^1 + 2 \cos y_3^2 - \\ - 2 \cos y_3^4 + 1) + V \xi_3 \sin y_3^2 = 0, \\ \xi_j \geq 0, \text{ для } j = 1, \dots, 5, \end{cases} \quad (16)$$

где  $y_3^1 = y_3^0 + \omega_{\max} \xi_1$ ,  $y_3^2 = y_3^1 - \omega_{\max} \xi_2$ ,  $y_3^4 = y_3^2 + \omega_{\max} \xi_4$ . Подставляя  $y_3^1$ ,  $y_3^2$ ,  $y_3^4$  в задачу (16), получаем конечномерную задачу нелинейной оптимизации.

Описанный подход численного решения задач быстрогодействия более подробно изложен в работе [13]. Там же представлен обобщенный анализ подобного рода задач и возможные варианты формируемых траекторий.

Отметим, что в действительности траектории Дубинса нельзя реализовать при траекторном управлении реальных подвижных объектов. Здесь они используются лишь как программные траектории.

### 3. УПРАВЛЕНИЕ ИНДИКАТОРОМ ПИЛОТА

Описанный подход формирования программных траекторий захода для ЛА при выполнении аэрогеофизических работ применяется в программно-аппаратном комплексе NavDat [7, 14, 15]. На индикатор пилота подается расхождение угловой скорости для программной траектории и для реальной текущей траектории ЛА, параметры которой определяются по данным спутниковой навигационной системы (СНС). Согласно данным СНС

можно получить точное время, координаты (широта и долгота), высоту над уровнем моря и скорость движения точки.

Угловая скорость определяется по формуле

$$\omega = \frac{V}{R},$$

которая выражает связь через горизонтальную скорость  $V$ ;  $R$  – радиус скоординированного разворота.

Для программной и реальной текущей траекторий модуль скорости  $V$  берется по данным СНС. Величина радиуса  $R$  для программной траектории задается, а для текущей траектории движения ЛА вычисляется по формуле (2) с учетом ограничения на угол крена ЛА.

В режиме «сближение» программа NavDat использует ПИД-регулятор на основе текущего бокового отклонения. Как следствие, реализованный в ней алгоритм требует изменений настройки регулятора, если существенно изменяется скорость полета ЛА.

В данной работе алгоритм управления в режиме сближения строится точно так же, как и в режиме захода. При этом единственный параметр настройки алгоритма – максимальная угловая скорость объекта, который напрямую связан с максимально допустимым углом крена.

Требования по боковому уклону от маршрута съемки регламентируются техническим заданием. При этом при съемках с межмаршрутным расстоянием 100 м (масштаб съемки 1:10 000) допустимое боковое уклонение может быть 15–25 м, а при межмаршрутных расстояниях 1000 м (1:100 000) пилоту позволяет отклониться на 100–200 м [16].

Чтобы избежать чрезмерных нагрузок на пилота, предлагается при расчете программной траектории в режиме сближения брать не предельное значение угла крена (предельную угловую скорость), а минимально допустимое, которое позволит построить программную траекторию сближения, не пересекая границы коридора, в котором требуется удерживать ЛА (рис. 5.).

На рис. 5 представлены два варианта траекторий с одним переключением и общей начальной точкой  $L_aA$ . Первый – оптимальная траектория, сформированная дугами окружностей с центрами  $C_1$  и  $C_2$ . Переключение происходит в точке  $A$  при переходе с фрагмента  $L_aA$  на фрагмент  $AB$ . Второй – допустимая траектория, образованная дугами окружностей большего радиуса, чем в первом случае. Переключение выполняется в точке  $C$  на сопряжении участков  $L_aC$  и  $CF$ .

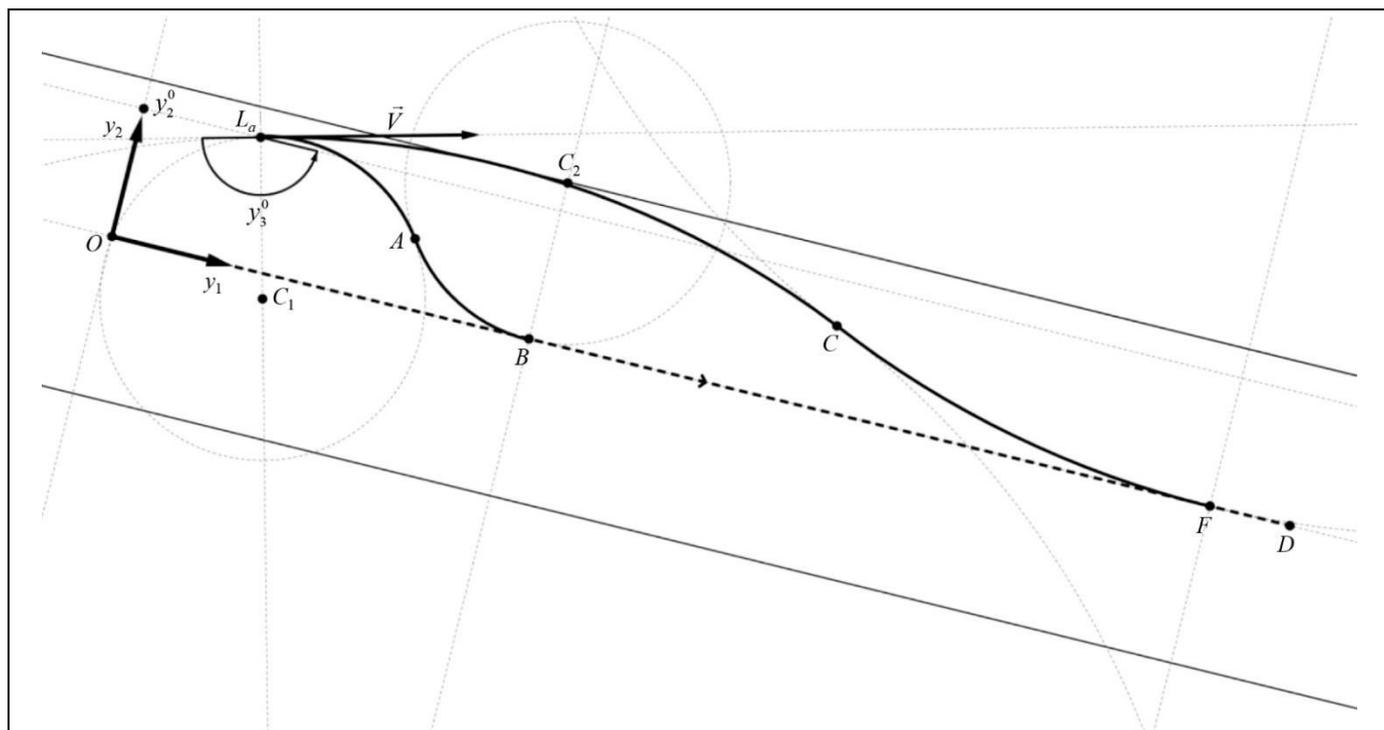


Рис. 5. Вариант допустимого сближения

На рис. 6 изображен планшетный компьютер с установленной программой «Индикатор пилота». Дисплей разделен на три окна. В первом окне расположен индикатор в виде перекрестия, информирующий пилота о его положении относительно программной траектории. Во втором – навигационная панорама с изображением маршрутов и другой необходимой информацией. Сбоку в виде списка расположен блок, информирующий о статусе устройств, подключенных к аппаратно-программному комплексу NavDat.

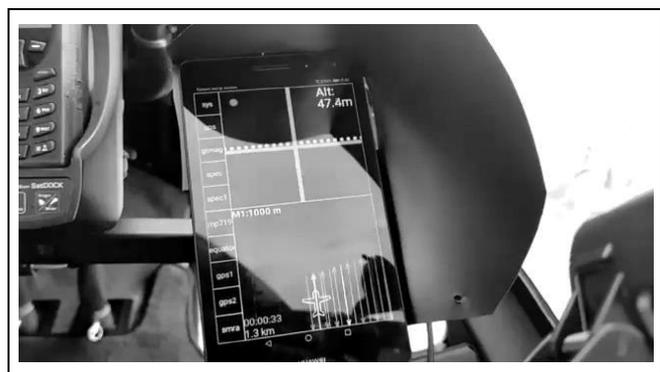


Рис. 6. Индикатор пилота

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы планирования оптимальных траекторий подвижных объектов имеют достаточно широ-

кое применение в различных системах. В системах с многорежимным характером движения необходимо учитывать ограничения при переходе с одного режима движения на другой. Возникающие при этом задачи планирования оптимальных по быстродействию траекторий решаются с учетом ограничений и с применением классических подходов, таких как принцип максимума Понтрягина.

В данной работе была исследована модель движения объекта на плоскости, известная как машина Дубинса, применительно к движению ЛА при выполнении захода на маршрут и сближения с заданной траекторией. Представлен формальный анализ оптимального синтеза траекторий и управлений, реализующих эти траектории для двух таких режимов. Описанная методика позволяет применять единый подход формирования оптимальной траектории как для режима захода, так и для режима сближения.

Предложен вариант перехода от оптимального к допустимому полетным заданием управлению, которое позволяет снизить нагрузку на пилота.

Изложенные методы были применены для модификации программного обеспечения NavDat, позволяющего формировать оптимальную программную траекторию и осуществлять проводку ЛА по заданному маршруту. После вычислений вся необходимая информация в достаточно удобной форме выдается пилоту на «Индикатор пилота».

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Nguyen, T.K., Pham, D.H., Nguyen, Q.C., et al.* An Optimal Smooth-Path Motion Planning Method for a Car-like Mobile Robot // *Journal of Technical Education Science*. – 2023. – Iss. 75A. – P. 20–30.
2. *Kumar, D.P., Darbha, S., Manyam, S.G. and Casbeer, D.* The Weighted Markov-Dubins Problem // *IEEE Robotics and Automation Letters*. – 2023. – Vol. 8, no. 3. – P. 1563–1570.
3. *Марков А.А.* Некоторые примеры решений специального класса задач на наибольших и наименьших количествах. – Сообщ. Харьковск. мат. общ. – 1887. – Т. 1. – С. 250–276. [*Markov, A.A.* Nekotorye primery reshenii spetsial'nogo klassa zadach na naibol'shikh i naimen'shikh kolichestvakh. – Soobshch. Khar'kovsk. mat. obshch. – 1887. – T. 1. – S. 250–276. (In Russian)]
4. *Dubins, L.E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // *American Journal of Mathematics*. – 1957. – Vol. 79, iss. 3. – P. 497–516.
5. *Жодзишский П.Ю., Пухватов В.А.* Повышение эффективности выполнения аэрогеофизических исследований // *Геопрофи*. – 2010. – № 2. – С. 23–25. [*Zhodzishsky, P.Yu., Puhvatov, V.A.* Improvement of Airborne Geophysical Studies Efficiency // *Geoprofi*. – 2010. – No. 2. – P. 23–25. (In Russian)]
6. *Тригубович Г.М., Шевчук С.О., Косарев Н.С., Никитин В.Н.* Комплексная технология навигационного и геодезического обеспечения аэромагнитных исследований // *Гироскопия и навигация*. – 2017. – № 1. – С. 93–107. [*Trigubovich, G.M., Shevchuk, S.O., Kosarev, N.S., Nikitin, V.N.* Complex Technology of Navigation and Geodetic Support of Airborne Electromagnetic Surveys // *Gyroscopy and Navigation*. – 2017. – Vol. 8, no. 3. – P. 226–234.]
7. *Каршаков Е.В.* Особенности алгоритмов управления летательным аппаратом при аэросъемке // *Проблемы управления*. – 2012. – № 3. – С. 71–76. [*Karshakov, E.V.* Aircraft Control Algorithms Features in Case of Airborne Surveying // *Control Sciences*. – 2012. – No. 3. – P. 71–76. (In Russian)]
8. *Волковицкий А.К., Гаракоев А.М.* Алгоритмы управления движением по фрагментарной траектории // *Материалы XVI Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого)*. – Москва, 2022. – С. 101–105. [*Volkovickij, A.K., Garakoev, A.M.* Algoritmy upravleniya dvizheniem po fragmentarnoj traektorii // *Materialy XVI Mezhdunarodnoj konferencii «Ustojchivost' i kolebanija nelinejnyh sistem upravlenija» (konferencija Pjaticnogo)*. – Moscow, 2022. – P. 101–105. (In Russian)]
9. *Karshakov, E.V., Shevchenko, A.M., Garakoev, A.M.* Formation of a Director Index to Assist the Pilot in Conducting Airborne Geophysical Survey // *International Workshop on Navigation and Motion Control (NMC 2020)*. – Samara, 2020. – P. 1–10.
10. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. – М.: Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 1995. – 224 с. [*Novozhilov, I.V.* Frakcionnyj analiz. – M.: Izd-vo meh-mat f-ta MSU, 1995. – 224 p. (In Russian)]
11. *Александров В.В., Парусников Н.А., Лемак С.С., Злочевский С.И.* Введение в динамику управляемых систем. – М.: МГУ, 1993. – 181 с. [*Aleksandrov, V.V., Parusnikov, N.A., Lemak, S.S., Zlochevskii, S.I.* Vvedenie v dinamiku upravlyаемых систем. – M.: MSU, 1993. – 181 p. (In Russian)]
12. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота // *Тр. ИММ УрО РАН*. – 2018. – Т. 24, № 1. – С. 143–155. [*Packo, V.S., Fedotov, A.A.* Mnozhestvo dostizhivosti v moment dlja mashiny Dubinsa v sluchae odnostoronnego povorota // *Tr. IMM UrO RAN*. – 2018. – Vol. 24, no. 1. – P. 143–155. (In Russian)]
13. *Каца, С.У.* Markov–Dubins Path via Optimal Control Theory // *Comput Optim Appl*. – 2017. – Vol. 68. – P. 719–747. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10589-017-9923-8>.
14. *Волковицкий А.К., Каршаков Е.В., Павлов Б.В.* Структура алгоритмов управления проводкой летательного аппарата // *Известия ЮФУ. Технические науки*. – 2013. – № 3 (140). – С. 217–225. [*Volkovitskij, A.K., Karshakov, E.V., Pavlov, B.V.* Struktura algoritmov upravleniya provodkoi letatel'nogo apparata // *Iz-vestiya YUFU. Tekhnicheskie nauki*. – 2013. – No. 3 (140). – P. 217–225. (in Russian)]
15. URL: [https://geotechnologies.ru/ru/products/navdat\\_ru.html](https://geotechnologies.ru/ru/products/navdat_ru.html)
16. *Инструкция по магниторазведке (наземная магнитная съемка, аэромагнитная съемка, гидромагнитная съемка) / М-во геологии СССР*. – Л.: Недра, 1981. – 263 с. [*Instrukcija po magnitorazvedke (nazemnaja magnitnaja s'emka, ajeromagnitnaja s'emka, gidromagnitnaja s'emka) / M-vo geo-logii SSSR*. – L.: Nedra, 1981. – 263 p.]

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 07.02.2023,  
после доработки 18.05.2023.  
Принята к публикации 21.06.2023.

**Гаракоев Амир Мусаевич** – мл. науч. сотр, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,  
✉ [garac@ipu.ru](mailto:garac@ipu.ru),  
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-1886-4934>

**Гладышев Анатолий Иванович** – д-р техн. наук, председатель Секции по оборонным проблемам Министерства обороны РФ (при президиуме РАН), г. Москва,  
✉ [tolyagladyshev@yandex.ru](mailto:tolyagladyshev@yandex.ru),  
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8362-0293>

© 2023 г. Гаракоев А.М., Гладышев А.И.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



# AIRCRAFT MOTION CONTROL ALGORITHMS FOR AIRBORNE GEOPHYSICAL SURVEY

A.M. Garakoev<sup>1</sup> and A.I. Gladyshev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Section on Defense Problems of the Ministry of Defense of the Russian Federation at the RAS Presidium, Moscow, Russia

<sup>1</sup>✉ garac@ipu.ru, <sup>2</sup>✉ tolyagladyshev@yandex.ru

**Abstract.** In an airborne geophysical survey, the control of moving objects requires forming optimal program (reference) trajectories. Optimality criteria differ depending on the tasks to be performed. The most obvious criterion is the time in which an object reaches its final position from an initial position. Problems with such a criterion are known as time-optimal control problems. This paper considers two control problems of this class related to the performance of a flight task by an aircraft during an airborne geophysical survey. Such a survey is traditionally carried out along a network of parallel routes. Accordingly, the first mode is to start the next survey route. The second mode is to approach the current straight segment of the route. The corresponding time-optimal control problems are posed and solved. The resulting solutions are the reference trajectories for the start and approach modes. The solutions are formally analyzed and methods for forming optimal trajectories and the corresponding controls implementing these trajectories are described. The onboard software implementation of these algorithms is described.

**Keywords:** Dubins car, time-optimal control problem, optimal control, Pontryagin's maximum principle.

# ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕЛЁТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА: ВЫБОР НАЧАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ

Е.В. Саввина

**Аннотация.** Приведены результаты исследования, посвященного разработке нового подхода к решению актуальной проблемы выбора начальных приближений для задач оптимизации траектории перелёта космического аппарата с химическим разгонным блоком и фиксированной тягой между околоземными эллиптическими орбитами. Предложенный подход основан на анализе и использовании корреляций между значениями ключевых параметров задачи. Для его реализации применяются численные методы, методы математического моделирования и программирования. Благодаря системному исследованию релевантных работ, относящихся к предметной области разработки методов нахождения начальных приближений для оптимизационных задач, а также выявленным в рамках данной работы математическим взаимосвязям и сделанным заключениям найден ряд закономерностей, способствующих упрощению процесса нахождения начальных приближений для обеспечения сходимости численного метода решения краевой задачи и оптимизации решения. Результаты вычислительного эксперимента подтверждают применимость и эффективность разработанного подхода для решения типовых оптимизационных задач (на примере задачи оптимизации траектории перелёта космического аппарата между околоземными орбитами).

**Ключевые слова:** оптимальное управление, оптимизация траектории перелёта, нелинейное программирование, статистический анализ.

## ВВЕДЕНИЕ

Выбор начальных приближений при решении задач оптимального управления – актуальная и важная проблема, и здесь выбор правильного подхода способствует обеспечению более быстрой сходимости численного метода решения краевой задачи и успешному нахождению оптимального решения [1–3]. В то же время существуют трудности такого выбора, связанные с ветвлением оптимальных решений и восприимчивостью невязок краевой задачи к вариациям ее параметров [4].

На сегодняшний день существует ряд практических методов, позволяющих упростить процесс нахождения начальных приближений, среди которых гомотопия максимальной величины тяги [5], нормализация ребер [6] и др. В отдельных случаях вводимые методы могут оказывать заметный положительный эффект, как, в частности, решения для задачи встречи на орбите, разработанные для нахождения начальных приближений для непрямых методов [3, 7, 8]. Анализ релевантных работ в

данной предметной области показывает их направленность на решение конкретных задач; в то же время на разработку алгоритмов, которые будут полезны для выбора начальных приближений, направляется всё больше усилий мирового научного сообщества [1–3, 5, 6].

В настоящей статье изложены результаты исследования, предметом которого является статистический анализ векторов данных, полученных в ходе математического моделирования, направленный на выявление и анализ корреляций между значениями ключевых параметров типовой оптимизационной задачи, а также интерпретация его результатов с целью уточнения алгоритма оптимизации. Результатом работы служит выявленный ряд законов, способствующих упрощению процесса нахождения начальных приближений для получения сходимости численного метода решения и достижения оптимума для типовых задач. Применимость и эффективность разработанного подхода для типовых задач (на примере задачи оптимизации траектории перелёта космического аппарата между околоземными орбитами) подтверждаются



результатами проведённого вычислительного эксперимента.

## 1. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

### 1.1. Математическая постановка задачи построения оптимальной траектории межорбитального перелёта

Рассмотрена задача построения оптимальной траектории перелёта космического аппарата (КА) между околоземными эллиптическими орбитами, линии апсид которых совпадают. Такая постановка используется на первом этапе проверки предположения о наличии закономерностей между значениями вектора сопряжённых переменных, обеспечивающих оптимальное решение. Следующая стадия анализа предполагает проведение аналогичного исследования наборов задач с орбитами, не лежащими в одной плоскости, потенциально востребованными, в частности, с точки зрения формирования системы орбитального обслуживания (к примеру, к ним относятся геостационарная, солнечно-синхронная, орбита типа «Молния»).

Общая формулировка проблемы: КА с химическим разгонным блоком (ХРБ) находится на начальной орбите в окрестности Земли (орбита задана); ХРБ (его характеристики известны) должен обеспечить перемещение КА на более высокую околоземную эллиптическую орбиту (она также задана). Задача – оптимизировать схему перелёта между орбитами, приняв в качестве критерия оптимизации массу КА, выведенную на заданную орбиту (требуется ее максимизировать).

Зафиксированы значения следующих параметров для всех рассмотренных постановок: масса КА в начальный момент времени 5 000 кг; тяга ракетного двигателя 5 кН (нерегулируемый, количество включений неограниченно); удельный импульс 330 с. Максимально допускается один оборот. Орбиты лежат в одной плоскости, их линии апсид совпадают.

В качестве варьируемых параметров рассматриваются: высота перигея начальной орбиты и высота ее апогея; высота перигея конечной орбиты и высота ее апогея.

Параметры схемы перелёта, значения которых необходимо выбрать: момент начала движения аппарата с опорной орбиты; длительность и расположение на траектории перелёта активных и пассивных участков; программа угла тангажа на каждом активном участке; точка окончания перелёта.

**Математическая модель для описания перелёта КА**

Используется вектор фазовых координат, включающий пять компонент: радиальная ско-

рость  $V_r$ , нормальная скорость  $V_n$ , величина радиуса  $r$  и величина полярного угла  $\beta$ , масса КА  $m$ . Тогда движение КА может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\begin{aligned}\dot{V}_r &= \frac{P \sin(\varphi)}{m} \delta - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r}, \\ \dot{V}_n &= \frac{P \cos(\varphi)}{m} \delta - \frac{V_r V_n}{r}, \\ \dot{r} &= V_r, \\ \dot{\beta} &= \frac{V_n}{r}, \\ \dot{m} &= -q\delta.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $P$  – значение тяги двигательной установки (ДУ);  $\mu$  – гравитационный параметр Земли;  $q$  – массовый расход ДУ (оба параметра известны);  $\delta$  – функция тяги (принимает два значения – 0 или 1; при  $\delta = 1$  ДУ включен, при  $\delta = 0$  – выключен);  $\varphi$  – угол тангажа аппарата. Функции  $\delta(t)$  и  $\varphi(t)$  представляют собой оптимизируемые управления движением аппарата.

**Принцип максимума Понтрягина, формулировка краевой задачи**

Вводится вектор сопряженных к фазовым переменным для введения гамильтониана

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{V_r} \\ \lambda_{V_n} \\ \lambda_r \\ \lambda_\beta \\ \lambda_m \end{pmatrix}.\quad (2)$$

Гамильтониан имеет вид:

$$\begin{aligned}H &= \lambda_{V_r} \left( \frac{P \sin(\varphi)}{m} \delta - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r} \right) + \\ &+ \lambda_{V_n} \left( \frac{P \cos(\varphi)}{m} \delta - \frac{V_r V_n}{r} \right) + \\ &+ \lambda_r V_r + \lambda_\beta \frac{V_n}{r} - \lambda_m q \delta.\end{aligned}\quad (3)$$

В соответствии с принципом максимума выбираемое управление обеспечивает максимум гамильтониану. Таким образом, оптимизируемые управления  $\delta(t)$  и  $\varphi(t)$  находятся исходя из условия максимума гамильтониана [9].

При этом

$$\cos(\varphi_{\text{opt}}) = \frac{\lambda_{V_n}}{\lambda_{V_r}}, \quad \sin(\varphi_{\text{opt}}) = \frac{\lambda_r}{\lambda_{V_r}},$$

где

$$\lambda_v = \sqrt{\lambda_{v_r}^2 + \lambda_{v_n}^2},$$

$$\delta_{\text{opt}} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Psi > 0, \\ 0, & \text{если } \Psi < 0, \end{cases}$$

$$\Psi = \frac{P}{m} \lambda_v - \lambda_m q \quad \text{или} \quad \Psi = \frac{W}{m} \lambda_v - \lambda_m,$$

где  $\Psi$  – функция переключения двигательной установки;  $W$  – скорость истечения. Индекс орт обозначает, что соотношения с параметрами, где он фигурирует, получены из условия максимума гамильтониана.

Тогда программа угла тангажа будет иметь вид:

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \left( \frac{\lambda_{v_n}}{\sqrt{\lambda_{v_n}^2 + \lambda_{v_r}^2}} \right), & \text{если } \lambda_{v_r} > 0, \\ -\arccos \left( \frac{\lambda_{v_n}}{\sqrt{\lambda_{v_n}^2 + \lambda_{v_r}^2}} \right), & \text{если } \lambda_{v_r} \leq 0. \end{cases}$$

Учитывая полученные функции  $\varphi$  и  $\delta(t)_{\text{opt}}$ , уравнения системы (1) приобретают вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= \frac{P \lambda_{v_r}}{m \lambda_v} \delta_{\text{opt}} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r}; \\ \dot{V}_n &= \frac{P \lambda_{v_n}}{m \lambda_v} \delta_{\text{opt}} - \frac{V_r V_n}{r}; \\ \dot{i} &= V_r; \\ \dot{\beta} &= \frac{V_n}{r}; \\ \dot{m} &= -q \delta_{\text{opt}}. \end{aligned} \quad (4)$$

В соответствии с принципом максимума, сопряженные переменные будут удовлетворять системе ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{v_r}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial V_r} = \lambda_{v_n} \frac{V_n}{r} - \lambda_r; \\ \frac{d\lambda_{v_n}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial V_n} = -\lambda_{v_r} \frac{2V_n}{r} + \lambda_{v_n} \frac{V_r}{r} - \lambda_\beta \frac{1}{r}; \\ \frac{d\lambda_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \lambda_{v_r} \left( -\frac{2\mu}{r^3} + \frac{V_n^2}{r^2} \right) + \\ &+ \lambda_{v_n} \left( -\frac{V_r V_n}{r^2} \right) + \lambda_\beta \frac{V_n}{r^2}; \\ \frac{d\lambda_\beta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

На первом этапе анализа можно зафиксировать начальную и конечную точки перелёта движениями в перигее начальной и апогее конечной орбиты соответственно.

### Краевая задача принципа максимума

Требуется найти значения компонент сопряжённого вектора в начальной точке траектории  $\lambda_{v_r}(t_0), \lambda_{v_n}(t_0), \lambda_r(t_0), \lambda_\beta(t_0), \lambda_m(t_0)$  и такое время перелёта  $t_f$ , при которых будут выполнены одно условие, которое следует проверять в начальной точке траектории перелёта (6), и пять конечных условий (7):

$$H(t_0) = 0$$

или

$$\begin{aligned} &\left( \lambda_{v_r}(t_0) \frac{P}{m(t_0)} - \lambda_m(t_0) q \right) \delta(t_0) + \\ &+ \lambda_{v_r}(t_0) \left( -\frac{\mu}{r(t_0)^2} + \frac{V_n(t_0)^2}{r(t_0)} \right) + \\ &+ \lambda_{v_n}(t_0) \left( -\frac{V_r(t_0) V_n(t_0)}{r(t_0)} \right) + \\ &+ \lambda_r(t_0) V_r(t_0) + \lambda_\beta(t_0) \frac{V_n(t_0)}{r(t_0)} = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$V_r(t_f) = 0;$$

$$V_n(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{p_f}} (1 - e_f);$$

$$r(t_f) = \frac{p_f}{1 - e_f}; \quad (7)$$

$$\beta(t_f) = \pi;$$

$$\lambda_m(t_f) = 1,$$

где  $p_f$  – фокальный параметр конечной орбиты перелёта, а  $e_f$  – её эксцентриситет.

Далее для отказа от привязки начальной и конечной точек перелёта к апогею и перигею начальной и конечной орбит вводятся условия трансверсальности.

**Условия трансверсальности для точек старта и окончания перелёта**

В рассматриваемом случае условие трансверсальности – это условие перпендикулярности вектора  $\lambda$  (2) касательным векторам граничного многообразия. Таким образом, условия оптимальности точки начала перелёта – это условия перпендикулярности вектора  $\lambda$  (2) и касательного вектора. Вывод условий трансверсальности изложен в работе [9], в которой представлена реализация и результаты начального этапа данного исследования.



При этом данное условие может быть записано так:

$$\begin{aligned} & \lambda_{V_r}(t_0) \frac{e_0 \cos(\nu_0)}{\sqrt{p_0}} - \lambda_{V_n}(t_0) \frac{e_0 \sin(\nu_0)}{\sqrt{p_0}} + \\ & + \lambda_r(t_0) \frac{p_0 e_0 \sin(\nu_0)}{(1 + e_0 \cos(\nu_0))^2} + \\ & + \lambda_\beta(t_0) \cdot 1 + \lambda_m(t_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lambda_\beta(t_0) = & -\lambda_{V_r}(t_0) \frac{e_0 \cos(\nu_0)}{\sqrt{p_0}} + \\ & + \lambda_{V_n}(t_0) \frac{e_0 \sin(\nu_0)}{\sqrt{p_0}} - \lambda_r(t_0) \frac{p_0 e_0 \sin(\nu_0)}{(1 + e_0 \cos(\nu_0))^2}, \end{aligned}$$

где  $e_0$  – эксцентриситет начальной орбиты,  $\nu_0$  – значение истинной аномалии точки старта, а  $p_0$  – фокальный параметр начальной орбиты.

Таким же образом выводится условие для оптимизации точки окончания перелёта:

$$\begin{aligned} \lambda_\beta(t_f) = & -\lambda_{V_r}(t_f) \frac{e_f \cos(\beta_f)}{\sqrt{p_f}} + \\ & + \lambda_{V_n}(t_f) \frac{e_f \sin(\beta_f)}{\sqrt{p_f}} - \lambda_r(t_f) \frac{p_f e_f \sin(\beta_f)}{(1 + e_f \cos(\beta_f))^2}, \end{aligned}$$

где  $\beta_f$  – величина полярного угла в конечной точке перелёта.

## 1.2. Подготовка данных для корреляционного анализа с опорой на метод перебора

Рассматриваются пять постановок со следующими значениями варьируемых параметров орбит:

1. Высота перигея начальной орбиты 400 км, апогея – 1 400 км. Высота перигея конечной орбиты – 1 900 км, апогея – 9 900 км.

2. Высота перигея начальной орбиты 400 км, апогея – 1 400 км. Высота перигея конечной орбиты – 2 000 км, апогей – 10 000 км.

3. Высота перигея опорной орбиты 400 км, апогея – 1 400 км. Высота Перигея конечной орбиты 2 100 км, апогея – 10 100 км.

4. Высота перигея опорной орбиты 500 км, апогея – 1 500 км. Высота перигея конечной орбиты 2 000 км, апогея – 10 000 км.

5. Высота перигея начальной орбиты 600 км, апогея – 1 600 км. Высота перигея конечной – 2 000 км, апогея – 10 000 км.

Предварительный диапазон поиска для рассмотренных постановок 1–5 был сформирован на основе полученного решения задачи, выбранной в качестве «опорной» (постановка 4 в п. 1.1). Данный диапазон был использован для реализации метода перебора, направленного на получение наборов значений для дальнейшего анализа с помощью статистических методов с целью выявления корреляций между значениями. Процесс формирования диапазона поиска, а также процесс получения выборки данных для последующего анализа и решение задачи в рамках постановок 1–5 раскрыты в работе [9].

В табл. 1 приведены найденные векторы значений для искомым характеристик (варианты постановок 1–5), которые обеспечивают оптимизацию перелёта.

Таким образом, применение метода перебора внутри выбранных диапазонов значений параметров позволило улучшить результат по «опорной» задаче (постановка 4) на 365 г относительно решения, предварительно полученного с методом случайного поиска [1].

Данный этап исследования подробно представлен в работе [9].

Таблица 1

**Векторы значений параметров, обеспечивающие оптимизацию перелёта для постановок 1–5 (анализ внутри сетки данных)**

Характеристика	Постановка 1	Постановка 2	Постановка 3	Постановка 4	Постановка 5
$\nu_0$	-0,608528181266	-0,687262955509	-0,58694862445	-0,58063271537992	-0,67460422765
$\lambda_{V_r}$	-0,065265825615	-0,075257944004	-0,06564653582	-0,06466045327036	-0,06339073139
$\lambda_{V_n}$	1,3623340777782	1,3653869345017	1,364158466294	1,36474044140864	1,357648817782
$\lambda_r$	1,4200011568480	1,4207257561587	1,421069918027	1,42243156356652	1,40764863211
$T_f$	6,7321648922778	7,0228415355241	12,30599404742	12,48386539989280	5,855669428846
$\beta_f$	3,1311300732552	3,166796288751	5,127686975088	5,33807657900554	2,859452408788
$m_f$ , кг	3227,339	3182,552	3181,12	3204,153	3247,748

## 2. ВЫЯВЛЕНИЕ И ОЦЕНКА КОРРЕЛЯЦИЙ МЕЖДУ КЛЮЧЕВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ЗАДАЧИ

### 2.1. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения системы анализа и обработки данных

Проверка наличия и значимости математических взаимосвязей между значениями параметров задач, обеспечивающих сходимость численного метода решения краевой задачи и оптимизацию решения, реализована с помощью программы, разработанной на языке программирования Python [11]. Данная программа представляет собой специальное математическое и алгоритмическое обеспечение системы анализа и обработки данных, она реализуется преимущественно на базе библиотек для системного анализа данных и математического программирования *pandas*, *scipy* и *numpy*.

Алгоритм построения программы таков.

1. Подгрузка данных и выбор анализируемых параметров и их соотношений.
2. Оценка нормальности по частотной статистике. Она требуется, чтобы убедиться, что в данных нет большого отклонения от средних значений, и может быть осуществлена многими способами, среди которых распространены, например, Тест Шапиро – Уилка [12–14], оценка по Колмогорову – Смирнову [13, 15]. В программе применён тест Шапиро – Уилка, при котором проверяется вероятность случайного отличия: если эта вероятность мала, отличие признается статистически значимым [12–14].
3. Проверка тесноты корреляционной связи по Эвансу и проверка значимости корреляционной связи с помощью критерия Фишера [16, 17]. Проводятся для того, чтобы установить, находится ли изменчивость одного признака в зависимости от изменчивости другого, и насколько эта зависимость релевантна [16, 17].
4. Проверка значимости отличия линейной корреляционной связи от нелинейной (с помощью критерия Фишера) [17].

### 2.2. Результаты работы программы

В программе осуществлен перебор более 4,145 млн вариаций начальных приближений для каждой из постановок задач в выбранном диапазоне с целью выявления колебаний между значениями ключевых параметров и оценкой степени сходимости. В ходе работы проанализированы 13 групп параметров и их корреляций. Для анализа использова-

ны только те векторы значений параметров, которые обеспечили сходимость численного метода решения системы уравнений и выход космического аппарата на заданную конечную орбиту.

В рамках рассмотренного диапазона влияния колебаний значения истинной аномалии  $\upsilon_0$ , характеризующей точку начала перелёта, на остальные значения компонент рассмотренных векторов не выявлено. В то же время отмечается, что при неизменных значениях иных параметров изменение величины истинной аномалии в большую сторону влечёт за собой увеличение конечной массы (в рамках рассмотренного диапазона значений для  $\upsilon_0$  эта разница между левой и правой границей в среднем составляет 1 кг).

Выявлено, что для каждой из рассмотренных постановок попадание на конечную орбиту перелёта достигается при обеспечении значения  $\lambda_r / \lambda_{v_n}$  на следующих уровнях (в зависимости от отдалённости начальной и конечной орбит и/или удалённости от Земли опорной орбиты):

- постановка 1 (орбита старта самая низкая, дальность соответствует дальности «опорной» задачи): 1,001397624, ..., 1,042397661;
- постановка 2 (орбита старта самая низкая, дальность увеличена в сравнении с «опорной» задачей на 100 км): 1,001397624, ..., 1,030802292;
- постановка 3 (орбита старта самая низкая, дальность увеличена в сравнении с «опорной» задачей на 200 км): 1,007127584, ..., 1,025531915;
- постановка 4 («опорная» задача, стартовая орбита на 100 км выше самой низкой): 0,987421384, ..., 1,037090909;
- постановка 5 (самая высокая орбита старта – на 200 км выше самой низкой; самая маленькая дальность – на 100 км меньше дальности «опорного» варианта задачи): 0,983146067, ..., 1,038207201.

При выходе за пределы данных диапазонов внутри рассмотренных путём перебора значений компонент векторов либо не достигается сходимость, либо аппарат не попадает на заданную орбиту (т. е. выходит на более низкую или более высокую). При этом отмечается, что лучшие по массе решения располагаются внутри, отдалённо от левой и правой границ указанных диапазонов.

Также в отношении времени перелёта и величины полярного угла отмечается прямая взаимосвязь, заключающаяся в том, что для обеспечения решения требуется соразмерно работать с обеими величинами, предварительно найдя значения остальных недостающих характеристик. Увеличение значения полярного угла должно происходить соразмерно с увеличением времени перелёта, и это



позволяет эффективно максимизировать массу выводимого космического аппарата.

В ходе проверки взаимосвязей между значениями компонент рассмотренных векторов была подтверждена значимая по Эвансу (на уровне значимости 0,95) линейная (значение коэффициента линейной корреляции 0,9678) по Фишеру корреляционная связь между значениями  $\lambda_{V_n}$  и  $\lambda_r$  (отсутствие выбросов по зависимому параметру, а также нормальность распределения данных и наличие линейной зависимости подтверждено на рис. 1).

Выявлено наличие линейной связи средней значимости по Эвансу между значением  $Q$  и значением отношения  $\lambda_r / \lambda_{V_n}$ , где  $Q$  – показатель, характеризующий изменение орбиты (рис. 2):

$$Q = \frac{e_f - e_0}{p_{fb} - p_{0b}},$$

где  $p_{fb}$  и  $p_{0b}$  – значения фокального параметра конечной и начальной орбит, приведённые к безразмерному виду.

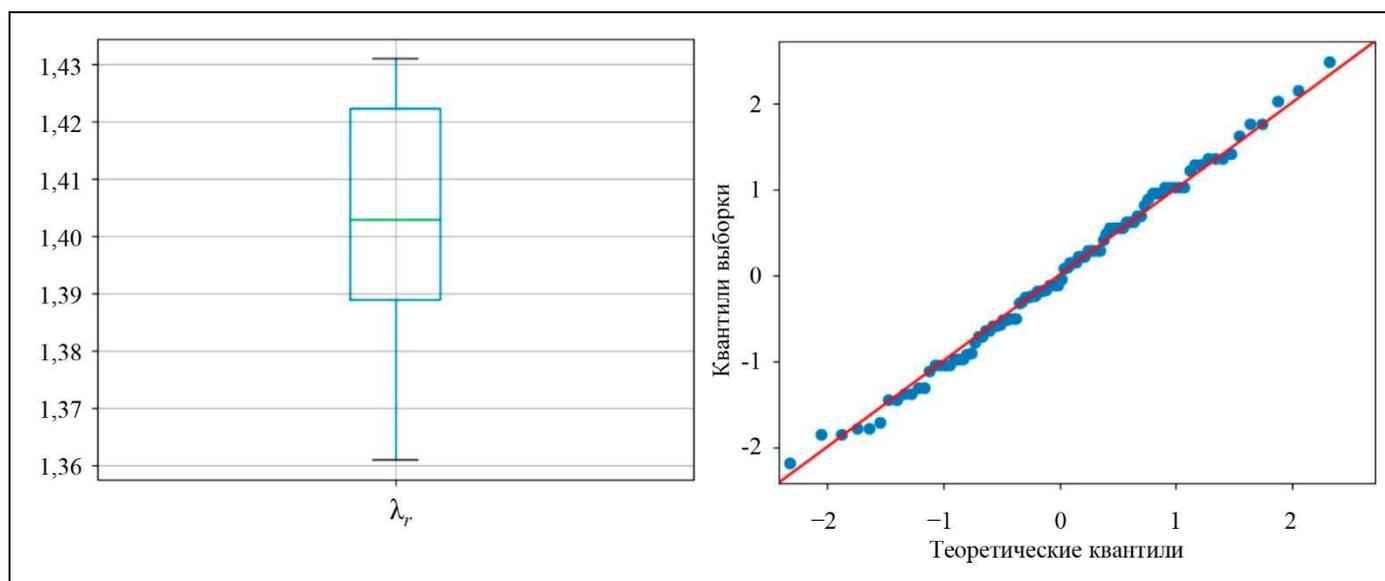


Рис. 1. Результаты корреляционного анализа между значениями  $\lambda_{V_n}$  и  $\lambda_r$

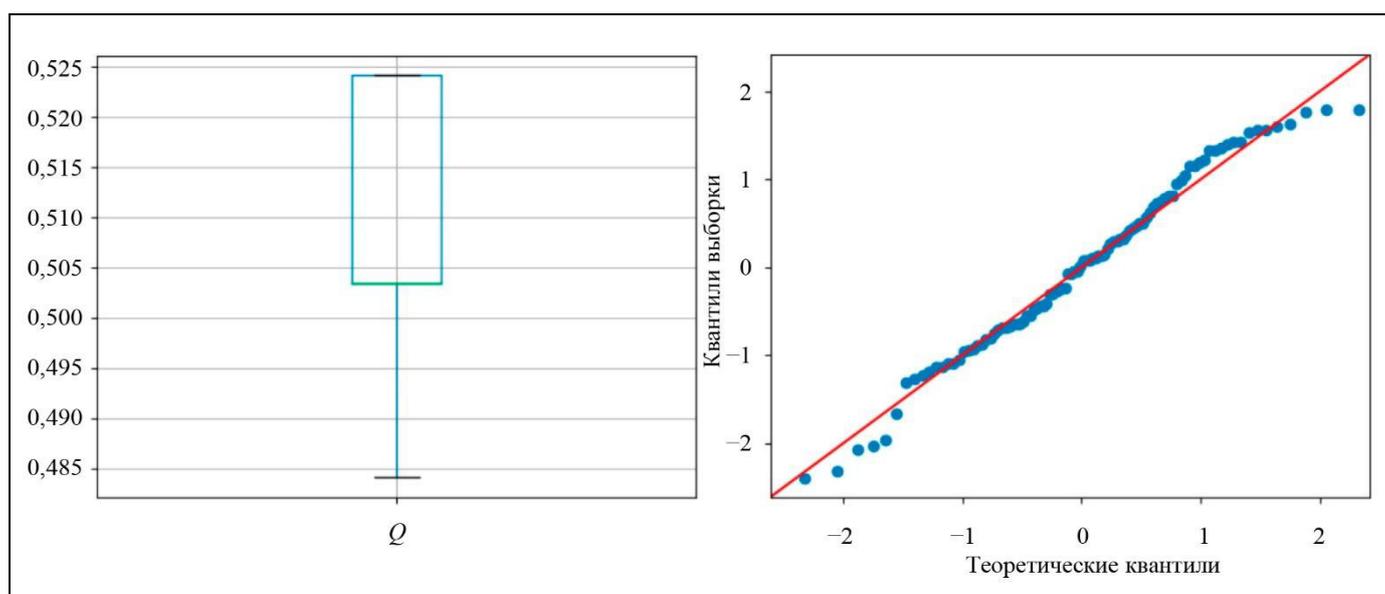


Рис. 2. Результаты корреляционного анализа между значениями  $Q$  и  $\lambda_r / \lambda_{V_n}$

Линейная корреляция средней значимости выявлена между значением отношения  $\lambda_r / \lambda_{V_n}$  и  $\lambda_{V_r}$ . Сильная по показателю значимости Эванса нелинейная связь выявлена между значением полярного угла  $\beta_f$ , характеризующим точку завершения перелёта, и временем межорбитального перелёта  $T_f$ . Сильная по Эвансу связь выявлена между значениями отношений  $T_f / \beta_f$  и  $\lambda_r / \lambda_{V_n}$ . Однако уточнить природу данной взаимосвязи не удалось, что, вероятно, произошло из-за недостатка анализируемых случаев и узости изначально выбранного диапазона.

Наличие значимой связи между величиной истинной аномалии  $\upsilon_0$ , характеризующей точку старта с начальной орбиты, и значением отношения  $T_f / \beta_f$  не подтвердилось.

### 2.3. Применение результатов к «опорному» варианту задаче с целью улучшения решения

Полученные в ходе исследования при помощи программы, написанной на языке Python, результаты служат основой для выдвижения предположения относительно уточнения диапазонов поиска начальных приближений, что потенциально сможет облегчить процесс нахождения положения оптимума для типовых оптимизационных задач.

Для уточнения начальных значений параметров с целью улучшения полученного результата оптимизации на примере «опорного» варианта задачи использованы сделанные в ходе исследования выводы, изложенные в п. 2.2. В результате изначально найденные значения для сопряжённых переменных  $\lambda_{V_r}$ ,  $\lambda_{V_n}$ ,  $\lambda_r$  остаются фиксированными, а значение истинной аномалии  $\upsilon_0$  уменьшается и выходит за пределы выбранного диапазона одновременно с увеличением полярного угла  $\beta_f$  в 1,7 раза и соразмерно времени перелёта  $T_f$ . Далее проводится расчёт невязок, позволяющий уточнить значения вектора.

Итог – набор значений компонентов вектора, обеспечивающего решение поставленной задачи (табл. 2).

В результате достигнуто значительное улучшение конечного результата до 3 206,884 кг (масса в конечной точке перелёта увеличена на 2,731 кг в сравнении с результатом, достигнутым в ходе исследования в рамках диапазона согласно п. 2.1.2.).

На рис. 3 представлена оптимизированная схема перелёта для «опорного» варианта задачи.

### Вектор значений, обеспечивающий оптимизацию перелёта в рамках «опорного» варианта задачи

Характеристика	Значение
$\upsilon_0$	-0,5733590707938522
$\lambda_{V_r}$	-0,06418827063171273
$\lambda_{V_n}$	1,3652318375612795
$\lambda_r$	1,4233117301910392
$T_f$	12,066799357615691
$\beta_f$	5,062132315335388

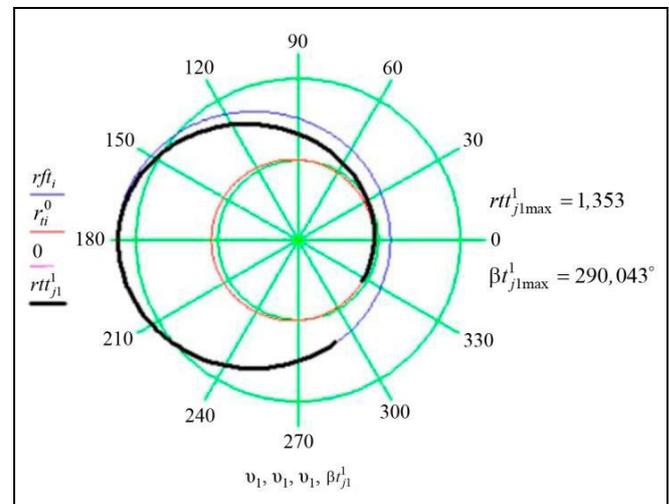


Рис. 3. Оптимизированная схема перелёта для «опорного» варианта задачи (постановка 4)

### 2.4. Обсуждение и перспективы дальнейших исследований

Представленное исследование реализовано на базе программ, написанных в Mathcad 15 и Python 3.9. Достигнутые результаты подтверждают эффективность предлагаемого подхода к выбору начальных приближений на основе анализа корреляционных отношений между ключевыми параметрами для задач рассмотренного направления – оптимизации траектории перелёта космического аппарата.

Проведённое исследование позволило выявить ряд закономерностей, имеющих место между компонентами векторов, обеспечивающих сходимость численного метода решения для типовых задач с попаданием космического аппарата на заданную орбиту. Полученные в результате проведенного



анализа выводы были проверены в ходе вычислительного эксперимента, который был проведён в отношении «опорного» варианта задачи и показал эффективность реализованного подхода, позволившего увеличить массу космического аппарата на конечной орбите. При этом достигнутый результат позволил уточнить область поиска положения оптимума для типовых задач с небольшими отклонениями относительно дальности перелёта и высоты начальной орбиты.

Дальнейшая работа предполагает расширение рассматриваемых задач в целях уточнения полученных результатов и последующего оформления их в виде алгоритма выбора начальных приближений для задач построения оптимальной траектории орбитального перелёта. В частности, будут исследованы:

- многовитковый перелёт;
- орбитальный переход между орбитами, лежащими в разных плоскостях;
- применение иных типов ДУ (например, ЭР-ДУ с регулируемой тягой).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая статья расширяет возможности эффективного применения аппарата математического программирования для решения задач построения оптимальной траектории перелёта между околоземными эллиптическими орбитами и раскрывает подход, способствующий облегчить процесс выбора эффективных начальных приближений для задач построения оптимальной траектории перелёта космического аппарата. Дополнительно представлены результаты вычислительного эксперимента, подтверждающие эффективность предложенного подхода для рассмотренной постановки задачи.

В результате исследования:

- впервые выявлена взаимосвязь между значениями параметров задачи оптимизации траектории перелёта между двумя эллиптическими околоземными орбитами и установлена природа этой связи при помощи разработанного специального математического и алгоритмического обеспечения системы анализа и обработки данных на языке программирования Python;
- на основе выявленных взаимосвязей достигнуто значительное улучшение первичного (полученного с опорой на метод Й. Барда) и полученного в работе [9] (при помощи перебора внутри сетки данных) решений для варианта задачи опти-

мизации траектории перелёта между двумя эллиптическими околоземными орбитами, выбранного в качестве опорного.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Bard, Y.* Nonlinear Parameter Estimation. – New York & London: Academic Press edition. – 1979. – 349 p.
2. *Kitrell, J.R., Mezaki, R., and Watson, C.C.* Estimation of parameters for nonlinear least squares analysis // *Industrial & Engineering Chemistry*. – 1965. – Vol. 57. – P. 18–27.
3. *Wu, D., Cheng, L., Gong, S., and Baoyin, H.* Approximate time-optimal low-thrust rendezvous solutions between circular orbits // *Aerospace Science and Technology*. – 2022. – Vol. 131, Part A. – Art. No. 108011.
4. *Петухов В.Г.* Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения. *Космические исследования*. – 2008. – Т. 46. – № 3. – С. 224–237. [*Petukhov, V.G.* Optimization of interplanetary trajectories of spacecraft with a ideally regulated engine by the continuation method. – *Space Studies*. – 2008. – Vol. 46, no. 3. – P. 224–237. (In Russian)]
5. *Hofmann, C., and Toppo, F.* Embedded Homotopy for Convex Low-Thrust Trajectory Optimization with Operational Constraints // *Proceedings of 2022 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*. – Charlotte, NC, USA, 2022. – P. 1–16.
6. *Jiang, F., Baoyin, F. and Li, J.* Practical Techniques for Low-Thrust Trajectory Optimization with Homotopic Approach // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 2012. – Vol. 35, no. 1. – P. 245–258.
7. *Wu, D., Wu, C., Lin, F., et al.* Analytical Costate Estimation by a Reference Trajectory-Based Least-Squares Method // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2022. – Vol. 45. – P. 1–9.
8. *Wu, D., Wu, Ch., Lin, F., and Baoyin, H.* An Atlas of Optimal Low-Thrust Rephasing Solutions in Circular Orbit // *arXiv:2209.07418v1*. – 2022. – DOI: 10.48550/arXiv.2209.07418.
9. *Саввина Е.В.* построение траектории перелета космического аппарата между околоземными эллиптическими орбитами методом перебора значений параметров внутри сетки данных // *Проблемы управления*. – 2023. – № 2. – С. 65–74. [*Savvina, E.V.* Inter-orbital Spacecraft Transfer: Trajectory Design by Iterating Parameter Values within a Data Grid // *Control Sciences*. – 2023. – No. 2. – P. 56–63]
10. *Mathcad*: Math Software for Engineering Calculations. – URL: <https://www.mathcad.com> (дата обращения 15 мая 2023 г.) [Accessed May 15, 2023]
11. *Python<sup>TM</sup>*. – URL: <https://www.python.org> (дата обращения 15 мая 2023 г.) [Accessed May 15, 2023]
12. *Shapiro, S.S., Wilk M.B.* An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples) // *Biometrika*. – 1965. – Vol. 52, no. 3/4. – P. 591–611.]
13. *Mohd Razali, N. and Yap, B.W.* Power Comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling Tests // *J. Stat. Model. Analytics*. – 2011. – Vol. 2, no. 1. – P. 20–33.

14. *Rahman, M. and Zakkula, G.* A modification of the test of Shapiro and Wilk for normality // Journal of Applied Statistics. – 1997. – Vol. 24. – P. 219–236.
15. *Simard, R.J., and L'Ecuyer, P.* Computing the Two-Sided Kolmogorov-Smirnov Distribution // Journal of Statistical Software. – 2011. – Vol. 39. – P. 1–18.
16. *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. [*Kobzar', A.I. Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov.* – М.: FIZMATLIT, 2006. (In Russian)]
17. *Афифи А., Эйзен С.* Статистический анализ: подход с использованием ЭВМ; перевод с английского И.С. Енюкова, И.Д. Новикова; под редакцией Г.П. Башарина. – М.: Мир, 1982. [*Afifi, A.A. and Azen, S.P. Statistical analysis: A computer oriented approach.* – London, N.Y.: Academic Press Inc. Publ., 1979.]

Статья представлена к публикации членом редколлегии  
Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 13.02.2023,  
после доработки 04.07.2023.  
Принята к публикации 18.07.2023.

Саввина Елена Валерьевна – соискатель, г. Москва,  
✉ petrakowae@mail.ru  
ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0007-7083-8617>

© 2023 г. Саввина Е.В.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](#).

## INTER-ORBITAL SPACECRAFT TRANSFER OPTIMIZATION: CHOOSING INITIAL APPROXIMATIONS BASED ON CORRELATION ANALYSIS OF KEY PARAMETERS

E.V. Savvina

✉ petrakowae@mail.ru

**Abstract.** This paper presents a new approach to choosing initial approximations in inter-orbital transfer optimization problems for a spacecraft with a chemical booster and fixed thrust. The approach involves correlations between the values of key problem parameters. It is implemented using numerical methods, mathematical modeling, and programming. Relevant publications on the subject area (methods for finding initial approximations in optimization problems) are systematically studied and several mathematical relationships are identified. As a result, laws are specified to facilitate the choice of initial approximations in order to ensure convergence and achieve the optimum. The results of a computational experiment confirm the applicability and effectiveness of this approach in typical optimization problems (an optimal spacecraft trajectory design between near-Earth orbits as one example).

**Keywords:** optimal control, spacecraft trajectory optimization, maximum principle, mathematical modeling, nonlinear programming, statistical analysis.