

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕЛЁТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА: ВЫБОР НАЧАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ

Е.В. Саввина

Аннотация. Приведены результаты исследования, посвященного разработке нового подхода к решению актуальной проблемы выбора начальных приближений для задач оптимизации траектории перелёта космического аппарата с химическим разгонным блоком и фиксированной тягой между околоземными эллиптическими орбитами. Предложенный подход основан на анализе и использовании корреляций между значениями ключевых параметров задачи. Для его реализации применяются численные методы, методы математического моделирования и программирования. Благодаря системному исследованию релевантных работ, относящихся к предметной области разработки методов нахождения начальных приближений для оптимизационных задач, а также выявленным в рамках данной работы математическим взаимосвязям и сделанным заключениям найден ряд закономерностей, способствующих упрощению процесса нахождения начальных приближений для обеспечения сходимости численного метода решения краевой задачи и оптимизации решения. Результаты вычислительного эксперимента подтверждают применимость и эффективность разработанного подхода для решения типовых оптимизационных задач (на примере задачи оптимизации траектории перелёта космического аппарата между околоземными орбитами).

Ключевые слова: оптимальное управление, оптимизация траектории перелёта, нелинейное программирование, статистический анализ.

ВВЕДЕНИЕ

Выбор начальных приближений при решении задач оптимального управления – актуальная и важная проблема, и здесь выбор правильного подхода способствует обеспечению более быстрой сходимости численного метода решения краевой задачи и успешному нахождению оптимального решения [1–3]. В то же время существуют трудности такого выбора, связанные с ветвлением оптимальных решений и восприимчивостью невязок краевой задачи к вариациям ее параметров [4].

На сегодняшний день существует ряд практических методов, позволяющих упростить процесс нахождения начальных приближений, среди которых гомотопия максимальной величины тяги [5], нормализация ребер [6] и др. В отдельных случаях вводимые методы могут оказывать заметный положительный эффект, как, в частности, решения для задачи встречи на орбите, разработанные для нахождения начальных приближений для непрямых методов [3, 7, 8]. Анализ релевантных работ в

данной предметной области показывает их направленность на решение конкретных задач; в то же время на разработку алгоритмов, которые будут полезны для выбора начальных приближений, направляется всё больше усилий мирового научного сообщества [1–3, 5, 6].

В настоящей статье изложены результаты исследования, предметом которого является статистический анализ векторов данных, полученных в ходе математического моделирования, направленный на выявление и анализ корреляций между значениями ключевых параметров типовой оптимизационной задачи, а также интерпретация его результатов с целью уточнения алгоритма оптимизации. Результатом работы служит выявленный ряд законов, способствующих упрощению процесса нахождения начальных приближений для получения сходимости численного метода решения и достижения оптимума для типовых задач. Применимость и эффективность разработанного подхода для типовых задач (на примере задачи оптимизации траектории перелёта космического аппарата между околоземными орбитами) подтверждаются



результатами проведённого вычислительного эксперимента.

1. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1.1. Математическая постановка задачи построения оптимальной траектории межорбитального перелёта

Рассмотрена задача построения оптимальной траектории перелёта космического аппарата (КА) между околоземными эллиптическими орбитами, линии апсид которых совпадают. Такая постановка используется на первом этапе проверки предположения о наличии закономерностей между значениями вектора сопряжённых переменных, обеспечивающих оптимальное решение. Следующая стадия анализа предполагает проведение аналогичного исследования наборов задач с орбитами, не лежащими в одной плоскости, потенциально востребованными, в частности, с точки зрения формирования системы орбитального обслуживания (к примеру, к ним относятся геостационарная, солнечно-синхронная, орбита типа «Молния»).

Общая формулировка проблемы: КА с химическим разгонным блоком (ХРБ) находится на начальной орбите в окрестности Земли (орбита задана); ХРБ (его характеристики известны) должен обеспечить перемещение КА на более высокую околоземную эллиптическую орбиту (она также задана). Задача – оптимизировать схему перелёта между орбитами, приняв в качестве критерия оптимизации массу КА, выведенную на заданную орбиту (требуется ее максимизировать).

Зафиксированы значения следующих параметров для всех рассмотренных постановок: масса КА в начальный момент времени 5 000 кг; тяга ракетного двигателя 5 кН (нерегулируемый, количество включений неограниченно); удельный импульс 330 с. Максимально допускается один оборот. Орбиты лежат в одной плоскости, их линии апсид совпадают.

В качестве варьируемых параметров рассматриваются: высота перигея начальной орбиты и высота ее апогея; высота перигея конечной орбиты и высота ее апогея.

Параметры схемы перелёта, значения которых необходимо выбрать: момент начала движения аппарата с опорной орбиты; длительность и расположение на траектории перелёта активных и пассивных участков; программа угла тангажа на каждом активном участке; точка окончания перелёта.

Математическая модель для описания перелёта КА

Используется вектор фазовых координат, включающий пять компонент: радиальная ско-

рость V_r , нормальная скорость V_n , величина радиуса r и величина полярного угла β , масса КА m . Тогда движение КА может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\begin{aligned}\dot{V}_r &= \frac{P \sin(\varphi)}{m} \delta - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r}, \\ \dot{V}_n &= \frac{P \cos(\varphi)}{m} \delta - \frac{V_r V_n}{r}, \\ \dot{r} &= V_r, \\ \dot{\beta} &= \frac{V_n}{r}, \\ \dot{m} &= -q\delta.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь P – значение тяги двигательной установки (ДУ); μ – гравитационный параметр Земли; q – массовый расход ДУ (оба параметра известны); δ – функция тяги (принимает два значения – 0 или 1; при $\delta = 1$ ДУ включен, при $\delta = 0$ – выключен); φ – угол тангажа аппарата. Функции $\delta(t)$ и $\varphi(t)$ представляют собой оптимизируемые управления движением аппарата.

Принцип максимума Понтрягина, формулировка краевой задачи

Вводится вектор сопряженных к фазовым переменным для введения гамильтониана

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{V_r} \\ \lambda_{V_n} \\ \lambda_r \\ \lambda_\beta \\ \lambda_m \end{pmatrix}.\quad (2)$$

Гамильтониан имеет вид:

$$\begin{aligned}H &= \lambda_{V_r} \left(\frac{P \sin(\varphi)}{m} \delta - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r} \right) + \\ &+ \lambda_{V_n} \left(\frac{P \cos(\varphi)}{m} \delta - \frac{V_r V_n}{r} \right) + \\ &+ \lambda_r V_r + \lambda_\beta \frac{V_n}{r} - \lambda_m q \delta.\end{aligned}\quad (3)$$

В соответствии с принципом максимума выбираемое управление обеспечивает максимум гамильтониану. Таким образом, оптимизируемые управления $\delta(t)$ и $\varphi(t)$ находятся исходя из условия максимума гамильтониана [9].

При этом

$$\cos(\varphi_{\text{opt}}) = \frac{\lambda_{V_n}}{\lambda_{V_r}}, \quad \sin(\varphi_{\text{opt}}) = \frac{\lambda_r}{\lambda_{V_r}},$$

где

$$\lambda_v = \sqrt{\lambda_{v_r}^2 + \lambda_{v_n}^2},$$

$$\delta_{\text{opt}} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Psi > 0, \\ 0, & \text{если } \Psi < 0, \end{cases}$$

$$\Psi = \frac{P}{m} \lambda_v - \lambda_m q \quad \text{или} \quad \Psi = \frac{W}{m} \lambda_v - \lambda_m,$$

где Ψ – функция переключения двигательной установки; W – скорость истечения. Индекс орт обозначает, что соотношения с параметрами, где он фигурирует, получены из условия максимума гамильтониана.

Тогда программа угла тангажа будет иметь вид:

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \left(\frac{\lambda_{v_n}}{\sqrt{\lambda_{v_n}^2 + \lambda_{v_r}^2}} \right), & \text{если } \lambda_{v_r} > 0, \\ -\arccos \left(\frac{\lambda_{v_n}}{\sqrt{\lambda_{v_n}^2 + \lambda_{v_r}^2}} \right), & \text{если } \lambda_{v_r} \leq 0. \end{cases}$$

Учитывая полученные функции φ и $\delta(t)_{\text{opt}}$, уравнения системы (1) приобретают вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= \frac{P \lambda_{v_r}}{m \lambda_v} \delta_{\text{opt}} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_n^2}{r}; \\ \dot{V}_n &= \frac{P \lambda_{v_n}}{m \lambda_v} \delta_{\text{opt}} - \frac{V_r V_n}{r}; \\ \dot{i} &= V_r; \\ \dot{\beta} &= \frac{V_n}{r}; \\ \dot{m} &= -q \delta_{\text{opt}}. \end{aligned} \quad (4)$$

В соответствии с принципом максимума, сопряженные переменные будут удовлетворять системе ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{v_r}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial V_r} = \lambda_{v_n} \frac{V_n}{r} - \lambda_r; \\ \frac{d\lambda_{v_n}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial V_n} = -\lambda_{v_r} \frac{2V_n}{r} + \lambda_{v_n} \frac{V_r}{r} - \lambda_\beta \frac{1}{r}; \\ \frac{d\lambda_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \lambda_{v_r} \left(-\frac{2\mu}{r^3} + \frac{V_n^2}{r^2} \right) + \\ &+ \lambda_{v_n} \left(-\frac{V_r V_n}{r^2} \right) + \lambda_\beta \frac{V_n}{r^2}; \\ \frac{d\lambda_\beta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

На первом этапе анализа можно зафиксировать начальную и конечную точки перелёта движениями в перигее начальной и апогее конечной орбиты соответственно.

Краевая задача принципа максимума

Требуется найти значения компонент сопряжённого вектора в начальной точке траектории $\lambda_{v_r}(t_0), \lambda_{v_n}(t_0), \lambda_r(t_0), \lambda_\beta(t_0), \lambda_m(t_0)$ и такое время перелёта t_f , при которых будут выполнены одно условие, которое следует проверять в начальной точке траектории перелёта (6), и пять конечных условий (7):

$$H(t_0) = 0$$

или

$$\begin{aligned} &\left(\lambda_{v_r}(t_0) \frac{P}{m(t_0)} - \lambda_m(t_0) q \right) \delta(t_0) + \\ &+ \lambda_{v_r}(t_0) \left(-\frac{\mu}{r(t_0)^2} + \frac{V_n(t_0)^2}{r(t_0)} \right) + \\ &+ \lambda_{v_n}(t_0) \left(-\frac{V_r(t_0) V_n(t_0)}{r(t_0)} \right) + \\ &+ \lambda_r(t_0) V_r(t_0) + \lambda_\beta(t_0) \frac{V_n(t_0)}{r(t_0)} = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$V_r(t_f) = 0;$$

$$V_n(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{p_f}} (1 - e_f);$$

$$r(t_f) = \frac{p_f}{1 - e_f}; \quad (7)$$

$$\beta(t_f) = \pi;$$

$$\lambda_m(t_f) = 1,$$

где p_f – фокальный параметр конечной орбиты перелёта, а e_f – её эксцентриситет.

Далее для отказа от привязки начальной и конечной точек перелёта к апогею и перигею начальной и конечной орбит вводятся условия трансверсальности.

Условия трансверсальности для точек старта и окончания перелёта

В рассматриваемом случае условие трансверсальности – это условие перпендикулярности вектора λ (2) касательным векторам граничного многообразия. Таким образом, условия оптимальности точки начала перелёта – это условия перпендикулярности вектора λ (2) и касательного вектора. Вывод условий трансверсальности изложен в работе [9], в которой представлена реализация и результаты начального этапа данного исследования.



При этом данное условие может быть записано так:

$$\begin{aligned} & \lambda_{V_r}(t_0) \frac{e_0 \cos(\nu_0)}{\sqrt{p_0}} - \lambda_{V_n}(t_0) \frac{e_0 \sin(\nu_0)}{\sqrt{p_0}} + \\ & + \lambda_r(t_0) \frac{p_0 e_0 \sin(\nu_0)}{(1 + e_0 \cos(\nu_0))^2} + \\ & + \lambda_\beta(t_0) \cdot 1 + \lambda_m(t_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lambda_\beta(t_0) = & -\lambda_{V_r}(t_0) \frac{e_0 \cos(\nu_0)}{\sqrt{p_0}} + \\ & + \lambda_{V_n}(t_0) \frac{e_0 \sin(\nu_0)}{\sqrt{p_0}} - \lambda_r(t_0) \frac{p_0 e_0 \sin(\nu_0)}{(1 + e_0 \cos(\nu_0))^2}, \end{aligned}$$

где e_0 – эксцентриситет начальной орбиты, ν_0 – значение истинной аномалии точки старта, а p_0 – фокальный параметр начальной орбиты.

Таким же образом выводится условие для оптимизации точки окончания перелёта:

$$\begin{aligned} \lambda_\beta(t_f) = & -\lambda_{V_r}(t_f) \frac{e_f \cos(\beta_f)}{\sqrt{p_f}} + \\ & + \lambda_{V_n}(t_f) \frac{e_f \sin(\beta_f)}{\sqrt{p_f}} - \lambda_r(t_f) \frac{p_f e_f \sin(\beta_f)}{(1 + e_f \cos(\beta_f))^2}, \end{aligned}$$

где β_f – величина полярного угла в конечной точке перелёта.

1.2. Подготовка данных для корреляционного анализа с опорой на метод перебора

Рассматриваются пять постановок со следующими значениями варьируемых параметров орбит:

1. Высота перигея начальной орбиты 400 км, апогея – 1 400 км. Высота перигея конечной орбиты – 1 900 км, апогея – 9 900 км.

2. Высота перигея начальной орбиты 400 км, апогея – 1 400 км. Высота перигея конечной орбиты – 2 000 км, апогей – 10 000 км.

3. Высота перигея опорной орбиты 400 км, апогея – 1 400 км. Высота Перигея конечной орбиты 2 100 км, апогея – 10 100 км.

4. Высота перигея опорной орбиты 500 км, апогея – 1 500 км. Высота перигея конечной орбиты 2 000 км, апогея – 10 000 км.

5. Высота перигея начальной орбиты 600 км, апогея – 1 600 км. Высота перигея конечной – 2 000 км, апогея – 10 000 км.

Предварительный диапазон поиска для рассмотренных постановок 1–5 был сформирован на основе полученного решения задачи, выбранной в качестве «опорной» (постановка 4 в п. 1.1). Данный диапазон был использован для реализации метода перебора, направленного на получение наборов значений для дальнейшего анализа с помощью статистических методов с целью выявления корреляций между значениями. Процесс формирования диапазона поиска, а также процесс получения выборки данных для последующего анализа и решение задачи в рамках постановок 1–5 раскрыты в работе [9].

В табл. 1 приведены найденные векторы значений для искомым характеристик (варианты постановок 1–5), которые обеспечивают оптимизацию перелёта.

Таким образом, применение метода перебора внутри выбранных диапазонов значений параметров позволило улучшить результат по «опорной» задаче (постановка 4) на 365 г относительно решения, предварительно полученного с методом случайного поиска [1].

Данный этап исследования подробно представлен в работе [9].

Таблица 1

Векторы значений параметров, обеспечивающие оптимизацию перелёта для постановок 1–5 (анализ внутри сетки данных)

Характеристика	Постановка 1	Постановка 2	Постановка 3	Постановка 4	Постановка 5
ν_0	–0,608528181266	–0,687262955509	–0,58694862445	–0,58063271537992	–0,67460422765
λ_{V_r}	–0,065265825615	–0,075257944004	–0,06564653582	–0,06466045327036	–0,06339073139
λ_{V_n}	1,3623340777782	1,3653869345017	1,364158466294	1,36474044140864	1,357648817782
λ_r	1,4200011568480	1,4207257561587	1,421069918027	1,42243156356652	1,40764863211
T_f	6,7321648922778	7,0228415355241	12,30599404742	12,48386539989280	5,855669428846
β_f	3,1311300732552	3,166796288751	5,127686975088	5,33807657900554	2,859452408788
m_f , кг	3227,339	3182,552	3181,12	3204,153	3247,748

2. ВЫЯВЛЕНИЕ И ОЦЕНКА КОРРЕЛЯЦИЙ МЕЖДУ КЛЮЧЕВЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ЗАДАЧИ

2.1. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения системы анализа и обработки данных

Проверка наличия и значимости математических взаимосвязей между значениями параметров задач, обеспечивающих сходимость численного метода решения краевой задачи и оптимизацию решения, реализована с помощью программы, разработанной на языке программирования Python [11]. Данная программа представляет собой специальное математическое и алгоритмическое обеспечение системы анализа и обработки данных, она реализуется преимущественно на базе библиотек для системного анализа данных и математического программирования *pandas*, *scipy* и *numpy*.

Алгоритм построения программы таков.

1. Подгрузка данных и выбор анализируемых параметров и их соотношений.
2. Оценка нормальности по частотной статистике. Она требуется, чтобы убедиться, что в данных нет большого отклонения от средних значений, и может быть осуществлена многими способами, среди которых распространены, например, Тест Шапиро – Уилка [12–14], оценка по Колмогорову – Смирнову [13, 15]. В программе применён тест Шапиро – Уилка, при котором проверяется вероятность случайного отличия: если эта вероятность мала, отличие признается статистически значимым [12–14].
3. Проверка тесноты корреляционной связи по Эвансу и проверка значимости корреляционной связи с помощью критерия Фишера [16, 17]. Проводятся для того, чтобы установить, находится ли изменчивость одного признака в зависимости от изменчивости другого, и насколько эта зависимость релевантна [16, 17].
4. Проверка значимости отличия линейной корреляционной связи от нелинейной (с помощью критерия Фишера) [17].

2.2. Результаты работы программы

В программе осуществлен перебор более 4,145 млн вариаций начальных приближений для каждой из постановок задач в выбранном диапазоне с целью выявления колебаний между значениями ключевых параметров и оценкой степени сходимости. В ходе работы проанализированы 13 групп параметров и их корреляций. Для анализа использова-

ны только те векторы значений параметров, которые обеспечили сходимость численного метода решения системы уравнений и выход космического аппарата на заданную конечную орбиту.

В рамках рассмотренного диапазона влияния колебаний значения истинной аномалии υ_0 , характеризующей точку начала перелёта, на остальные значения компонент рассмотренных векторов не выявлено. В то же время отмечается, что при неизменных значениях иных параметров изменение величины истинной аномалии в большую сторону влечёт за собой увеличение конечной массы (в рамках рассмотренного диапазона значений для υ_0 эта разница между левой и правой границей в среднем составляет 1 кг).

Выявлено, что для каждой из рассмотренных постановок попадание на конечную орбиту перелёта достигается при обеспечении значения $\lambda_r / \lambda_{v_n}$ на следующих уровнях (в зависимости от отдалённости начальной и конечной орбит и/или удалённости от Земли опорной орбиты):

- постановка 1 (орбита старта самая низкая, дальность соответствует дальности «опорной» задачи): 1,001397624, ..., 1,042397661;
- постановка 2 (орбита старта самая низкая, дальность увеличена в сравнении с «опорной» задачей на 100 км): 1,001397624, ..., 1,030802292;
- постановка 3 (орбита старта самая низкая, дальность увеличена в сравнении с «опорной» задачей на 200 км): 1,007127584, ..., 1,025531915;
- постановка 4 («опорная» задача, стартовая орбита на 100 км выше самой низкой): 0,987421384, ..., 1,037090909;
- постановка 5 (самая высокая орбита старта – на 200 км выше самой низкой; самая маленькая дальность – на 100 км меньше дальности «опорного» варианта задачи): 0,983146067, ..., 1,038207201.

При выходе за пределы данных диапазонов внутри рассмотренных путём перебора значений компонент векторов либо не достигается сходимость, либо аппарат не попадает на заданную орбиту (т. е. выходит на более низкую или более высокую). При этом отмечается, что лучшие по массе решения располагаются внутри, отдалённо от левой и правой границ указанных диапазонов.

Также в отношении времени перелёта и величины полярного угла отмечается прямая взаимосвязь, заключающаяся в том, что для обеспечения решения требуется соразмерно работать с обеими величинами, предварительно найдя значения остальных недостающих характеристик. Увеличение значения полярного угла должно происходить соразмерно с увеличением времени перелёта, и это



позволяет эффективно максимизировать массу выводимого космического аппарата.

В ходе проверки взаимосвязей между значениями компонент рассмотренных векторов была подтверждена значимая по Эвансу (на уровне значимости 0,95) линейная (значение коэффициента линейной корреляции 0,9678) по Фишеру корреляционная связь между значениями λ_{V_n} и λ_r (отсутствие выбросов по зависимому параметру, а также нормальность распределения данных и наличие линейной зависимости подтверждено на рис. 1).

Выявлено наличие линейной связи средней значимости по Эвансу между значением Q и значением отношения $\lambda_r / \lambda_{V_n}$, где Q – показатель, характеризующий изменение орбиты (рис. 2):

$$Q = \frac{e_f - e_0}{p_{fb} - p_{0b}},$$

где p_{fb} и p_{0b} – значения фокального параметра конечной и начальной орбит, приведённые к безразмерному виду.

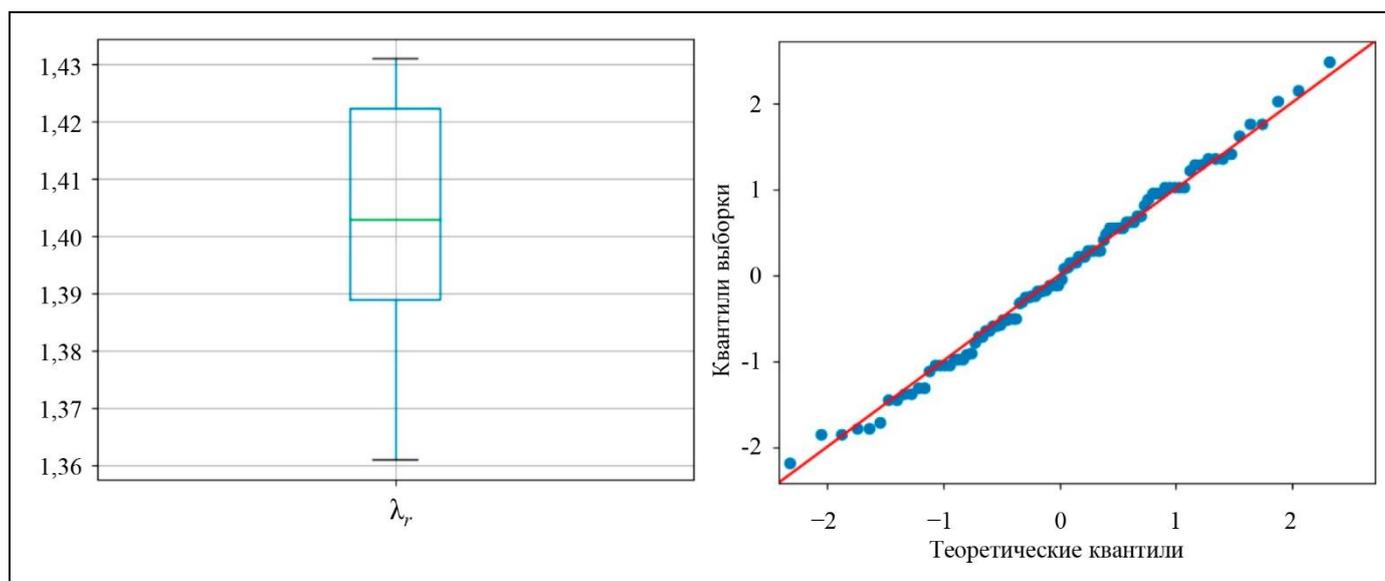


Рис. 1. Результаты корреляционного анализа между значениями λ_{V_n} и λ_r

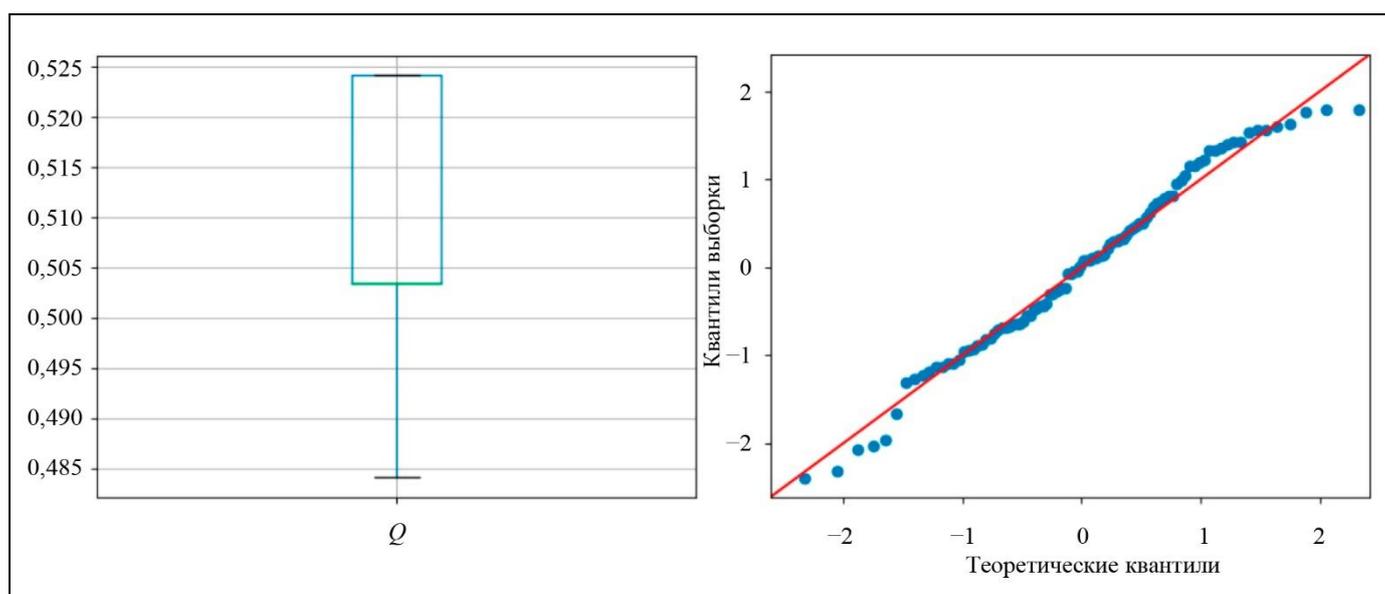


Рис. 2. Результаты корреляционного анализа между значениями Q и $\lambda_r / \lambda_{V_n}$

Линейная корреляция средней значимости выявлена между значением отношения $\lambda_r / \lambda_{V_n}$ и λ_{V_r} . Сильная по показателю значимости Эванса нелинейная связь выявлена между значением полярного угла β_f , характеризующим точку завершения перелёта, и временем межорбитального перелёта T_f . Сильная по Эвансу связь выявлена между значениями отношений T_f / β_f и $\lambda_r / \lambda_{V_n}$. Однако уточнить природу данной взаимосвязи не удалось, что, вероятно, произошло из-за недостатка анализируемых случаев и узости изначально выбранного диапазона.

Наличие значимой связи между величиной истинной аномалии υ_0 , характеризующей точку старта с начальной орбиты, и значением отношения T_f / β_f не подтвердилось.

2.3. Применение результатов к «опорному» варианту задаче с целью улучшения решения

Полученные в ходе исследования при помощи программы, написанной на языке Python, результаты служат основой для выдвижения предположения относительно уточнения диапазонов поиска начальных приближений, что потенциально сможет облегчить процесс нахождения положения оптимума для типовых оптимизационных задач.

Для уточнения начальных значений параметров с целью улучшения полученного результата оптимизации на примере «опорного» варианта задачи использованы сделанные в ходе исследования выводы, изложенные в п. 2.2. В результате изначально найденные значения для сопряжённых переменных λ_{V_r} , λ_{V_n} , λ_r остаются фиксированными, а значение истинной аномалии υ_0 уменьшается и выходит за пределы выбранного диапазона одновременно с увеличением полярного угла β_f в 1,7 раза и соразмерно времени перелёта T_f . Далее проводится расчёт невязок, позволяющий уточнить значения вектора.

Итог – набор значений компонентов вектора, обеспечивающего решение поставленной задачи (табл. 2).

В результате достигнуто значительное улучшение конечного результата до 3 206,884 кг (масса в конечной точке перелёта увеличена на 2,731 кг в сравнении с результатом, достигнутым в ходе исследования в рамках диапазона согласно п. 2.1.2.).

На рис. 3 представлена оптимизированная схема перелёта для «опорного» варианта задачи.

Вектор значений, обеспечивающий оптимизацию перелёта в рамках «опорного» варианта задачи

Характеристика	Значение
υ_0	-0,5733590707938522
λ_{V_r}	-0,06418827063171273
λ_{V_n}	1,3652318375612795
λ_r	1,4233117301910392
T_f	12,066799357615691
β_f	5,062132315335388

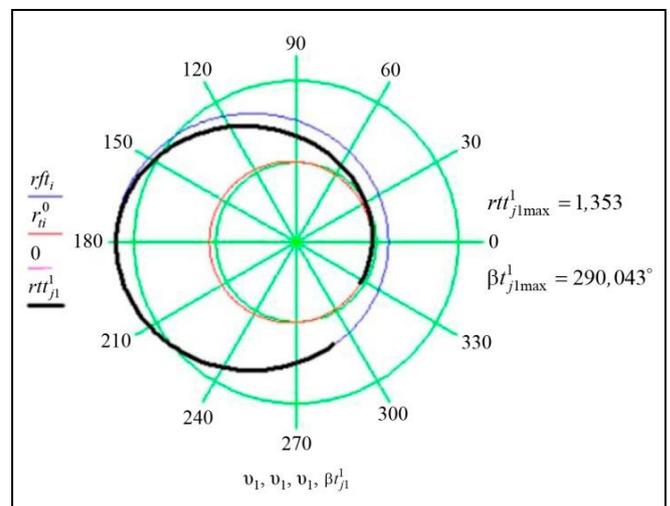


Рис. 3. Оптимизированная схема перелёта для «опорного» варианта задачи (постановка 4)

2.4. Обсуждение и перспективы дальнейших исследований

Представленное исследование реализовано на базе программ, написанных в Mathcad 15 и Python 3.9. Достигнутые результаты подтверждают эффективность предлагаемого подхода к выбору начальных приближений на основе анализа корреляционных отношений между ключевыми параметрами для задач рассмотренного направления – оптимизации траектории перелёта космического аппарата.

Проведённое исследование позволило выявить ряд закономерностей, имеющих место между компонентами векторов, обеспечивающих сходимость численного метода решения для типовых задач с попаданием космического аппарата на заданную орбиту. Полученные в результате проведенного



анализа выводы были проверены в ходе вычислительного эксперимента, который был проведён в отношении «опорного» варианта задачи и показал эффективность реализованного подхода, позволившего увеличить массу космического аппарата на конечной орбите. При этом достигнутый результат позволил уточнить область поиска положения оптимума для типовых задач с небольшими отклонениями относительно дальности перелёта и высоты начальной орбиты.

Дальнейшая работа предполагает расширение рассматриваемых задач в целях уточнения полученных результатов и последующего оформления их в виде алгоритма выбора начальных приближений для задач построения оптимальной траектории орбитального перелёта. В частности, будут исследованы:

- многовитковый перелёт;
- орбитальный переход между орбитами, лежащими в разных плоскостях;
- применение иных типов ДУ (например, ЭР-ДУ с регулируемой тягой).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая статья расширяет возможности эффективного применения аппарата математического программирования для решения задач построения оптимальной траектории перелёта между околоземными эллиптическими орбитами и раскрывает подход, способствующий облегчить процесс выбора эффективных начальных приближений для задач построения оптимальной траектории перелёта космического аппарата. Дополнительно представлены результаты вычислительного эксперимента, подтверждающие эффективность предложенного подхода для рассмотренной постановки задачи.

В результате исследования:

- впервые выявлена взаимосвязь между значениями параметров задачи оптимизации траектории перелёта между двумя эллиптическими околоземными орбитами и установлена природа этой связи при помощи разработанного специального математического и алгоритмического обеспечения системы анализа и обработки данных на языке программирования Python;
- на основе выявленных взаимосвязей достигнуто значительное улучшение первичного (полученного с опорой на метод Й. Барда) и полученного в работе [9] (при помощи перебора внутри сетки данных) решений для варианта задачи опти-

мизации траектории перелёта между двумя эллиптическими околоземными орбитами, выбранного в качестве опорного.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bard, Y.* Nonlinear Parameter Estimation. – New York & London: Academic Press edition. – 1979. – 349 p.
2. *Kitrell, J.R., Mezaki, R., and Watson, C.C.* Estimation of parameters for nonlinear least squares analysis // *Industrial & Engineering Chemistry*. – 1965. – Vol. 57. – P. 18–27.
3. *Wu, D., Cheng, L., Gong, S., and Baoyin, H.* Approximate time-optimal low-thrust rendezvous solutions between circular orbits // *Aerospace Science and Technology*. – 2022. – Vol. 131, Part A. – Art. No. 108011.
4. *Петухов В.Г.* Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения. Космические исследования. – 2008. – Т. 46. – № 3. – С. 224–237. [*Petukhov, V.G.* Optimization of interplanetary trajectories of spacecraft with a ideally regulated engine by the continuation method. – *Space Studies*. – 2008. – Vol. 46, no. 3. – P. 224–237. (In Russian)]
5. *Hofmann, C., and Toppo, F.* Embedded Homotopy for Convex Low-Thrust Trajectory Optimization with Operational Constraints // *Proceedings of 2022 AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*. – Charlotte, NC, USA, 2022. – P. 1–16.
6. *Jiang, F., Baoyin, F. and Li, J.* Practical Techniques for Low-Thrust Trajectory Optimization with Homotopic Approach // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. – 2012. – Vol. 35, no. 1. – P. 245–258.
7. *Wu, D., Wu, C., Lin, F., et al.* Analytical Costate Estimation by a Reference Trajectory-Based Least-Squares Method // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2022. – Vol. 45. – P. 1–9.
8. *Wu, D., Wu, Ch., Lin, F., and Baoyin, H.* An Atlas of Optimal Low-Thrust Rephasing Solutions in Circular Orbit // *arXiv:2209.07418v1*. – 2022. – DOI: 10.48550/arXiv.2209.07418.
9. *Саввина Е.В.* построение траектории перелета космического аппарата между околоземными эллиптическими орбитами методом перебора значений параметров внутри сетки данных // *Проблемы управления*. – 2023. – № 2. – С. 65–74. [*Savvina, E.V.* Inter-orbital Spacecraft Transfer: Trajectory Design by Iterating Parameter Values within a Data Grid // *Control Sciences*. – 2023. – No. 2. – P. 56–63]
10. *Mathcad*: Math Software for Engineering Calculations. – URL: <https://www.mathcad.com> (дата обращения 15 мая 2023 г.) [Accessed May 15, 2023]
11. *PythonTM*. – URL: <https://www.python.org> (дата обращения 15 мая 2023 г.) [Accessed May 15, 2023]
12. *Shapiro, S.S., Wilk M.B.* An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples) // *Biometrika*. – 1965. – Vol. 52, no. 3/4. – P. 591–611.]
13. *Mohd Razali, N. and Yap, B.W.* Power Comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling Tests // *J. Stat. Model. Analytics*. – 2011. – Vol. 2, no. 1. – P. 20–33.

14. *Rahman, M. and Zakkula, G.* A modification of the test of Shapiro and Wilk for normality // Journal of Applied Statistics. – 1997. – Vol. 24. – P. 219–236.
15. *Simard, R.J., and L'Ecuyer, P.* Computing the Two-Sided Kolmogorov-Smirnov Distribution // Journal of Statistical Software. – 2011. – Vol. 39. – P. 1–18.
16. *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. [*Kobzar', A.I.* Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov. – М.: FIZMATLIT, 2006. (In Russian)]
17. *Афифи А., Эйзен С.* Статистический анализ: подход с использованием ЭВМ; перевод с английского И.С. Енюкова, И.Д. Новикова; под редакцией Г.П. Башарина. – М.: Мир, 1982. [*Afifi, A.A. and Azen, S.P.* Statistical analysis: A computer oriented approach. – London, N.Y.: Academic Press Inc. Publ., 1979.]

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 13.02.2023,
после доработки 04.07.2023.
Принята к публикации 18.07.2023.

Саввина Елена Валерьевна – соискатель, г. Москва,
✉ petrakowae@mail.ru
ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0007-7083-8617>

© 2023 г. Саввина Е.В.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

INTER-ORBITAL SPACECRAFT TRANSFER OPTIMIZATION: CHOOSING INITIAL APPROXIMATIONS BASED ON CORRELATION ANALYSIS OF KEY PARAMETERS

E.V. Savvina

✉ petrakowae@mail.ru

Abstract. This paper presents a new approach to choosing initial approximations in inter-orbital transfer optimization problems for a spacecraft with a chemical booster and fixed thrust. The approach involves correlations between the values of key problem parameters. It is implemented using numerical methods, mathematical modeling, and programming. Relevant publications on the subject area (methods for finding initial approximations in optimization problems) are systematically studied and several mathematical relationships are identified. As a result, laws are specified to facilitate the choice of initial approximations in order to ensure convergence and achieve the optimum. The results of a computational experiment confirm the applicability and effectiveness of this approach in typical optimization problems (an optimal spacecraft trajectory design between near-Earth orbits as one example).

Keywords: optimal control, spacecraft trajectory optimization, maximum principle, mathematical modeling, nonlinear programming, statistical analysis.