

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОГРАММНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ АЭРОГЕОФИЗИЧЕСКОЙ СЪЕМКЕ

А.М. Гараков, А.И. Гладышев

Аннотация. Управление подвижными объектами при аэрогеофизической съемке требует решения определенных задач, связанных с формированием программных (заданных) траекторий, которые должны быть оптимальными. Наиболее очевидным критерием оптимальности является время, за которое объект из начального положения переходит в положение, требуемое полетным заданием. Задачи, в которых рассматривают такой критерий, известны как задачи быстрогодействия. Поскольку аэрогеофизическая съемка традиционно выполняется по сети параллельных маршрутов, в данной работе рассмотрены две задачи быстрогодействия. Первая – заход на очередной маршрут съемки. Вторая – сближение с прямолинейным участком текущего маршрута съемки. Для каждого из режимов поставлены и решены задачи быстрогодействия. Результат решения – программные траектории захода и сближения. Представлен формальный анализ решений и описаны способы формирования оптимальных траекторий и соответствующих управлений, реализующих эти траектории. Описана реализация полученных алгоритмов в составе бортового программного обеспечения.

Ключевые слова: машина Дубинса, задача быстрогодействия, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина.

ВВЕДЕНИЕ

Планирование траекторий движения объектов в задачах автоматического управления применяется в различных технических системах – например, для управления пилотируемыми аппаратами, беспилотными системами или же различными робототехническими комплексами и т. д. Одним из качественных критериев оптимальности запланированных траекторий можно рассматривать минимальное время их прохождения подвижным объектом.

Часто при планировании оптимальных траекторий кратчайшей длины рассматривают систему, известную как машина Дубинса [1, 2]. Такая модель задается нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка. Две фазовые переменные характеризуют положение объекта управления на плоскости, а третья переменная – угол направления вектора скорости. Величина скорости считается постоянной. Скалярное управляющее воздействие при геометрических ограничениях определяет мгновенный радиус разворота.

Первым эту систему рассматривал А.А. Марков в 1887 г. [3]. Машина Дубинса исследуется как управляемый объект с простейшей моделью движения в горизонтальной плоскости. С точки зрения геометрии траектория Дубинса представляет собой кратчайшую кривую ограниченной кривизны, соединяющую две точки на плоскости в евклидовом пространстве. В 1957 г. Л. Дубинс доказал [4], что оптимальная по быстроддействию траектория является траекторией, составленной из сегментов дуг окружностей максимальной кривизны и прямых линий.

Управление движением вдоль траектории, составленной из фрагментов, возникает во многих приложениях: управление манипуляторами на автоматизированных линиях сборок, мониторинг тепловых и энергетических сетей, аэросъемочные работы определенной территории по сети параллельных маршрутов и т. д. В данной работе траектории Дубинса рассматриваются применительно к управлению летательным аппаратом (ЛА) при выполнении аэрогеофизических съемочных работ.

При выполнении таких работ требуется последовательно переключать два основных режима управления:

- заход на очередной участок траектории с заданным курсом,
- движение вдоль прямолинейного участка траектории с минимальным боковым отклонением.

Существуют различные подходы к решению данной задачи. В случае пилотируемого объекта навигационную информацию для пилота формируют программные комплексы, в основе которых могут быть заложены те или иные алгоритмы управления. Один из распространенных подходов предполагает демонстрацию на графических дисплеях карты с изображенными на ней линиями пути и положением управляемого объекта [5, 6]. Недостатками таких систем информационного обеспечения можно считать избыточную для восприятия пилота информацию и отсутствие алгоритмов управления. Имеются подходы, в которых для пилотируемой авиации вырабатываются управляющие команды, позволяющие оптимизировать заход на траекторию и улучшить прохождение прямолинейного участка [7, 8]. Основа одного из описанных в этих работах подходов – построение новой программной траектории в каждый отсчет времени, отвечающий новой навигационной информации, и использование ПИД-регулятора для демонстрации пилоту отклонения от программной траектории. В работах [7, 8] акцент делается прежде всего на алгоритмическую составляющую процесса управления. Учитывается множество параметров, прямо или косвенно влияющих на качество формируемой в конечном итоге навигационной информации. А сама информация доставляется пилоту на дисплей в привычной для пилота форме индикатора траекторного управления.

Настоящая статья посвящена алгоритмам управления движением ЛА при выполнении аэрогеофизической съемки. Для реализации этих алгоритмов в каждый момент времени вычисляется программная траектория, отклонение от которой выводится на индикатор пилота. Программные траектории получаются как решение одной из двух задач быстрого действия, возникающих на этапе захода ЛА на очередной маршрут и при сближении с прямолинейным участком текущего маршрута съемки. Управление по высоте выносится за рамки данной работы. Как правило, пилот выполняет съемку с обтеканием рельефа, и управление высотой ЛА представляет собой отдельную сложную задачу [9].

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Наиболее общий вид кусочно-фрагментарной траектории в географических координатах показан на рис. 1. Здесь режиму «заход» соответствуют фрагменты (2–3), (4–5), а режиму «стабилизация на маршруте» фрагменты (1–2), (3–4), (5–6).

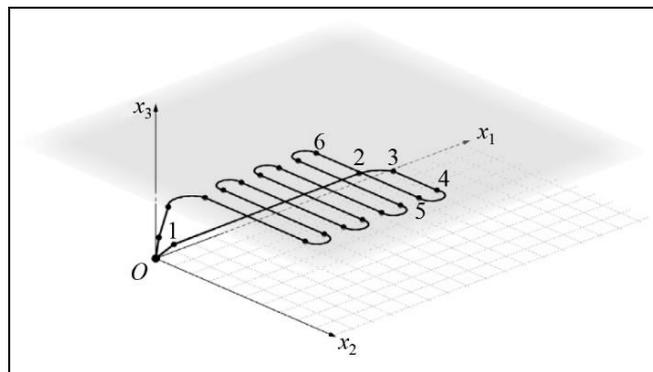


Рис. 1. Пример фрагментарной траектории

Будем рассматривать упрощенную постановку задачи. Основные допущения следующие. Во-первых, высота полета в данной работе не рассматривается, задача решается в проекции на горизонтальную плоскость. Во-вторых, на данном этапе исследований пренебрегается изменением горизонтальной скорости объекта. Наконец, предполагается, что управление ЛА сводится к кратковременным моментам действия постоянного вертикального углового ускорения для изменения направления движения. В случае самолета это соответствует кратковременному отклонению элеронов на фиксированный угол. При достижении определенного угла крена управление прекращается.

В случае скоординированного разворота, когда он совершается так, что сумма центробежного и гравитационного ускорений компенсируется подъемной силой крыла, угол крена при фиксированной скорости однозначно связан с радиусом разворота.

Введем следующие обозначения: T – время (с); x_1, x_2 – локальные декартовы координаты объекта (м); φ – курс (путевой угол) движения объекта (рад); ω – скорость изменения курса (рад/с); V – модуль горизонтальной скорости движения объекта (м/с); U – управляющее воздействие (рад/с²).

Уравнения движения ЛА [8] с учетом сделанных предположений и введенных обозначений можно записать в следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = V \cos \varphi, \\ \dot{x}_2 = V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\omega} = U. \end{cases} \quad (1)$$

Приведем систему уравнений (1) к безразмерной форме. Для этого введем следующие масштабные коэффициенты: $V^* = V = 50 \text{ м/с}$ – характерная скорость ЛА, например самолета Ан-3; максимальное значение угла крена – $\gamma^* = 0,35 \text{ рад}$, или примерно 20 градусов. Запишем радиус скоординированного разворота R^* .

Согласно схеме, приведенной на рис. 2, соотношение для радиуса скоординированного разворота будет иметь следующий вид:

$$\tan \gamma^* = \frac{|\vec{F}_{\text{цб}}|}{|\vec{F}_{\text{тяж}}|} = \frac{m\omega^2 R^*}{mg} = \frac{V^{*2}}{gR^*} \Rightarrow R^* = \frac{V^{*2}}{g \tan \gamma^*}, \quad (2)$$

где m – масса ЛА; g – ускорение силы тяжести; $|\vec{F}_{\text{цб}}|$ – модуль центробежной силы; $|\vec{F}_{\text{тяж}}|$ – модуль силы тяжести, откуда $R^* \approx \frac{2500}{10 \cdot 0,36} \approx 700 \text{ м}$. Теперь можно получить константу времени движения по траектории как $T_1 = \frac{R^*}{V^*} \Rightarrow T_1 = \frac{700}{50} \approx 14 \text{ с}$. Это время, за которое угол курса изменяется на один радиан. Также мы должны взять в рассмотрение постоянную времени для четвертого уравнения системы (1) – время задания угла крена $T_2 \sim 1 \text{ с}$. Значение времени T_2 выбрано опытно-экспериментальным путем при выполнении полетов на ЛА, таких как Ан-2, Ан-3, Cessna и др.

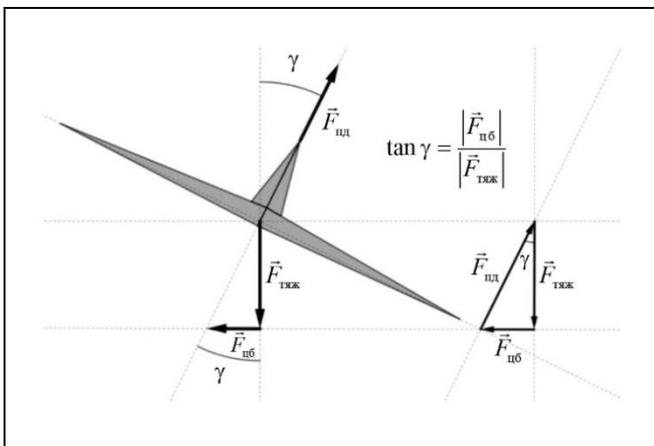


Рис. 2. Силы, действующие на ЛА

Очевидно, что характерное значение угловой скорости $\omega^* = \frac{V^*}{R^*} = \frac{1}{T_1} \Rightarrow \omega^* = \frac{1}{14} \sim 0,07 \text{ рад/с}$, а угловое ускорение $U^* = \frac{\omega^*}{T_2} = \frac{1}{T_1 T_2} \Rightarrow U^* = \frac{1}{1 \cdot 14} \sim 0,07 \text{ рад/с}^2$.

Важно понимать, что величина U в уравнении (1) отлична от нуля только в моменты изменения угловой скорости, т. е. на интервалах времени $\Delta T \leq T_2$.

Таким образом, решение системы (1) для угла курса φ – это функция, линейная на интервалах времени порядка T_1 и более и квадратичная на коротких переходных участках.

Введем безразмерные величины

$$t = \frac{T}{T^*}, \quad x = \frac{x_1}{R^*}, \quad y = \frac{x_2}{x_2^*}, \quad w = \frac{\omega}{\omega^*}, \quad u = \frac{U}{U^*},$$

где $T^* = T_1$ или T_2 ; тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{T^*}{T_1} \cos \varphi, \\ \dot{y} = \frac{T^*}{T_1} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \frac{T^*}{T_1} w, \\ \dot{w} = \frac{T^*}{T_2} u. \end{cases} \quad (3)$$

Применяя теорию разделения движений [10], можно рассмотреть систему (3) в «быстром» ($T^* = T_2$) и в «медленном» ($T^* = T_1$) времени. Рассмотрение в «быстром» времени имеет смысл только на интервале действия управления $u = \pm 1$. Действительно, если ввести малый параметр $\varepsilon = \frac{T_2}{T_1} \sim 0,07$, то в нулевом приближении объект неподвижен и меняется только безразмерная угловая скорость w :

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{w} = u.$$

В «медленном» времени малый параметр возникает только в последнем уравнении системы (3):

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \varphi, \\ \dot{y} = \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = w, \\ \dot{w} = 0, \end{cases} \quad (4)$$



Таким образом, исходная система уравнений (1), описывающая движение нашего объекта, сведена к уравнению движений меньшей размерности (4), в котором управлением является величина w , ограниченная значениями $[-1, 1]$. В размерном времени это соответствует диапазону изменения угловой скорости от $-0,07$ до $+0,07$ рад/с.

Согласно теореме Пуанкаре [8] решение системы (4) на интервале времени T_1 будет отличаться от решения системы (1) на величину порядка ε . Поскольку предполагается постоянно вычислять оптимальную траекторию исходя из текущих координат, которые обновляются несколько раз в секунду, данное расхождение не оказывает влияния на дальнейшее решение задачи управления.

2. ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

2.1. Уравнения движения

Будем рассматривать систему (4) в размерном варианте, что соответствует задаче (1) без последнего уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = V \cos \varphi, \\ \dot{x}_2 = V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \omega, \end{cases} \quad (5)$$

где $\omega \in [-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$ – управляющее воздействие.

2.2. Задача быстрогодействия для режима «заход»

Прежде чем ставить задачу быстрогодействия, введем новые переменные (y_1, y_2, y_3) для системы (5) таким образом, чтобы начало координат O совпадало с началом маршрута захода, ось Oy_1 совпадала с направлением этого маршрута, а ось Oy_2 дополняла систему координат до правой ортонормированной пары; параметр y_3 задает угол отклонения направления движения от направления маршрута в радианах:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos \varphi_0 + x_2 \sin \varphi_0 - x_{10}, \\ y_2 = -x_1 \sin \varphi_0 + x_2 \cos \varphi_0 - x_{20}, \\ y_3 = \varphi - \varphi_0, \end{cases} \quad (6)$$

где (x_{10}, x_{20}) – координаты начала маршрута O ; φ_0 – курс маршрута.

С учетом замены (6) система (5) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = V \cos y_3, \\ \dot{y}_2 = V \sin y_3, \\ \dot{y}_3 = \omega. \end{cases} \quad (7)$$

Функционалом качества движения объекта будет интегральное выражение

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \rightarrow \min. \quad (8)$$

Учитывая выражения (7) и (8), рассмотрим задачу быстрогодействия для режима «заход»:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = V \cos y_3, \\ \dot{y}_2 = V \sin y_3, \\ \dot{y}_3 = \omega, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = y_1^0, \\ y_2(0) = y_2^0, \\ y_3(0) = y_3^0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(t_f) = 0, \\ y_2(t_f) = 0, \\ y_3(t_f) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь параметры $\{y_1^0, y_2^0, y_3^0\}$ – заданное начальное состояние объекта; t_f – минимизируемое время захода.

Требуется: найти оптимальное управление $\omega^+(t)$ и соответствующую ему траекторию $y^+(t)$, при реализации которых управляемый объект из заданного начального состояния переходит в начало координат за минимальное время t_f [11].

Для решения задачи (9) в соответствии с принципом максимума Понтрягина введем вектор сопряженных переменных $(\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$, выпишем гамильтониан и сопряженную систему уравнений [11]

$$H = \psi_1 V \cos y_3 + \psi_2 V \sin y_3 + \psi_3 \omega, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_3 = \psi_1 V \sin y_3 - \psi_2 V \cos y_3, \end{cases}$$

$$\text{где } \dot{\psi}_i = \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Согласно условию принципа максимума для задачи быстрогодействия необходимо $\exists \psi(t) \neq 0$ решения системы (10) такого, что $\max_{\omega} H(\psi, y^+, \omega) = H(\psi, y^+, \omega^+) \equiv \text{const} \geq 0$ [11].

Очевидно, что из первого уравнения системы (10) $\psi_1(t) \equiv \psi_1^* = \text{const}$ и из второго уравнения $\psi_2(t) \equiv \psi_2^* = \text{const}$. Введем следующую замену переменных для $\psi_1^*, \psi_2^* : \psi_1^* = \rho \cos \alpha, \psi_2^* = \rho \sin \alpha$. Тогда $\rho = \sqrt{\psi_1^{*2} + \psi_2^{*2}}$, а $\tan \alpha = \frac{\psi_2^*}{\psi_1^*}$. С учетом данной замены перепишем гамильтониан:

$$H = \rho V \cos(y_3 - \alpha) + \psi_3 \omega. \quad (11)$$

Условия для задачи быстрогодействия: а) $H \equiv \text{const}$; б) $H = \max_{\omega}$.

Если $\rho = 0$, то $H = \psi_3 \omega$ ($\psi_3 \neq 0$). Следовательно, $\omega^+(t) = \text{sign } \psi_3 = \begin{cases} \omega_{\max}, & \psi_3 > 0, \\ -\omega_{\max}, & \psi_3 < 0, \end{cases}$ так как при

$$|\omega| < \omega_{\max} \Rightarrow \psi_3 \text{ sign } \psi_3 > \psi_3 \omega \Rightarrow \psi_3 = C = \text{const.}$$

Условия а) и б) выполнены.

При $\rho \neq 0$ в формуле (11), управление будет

$$\omega^+(t) = \begin{cases} \omega_{\max}, & \psi_3 > 0, \\ 0, & \psi_3 = 0, \\ -\omega_{\max}, & \psi_3 < 0. \end{cases}$$

Здесь $\psi_1^* \neq 0$ и/или $\psi_2^* \neq 0 \Rightarrow \psi_3^* = \psi_1^* y_2^+(t) - \psi_2^* y_1^+(t) + C$, $C = \text{const}$, где $y_1^+(t)$, $y_2^+(t)$ – оптимальная траектория.

Значение $\omega^+(t) = 0$ также является решением задачи быстрогодействия, так как, когда $\omega(t) = 0$ в формуле (11), то при $(y_3 - \alpha) = \pm \frac{\pi}{2}$ также достигается значение максимума $H = \rho V \cos(y_3 - \alpha) = \text{const}$. Данное решение соответствует $\psi_3^* = 0$, что отвечает движению по прямой [12], так как ψ_1^* , ψ_2^* , C – константы:

$$\psi_1^* y_2^+ - \psi_2^* y_1^+ + C = 0. \quad (12)$$

Управления, удовлетворяющие принципу максимума, могут изменять свое значение только на прямой (12), которая называется прямой переключения. Движение вне прямой будет представлять собой дугу окружности.

Решение задачи быстрогодействия для объекта, движение которого описывается уравнениями (7) – это решение задачи Дубинса [4]. Полученные оптимальные по быстродействию траектории будут называться траекториями Дубинса.

На рис. 3 оптимальная траектория состоит из трех фрагментов. Первый – дуга $L_a A$ окружности с центром в точке C_1 , второй – отрезок AB , сопряженный с дугой $L_a A$ в точке касания с окружностью C_1 , а третий – это дуга BO окружности с центром C_2 . Величины y_i^0 , $i=1, 2, 3$ – начальные условия задачи (8): y_1^0 – начальное значение продольного отклонения от начала маршрута, y_2^0 – начальное значение поперечного отклонения, y_3^0 – начальное значение угла отклонения курса объекта от направления маршрута. Прямая переключений представлена как отрезок прямой с концами AB .

Первое переключение происходит при переходе с фрагмента $L_a A$ на AB . Второе – при переходе с AB на BO . Маршрут захода ограничен участком OD .

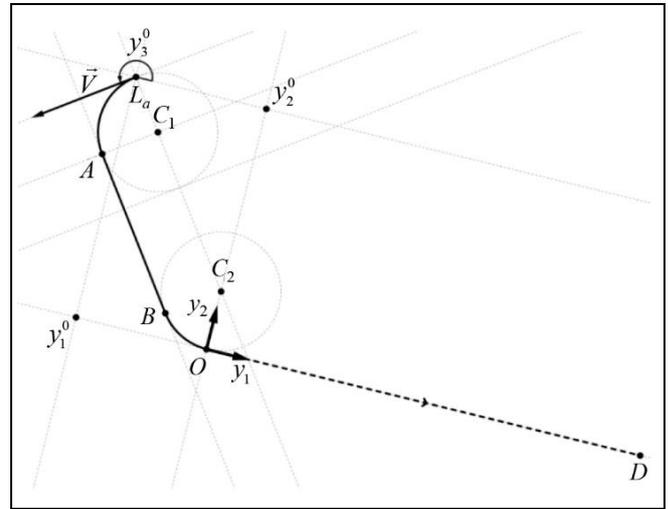


Рис. 3. Пример траектории для режима «заход»

2.3. Задача быстрогодействия для режима «сближения»

Задача сближения заключается в следующем. Если ЛА ушел с маршрута съемки, необходимо его вернуть на соответствующую прямую максимально быстро. При этом уже не важно, в какой именно точке вдоль прямой произойдет возврат. Получается, что задача (9) решается для меньшей размерности: y_2 – отклонение от прямой в метрах, а y_3 – угол отклонения курса от направления маршрута:

$$\begin{cases} \dot{y}_2 = V \sin y_3, \\ \dot{y}_3 = \omega, \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(0) = y_2^0, \\ y_3(0) = y_3^0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(t_f) = 0, \\ y_3(t_f) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Запишем гамильтониан для выражения (13):

$$H = \psi_2 V \sin y_3 + \psi_3 \omega. \quad (14)$$

Соответствующая сопряженная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_3 = \psi_2 V \cos y_3. \end{cases} \quad (15)$$

Следовательно, $\psi_2(t) \equiv \psi_2^* = \text{const}$.

Анализируя уравнение (14), имеем, что если $\psi_2^* = 0 \Rightarrow \psi_3^* = \text{const} \neq 0$, тогда $\omega^+(t) = \text{sign } \psi_3 = \begin{cases} \omega_{\max}, & \psi_3 > 0, \\ -\omega_{\max}, & \psi_3 < 0, \end{cases}$ так как $\psi(t) \neq 0$. Если $\psi_3^* \equiv 0$ при $\psi_2^* \neq 0$, тогда в силу второго уравнения системы (15) управление



$$\omega^+(t) = \begin{cases} \omega_{\max}, \psi_3 > 0, \\ 0, \psi_3 = 0, \\ -\omega_{\max}, \psi_3 < 0. \end{cases}$$

Вариант $\omega^+ = 0$ будет иметь место только при $y_3 = \pm \frac{\pi}{2}$.

Отметим, что выражение (14) эквивалентно формуле (11) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\psi_2 = \rho$. Таким образом, задача сближения – это частный случай задачи захода.

На рис. 4 изображены два варианта траектории сближения. Первый вариант оптимальной траектории, как и в режиме «заход», имеет два переключения. Второй – одно переключение, которое происходит в точке A , а именно при переходе с фрагмента $L_a A$ на фрагмент AB .

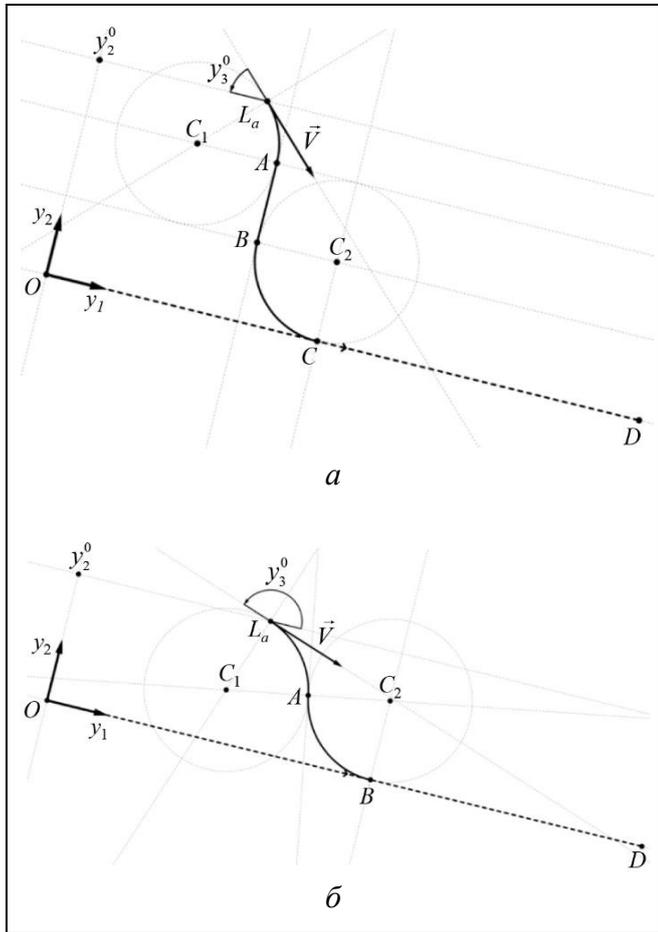


Рис. 4. Примеры траекторий для режима «сближение»: a – траектория с двумя переключениями, b – с одним

2.4. Численное решение задачи быстродействия

Введем обозначения для дуги окружности и отрезка прямой следующим образом: C – дуга, S –

отрезок. Согласно теореме, доказанной в работе [13], траектория Дубинса будет принадлежать типу CSC и CCC или же подмножеству этих типов. Дуга C , для которой $\dot{y}_3 > 0$, будет дугой левого поворота L (левая дуга), а при $\dot{y}_3 < 0$ дугой правого поворота R (правая дуга). С учетом направления поворота траектория Дубинса может быть охарактеризована как один из типов, представленных в наборе

$$\{LRL, RLR, LSL, LSR, RSL, RSR\},$$

или же как подмножество одного из этих типов, например LR, RL, RS, L и т. д., что в общем дает 15 возможных вариантов. Предложенный в работе [13] подход для получения кратчайшей (оптимальной) траектории Дубинса заключается в параметризации задачи быстродействия по конечному времени t_f и моментам времени переключений.

Пусть L_{ξ_1} – левая дуга длины $V\xi_1$, R_{ξ_2} – правая дуга длины $V\xi_2$ и S_{ξ_3} – отрезок длиной $V\xi_3$. Также и для дуги L_{ξ_4} введем длину $V\xi_4$, а для дуги R_{ξ_5} длину $V\xi_5$. В результате получаем следующую последовательность:

$$L_{\xi_1} R_{\xi_2} S_{\xi_3} L_{\xi_4} R_{\xi_5}.$$

С одной стороны, например, тип траектории RLR можно получить, когда $\xi_1 = \xi_3 = 0$, а $\xi_2, \xi_4, \xi_5 > 0$. С другой стороны, тип LR может быть получен, если $\xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0$, а $\xi_1, \xi_2 > 0$, или же $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, $\xi_4, \xi_5 > 0$. Начальное время положим как $t_0 = 0$, а конечное как $t_5 = t_f$. Также определим моменты времени переключений $t_j, j = 1, \dots, 4$ такие, что

$$\xi_j = t_j - t_{j-1}, j = 1, \dots, 5.$$

Отметим, что вдоль дуги L управление будет $\omega^+(t) = \omega_{\max}$, а в случае R : $\omega^+(t) = -\omega_{\max}$. Вдоль отрезка S : $\omega^+(t) = 0$. С учетом изложенного численный подход в решении задач быстродействия будет следующим. Для $t_{j-1} \leq t \leq t_j$

$$y_3(t) = y_3(t_{j-1}) + \omega^+(t)(t - t_{j-1}), \text{ если } j = 1, \dots, 5,$$

$$y_1(t) = \begin{cases} y_1(t_{j-1}) + V(\sin y_3(t) - \sin y_3(t_{j-1})) / \omega^+(t), \\ \text{если } j = 1, 2, 4, 5, \\ y_1(t_{j-1}) + V \cos y_3(t)(t - t_{j-1}), \\ \text{если } j = 3, \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} y_2(t_{j-1}) + V(\cos y_3(t) - \cos y_3(t_{j-1})) / \omega^+(t), & \text{если } j = 1, 2, 4, 5, \\ y_2(t_{j-1}) + V \sin y_3(t)(t - t_{j-1}), & \text{если } j = 3, \end{cases}$$

где

$$\omega^+(t) = \begin{cases} \omega_{\max}, & \text{если } j = 1, 4, \\ -\omega_{\max}, & \text{если } j = 2, 5, \\ 0, & \text{если } j = 3. \end{cases}$$

Решение задачи быстродействия сводится к решению оптимизационной задачи

$$\begin{cases} \min t_f = \sum_{j=1}^5 \xi_j, \\ y_1^0 + \frac{V}{\omega_{\max}}(-\sin y_3^0 + 2\sin y_3^1 - 2\sin y_3^2 + 2\sin y_3^4) + V\xi_3 \cos y_3^2 = 0, \\ y_2^0 + \frac{V}{\omega_{\max}}(\cos y_3^0 - 2\cos y_3^1 + 2\cos y_3^2 - 2\cos y_3^4 + 1) + V\xi_3 \sin y_3^2 = 0, \\ \xi_j \geq 0, \text{ для } j = 1, \dots, 5, \end{cases} \quad (16)$$

где $y_3^1 = y_3^0 + \omega_{\max} \xi_1$, $y_3^2 = y_3^1 - \omega_{\max} \xi_2$, $y_3^4 = y_3^2 + \omega_{\max} \xi_4$. Подставляя y_3^1 , y_3^2 , y_3^4 в задачу (16), получаем конечномерную задачу нелинейной оптимизации.

Описанный подход численного решения задач быстродействия более подробно изложен в работе [13]. Там же представлен обобщенный анализ подобного рода задач и возможные варианты формируемых траекторий.

Отметим, что в действительности траектории Дубинса нельзя реализовать при траекторном управлении реальных подвижных объектов. Здесь они используются лишь как программные траектории.

3. УПРАВЛЕНИЕ ИНДИКАТОРОМ ПИЛОТА

Описанный подход формирования программных траекторий захода для ЛА при выполнении аэрогеофизических работ применяется в программно-аппаратном комплексе NavDat [7, 14, 15]. На индикатор пилота подается расхождение угловой скорости для программной траектории и для реальной текущей траектории ЛА, параметры которой определяются по данным спутниковой навигационной системы (СНС). Согласно данным СНС

можно получить точное время, координаты (широта и долгота), высоту над уровнем моря и скорость движения точки.

Угловая скорость определяется по формуле

$$\omega = \frac{V}{R},$$

которая выражает связь через горизонтальную скорость V ; R – радиус скоординированного разворота.

Для программной и реальной текущей траекторий модуль скорости V берется по данным СНС. Величина радиуса R для программной траектории задается, а для текущей траектории движения ЛА вычисляется по формуле (2) с учетом ограничения на угол крена ЛА.

В режиме «сближение» программа NavDat использует ПИД-регулятор на основе текущего бокового отклонения. Как следствие, реализованный в ней алгоритм требует изменений настройки регулятора, если существенно изменяется скорость полета ЛА.

В данной работе алгоритм управления в режиме сближения строится точно так же, как и в режиме захода. При этом единственный параметр настройки алгоритма – максимальная угловая скорость объекта, который напрямую связан с максимально допустимым углом крена.

Требования по боковому уклонению от маршрута съемки регламентируются техническим заданием. При этом при съемках с межмаршрутным расстоянием 100 м (масштаб съемки 1:10 000) допустимое боковое уклонение может быть 15–25 м, а при межмаршрутных расстояниях 1000 м (1:100 000) пилоту позволяет отклониться на 100–200 м [16].

Чтобы избежать чрезмерных нагрузок на пилота, предлагается при расчете программной траектории в режиме сближения брать не предельное значение угла крена (предельную угловую скорость), а минимально допустимое, которое позволит построить программную траекторию сближения, не пересекая границы коридора, в котором требуется удерживать ЛА (рис. 5.).

На рис. 5 представлены два варианта траекторий с одним переключением и общей начальной точкой L_aA . Первый – оптимальная траектория, сформированная дугами окружностей с центрами C_1 и C_2 . Переключение происходит в точке A при переходе с фрагмента L_aA на фрагмент AB . Второй – допустимая траектория, образованная дугами окружностей большего радиуса, чем в первом случае. Переключение выполняется в точке C на сопряжении участков L_aC и CF .

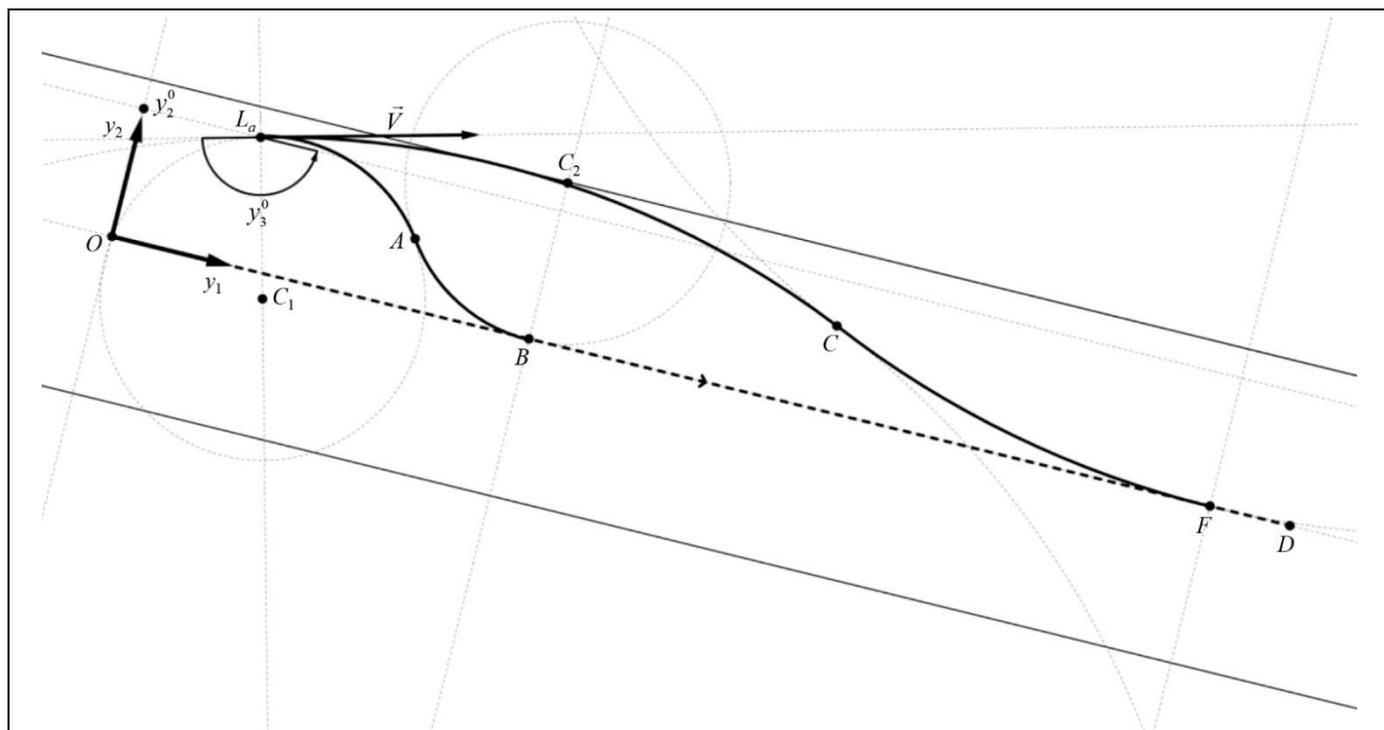


Рис. 5. Вариант допустимого сближения

На рис. 6 изображен планшетный компьютер с установленной программой «Индикатор пилота». Дисплей разделен на три окна. В первом окне расположен индикатор в виде перекрестия, информирующий пилота о его положении относительно программной траектории. Во втором – навигационная панорама с изображением маршрутов и другой необходимой информацией. Сбоку в виде списка расположен блок, информирующий о статусе устройств, подключенных к аппаратно-программному комплексу NavDat.

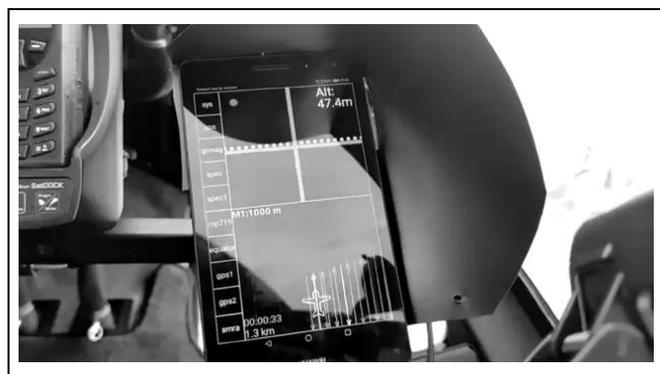


Рис. 6. Индикатор пилота

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы планирования оптимальных траекторий подвижных объектов имеют достаточно широ-

кое применение в различных системах. В системах с многорежимным характером движения необходимо учитывать ограничения при переходе с одного режима движения на другой. Возникающие при этом задачи планирования оптимальных по быстродействию траекторий решаются с учетом ограничений и с применением классических подходов, таких как принцип максимума Понтрягина.

В данной работе была исследована модель движения объекта на плоскости, известная как машина Дубинса, применительно к движению ЛА при выполнении захода на маршрут и сближения с заданной траекторией. Представлен формальный анализ оптимального синтеза траекторий и управлений, реализующих эти траектории для двух таких режимов. Описанная методика позволяет применять единый подход формирования оптимальной траектории как для режима захода, так и для режима сближения.

Предложен вариант перехода от оптимального к допустимому полетным заданием управлению, которое позволяет снизить нагрузку на пилота.

Изложенные методы были применены для модификации программного обеспечения NavDat, позволяющего формировать оптимальную программную траекторию и осуществлять проводку ЛА по заданному маршруту. После вычислений вся необходимая информация в достаточно удобной форме выдается пилоту на «Индикатор пилота».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nguyen, T.K., Pham, D.H., Nguyen, Q.C., et al.* An Optimal Smooth-Path Motion Planning Method for a Car-like Mobile Robot // *Journal of Technical Education Science*. – 2023. – Iss. 75A. – P. 20–30.
2. *Kumar, D.P., Darbha, S., Manyam, S.G. and Casbeer, D.* The Weighted Markov-Dubins Problem // *IEEE Robotics and Automation Letters*. – 2023. – Vol. 8, no. 3. – P. 1563–1570.
3. *Марков А.А.* Некоторые примеры решений специального класса задач на наибольших и наименьших количествах. – Сообщ. Харьковск. мат. общ. – 1887. – Т. 1. – С. 250–276. [*Markov, A.A.* Nekotorye primery reshenii spetsial'nogo klassa zadach na naibol'shikh i naimen'shikh kolichestvakh. – Soobshch. Khar'kovsk. mat. obshch. – 1887. – T. 1. – S. 250–276. (In Russian)]
4. *Dubins, L.E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // *American Journal of Mathematics*. – 1957. – Vol. 79, iss. 3. – P. 497–516.
5. *Жодзишский П.Ю., Пухватов В.А.* Повышение эффективности выполнения аэрогеофизических исследований // *Геопрофи*. – 2010. – № 2. – С. 23–25. [*Zhodzishsky, P.Yu., Puhvatov, V.A.* Improvement of Airborne Geophysical Studies Efficiency // *Geoprofi*. – 2010. – No. 2. – P. 23–25. (In Russian)]
6. *Тригубович Г.М., Шевчук С.О., Косарев Н.С., Никитин В.Н.* Комплексная технология навигационного и геодезического обеспечения аэромагнитных исследований // *Гироскопия и навигация*. – 2017. – № 1. – С. 93–107. [*Trigubovich, G.M., Shevchuk, S.O., Kosarev, N.S., Nikitin, V.N.* Complex Technology of Navigation and Geodetic Support of Airborne Electromagnetic Surveys // *Gyroscopy and Navigation*. – 2017. – Vol. 8, no. 3. – P. 226–234.]
7. *Каршаков Е.В.* Особенности алгоритмов управления летательным аппаратом при аэросъемке // *Проблемы управления*. – 2012. – № 3. – С. 71–76. [*Karshakov, E.V.* Aircraft Control Algorithms Features in Case of Airborne Surveying // *Control Sciences*. – 2012. – No. 3. – P. 71–76. (In Russian)]
8. *Волковицкий А.К., Гаракоев А.М.* Алгоритмы управления движением по фрагментарной траектории // *Материалы XVI Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого)*. – Москва, 2022. – С. 101–105. [*Volkovickij, A.K., Garakoev, A.M.* Algoritmy upravlenija dvizheniem po fragmentarnoj traektorii // *Materialy XVI Mezhdunarodnoj konferencii «Ustojchivost' i kolebanija nelinejnyh sistem upravlenija» (konferencija Pjaticnogo)*. – Moscow, 2022. – P. 101–105. (In Russian)]
9. *Karshakov, E.V., Shevchenko, A.M., Garakoev, A.M.* Formation of a Director Index to Assist the Pilot in Conducting Airborne Geophysical Survey // *International Workshop on Navigation and Motion Control (NMC 2020)*. – Samara, 2020. – P. 1–10.
10. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. – М.: Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 1995. – 224 с. [*Novozhilov, I.V.* Frakcionnyj analiz. – M.: Izd-vo meh-mat f-ta MSU, 1995. – 224 p. (In Russian)]
11. *Александров В.В., Парусников Н.А., Лемак С.С., Злочевский С.И.* Введение в динамику управляемых систем. – М.: МГУ, 1993. – 181 с. [*Aleksandrov, V.V., Parusnikov, N.A., Lemak, S.S., Zlochevskii, S.I.* Vvedenie v dinamiku upravlyаемых систем. – M.: MSU, 1993. – 181 p. (In Russian)]
12. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота // *Тр. ИММ УрО РАН*. – 2018. – Т. 24, № 1. – С. 143–155. [*Packo, V.S., Fedotov, A.A.* Mnozhestvo dostizhivosti v moment dlja mashiny Dubinsa v sluchae odnostoronnego povorota // *Tr. IMM UrO RAN*. – 2018. – Vol. 24, no. 1. – P. 143–155. (In Russian)]
13. *Каца, С.У.* Markov–Dubins Path via Optimal Control Theory // *Comput Optim Appl*. – 2017. – Vol. 68. – P. 719–747. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10589-017-9923-8>.
14. *Волковицкий А.К., Каршаков Е.В., Павлов Б.В.* Структура алгоритмов управления проводкой летательного аппарата // *Известия ЮФУ. Технические науки*. – 2013. – № 3 (140). – С. 217–225. [*Volkovitskij, A.K., Karshakov, E.V., Pavlov, B.V.* Struktura algoritmov upravleniya provodkoi letatel'nogo apparata // *Iz-vestiya YUFU. Tekhnicheskie nauki*. – 2013. – No. 3 (140). – P. 217–225. (in Russian)]
15. URL: https://geotechnologies.ru/ru/products/navdat_ru.html
16. *Инструкция по магниторазведке (наземная магнитная съемка, аэромагнитная съемка, гидромагнитная съемка) / М-во геологии СССР. – Л.: Недра, 1981. – 263 с. [Instrukcija po magnitorazvedke (nazemnaja magnitnaja s"emka, ajeromaginitnaja s"emka, gidromagnitnaja s"emka) / M-vo geo-logii SSSR. – L.: Nedra, 1981. – 263 p.]*

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 07.02.2023,
после доработки 18.05.2023.
Принята к публикации 21.06.2023.

Гаракоев Амир Мусаевич – мл. науч. сотр, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
✉ garac@ipu.ru,
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-1886-4934>

Гладышев Анатолий Иванович – д-р техн. наук, председатель Секции по оборонным проблемам Министерства обороны РФ (при президиуме РАН), г. Москва,
✉ tolyagladyshev@yandex.ru,
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8362-0293>

© 2023 г. Гаракоев А.М., Гладышев А.И.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



AIRCRAFT MOTION CONTROL ALGORITHMS FOR AIRBORNE GEOPHYSICAL SURVEY

A.M. Garakoev¹ and A.I. Gladyshev²

¹Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

²Section on Defense Problems of the Ministry of Defense of the Russian Federation at the RAS Presidium, Moscow, Russia

¹✉ garac@ipu.ru, ²✉ tolyagladyshev@yandex.ru

Abstract. In an airborne geophysical survey, the control of moving objects requires forming optimal program (reference) trajectories. Optimality criteria differ depending on the tasks to be performed. The most obvious criterion is the time in which an object reaches its final position from an initial position. Problems with such a criterion are known as time-optimal control problems. This paper considers two control problems of this class related to the performance of a flight task by an aircraft during an airborne geophysical survey. Such a survey is traditionally carried out along a network of parallel routes. Accordingly, the first mode is to start the next survey route. The second mode is to approach the current straight segment of the route. The corresponding time-optimal control problems are posed and solved. The resulting solutions are the reference trajectories for the start and approach modes. The solutions are formally analyzed and methods for forming optimal trajectories and the corresponding controls implementing these trajectories are described. The onboard software implementation of these algorithms is described.

Keywords: Dubins car, time-optimal control problem, optimal control, Pontryagin's maximum principle.