

МИНИМИЗАЦИЯ ВСПЛЕСКА В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ¹

М.В. Хлебников, Е.А. Стефанюк

Аннотация. Одной из важнейших характеристик переходного процесса в линейных динамических системах при ненулевых начальных условиях является величина максимального отклонения траектории от нуля, имеющая непосредственный инженерный смысл. Если ее значение велико, говорят о наличии эффекта всплеска. Статья завершает серию работ, посвященных исследованию эффекта всплеска в линейных системах управления. Рассматривается линейная система управления, подверженная воздействию неслучайных ограниченных внешних возмущений и системных неопределенностей. Предложен регулярный подход к синтезу стабилизирующей статической обратной связи, минимизирующей величину отклонения. Подход основан на технике линейных матричных неравенств и предполагает сведение исходной задачи к параметрической задаче полуопределенного программирования, легко решаемой численно. Предложенный подход может быть распространен на новые классы задач, в частности – на случай обратной связи по выходу системы с использованием наблюдателя или динамического регулятора.

Ключевые слова: линейная система управления, всплеск, структурированная матричная неопределенность, ограниченные внешние возмущения, линейные матричные неравенства, задача полуопределенного программирования.

ВВЕДЕНИЕ

В апреле 2023 г. исполнилось 75 лет со дня выхода в свет знаменитой статьи А.А. Фельдбаума [1], положившей начало исследованиям переходных режимов в линейных системах при ненулевых начальных условиях. Среди многочисленных характеристик переходного процесса одно из важнейших мест занимает величина максимального отклонения траектории от нуля в переходном режиме, имеющая непосредственный инженерный смысл. Если ее значение велико, говорят о наличии больших отклонений, или же об эффекте всплеска.

К настоящему времени предложены различные подходы к оцениванию отклонений траекторий динамических систем; здесь уместно, в частности, упомянуть работы отечественных ученых

А.П. Крищенко и А.Н. Канатникова [2–4], А.В. Ушакова и Н.А. Вундер (Полиновой) [5–7], И.Б. Фуртат [8], П.С. Щербакова [9].

Несмотря на то, что эффект всплеска ассоциирован с линейными системами, он весьма важен и в теории нелинейных систем. В самом деле, если траектории системы, линеаризованной в окрестности некоторой точки, покидают эту окрестность, претерпевая всплеск, то становится затруднительным дать какие-либо гарантированные оценки поведения исходной нелинейной системы.

Настоящая статья завершает серию работ, посвященных исследованию эффекта всплеска в линейных системах управления. Начало серии положила статья [10], в которой на основе линейных матричных неравенств был предложен подход к минимизации отклонений для линейных динамических систем и получены верхние оценки отклонений. Далее в работах [11, 12] эти результаты были распространены на линейные системы в непрерывном и дискретном времени, содержащие структурированную матричную неопределенность, а публикация [13] была посвящена непрерывным

¹ Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30005), <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>.



системам, подверженным воздействию неслучайных ограниченных внешних возмущений. В рамках развиваемого подхода весьма эффективным инструментом оказался аппарат линейных матричных неравенств [14–16], позволивший регулярным образом синтезировать обратную связь, минимизирующую величину всплеска. При этом, как показывают многочисленные примеры, степень консерватизма получаемых оценок весьма невелика.

В настоящей работе рассматриваются линейные системы управления в непрерывном (§ 1) и дискретном (§ 2) времени, подверженные воздействию системных неопределенностей и неслучайных ограниченных внешних возмущений. В равном объеме для них устанавливаются оценки максимального отклонения траекторий и предложен подход к синтезу обратной связи, минимизирующей величину отклонения. В § 3 эффективность развиваемого подхода демонстрируется на численном примере.

В статье используются следующие обозначения: $|\cdot|$ – евклидова норма вектора, $\|\cdot\|$ – спектральная норма матрицы, T – символ транспонирования, I – единичная матрица соответствующей размерности, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц (в частности, запись $A \preceq 0$, где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, означает, что $x^T A x \leq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$).

1. НЕПРЕРЫВНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим линейную систему управления в непрерывном времени

$$\dot{x} = (A + F\Delta(t)H)x + Bu + Dw, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – заданные матрицы, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, управлением $u(t) \in \mathbb{R}^r$, внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leq \gamma \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad (2)$$

и матричной неопределенностью

$$\|\Delta(t)\| \leq \delta \quad \text{для всех } t \geq 0. \quad (3)$$

При этом так называемые «обрамляющие» матрицы F и H задают структуру неопределенности в матрице системы, а величины γ и δ определяют «размахи» внешних возмущений и системных неопределенностей.

Задача состоит в поиске стабилизирующей статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad (4)$$

минимизирующей величину всплеска

$$\xi = \max_{t \geq 0} \max_{|x_0|=1} \max_{\|\Delta(t)\| \leq \delta} \max_{|w| \leq \gamma} |x(t)|$$

в замкнутой системе (1) при всех допустимых неопределенностях $\Delta(t)$ и при всех допустимых внешних возмущениях $w(t)$.

Напомним следующий результат [16], который приведем в несколько модифицированной формулировке.

Лемма 1. Для решений динамической системы

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad |w| \leq 1,$$

с устойчивой (гурвицевой) матрицей A справедлива оценка

$$\xi = \max_{t \geq 0} \max_{|x_0|=1} \max_{|w| \leq 1} |x(t)| \leq \sqrt{\|P_*\|},$$

где P_* – решение параметрической задачи полуопределенного программирования

$$\|P\| \rightarrow \min,$$

$$AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T \preceq 0,$$

$$P \succeq I,$$

относительно матричной переменной $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

Вернемся к системе (1); замыкая ее обратной связью (4), получаем замкнутую систему

$$\dot{x} = (A + BK + F\Delta(t)H)x + Dw. \quad (5)$$

Воспользовавшись леммой 1, приходим к задаче минимизации $\|P\|$ при ограничениях

$$(A + BK + F\Delta(t)H)P + P(A + BK + F\Delta(t)H)^T + \alpha P + \frac{\gamma^2}{\alpha} DD^T \preceq 0 \quad \text{и} \quad P \succeq I.$$

Первое из них представляет собой матричное неравенство, нелинейное по совокупности переменных P и K .

От нелинейности можно избавиться, введя вспомогательную матричную переменную $Y = KP \in \mathbb{R}^{r \times n}$ и тем самым исключив переменную K . При этом переменная K восстанавливается единственным образом: $K = YP^{-1}$. В результате приходим к неравенству

$$AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \alpha P + \frac{\gamma^2}{\alpha} DD^T + FH\Delta(t)HP + PH^T \Delta^T(t)F^T \leq 0, \quad (6)$$

которое должно выполняться при всех значениях матричной неопределенности $\Delta(t): \|\Delta(t)\| \leq \delta$.

Проверку знакоопределенности полученного матричного семейства можно свести к задаче разрешимости одного матричного неравенства относительно дополнительной скалярной переменной с помощью так называемой леммы Питерсена [17], которую приведем в следующей формулировке.

Лемма 2. Пусть $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ и $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$ – ненулевые матрицы. Матричное неравенство

$$G + M\Delta N + N^T \Delta^T M^T \leq 0$$

справедливо для всех $\Delta: \|\Delta\| \leq \delta$ тогда и только тогда, когда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$G + \varepsilon \delta^2 MM^T + \frac{1}{\varepsilon} N^T N \leq 0.$$

Применяя Лемму 2 к матричному неравенству (6) при

$$G = AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \alpha P + \frac{\gamma^2}{\alpha} DD^T,$$

$$M = F, \quad N = HP,$$

приходим к эквивалентному условию существования положительного числа ε , для которого

$$AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \alpha P + \frac{\gamma^2}{\alpha} DD^T + \varepsilon \delta^2 FF^T + \frac{1}{\varepsilon} PH^T HP \leq 0.$$

Воспользовавшись леммой Шура, окончательно представим полученное соотношение в виде эквивалентного матричного неравенства, линейного по переменным P , Y и ε :

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \alpha P + \frac{\gamma^2}{\alpha} DD^T + \varepsilon \delta^2 FF^T & PH^T \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \leq 0.$$

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть P_* , Y_* – решение оптимизационной задачи

$$\|P\| \rightarrow \min,$$

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \alpha P + \frac{\gamma^2}{\alpha} DD^T + \varepsilon \delta^2 FF^T & PH^T \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \leq 0,$$

$$P \succeq I,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{r \times n}$, скалярной переменной ε и скалярному положительному параметру α .

Тогда для решений системы (1), замкнутой регулятором

$$K_* = Y_* P_*^{-1},$$

справедлива оценка

$$\xi \leq \sqrt{\|P_*\|}$$

при всех допустимых внешних возмущениях (2) и системных неопределенностях (3).

Замечание 1. Согласно изложенному в работе [16], квадратичная форма

$$V(x) = x^T P^{-1} x, \quad P \succ 0,$$

будет служить квадратичной функцией Ляпунова для замкнутой системы (1), поэтому эллипсоид

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n: x^T P^{-1} x \leq 1\}$$

является инвариантным: траектория замкнутой системы, начавшись в произвольной точке этого эллипсоида, будет оставаться в нем для всех моментов времени при всех допустимых внешних возмущениях и неопределенностях, действующих на систему.

Первое из ограничений в задаче, сформулированной в теореме 1, нелинейно по совокупности переменных и представляет собой параметризованное линейное матричное неравенство со скалярным параметром α . При фиксированном значении α оптимизационная задача обращается в задачу полуопределенного программирования. Ее решение легко находится численно на одномерной сетке по параметру α .

2. ДИСКРЕТНЫЙ СЛУЧАЙ

Перейдем к задаче в дискретном времени и рассмотрим линейную систему управления

$$x_{k+1} = (A + F\Delta_k H)x_k + Bu_k + Dw_k, \quad (7)$$



где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – заданные матрицы, с начальным условием x_0 , состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, управлением $u_k \in \mathbb{R}^r$, внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:

$$|w_k| \leq \gamma \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

и матричной неопределенностью

$$\|\Delta_k\| \leq \delta \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Будем искать стабилизирующую статическую линейную обратную связь по состоянию

$$u_k = Kx_k, \quad (10)$$

минимизирующую величину всплеска

$$\xi = \max_{k=0,1,2,\dots} \max_{|x_0|=1} \max_{\|\Delta_k\| \leq \delta} \max_{|w_k| \leq \gamma} |x_k|$$

в замкнутой системе (7) при всех допустимых неопределенностях Δ_k и всех допустимых внешних возмущениях w_k .

Согласно изложенному в работе [18], дискретным аналогом леммы 1 является следующий результат.

Лемма 3. Для решений динамической системы $x_{k+1} = Ax_k + Dw_k$, $|w_k| \leq 1$ с устойчивой (шуровской) матрицей A справедлива оценка

$$\xi = \max_{k=0,1,2,\dots} \max_{|x_0|=1} \max_{|w_k| \leq 1} |x_k| \leq \sqrt{\|P_*\|},$$

где P_* – решение параметрической задачи полуопределенного программирования

$$\begin{aligned} \|P\| &\rightarrow \min, \\ \frac{1}{\alpha} APA^T - P + \frac{1}{1-\alpha} DD^T &\preceq 0, \\ P &\succeq I, \end{aligned}$$

относительно матричной переменной $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярного параметра $0 < \alpha < 1$.

Система (7), замкнутая регулятором (10), имеет вид

$$x_{k+1} = (A + BK + F\Delta_k H)x_k + Dw_k.$$

Применяя к ней лемму 3, приходим к задаче минимизации $\|P\|$ при ограничениях

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} (A + BK + F\Delta(t)H) P (A + BK + F\Delta(t)H)^T - \\ - P + \frac{\gamma^2}{1-\alpha} DD^T \preceq 0 \quad \text{и} \quad P \succeq I. \end{aligned}$$

Первое из них, которому можно придать эквивалентный вид

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P(A + BK + F\Delta(t)H)^T \\ (A + BK + F\Delta(t)H)P & \frac{\gamma^2}{1-\alpha} DD^T - P \end{pmatrix} \preceq 0,$$

вновь является матричным неравенством, нелинейным по совокупности переменных P и K . Исключив переменную K путем введения, как и в непрерывном случае, вспомогательной матричной переменной $Y = KP \in \mathbb{R}^{r \times n}$, приходим к неравенству

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^T + Y^T B^T + PH^T \Delta^T(t) F^T \\ AP + BY + F\Delta(t)HP & \frac{\gamma^2}{1-\alpha} DD^T - P \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (11)$$

которое должно выполняться при всех значениях матричной неопределенности $\Delta_k: \|\Delta_k\| \leq \delta$.

Представив соотношение (11) в виде

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^T + Y^T B^T \\ AP + BY & \frac{\gamma^2}{1-\alpha} DD^T - P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} \Delta(t) (HP \ 0) + \begin{pmatrix} PH^T \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^T(t) (0 \ F^T) \preceq 0$$

и воспользовавшись леммой Питерсена при

$$G = \begin{pmatrix} -\alpha P & PA^T + Y^T B^T \\ AP + BY & \frac{\gamma^2}{1-\alpha} DD^T - P \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}, \quad N = (HP \ 0),$$

приходим к эквивалентному условию существования положительного числа ε , для которого выполняется

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^T + Y^T B^T \\ AP + BY & \frac{\gamma^2}{1-\alpha} DD^T - P \end{pmatrix} + \varepsilon \delta^2 \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} (0 \ F^T) + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} PH^T \\ 0 \end{pmatrix} (HP \ 0) \preceq 0.$$

Еще раз применяя лемму Шура, приходим к окончательному условию

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^T + Y^T B^T & PH^T \\ AP + BY & \frac{\gamma^2}{1-\alpha} DD^T - P + \varepsilon \delta^2 FF^T & 0 \\ HP & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Таким образом, установлен следующий результат.

Теорема 2. Пусть P_* , Y_* – решение оптимизационной задачи

$$\begin{aligned} & \|P\| \rightarrow \min, \\ & \begin{pmatrix} -\alpha P & PA^T + Y^T B^T & PH^T \\ AP + BY & \frac{\gamma^2}{1-\alpha} DD^T - P + \varepsilon \delta^2 FF^T & 0 \\ HP & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \leq 0, \\ & P \succeq I, \end{aligned}$$

где оптимизация проводится по матричным переменным $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{r \times n}$, скалярной переменной ε и скалярному параметру $0 < \alpha < 1$.

Тогда для решений системы (7), замкнутой регулятором

$$K_* = Y_* P_*^{-1},$$

справедлива оценка

$$\xi \leq \sqrt{\|P_*\|}$$

при всех допустимых внешних возмущениях (8) и системных неопределенностях (9).

Обратим внимание, что сделанное замечание 1 сохраняет свою силу и в дискретном случае.

3. ПРИМЕР

Проиллюстрируем предлагаемый подход на примере двухмассовой системы – системы из двух твердых тел с массами m_1 и m_2 , соединенных пружиной с коэффициентом упругости k , скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня. К левому телу приложено управляющее воздействие для компенсации внешнего возмущения w , $|w| \leq 0,25$, действующего на правое тело (рис.1).

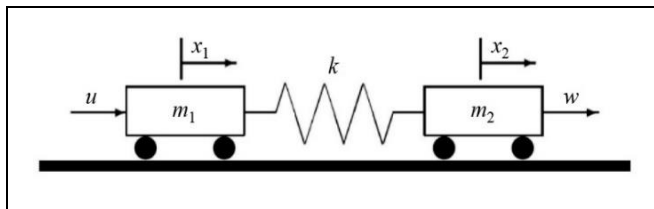


Рис. 1. Двухмассовая система

Пусть x_1 и v_1 – соответственно координата и скорость левого тела, а x_2 и v_2 – правого. Будем полагать, что массы тел единичны, а неопределенность сосредоточена в коэффициенте упругости пружины:

$$k = 1 + \Delta, \quad |\Delta| \leq \delta = 0,1.$$

Динамика рассматриваемой системы описывается уравнением (1) при

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad H = (-1 \ 1 \ 0 \ 0),$$

где вектор состояния системы имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись теоремой 1, находим матрицу

$$P_* = \begin{pmatrix} 2,4483 & 1,0584 & -0,5874 & -1,1188 \\ 1,0584 & 3,7785 & 0,7298 & -0,4198 \\ -0,5874 & 0,7298 & 4,3554 & -0,8388 \\ -1,1188 & -0,4198 & -0,8388 & 2,8905 \end{pmatrix}$$

и соответствующий регулятор

$$K_* = (-2,0410 \ 0,2025 \ -1,4978 \ -0,8333),$$

который дает оценку отклонения

$$\xi \leq \sqrt{\|P_*\|} = 2,3131 \quad (12)$$

при всех допустимых внешних возмущениях и системных неопределенностях, действующих на систему.

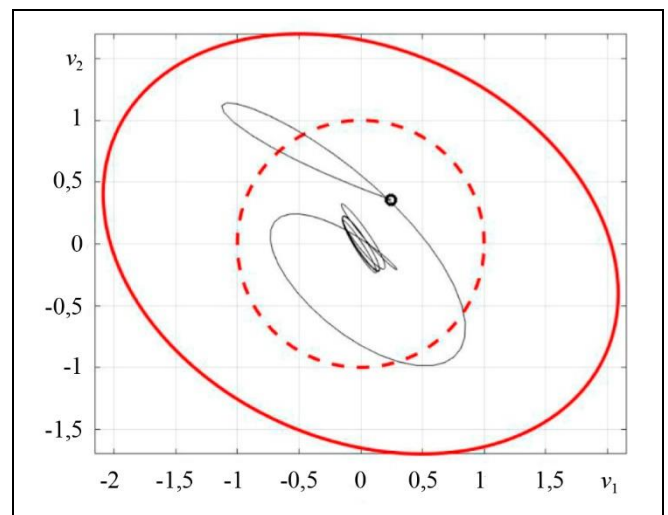


Рис. 2. Проекция траектории замкнутой системы на плоскость (v_1, v_2)

На рис. 2 показана проекция на плоскость (v_1, v_2) траектории $x_*(t)$ системы, замкнутой найденным регулятором K_* , при начальном условии



$$x_0 = \begin{pmatrix} 0,6493 \\ -0,5893 \\ -0,1444 \\ 0,4585 \end{pmatrix}, |x_0| = 1, \quad (13)$$

допустимом внешнем возмущении $w(t) = 0,25\sin(2t)$ и реализации системной неопределенности $\Delta = 0,1$. На этом же рисунке показаны проекции инвариантного эллипсоида с матрицей P_* и единичного шара начальных условий.

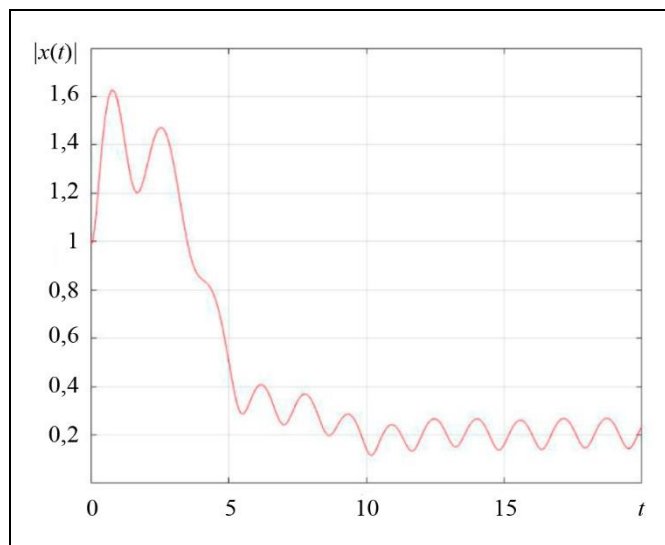


Рис. 3. Динамика величины $|x(t)|$

На рис. 3 показана динамика нормы траектории $x_*(t)$; всплеск в системе достигает значения 1,6281.

Вычисления проводились в среде Matlab R2019b v 9.7 с помощью свободно распространяемого программного пакета cvx [19].

Вопрос о «наихудшем» – дающем наибольшую величину всплеска – начальном условии весьма сложен, хотя в некоторых частных случаях на него можно дать содержательный ответ (см., например, работы [1, 9, 10]). Конечно, наихудшее начальное условие можно пытаться искать численным образом, однако проблема его аналитического нахождения в сравнительно общей постановке по-прежнему остается открытой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен подход к минимизации всплеска в линейной системе управления, подверженной воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений и системных неопределенностей. Он основан на технике линейных матричных неравенств и предполагает сведение исходной задачи к параметрической задаче полуопределенного программирования.

Подход обладает большими возможностями для обобщений: он может быть распространен на новые классы задач, в частности – на случай обратной связи по выходу системы с использованием наблюдателя или динамического регулятора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельдбаум А.А. О распределении корней характеристического уравнения систем регулирования // Автоматика и телемеханика. – 1948. – № 4. – С. 253–279. [Fel'dbaum, A.A. O raspredelenii kornej harakteristicheskogo uravneniya sistem regulirovaniya // Automation and Remote Control. – 1948. – Vol. 9, iss. 4. – P. 253–279. (In Russian)]
2. Канатников А.Н. Локализирующие множества и поведение траекторий неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 11. – С. 1465–1475. [Kanatnikov, A.N. Localizing Sets and Behavior of Trajectories of Time-Varying Systems // Differential Equations. – 2019. – Vol. 55. – P. 1420–1430.]
3. Канатников А.Н. Об эффективности функционального метода локализации // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 11. – С. 1433–1438. [Kanatnikov, A.N. On the Efficiency of the Functional Localization Method // Differential Equations. – 2020. – Vol. 56. – P. 1402–1407.]
4. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Функциональный метод локализации и принцип инвариантности Ла-Салля // Математика и математическое моделирование. – 2021. – № 1. – С. 1–12. [Kanatnikov, A.N., Krishchenko, A.P. Functional Method of Localization and LaSalle Invariance Principle // Mathematics & Mathematical Modelling. – 2021. – No. 1. – P. 1–12. (In Russian)]
5. Акунов Т.А., Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Ушаков А.В. Исследование процессов в непрерывных системах с кратными комплексно-сопряженными собственными числами их матриц состояния // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – Т. 13, № 4. – С. 25–33. [Akunov, T.A., Dudarenko, N.A. Polinova, N.A., Ushakov, A.V. Research of Processes in Continuous Systems with Multiple Complex Conjugated Eigenvalues of Their State Matrix // Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics. – 2013. – Vol. 13, no. 4. – P. 25–33. (In Russian)]
6. Акунов Т.А., Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Ушаков А.В. Степень близости простой и кратной структур собственных чисел: минимизация выброса траекторий свободного движения аperiodической системы // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2014. – Т. 14, № 2. – С. 39–46. [Akunov, T.A., Dudarenko, N.A. Polinova, N.A., Ushakov, A.V. Proximity Degree for Simple and Multiple Structures of the Eigenvalues: Overshoot Minimization for Free Motion Trajectories of Aperiodic System // Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics. – 2014. – Vol. – 14, no. 2. – P 39–46. (In Russian)]
7. Vunder, N.A., Dudarenko, N. Robustness Estimation of Large Deviations in Linear Discrete-time Systems with Control Signal Delay // Proc. 16th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO 2019). – Prague, 2019. – P. 281–288.

8. Фуртат И.Б., Гушин П.А. Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 4. – С. 121–139. [Furtat, I.B., Gushchin, P.A. Control of Dynamical Plants with a Guarantee for the Controlled Signal to Stay in a Given Set // Automation and Remote Control. – 2021. – Vol. 82, no. 4. – P. 654–669.]
 9. Shcherbakov, P. On Peak Effects in Discrete Time Linear Systems // Proc. 2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2017). – Valletta, 2017. – P. 376–381.
 10. Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В. и др. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 6. – С. 18–41. [Polyak, B.T., Tremba, A.A., Khlebnikov, M.V., et al. Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76, no. 6. – P. 957–976.]
 11. Квинто Я.И., Хлебников М.В. Верхние оценки больших отклонений в линейных системах при наличии неопределенности // Проблемы управления. – 2018. – № 3. – С. 2–7. [Kvinto, Ya.I., Khlebnikov, M.V. Upper Estimate of Large Deviations in Linear Systems in Presence of Uncertainty // Control Sciences. – 2018. – No. 3. – P. 2–7. (In Russian)]
 12. Квинто Я.И., Хлебников М.В. Верхние границы максимального отклонения траектории в линейных дискретных системах: робастная постановка // Управление большими системами. – 2019. – Вып. 77. – С. 59–79. [Kvinto, Ya.I., Khlebnikov, M.V. Upper Bounds of Large Deviations in Linear Discrete-Time Systems: The Robust Statement // Large-Scale Systems Control. – 2019. – Iss. 77. – P. 59–79. (In Russian)]
 13. Квинто Я.И., Хлебников М.В. Верхние оценки отклонений траекторий в линейной динамической системе с ограниченными внешними возмущениями // Проблемы управления. – 2019. – № 3. – С. 16–21. [Kvinto, Ya.I., Khlebnikov, M.V. Upper Bounds of the Deviations in Linear Dynamical System with Bounded Disturbances // Automation and Remote Control. – 2020. – Vol. 81, no. 9. – P. 1702–1710.]
 14. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. – Philadelphia: SIAM, 1994.
 15. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с. [Balandin, D.V., Kogan, M.M. Sintez zakonov upravleniya na osnove lineinykh matrichnykh neravenstv (LMI-based Control System Design) – M.: Fizmatlit, 2007. – 280 s. (In Russian)]
 16. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 560 с. [Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., Shcherbakov, P.S., Control of Linear Systems Subjected to Exogenous Disturbances: An LMI Approach. – M.: LENAND, 2014. (In Russian)]
 17. Petersen, I. A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Systems // System & Control Letters. – 1987. – Vol. 8. – P. 351–357.
 18. Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 3. – С. 106–125. [Nazin, S.A., Polyak, B.T., Topunov, M.V. Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // Automation and Remote Control. – 2007. – Vol. 68, no. 3. – P. 467–486.]
 19. Grant, M., Boyd, S. CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, Version 2.1. – URL: cvxr.com/cvx (дата обращения 20.02.2023).
- Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.
- Поступила в редакцию 23.02.2023,
после доработки 04.04.2023.
Принята к публикации 13.04.2023.
- Хлебников Михаил Владимирович** – д-р. физ.-мат. наук,
✉ khlebnik@ipu.ru,
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9086-1426>
- Стефанюк Елена Анатольевна** – мл. науч. сотрудник,
✉ stefa@ipu.ru,
- Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва; Национальный исследовательский университет
«Московский физико-технический институт», г. Москва.
- © 2023 г. Хлебников М.В., Стефанюк Е.А.



Эта статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



PEAK-MINIMIZING DESIGN FOR LINEAR CONTROL SYSTEMS WITH EXOGENOUS DISTURBANCES AND STRUCTURED MATRIX UNCERTAINTIES

M.V. Khlebnikov and E.A. Stefanyuk

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

✉ khlebnik@ipu.ru, ✉ stefan@ipu.ru

Abstract. A major characteristic of transients in linear dynamic systems with non-zero initial conditions is the maximum deviation of the trajectory from zero, which has a direct engineering meaning. If the maximum deviation is large, the so-called peak effect occurs. This paper completes a series of research works devoted to the peak effect in linear control systems. We consider a linear control system with non-random bounded exogenous disturbances and system uncertainties. A regular approach is proposed to design a stabilizing static state-feedback control law that minimizes the peak effect. The approach is based on the technique of linear matrix inequalities and reduces the original problem to a parameterized semidefinite programming one, which can be easily solved numerically. The proposed approach can be extended to new classes of problems, in particular, to the case of output feedback using an observer or a dynamic controller.

Keywords: linear control system, peak effect, structured matrix uncertainty, bounded exogenous disturbances, linear matrix inequalities, semidefinite programming.

Funding. This research was partially financially supported by Russian Science Foundation (project No. 21-71-30005), <https://rscf.ru/en/project/21-71-30005/>.