УДК 519.863 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2023.3.1

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИНТЕЗА КОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ[1]

О.А. Косоруков, Д.В. Лемтюжникова

Аннотация. Рассматривается алгоритм решения задачи о формировании коммуникационной сети для нахождения гарантированного плана перевозок заданного объема при наличии неопределенных факторов. Объемы производств и пропускные способности коммуникаций выражены линейными функциями от вложенных ресурсов. Для решения двойственной задачи, в силу ее ступенчатой блочной структуры, применяется известный алгоритм декомпозиции Данцига – Вулфа. Возникающие на итерациях линейные задачи предлагается решать, используя их специфику, на основе эффективных сетевых методов и методов теории графов, а именно: нахождения максимального потока, минимального разреза в сети, компонент связности и минимальных остовных деревьев графов. Существующие для этих задач алгоритмы имеют оценки сложности $O(mn^2)$, $O(n^2m)$ и $O(n+m)$, где n – число вершин графа, m – число ребер.

Ключевые слова: задача о спросе и предложении, коммуникационные сети, линейный синтез, методы декомпозиции, максимальный поток, минимальный разрез, минимальное остовное дерево.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи сетевой структуры возникают не только при проектировании транспортных или иных реальных сетей, но и во многих других сферах человеческой деятельности. Общая постановка таких задач приведена, например, в работах [1, 2].

В настоящей статье рассматривается линейная задача синтеза для задачи Гейла о спросе и предложении [3] при наличии конечного числа неопределенных факторов, которая является задачей линейного программирования большой размерности. Эта задача имеет ярко выраженную специфику, а именно ступенчатую блочную структуру матрицы ограничений, которая наводит на мысль о поиске специальных алгоритмов для ее решения, отличных от общих алгоритмов решения задач линейного программирования. Как известно, для многих задач анализа коммуникационных сетей, таких как задача о перевозках, о кратчайшем пути, о максимальном потоке, о потоке минимальной стоимости и т. д., представляющих собой задачи линейного программирования, разработаны специальные, значительно более эффективные алгоритмы, позволяющие увеличить размерность решаемых задач. Примером такого специального алгоритма может служить метод потенциалов для стандартной транспортной задачи и его различные модификации. Он является конкретизацией симплекс-метода для специального типа задач линейного программирования [4]. В научной литературе представлен и модифицированный метод потенциалов для задачи с ограничениями на пропускные способности коммуникаций [5]. В научных работах описан алгоритм метода потенциалов для решения многоиндексной транспортной задачи [6, 7], а также задачи о перевозках, т. е. задачи с сетью произвольной структуры [8]. Все вышеупомянутые методы относятся к задачам анализа коммуникационных сетей. Автором был разработан алгоритм обобщенных потенциалов для задач линейного синтеза коммуникационных сетей [9], а также и модификация этого метода для задачи линейного синтеза коммуникационных сетей при наличии неопределенных факторов [10], которая является предметом рассмотрения данной статьи.

В настоящей статье рассматривается алгоритм решения задачи о формировании коммуникационной сети для нахождения гарантированного плана перевозок заданного объема при наличии неопре-

[1] Результаты исследований частично получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 22-71-10131).

деленных факторов. Объемы производств и пропускные способности коммуникаций представляют собой линейные функции от вложенных ресурсов. Для решения двойственной задачи, в силу ее блочной структуры с группой связующих строк, применяется известный алгоритм декомпозиции Данцига – Вулфа. Возникающие на итерациях линейные задачи предлагается решать, используя их специфику, на основе эффективных сетевых методов и методов теории графов, а именно: нахождения максимального потока, минимального разреза в сети, компонент связности и минимальных остовных деревьев графов. Существующие для этих задач алгоритмы имеют оценки сложности $O(mn^2)$, $O(n^2m)$ и $O(n+m)$, где n – число вершин графа, m – число ребер. Примеры таких алгоритмов имеются в работах [11–20]. Это существенно превосходит оценки сложности как для общих методов линейного программирования, которые имеют экспоненциальную сложность, так и для специальных методов, имеющих полиномиальную сложность [15], например $O(mn^4+m^2n^3+m^3n^2)$, где m – число ограничений задачи, а n – число переменных [14], что позволяет сделать вывод об эффективности предложенного метода.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем математическую постановку задачи. Рассмотрим следующие составляющие задачи:

– ориентированный граф (G, Γ) с множеством дуг Γ и множеством вершин G;

– продукт единственного типа, который может производиться в вершинах множества A и потребляться в вершинах множества C;

– промежуточные вершины B, в которых продукт не производится и не потребляется;

– однородный сепарабельный ресурс, который распределяется по множеству вершин A и множеству дуг Γ.

При этом предполагаем, что зависимость объемов производства в вершинах множества A и зависимости пропускных способностей дуг множества Γ от вложенных ресурсов нам известны. Целью задачи является нахождение такого способа распределения ограниченного ресурса между пунктами производства и коммуникациями сети, чтобы при любом значении неопределенных факторов сеть допускала поток, удовлетворяющий спрос, и при этом стоимость этого распределения ресурсов была бы минимальной. Будем предполагать ресурс однородным и сепарабельным, т. е. произвольно делимым.

Задачу с n пунктами производства с ограниченными запасами продуктов можно свести к задаче с одним пунктом производства с неограниченным запасом продукта [2]. Для этого добавим в граф одну вершину (припишем ей номер 0), соединив ее с каждой i-й вершиной множества A дугой с пропускной способностью $\varphi_i(x_i, k)$. Расширенный граф также будем обозначать (G, Γ). Предполагаем линейность функций пропускных способностей, а именно: $\varphi_i(x_i, k) = b_i^k + a_i^k x_i$, где b_i^k и a_i^k – коэффициенты соответствующих линейных зависимостей.

Введем следующие обозначения: d_i – потребность в продукте в i-м пункте; y_j^k – поток по дуге j при наличии k-го неопределенного фактора; x_j – количество ресурса, вложенного в дугу j; $D(i)$ – номера дуг, входящих в вершину i; $C(i)$ – номера дуг, выходящих из вершины i.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{gathered}
\min_{x,y}\Big(\sum_{j\in\Gamma} x_j\Big),\\
\sum_{j\in C(i)} y_j^k - \sum_{j\in D(i)} y_j^k = 0,\ i\in A\cup B,\\
\sum_{j\in D(i)} y_j^k - \sum_{j\in C(i)} y_j^k \ge d_i,\ i\in C,\\
y_j^k - a_j^k x_j \le b_j^k,\ j\in\Gamma,\\
x_j\ge 0,\ y_j^k\ge 0,\quad j\in\Gamma,\ k=1,\dots,l.
\end{gathered}\tag{1}$$

По известным правилам теории двойственности линейного программирования сформируем двойственную задачу для задачи (1):

$$\begin{gathered}
\max_{\lambda,\mu}\left(\sum_{i\in C}\Big(\sum_{k=1}^{l}\lambda_i^k\Big)d_i - \sum_{j\in\Gamma}\sum_{k=1}^{l}\mu_j^k b_j^k\right),\\
1-\sum_{k=1}^{l}\mu_j^k a_j^k \ge 0,\ j\in\Gamma\setminus C(0),\\
-\lambda_{n_2(j)}^k + \mu_j^k \ge 0,\ j\in C(0),\\
\lambda_{n_1(j)}^k - \lambda_{n_2(j)}^k + \mu_j^k \ge 0,\ j\in\Gamma,\\
\mu_j^k\ge 0,\ j\in\Gamma,\ \lambda_i^k\ge 0,\ i\in C,\ k=1,\dots,l,
\end{gathered}\tag{2}$$

где векторы λ и μ – переменные двойственной задачи; $n_1(j)$ – индекс вершины-начала для дуги j; $n_2(j)$ – индекс вершины-окончания соответственно.

Введем дополнительные наборы переменных $z, z^1,\dots, z^l$ для преобразования ограничений задачи к эквивалентным равенствам. Структура матрицы коэффициентов ограничений задачи (2) представлена на рис. 1, где E – единичная матрица; IN – матрица инцидентности графа сети; A^i – диагональная матрица:

$$A^i = \begin{pmatrix} a_1^i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_n^i \end{pmatrix}.$$

λ^1	μ^1	z^1	λ^2	μ^2	z^2	…	z		b
0	A^1	0	0	A^2	0	…	E	x	1 … 1
IN^{T}	E	$-E$	0	0	0	…	0	y^1	0 … 0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0	0	0	0	IN^{T}	E	$-E$	0	y^l	0 … 0

Рис. 1. Блочная структура матрицы коэффициентов

Как видно из рис. 1, матрица коэффициентов задачи (2) имеет ступенчатую блочную структуру с некоторым множеством связующих сток. Для таких задач существуют эффективные методы декомпозиции, один из которых – метод декомпозиции Данцига – Вулфа [12]. Будем рассматривать его модификацию для случая неограниченного множества, задаваемого блочными ограничениями. Идея метода состоит в декомпозиции задачи большой размерности на группу задач меньшей размерности, которые решаются последовательно на каждом шаге итерационного алгоритма. На каждом шаге метода декомпозиции возникает оптимизационная задача

$$\max_{\lambda,\mu}\left(\sum_{i\in C} d_i\lambda_i^k - \sum_{j\in\Gamma}\mu_j^k\tilde{b}_j^k\right),$$
$$-\lambda_{n_2(j)}^k + \mu_j^k \ge 0,\ j\in C(0), \tag{3}$$
$$\lambda_{n_1(j)}^k - \lambda_{n_2(j)}^k + \mu_j^k \ge 0,\ j\in \Gamma\setminus C(0),$$
$$\mu_j^k \ge 0,\ j\in\Gamma,\ \lambda_i^k \ge 0,\ i\in C,$$

где $\tilde{b}_j^k$ – переменные коэффициенты. В соответствии с методом Данцига – Вулфа необходимо либо найти оптимальное базисное решение (λ, μ) в случае разрешимости задачи, либо найти базисный луч (λ, μ), на котором целевая функция задачи не ограничена.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Начнем с анализа матрицы ограничений задачи (3), а именно с вычисления ее ранга, и докажем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть A – матрица коэффициентов задачи* (3). *Тогда* rang $A = n+m-1$, *где n – число вершин, а m – число дуг графа* (G, Γ).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (G, Γ_0) – некоторое связующее поддерево графа (G, Γ), которое заведомо существует в силу связности графа (G, Γ). Тогда, как известно, $|\Gamma_0| = n-1$. Рассмотрим систему неравенств, состоящую из $n + m - 1$ ограничения, а именно

$$-\lambda_{n_2(j)}^k + \mu_j^k \ge 0,\ j\in C(0),$$
$$\lambda_{n_1(j)}^k - \lambda_{n_2(j)}^k + \mu_j^k \ge 0,\ j\in \Gamma_0\setminus C(0),$$
$$\mu_j^k \ge 0,\quad j\in\Gamma.$$

Блочная структура матрицы коэффициентов вышеприведенной системы неравенств представлена ниже, где, как и ранее, IN – матрица инцидентности графа сети; E – единичная матрица; а $\tilde{E}$ – некоторая частично единичная матрица:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} IN & -\tilde{E} \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Матрица $\tilde{A}$ имеет размерность $m + n - 1$, где количество первой группы строк $n - 1$, а второй m. По известным теоремам теории графов [1] строки матрицы инцидентности ориентированного графа линейно независимы, тогда и только тогда, когда соответствующие им дуги не образуют цикла. Поскольку связующее поддерево не содержит циклов, то первая группа строк матрицы $\tilde{A}$ линейно независима. В силу присутствия нулевого блока во второй группе строк и вся система срок матрицы $\tilde{A}$ линейно независима. Откуда следует, что rang $A \ge n + m - 1$. Поскольку матрица A содержит $m + n - 1$ столбец, то rang $A \le n + m - 1$. Из обоих полученных неравенств однозначно следует, что rang $A = n + m - 1$. Утверждение 1 доказано. ♦

Далее исследуем две альтернативы относительно коэффициентов $\tilde{b}_{j_0}^k$ из функционала рассматриваемой задачи.

Первая, когда среди этих коэффициентов есть отрицательный, т. е. $\exists\ j_0 : \tilde{b}_{j_0}^k < 0$. В этом случае задача (3) не имеет решения в силу неограниченности целевой функции. Для доказательства этого утверждения сформируем следующий вектор (λ, μ):

$$\lambda_i^k = 0,\ i \in G \cup C(0),\ \mu_i^k = 0,\ j \neq j_0,\ \mu_{j_0}^k = 1.$$

Очевидно, что векторы вида $p(\lambda, \mu)$, $p > 0$, являются допустимыми для задачи (3). Очевидно также, что при $p \to +\infty$ значение функционала задачи (3) стремится к $+\infty$. Согласно требованиям рассматриваемого метода декомпозиции, в этом случае необходимо построить базисный луч, на котором целевая функция стремится к $+\infty$. Как известно из теории линейного программирования, луч является базисным тогда и только тогда, когда он обращает в равенства $n + m - 2$ линейно независимых ограничений задачи (3).

Далее исследуем два случая относительно структуры графа сети. Пусть в первом случае после удаления дуги j_0 граф (G, Γ) сохраняет свойство связности. Алгоритм проверки связности графа имеет сложность порядка $O(n + m)$, где n – число вершин графа, m – число ребер [17]. В этом случае можно построить минимальное остовное поддерево (G, Γ_0) графа (G, Γ) такое, что $j_0 \notin \Gamma_0$. Луч (λ, μ), построенный ранее, является базисным, в силу того, что обращает в равенство $n + m - 2$ линейно независимых ограничений:

$$\begin{gathered} -\lambda_{n_2(j)}^k + \mu_j^k = 0,\ j \in \Gamma_0 \cap C(0), \\ \lambda_{n_1(j)}^k - \lambda_{n_2(j)}^k + \mu_j^k = 0,\ j \in \Gamma_0 \setminus C(0), \\ \mu_j^k = 0,\ j \in \Gamma,\ j \neq j_0. \end{gathered} \tag{4}$$

Во втором случае после исключения дуги j_0 граф теряет свойство связности. Очевидно, что единственно возможным результатом такого действия может быть образование двух связных компонент (G_1, Γ_1) и (G_2, Γ_2). Сформируем следующий луч (λ, μ):

$$\lambda_i^k = 0,\ i \in G_1,\ \lambda_i^k = 1,\ i \in G_2,\quad \mu_i^k = 0,\ j \neq j_0,\ \mu_{j_0}^k = 1.$$

Как легко проверить, все векторы вида $p(\lambda, \mu)$, $p > 0$, удовлетворяют ограничениям задачи и при возрастающем значении параметра p значение целевой функции задачи не ограничено сверху. Покажем, что сформированный луч является базисным. Рассмотрим связующее поддерево (G, Γ_0) графа (G, Γ). В этом случае линейно независимой группой ограничений-равенств, соответствующих данному лучу, будет система (4). Таким образом, случай присутствия отрицательной компоненты $j_0 : \tilde{b}_{j_0}^k < 0$, полностью исследован.

Рассмотрим далее альтернативу, когда все коэффициенты дуг неотрицательны, т. е. $\forall\ j \in \Gamma$, $\tilde{b}_{j_0}^k \geq 0$. Введем в рассмотрение дополнительную вершину графа (G, Γ), приписав ей номер η, а также группу дуг между данной вершиной и вершинами множества C с пропускными способностями d_i. Коэффициенты $\tilde{b}_j^k$ будем интерпретировать как пропускные способности соответствующих дуг. В результате мы сформировали коммуникационную сеть с источником 0 и стоком η с известными пропускными способностями всех ее коммуникаций (рис. 2).

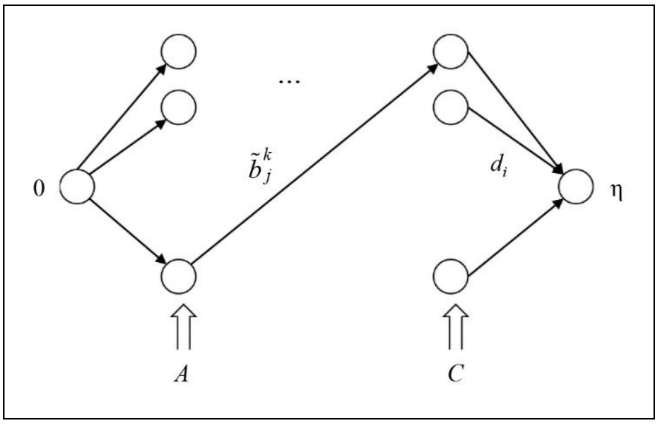

Рис. 2. Общая структура сформированного графа

Пользуясь правилами теории двойственности, сформируем двойственную задачу для задачи (3):

$$\begin{gathered} \min_{x,y} 0, \\ \sum_{j \in C(i)} y_j^k - \sum_{j \in D(i)} y_j^k = 0,\ i \in A \cup B, \\ \sum_{j \in D(i)} y_j^k - \sum_{j \in C(i)} y_j^k \geq d_i,\ i \in C, \\ y_j^k \leq \tilde{b}_j^k,\ j \in \Gamma,\ y_j^k \geq 0,\ j \in \Gamma. \end{gathered} \tag{5}$$

Известно, что критерием разрешимости задачи (3) является непустота множества допустимых решений задачи (5). Поэтому представляет интерес критерий непустоты множества допустимых решений задачи (5); сформулируем его в виде утверждения 2.

Утверждение 2. *Множество допустимых решений задачи (5) не пусто тогда и только тогда, когда величина максимального потока в сформированной выше двухполюсной сети равна*

$$\sum_{i \in C} d_i.$$

Доказательство.

Достаточность. Будем исходить из того, что величина максимального потока в сети равна

$$\sum_{i\in C} d_i.$$

Поскольку введенные нами дополнительные дуги образуют разрез сети, то очевидно, что для максимального потока величи́ны потоков по каждой из них равны их пропускным способностям. Из этого, в свою очередь, следует, что $\forall\, i,\ \ i\in C$, справедливы уравнения баланса

$$\sum_{j\in D(i)} y_j^k - \sum_{j\in C(i)} y_j^k = d_i.$$

Ограничения потока для остальных вершин $i\in A\cup B$ также реализуются в виде строгих равенств.

Необходимость. Будем исходить из того, что множество допустимых решений задачи (5) не пусто. В этом случае возможно формирование потока, который является допустимым решением задачи (5) и для которого справедлива система равенств

$$\sum_{j\in D(i)} y_j^k - \sum_{j\in C(i)} y_j^k = d_i,\ i\in C. \qquad (6)$$

Предположим теперь, что существует такая вершина *i*, для которой балансовое ограничение потока является строгим неравенством, а именно

$$\sum_{j\in D(i)} y_j^k - \sum_{j\in C(i)} y_j^k = d_i + p,\quad p>0.$$

В этом случае можно заведомо утверждать, что в сети найдется путь между вершинами 0 и *i*, который не содержит дуг с нулевыми потоками. Обозначим минимальную величину потока вдоль данного пути как Δy; она является положительной. Введем далее величину Y=min(Δy, p). Вычтем из величин потоков данного пути величину *Y*. Очевидно, что измененные таким образом дуговые потоки останутся неотрицательными и не нарушат ограничений задачи (5), в том числе и балансы промежуточных вершин вида

$$\sum_{j\in C(i)} y_j^k - \sum_{j\in D(i)} y_j^k = 0,\ i\in A\cup B.$$

Если в сети по-прежнему существуют вершины, нарушающие какое-либо из равенств (6), то реализуем вышеописанную процедуру повторно. За конечное число таких итераций будет сформирован допустимый поток задачи (5), для которого выполнены все соотношения (6) и величина которого равна

$$\sum_{i\in C} d_i.$$

В силу известной теоремы Форда и Фалкерсона [18] допустимые потоки задачи (5) ограничены сверху величиной

$$\sum_{i\in C} d_i,$$

что означает максимальность построенного нами потока и завершает доказательство утверждения 2. ♦

Вычислительная сложность алгоритма нахождения максимального потока в двухполюсной сети имеет порядок $O(mn^2)$ [16]. Таким образом, из утверждения 2 следует, что если величина максимального потока равна

$$\sum_{i\in C} d_i,$$

то множество допустимых решений задачи (5) не пусто, минимальное значение целевой функции задачи (5) равно нулю. Из теории двойственности линейного программирования очевидно следует, что максимальное значение целевой функции задачи (3) тоже равно нулю и оптимальным базисным решением задачи будет вектор (λ,μ):

$$\lambda_i^k = 0,\ i\in G,\quad \mu_i^k = 0,\ j\in\Gamma.$$

Как уже было отмечено ранее, величина максимального потока не превосходит величину

$$\sum_{i\in C} d_i.$$

Предположим теперь, что величина максимального потока строго меньше величины

$$\sum_{i\in C} d_i.$$

Сформируем минимальный разрез данного потока. Согласно определению, разрез представляется разбиением множества вершин сети на два подмножества $G_1: 0\in G_1$ и $G_2: \eta\in G_2$. Базу дуг разреза обозначим *B*. Согласно определению, она представляется следующим образом:

$$B=\left\{ j\in\Gamma: n_1(j)\in G_1,\ n_2(j)\in G_2 \right\}.$$

Вычислительная сложность алгоритма нахождения минимального разреза в двухполюсной сети имеет порядок $O(nm^2)$ [16]. Сформируем следующий граф ($G_2\setminus\eta,\ \Gamma_2\setminus D(\eta)$). Возможно, он имеет несколько компонент связности, которые обозначим как $(G_2^1,\Gamma_2^1),\ldots,(G_2^p,\Gamma_2^p)$. Вычислительная сложность алгоритмов нахождения связных компонент в графе имеет порядок $O(n^2)$ или $O(m+n)$ [18]. Сформируем также множество $C_0 = G_2\cap C$. При этом заметим, что $C_0\neq\varnothing$, так как иначе пропускная способность разреза равнялась бы величине

$$\sum_{i\in C} d_i.$$

Рассмотрим разбиение множества C_0 на компоненты $C_1,\ldots,C_p$, где $C_i = C_0\cap G_2^i$. Рассмотрим также множества $B_q = \left\{ j\in B: n_2(j)\in C_q \right\}$ (рис. 3). Справедливо следующее утверждение 3.

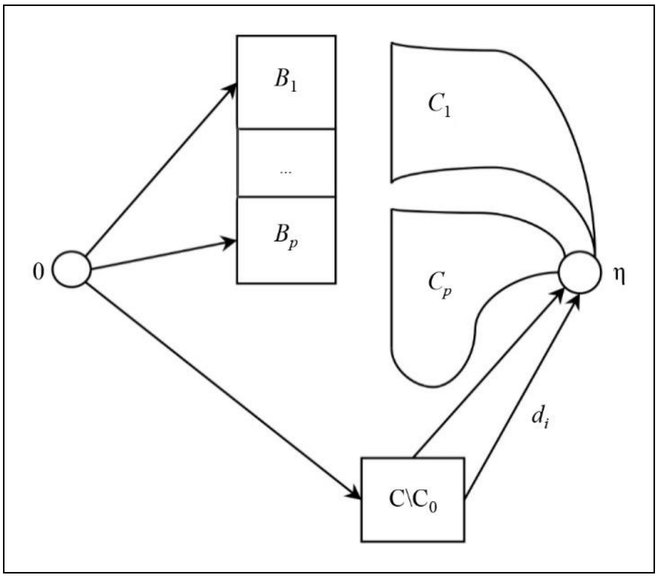

Рис. 3. Структура компонент связности графа

Утверждение 3. *Существует по крайней мере одна компонента разбиения* p_0 *такая, что*

$$\sum_{i\in C_{p_0}} d_i > \sum_{i\in B_{p_0}} \tilde{b}_j^k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем методом от противного, а именно предположим, что для $\forall\ m = 1,\dots, p$ выполнено обратное неравенство

$$\sum_{i\in C_m} d_i \le \sum_{i\in B_m} \tilde{b}_j^k.$$

Суммируя эти неравенства по индексу m, получим интегральное неравенство

$$\sum_{m=1}^{p}\sum_{i\in C_m} d_i \le \sum_{m=1}^{p}\sum_{i\in B_m} \tilde{b}_j^k.$$

Прибавив к обеим частям данного неравенства одну и ту же величину

$$\sum_{i\in C\setminus C_0} d_i.$$

получим следующее новое истинное отношение, а именно:

$$\sum_{i\in C} d_i \le \sum_{i\in B} \tilde{b}_j^k.$$

Но данное соотношение противоречит предыдущим допущениям, а именно тому, что B – база дуг минимального разреза, а максимальный поток в сети строго меньше, чем

$$\sum_{i\in C} d_i.$$

Отсюда однозначно следует ошибочность предположения, сделанного нами в начале. ♦

Теперь можно сформировать ответ для рассматриваемого случая, а именно что величина максимального потока строго меньше величины

$$\sum_{i\in C} d_i.$$

Сформируем вектор (λ, μ) по следующим правилам:

$$\lambda_i^k = 1,\ i\in G_2^{p_0},\ \lambda_i^k = 0,\ i\in G\setminus G_2^{p_0},$$
$$\mu_i^k = 1,\ j\in B_{p_0},\ \mu_i^k = 0,\ j\in \Gamma\setminus B_{p_0}.$$

Как легко проверить, все векторы вида $p(\lambda, \mu)$, $p > 0$, удовлетворяют ограничениям задачи (3). Убедимся, что значение целевой функции задачи не ограничено сверху при возрастании параметра p. Действительно, целевая функция задачи (3) в точках вектора $p(\lambda, \mu)$ имеет вид

$$p\left(\sum_{i\in C_{p_0}} d_i - \sum_{j:n_2(j)\in G_{p_0}^2} \tilde{b}_j^k\right).$$

Но согласно утверждению 3 величина выражения в скобках строго положительна, откуда следует неограниченность целевой функции при возрастании параметра p.

Далее необходимо убедиться в том, что сформированный луч (λ, μ) является базисным. Введем обозначения размерностей ранее определенных множеств: $|\Gamma_0| = r_0$, $|G_{p_0}^2| = n_0,$ $|\Gamma_{p_0}^2| = m_0,$ Сформируем произвольные остовные поддеревья: $\left(G_{p_0}^2, \Gamma_{p_0}^*\right)$ в графе $\left(G_{p_0}^2, \Gamma_{p_0}^2\right)$ и $(\tilde{G}, \tilde{\Gamma})$ в графе $\left(G\setminus G_{p_0}^2, \Gamma\setminus\left(\Gamma_{p_0}^2 \cup B_{p_0}^2\right)\right)$. Как уже отмечалось выше, алгоритмы имеют оценки сложности $O(mn^2)$, $O(n^2 m)$, где n – число вершин, m – число ребер графа. Очевидна справедливость следующих соотношений:

$$\begin{gathered}
-\lambda_{n_2(j)}^k + \mu_j^k = 0,\ j\in\tilde{\Gamma}\cap C(0),\\
\lambda_{n_1(j)}^k - \lambda_{n_2(j)}^k + \mu_j^k = 0,\ j\in\tilde{\Gamma}\setminus C(0),\\
\lambda_{n_1(j)}^k - \lambda_{n_2(j)}^k + \mu_j^k = 0,\ j\in\Gamma_{p_0}^*,\\
\lambda_{n_1(j)}^k - \lambda_{n_2(j)}^k + \mu_j^k = 0,\ j\in B_{p_0}\setminus C(0),\\
-\lambda_{n_2(j)}^k + \mu_j^k = 0,\ j\in B_{p_0}\cap C(0),\\
\mu_j^k = 0,\ j\in\Gamma\setminus B_{p_0}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Согласно известным теоремам теории графов $|\tilde{\Gamma}| = n - n_0 - 1$, $|\Gamma_{p_0}^*| = n_0 - 1$, $|\Gamma_0| = r_0$, и таким образом, общее количество равенств в системе (7) вычисляется как $(n-n_0-1)+(n_0-1)+r_0+(m - r_0) = n + m - 2$. Что обосновывает свойство базисности предложенного луча (λ, μ).

Предложенный подход можно изобразить в виде графической схемы (рис. 4).

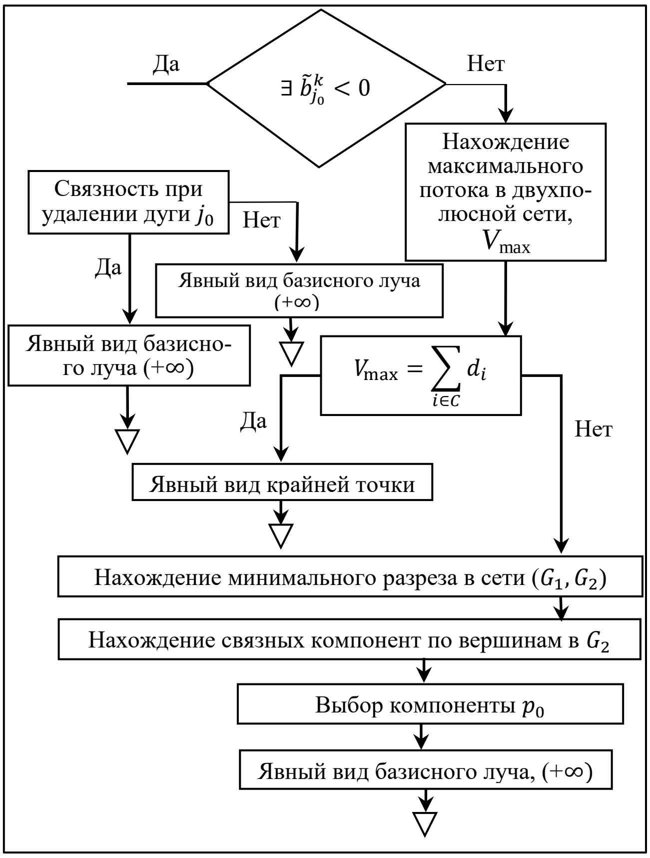

Рис. 4. Последовательность шагов предлагаемого метода

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен алгоритм решения задачи о формировании коммуникационной сети для нахождения гарантированного плана перевозок заданного объема при наличии неопределенных факторов. Объемы производств и пропускные способности коммуникаций выражены линейными функциями от вложенных ресурсов.

Как уже отмечалось в начале статьи, вышеизложенный метод решения требует применения алгоритмов нахождения максимального потока и минимального разреза, а также алгоритмов выделения компонент связности и построения минимального остовного дерева. Известны эффективные вычислительные схемы для реализации таких алгоритмов [13, 14]. В статье приведены оценки вычислительной сложности некоторых их реализаций. Заметим, что алгоритм описывает решение двойственной задачи (5), а не исходной задачи (3). Однако переход к решению прямой задачи (3) осуществляется на основании общей теории двойственности линейного программирования и, по-видимому, не требует отдельного рассмотрения. Оценки сложности представленного алгоритма существенно превосходят оценки сложности как для общих методов линейного программирования, которые имеют экспоненциальную сложность, так и для специальных методов, имеющих полиномиальную сложность. Вследствие чего представленный алгоритм будет полезен для решения задач большой размерности данного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Давыдов Э.Г.* Игры, графы, ресурсы. – М.: Радио и связь, 1981. – 112 с. [*Davydov, E.G.* Games, Gaphs, Resources. – M.: Radio and svyaz, 1981. – 112 s. (In Russian)]
2. *Адельсон-Вельский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В.* Потоковые алгоритмы. – М.: Наука, 1975. – 118 с. [*Adelson-Velsky, G.M., Dinits, E.A., Karzanov, A.V.* Streaming Algorithms. – Moscow: Nauka, 1975. – 118 p. (In Russian)]
3. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 418 с. [*Gale, D.* Theory of Linear Economic Models. – N.-Y.: McGraw-Hill, 1960.]
4. *Романовский И.В.* Алгоритмы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1977. – 352 с. [*Romanovsky, I.V.* Algorithms for Solving Extreme Problems. – Moscow: Nauka, 1977. – 352 p. (In Russian)]
5. *Лемешко В.Ю.* Методы оптимизации: лекции. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2009. – 126 с. [*Lemeshko, V.Yu.* Optimization Methods: Lectures. – Novosibirsk: Publishing House of NSU, 2009. – 126 p. (In Russian)]
6. *Раскин Л.Г., Кириченко И.О.* Многоиндексные задачи линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1982. – 240 с. [*Raskin, L.G., Kirichenko, I.O.* Multi-index Problems of Linear Programming. – Moscow: Radio and Communication, 1982. – 240 p. (In Russian)]
7. *Серая О.В.* Многомерные модели логистики в условиях неопределенности: монография. – Харьков: ФОП Стеценко И.И., 2010. – 512с. [*Seraya, O.V.* Multidimensional Models of Logistics Under Uncertainty: monograph. – Kharkov: FOP Stetsenko, I.I., 2010. – 512p. (In Russian)]
8. *Конюховский П.В.* Математические методы исследования операций в экономике. – СПб: Питер, 2000. – 208 с. [*Konyukhovsky, P.V.* Mathematical Methods for Researching Operations in Economics. – St. Petersburg: Peter, 2000. – 208 p. (In Russian)]
9. *Kosorukov, O.* The Algorithm of the Method of Generalized Potentials for the Problem of Optimal Synthesis of Communication Network // International Journal of Communications. – 2017. – Vol. 2. – P. 77–85.
10. *Kosorukov, O.A.* Algorithm of the Method of Generalized Potentials for Problems of the Optimum Synthesis of Communication Networks with Undefined Factors // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetic. – 2019. – Vol. 43, no. 3. – P. 138–142.

11. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 324 с. [*Minieka, E.* Optimization Algorithms for Networks and Graphs. – N.-Y.: M. Dekker, 1978.]
12. *Лэсдон Л. С.* Оптимизация больших систем. Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – 432 с. [*Lasdon, L.* S. Optimization Theory for Large Systems. – London: Macmillan & Co., 1970.]
13. *Берж К.* Теория графов и ее применения. – М.: Изд-во иностр. лит. – 1967. – 320 с. [*Berge, C.* Theory of Graphs and Its Applications. – London : Methuen, 1962.]
14. *Берзин Е.А*. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем. – М.: Сов. радио, – 1974. – 303 с. [*Berzin, E.A.* Optimal Distribution of Resources and Elements of Systems Synthesis. – Moscow: Sov. Radio. – 1974. – 303 p. (In Russian)]
15. *Хачиян Л.Г.* Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // ДАН СССР. – 1979. – Т. 244. – С. 1093–1096. [*Khachiyan, L.* A Polynomial Algorithm in Linear Programming // Soviet Mathematics Doklady – 1979. – Vol. 20. – P. 191–194.]
16. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ. – М.: Вильямс. – 2005. – 1296 с. [*Cormen, T.H., Leiserson, Ch.E., Rivest, R.L, and Stein, C.* Introduction to Algorithms, 3rd ed. Cambridge: MIT Press, 2009.]
17. *Седжвик Р.* Алгоритмы на графах. – Россия, Санкт-Петербург: «ДиаСофтЮП». – 2002. – 496 с. [*Sedgwick, R.* Algorithms on Graphs. – Boston: Addison-Wesley Professional, 2002. – 496 p.]
18. *Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р.* Потоки в сетях. Пер. с англ. – М.: Мир, 1966. – 277 с. [*Ford, L.R., Fulkerson, D.R.* Flows in Networks. – Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1962.]
19. *Hanaka, T., Kanemoto, K., Kagawa, S.* Multi-perspective Structural Analysis of Supply Chain Networks // Economic Systems Research. – 2022. – Vol. 34, iss. 2. – P. 199–214.
20. *Turken, N., Cannataro, V., Geda, A., Dixit, A.* Nature Inspired Supply Chain Solutions: Definitions, Analogies, and Future Research Directions // International Journal of Production Research. – 2020. – Vol. 58, iss. 15. – P. 91–102.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Поступила в редакцию 23.03.2023,
после доработки 13.05.2023.
Принята к публикации 15.05.2023.

Косоруков Олег Анатольевич – д-р техн. наук, МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва,
✉ kosorukovoa@mail.ru,
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8235-4360

Лемтюжникова Дарья Владимировна – канд. физ.-мат. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН; МАИ (национальный исследовательский университет), г. Москва,
✉ darabbt@gmail.com.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-5311-5552

ON A DECOMPOSITION METHOD FOR DESIGNING COMMUNICATION NETWORKS

O.A. Kosorukov[1] and D.V. Lemtyuzhnikova[2]

[1]Moscow State University, Moscow, Russia
[2]Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
[2]Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ kosorukovoa@mail.ru, ✉ darabbt@gmail.com

Abstract. This paper presents a communication network design algorithm for finding a guaranteed transportation plan of a given volume under uncertain factors. The volumes of production and the capacities of communication lines are expressed as linear functions of invested resources. The well-known Dantzig–Wolfe decomposition algorithm is applied to solve the dual problem due to its stepped block structure. In view of their specifics, the linear problems arising in iterations are solved using effective network and graph theory methods: the maximum flow, the minimum cutset in the network, the connectivity components, and the minimum spanning trees of the graphs are found. The existing algorithms for these problems have the complexity estimates $O(mn^2)$, $O(n^2m)$, and $O(n + m)$, where n is the number of graph vertices and m is the number of edges.

Keywords: supply and demand problem, communication networks, linear design, decomposition methods, maximum flow, minimum cutset, minimal spanning tree.

Funding. This work was supported in part by Russian Science Foundation (project no. 22-71-10131).