УДК 519.83+519.86 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2024.1.5

# МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ВО ВЛАСТНЫХ ИЕРАРХИЯХ#

О. И. Горбанёва*, Г. А. Угольницкий**

Южный федеральный университет

*✉ oigorbaneva@sfedu.ru, **✉ gaugolnickiy@sfedu.ru

**Аннотация.** Исследование посвящено моделированию управления во властных иерархиях. Приведён краткий обзор работ в этой области. Описаны принципы построения таких моделей и лежащие в их основе предположения. Проведена их математическая формализация в виде разностных игр в нормальной форме с информационным регламентом игр Гермейера. Выполнено аналитическое исследование для частного случая системы двухуровневых властных иерархий. Сформулированы общие задачи исследования властных иерархий. Дано определение однополярной, двухполярной и многополярной властной иерархии, проанализированы условия их возникновения. Приведены иллюстративные примеры. Рассмотрена альтернативная модель конкуренции за ресурс. Осуществлено имитационное моделирование системы властных иерархий для различных случаев и проведён сравнительный анализ результатов имитации. Сделаны выводы и намечены пути дальнейших исследований.

**Ключевые слова**: властные иерархии, имитационное моделирование, методы управления, разностные игры, согласование интересов, однополярная система, двухполярная система, *n*-полярная система, сравнимость полюсов, конкуренция за ресурс, агенты влияния, базовые агенты, властная группировка, множество QRS.

## ВВЕДЕНИЕ

Подробно разработанная концепция математического моделирования динамики распределения власти в иерархических структурах принадлежит А.П. Михайлову [1–8]. Идеология этого подхода описана уже в основополагающей статье [1]. Модель основана на балансовых соотношениях. Основной переменной модели служит объём власти $p(x,t)$ как функция времени и положения агента в иерархической структуре. Для этой функции выписывается параболическое дифференциальное уравнение в частных производных с некоторыми краевыми условиями. Иерархическая структура в базовой версии представляет собой линейную цепочку, которая достаточно легко обобщается на случай нескольких агентов на каждом уровне управления. Правая часть уравнения динамики определяется потоками распоряжений в иерархической структуре и функцией реакции общества на действия власти. Предполагается, что функция $p(x,t)$ ограничена сверху и снизу функциями максимального и минимального объёма властных полномочий, заданными законодательно. Дано подробное описание содержательных гипотез, положенных в основу построения модели и устанавливающих область её применимости. Модель первоначально строится для дискретного времени, а затем стандартным образом осуществляется переход к непрерывному времени.

Модель предназначена для ответа на ряд содержательных вопросов, среди которых условия существования стационарных распределений власти и их устойчивости, анализ и прогноз «кризисов» власти различного типа, изучение влияния активности гражданского общества на распределение власти и т. д. Сильные упрощения (например, использование линейных функций) позволяют ответить на некоторые из этих вопросов в явном виде, в более общих случаях проводится численный анализ [1].

# Статья написана при финансовой поддержке РНФ, проект № 23-21-00131 (О. И. Горбанёва).

Итоги первого этапа исследований подведены А.М. Михайловым в монографии [2]. В последующих работах проведены различные обобщения и дополнения, например, изучение случая двух центров власти [4], борьба власти и оппозиции [5] и др. В частности, на основе базовой модели предложены модели коррупции во властных иерархиях [3, 6–8] и борьбы с ней.

Оригинальная содержательная концепция власти разработана М.Л. Хазиным [9,10]. Дано определение власти как конкурентной борьбы малых организованных группировок, выявлены основные мотивы, принципы и способы поведения «людей власти», типы отношений между ними, приведён ряд ярких исторических примеров. Однако математические модели в этой концепции не применяются.

Упомянем также работы [11–13], посвящённые моделированию иерархий.

Математическое моделирование властных иерархий в настоящей работе проводится на основе авторской теории управления устойчивым развитием активных систем [14], продолжающей теорию активных систем и теорию управления организационными системами [15,16]. В частности, используются следующие направления этой теории.

- Модели согласования общественных и частных интересов (СОЧИ-модели). В этих моделях предполагается, что каждый агент делит личный ресурс (временной, финансовый и т. п.) между производством некоторого общественного блага и частными интересами. Соответственно, выигрыш агента складывается из полезности от участия в потреблении общественного блага и от реализации частных интересов [17].
- Иерархическое управление осуществляется методами принуждения и побуждения. При принуждении вышестоящий уровень управления заставляет агентов нижестоящего уровня выполнять некоторые желательные для себя действия (административно-законодательное воздействие), а при побуждении мотивирует (стимулирует) агентов к выполнению этих действий (экономическое воздействие). При математическом моделировании принуждение означает ограничение области допустимых действий агента, а при побуждении – воздействие на его функцию выигрыша, обычно с обратной связью по управлению агента [14].
- Основным подходом к решению сложных динамических задач управления служит компьютерная имитация на основе метода качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования (метод КРС ИМ). Идея данного метода состоит в том, что достаточно точный прогноз динамики управляемой системы можно получить с помощью очень небольшого числа сценариев управления (множество КРС ИМ). Для проверки репрезентативности этого множества применяются условия внутренней и внешней устойчивости. Множество КРС ИМ внутренне устойчиво, если для любых двух входящих в него сценариев управления выигрыши Центра различаются существенно. Внешняя устойчивость означает, что для любого не входящего в множество КРС ИМ сценария найдётся такой сценарий из этого множества, что выигрыши Центра будут различаться незначительно [18].

Замысел настоящей статьи состоит в построении и исследовании математических моделей властных иерархий на основе теории управления устойчивым развитием активных систем с использованием идей упомянутых выше концепций А.П. Михайлова и особенно М.Л. Хазина. Для этого необходимо решить следующие задачи:

– предложить принципы построения модели трёхуровневых властных иерархий и провести соответствующую математическую формализацию в виде разностной игры в нормальной форме; рассмотреть альтернативный подход к построению модели;

– выполнить аналитическое исследование для частного случая системы двухуровневых властных иерархий;

– сформулировать общие задачи исследования властных иерархий;

– осуществить имитационное моделирование системы властных иерархий для различных случаев и провести сравнительный анализ результатов имитации.

Статья организована следующим образом. В § 1 описано построение модели трёхуровневых властных иерархий типа «Центр – агенты». В § 2 проведено аналитическое исследование системы двухуровневых властных иерархий при упрощающих предположениях. В § 3 сформулированы некоторые задачи исследования властных иерархий и подходы к их решению. В §4 приведены результаты численных расчётов и их анализ. Альтернативной модели конкуренции за ресурспосвящён § 5. Итоги подведены в заключении.

## 1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ТРЁХУРОВНЕВЫХ ВЛАСТНЫХ ИЕРАРХИЙ

Предметом анализа в модели выступает властная иерархия (группировка), т. е. «группа людей, связанная личными отношениями подчинения, объединившаяся с целью захвата тех или иных ресурсов» [10, *т. 1, с. 35*]. Отношения внутри властной группировки строятся по строго иерархическому принципу: все её участники подчиняются главе группировки, а между собой конкурируют в той мере, в какой это не противоречит приказам главы.

Задача каждой властной группировки, олицетворяемой её главой, состоит в максимальном увеличении её властного ресурса. Это трудно определимое понятие. В первом приближении можно считать, что ресурс финансовый, хотя на самом деле речь идёт о любом ресурсе, который способствует увеличению власти: административном, политическом, кадровом, социальном, информационном, символическом и т. п. Коротко это можно выразить формулой: ресурс → власть → больший ресурс.

Участники властной группировки связаны отношениями личной преданности и действуют как единое целое. Следует различать два способа организации властных группировок: феодальный (монархический) и родоплеменной (олигархический), но в настоящей работе это различие не учитывается.

Властная группировка стремится к «постепенному, снизу вверх, заполнению своими сторонниками публичных позиций в системе организаций (частных и государственных), контролирующей ресурсы страны или группы стран» [10, *т. 1, с. 220*]. Это увеличивает количество ресурсов группировки и усиливает её относительные позиции.

Стратегическая цель каждой властной группировки заключается во встраивании в господствующую группировку: «Провести своего сюзерена в вассалы первого лица, оттеснить остальных сюзеренов, переключить на себя контроль над основными ресурсами – вот за что бьётся каждая из конкурирующих группировок» [10, *т. 1, с. 223*]. Точно так же устроено стратегическое взаимодействие на более низком уровне внутри каждой властной группировки, где идёт борьба между её участниками.

Для формального анализа динамики системы властных иерархий без ограничения общности достаточно рассмотреть три уровня иерархии. Приведём описание этой иерархической системы.

• Будем представлять властную иерархию древовидным ориентированным графом, дуги которого отображают соподчинённость её членов (агентов). Дуга означает, что конечная вершина подчинена начальной. Корневую вершину дерева (первый уровень иерархии) назовём Центром. Второй уровень образуют агенты влияния, подчинённые Центру. На третьем уровне находятся базовые агенты[1].

• Каждое невырожденное поддерево с одним из агентов влияния в качестве корня образует властную группировку в рамках данной иерархии. Иерархия в целом – предельный случай властной группировки во главе с Центром.

• Имеется несколько трёхуровневых властных иерархий, конкурирующих за ресурс, создаваемый общими усилиями всех агентов. Будем для простоты считать этот ресурс финансовым (измеренным в денежном выражении)[2]. В каждый момент дискретного времени доля ресурса, контролируемая любой властной группировкой, в том числе иерархией (фактически её объём власти), пропорциональна совокупным усилиям (затратам времени) агентов нижнего уровня этой группировки. Заметим, что механизм пропорционального распределения служит одним из методов экономического управления (побуждения). Распределение контроля над ресурсом между властными группировками не меняет его количества, что важно для определения динамики ресурса.

• Каждый агент (в том числе Центр) делит личное время между усилиями по увеличению доли властного ресурса своей группировки и конкуренцией. Соответственно, выигрыш агента складывается из полезности от увеличения совместно создаваемого ресурса и от победы над конкурентами (СОЧИ-идеология), что отвечает отношениям конкуренции – кооперации (coopetition).

• Базовые агенты конкурируют с другими базовыми агентами, подчинёнными тому же агенту влияния (в пределах властной группировки). В качестве управления они используют время на увеличение властного ресурса своей группировки.

• Агенты влияния конкурируют с другими агентами влияния своей властной иерархии. В качестве управления они используют контроль деятельности своих базовых агентов (ограничение снизу их усилий по созданию ресурса).

• Центры конкурируют с Центрами других властных иерархий. Их управление – также контроль деятельности своих агентов влияния. Таким образом, Центр и агенты влияния осуществляют административное управление (принуждение).

---

[1] В работах [9, 10] применяются термины «сюзерен» и «вассал». В настоящей работе используется терминология, принятая в теории активных систем.

[2] Ещё раз напомним: на самом деле ресурс – это всё, что способствует увеличению власти [9, 10].

Итак, модель системы трёхуровневых властных иерархий имеет следующий вид:

$$J_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left[ \left( A - \sum_{p=1}^{N} v_p^t \right) v_i^t + R_i^t \right] \to \max, \qquad (1)$$

$$0 \le q_{ij}^t \le 1; \qquad (2)$$

$$J_{ij} = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left[ \left( A_i - \sum_{r=1}^{n_i} v_{ir}^t \right) v_{ij}^t + R_{ij}^t \right] \to \max, \qquad (3)$$

$$q_{ij}^t \le q_{ijk}^t \le 1; \qquad (4)$$

$$J_{ijk} = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left[ \left( A_{ij} - \sum_{s=1}^{m_{ij}} v_{ijs}^t \right) v_{ijk}^t + R_{ijk}^t \right] \to \max, \qquad (5)$$

$$q_{ijk}^t \le u_{ijk}^t \le 1; \qquad (6)$$

$$R^t = \left( 1 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t \right) R^{t-1}, \ R^0 = R_0; \qquad (7)$$

$$R_i^t = \begin{cases} R^t \left( \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t \right) / \left( \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t \right), & \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t > 0; \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \qquad (8)$$

$$R_{ij}^t = \begin{cases} R_i^t \left( \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t \right) / \left( \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t \right), & \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t > 0; \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \qquad (9)$$

$$R_{ijk}^t = \begin{cases} R_{ij}^t u_{ijk}^t / \left( \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t \right), & \sum_{k=1}^{m_{ij}} u_{ijk}^t > 0; \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \qquad (10)$$

$$i = 1, \ldots, N; \ j = 1, \ldots, n_i; \ k = 1, \ldots, m_{ij}; \ t = 1, \ldots, T.$$

Здесь $i$ – индекс Центра (властной иерархии); $j$ – индекс агента влияния (властной группировки) данной иерархии; $k, p, r, s$ – индексы базового агента данной группировки; $t$ – индекс шага по времени; $N$ – число властных иерархий; $n_i$ – число властных группировок данной иерархии; $m_{ij}$ – число базовых агентов данной группировки; $J_i$, $J_{ij}$, $J_{ijk}$ – выигрыши Центра, агента влияния и базового агента соответственно; $R^t, R_i^t, R_{ij}^t, R_{ijk}^t$ – общий ресурс, ресурс властной иерархии, властной группировки и базового агента соответственно; $q_{ij}^t$ – управление Центра; $\sum_{j=1}^{n_i} q_{ij}^t$ – доля усилий Центра, направленных на контроль своей иерархии; $v_i^t = 1 - \sum_{j=1}^{n_i} q_{ij}^t$ – доля его усилий, направленных на конкуренцию с другими Центрами; $q_{ijk}^t$ – управление агента влияния; $\sum_{k=1}^{m_{ij}} q_{ijk}^t$ – доля усилий агента влияния, направленных на контроль своей группировки; $v_{ij}^t = 1 - \sum_{k=1}^{m_{ij}} q_{ijk}^t$ – доля его усилий, направленных на конкуренцию с другими агентами влияния своей иерархии; $u_{ijk}^t$ – доля усилий базового агента, направленных на увеличение ресурса; $v_{ijk}^t = 1 - u_{ijk}^t$ – доля его усилий, направленных на конкуренцию с другими базовыми агентами своей группировки; $A, A_i, A_{ij}$ – параметры конкуренции; $\delta \in (0, 1)$ – коэффициент дисконтирования; $R_0$ – начальное значение общего ресурса; $T$ – горизонт планирования.

Величины усилий, направленных на контроль своей иерархии, представляют собой ограничения снизу, поскольку предполагается, что агенты более склонны к конкуренции, чем к регулярной деятельности по увеличению властного ресурса своей группировки. Поэтому начальники должны ограничивать «эгоистические» стремления своих подчинённых, что влечёт затраты на контроль.

При $i = 1, \ldots, N$ соотношения (1)–(10) определяют разностную игру $N$ лиц в нормальной форме. Приведём регламент этой игры для программных стратегий без обратной связи по управлению (игра Гермейера $\Gamma_{1t}$).

1. Центры всех властных иерархий $i = 1, \ldots, N$ одновременно и независимо друг от друга выбирают программные стратегии $\{q_{ij}^t\}_{t=1}^{T}{}_{j=1}^{n_i}$ и сообщают их своим агентам влияния.

2. Зная управления Центра, агенты влияния одновременно и независимо от других агентов влияния своей и всех остальных властных группировок выбирают программные стратегии $\{q_{ijk}^t\}_{t=1}^{T}{}_{k=1}^{m_{ij}}$, равновесные по Нэшу в игре агентов влияния (3), (4), (9), и сообщают их своим базовым агентам.

3. Зная равновесные управления своего агента влияния, базовые агенты данной властной группи-

ровки одновременно и независимо от других базовых агентов своей и всех остальных группировок выбирают свои программные стратегии $\{u_{ijk}^t\}_{t=1}^{T}{}_{k=1}^{m_{ij}}$. Оптимальным ответом базовых агентов на набор $\{q_{ijk}^t\}_{t=1}^{T}{}_{k=1}^{m_{ij}}$ считается равновесие Нэша в игре базовых агентов (5), (6), (10) при данном $j$.

4. Каждый Центр выбирает управление $\{q_{ij}^t\}_{t=1}^{T}{}_{j=1}^{n_i}$ так, чтобы решить свою задачу оптимального управления (1), (2), (7), (8) на множестве равновесий Нэша в игре агентов влияния (3), (4), (9).

5. Полученный набор $\{q_{ij}^t, q_{ijk}^t, u_{ijk}^t\}_{t=1}^{T}{}_{j=1}^{n_i}{}_{k=1}^{m_{ij}}$ есть решение игры Гермейера $\Gamma_{1t}$ (1)–(10) при фиксированном $i$, а совокупность этих решений для всех $i = 1,..., N$ есть решение общей разностной игры.

Аналогично определяется регламент этой игры для программных стратегий с обратной связью по управлению (игра Гермейера $\Gamma_{2t}$), позиционных стратегий без обратной связи по управлению (игра Гермейера $\Gamma_{1x}$) и позиционных стратегий с обратной связью по управлению (игра Гермейера $\Gamma_{2x}$).

Итак, можно дать следующее определение.

**Определение 1.** *Система властных иерархий* есть набор

$$S_0 = \left\langle N, R_0, \{H_i\}_{i=1}^N \right\rangle,$$

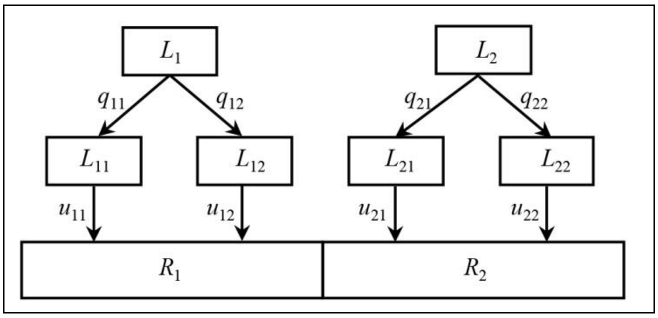
где $N$ – число властных иерархий в системе; $R_0$ – начальное количество ресурса; $H_i = (V_i, A_i)$ – орграф $i$-й властной иерархии; $V_i = \{L_{i0}, L_{i11}, ..., L_{ik_in_{k_i}}\}$ – множество вершин (членов $i$-й иерархии); $A_i$ – множество дуг $i$-й иерархии (задающих отношения соподчинённости между членами иерархии).♦

Тогда модель (1)–(10) описывает конфликтно-управляемую динамику системы $S_0$ за время $T$.

## 2. АНАЛИЗ ПРОСТОЙ СИСТЕМЫ ДВУХУРОВНЕВЫХ ВЛАСТНЫХ ИЕРАРХИЙ

Для аналитического исследования сделаем следующие упрощающие предположения. Пусть $N = n_1 = n_2 = 2,\ A_i = A,\ q_{ij}^t = q_{ij}, u_{ij}^t = u_{ij}$. Обозначим $\bar{u}_i = u_{i1} + u_{i2},\ i = 1, 2$.

Получаем простую систему двухуровневых властных иерархий, изображённую на рисунке.




**Простая система двухуровневых властных иерархий**

Модель (1)–(10) принимает вид

$$J_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^t [(A - v_1 - v_2)v_i + R_i^t] \to \max, \tag{11}$$

$$0 \le q_{i1} \le 1,\ 0 \le q_{i2} \le 1;$$

$$J_{ij} = \sum_{t=1}^{T} \delta^t [(A - v_{i1} - v_{i2})v_{ij} + R_{ij}^t] \to \max, \tag{12}$$

$$q_{i1} \le u_{i1} \le 1,\ q_{i2} \le u_{i2} \le 1;$$

$$R^t = (1 + \bar{u}_1 + \bar{u}_2)R^{t-1},\ R^0 = R_0; \tag{13}$$

$$R_i^t = \begin{cases} (u_{i1} + u_{i2})R^t / (\bar{u}_1 + \bar{u}_2),\ \bar{u}_1 + \bar{u}_2 > 0; \\ 0, \text{иначе}; \end{cases} \tag{14}$$

$$R_{ij}^t = \begin{cases} u_{ij} R_i^t / (u_{i1} + u_{i2}),\ u_{i1} + u_{i2} > 0; \\ 0, \text{иначе}; \end{cases} \tag{15}$$

$$i, j = 1, 2;\ t = 1,..., T.$$

Из выражения (13) получаем

$$R^t = R_0(1 + \bar{u}_1 + \bar{u}_2)^t,\ t = 1,..., T. \tag{16}$$

Подставляя выражение (16) в формулу (14) и затем в формулу (15), получаем

$$R_{ij}^t = u_{ij} R_0 (1 + \bar{u}_1 + \bar{u}_2)^t / (\bar{u}_1 + \bar{u}_2).$$

Тогда задача (12) с учётом $v_{ij} = 1 - u_{ij}$ принимает вид

$$J_{ij} = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \Big[ (A - 2 + \bar{u}_i)(1 - u_{ij}) +$$

$$+ u_{ij} R_0 (1 + \bar{u}_1 + \bar{u}_2)^t / (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) \Big] \to \max,$$

$$q_{i1} \le u_{i1} \le 1, q_{i2} \le u_{i2} \le 1.$$

Очевидно, что в силу наличия показательной функции максимум достигается при $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 1$. Таким образом, $u_{ij} = 1$ и тогда $q_{ij} = 0,\ i, j = 1, 2$, что образует решение игры.

## 3. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ И ПОДХОДЫ К ИХ РЕШЕНИЮ

Сформулируем ряд задач исследования властных иерархий на основе предложенных моделей. Во-первых, дадим следующее определение.

**Определение 2.** Система властных иерархий в момент времени $t$:

– *однополярная*, если $\exists\, i \in \{1,..., N\}$ такое, что $R_i^t \ge 0{,}75 R^t$;

– *двухполярная*, если $\exists\, i, j \in \{1,..., N\}$ такие, что $R_i^t + R_j^t \ge 0{,}75 R^t \wedge | R_i^t - R_j^t | \le 0{,}15 R^t$;

– *многополярная*, иначе. ♦

Разумеется, что свойство однополярности определено субъективно: значение коэффициента 0,75 взято из соображений «квалифицированного большинства», значение коэффициента «сравнимости полюсов» 0,15 тоже произвольно. Так или иначе, представляют большой интерес условия возникновения систем властных иерархий с различным числом полюсов.

Заметим, что для модели (11)–(15) условие однополярности ($i$-полярности) имеет вид

$$\bar{u}_i \ge 3\bar{u}_j , \qquad (17)$$

а условие двухполярности сводится к системе неравенств

$$\begin{cases} (1-\alpha)\bar{u}_i - (1+\alpha)\bar{u}_j \le 0, & (18) \\ (1-\alpha)\bar{u}_j - (1+\alpha)\bar{u}_i \le 0. & (19) \end{cases}$$

Здесь $\alpha$ – малый параметр, к примеру, $0 < \alpha \le 0{,}15$. Если оба неравенства (18), (19) верны, то система властных иерархий двухполярная, иначе она однополярная с тем полюсом $i$, для которого верно условие (17). Отсюда получаем два простых утверждения.

**Утверждение 1.** *Если* $\bar{u}_i = \bar{u}_j$, *то система двух властных иерархий двухполярная.*

**Утверждение 2.** *Если* $\bar{u}_i = 0, \bar{u}_j > 0$, *то система двух властных иерархий j-полярная.*

Таким образом, для доминирования нужно прилагать усилия к увеличению ресурса.

Во-вторых, важно исследовать сравнительную эффективность методов принуждения и побуждения, программных и позиционных стратегий, а также регламентов игр Гермейера $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ с точки зрения Центра при учёте интересов агентов.

В-третьих, модель (1)–(10) можно дополнить требованиями устойчивого развития властной иерархии, за выполнение которых отвечает Центр. Например, можно потребовать, чтобы количество властного ресурса иерархии в любой момент времени было не меньше заданной величины.

Заметим, что возможности аналитического исследования модели (1)–(10) ограничены даже при сильных упрощающих предположениях. Поэтому основным подходом к исследованию моделей властной иерархии представляется компьютерная имитация, в том числе с применением метода качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования [18]. Главную роль здесь играет планирование имитационных вычислительных экспериментов с моделями.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ИМИТАЦИИ

Рассмотрим двухуровневую модель

$$J_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left[ \left( A - \sum_{p=1}^{N} v_p^t \right) v_i^t + R_i^t \right] \to \max ;\ 0 \le q_{ij}^t \le 1;$$

$$J_{ij} = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left[ \left( A_i - \sum_{r=1}^{n_i} v_{ir}^t \right) v_{ij}^t + R_{ij}^t \right] \to \max ;$$

$$q_{ij}^t \le u_{ij}^t \le 1;$$

$$R^t = \left( 1 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}^t \right) R^{t-1},\ R^0 = R_0 ;$$

$$R_i^t = \begin{cases} R^t \left( \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}^t \right) / \left( \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}^t \right), \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}^t > 0, \\ 0, \text{иначе}; \end{cases}$$

$$R_{ij}^t = \begin{cases} R_i^t u_{ij}^t \Big/ \left( \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}^t \right), \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}^t > 0, \\ 0, \text{иначе}; \end{cases}$$

$$i = 1, \ldots, N,\ j = 1, \ldots, n_i;\ t = 1, ..., T .$$

Заметим, что модель симметрична относительно базовых агентов каждого агента влияния, а значит, все базовые агенты одного и того же агента влияния ведут себя одинаково, т. е. $u_{ij}^t = u_i^t$ и $q_{ij}^t = q_i^t$. Симметрии модели относительно агентов влияния мешает различие значений $n_i$ и $A_i$. Поэтому в модели можно избавиться от индекса $j$, но нельзя избавиться от индекса $i$. С учётом того, что $u_{ij}^t = u_i^t$, $q_{ij}^t = q_i^t$, можно определить величины $v_{ij}^t = 1 - u_i^t$, $v_i^t = 1 - q_i^t$, и рассматриваемая модель упрощается:

$$J_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left[ \left( A - N + \sum_{p=1}^{N} q_p^t \right) \left( 1 - q_i^t \right) + R_i^t \right] \to \max, \quad (20)$$

$$0 \le q_i^t \le 1; \quad (21)$$

$$J_{ij} = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left[ \left( A_i - n_i \left( 1 - u_i^t \right) \right) \left( 1 - u_i^t \right) + R_{ij}^t \right] \to \max, \quad (22)$$

$$q_i^t \le u_i^t \le 1; \quad (23)$$

$$R^t = \left( 1 + \sum_{i=1}^{N} n_i u_i^t \right) R^{t-1}, \ R^0 = R_0; \quad (24)$$

$$R_i^t = \begin{cases} R^t n_i u_i^t \Big/ \left( \sum_{i=1}^{N} n_i u_i^t \right), \ \sum_{i=1}^{N} n_i u_i^t > 0, \\ 0, \text{ иначе}; \end{cases} \quad (25)$$

$$R_{ij}^t = \begin{cases} R_i^t / n_i, \ u_i^t > 0, \\ 0, \text{ иначе}; \end{cases} \quad (26)$$

$$i = 1, \ldots, N, \ j = 1, \ldots, n_i; \ t = 1, \ldots, T.$$

В частности, видно, что все базовые агенты одного агента влияния получают одно и то же количество ресурсов.

Для численного исследования рассмотрим модель (20)–(26) при следующих значениях параметров: начальное количество ресурсов $R_0 = 100$, коэффициент дисконтирования $\delta = 0{,}8$, период прогнозирования $T$ = 5 лет, коэффициенты $A = A_i = 50$, количество агентов влияния $N$ = 2, количество базовых агентов у первого агента влияния $n_1 = 2$, количество базовых агентов у второго агента влияния $n_2 = 3$.

Перебирались различные сценарии с учётом того, что все базовые агенты одного и того же агента влияния прилагают одинаковое количество усилий. Находилось равновесие по Штакельбергу. Сначала фиксируем все стратегии агентов влияния, допустим, все величины $q_{ij}^t = 0$, $i$ = 1, 2, $j = 1,\ldots,n_i$, $t$ = 1,…,5. Рассмотрим различные варианты стратегий базовых агентов первого агента влияния в момент времени $t = 0$ (табл. 1).

*Таблица 1*

**Стратегии и выигрыши базовых агентов**

| Стратегия базового агента $u_{1j}^0$, $j$= 1, 2 | Выигрыш базового агента $J_{1j}$, $j$ = 1, 2 |
|---|---|
| 0 | 129,085 |
| 0,1 | 173,389 |
| 0,2 | 177,661 |
| 0,3 | 181,901 |
| 0,4 | 186,109 |
| 0,5 | 190,285 |
| 0,6 | 194,429 |
| 0,7 | 198,541 |
| 0,8 | 202,621 |
| 0,9 | 206,669 |
| 1 | 210,685 |

Отсюда видно, что базовым агентам первого агента влияния наибольший выигрыш приносит стратегия $u_{1j}^0 = 1$, т. е. в первый момент времени всем базовым агентам первого агента влияния выгодно все усилия прилагать только к увеличению ресурса. Дальнейшие исследования подтвердили это свойство для базовых агентов всех агентов влияния во все моменты времени, причём поведение базового агента одного агента влияния никак не влияет на поведение базовых агентов другого агента влияния.

Теперь перейдём к определению оптимальных значений величин $q_{ij}^t$. Заметим, что эти величины влияют на целевую функцию агентов влияния, но никак не влияют на целевую функцию базового агента. Эта стратегия агента влияния может только ограничить стратегию базовых агентов снизу. Но этого не требуется, поскольку базовый агент и так выбирает максимально возможное значение управления. Поэтому с учётом влияния стратегии $q_{ij}^t$ на целевую функцию агентов влияния получим, что её оптимальное значение $q_{ij}^t = 0$, т. е. агентам влияния не нужно контролировать базовых агентов.

Итак, оптимальными стратегиями участников системы в данной модели являются следующие: $q_{ij}^t = 0$, $u_{ij}^t = 1$. Выигрыши агентов влияния $J_1 = 128\,822$, $J_2 = 193\,165$. В силу симметричности модели, одинаковых усилий базовых агентов и пропорциональности распределения ресурсов каждый базовый агент имеет выигрыш $J_{ij} = 64\,346{,}3$.

Изменения в ресурсах представлены в табл. 2.

*Таблица 2*

**Динамика ресурсов**

| Количество ресурсов | $t$=0 | $t$=1 | $t$=2 | $t$=3 | $t$=4 | $t$=5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Общее | 100 | 600 | 3 600 | 21 600 | 129 600 | 777 600 |
| Первого агента влияния | – | 240 | 1 440 | 8 640 | 51 840 | 311 040 |
| Второго агента влияния | – | 360 | 2 160 | 12 960 | 77 760 | 466 560 |
| базовых агентов | – | 120 | 720 | 4 320 | 25 920 | 155 520 |

## 5. АЛЬТЕРНАТИВНАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНЦИИ ЗА РЕСУРС

Рассмотрим теперь модель конкуренции между властными иерархиями за ресурс вида

$$J_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^t R_i^t \to \max,\ 0 \le u_i^t \le 1; \qquad (27)$$

$$R^t = R^{t-1} + F\left(\sum_{i=1}^{N} u_i^t\right),\ R^0 = R_0; \qquad (28)$$

$$R_i^t = \begin{cases} \dfrac{1-u_i^t}{\sum_{j=1}^{N}(1-u_j^t)} R^t,\ \sum_{j=1}^{N}(1-u_j^t) > 0, \\ 0,\ \text{иначе}, \end{cases} \qquad (29)$$

$$i = 1,\dots,N, t = 1,\dots,T.$$

Здесь $J_i$ – выигрыши $i$-й властной иерархии на горизонте планирования $T$; $R^t = R_1^t + \ldots + R_N^t$ – общее количество властного ресурса в момент $t$; $R_i^t$ – количество ресурса властной иерархии $i$ в момент $t$; $N$ – число властных иерархий; $\delta \in (0,1)$ – коэффициент дисконтирования; $u_i^t$, $1-u_i^t$ – доли усилий $i$-й иерархии, направленных на увеличение ресурса и установление контроля над ним в момент $t$ соответственно; $F$ – функция увеличения ресурса за счёт усилий агентов. Как и ранее, формула (28) описывает динамику ресурса, а формула (29) – распределение контроля над ним.

**Пример 1.** Рассмотрим случай двух властных иерархий, использующих не зависящие от времени стратегии и степенную функцию увеличения ресурса. Тогда получаем

$$R^t = R^{t-1} + \sqrt{u_1 + u_2},\ R^0 = R_0;$$

$$R_i^t = \begin{cases} \dfrac{1-u_i}{2-u_1-u_2} R^t,\ u_1 + u_2 \ne 2, \\ 0,\ \text{иначе}, \end{cases} \qquad (30)$$

$$i = 1, 2,\ \ t = 1,\dots,T.$$

Возьмём в модели (27), (30) характерные сценарии управления $u_i \in \{0; 1/2; 1\}$, $i = 1, 2$. В табл. 3 показаны соответствующие значения ресурсов, а в табл. 4 – выигрыши иерархий. В каждой ячейке табл. 4 в левом верхнем углу содержится выигрыш первой властной группировки, а в нижнем правом – выигрыш второй властной группировки.

*Таблица 3*

**Динамика ресурса и контроля над ним для выбранных сценариев управления**

| | $u_2 = 0$ | $u_2 = 1/2$ | $u_2 = 1$ |
|---|---|---|---|
| $u_1 = 0$ | $R^t = R_0$<br>$R_i^t = R_0/2, i = 1,2$ | $R^t = R_0 + t\sqrt{2}/2$<br>$R_1^t = 2R^t/3 = 2R_0/3 + t\sqrt{2}/3$<br>$R_2^t = R^t/3 = R_0/3 + t\sqrt{2}/6$ | $R^t = R_0 + t$<br>$R_1^t = 0$<br>$R_2^t = R^t = R_0 + t$ |
| $u_1 = 1/2$ | $R^t = R_0 + t\sqrt{2}/2$<br>$R_1^t = R^t/3 = R_0/3 + t\sqrt{2}/6$<br>$R_2^t = 2R^t/3 = 2R_0/3 + t\sqrt{2}/3$ | $R^t = R_0 + t$<br>$R_i^t = (R_0 + t)/2, i = 1,2$ | $R^t = R_0 + t\sqrt{6}/2$<br>$R_1^t = R^t = R_0 + t\sqrt{6}/2$<br>$R_2^t = 0$ |
| $u_1 = 1$ | $R^t = R_0 + t$<br>$R_1^t = R^t = R_0 + t$<br>$R_2^t = 0$ | $R^t = R_0 + t\sqrt{6}/2$<br>$R_1^t = 0$<br>$R_2^t = R^t = R_0 + t\sqrt{6}/2$ | $R^t = R_0 + t\sqrt{2}$<br>$R_i^t = 0, i = 1,2$ |

*Таблица 4*

**Выигрыши властных иерархий для выбранных сценариев управления**

| | $u_2=0$ | $u_2=1/2$ | $u_2=1$ |
|---|---|---|---|
| $u_1=0$ | $\frac{\delta R_0(1-\delta^T)}{2(1-\delta)}$<br>$\frac{\delta R_0(1-\delta^T)}{2(1-\delta)}$ | $\frac{2\delta R_0(1-\delta^T)}{3(1-\delta)}+\frac{\sqrt{2}}{3}\sum_{t=1}^{T}\delta^t t$<br>$\frac{\delta R_0(1-\delta^T)}{3(1-\delta)}+\frac{\sqrt{2}}{6}\sum_{t=1}^{T}\delta^t t$ | $\frac{\delta R_0(1-\delta^T)}{1-\delta}+\sum_{t=1}^{T}\delta^t t$<br>$0$ |
| $u_1=1/2$ | $\frac{\delta R_0\left(1-\delta^T\right)}{3(1-\delta)}+\frac{\sqrt{2}}{6}\sum_{t=1}^{T}\delta^t t$<br>$\frac{2\delta R_0(1-\delta^T)}{3(1-\delta)}+\frac{\sqrt{2}}{3}\sum_{t=1}^{T}\delta^t t$ | $\frac{\delta R_0(1-\delta^T)}{2(1-\delta)}+\sum_{t=1}^{T}\delta^t t$<br>$\frac{\delta R_0(1-\delta^T)}{2(1-\delta)}+\sum_{t=1}^{T}\delta^t t$ | $\frac{\delta R_0(1-\delta^T)}{2(1-\delta)}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{t=1}^{T}\delta^t t$<br>$0$ |
| $u_1=1$ | $0$<br>$\frac{\delta R_0(1-\delta^T)}{1-\delta}+\sum_{t=1}^{T}\delta^t t$ | $0$<br>$\frac{\delta R_0(1-\delta^T)}{2(1-\delta)}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{t=1}^{T}\delta^t t$ | $0$<br>$0$ |

Приведём определение из работы [18]. Пусть $\Omega=S_1\times\ldots\times S_N\times X_1\times\ldots\times X_N$, где $S_i=\left(s_i\ge 0;\ \sum_{i=1}^{n}s_i\le S\right)$; $X_i=\left(x_i\ge 0\right), i=1,2,\ldots,N,$ – множества допустимых управлений агентов и Центра. Множество

$$QRS=S^{QRS}\times X^{QRS}=$$
$$=S_1^{QRS}\times S_2^{QRS}\times\ldots\times S_N^{QRS}\times X_1^{QRS}\times X_2^{QRS}\times\ldots\times X_N^{QRS}=$$
$$=\left\{(s,x)=\left(s_1,\ldots,s_N;x_1,\ldots,x_N\right);\right.$$
$$\left. s_i\in S_i^{QRS}\subset S_i;\ x_i\in X_i^{QRS}\subset X_i\right\}$$

называется множеством *QRS* иерархической игры с точностью $\Delta$, если:

– для любых двух элементов $(s,x)^{(i)}$, $(s,x)^{(j)}\in QRS$ $\left|J_0^{(i)}-J_0^{(j)}\right|>\Delta$ (внутренняя устойчивость);

– для любого элемента $(s,x)^{(l)}\notin QRS$ найдётся элемент $(s,x)^{(j)}\in QRS$ такой, что $\left|J_0^{(l)}-J_0^{(j)}\right|\le\Delta$ (внешняя устойчивость).

Таким образом, любые сценарии из множества *QRS* существенно отличаются с точки зрения выигрышей игроков, а для любого «постороннего» сценария можно подобрать такой сценарий из множества *QRS*, что различие выигрышей будет несущественным. Это означает, что рассмотрение небольшого числа сценариев из множества *QRS* необходимо и достаточно для качественного анализа ситуации.

В нашем случае при заданной допустимой погрешности в выигрыше $\Delta$ данное множество сценариев будет обладать внутренней устойчивостью, если выполняются условия

$$\left|\frac{\delta R_0\left(1-\delta^T\right)}{6\left(1-\delta\right)}-\frac{\sqrt{2}}{6}\sum_{t=1}^{T}\delta^t t\right|>\Delta,$$

$$\frac{\delta R_0\left(1-\delta^T\right)}{2\left(1-\delta\right)}+\sum_{t=1}^{T}\delta^t t>\Delta,$$

$$\left|\frac{\delta R_0\left(1-\delta^T\right)}{6\left(1-\delta\right)}-\frac{3-\sqrt{2}}{3}\sum_{t=1}^{T}\delta^t t\right|>\Delta.$$

Заметим, что чем больше начальный общий объём ресурсов, тем вероятнее выполнение условий внутренней устойчивости множества *QRS*.

В силу симметрии задачи рассмотрим построение множества *QRS*, основываясь на выигрышах первой иерархии при $R_0=100$, $\delta=0{,}8$, $T=5$. Сначала рассмотрим потенциальное множество *QRS* из выписанных девяти сценариев, т. е. пока рассматривается множество стратегий одной иерархии $S_0=\{0;\ 0{,}5;\ 1\}$. Возьмём допустимую погрешность в выигрыше $\Delta=30$ (табл.5).

*Таблица 5*

**Выигрыш первой властной иерархии при множестве стратегий $S_0$**

| | $u_2=0$ | $u_2=0{,}5$ | $u_2=1$ |
|---|---|---|---|
| $u_1=0$ | 134,464 | 182,535 | 275,821 |
| $u_1=0{,}5$ | 91,2673 | 137,91 | 277,37 |
| $u_1=1$ | 0 | 0 | 0 |

Синим цветом отмечены сценарии, которые удовлетворяют условию внутренней устойчивости. Удовлетворяют ли они условиям внешней устойчивости? Расширим множество стратегий каждой иерархии до пяти элементов $S_1 = \{0; 0,25; 0,5; 0,75; 1\}$ (табл.6).

*Таблица 6*

**Выигрыш первой властной иерархии при множестве стратегий $S_1$**

| | $u_2$=0 | $u_2$=0,25 | $u_2$=0,5 | $u_2$=0,75 | $u_2$=1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$=0 | 134,464 | 155,643 | 182,535 | 219,918 | 275,821 |
| $u_1$=0,25 | 116,732 | 136,901 | 164,938 | 206,866 | 276,634 |
| $u_1$=0,5 | 91,2673 | 109,959 | 137,91 | 184,423 | 277,37 |
| $u_1$=0,75 | 54,9795 | 68,9552 | 92,2115 | 138,685 | 278,046 |
| $u_1$=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Как видно из табл. 6, сценарии со стратегиями $u_i$ = 0,25 включать в множество *QRS* не следует, но стратегии с $u_i$ = 0,75 стоит. Для решения вопроса о выполнении условия внешней устойчивости выделенного синим цветом множества сценариев расширим множество стратегий каждой иерархии до семи элементов $S_2 = \{0; 0,25; 0,5; 0,625; 0,75; 0,875; 1\}$ (табл. 7).

Как видно из табл. 7, сценарии со стратегиями $u_i$=0,625 включать в множество *QRS* не следует, но стратегии с $u_i$=0,875 стоит. Для решения вопроса о выполнении условия внешней устойчивости выделенного синим цветом множества сценариев расширим множество стратегий каждой иерархии до девяти элементов $S_3 = \{0; 0,25; 0,5; 0,625; 0,75; 0,8125; 0,875; 0,9375; 1\}$ (табл. 8).

Как видно из табл. 8, сценарии со стратегиями $u_i$=0,8125 включать в множество *QRS* не следует, но стратегии с $u_i$=0,9375 стоит. Для решения вопроса о выполнении условия внешней устойчивости выделенного синим цветом множества сценариев расширим множество стратегий каждой иерархии до десяти элементов $S_4 = \{0; 0,25; 0,5; 0,625; 0,75; 0,8125; 0,875; 0,9375; 0,96875; 1\}$ (табл. 9).

*Таблица 7*

**Выигрыш первой властной иерархии при множестве стратегий $S_2$**

| | $u_2$=0 | $u_2$=0,25 | $u_2$=0,5 | $u_2$=0,625 | $u_2$=0,75 | $u_2$=0,875 | $u_2$=1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$=0 | 134,464 | 155,643 | 182,535 | 199,547 | 219,918 | 244,778 | 275,821 |
| $u_1$=0,25 | 116,732 | 136,901 | 164,938 | 183,584 | 206,866 | 236,776 | 276,634 |
| $u_1$=0,5 | 91,2673 | 109,959 | 137,91 | 157,851 | 184,423 | 221,608 | 277,37 |
| $u_1$=0,625 | 74,8302 | 91,7919 | 118,388 | 138,317 | 166,206 | 208,027 | 277,715 |
| $u_1$=0,75 | 54,9795 | 68,9552 | 92,2115 | 110,804 | 138,685 | 185,143 | 278,046 |
| $u_1$=0,875 | 30,5973 | 39,4627 | 55,4021 | 69,3425 | 92,5715 | 139,023 | 278,366 |
| $u_1$=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

*Таблица 8*

**Выигрыш первой властной иерархии при множестве стратегий $S_3$**

| | $u_2$=0 | $u_2$=0,25 | $u_2$=0,5 | $u_2$=0,625 | $u_2$=0,75 | $u_2$=0,8125 | $u_2$=0,875 | $u_2$=0,9375 | $u_2$=1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$=0 | 134,464 | 155,643 | 182,535 | 199,547 | 219,918 | 231,698 | 244,778 | 259,39 | 275,821 |
| $u_1$=0,25 | 116,732 | 136,901 | 164,938 | 183,584 | 206,866 | 220,826 | 236,776 | 255,175 | 276,634 |
| $u_1$=0,5 | 91,2673 | 109,959 | 137,91 | 157,851 | 184,423 | 201,327 | 221,608 | 246,393 | 277,37 |
| $u_1$=0,625 | 74,8302 | 91,7919 | 118,388 | 138,317 | 166,206 | 184,795 | 208,027 | 237,895 | 277,715 |
| $u_1$=0,75 | 54,9795 | 68,9552 | 92,2115 | 110,804 | 138,685 | 158,597 | 185,143 | 222,306 | 278,046 |
| $u_1$=0,8125 | 43,4433 | 55,2066 | 75,4976 | 92,3974 | 118,947 | 138,857 | 166,729 | 208,535 | 278,208 |
| $u_1$=0,875 | 30,5973 | 39,4627 | 55,4021 | 69,3425 | 92,5715 | 111,153 | 139,023 | 185,472 | 278,366 |
| $u_1$=0,9375 | 16,2119 | 21,2646 | 30,7991 | 39,6491 | 55,5764 | 69,5116 | 92,7359 | 139,183 | 278,522 |
| $u_1$=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

*Таблица 9*

**Выигрыш первой властной иерархии при множестве стратегий $S_4$**

| | $u_2$=0 | $u_2$=0,25 | $u_2$=0,5 | $u_2$=0,625 | $u_2$=0,75 | $u_2$=0,8125 | $u_2$=0,875 | $u_2$=0,9063 | $u_2$=0,9375 | $u_2$=0,96875 | $u_2$=1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$=0 | 134,5 | 155,6 | 182,5 | 199,5 | 219,9 | 231,7 | 244,8 | 251,9 | 259,4 | 267,4 | 275,8 |
| $u_1$=0,25 | 116,7 | 136,9 | 164,9 | 183,6 | 206,9 | 220,8 | 236,8 | 245,6 | 255,2 | 265,5 | 276,6 |
| $u_1$=0,5 | 91,3 | 110,0 | 137,9 | 157,9 | 184,4 | 201,3 | 221,6 | 233,3 | 246,4 | 261,0 | 277,4 |
| $u_1$=0,625 | 74,8 | 91,8 | 118,4 | 138,3 | 166,2 | 184,8 | 208,0 | 222,0 | 237,9 | 256,3 | 277,7 |
| $u_1$=0,75 | 55,0 | 69,0 | 92,2 | 110,8 | 138,7 | 158,6 | 185,1 | 202,0 | 222,3 | 247,1 | 278,0 |
| $u_1$=0,8125 | 43,4 | 55,2 | 75,5 | 92,4 | 118,9 | 138,9 | 166,7 | 185,3 | 208,5 | 238,4 | 278,2 |
| $u_1$=0,875 | 30,6 | 39,5 | 55,4 | 69,3 | 92,6 | 111,2 | 139,0 | 158,9 | 185,5 | 222,6 | 278,4 |
| $u_1$=0,90625 | 23,6 | 30,7 | 43,8 | 55,5 | 75,8 | 92,7 | 119,2 | 139,1 | 167,0 | 208,8 | 278,4 |
| $u_1$=0,9375 | 16,2 | 21,3 | 30,8 | 39,6 | 55,6 | 69,5 | 92,7 | 111,3 | 139,2 | 185,6 | 278,5 |
| $u_1$=0,96875 | 8,4 | 11,1 | 16,3 | 21,4 | 30,9 | 39,7 | 55,7 | 69,6 | 92,8 | 139,3 | 278,6 |
| $u_1$=1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Из табл. 9 видно, что в множество *QRS* стоит включать только те сценарии, которые содержат стратегии иерархий из множества $\{1-0,5^n\}_{n=0}^{\infty}$. Очевидно, доминирующая стратегия каждого игрока $u_i = 0$. Поэтому равновесие по Нэшу $NE$={(0,0)}. ♦

**Пример 2.** Положим $F = u_1 + u_2$ и рассмотрим модель из примера 1 в непрерывном времени без учёта дисконтирования:

$$J_i = \int_0^T R_i(t)dt \to \max,\ 0 \le u_i \le 1,\ i = 1,\ 2\,; \tag{31}$$

$$\dot{R} = u_1 + u_2,\ R(0) = R_0\,; \tag{32}$$

$$R_i(t) = \begin{cases} \dfrac{1-u_i}{2-u_1-u_2} R(t),\ u_1+u_2 \ne 2, \\ 0,\ \text{иначе}, \end{cases} \tag{33}$$

$$i = 1, 2.$$

Из формулы (32) получаем $R(t) = (u_1 + u_2)t + R_0$, откуда в силу выражения (33) задача (31) принимает вид

$$J_i = \frac{1-u_i}{2-u_1-u_2}\int_0^T [(u_1+u_2)t + R_0]dt \to \max,$$

$$0 \le u_i \le 1,\ i = 1,\ 2,$$

или после преобразований

$$J_i = \frac{1-u_i}{2-u_1-u_2}(T^2(u_1+u_2)/2 + R_0T) \to \max,$$

$$0 \le u_i \le 1,\ i = 1,\ 2.$$

Условия первого порядка приводят к системе уравнений

$$(1-u_1)(2-u_1-u_2) + (u_2-1)(u_1+u_2-R_0T) = 0\,;$$

$$(1-u_2)(2-u_1-u_2) + (u_1-1)(u_1+u_2-R_0T) = 0\,,$$

откуда в силу симметрии (других решений нет)

$$2(1-u)(1-u) - (1-u)(2u - R_0T) = 0,$$

$$u = u_1 = u_2.$$

Если $u = 1$, то $R_i = J_i = 0,\ i = 1,2$. Поэтому решение игры (31) имеет вид

$$u = u_1 = u_2 = \frac{2+R_0T}{4}\,,$$

при этом

$$J_1 = J_2 = T(2T + R_0T + 4R_0)/2\,.$$

Исследуем теперь число полюсов. Заметим, что условия из определения 2 не зависят от вида функции для величины $R$. Условие$i$-полярности имеет вид

$$\frac{R_i^t}{R^t} = \frac{1-u_i}{2-u_i-u_j} \ge \frac{3}{4}\,,$$

или

$$u_i \le 3u_j - 2\,. \tag{34}$$

Первое из условий двухполярности для системы двух властных иерархий выполняется всегда, поэтому интерес представляет второе условие

$$|\,R_i^t - R_j^t\,| \le 0{,}15R^t = \alpha R^t\,,$$

или для данных из примера

$$\left|\frac{u_j - u_i}{2-u_i-u_j}\right| \le \alpha\,,$$

что эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} (1+\alpha)u_j - (1-\alpha)u_i \le 2\alpha, & (35) \\ (1+\alpha)u_i - (1-\alpha)u_j \le 2\alpha. & (36) \end{cases}$$

Если оба неравенства (35), (36) верны, то система властных иерархий двухполярная, иначе она однополярная с тем полюсом $i$, для которого верно условие (34). Например, при $u_1 = u_2 = 0,5$ оба условия (35), (36) верны, поэтому система двухполярная. Если же $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, то условие (36) не выполняется, а условие (34) выполняется, поэтому система однополярная. Таким образом, здесь для достижения доминирования нужно прилагать усилия не к увеличению ресурса, а к установлению контроля над ним. ♦

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическая теория властных иерархий А.П. Михайлова [1–8] основана на естественных, но довольно абстрактных предположениях. Намного ближе к реальности концепция властных иерархий М.Л. Хазина [9,10], но в ней математические модели не используются. Отдавая себе отчёт в трудности математической формализации данной концепции, авторы всё же предприняли попытку её реализации на базе теории управления устойчивым развитием активных систем [14].

В настоящей статье изложены принципы построения математической модели властных иерархий, приведена эта модель для случая трёхуровневых иерархий, описан регламент соответствующей разностной игры, дано определение системы властных иерархий. Проведено аналитическое исследование простой системы двухуровневых властных иерархий. Даны постановки задач, исследовано число полюсов власти, проведены численные расчёты для тестового примера.

Кроме того, предложена альтернативная постановка модели конкуренции за ресурс, проведено её аналитическое и численное исследование с помощью метода качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования [18].

По мнению авторов, основная ценность статьи состоит в демонстрации возможностей математической формализации теории власти [9,10] (с использованием некоторых идей из работ [1–8]). Теория власти [9,10] представляется весьма интересной и подкреплена множеством убедительных примеров, но её математическая формализация представляет собой непростую задачу, и такие попытки пока не осуществлялись.

В результате проведённого исследования:

– предложены принципы построения модели трёхуровневых властных иерархий и проведена соответствующая математическая формализация в виде разностной игры в нормальной форме; рассмотрен также альтернативный подход к построению модели;

– выполнено аналитическое исследование для частного случаясистемы двухуровневых властных иерархий;

– сформулированы общие задачи исследования властных иерархий;

– осуществлено имитационное моделирование системы властных иерархий для различных случаев и проведён сравнительный анализ результатов имитации. Особо отметим выводы о числе полюсов, чрезвычайно актуальные в нынешней геополитической ситуации. Действительно, до окончания Второй мировой войны мир был многополярным, с 1945 по 1991 г.–двухполярным (США и СССР с их союзниками), затем однополярным (только США), а теперь снова возвращается к многополярности, что принципиально важно.

Полученные результаты имеют преимущественно иллюстративный характер. Однако представляется, что предложенный подход при его дальнейшем развитии может оказаться полезным для изучения реальных властных иерархий.

В дальнейшем предполагается:

– уточнить основные гипотезы, положенные в основу моделирования;

– продолжить сравнительный анализ различных информационных регламентов;

– рассмотреть версии модели в непрерывном времени;

– выявить условия существования систем властных иерархий с различным числом полюсов в максимально общей постановке.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Михайлов А.П.* Математическое моделирование динамики распределения власти в иерархических структурах // Математическое моделирование. – 1994. –Т. 6, № 6. – С. 108–138.[*Mikhailov, A.P.*Mathematical modelling of power distribution dynamics in hierarchical structures / Matematicheskoe modelirovanie. – 1994. – Vol. 6, no. 6. – P. 108–138. (In Russian)]
2. *Михайлов А.П.*Моделирование системы «Власть-Общество». – М.: Физматлит, 2006. – 145 с. [*Mihajlov, A.P.* Modelirovanie sistemy «Vlast'-Obshchestvo». – M.: Fizmatlit, 2006. – 145 s. (In Russian)]
3. *Михайлов А.П., Ланкин Д.Ф.* О конструкциях властных иерархий // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21, № 8.– С. 108–120.[*Mikhailov, A.P., Lankin, D.F.* About structures of power hierarchies // Matematicheskoe modelirovanie. – 2009. –Vol. 21, no. 8. – P. 108–120. (In Russian)]
4. *Михайлов А.П., Горбатиков Е.А.*Базовая модель дуумвирата в системе «власть-общество» //Математическое моделирование. – 2012. – Т.24, №. 1.– С. 33–45. [*Mikhailov, A.P.* The basic model of duumvirate in the «power-society» system //Matematicheskoe modelirovanie. – 2012. – Vol. 24, no. 1. – P. 35–45. (In Russian)]

5. *Михайлов А.П., Петров А.П., Подлипская О.Г.* Сравнительный анализ стратегий в модели противоборства власти и оппозиции // Математическое моделирование. – 2022. – Т. 34, № 11.– С. 67–76. [*Mikhailov, A.P., Petrov, A.P., Podlipskaia, O.G.* Comparative analysis of strategies in the model of confrontation between power and opposition //Matematicheskoe modelirovanie. – 2022. – Vol. 34, no. 11. – P. 67–76. (In Russian)]
6. *Михайлов А.П.* Модель коррумпированных властных иерархий // Математическое моделирование. – 1999. – Т. 11, № 1. – С. 3–17. [*Mikhailov, A.P.* The model of corrupt power hierarchies / Matematicheskoe modelirovanie. – 1999. – Vol. 11, no. 1. – P. 3–17. (In Russian)]
7. *Михайлов А.П., Ланкин Д.Ф.* Моделирование оптимальных стратегий ограничения коррупции // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18, №12. – P.115–124. [*Mikhailov, A.P., Lankin, D.F.* The model of corrupt power hierarchies// Matematicheskoe modelirovanie. – 2006. – Vol. 18, no. 12. – P. 115–124.(In Russian)]
8. *МихайловА.П., Горбатиков Е.А.* Анализ антикоррупционных стратегий в модифицированной модели «власть-общество» // Математическое моделирование.2016. – Т. 28, № 5.– С. 47–68. [*Mikhailov, A.P., Gorbatikov, E.A.* Anticorruptional strategies analysis in the modified "power-society" model // Matematicheskoe modelirovanie. 2016. – Vol. 28, no. 5. – P. 47–68. (In Russian)]
9. *Хазин М.* Лестница в небо. Диалоги о власти, карьере и мировой элите. – М.: РИПОЛ классик, 2022. – 624 с. [*Hazin, M.* Lestnica v nebo. Dialogi o vlasti, kar'ere i mirovoj elite. – M.: RIPOL klassik, 2022. – 624 s. (In Russian)]
10. *Хазин М., Щеглов С.* Кризис и Власть. Т. I. Лестница в небо. – 544 с.; Т. II. Люди Власти. – 528 с. –М.: РИПОЛ классик, 2023. [*Hazin, M., Shcheglov, S.* Krizis i Vlast'. – Vol. I. Lestnica v nebo. – 544 s.; Vol.II. Lyudi Vlasti. – M.: RIPOL klassik, 2023.– 528 s. (In Russian)]
11. *Fix B.* Personal Income and Hierarchical Power // J. of Economic Issues. – 2019. – Vol. 53, no. 4.– P.928–945.
12. *Fix B.* How the rich are different: hierarchical power as the basis of income size and class // J. of Computational Social Science. – 2021. – Vol. 4, no. 1. – P. 403–454.
13. *Fix B.* Redistributing Income Through Hierarchy // Real-World Economics Review. – 2021. – No. 98.– P. 58–86.
14. *УгольницкийГ.А.* Управление устойчивым развитием активных систем. – Ростов-на-Дону: Изд-воЮФУ, 2016. – 940 с. [*Ugol'nickij, G.A.* Upravlenie ustojchivym razvitiem aktivnyh sistem. – Rostov-na-Donu: Izd-vo YUFU, 2016. – 940 s. (In Russian)]
15. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Теория активных систем: состояние и перспективы. – М.: СИНТЕГ, 1999. – 128 с. [*Burkov, V.N., Novikov, D.A.* Teoriya aktivnyh sistem: sostoyanie i perspektivy. – M.: SINTEG, 1999. – 128 s. (In Russian)]
16. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2007. – 584 с. [*Novikov, D.A.* Teoriya upravleniya organizacionnymi sistemami. – M.: Izd-vo fiz.-mat. lit., 2007. – 584 s. (In Russian)]
17. *Горбанёва О.И., Угольницкий Г.А.* Цена анархии и механизмы управления в моделях согласования общественных и частных интересов // Математическая теория игр и её приложения. – 2015. – Т. 7, вып. 1. – С. 50–73. [*Gorbaneva, O.I., Ougolnitsky, G.A.* Price of Anarchy and Control Mechanisms in Models of Concordance of Public and Private interests // Matematicheskaya Teoriya Igr i Ee Prilozheniya. – 2015. – Vol. 7,iss.1. – P. 50–73. (In Russian)]
18. *Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games // Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Eds. M.D. Pfeffer and E. Bachmaier. – New York: Nova Science Publishers, 2018. – P. 63–106.



*Статья представлена к публикации членом редколлегии академиком РАН Д.А. Новиковым.*

*Поступила в редакцию 20.09.2023,*
*после доработки 27.11.2023.*
*Принята к публикации 29.11.2023.*



**Горбанёва Ольга Ивановна** – д-р техн. наук,
✉oigorbaneva@sfedu.ru,
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-7997-9968

**Угольницкий Геннадий Анатольевич** – д-р физ.-мат. наук,
✉gaugolnickiy@sfedu.ru,
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-5085-5144

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону.

# CONTROL MODELS IN POWER HIERARCHIES

O. I. Gorbaneva* and G. A. Ougolnitsky**

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

*✉ oigorbaneva@sfedu.ru, **✉ gaugolnickiy@sfedu.ru

**Abstract.** This paper is devoted to the modeling of control in power hierarchies. Publications in this research area are briefly overviewed. The design principles of such models and the underlying assumptions are described. They are mathematically formalized using difference normal-form games with the information rules of Germeier games. An analytical study is carried out for a system of two-level power hierarchies as a particular case. The general problems of investigating power hierarchies are posed. One-, two-, and *n*-polar power hierarchies are defined, and their emergence conditions are analyzed. Illustrative examples are provided. An alternative resource competition model is considered. The system of power hierarchies is simulated for different cases, and the simulation results are compared. Conclusions are drawn, and some lines of further research are indicated.

**Keywords**: power hierarchy, simulation, control methods, difference games, coordination of interests, unipolar system, bipolar system, *n* -polar system, pole comparability, resource competition, influence agents, basic agents, power group, QRS-set.

**Acknowledgments.** This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 23-21-00131 (O. I. Gorbaneva).