

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 114
Март 2025***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2025

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем управления

им. В.А. Трапезникова

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 114

Москва – 2025

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики: Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Куржанский А.Б., Попков Ю.С., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Галяев А.А., Савватеев А.В.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П. (ИПУ РАН), Павлов Б.В. (ИПУ РАН), Рутковский В.Ю. (ИПУ РАН).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: академик Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. физ.-мат. наук Горбунова А.В. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИТМО), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ, ГУ ВШЭ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН); д-р техн. наук доцент Коргин Н.А. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН); д-р биол. наук проф. Михальский А.И. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Райгородский А.М. (МФТИ), проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ); д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. (АПИ НГТУ); **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – д-р техн. наук проф. Зоркальцев В.И. (ЛИН СО РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., проф. Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И.; **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фургат И.Б. (ИПМ РАН).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

**Дзгоев А.Э., Лагунова А.Д., Карацев С.Т.,
Конюшок И.А., Комаров И.А., Хузмиев И.М.,
Гладышев О.Я.**

*Системный анализ данных и моделирование
поведения потребления электроэнергии на каждый
час суток с помощью методов машинного обучения .* 6

Жуков П.И.

*Динамическое восстановление коэффициентов
сплошной среды при моделировании
нестационарных процессов.....* 41

Ткачева О.С.

*Поведение траекторий модели развития клеточной
популяционной системы.....* 65

Анализ и синтез систем управления

Имангазиева А.В.

*Управление сетью нестационарных агентов
в условиях параметрической неопределенности
и внешних возмущений* 87

Информационные технологии в управлении

Хлюстов Д.К.

*Моделирование эффекта индуктивно вызванной
поляризации в частотных данных
аэроэлектроразведки* 108

Сетевые модели в управлении

Печников А.А.

*Граф журнального пересечения: определение,
модификации и содержательный пример.....* 122

Хомутов Д.К.

*Протокол латентного консенсуса со слабыми
фоновыми связями и запаздыванием.....* 138

Управление в социально-экономических системах

Волков А.Д., Рослякова Н.А.

Оценка эффективности регулятивных инструментов развития регионов Российской Арктики: опыт социологического исследования..... 156

Команич Н.В., Чернов И.В.

Сценарные технологии в групповом региональном управлении..... 186

Патласов Д.А.

Прогнозирование реализованной волатильности на основе информации, извлекаемой из опционов..... 229

Щербак А.В., Овчинников П.В., Погорелова Л.А., Савельчев П.П.

Максимизация экономики финансовых ресурсов в результате балансировки поточной линии сборки на предприятиях дискретного машиностроения..... 254

Управление техническими системами и технологическими процессами

Полещенко Д.А., Коренев А.В.

Разработка и анализ эффективности критериев наличия шлака при разливке стали..... 273

Управление подвижными объектами и навигация

Макаров М.И., Морозов Ю.В.

Особенности построения сглаженной траектории при наличии большого числа точек траектории..... 291

Московский А.Д.

Распознавание сцен в задаче глобальной локализации мобильного робота с использованием моделей векторных представлений изображений и графовых подходов..... 307

Третьякова Е.А.

Опыт применения алгоритмов относительного позиционирования в электромагнитном поле двух диполей..... 345

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ НА КАЖДЫЙ ЧАС СУТОК С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Дзгоев А. Э.¹, Лагунова А. Д.²,
(РТУ МИРЭА, Москва)

Карацев С. Т.³
*(Финансовый университет при Правительстве РФ
(Владикавказский филиал), Владикавказ)*

Конюшок И. А.⁴
(ООО «Рестадвайзер», Санкт-Петербург)

Комаров И. А.⁵
(ООО «Фриссон», Санкт-Петербург)

Хузмиев И. М.⁶
(ПАО «Россети Северный Кавказ», Пятигорск)

Гладышев О. Я.⁷
*(Филиал АО "СО ЕЭС" ОДУ Северо-Запада,
Санкт-Петербург)*

Потребление электроэнергии является ключевым фактором устойчивого развития в энергетической отрасли, и точное прогнозирование его изменений имеет важное значение для эффективного управления большими электро-энергетическими системами и ресурсами. Целью данного исследования явля-

¹ Алан Эдуардович Дзгоев, к.т.н., доцент, доцент кафедры цифровой трансформации (dzgoviev@mirea.ru).

² Анна Дмитриевна Лагунова, к.э.н., доцент, зав. кафедрой цифровой трансформации (lagunova@mirea.ru).

³ Станислав Таймуразович Карацев, ст. преподаватель базовой кафедры «Корпоративные инфокоммуникационные системы» (stkaratsev@fa.ru).

⁴ Илья Андреевич Конюшок, начальник отдела развития искусственного интеллекта ООО «Рестадвайзер», разработчик ИИ (konushok@mail.ru).

⁵ Иван Александрович Комаров, генеральный директор ООО «Фриссон» (info@frisson.ai).

⁶ Игорь Маратович Хузмиев, к.т.н., заместитель директора Департамента корпоративных и технологических АСУ (huzmiev-im@rossetisk.ru).

⁷ Олег Ярославович Гладышев, главный эксперт, Служба перспективного развития (gladushev-oya@odusz.so-ups.ru).

ется разработка математической (регрессионной) модели для прогнозирования поведения электропотребления на каждый час следующих суток для энергосбытовых компаний современными методами машинного обучения и искусственного интеллекта. Рассматриваются различные методы искусственного интеллекта, применяемые для моделирования и прогнозирования потребления электроэнергии. К этим методам относятся: линейная модель, случайный лес и две реализации градиентного бустинга над решающими деревьями. Научный подход, основанный на технологии искусственного интеллекта Boosting, позволяет максимально снизить ошибку прогнозирования электропотребления в крупных энергетических компаниях. Авторами разработана новая, полезная и качественная регрессионная модель, адекватно описывающая экспериментальные данные по потреблению электроэнергии за каждый час суток. Выполнено тестирование разработанной регрессионной модели на реальных производственных данных энергетической компании. Проведенное исследование и полученные результаты позволяют авторам сделать вывод о том, что разработанная математическая модель методом машинного обучения LightGBM может быть использована энергосбытовыми компаниями для почасового планирования электропотребления при подаче заявок на оптовый рынок электроэнергии и мощности (ОРЭМ) на несколько дней вперед. Исследование было выполнено на языке программирования Python.

Ключевые слова: моделирование электропотребления, обработка данных, оценка качества моделей, математическая статистика, регрессионная модель, искусственный интеллект.

1. Введение

Актуальность выбранной темы для науки и практики обусловлена растущей потребностью в эффективном управлении энергоресурсами с учётом продолжающейся цифровой трансформации электроэнергетической отрасли Российской Федерации. Финансовые операции энергетических и производственных компаний зависят от их способности удовлетворять свои потребности в электроэнергии [19].

В современном мире, где энергетические ресурсы ограничены, планирование потребления электроэнергии играет важную роль в оптимизации работы энергетических систем и обеспечении устойчивого развития производственных предприятий. Поэтому корректное краткосрочное прогнозирование нагрузки имеет решающее значение для эффективного планирования и управления электроэнергетическими системами и ресурсами [22].

Краткосрочное прогнозирование электропотребления рассчитывается от нескольких часов до нескольких дней. Обычно компании прогнозируют ежедневное, почасовое потребление электроэнергии определенного региона или предприятия. Краткосрочные прогнозные оценки помогают электрогенерирующим компаниям страны в планировании необходимых объёмов генерации электроэнергии и диспетчеризации генерирующих установок [32].

Для решения вышеуказанной задачи краткосрочного прогнозирования электропотребления исследователи из Пакистана Momina Qureshi др. [25], а также из Южной Кореи Jaewon Chung и Beakcheol Jang [14] используют различные методы прогнозирования и анализа временных рядов: регрессионный анализ, искусственные нейронные сети (ИНС), алгоритмы машинного обучения, декомпозицию временных рядов, а также некоторые гибридные подходы, которые объединяют два или более методов для получения лучшей адекватности математических моделей, в том числе алгоритм LSTM. Среди традиционных методов множественная линейная регрессия широко использовалась исследователями для краткосрочного прогнозирования потребления электроэнергии путем выявления влияния экономических, демографических, климатических факторов для различных стран [26, 31].

Исследователи из Бразилии Mesquita Lopes Cabreira и др. в своей статье [24] описывают этапы методологии, теоретическое описание моделей временных рядов и иерархические подходы к прогнозированию энергетических процессов. Они предлагают использовать двухуровневую иерархию в промышленном секторе Бразилии, учитывая потребление электроэнергии по географическим регионам и штатам федерации, включая Федеральный округ. К обработанным данным подбираются классические математические модели временных рядов экспоненциального сглаживания и Бокса – Дженкинса, которые рассчитывают прогнозные значения. Исследователи из Южной Кореи Son N. и Shin Y. в своем исследовании [34] предлагают использовать алгоритм краткосрочного и среднесрочного прогнозирования потребления электроэнергии путем объединения модели

рекуррентной искусственной нейронной сети (управляемые рекуррентные блоки GRU), подходящей для долгосрочного прогнозирования, и аддитивной модели Prophet, подходящей для учёта сезонности и обработки событий.

В статье [21] авторы показывают и описывают результаты способности нескольких методов: ИНС, адаптивной нейронечёткой системы вывода (ANFIS), метода опорных векторов наименьших квадратов (LSSVM) и нечёткой модели временных рядов (FTS) прогнозировать потребление электроэнергии в разных странах с разным уровнем развития. Переменные, рассматриваемые в этом исследовании, включали ежемесячное потребление электроэнергии в семи странах: Норвегия, Швейцария, Малайзия, Египет, Алжир, Болгария и Кения.

Исследователи из Узбекистана Рахмонов И.У. и др. в статье [30] описывают математическую модель прогнозирования электропотребления, используя метод ARIMA, которая успешно справилась с задачей, показав относительную ошибку 6%.

Ученые из Турции в своём научном труде [36] предлагают использовать для решения задачи краткосрочного прогнозирования на производственных предприятиях один из самых мощных методов, который известен своей способностью изучать основные характеристики данных для моделей временных рядов – метод Prophet. В статье доказано, что без использования температуры критерии качества модели, такие как средняя абсолютная ошибка (MAE) и квадратный корень из среднеквадратической ошибки (RMSE), показали лучшие результаты, чем с температурой.

В статье [35] рассматривается гибридная модель для краткосрочного прогнозирования энергетической нагрузки на основе трансферного обучения, используя метод машинного обучения Light Gradient Boosting Machine (LightGBM) для интеллектуальных сетей в интеллектуальных энергетических системах, которая позволяет получить ошибку прогнозирования MAPE менее 3%.

В статье [17] предлагается использовать новый метод для среднесрочного прогнозирования потребления электроэнергии на основе Transformer-LightGBM. Метод предварительно обра-

батывает исходные данные рынка электроэнергетики, включая анализ пропущенных значений и выбросов, затем проводится корреляционный анализ, чтобы извлечь признаки с сильной связью со среднесрочными прогнозами потребления электроэнергии. Впоследствии нейронная сеть трансформатора изучает сложные закономерности в динамических временных рядах. Наконец, LightGBM используется для объединения характеристик электропотребления, на основании которых алгоритм рассчитывает прогнозы.

В настоящее время на большинстве производственных предприятий Российской Федерации применяются методы экспертных оценок, когда краткосрочное прогнозирование осуществляется сотрудником компании на основе использования простейших арифметических операций, что не может обеспечить высокую точность. Однако современные подходы к экономическому и техническому управлению и развитие информационных технологий предъявляют всё более жесткие требования к точности решения задач прогнозирования электропотребления [10]. Эффективным решением данной задачи является создание новой, полезной и качественной математической модели прогнозирования, адекватно описывающей экспериментальные данные о фактическом электропотреблении за каждый час суток.

В статье [8] описаны результаты исследования применения методов регрессионного множественного моделирования электропотребления на основе использования данных с переменной структурой. Разработанная авторами модель позволяет выявлять особенности технологического процесса, оценивать вклад различных факторов на показатели потребления электроэнергии и на этой основе формулировать более точные рекомендации по повышению энергоэффективности промышленного производства.

Статистических методов, использующихся в процессе разработки математической модели, известно большое количество, все они имеют свои достоинства и недостатки. Выбор статистического метода осуществляется под требования конкретного предприятия путём исследования эффективности его приме-

ния, используя данные изучаемого процесса в организации, в том числе в условиях неполноты информации [11]. Таким образом, правильный выбор статистического метода – важный этап в системном анализе данных и разработке математической (регрессионной) модели, адекватно описывающей экспериментальные данные. Непрерывное развитие информационных систем и средств вычислительной техники даёт возможность расширять круг используемых методов прогнозирования и совершенствовать их [3], например, метод скользящей матрицы [1], можно эффективно использовать для краткосрочного и оперативного прогнозирования электропотребления на основе малой выборки данных [6].

Экономически актуальность прогнозирования электропотребления для производственных и энергетических предприятий обосновывается следующим образом:

- деятельность энергосбытовых компаний, являющихся участниками оптового рынка электроэнергии, включает в себя покупку объёмов электроэнергии на этом рынке и реализацию ее розничным потребителям. При этом объёмы электроэнергии, закупаемые на оптовом рынке, должны быть равны составленным днём ранее (или более) прогнозам. В случае отклонения фактически потребленной электроэнергии от заявленной энергосбытовое предприятие вынуждено докупать объёмы электроэнергии или продавать излишне закупленные объёмы электроэнергии на балансирующем рынке по невыгодной для предприятия цене. При больших отклонениях на энергосбытовое предприятие могут быть наложены меры оперативного воздействия [9]. В итоге энергосбытовое предприятие, являющееся гарантирующим поставщиком, несёт финансовые потери и снижение экономических показателей;

- особенность деятельности крупных производственных предприятий горно-металлургического комплекса страны состоит в том, что ежегодно уменьшается количество богатых месторождений полезных ископаемых, следовательно, производственные работы проводятся на больших объёмах руды с увеличенным расходом электрической энергии в несколько раз. Поэтому затраты за электропотребление на производственных

предприятиях составляют до 30% от себестоимости выпускаемой продукции. Если в месяц крупные производственные предприятия оплачивают расход электроэнергии 350–500 млн руб. (в том числе затраты из-за некорректных прогнозных оценок при подаче заявок на ОРЭМ), то актуальность точного прогнозирования и экономии денежных средств достаточно высока.

В связи с вышеописанным энергосбытовым компаниям и крупным производственным предприятиям крайне важно рассчитывать корректные краткосрочные и оперативные прогнозныe оценки и работать на ОРЭМ, не переплачивая колоссальные суммы денежных средств при оплате расхода электроэнергии. Таким образом, возникает задача моделирования и прогнозирования электропотребления с наименьшей абсолютной и относительной ошибкой, результаты решения которой описываются авторами в данной статье.

Ученые проводят исследования, посвященные разработке математических моделей и методов для прогнозирования электропотребления в регионе с помощью различных методов: статистических, машинного обучения и их комбинаций. В качестве данных для решения задачи прогнозирования часто используются временные ряды.

Следует отметить, что при всем теоретическом многообразии и большом практическом опыте решения задач прогнозирования электропотребления универсальных прогнозных методов и моделей не существует, поскольку процессы потребления электроэнергии зависят от множества факторов и специфики производства каждого в отдельности предприятия [7].

2. Системный анализ данных электропотребления

2.1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

В качестве зависимой переменной были выбраны значения регионального потребления электроэнергии (Y) (МВт·ч.) за каждый час суток в период с 01.01.2019 г. до 29.06.2023 г. энерго-сбытовой компании ПАО «Россети Северный Кавказ» АО «Сев-кавказэнерго» находящейся в г. Владикавказе (Республика Се-

верная Осетия – Алания). Исходная выборка значений зависимой переменной Y состояла из 39 384 строк.

Структура экспериментальных данных электропотребления представлена на рис. 1. Данные загружаются в `Pandas.DataFrame`. `Pandas.DataFrame` – двумерная динамическая структура данных для потенциально гетерогенной табличной информации. Библиотека `Pandas` используется в широком спектре областей, таких как академические исследования, розничная торговля, финансы, экономика, статистика, аналитика, а также в электроэнергетике [29].

Электропотребление	
Дата и время	
2019-01-01 00:00:00	215.191
2019-01-01 01:00:00	202.239
2019-01-01 02:00:00	188.462
2019-01-01 03:00:00	179.276
2019-01-01 04:00:00	173.035
...	...
2023-06-29 19:00:00	176.542
2023-06-29 20:00:00	188.429
2023-06-29 21:00:00	183.351
2023-06-29 22:00:00	170.048
2023-06-29 23:00:00	152.483

39384 rows × 1 columns

Рис. 1. Загруженные данные из Excel

Рассчитаны основные описательные статистики для анализа значений зависимой переменной:

- количество наблюдений (N) = 39384 значения электропотребления за каждый час суток, кВт·ч.;
- выборочное среднее:

$$(1) \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = 184,464; \text{ кВт} \cdot \text{ч};$$

— стандартное отклонение:

$$(2) \quad sd_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = 43,164; \text{ кВт} \cdot \text{ч};$$

— минимальное значение электропотребления за час, кВт·ч.: $Y_{min} = 93,956 \text{ кВт} \cdot \text{ч};$

— максимальное значение электропотребления за час, кВт·ч.: $Y_{max} = 321,055 \text{ кВт} \cdot \text{ч};$

— первый квартиль (25-й перцентиль) = 156,352 кВт·ч.;

— второй квартиль (50-й перцентиль, или медиана) = 179,882 кВт·ч.;

— третий квартиль (75-й перцентиль) = 213,912 кВт·ч.

Продолжая проводить разведочный анализ данных, построим гистограмму (рис. 2).

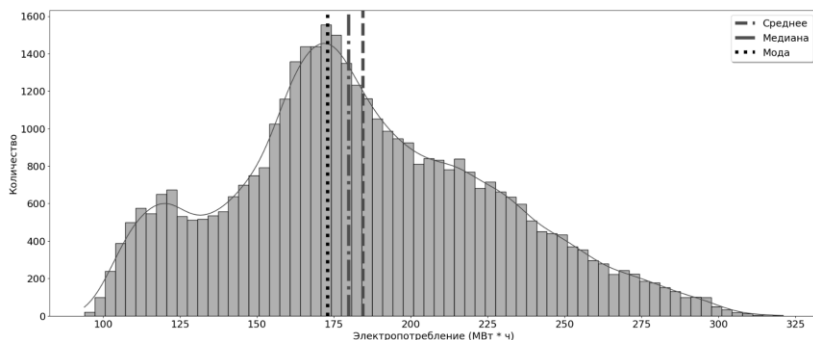


Рис. 2. Вероятностное распределение экспериментальных данных электропотребления за каждый час суток (весь период наблюдения)

По ней видно, что распределение отлично от нормального (нет симметрии относительно среднего; медиана не равна среднему значению и моде). Гипотеза о нормальности распределения на больших выборках (больше 5000 наблюдений) почти всегда отклоняется.

В том, что распределение отлично от нормального можно также убедиться, построив Q-Q plot (график Квантиль-Квантиль) (рис. 3).

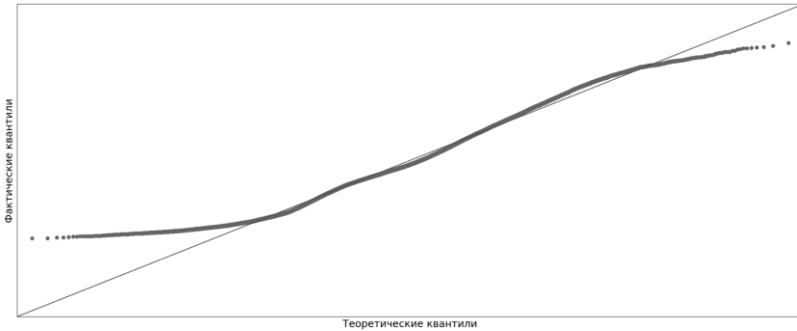


Рис. 3. График Квантиль-Квантиль

Q-Q plot — это вероятностный график для сравнения двух распределений вероятностей путем сопоставления их квантилей друг с другом [37]. Если два сравниваемых распределения подобны, точки на графике будут примерно лежать на тождественной линии $y = x$. В данном случае теоретические квантили — это значения из нормального распределения, а фактические — из распределения «Электропотребление». По графику на рис. 3 видно, что присутствуют сильные отклонения «на хвостах».

Был проведен анализ данных на аномальные значения с помощью графика Box Plot (рис. 4) [5]. По графику на рис. 4 видно, что некоторые наблюдения превышают верхнюю границу статистически значимой выборки (upper fence):

$$(3) \text{ upper_fence} = Q3 + 1,5 \cdot IQR,$$

где $Q3$ — третий квартиль; IQR — межквартильный размах ($Q3 - Q1$); $Q1$ — первый квартиль.

В результате проведённого системного анализа данных можно сделать вывод о том, что 0,218 % значений зависимой переменной являются аномальными. Эти аномальные значения приходятся на зимний период. Было решено их проигнорировать.

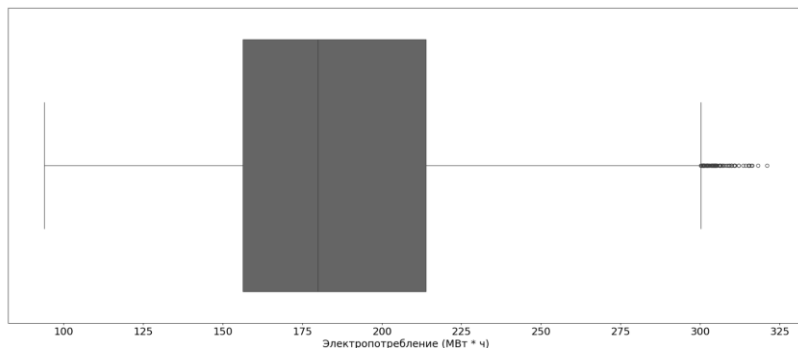


Рис. 4. График «Box plot»

Для того чтобы обнаружить тренд во временном ряде, строят скользящее среднее исследуемого процесса. Авторами было построено скользящее среднее электропотребления с окном в одну неделю (168 точек). Судя по графику на рис. 5, в ряде не выявлен ярко выраженный тренд.

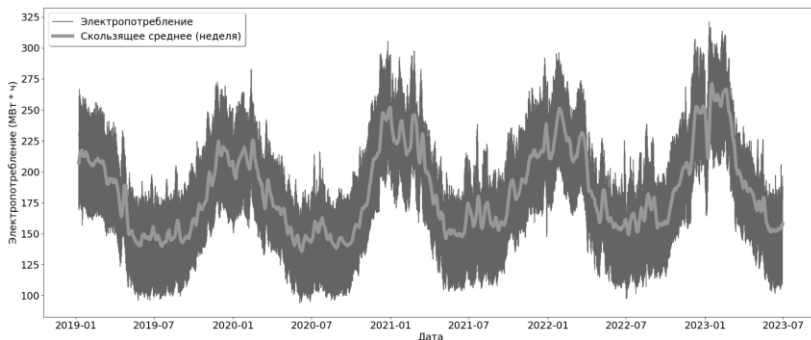


Рис. 5. Временной ряд со скользящим средним

Рис. 2 показывает, что исходное значение вероятности отличается от Гауссовского распределения. Поэтому для решения задачи прогнозирования электропотребления на каждый час следующих суток при разработке математической модели решено было использовать ансамблевый метод машинного обучения LightGBM, так как он позволяет моделировать нелинейные зависимости.

Также необходимо отметить, что с помощью алгоритма LightGBM можно моделировать и прогнозировать временные ряды, у которых отсутствует ярко выраженный тренд, что доказано выполненными расчётами и полученными результатами в ходе проведения данного исследования апробирования разработанной математической модели в энергетической компании ПАО «РОССЕТИ Северный Кавказ» в течение одного года (в период с июля 2022 по июнь 2023 гг.).

3. Процесс моделирования электропотребления

3.1. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ (ФАКТОРОВ) НА ПОТРЕБЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ ЗА КАЖДЫЙ ЧАС СУТОК

Проведено исследование влияния независимых переменных (X) на зависимую переменную (Y – потребление электроэнергии). В качестве факторов использовались значения, связанные со временем: «Период времени суток», «Час», «День недели», «Выходной», «День в году», «Месяц». Также, использовались лаги целевой переменной (предыдущие значения): «Электропотребление лаг 1 день», «Электропотребление лаг 7 дней». Итоговая матрица признаков X (независимых переменных X) будет принимать следующий вид (рис. 6.).

Проанализировать связь между количественными значениями независимых переменных X и целевой (зависимой) переменной Y (потребление электроэнергии) поможет матрица корреляции (рис. 7). Коэффициент линейной корреляции Пирсона рассчитан по формуле

$$(4) \quad r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Между лагами зависимой переменной и самой зависимой переменной ярко выражена сильная положительная корреляционная связь.

Дата и время	Электропотребление	час	Период времени суток	День недели	Выходной	Месяц	День в году	Электропотребление лаг 1 день	Электропотребление лаг 7 дней
2019-01-08 00:00:00	195.697	0	0	1	0	1	8	191.298	215.191
2019-01-08 01:00:00	184.357	1	0	1	0	1	8	179.960	202.239
2019-01-08 02:00:00	174.130	2	0	1	0	1	8	172.706	198.462
2019-01-08 03:00:00	170.228	3	0	1	0	1	8	169.160	179.276
2019-01-08 04:00:00	169.023	4	0	1	0	1	8	167.794	173.035
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2023-06-29 19:00:00	176.542	19	3	3	0	6	180	171.040	167.809
2023-06-29 20:00:00	188.429	20	3	3	0	6	180	183.232	177.173
2023-06-29 21:00:00	183.351	21	3	3	0	6	180	177.985	172.780
2023-06-29 22:00:00	170.048	22	3	3	0	6	180	164.705	158.533
2023-06-29 23:00:00	152.483	23	3	3	0	6	180	148.960	144.961

39216 rows × 9 columns

Рис 6. Матрица входных параметров

На рис. 7 показано, что коэффициент корреляции [4] между зависимой переменной, её дневным и недельным лагом равен 0,979 и 0,935 соответственно. Таким образом, доказана целесообразность использования лаговых переменных зависимой переменной Y_{t-24} и $Y_{t-24 \cdot 7}$, где t – время (час суток).

	Электропотребление	Электропотребление лаг 1 день	Электропотребление лаг 7 дней
Электропотребление	1.000	0.979	0.935
Электропотребление лаг 1 день	0.979	1.000	0.934
Электропотребление лаг 7 дней	0.935	0.934	1.000

Рис. 7. Матрица корреляции

Для анализа категориальных переменных были построены диаграммы Box plot (рис. 8–10), на которых графически отображена зависимость электропотребления от часа суток, от периода времени суток и от месяцев в году.

По графику на рис. 8 можно заметить, что есть определенная зависимость потребления электроэнергии от часа суток. Расход электроэнергии уменьшается в ночные часы и начинает увеличиваться с 5:00 утра. С 11:00 потребление электроэнергии немного уменьшается до 15:00. С 16:00 мы видим увеличение расхода электроэнергии до 18–19:00. Это поведение потребления электроэнергии доказывает необходимость включения независимой переменной «Час» в математическую модель.

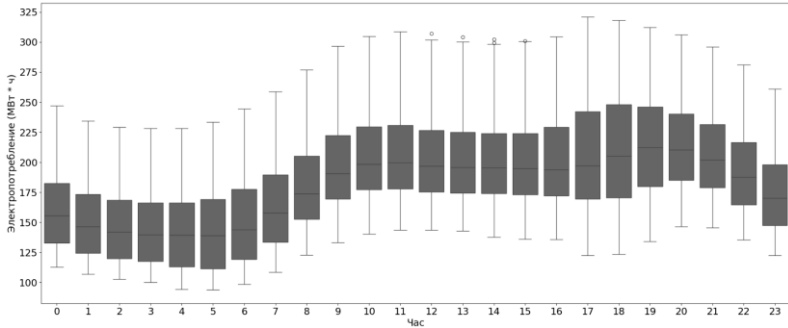


Рис. 8. Диаграмма Box plot, описывающая зависимость электропотребления от часа суток

Из рис. 9 заметно, что потребление электроэнергии увеличивается ближе к вечеру и уменьшается в ночной период суток.

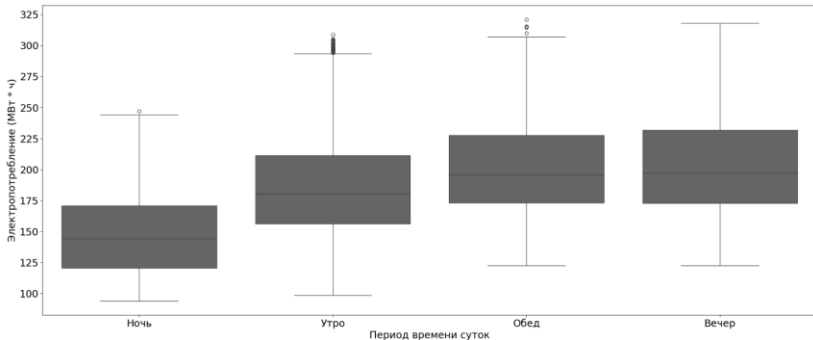


Рис. 9. Диаграмма Box plot описывающая зависимость электропотребления от периода времени суток

Рис. 10 показывает, что потребление электроэнергии уменьшается летом и увеличивается к зиме, что обосновывает включение независимой переменной «Месяц» в математическую модель для прогнозирования.

Графики на рис. 8–10 доказывают необходимость учёта значений вышеуказанных факторов при прогнозировании поведения потребления электроэнергии методами машинного обучения.

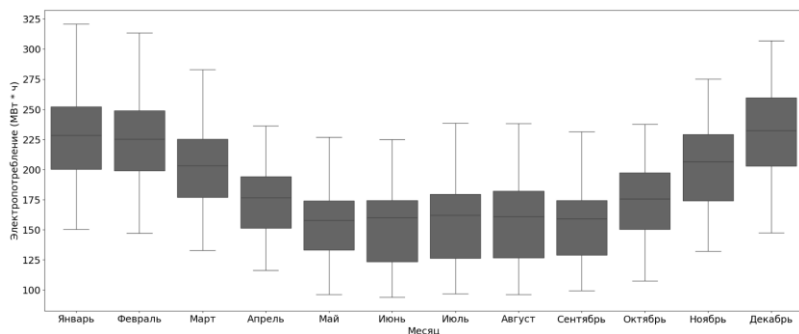


Рис. 10. Диаграмма Box plot описывающая зависимость электропотребления от месяца

3.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МЕТОДОЛОГИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОПОТРЕБЛЕНИЯ

Алгоритм LightGBM представляет собой разработанную Microsoft библиотеку для обучения модели градиентного бустинга. LightGBM обладает многими преимуществами, включая разреженную оптимизацию, параллельное обучение, регуляризацию. LightGBM не наращивает дерево по уровням – строка за строкой – так, как это делают большинство других реализаций [33]. Вместо этого он добавляет листья деревьям. Алгоритм выбирает лист, который, по его мнению, приведет к наибольшему снижению значения функции потерь [18]. Кроме того, LightGBM не использует популярный алгоритм обучения деревьев решений на основе сортировки, который ищет наилучшую точку разделения на отсортированных значениях признаков, как это делает, например, XGBoost. Вместо этого LightGBM реализует оптимизированный алгоритм обучения дерева решений на основе гистограмм, который дает большие преимущества как в эффективности, так и в потреблении памяти.

Математическая модель градиентного бустинга для прогнозирования потребления электроэнергии на каждый час суток (5) была построена путём последовательного добавления деревьев решений, каждое из которых корректирует ошибки предыдущих деревьев.

Пусть $F(x)$ – целевая функция процесса потребления электроэнергии на каждый час следующих суток, представляющая прогноз разработанной математической модели. На t -м шаге обучения математическая модель прибавляет новое дерево $h_t(x)$, которое минимизирует ошибку моделирования электропотребления на текущем этапе. Формула математической модели для прогнозирования электропотребления на каждый час следующих суток имеет вид

$$(5) \quad F_t(x) = F_{t-1}(x) + \eta \cdot h_t(x),$$

где η – коэффициент обучения, регулирующий скорость изменения модели.

Алгоритм метода машинного обучения LightGBM использует функцию потерь $L(y, F(x))$, например, среднеквадратическую ошибку для задач регрессии, которая представлена в формуле

$$(6) \quad L(y, F(x)) = \frac{1}{2} (y - F(x))^2.$$

Цель данного этапа исследования заключалась в поиске таких значений модели (5), которые бы минимизировали функции потерь на каждом этапе:

$$(7) \quad \arg \min_h \sum_{i=1}^N L(y_i, F_{t-1}(x_i) + h(x_i))^2.$$

Однако вместо прямого минимизирования функции потерь при прогнозировании электропотребления на каждый час суток метод машинного обучения LightGBM использует градиентный спуск. На t -м шаге алгоритм строит дерево, обученное на остатках (невязках), которые являются антиградиентом функции потерь:

$$(8) \quad g_i = \frac{\partial L(y_i, F_{t-1}(x_i))}{\partial F(x_i)},$$

где g_i – значение градиента для i -го объекта (значения независимых и зависимой переменных).

На этапе моделирования электропотребления мы использовали две техники метода LightGBM для повышения его эффективности:

– Gradient-Based One-Side Sampling (GOSS): отбор объектов (значений переменных модели) на основе значений их градиентов. Эта техника выбирает данные независимых и зависимых переменных с большими градиентами, что позволяет уменьшить размер исходной выборки (39 384 строк) и ускорить обучение без потери точности моделирования электропотребления;

– Exclusive Feature Bundling (EFB): объединение характеристик, которые редко принимают ненулевые значения одновременно. Это уменьшает размерность данных независимых и зависимой переменной и улучшает эффективность алгоритма.

Эти методы и другие особенности реализации метода, такие как разреженное представление данных и метод обучения на основе гистограмм, делают LightGBM оптимальным для задач, требующих работы с большими объёмами данных, такими как прогнозирование потребления электроэнергии на каждый час суток, а также нелинейными зависимостями процесса потребления электроэнергии с найденными факторами, описанными выше в данном исследовании [18].

Эти методы позволяют алгоритму снижать вычислительную сложность и потребление памяти, при этом сохраняя высокую точность. Далее приведен математический аппарат, описывающий каждый из методов.

GOSS фокусируется на уменьшении выборки исходных данных о потреблении электроэнергии за каждый час суток за предыдущие (3,5 года), не теряя при этом важной смысловой информации. Идея GOSS состоит в том, что объекты (значения переменных модели) с высокими значениями градиентов оказывают большее влияние на ошибку модели. Таким образом, GOSS сохраняет все объекты с высокими значениями градиентов и применяет случайную выборку к объектам низкими значениями градиентов. Это позволяет уменьшить общий размер выборки, ускоряя обучение модели.

Пусть g_i – градиент для i -го объекта; a – доля объектов с высокими значениями градиентов, которые сохраняются; b – доля объектов с низкими значениями градиентов, которые выбираются случайно. Тогда алгоритм функционирует следующим образом:

Шаг 1. Сортировка градиентов. Сначала объекты сортируются по абсолютному значению градиента $|g_i|$.

Шаг 2. Отбор экземпляров (определённых выборок):

- сохраняются верхние a 100% объектов по абсолютным значениям $|g_i|$.

- случайным образом выбирается $b \cdot 100\%$ из оставшихся объектов с низкими значениями градиентов.

Шаг 3. Компенсация пропорций. Для компенсации уменьшения количества данных объекты с малыми значениями градиентов масштабируются множителем $1 - a/b$ при вычислении функции потерь, чтобы уравновесить вклад различных групп данных.

Таким образом, целевая функция метода GOSS принимает вид

$$(9) \quad L = \sum_{i \in \text{high_grad}} g_i^2 + \frac{1-a}{b} \cdot \sum_{j \in \text{low_grad}} g_j^2.$$

где `high_grad` и `low_grad` обозначают соответственно подмножества данных с высокими и низкими значениями градиентов.

Считаем необходимым отметить, что GOSS — это метод, использующий тот факт, что в Gradient Boosted Decision Tree (GBDT) нет собственного веса экземпляра данных. Поскольку экземпляры данных с гетерогенными градиентами играют разную роль в вычислении *information gain*, или «приросте информации» (в теоретико-информационном подходе является важным критерием в машинном обучении моделей, используется для количественной оценки релевантности и зависимости независимых переменных от зависимой переменной, синоним «расхождения Куллбэка – Лейблера»), экземпляры с большими градиентами будут вносить более значимый вклад в значение этого критерия. Таким образом, чтобы сохранить точность информации, GOSS накапливает экземпляры с большими градиентами и случайным образом удаляет экземпляры с малыми градиентами. Чтобы компенсировать влияние на распределение данных, при вычислении *information gain* GOSS вводит постоянный множитель для экземпляров данных с малыми градиентами. В частности, GOSS сначала сортирует эти экземпляры в соот-

ветствии с абсолютным значением их градиентов и выбирает верхние экземпляры $a \cdot 100\%$. Затем случайным образом выбирает $b \cdot 100\%$ экземпляров из остальных данных. После этого GOSS увеличивает выборочные данные с малыми градиентами на константу $(1 - a)/b$ при расчете значений information gain. Поступая так, уделяется больше внимания недостаточно обученным экземплярам без существенного изменения исходного распределения данных.

В результате проведенных расчетов можно сделать вывод о том, что метод GOSS позволил нам ускорить обучение за счет сокращения экспериментальных данных о потреблении электроэнергии и при этом сохранил точность оценки градиентов.

Второй метод – EFB – решает проблему высокой размерности данных о потреблении электроэнергии, объединяя взаимно-исключающие признаки в одну группу, что позволяет сократить общее количество признаков (факторов, независимых переменных), не теряя информации. Далее представлен алгоритм работы.

Шаг 1. Определение взаимной исключительности.

Два признака считаются взаимно-исключающими, если они редко одновременно принимают ненулевые значения в выборке. Например, если x_i и x_j – признаки и вероятность того, что $x_i \neq 0$ и $x_j \neq 0$ одновременно, очень мала, они могут быть объединены в один признак.

Шаг 2. Построение набора эксклюзивных признаков:

- все признаки разбиваются на несколько «пакетов», или «наборов», каждый из которых содержит только взаимно-исключающие признаки;

- если m – исходное число признаков, то после применения EFB количество новых признаков m' будет существенно меньше m , что снижает размерность.

Шаг 3. Объединение признаков.

Пусть B_k – объединённый набор признаков, который состоит из признаков, удовлетворяющих условию взаимной исключительности. Тогда новый признак f_{B_k} вычисляется для каждого набора B_k как

$$(10) f_{B_k} = \sum_{i \in B_k} x_i,$$

где x_i – исходные признаки (факторы).

EFB – это практически безубыточный метод сокращения количества значимых факторов. В разреженном признаковом пространстве многие признаки почти исключительные. Это означает, что они редко одновременно принимают ненулевые значения. Факторы, которые закодированы с помощью метода One-hot encoding, – наглядный пример исключительных признаков. EFB объединяет эти признаки, уменьшая размерность для того чтобы повысить эффективность алгоритма, сохраняя при этом высокий уровень точности. Набор таких независимых переменных, объединённых в один признак, называется *exclusive feature bundle*, или набор эксклюзивных факторов.

В результате проведенного этапа данного исследования можно сделать вывод о том, что метод EFB сократил размерность признакового пространства, что снизило вычислительную нагрузку и потребление памяти.

3.3. ПОДБОР ГИПЕРПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Алгоритм LightGBM объединяет два вышеописанных метода при анализе значимости независимых переменных и повышают эффективность математической модели, обеспечивая множество преимуществ по сравнению с другими моделями градиентного бустинга [16].

Однако решающее значение в применении модели LightGBM имеет проведенное исследование по выявлению факторов, влияющих на электропотребление и установление (настройка) оптимальных значений гиперпараметров, чтобы математическая модель не переобучилась, а также не показала слабую адекватность имеющимся экспериментальным данным по потреблению электроэнергии на каждый час следующих суток. Авторы Khanh-Toan Nguyen, Thanh-Ngoc Tran, Huy-Tuan Nguyen в своей статье [20] привели достаточно доказательств в пользу того, что использование гиперпараметров по умолчанию приводит к повышению ошибок прогнозирования.

В данном исследовании при построении математических моделей (5) для временных рядов при решении задачи моделирования и прогнозирования электропотребления на каждый час суток для энергосбытовых компаний мы учитывали временную зависимость данных и для этого применили метод кросс-валидации на скользящем окне (TimeSeriesSplit) в сочетании с настройкой гиперпараметров с помощью GridSearchCV, что обеспечило нам выбор оптимальных параметров математической модели (1) при учёте временных взаимосвязей [13].

В данном исследовании с помощью настройки GridSearchCV мы выполнили систематический перебор комбинаций гиперпараметров для модели и нашли такие значения, которые минимизировали ошибку моделирования электропотребления.

Пусть у нас есть модель с параметрами

$$(11) \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k),$$

каждый из которых может принимать значения из множества V_i . Пространство поиска для этих параметров составляет декартово произведение

$$(12) V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k.$$

С помощью метода GridSearchCV мы последовательно оценили математическую модель на каждом элементе множества V , что позволило выбрать оптимальные параметры θ^* , минимизирующие метрику ошибки на валидационных данных:

$$(13) \theta^* = \arg \min_{\theta \in V} \text{Ошибка}(\theta).$$

С помощью метода TimeSeriesSplit мы адаптировали кросс-валидацию для временных рядов значений электропотребления, где данные делятся на обучающую и валидационную выборки, соблюдая порядок времени и избегая утраты взаимосвязей. На каждом разбиении обучающая выборка расширялась, добавляя более ранние временные периоды, и проверка производилась на следующих временных периодах. Для n разбиений с помощью метода TimeSeriesSplit подвыборки были организованы следующим образом:

$$(14) \text{Train_1} = [1, 2, \dots, k], \quad \text{Test_1} = [k + 1, \dots, k + m],$$

$$\text{Train_2} = [1, 2, \dots, k + m], \quad \text{Test_2} = [k + m + 1, \dots, k + 2m]$$

и т.д., где k – размер обучающей выборки, m – размер тестовой выборки [13].

Таким образом, на каждом шаге сохраняется структура временного ряда со значениями потребления электроэнергии за каждый час суток.

Предположим, что пространство поиска состоит только из двух гиперпараметров, один из которых значим, а другой – нет. Мы хотим настроить их так, чтобы повысить точность модели. Если каждый из них имеет 3 разных значения, то всё пространство поиска имеет 9 возможных вариантов. Можно попробовать каждый из них, чтобы найти оптимальное значение для обоих гиперпараметров. Этот подход и называется Grid Search.

Проблема с кросс-валидацией на временных рядах состоит в том, что он имеет временную структуру и случайно перемешивать значения всего ряда без сохранения этой структуры нельзя, иначе в процессе потеряются все взаимосвязи наблюдений друг с другом. Для этого необходимо использовать метод под названием TimeSeriesSplit. Суть метода заключается в следующем: начиная с некоторой подвыборки обучающих данных выдаются прогнозные значения на следующий временной период (test_size) с определенным сдвигом (gap) и оценивается их качество. Затем тот период, на который был выдан прогноз (т.е. значения независимых и зависимой переменной), добавляется в исходную подвыборку данных. Далее выдается прогноз на следующий определенный временной период (test_size) и так повторяется 5 раз (n_splits) (рис. 11).

Авторами минимизировалось значение MAE, а для метода TimeSeriesSplit были установлены следующие аргументы: test_size (размер тестовой выборки) = 2160, n_splits (количество разбиений) = 5, gap (сдвиг по времени для оценки) = 120. Были подобраны $n_estimators$ (количество решающих деревьев) и max_depth (их глубина). Оптимальными параметрами оказались $n_estimators = 70$, $\text{max_depth} = 6$.

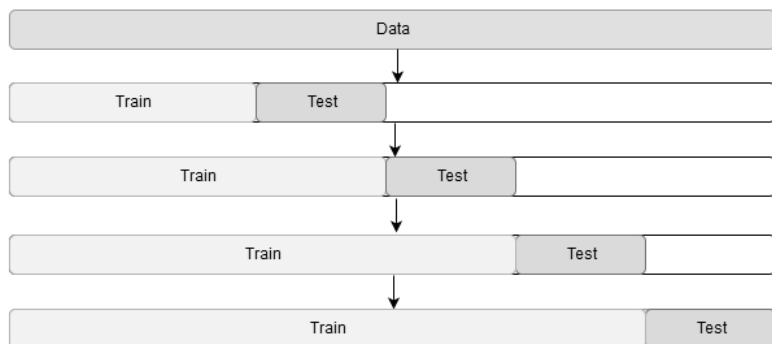


Рис. 11. Принцип метода *TimeSeriesSplit*

Необходимо отметить, что в качестве преимуществ методов *TimeSeriesSplit* и *GridSearchCV* при решении задачи моделирования электропотребления было выявлено, что сочетание алгоритмов *TimeSeriesSplit* и *GridSearchCV* минимизировало одну из важнейших проблем машинного обучения – «проблему утечки» (ситуация в моделировании, когда на этапе построения модели используются значения независимых переменных, недоступные при расчете прогнозной оценки) и обеспечило корректную валидацию временных рядов электропотребления, где текущие данные не должны использовать будущие данные для обучения математической модели (1). Сделанный нами вывод подтверждается проведенным экспериментом, тестированием на реальных данных в компании ПАО «Россети Северный Кавказ» в период с 2022 по 2023 гг. и полученными научно-обоснованными результатами моделирования электропотребления, адекватно описывающими производственные данные.

3.3. ОЦЕНКА ЗНАЧИМОСТИ ФАКТОРОВ

После того как была разработана математическая модель, необходимо оценить значимость факторов. Для этого можно построить столбчатую диаграмму критерия прироста информации (*Information Gain*) для каждого фактора (рис. 12). В машинном обучении прирост информации – это количество информа-

ции, полученной о случайной величине в результате наблюдения другой случайной величины [27]:

$$(15) \quad IG(S, a) = H(S) + H(S | a),$$

где $IG(S, a)$ – прирост информации для набора данных S ; $H(S)$ – информационная энтропия набора данных S до разбиения; $H(S|a)$ – это условная информационная энтропия набора данных S с разбиением a :

$$(16) \quad H(S | a) = \sum_v \frac{S_a(v)}{S} \cdot H(S_a(v)),$$

где $S_a(v)/s$ – отношение количества примеров в наборе данных с переменной a , имеющей значение v , и $H(S_a(v))$ – это информационная энтропия группы образцов, где переменная a имеет значение v . Информационным критерием качества для задачи регрессии является MSE .



Рис. 12. Столбчатая диаграмма Information gain

Как видно из графика на рис. 12, по имеющимся данным, оказалось, что большей значимостью из всех факторов обладают лаговые переменные.

3.3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАЗРАБОТАННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПО РАЗЛИЧНЫМ МЕТОДАМ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Необходимо отметить, что в ходе исследования был проведён анализ различных методов машинного обучения: CatBoost [23], Huber Regressor [28], Random Forest [12], Linear Regression [15], LightGBM. Результаты оценки качества моделей по крите-

риям $RMSE$ (корень из среднеквадратичной ошибки), MAE (средняя абсолютная ошибка), $MAPE$ (средняя абсолютная процентная ошибка), $R^2_{adjusted}$ (скорректированный коэффициент детерминации) и представлены в таблицах 1–5.

Таблица 1. Результаты оценки качества модели CatBoost

	Train	Validation	Test
$RMSE$	4,594	8,607	8,821
MAE	3,287	6,737	6,811
$MAPE$ (%)	1,805	3,853	3,510
$R^2_{adjusted}$	0,988	0,925	0,965

Таблица 2. Результаты оценки качества модели Huber Regression

	Train	Validation	Test
$RMSE$	8,126	9,689	8,993
MAE	5,797	7,253	6,420
$MAPE$ (%)	3,189	3,960	3,230
$R^2_{adjusted}$	0,961	0,908	0,964

Таблица 3. Результаты оценки качества модели Random Forest

	Train	Validation	Test
$RMSE$	2,742	7,656	8,439
MAE	1,938	5,497	5,897
$MAPE$ (%)	1,078	2,989	2,903
$R^2_{adjusted}$	0,996	0,941	0,968

Таблица 4. Результаты оценки качества Linear Regression

	Train	Validation	Test
$RMSE$	8,099	8,569	9,011
MAE	5,923	6,227	6,525
$MAPE$ (%)	3,288	3,405	3,290
$R^2_{adjusted}$	0,962	0,927	0,964

Таблица 5. Результаты оценки качества модели LightGBM

	Train	Validation	Test
$RMSE$	6,180	7,490	8,172
MAE	4,493	5,328	5,777
$MAPE$ (%)	2,490	2,893	2,847
$R^2_{adjusted}$	0,978	0,944	0,970

Для наглядного представления информации о точности модели были построены графики. Самый простой график – линейный. На нём необходимо отразить фактические и прогнозные значения. Проблема состоит в отображении больших объёмов данных: они будут иметь нерепрезентативный вид. На рис. 13 отображены первые 720 фактических и прогнозных значений на тестовой выборке.

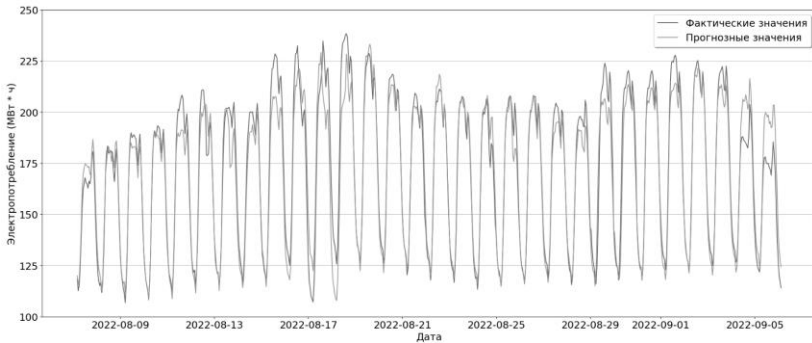


Рис. 13. График фактических и прогнозных значений

Для отображения всех точек проще воспользоваться диаграммой рассеяния. Диаграмма рассеяния изображает значения двух переменных в виде точек на декартовой плоскости. На диаграмме рассеяния каждому наблюдению соответствует точка, координаты которой равны значениям каких-либо двух параметров этого наблюдения. Диаграммы рассеяния используются для демонстрации наличия или отсутствия корреляции между двумя переменными [2].

На рис. 14 представлена диаграмма рассеяния фактических и прогнозных значений электропотребления. В заголовке графика также отражён коэффициент корреляции между ними, он равен 0,986.

Данный график демонстрирует отличную точность прогнозирования с помощью алгоритма LightGBM.

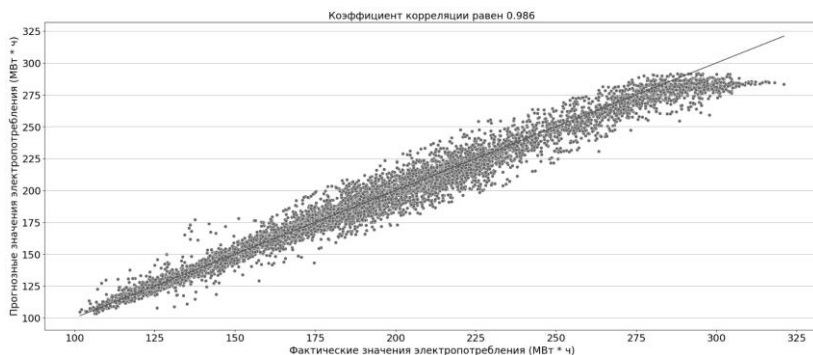


Рис. 14. Диаграмма рассеяния фактических и прогнозных значений электропотребления

Проведена практическая апробация разработанной новой, полезной и качественной математической модели на данных одной из ведущих энергетических компаний Российской Федерации ПАО «Россети Северный Кавказ». При моделировании и прогнозировании потребления электроэнергии на каждый час суток в течение 24 дней получены следующие результаты:

- средняя абсолютная ошибка прогнозирования электропотребления на каждый час следующих (первых) суток составила 3,120%;
- средняя абсолютная ошибка прогнозирования электропотребления на каждый час вторых суток составила 3,70%;
- средняя абсолютная ошибка прогнозирования электропотребления на каждый час третьих суток составила 4%.
- средняя абсолютная ошибка прогнозирования электропотребления за три дня составила 3,606 %.

3.3. АНАЛИЗ ОСТАТКОВ РАЗРАБОТАННОЙ МОДЕЛИ

Важным этапом оценки разработанной регрессионной модели является анализ её остатков. Модель должна одинаково хорошо прогнозировать как большие значения целевой переменной, так и малые. Недопустимы также большие отклонения по абсолютной величине. Гистограм-

ма должна быть симметрична относительно нуля. Медиана, мода и среднее должно стремиться к нулю. На рис. 15 представлена гистограмма распределения остатков модели. Из рис. 16 видно, что отклонения не превышают границ $0 \pm 1\sigma$.

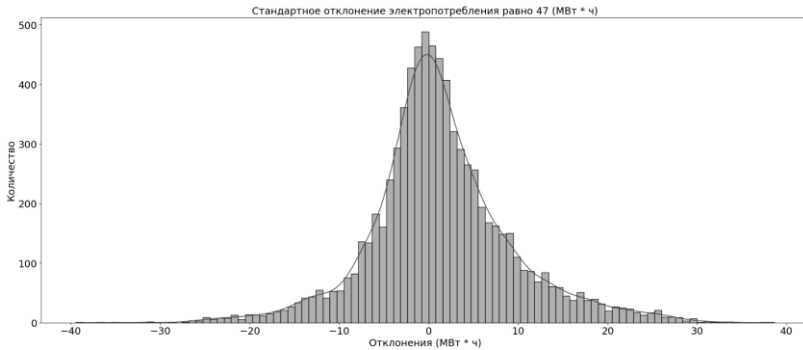


Рис. 15. Гистограмма распределения остатков

При анализе диаграммы отклонений Box Plot, представленной на рис. 16, было выявлено, что 6,719% остатков выходят за границы:

Lower fence:

$$Q1 - (1,5 \cdot IQR) = -2,799 - (1,5 \cdot 7,893) = -14,638 \text{ (МВт} \cdot \text{ч)};$$

Upper fence:

$$Q3 + (1,5 \cdot IQR) = 5,097 + (1,5 \cdot 7,893) = 16,936 \text{ (МВт} \cdot \text{ч)},$$

где Lower fence – нижняя граница статистически значимой выборки данных; Upper fence – верхняя граница статистически значимой выборки данных; $Q1$ – первый квартиль; $Q3$ – третий квартиль; IQR – межквартильный размах.

Также были рассчитаны максимальная положительная ошибка и максимальная отрицательная ошибка прогнозирования:

$$\text{Максимальная положительная ошибка} = 39,296 \text{ (МВт} \cdot \text{ч)};$$

$$\text{Максимальная отрицательная ошибка} = -39,733 \text{ (МВт} \cdot \text{ч)}.$$

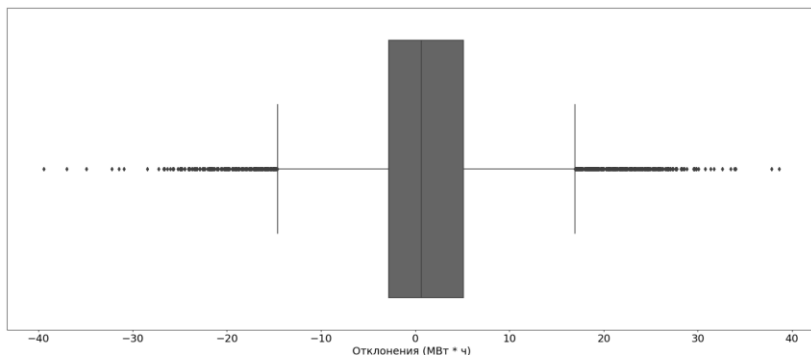


Рис. 16. Диаграмма отклонений BOX PLOT

4. Выводы и рекомендации

В результате проведенного экспериментального исследования была разработана новая, полезная, адекватная и качественная регрессионная модель для системы поддержки принятия решений при прогнозировании поведения электропотребления в энергетической компании. Исследование показало, что применение разработанной модели позволяет улучшить точность прогнозов, оптимизировать распределение ресурсов и повысить эффективность управления энергетическими процессами и ресурсами в большой электроэнергетической системе Российской Федерации.

Системный анализ результатов показал, что разработанная математическая модель способствует снижению издержек компании за счет оптимального использования электроэнергии и предотвращения возможных простоев или перерасхода ресурсов. Это обеспечивает более стабильную и надежную работу энергетических систем, снижает риски финансовых потерь и способствует экономической эффективности энергетических и производственных предприятий.

Полученные результаты исследовательской работы могут быть использованы для улучшения оперативного управления и планирования энергопотреблением, что снизит издержки компаний и повысит их конкурентоспособность на энергетическом

рынке. Для производственных предприятий корректное прогнозирование помогает точнее планировать производственные мощности и оптимально распределять ресурсы. Для энергетических компаний – обеспечивать стабильность, эффективность и устойчивость работы энергосистемы, а также экономически выгодное энергоснабжение в регионе.

С помощью технологии искусственного интеллекта Boosting разработана математическая модель LightGBM, которая позволяет определенной энергетической компании моделировать и прогнозировать поведение потребления электроэнергии со средней абсолютной ошибкой за три дня 3,606% (МВт·ч.).

Литература

1. АЛКАЦЕВ М.И., ДЗГОЕВ А.Э., БЕТРОЗОВ М.С. *Исследование и разработка метода прогнозирования потребления электроэнергии в системе управления электроснабжением региона* // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. – 2012. – № 5-6. – С. 30–37.
2. БЛАГОВЕЩЕНСКИЙ Ю. *Тайны корреляционных связей в статистике*. – М.: Научная Книга, Инфра-М, 2009. – 158 с.
3. ВАЛЬ П.В., ПОПОВ Ю.П. *Концепция разработки системы прогнозирования электропотребления промышленного предприятия в условиях оптового рынка* // Промышленная энергетика. 2011. – №10. – С. 31-35.
4. ГМУРМАН В. *Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов*. – М.: Высшая школа, 2004. – 479 с.
5. ГРЕШИЛОВ А.А., СТАКУН В.А., СТАКУН А.А. *Математические методы построения прогнозов*. – М.: Радио и связь, 1997. – 112 с.
6. ДЗГОЕВ А.Э. *Методы обработки и анализа данных для разработки предиктивных моделей : учебное пособие*. – М.: РТУ МИРЭА, 2024. – 147 с. // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/420860> (дата обращения: 15.10.2024).

7. КАРПЕНКО С.М., КАРПЕНКО Н.В., БЕЗГИНОВ Г.Ю. *Прогнозирование электропотребления на горнопромышленных предприятиях с использованием статистических методов* // Горная промышленность. – 2022. – №1. – С. 82–88.
8. КАРПЕНКО С.М., КАРПЕНКО Н.В., САХАРОВ В.Е. *Моделирование электропотребления на основе данных с переменной структурой* // Энергобезопасность и энергосбережение. – 2021. – №1. – С. 13–17.
9. КУРБАНГАЛИЕВ У.К., ЛИСИЦИН Н.В. *Требования к коммерческому учёту электрической энергии и мощности в условиях оптового рынка* // Энергетик. – №1. – 1996. – С. 2–4.
10. МАТЮНИНА Ю.В., МАКАРЕНКО И.Г. *Работа потребителей на рынках электроэнергии: учебное пособие*. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008. – 64 с.
11. МОРГОЕВ И.Д., ДЗГОЕВ А.Э., КЛЮЕВ Р.В. и др. *Прогнозирование потребления электроэнергии предприятиями народнохозяйственного комплекса в условиях неполноты информации* // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2022. – №3(107). – С. 9–20.
12. BERGMEIR C., BENÍTEZ J. M. *On the use of cross-validation for time series predictor evaluation* // Information Sciences. – 2012. – Vol. 191. – P. 192–213. – DOI: 10.1016/j.ins.2011.12.028.
13. BREIMAN L. *Random Forests* // Machine Learning. – 2001. – Vol. 45(1). – P. 5–32.
14. CHUNG J., JANG B. *Accurate prediction of electricity consumption using a hybrid CNN-LSTM model based on multivariable data* // PLoS ONE. – 2022. – Vol. 17(11). – P. e0278071. – DOI: 10.1371/journal.pone.0278071.
15. DALAL S., LILHORE DR U.K., SETH B. et al. *A Hybrid Model for Short-Term Energy Load Prediction Based on Transfer Learning with LightGBM for Smart Grids in Smart Energy Systems* // Journal of Urban Technology. – 2024. – DOI: 10.1080/10630732.2024.2380639.
16. FILIPOVA-PETRAKIEVA S.K., DOCHEV V. *Short-Term Forecasting of Hourly Electricity Power Demand: Regresion and Cluster Methods for Short-Term Prognosis* // Engineering,

- Technology & Applied Science Research. – 2022. – Vol. 12, No. 2. – P. 8374–8381. – DOI: 10.48084/etasr.4787.
17. FREEDMAN D.A. *Statistical Models: Theory and Practice*. – Cambridge University Press, 2009. – P. 26.
18. GUANG YANG, SONGHUAI DU, QINGLING DUAN et al. *A Novel Data-Driven Method for Medium-Term Power Consumption Forecasting Based on Transformer-LightGBM* // Mobile Information Systems. – 2022. – P. 1–16. – DOI: 10.1155/2022/5465322.
19. GUPTA P., BAGCH A. *Introduction to Pandas* // In: Essentials of Python for Artificial Intelligence and Machine Learning. – December 2023. – DOI: 10.1007/978-3-031-43725-0_5.
20. HUBER P.J., RONCHETTI E.M. *Robust Statistics*. – John Wiley & Sons, Inc., Hoboken. – 354 p. – DOI: 0.1002/9780470434697.
21. IFTIKHAR H., ZYWIOLEK J., LÓPEZ-GONZALES J.L. et al. *Electricity consumption forecasting using a novel homogeneous and heterogeneous ensemble learning* // Front. Energy Res. – 2024. – Vol. 12. – 1442502. – DOI: 10.3389/fenrg.2024.1442502.
22. KE GUOLIN, MENG QI, FINLEY T. et al. «*LightGBM: A Highly Efficient Gradient Boosting Decision Tree*» // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2017. – Vol. 30.
23. KHANH-TOAN NGUYEN, THANH-NGOC TRAN, HUY-TUAN NGUYEN *Research on the Influence of Hyperparameters on the LightGBM Model in Load Forecasting* // Engineering, Technology & Applied Science Research. – 2024. – Vol. 14, No. 5. – P. 17005–17010.
24. LEE M.H.L., SER Y.C., SELVACHANDRAN G. et al. *A Comparative Study of Forecasting Electricity Consumption Using Machine Learning Models* // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. – P. 1329. – DOI: 10.3390/math10081329.
25. LIN Y., LUO H., WANG D. et al. *An ensemble model based on machine learning methods and data preprocessing for short-term electric load forecasting* // Energies. – 2017. – Vol. 10. – P. 1186.

26. MAHANTA N., TALUKDAR R. *Forecasting of Electricity Consumption by Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average Model in Assam* // India Int. Journal of Energy Economics and Policy. – 2024. – Vol. 14(5). – P. 393–400.
27. MESQUITA LOPES CABREIRA M., LEITE COELHO DA SILVA F., DA SILVA CORDEIRO J. et al. *A Hybrid Approach for Hierarchical Forecasting of Industrial Electricity Consumption in Brazil* // Energies. – 2024. – Vol. 17. – P. 3200. – DOI: 10.3390/en17133200.
28. NOWOZIN S. *Improved information gain estimates for decision tree induction* // arXiv preprint. – arXiv:1206.4620. – 2012.
29. PROKHORENKOVA L., GUSEV G., VOROBEV A. et al. *Catboost: unbiased boosting with categorical features* // In: Advances in Neural Information Processing Systems. – 2018. – P. 6639–6649.
30. QURESHI M., ARBAB M.A., REHMAN S.U. *Deep learning-based forecasting of electricity consumption* // Scientific Reports. – 2024. – Vol. 14. – P. 6489. – DOI: 10.1038/s41598-024-56602-4.
31. RAKHMONOV I.U., NIYOZOV N.N., KURBONOV N.N. et al. *Forecasting of electricity consumption by industrial enterprises with a continuous nature of production* // E3S Web of Conferences. – 2023. – Vol. 384. – P. 01030. – DOI: 10.1051/e3sconf/202338401030.
32. SHAH I., ARSHAD I., SAJID A. *Statistical Techniques for Modelling and Forecasting Pakistan's Electricity Consumption* // Forecasting. – 2023. – Vol. 1. – P. 1–14.
33. SHI H. *Best-first decision tree learning*. Diss. The University of Waikato, 2007.
34. SON N., SHIN Y. *Short- and Medium-Term Electricity Consumption Forecasting Using Prophet and GRU* // Sustainability. – 2023. – Vol. 15. – P. 15860. – DOI: 10.3390/su152215860.
35. YILDIZ U., KORKUT S.O. *Electricity Consumption Forecasting using the Prophet Model in Industry: A Case Study* // Int. Conf. on Computing, Intelligence and Data Analytics. – 2024. – DOI: 10.1007/978-3-031-53717-2_10.

36. WILK M.B., GNANADESIKAN R. *Probability plotting methods for the analysis of data* // Biometrika. Biometrika Trust. – 1968. – Vol. 55(1). – P. 1–17.
37. ZHANG D., GONG Y. *The Comparison of LightGBM and XGBoost Coupling Factor Analysis and Prediagnosis of Acute Liver Failure* // IEEE Access. – 2020. – Vol. 8. – P. 220990–221003. – DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3042848.

SYSTEM DATA ANALYSIS AND MODELING OF ELECTRICITY CONSUMPTION BEHAVIOR FOR EVERY HOUR OF THE DAY USING MACHINE LEARNING METHODS

Alan Dzgoev, Cand. Sc., associate Professor of the Department of Digital Transformation, RTU MIREA, Moscow (dzgoev@mirea.ru).

Anna Lagunova, Cand. Sc., associate Professor, Head of the Department of Digital Transformation, RTU MIREA, Moscow (lagunova@mirea.ru).

Stanislav Karatsev, Senior lecturer of the basic department "Corporate infocommunication systems", Financial University under the Government of the Russian Federation (Vladikavkaz branch), Vladikavkaz (stkaratsev@fa.ru).

Ilya Konushok, Head of Artificial Intelligence Development Department, AI Developer, Restadviser LLC, St. Petersburg (konushok@mail.ru).

Ivan Komarov, General Director of Frisson LLC, St. Petersburg (info@frisson.ai).

Igor Huzmiev, Cand. Sc., Deputy Director of the Department of Corporate and Technological Automated Control Systems of PJSC "ROSSETI Severny Kavkaz", Pyatigorsk (huzmiev-im@rossetisk.ru).

Oleg Gladushev, Chief Expert of the Prospective Development Service, Branch of JSC "SO UES" of the North-West Regional Control Department, St. Petersburg (gladushev-oia@odusz.so-ups.ru).

Abstract: Electricity consumption is a key driver of sustainable development in the energy industry, and accurately predicting its changes is essential for the efficient management of large electric power systems and resources. The aim of this study is

to develop a mathematical (regression) model for predicting the behavior of electricity consumption for each hour of the next day for energy supply companies using modern methods of machine learning and artificial intelligence. This article discusses various artificial intelligence methods used to model and predict electricity consumption. These methods include a linear model, a random forest, and two implementations of gradient boosting over decision trees. A scientific approach based on Boosting artificial intelligence technology allows to minimize the error in forecasting electricity consumption in large energy companies. The authors have developed a new, useful and high-quality regression model that adequately describes experimental data on electricity consumption for each hour of the day. The developed regression model was tested on real production data of an energy company. The conducted research and the obtained results allow the authors to conclude that the mathematical model developed using the machine learning method – LightGBM, can be used by energy supply companies for hourly planning of electricity consumption when submitting applications to the wholesale electricity and capacity market (WECM) for several days in advance. The research was carried out in the Python programming language.

Keywords: energy consumption modeling, data processing, model quality assessment, mathematical statistics, regression model, artificial intelligence.

УДК 004.8+004.6+519.2+ 004.942+ 519.7+303.732.4

ББК 22.172+ 22.18

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

*Поступила в редакцию 25.10.2024.
Опубликована 31.03.2025.*

ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Жуков П. И.¹

*(Старооскольский технологический институт
им. А.А. Угарова (филиал) НИТУ «МИСИС»,
Старый Оскол)*

При моделировании нестационарных процессов в сплошных средах при помощи параболических дифференциальных уравнений часто встречаются ситуации, когда коэффициент, обеспечивающий связь левой и правой части уравнения, описывается как некоторая функция от множества переменных, включая состояния исследуемой среды. Восстановление данной зависимости, как правило, требует решения обратных коэффициентных задач, основанных на известных состояниях среды. На практике это означает, что обратная задача решается, опираясь, помимо прочего, на некоторую невязку между модельными данными и известными наблюдениям. Тем не менее нередки случаи, когда таких наблюдений критически мало во времени, например измерения состояния среды происходят с определенным очень большим временным шагом или вообще только в конце нестационарного процесса. Тогда в ретроспективных наблюдениях присутствуют моменты времени, когда состояние среды неизвестно, ввиду чего для них нельзя определить градиент ошибки и с приемлемой точностью восстановить искомую функциональную зависимость. В данной работе предлагается альтернативный взгляд на проблему восстановления коэффициентов сплошной среды для ситуаций, когда известных состояний среды значительно меньше, чем неизвестных. Непрерывный нестационарный процесс был рассмотрен, как дискретный, развивающийся во времени, и была предложена рекуррентная функция смены дискретных состояний. На основе данной функции был предложен численный метод интерполяции градиента ошибки между ожидаемым и фактическим состояниями среды внутри любых известными состояний. Был продемонстрирован процесс восстановления дискретных значений коэффициентов в отдельные моменты времени при помощи метода стохастического градиентного спуска на основе численной модели обобщенного параболического уравнения с произвольным внешним воздействием на границе.

Ключевые слова: параметрическая оптимизация, нестационарные процессы, коэффициентные обратные задачи, параболические уравнения.

¹ Пётр Игоревич Жуков, к.т.н., ассистент кафедры АИСУ им. Ю.И. Ерёменко (rockwell@control-mail.ru).

1. Введение

Пусть имеет место некоторая сплошная среда, которая обладает внутренним состоянием Q . Предположим, что внутреннее состояние среды изменяется с течением времени. Допустим, что процесс этого изменения может быть описан дифференциальным уравнение следующего вида (1):

$$(1) \quad \dot{Q} = \varphi \cdot \nabla^2 Q,$$

где φ – некоторый связующий коэффициент, позволяющий увязать размерности слева и справа в данном уравнении, ∇ – оператор набла.

Уравнение (1) относится к классу параболических дифференциальных уравнений, которыми описывают нестационарные процессы чаще всего в сплошных средах, определенных в ограниченных евклидовых пространствах, где ограничениями выступают некоторые краевые условия. В частности, при помощи уравнения вида (1) можно описать нестационарную диффузию [20, 31] или её частный случай – нестационарную теплопроводность [2, 7, 8, 27].

Коэффициент φ определяется моделируемой средой и определяет её поведение с функциями внешних и внутренних источников. Когда этот коэффициент не зависит ни от самого состояния среды, ни от времени, то решение краевых задач на основе (1) является в достаточной мере тривиальным.

Однако в практических задачах данный коэффициент изменяется вслед за изменением внутреннего состояния среды $\varphi = f_\varphi(Q, m)$ и зависит от её природы (m). На сегодняшний день существует много работ, пытающихся учесть нестационарность этого и других коэффициентов функций источников [2, 4, 8, 12, 14, 15].

В подобном случае рассмотренное выше уравнение (1) является лишь частным случаем уравнения (2), для решения которого необходимо структурно идентифицировать $f_\varphi(Q, m)$:

$$(2) \quad \dot{Q} = \nabla \cdot (\nabla \cdot f_\varphi(Q, m) \cdot Q).$$

Задача поиска и восстановления данной функциональной зависимости лежит в области обратных задач. Та их часть, которая

предполагает восстановления коэффициентов исходного уравнения на основе некоторых априорных сведений, называется коэффициентными обратными задачами. При описании с помощью (2) процессов эволюции во времени некоторых сред такими априорными сведениями могут являться их известные состояния в определённые моменты времени.

Применительно к различным областям науки и техники данные задачи хорошо исследованы в работах А.Н. Тихонова [18], М.М. Лаврентьева [11], О.М. Алифанова [1], С.И. Кабанихина [6], В.И. Дмитриева [5] и др. В разрезе вычислительной математики и численных методов обратные задачи исследованы в работах А.А Самарского и П.Н. Вабищевича [17], Г.И. Марчука [13] и др.

В частности, ставшие уже классическими математические постановки коэффициентных обратных задач и современные методы их решения можно найти в работах, упомянутых ранее – О.М. Алифанова, В.И. Дмитриева, С.И. Кабанихина, а также в работах М.Ю. Кокурина [10], А.И. Кожанова [9], А.О. Ватульяна [3] и др. За рубежом решению коэффициентных обратных задач посвящены работы William Symes [29], Heinz W. Engl [21], Masahiro Yamamoto [30], Martin Hanke [23], Andreas Kirsch [26] и др.

Современные подходы к решению обратных коэффициентных задач допускают существенный уровень шума в данных об известных состояниях среды, ограниченность по их количеству, наличие нелинейностей в исходных уравнениях и другие ограничивающие факторы. Однако очень редко рассматриваются ситуации, когда известных состояний среды, по которым можно было бы восстановить искомые коэффициенты, критически меньше, чем неизвестных. Например, известно только начальное и конечное состояние.

При этом сами такие ситуации в практических задачах нередки, например, промышленный нагрев в методических печах твердых тел приблизительно схожих внутренних конфигураций. Из-за высокотемпературного характера нагрева, а также невозможности контролируемым образом изучить каждую физико-химическую конфигурацию нагреваемого материала, осложняется процесс восстановления коэффициентов уравнения (2), что снижает практическую применимость моделей прямого решения, основанных на нем.

Одним из наиболее распространенных способов борьбы с неполнотой сведений является ввод в минимизируемые функционалы весовых коэффициентов для невязок между расчетными и наблюдаемыми состояниями среды. Такой способ при упоминании выше частном случае неполноты сведений будет подобен применению простой равномерной метрики, например максимуму известной невязки, что приведет к быстрому нарастанию погрешности.

Ввиду данного факта в данной работе предлагается альтернативный взгляд на решение поставленной проблемы неполноты сведений при решении коэффициентной обратной задачи. Делается предположение о том, что в моменты времени, когда состояние среды известно, по дополнительным сведениям, можно оценить невязку не только непосредственно в данный момент, но и проследить её изменение для всех предшествующих по времени состояний. Идея наследует принципы, исторически применяемые в области «машинного обучения» для решения схожих задач определения ошибок в скрытых слоях нейронных сетей. Данное исследование предполагает ряд допущений, которые предполагается ослабить в ходе дальнейших изысканий. В частности о том, что значения φ постоянны в каждой точке пространства среды и зависят только от некоторого её усредненного состояния в момент времени t . Нетривиальной видится проблема определения этого усредненного состояния среды, для чего в работе предлагается рекуррентная функция на основе финитного представления (2), непрерывно дифференцируемая первого порядка по φ .

2. Определение обобщенной по пространству рекуррентной функции смены состояний среды

Для определения рекуррентной функции смены состояния необходимо построить финитную модель параболического уравнения (2) первого порядка. Пред тем как приступить к её рассмотрению, закрепим некоторые основные допущения: 1) рассматривается однородная одномерная сплошная среда; 2) связующий коэффициент φ в однородной сплошной среде является некото-

рой функцией от состояния среды в момент времени t и постоянен в каждой точке пространства среды; 3) связующий коэффициент зависит от природы среды (m), которая постоянна в момент её рассмотрения. Допущение об одномерности среды является следствием покоординатного расщепления [19], согласно которому локально-одномерный случай является частным случаем многомерного.

Для перехода к финитной модели перепишем одномерное уравнение (2) к виду в частных производных (3):

$$(3) \quad \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f_{\varphi}(Q(x,t), m) \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} \right).$$

Поскольку было принято допущение, что φ не зависит от пространственной координаты, то можно переписать (3) в следующем виде:

$$(4) \quad \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = f_{\varphi}(Q_s^t, m) \cdot \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2},$$

где Q_s^t – это усредненное состояние среды по всем пространственным координатам в момент времени t .

Для перехода к финитному представлению необходимо замостить пространство одномерной сетью $x = [0, H]$. Внутренние состояния среды определим в узлах некоторой одномерной временной сети $t = [0, N,]$, тогда набор дискретных состояний будет определен в некоторой двумерной плоскости (рис. 1).

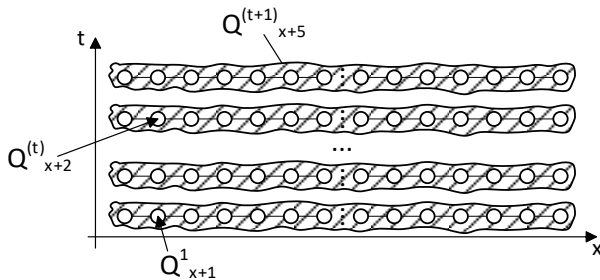


Рис. 1. Представление процесса изменения конечного набора пространственных состояний во времени

В дискретной форме дифференциальное уравнение (3) можно представить в форме уравнения (5) согласно методу конечных разностей [16]:

$$(5) \quad \frac{\partial Q_x^{t+1} - Q_x^t}{\Delta t} = f_\varphi(Q_s^t, m) \cdot \frac{Q_{x+1}^t - 2 \cdot Q_x^t + Q_{x-1}^t}{\Delta x^2},$$

где Δt и Δx – это величина дискретизации по времени и пространству соответственно.

Обратимся к допущениям, сделанным ранее, в частности к тому, что связующий коэффициент одинаков в каждой точке сплошной среды x в момент времени t . Тогда мы можем выполнить замену непрерывной функции $f_\varphi(Q_x^t, m)$ на вектор дискретных параметров φ_m^t , которые будут определены в каждый момент времени $t \neq 0$. При этом степень дискретизации здесь будет зависеть от Δt и совпадать с дискретным набором конечных состояний исследуемой среды:

$$(6) \quad \begin{cases} \vec{Q} \in [Q_x^0, Q_x^1, Q_x^2, \dots, Q_x^N] \\ \vec{\varphi} \in [\varphi_m^0, \varphi_m^1, \varphi_m^2, \dots, \varphi_m^N] \end{cases} \Rightarrow \vec{\varphi} \parallel \vec{Q}$$

Сделаем предположение, что существует такая рекуррентная зависимость между дискретными состояниями t и $(t + 1)$ -м, что зависит, помимо прочего, от φ_m^t . Обозначим такую рекуррентную зависимость как $F_s(Q_s^t, \varphi_m^t, t)$, тогда можно будет рассмотреть φ_m^t как некоторое управляющее воздействие, изменения которого в момент времени t способно привести к различным состояниям в момент времени $t + 1$. Таким образом, можно предполагать, что каждое последующее усредненное состояние исследуемой среды Q^{t+1}_s принадлежит некоторой области всех возможных состояний, в которые их способна привести функция $F^{t+1}(Q_s^t, \varphi_m^t)$:

$$(7) \quad F^{t+1} : X_Q \rightarrow Y_Q; (X_Q; Y_Q) \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим способ определения данной рекуррентной зависимости. Известно, что в каждый момент времени t имеется N внутренних состояний среды согласно пространственной сети. Тогда получить обобщенную рекуррентную зависимость состояния в момент времени $t + 1$ от состояния в момент времени t можно, используя следующую концепцию усреднения (рис. 2), которая позволяет напрямую проследить внешнее воздействие на

внутренние пространственные состояния среды. В представленном случае F_0 и F_H – это некоторые рекуррентные функции смены состояния на границах пространственной сети, а $F_{0...H}$ – это функция суммы внутренних состояний.

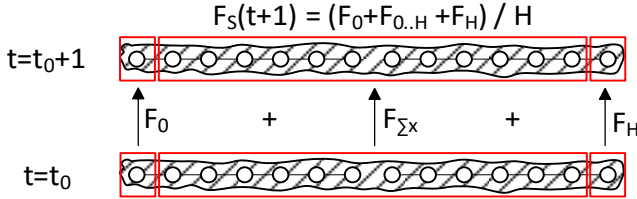


Рис. 2. Предлагаемый принцип усреднения

Пусть на границах одномерной сплошной среды выполняются следующие краевые условия:

$$(8) \quad \begin{aligned} -\psi(Q(0,t),m) \cdot \frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} &= g_x(Q(0,t)), \\ \psi(Q(H,t),m) \cdot \frac{\partial Q(H,t)}{\partial x} &= g_x(Q(H,t)); \end{aligned}$$

где $\psi(Q)$ – это коэффициент внешнего воздействия вблизи физической границы исследуемой сплошной среды и который зависит от нее. Данные уравнения позволяют определить функции смены состояний рассматриваемой дискретной модели в точках на границах (F_0, F_H) и вместе с начальными условиями вида $t_0 = 0$, $Q(x, 0) = Q_0$ формируют некоторую начально-краевую задачу для уравнения (3).

Для нахождения функций F_0 и F_H разложим в ряд Тейлора функции $Q(1, t)$ и $Q(H - 1, t)$ в окрестностях $(x = 0, t)$ и $(x = H, t)$ соответственно:

$$(9) \quad \begin{aligned} Q_1^t &= Q_0^t + \Delta x \frac{\partial Q_0^t}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 Q_0^t}{\partial x^2} + O(\Delta x^3), \\ Q_{H-1}^t &= Q_H^t - \Delta x \frac{\partial Q_H^t}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 Q_H^t}{\partial x^2} + O(\Delta x^3). \end{aligned}$$

Предположим, что на границах $(x = 0, t)$ и $(x = H, t)$, помимо

краевых условий (8) также выполняется дифференциальное уравнение (3), и перепишем разложение (9) следующим образом:

$$(10) \quad \begin{aligned} Q_1^t &= Q_0^t + \Delta x \cdot \left(-\frac{f_x(Q_0^t)}{\psi_m^t} \right) + \frac{\Delta x^2}{2! \cdot \varphi_m^t} \frac{\partial Q_0^t}{\partial t} + O(\Delta x^3), \\ Q_{H-1}^t &= Q_H^t - \Delta x \frac{f_x(Q_H^t)}{\psi_m^t} + \frac{\Delta x^2}{2! \cdot \varphi_m^t} \frac{\partial Q_H^t}{\partial t} + O(\Delta x^3). \end{aligned}$$

Здесь коэффициент ψ был представлен в дискретном виде со степенью дискретизации Δt , а также был принят независимым от пространственной координаты. Таким образом, останется выразить (10) относительно $(t + 1)$ -го временного слоя, предварительно представив непрерывный дифференциальный оператор во втором слагаемом в дискретной форме:

$$(11) \quad \begin{aligned} F_0 &= Q_0^t - \frac{2 \cdot \varphi_m^t \cdot \Delta t \cdot (Q_0^t + Q_1^t)}{\Delta x^2} + \frac{2 \cdot \varphi_m^t \cdot \Delta t \cdot f_x(Q_0^t)}{\Delta x \cdot \psi_m^t}, \\ F_H &= Q_H^t - \frac{2 \cdot \varphi_m^t \cdot \Delta t \cdot (Q_H^t + Q_{H-1}^t)}{\Delta x^2} + \frac{2 \cdot \varphi_m^t \cdot \Delta t \cdot f_x(Q_H^t)}{\Delta x \cdot \psi_m^t}. \end{aligned}$$

Для определения $F_{0...H}$ необходимо обратиться к уравнению (5) и выразить его относительно Q^{t+1}_x :

$$(12) \quad Q_x^{t+1} = Q_x^t + \Delta t \cdot \varphi_m^t \cdot \frac{Q_{x-1}^t + Q_{x+1}^t - 2 \cdot Q_x^t}{\Delta x^2}$$

Затем просуммируем все точки в интервале $[x + 1; H - 1]$:

$$(13) \quad \sum_{x=1}^{H-1} Q_x^{t+1} = \sum_{x=1}^{H-1} \left(Q_x^t + \Delta t \cdot \varphi_m^t \cdot \frac{Q_{x-1}^t + Q_{x+1}^t - 2 \cdot Q_x^t}{\Delta x^2} \right).$$

Упростим (13) до вида

$$(14) \quad \sum_{x=1}^{H-1} Q_x^{t+1} = \frac{\Delta x^2 \cdot \sum_{x=1}^{H-1} Q_x^t + \Delta t \cdot \varphi_m^t \cdot \left(\sum_{x=1}^{H-1} Q_{x-1}^t + \sum_{x=1}^{H-1} Q_{x+1}^t - 2 \sum_{x=1}^{H-1} Q_x^t \right)}{\Delta x^2}.$$

Избыточные операции суммирования, представленные в (14), можно упростить до одной единственной операции, рассмотрев каждую из представленных сумм в виде конечной последовательности:

$$(15) \begin{cases} \sum_{t=1}^{H-1} Q_x^t = Q_1^t + Q_2^t + Q_3^t + Q_4^t + \dots + Q_{H-2}^t + Q_{H-1}^t, \\ \sum_{t=1}^{H-1} Q_{x-1}^t = Q_0^t + Q_1^t + Q_2^t + Q_3^t + \dots + Q_{H-2}^t, \\ \sum_{t=1}^{H-1} Q_{x+1}^t = Q_2^t + Q_3^t + Q_4^t + Q_5^t + \dots + Q_{H-1}^t + Q_H^t. \end{cases}$$

Несложно заметить, что имеет место возможность аппроксимировать представленные дискретные суммы одной операцией суммирования:

$$(16) \begin{cases} \sum_{t=1}^{H-1} Q_x^t = Q_1^t + \bar{Q}_x^t + Q_{H-1}^t, \\ \sum_{t=1}^{H-1} Q_{x-1}^t = Q_0^t + Q_1^t + \bar{Q}_x^t, \quad \text{где } \bar{Q}_x^t = \sum_{t=2}^{H-2} Q_x^t. \\ \sum_{t=1}^{H-1} Q_{x+1}^t = \bar{Q}_x^t + Q_{H-1}^t + Q_H^t, \end{cases}$$

Теперь перепишем уравнение (14) с учетом (16) и упростим:

$$(17) F_{0\dots H} = \bar{Q}_x^t + Q_{H-1}^t + Q_1^t + \frac{\varphi \cdot \Delta t \cdot (Q_H^t + 2 \cdot Q_{H-1}^t + Q_0^t - Q_1^t)}{\Delta x^2}.$$

Зная уравнения смены состояния на границах, а также усредненное состояние внутри дискретной пространственной сети, можно определить обобщенную функцию смены состояния на $(t + 1)$ -м временном шаге $F_S(Q_S^t, \varphi_m^t, t)$:

$$(18) F_S(Q^t, \varphi_m^t, \psi_m^t, t) = \frac{\bar{Q}_x^t + Q_H^t + Q_{H-1}^t + Q_0^t + Q_1^t}{H} - \frac{\varphi_m^t \cdot \Delta t \cdot (Q_H^t - Q_{H-1}^t + Q_0^t - Q_1^t)}{H \cdot \Delta x^2} + \frac{2 \cdot \varphi_m^t \cdot \Delta t \cdot (f_x(Q_0^t) + f_x(Q_H^t))}{H \cdot \psi_m^t \cdot \Delta x},$$

где Q_t – это набор всех пространственных состояний среды в момент времени t . Таким образом (18) – это упомянутая ранее рекуррентная функция смены состояния, для которой можно допустить, что в момент времени t , все значения Q из Q^t – константы. Ранее делалось предположение, что в такой ситуации можно воспринимать значения коэффициента φ_m^t как некоторое управление, которое приводит к смене одного состояния на другое, на

основе этих постоянных значений. К этому предположению можно добавить и ψ_m^t и заметить, что (18) непрерывно зависит от φ_m^t и также непрерывно зависит от ψ_m^t везде, кроме $\psi_m^t = 0$. Определим первую производную данной функции по φ_m^t :

$$(19) \quad \frac{\partial F_S(\dots)}{\partial \varphi_m^t} = \frac{\Delta t \cdot (Q_{H-1}^t - Q_0^t + Q_1^t - Q_H^t)}{H \cdot \Delta x^2} + \frac{2 \cdot \Delta t \cdot (f_x(Q_0^t) + f_x(Q_H^t))}{H \cdot \psi_m^t \cdot \Delta x}.$$

Заметим, что полученная производная не зависит от φ_m^t , являясь константой. Можно утверждать, что предложенная выше функция является непрерывно дифференцируемой первого порядка по φ_m^t . Рассмотрим производную функции (18) по ψ_m^t :

$$(20) \quad \frac{\partial F_S(\dots)}{\partial \psi_m^t} = - \frac{2 \cdot \varphi \cdot \Delta t \cdot f_x(Q_0^t) + f_x(Q_H^t)}{H \cdot (\psi_m^t)^2 \cdot \Delta x}.$$

Частная производная (20) определена на интервале $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ и на нем же непрерывна, ввиду чего можно утверждать, что предложенная формула (18) является непрерывно дифференцируемой минимум единожды по φ_m^t и ψ_m^t на упомянутом интервале.

Предложенная выше дифференцируемая рекуррентная функция смены временных состояний среды позволяет рассмотреть применение градиентных методов поиска и восстановления коэффициентов φ_m^t и ψ_m^t .

3. Предлагаемый численный метод параметрической оптимизации

Опираясь на вышеизложенное, предположим, что имеет место необходимость для численной модели (3) с граничными условиями (8) и начальными условиями вида $Q(x, 0) = Q_0(x)$, $t = [0, t_E]$ решить обратную коэффициентную задачу. Для этого предположим, что имеется набор априорных сведений, например, усредненных значений состояний среды в t -й момент времени $Q_E(t)$ и независящих от пространственной координаты:

$$(21) \quad Q(x, t) = Q_E(t), \quad t \in [1, t_E].$$

Тогда обратная задача будет заключаться в нахождении таких φ_m^t и ψ_m^t , при которых решение прямой задачи удовлетворяло

бы известным состояниям (21) в точках временного диапазона следующим образом:

$$(22) F_S(Q^t, \varphi_m^t, \psi_m^t, t) = Q_E(t), t \in [1, t_E].$$

Эту задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо найти такие φ_m^t, ψ_m^t , минимизирующие функционал

$$(23) J(\varphi_m^t, \psi_m^t) = \int_1^{t_{end}} |F_S(Q^t, \varphi_m^t, \psi_m^t, t) - Q_E(t)|^2 dt + \lambda \cdot R(...) \rightarrow \min ,$$

где $J(\varphi_m^t, \psi_m^t)$ – целевой функционал, λ – параметр регуляризации, $R(...)$ – регуляризующий член. Это задача оптимизации в классической постановке, для решения которой можно применить различные итеративные алгоритмы, например метод градиентного спуска. Теперь рассмотрим ситуацию, при которой известные состояния имеются только в момент времени $t = t_E$. Тогда на интервале $t \in [1, t_E]$ функционал не определен в явном виде, что усложняет расчет градиента и, как следствие, применение градиентных методов.

Рассмотрим следующий предлагаемый численный метод на основе внутренней интерполяции значений градиента ошибка целевого функционала на интервале $t \in [1, t_E]$. Для этого будем воспринимать упомянутую ранее финитную модель как систему с конечным набором состояний: стационарные, когда дополнительные сведения известны; нестационарные – все остальные. Определить градиент невязки в стационарные моменты времени можно тривиальным образом:

$$(24) \frac{\partial J^{t_E}}{\partial \varphi_m^{t_E}} = \frac{\partial J^{t_E}}{\partial F(..., t_E)} \cdot \frac{\partial F(..., t_E)}{\partial \varphi_m^{t_E}}, \quad \frac{\partial J^{t_E}}{\partial \psi_m^{t_E}} = \frac{\partial J^{t_E}}{\partial F(..., t_E)} \cdot \frac{\partial F^{t_E}}{\partial \psi_m^S},$$

где $\partial F / \partial \varphi$ и $\partial F / \partial \psi$ уже были определены ранее как частные производные (19) и (20) соответственно.

Невязку для нестационарных состояний определим из следующего предположения. Пусть набор нестационарных состояний формирует некоторую траекторию переходного процесса, которая приводит дискретную систему в точку $Q_E(t_E)$. Если процесс перехода будет описываться предложенной выше рекуррентной функцией (18), тогда отклонение от этой траектории можно проследить через влияние φ_m^t, ψ_m^t на Q_x^t в моменты времени между двумя стационарными состояниями. Начальное условие

($Q(x, 0) = Q_0(t)$) по определению можно также отнести к стационарному состоянию, тогда предположим, что градиенты невязки между двумя стационарными состояниями можно вычислить цепными уравнениями следующего вида:

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{\partial J^t}{\partial \varphi_m^t} = \left(\frac{\partial F(..., t)}{\partial \varphi_m^t} \cdot \frac{\partial F(..., t)}{\partial \bar{Q}_x^t} \right) \cdot \frac{\partial J^{t+1}}{\partial \varphi_m^{t+1}}, \\ \frac{\partial J^t}{\partial \psi_m^t} = \left(\frac{\partial F(..., t)}{\partial \psi_m^t} \cdot \frac{\partial F(..., t)}{\partial \bar{Q}_x^t} \right) \cdot \frac{\partial J^{t+1}}{\partial \psi_m^{t+1}}, \end{cases} \quad t = (0; t_E).$$

Частная производная $\partial F / \partial \bar{Q}_x$ в любой момент времени равна $(1/H)$, что можно заметить из (18). Тогда уравнение цепной связи будет иметь вид (26):

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{\partial J^t}{\partial \varphi_m^t} = \left(\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial F(..., t)}{\partial \varphi_m^t} \right) \cdot \frac{\partial J^{t+1}}{\partial \varphi_m^{t+1}}, \\ \frac{\partial J^t}{\partial \psi_m^t} = \left(\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial F(..., t)}{\partial \psi_m^t} \right) \cdot \frac{\partial J^{t+1}}{\partial \psi_m^{t+1}}, \end{cases} \quad t = (0; t_E).$$

Можно заметить, что вычисление (26) возможно только обратнo по временной координате от $t = t_E$ до $t = 0$. Важно упомянуть, что здесь рассматривается худший случай, когда стационарные состояния среды известны только в начале и конце процесса, однако предложенный выше подход к интерполяции градиента применим для двух любых произвольных стационарных состояний на интервале $t \in [0, t_E]$. Опираясь на (24) и (26) можно применить метод градиентного спуска, однако перед этим необходимо определить условия корректности расчета модели на ЭВМ [16]. Будем использовать условие устойчивости разностной схемы, дополнив его ограничением функции (18):

$$(27) \quad 2 \cdot \Delta t \cdot \varphi_m^t < \Delta x^2; \quad \psi_m^t \neq 0.$$

Слежение за соблюдением условия (25) в процессе восстановления коэффициентов – это нетривиальная задача, требующая разработки отдельных инструментов, которой предполагается посвятить дальнейшие исследования. Для обеспечения начальной устойчивости достаточно инициализировать (φ_m^t, ψ_m^t) без нарушения (27), например при помощи метода псевдослучайной генерации вещественных чисел в заданном диапазоне.

Дальнейшая суть обратной задачи заключается в настройке первично инициализированных φ_m^t , и ψ_m^t таким образом, чтобы функционал (23), определенный в стационарные моменты, минимизировался. Применяя градиентные методы, важно помнить, что согласно предложенному методу интерполяции градиент, распространяемый вдоль временных слоев, будет затухать [22] пропорционально размерности временной сети. Это вычислительная проблема, устранить которую может помочь модификация законов настройки для φ_m^t , и ψ_m^t . В частности, предлагается использовать законы настройки (28) и (29), которые известны в области машинного обучения как оптимизатор «Adam» [25]:

$$(28) \quad \Delta\varphi_m^t = -\eta \cdot \frac{\hat{m}_t}{\sqrt{\hat{v}_t} + \varepsilon}; \quad \hat{m}_t = \frac{m_t}{(1 - \beta_1^t)}; \quad \hat{v}_t = \frac{v_t}{(1 - \beta_1^t)},$$

где η – это шаг настройки; $\beta_{1,2}$ – это нормированные значения от 0 до 1, определяющие степень вклада момента и скорости изменения соответственно; $\hat{m}_t$ – это усредненный скорректированный момент градиента ошибки в t -й момент времени; $\hat{v}_t$ – это скорректированная скорость градиента ошибки в t -й момент времени; m_t , v_t – это момент и скорость изменения градиента ошибки в t -й момент времени, определяемые по формулам

$$(29) \quad m_t = \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1 - \beta_1) \cdot \frac{\partial J^t}{\partial \varphi_m^t}; \quad v_t = \beta_2 \cdot v_{t-1} + (1 - \beta_2) \cdot \left[\frac{\partial J^t}{\partial \varphi_m^t} \right]^2.$$

Закон настройки для ψ_m^t имеет аналогичный (28) и (29) вид.

Таким образом, предлагается следующий численный метод в виде конечного алгоритма, основанный на стохастическом градиентном спуске:

1. На первом этапе инициализировать φ_m^t и ψ_m^t таким образом, чтобы не нарушалось условие (27);
2. В цикле с предусловием, пока невязка больше определенной критической величины (ε):
 - а. На основании полученных φ_m^t и ψ_m^t произвести расчет всех внутренних состояний сплошной среды как по пространству, так и по времени;
 - б. По дополнительным сведениям, получить эталонные стационарные состояния среды;

- в. Вычислить состояние сплошной среды в этот момент времени по функции (18);
 - г. Вычислить определить невязку по значению функционала (23) для стационарного состояния;
 - д. Вычислить при помощи (19) частную производную $\partial F/\partial \varphi$;
 - е. Вычислить при помощи (20) частную производную $\partial F/\partial \psi$;
 - ж. Вычислить частную производную ошибки по φ_m^t и ψ_m^t при помощи (24) для стационарных состояний среды;
 - з. Настроить значения коэффициентов φ_m^t и ψ_m^t для стационарного состояния среды, используя законы настройки (28) и (29);
 - и. В цикле с параметром t по всем нестационарным состояниям, двигаясь обратно по времени:
 - i. При помощи (19) и (20) вычислить частные производные $\partial F/\partial \varphi$ и $\partial F/\partial \psi$;
 - ii. Вычислить частные производные ошибок цепным уравнением (26);
 - iii. Настроить значения коэффициентов φ_m^t и ψ_m^t для стационарного состояния среды, используя законы настройки (28) и (29);
 - к. Вернуться к пункту 3.
3. Завершить расчет.

Для предложенного численного метода были проведены численные эксперименты с целью определить сходимость метода параметрической оптимизации и степень качества аппроксимации обобщенного по пространству состояния среды (18).

4. Численные эксперименты

Первым экспериментом, который было решено провести – это апробировать предложенную аппроксимационную функцию (18) для расчета обобщенного состояния среды. Внешние воздействия на сплошную среду в её граничных пространственных узлах описывалось следующей функцией:

$$(30) \quad \begin{aligned} -\psi(Q_0^t, m) \cdot \frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} &= \kappa_1 \cdot (550 - Q_0^t), \\ \psi(Q_H^t, m) \cdot \frac{\partial Q_H^t}{\partial x} &= \kappa_2 \cdot (550 - Q_H^t). \end{aligned}$$

Параметры κ_1 и κ_2 здесь описывают степень воздействия на границе. Эксперимент проводился без предварительной коррекции связующего коэффициента φ_m^t с параметрами $\kappa_1 = \kappa_2 = 5, 0$ и начальными условиями $t_0 = 0$, $Q^{t_0} = 50$. Общие параметры модели представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры модели для тестирования

Параметр модели	Значение
Общее время моделирования (t_{max})	1000
Пространственная размерность (L_{max})	500
Шаг по времени (Δt)	5
Шаг по пространству (Δx)	50
Начальное состояние среды (Q_x^0)	50
Размерность пространственной сети (H)	10
Размерность временной сети (N)	200
Коэффициент связи в каждом узле временной сети (φ_m^t)	12
Граничный коэффициент в каждом узле временной сети (ψ_m^t)	60

Всего проводились 15 экспериментов с изменением параметров φ_m^t и Δx в рамках окна устойчивости, определенного условием (27). График изменения усредненного состояния среды представлен на рис. 3.

Как можно заметить, имеется статическая ошибка между фактическим средним значением пространственных состояний среды в $(t + 1)$ -й момент времени и расчетным значением, полученным на основании предложенной функции (18) в тот же момент времени.

Для численной оценки качества была использована метрика абсолютного среднего (31) [24]:

$$(31) \quad MAE = \frac{\sum_{i=0}^N |F(..., t) - \text{AVG}(Q_x^t)|}{N}.$$



Рис. 3. Сравнение точности предложенного показателя (18)

Результаты эксперимента (таблица 2) показали, что чем больше шаг вдоль пространственной сети Δx , тем медленней прирастает ошибка с ростом ϕ_m^t .

Кроме того, было установлено, что изменение статических ψ_m^t никаким образом не влияет на представленный выше результат. Тем не менее дальнейшие эксперименты с корректировкой ψ_m^t показали, что наблюдается снижение расхождения, посчитанного метрикой (18) значения и простого усредненного значения пространственных состояний среды.

На основе приведенных данных экспериментов был получен следующий график уменьшения статической ошибки при увеличении пространственного шага моделирования (рис. 4).

Вторым тестом в рамках апробации было экспериментальное исследование сходимости предложенного метода по значению. В качестве критерия сходимости было выбрано отклонение абсолютной ошибки наблюдения не более чем на 10. В качестве естественного стационарного состояния использовалось неуправляемое начальное состояние $t = 0$, а в качестве второго стационарного состояния рассматривался конец моделирования $t = N$, таким образом было рассмотрено наиболее широкое окно переходного процесса.

Таблица 2. Результаты экспериментов сходимости аппроксимационной функции (18)

Значение φ_m^t	Статическая ошибка (19) $e = MAE$	Скорость изменения ошибки $\partial e / \partial t$	Ускорение роста ошибки $\partial^2 e / \partial t^2$
$\Delta x = 75, \Delta t = 5$			
2,02	20	0	0
2,62	25	0,6	0
3,246	30	0,626	0,026
3,877	35	0,631	0,005
4,517	40	0,64	0,009
$\Delta x = 100, \Delta t = 5$			
1,275	20	0	0
1,669	25	0,394	0
2,078	30	0,409	0,015
2,497	35	0,419	0,01
2,925	40	0,428	0,009
$\Delta x = 125, \Delta t = 5$			
0,993	20	0	0
1,309	25	0,316	0
1,63	30	0,321	0,005
1,97	35	0,34	0,019
2,32	40	0,35	0,01

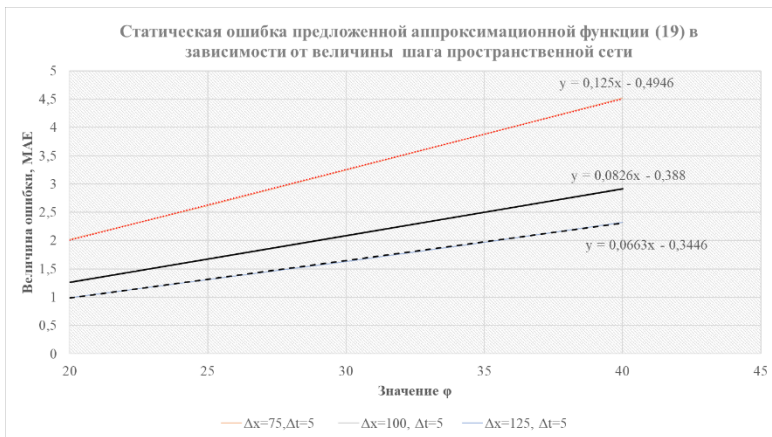


Рис. 4. Связь статической ошибки с величиной пространственного шага

В результате был получен следующий график (рис. 5). Как можно заметить, различные эталонные значения и процесс псевдослучайно инициализации φ_m^t и ψ_m^t формировали различные стартовые условия, из которых предложенный численный метод успешно сходиллся по значению ошибки.

На графике можно заметить, что в эксперименте №5, где эталонное значение было близко к значению некоторого внешнего воздействия на сплошную среду, в определенный момент наблюдается потеря устойчивости процесса коррекции. Одним из возможных решений данной проблемы является снижение ошибки между средним значением пространственных состояний сплошной среды и предложенной метрикой (18).

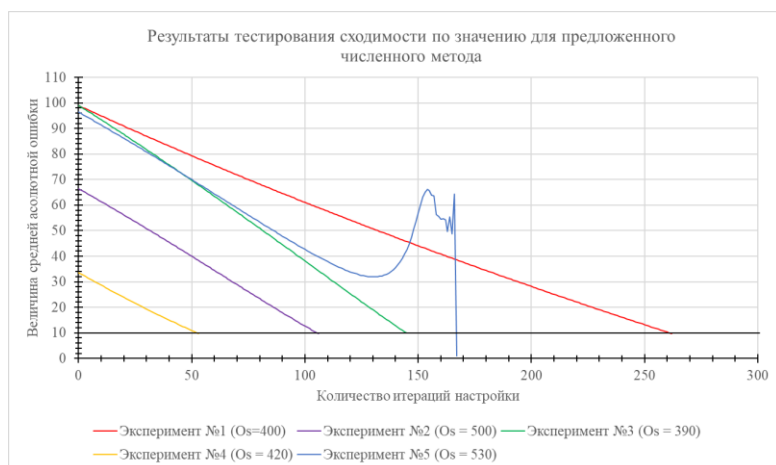


Рис. 5. Результат практического теста на сходимость к значению

Было замечено, что закономерное увеличение степени дискретизации временной сети приводит к росту качества модели, однако, это сильно снижает скорость её работы. Предполагается, что существует такая степень дискретизации, которая позволит добиться достаточно высокой точности предложенного численного метода с адекватными временными затратами. В качестве дальнейшего развития темы, помимо прочего, предполагается вывести аналитические ограничения на параметры дискретизации модели.

5. Заключение

В работе рассмотрена математическая модель численного решения параболического уравнения первого порядка с функциональной зависимостью связующего коэффициента в правой части неизвестного вида. В качестве альтернативного взгляда на нахождение данной зависимости было предложено дискретное восстановление искомых коэффициентов в каждый момент времени эволюции модели. Для этого была предложена рекуррентная функция, описывающая зависимость между t и $(t + 1)$ -м моментом времени, для которой выполняется условие непрерывной дифференцируемости первого порядка, что позволяет применять её в методе градиентного спуска. Была поставлена классическая обратная задача восстановления искомых коэффициентов по дополнительным данным о состоянии среды в отдельные моменты времени. Для неё был рассмотрен нетривиальный случай, когда состояния среды известны только в отдельные ограниченные моменты времени и градиент ошибки не может быть рассчитан для всего времени жизни модели. Был предложен подход интерполяции градиента ошибки для неизвестных состояний среды, заключенных между двумя известными состояниями при помощи цепных уравнений, решающий упомянутую проблему. Также была предложена модификация законов настройки классического стохастического градиентного спуска при помощи оптимизатора «Adam». Эта модификация позволяет решить вычислительную проблему, связанную с быстрым затуханием градиента при использовании цепных уравнений в процессе интерполяции.

Рассмотренная в данной работе модель, согласно принципу покоординатного расщепления, может быть использована со всеми предложенными модификациями в двух и трехмерных моделях. Однако она имеет ряд недостатков.

Имеется статическая ошибка между усредненным пространственным состоянием среды и предложенной аппроксимационной функцией, попытаться устранить которую предполагается в будущих исследованиях.

В процессе работы автором намеренно не давался никакой конкретный физический смысл коэффициентами φ_m^t и ψ_m^t для

того, чтобы продемонстрировать универсальность подхода. Однако при практическом применении к моделям нестационарных процессов необходимо учитывать диапазоны физических аналогов упомянутых коэффициентов, чтобы избежать нарушение условия корректности (27).

Наконец, в основе финитной модели находится явная схема аппроксимации, что накладывает определенные ограничения на размерности шагов временной и пространственных сетей.

Предполагается, что данная математическая модель может быть особенно полезна при моделировании процессов, описываемых законами Фика (диффузия) или Фурье (теплопроводность). Например, при моделировании нагрева твердых тел из сталей в промышленных печах, когда неизвестна форма изменения теплофизических параметров материала от температуры тела и одновременно нагревается несколько разнородных материалов. Или при моделировании нестационарной диффузии в твердых телах, например диффузии примесей в металлах, когда неизвестна функциональная зависимость коэффициента диффузии от параметров тела.

Литература

1. АЛИФАНОВ О.М. *Обратные задачи теплообмена*. – М: Машиностроение, 1988. – 280 с.
2. БРИЗИЦКИЙ Р.В., САРИЦКАЯ Ж.Ю. *Краевые и экстремальные задачи для уравнения реакции-диффузии конвекции с переменными коэффициентами* // Марчуковские научные чтения. – 2022. – Т. 1. – С. 102–103.
3. ВАТУЛЬЯН А.О *Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела*. – М: Litres, 2022. – 223 с.
4. ДИМИТРИЕНКО Ю.И., БОГДАНОВ И.О., ЮРИН Ю.В. и др. *Конечно-элементное моделирование нестационарной термоустойчивости композитных конструкций* // Математическое моделирование и численные методы. – 2024. – №1 (41). – С. 38–54.
5. ДМИТРИЕВ В.И. *Обратные задачи геофизики*. – М: МАКС Пресс, 2012. – 340 с.

6. КАБАНИХИН С.И. *Обратные и некорректные задачи*. – Новосибирск: ФГУП «Издательство СО РАН», 2018. – 512 с.
7. КАЗАКОВ А.Л., НЕФЕДОВА О.А., СПЕВАК Л.Ф. *Решение двумерного нелинейного параболического уравнения теплопроводности при краевом режиме, заданном на подвижном многообразии* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2024. – Т. 64, №2. – С. 283–303.
8. КАРТАШОВ Э. М. *Теплопроводность при переменном во времени относительном коэффициенте теплообмена* // Известия Российской академии наук. Энергетика. – 2015. – № 2. – С. 138–149.
9. КОЖАНОВ А.И., ТЕЛЕШЕВА Л.А. *Обратные задачи восстановления параметров в параболическом и гиперболическом уравнениях* // Математические заметки СВФУ. – 2022. – Т. 29, №3. – С. 57–69.
10. КОЗЛОВ А.И., КОКУРИН М.Ю. *Об интегральных уравнениях типа М.М. Лаврентьева в коэффициентных обратных задачах для волновых уравнений* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2021. – Т. 61, №9. – С. 1492–1507.
11. ЛАВРЕНТЬЕВ М.М., ВАСИЛЬЕВ В.Г. *О постановке некоторых некорректных задач математической физики* // Сибирский математический журнал. – 1966. – Т. 7, №3. – С. 559–576.
12. ЛЮБИМОВА Т.П., РУШИНСКАЯ К.С., ЗУБОВА Н.А. *Влияние переменного коэффициента термодиффузии на конвекцию бинарной смеси в прямоугольных полостях* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2021. – Т. 14, №2. – С. 233–244.
13. МАРЧУК Г.И. *О постановке некоторых обратных задач* // Доклады Академии наук. – 1964. – Т. 156, №3. – С. 503–506.
14. МАТУС П.П., ТУЕН В.Т.К. *Трехслойные компактные разностные схемы для параболического уравнения* // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32, №1. – С. 110–120.

15. ПАВЛОВ К.И., ПОПОВА Т.М. *Численное решение задачи неоднородной диффузии* // ТОГУ-СТАРТ: Фундаментальные и прикладные исследования молодых. – 2020. – С. 74–79.
16. САМАРСКИЙ А.А. *Теория разностных схем*. – М.: Изд-во «Наука», – 1989. – 656 с.
17. САМАРСКИЙ А.А., ВАБИЩЕВИЧ П.Н. *Численные методы решения обратных задач математической физики*. – М.: URSS: Изд-во ЛКИ, 2015. – 478 с.
18. ТИХОНОВ А.Н., ЛЕОНОВ А.С., ЯГОЛА А.Г. *Нелинейные некорректные задачи*. – М.: ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М», 2017. – 306 с.
19. ЯНЕНКО Н.Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*. – Новосибирск: Изд-во «Наука», 1967. – 197 с.
20. ELANGO S., TAMILSELVAN A., VADIVEL R. et al. *Finite difference scheme for singularly perturbed reaction diffusion problem of partial delay differential equation with nonlocal boundary condition* // Advances in Difference Equations. – 2021. – Vol. 2021. – P. 1–20.
21. ENGL H.W., GROETSCH C.W. *Inverse and ill-posed problems*. – Elsevier, 2014. – Vol. 4.
22. GRIMMER B. *Provably faster gradient descent via long steps* // SIAM Journal on Optimization. – 2024. – Vol. 34, No. 3. – P. 2588–2608.
23. HANKE M. *On the shape derivative of polygonal inclusions in the conductivity problem* // arXiv preprint. – arXiv:2402.02793. – 2024.
24. HODSON T. O. *Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE): When to use them or not* // Geoscientific Model Development Discussions. – 2022. – Vol. 2022. – P. 1–10.
25. KINGMA D.P. *Adam: A method for stochastic optimization* // arXiv preprint. – arXiv:1412.6980. – 2014.
26. KIRSCH A., KIRSCH A. *Nonlinear Inverse Problems* // An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. – 2021. – P. 119–168.

27. KOROCHE K.A. *Numerical solution for one dimensional linear types of parabolic partial differential equation and application to heat equation* // Mathematics and Computer Science. – 2020. – Vol. 5, No. 4. – P. 76–85.
28. QUITTNER P. *An optimal Liouville theorem for the linear heat equation with a nonlinear boundary condition* // Journal of Dynamics and Differential Equations. – 2024. – Vol. 36, No. Suppl 1. – P. 53–63.
29. SYMES W.W., CHEN H., MINKOFF S.E. *Solution of an acoustic transmission inverse problem by extended inversion* // Inverse Problems. – 2022. – Vol. 38, No. 11. – P. 115003.
30. YAMAMOTO M. et al. *Inverse coefficient problem for one-dimensional evolution equation vanishing initial condition* // arXiv preprint. – arXiv:2409.20321. – 2024.
31. ZHAN H., FENG Z. *Optimal partial boundary condition for degenerate parabolic equations* // Journal of Differential Equations. – 2021. – Vol. 284. – P. 156–182.

DYNAMIC RESTORATION OF CONTINUUM COEFFICIENTS IN MODELING OF NON-STATIONARY PROCESSES

Petr Zhukov, STI NUST “MISIS”, Stary Oskol, Cand.Sc., Department Assistant (rockwell@control-mail.ru).

Abstract: When modeling nonstationary processes in continuous media by means of parabolic differential equations, we often encounter situations when the coefficient providing the connection between the left and right parts of the equation is described as a function of a set of variables, including the states of the medium under study. The recovery of this dependence, as a rule, requires the solution of inverse coefficient problems based on known states of the medium. In practice, this means that the inverse problem is solved relying, among other things, on some discrepancy between model data and known observations. Nevertheless, there are cases when such observations are critically small in time, for example, measurements of the state of the medium occur with a certain very large time step or only at the end of a nonstationary process. In such cases, retrospective observations contain time moments when the state of the medium is unknown, which makes it impossible to determine the error gradient for them and to restore the desired functional dependence with acceptable accuracy. In this paper, we propose an alternative view of the problem of restoring continuum coefficients for situations when the known states of the medium are much

smaller than the unknown ones. A continuous nonstationary process was considered as a discrete process evolving in time, and a recurrent function of discrete state change was proposed. Based on this function, a numerical method for interpolating the error gradient between the expected and actual states of the medium within any two known states was proposed. The process of recovery of discrete values of coefficients at separate moments of time by means of the stochastic gradient descent method was demonstrated on the basis of a numerical model of a generalized parabolic equation with an arbitrary external influence on the boundary.

Keywords: parametric optimization, nonstationary processes, coefficient inverse problems, parabolic equations.

УДК 517.95 + 519.63

ББК 22.193

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.В. Горбуновой.*

Поступила в редакцию 31.10.2024.

Опубликована 31.03.2025.

ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ КЛЕТОЧНОЙ ПОПУЛЯЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Ткачева О.С.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва)

Исследуется математическая модель развития «in vitro» клеточной популяционной системы, включающая два типа клеток: здоровых и больных, например раковых. Модель позволяет описывать различные сценарии поведения клеток, в том числе процесс перерождения здоровых клеток в больные. Модель представлена системой ОДУ второго порядка. Биологический смысл системы накладывает определенные ограничения на фазовые переменные системы и ее параметры. Так, фазовые переменные, отражающие популяции клеток, должны быть неотрицательными, так что в качестве фазового пространства системы следует рассматривать неотрицательный квадрант. Параметры системы также имеют ограничения, вытекающие из их биологического смысла. Анализ этих ограничений приведен в статье. В работе проведен полный анализ положений равновесия. В частности, указаны условия на параметры, когда система имеет одно, два, три или четыре положения равновесия в неотрицательном квадранте. Описано условие перехода положения равновесия из состояния, находящегося внутри положительной области, на координатную ось. Рассмотрены условия устойчивости положений равновесия в некоторых случаях. Построены фазовые портреты системы при различных параметрах, иллюстрирующие случаи разного количества положений равновесия. Для системы с помощью метода локализации инвариантных компактов найдены границы для ограниченных траекторий, определены условия, когда в полученном локализирующем множестве не существует цикл.

Ключевые слова: модель развития клеточной популяции, положение равновесия, локализирующее множество.

1. Введение

В настоящее время математические модели являются эффективным инструментом изучения биологических систем, которое, как правило, предворяет натурный эксперимент [2, 3, 11, 12, 16, 20, 25]. С помощью математических моделей можно описать целый класс биологических процессов [11, 12, 16, 20], обладающих

¹ Ольга Сергеевна Ткачева, н.с., ст. преподаватель кафедры
(HolgaTkc@yandex.ru).

сходными свойствами, или изоморфных явлений. В частности, в конце 20 века было показано, что с помощью одной математической модели можно описать процессы самоорганизации самой разной природы: от образования скоплений галактик до образования пятен планктона в океане [12].

Математические модели активно используются в глобальных проектах, таких как расшифровка пространственной структуры сложных биомакромолекул, планирование мероприятий по предотвращению распространения эпидемий, прогнозирования течения различных болезней, таких как лейкоз, рак желудка, ВИЧ, энцефалит [14, 18, 19, 21, 22, 25]. Математическое моделирование используется для анализа экологических последствий работы промышленных объектов [10, 11].

Важнейшим этапом исследования математических моделей является их качественный анализ, при котором изучаются общие свойства решений, характерная динамика и т.п. [17]. Качественный анализ позволяет разработать эффективные методы наблюдения и управления системой [17]. Например, одним из эффективных методов управления биологическими процессами можно назвать метод АКАР, рассмотренный в работе [10] на примере различных моделей развития популяций на основе системы Лотки – Вольтерра. Основная идея данного подхода заключается в использовании для управления движением системы ее естественных аттракторов, к которым стремится изображающая точка системы [10, 11]. Стандартной частью качественного анализа автономных систем дифференциальных уравнений являются поиск положений равновесия, анализ их на устойчивость, а также обнаружение циклов, аттракторов, репеллеров [8, 15, 16, 20, 25].

Одним из методов качественного анализа динамических систем является постановка и решение задач локализации. Итогом решения такой задачи будут границы областей в фазовом пространстве, в которых сосредоточена сложная динамика системы (в частности, имеющиеся циклы, аттракторы, инвариантные торы) [6, 25]. Локализирующее множество обладает свойством инвариантности (либо положительной инвариантности, называ-

емой еще полуинвариантностью) по отношению к рассматриваемой системе. Уточним, что инвариантные компактные множества автономной системы дифференциальных уравнений – это ограниченные замкнутые подмножества фазового пространства, которые вместе с любой своей точкой содержат всю траекторию, проходящую через эту точку. Примерами инвариантных компактных множеств являются положения равновесия, сепаратрисы, периодические траектории, хаотические аттракторы и др. Локализирующие множества можно рассматривать как оценки амплитуд колебательных процессов [6, 7, 8].

С точки зрения биологических процессов, локализирующие множества позволяют выделить области стабильного сосуществования биологических популяций. Имеющиеся в системе параметры, на которые можно влиять, можно рассматривать как управляющие. Изменяя эти параметры, можно формировать нужные стабильные режимы сосуществования популяций.

В работе исследуется математическая модель развития клеточной популяции «in vitro», учитывающая взаимодействие клеток и их конкуренцию за ресурсы. Математическая модель была получена в работе [2]. Культивирование клеток находит практическое применение в клеточной трансплантологии, и представляет важным предсказать возможное поведение системы на некотором отрезке времени, так как на такое культивирование тратятся временные и материальные ресурсы [2, 4, 17]. В реальных случаях при необходимости проведения такой трансплантации клеток пациенту время является крайне важным ресурсом. Математическое моделирование позволяет сэкономить его [11].

Исследование положений равновесия рассматриваемой системы было начато в [3], где в простых случаях был изучен их возможный характер в зависимости от параметров. В [4] исследовано нулевое положение равновесия. Уточнены условия устойчивости с учетом того, что динамическая система в силу ее биологического содержания должна рассматриваться в первом квадранте плоскости. Проведено исследование нулевого положения равновесия в критических случаях, в которых метод исследова-

ния устойчивости по линейному приближению не работает.

Настоящая статья организована следующим образом. В первом разделе описана математическая модель развития клеточной популяции. Во втором разделе дан подробный анализ положений равновесия. Полученные результаты иллюстрируются примерами. В третьем разделе для системы построено локализирующее множество, также получены условия, при выполнении которых в системе не существует цикла.

2. Математическая модель

Модель развития «in vitro» клеточной популяционной системы, состоящей из двух типов клеток [2], описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = h_{01}x + h_{02}x^2 + h_{03}xy, \\ \dot{y} = h_{11}x + h_{12}y + h_{13}xy + h_{14}x^2 + h_{15}y^2. \end{cases}$$

Здесь x – нормированная численность клеток первого типа (здоровых), а y – нормированная численность клеток второго типа (больных). Коэффициенты h_{ij} задаются следующими соотношениями:

$$(2) \quad \begin{aligned} h_{01} &= (1 - A^0)(1 - 2\gamma^0)\alpha_0 - A^0, \\ h_{02} &= -\beta_{00}(1 - A^0)(1 - 2\gamma^0)\alpha_0, \\ h_{03} &= -\beta_{01}(1 - A^0)(1 - 2\gamma^0)\alpha_0, \\ h_{11} &= 2\alpha_0\gamma^0(1 - A^0), \\ h_{12} &= \mu(1 - A^1)\alpha_1 - A^1, \\ h_{13} &= -\mu\beta_{10}(1 - A^1) - 2\beta_{01}\gamma^0(1 - A^0), \\ h_{14} &= -2\beta_{00}(1 - A^0)\gamma_0, \\ h_{15} &= -\mu\beta_{11}(1 - A^0). \end{aligned}$$

Параметры системы имеют следующие ограничения: $A^0, A^1, \gamma^0, \alpha_0, \alpha_1 \in [0, 1]$, $\mu \geq 0$, $\beta_{00}, \beta_{01}, \beta_{10}, \beta_{11} \geq 0$. Все параметры модели, относящиеся к популяции клеток первого типа – нормальным клеткам, имеют индекс 0, а к клеткам второго типа (аномальным) – индекс 1.

Уточним биологический смысл параметров: A^0, A^1 представляют собой доли клеток в популяциях, погибающих на нормированных временных интервалах T^0, T^1 соответственно;

γ^0 – доля нормальных клеток, переходящих в процессе деления на нормированном временном интервале T^0 в популяцию аномальных клеток; $\mu = T^0/T^1$ – коэффициент, учитывающий различную продолжительность среднего клеточного цикла. Из соображений биологической адекватности модели система (1) рассматривается в следующем множестве [3, 4]:

$$(3) \quad G_1 = \{x, y : x, y \geq 0, \alpha_0 - \beta_{00}x - \beta_{01}y \geq 0, \\ \alpha_1 - \beta_{10}x - \beta_{11}y \geq 0\}.$$

Все траектории, начинающиеся в множестве G_1 , не пересекают осей x и y [3].

Основное отличие модели (1) от классической модели Лотки – Вольтерра развития двухвидовой популяции «хищник – жертва» состоит в том, что здесь нет «хищников» и «жертв». Клетки обеих популяций конкурируют только за пищевые ресурсы, что выражается в наличии зависимостей долей клеток, делящихся за среднее время клеточного цикла, от нормированных численностей каждого типа клеток. Другой особенностью модели (1) является то, что клетки второго типа появляются в результате «неправильного» деления клеток первого типа. При наличии в системе клеток второго типа работают два механизма: появление новых клеток из первой популяции с частотой γ^0 и деление имеющихся клеток второго типа.

Для анализа системы, с учетом соотношений (2), запишем диапазон изменений коэффициентов $h_{i,j}$:

$$(4) \quad \begin{aligned} h_{01} &\in [-1, 1], \\ h_{02} &\in [-\beta_{00}, \beta_{00}] \\ h_{03} &\in [-\beta_{01}, \beta_{00}], \\ h_{11} &\in [0, 2], \\ h_{12} &\in [-1, \mu], \\ h_{13} &\in [-(\mu\beta_{10} + 2\beta_{01}), 0], \\ h_{14} &\in [-2\beta_{00}, 0], h_{15} \in [-\mu\beta_{11}, 0]. \end{aligned}$$

Отметим, что знаки параметров h_{01} , h_{02} и h_{03} (h_{02} и h_{03} – всегда одного знака) зависят от значения частоты γ^0 при $A^0 < 1$,

$\beta_{00} \neq 0, \beta_{01} \neq 0$:

$$(5) \quad \begin{aligned} \gamma^0 < 0,5 : h_{01} < 0, h_{02} > 0, h_{03} > 0; \\ \gamma^0 = 0,5 : h_{01} < 0, h_{02} = h_{03} = 0; \\ \gamma^0 > 0,5 : h_{02} > 0, h_{03} > 0. \end{aligned}$$

При $\gamma^0 > 0,5$ параметр h_{01} может менять знак. Если

$$\gamma^0 > \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha_0} \right) \quad \text{и} \quad A^0 > \frac{(1 - 2\gamma^0)\alpha_0}{((1 - 2\gamma^0)\alpha_0 + 1)},$$

то $h_{01} > 0$.

3. Положения равновесия

В данном разделе кратко опишем результаты предыдущих исследований [2, 3, 4] положений равновесия системы (1) и дополним их.

Система (1) может иметь до четырех положений равновесия в неотрицательной области. Первое положение равновесия $E_0(0,0)$ существует при любых значениях параметров, его устойчивость подробно исследована в [3, 4]. Собственные числа матрицы Якоби в положении равновесия (E_0) принимают следующие значения:

$$\lambda_1 = h_{01}, \quad \lambda_2 = h_{12}.$$

При этом $h_{01} \in [-1, (1 - 2\gamma^0)\alpha_0]$, $h_{12} \in [-1, \mu\alpha_0]$, так что собственные числа могут быть любых знаков и положение равновесия может быть как асимптотически устойчивым, так и неустойчивым [3, 13]. В [4] подробно исследован случай, когда одно из собственных чисел равно нулю.

Второе положение равновесия $E_1 = (0, -h_{12} \setminus h_{15})$ лежит на оси y . Оно принадлежит неотрицательному квадранту при $h_{12} > 0$. Устойчивость этого положения исследована в [3, 13]. Собственные числа матрицы Якоби в положении равновесия E_1 имеют следующий вид:

$$\lambda_1 = h_{01} - h_{03} \frac{h_{12}}{h_{15}}, \quad \lambda_2 = -h_{12}.$$

Так как условие попадания положения равновесия E_1 в неотрицательный квадрант имеет вид $h_{12} > 0$, то положение равновесия может быть асимптотически устойчивым (тогда это будет устойчивый узел) или неустойчивым (тогда – седловая точка) в зависимости от значения второго собственного числа. Положение равновесия будет асимптотически устойчивым, если выполнено условие

$$h_{01} > h_{03} \frac{h_{12}}{h_{15}}.$$

Положение равновесия на оси y отвечает состоянию, в котором в системе осталась только популяция больных клеток. Асимптотическая устойчивость этого положения равновесия характеризует вымирание популяции здоровых клеток, т.е. все клетки в колонии со временем оказываются больными.

Существование третьего и четвертого положений равновесия $E_2 = (x_1, y_1)$ и $E_3 = (x_2, y_2)$ определяется следующей системой уравнений [3, 13]:

$$(6) \quad \begin{cases} y = -\frac{(h_{01} + h_{02}x)}{h_{03}}, \\ \theta_1 x^2 + \theta_2 x + \theta_3 = 0. \end{cases}$$

Здесь использовались следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= h_{14} + h_{023}^2 h_{15} - h_{023} h_{13}; \\ \theta_2 &= h_{11} - h_{013} h_{13} - h_{023} h_{12} + 2h_{013} h_{023} h_{15}; \\ \theta_3 &= h_{013}^2 h_{15} - h_{013} h_{12}. \end{aligned}$$

При этом

$$\frac{h_{02}}{h_{03}} = h_{023}; \quad \frac{h_{01}}{h_{03}} = h_{013}.$$

С учетом (5):

$$(7) \quad h_{023} > 0; \quad h_{013} < 0.$$

Пусть квадратное уравнение системы (6) имеет корни $x_1, x_2 > 0$. При $y > 0$ возникает следующее условие на x_1, x_2 :

$$(8) \quad x_i \leq -\frac{h_{01}}{h_{02}}; \quad i = 1, 2.$$

Отсюда следует, что

$$(9) \quad \frac{h_{01}}{h_{02}} \geq 0.$$

При $\gamma^0 < 0,5$ условие (9) выполняется всегда (см. условие (5)). При $\gamma^0 > 0,5$ верно $h_{02} > 0$, $h_{03} > 0$, но знак h_{01} зависит от A^0 , а для выполнения условия (8) в этом случае необходимо выполнение $h_{01} < 0$, отсюда следует необходимость следующего условия на A^0 :

$$(10) \quad A^0 > \frac{(1 - 2\gamma^0)\alpha_0}{(1 - 2\gamma^0)\alpha_0 + 1}.$$

Наконец, отметим, что квадратное уравнение из (6) может иметь корни при выполнении следующего условия [3]:

$$D = \theta_2^2 - 4\theta_3\theta_1 \geq 0.$$

Это неравенство можно привести к следующему виду:

$$(11) \quad D = (h_{11} - h_{013}h_{13} - h_{12}h_{023} + 2h_{013}h_{15}h_{023}) \times \\ \times (h_{11} - h_{013}h_{13} - h_{12}h_{023} + 2h_{013}h_{15}h_{023} - \\ - 4(h_{14} + h_{13}h_{023} - h_{15}h_{023}^2)) > 0.$$

Упростим анализ квадратного уравнения, разделив его на θ_1 :

$$(12) \quad \begin{aligned} &x^2 + px + q; \\ &p = \frac{\theta_2}{\theta_1}, q = \frac{\theta_3}{\theta_1}. \end{aligned}$$

Заметим, чтобы корни имели разные знаки, необходимо $q < 0$. При этом условие $x < x_* = -h_{01}/h_{02}$ (16) будет выполнено, если в точке x_*

$$(13) \quad \begin{aligned} &(x_*)^2 + px_* + q > 0; \\ &q < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при одновременном выполнении условий (11) и (13) система (1) имеет одно внутреннее положение равновесия в неотрицательном квадранте.

Для того чтобы два корня были положительны, необходимо $q > 0, p < 0$ при (11). Это представимо в виде единого условия

$$(14) \quad 0 < 2\sqrt{q} < -p.$$

Итак, система (1) может иметь одно или два внутренних положений равновесия при выполнении группы условий ((8),(11), (14)) или ((13), (11)) соответственно.

Наличие внутренних положений равновесия, к тому же обладающих устойчивостью, означает наличие режима сосуществования двух типов клеток. Трансплантация такой клеточной культуры может быть опасной для пациента, поскольку в организме она может выродиться в колонию больных клеток.

Отдельно обсудим случай, когда неравенство (8) переходит в равенство:

$$x_1 = -\frac{h_{01}}{h_{02}}.$$

В этом случае $y = 0$ и вместо системы (6) имеем следующее уравнение на x :

$$h_{11}x + h_{14}x^2 = 0.$$

Отсюда

$$(15) \quad x = -\frac{h_{11}}{h_{14}}, \quad y = 0.$$

Указанный случай возможен только при выполнении следующего равенства:

$$(16) \quad -\frac{h_{01}}{h_{02}} = \frac{h_{11}}{h_{14}}.$$

В [3, 4, 13] не приводится вывод этого условия, т.е. не уточняется, что оно – частный случай системы уравнений (6), но приведено исследование устойчивости. Данное положение равновесия может быть как узлом, устойчивым или неустойчивым, так и седлом. В силу условий (4) собственные числа матрицы Якоби системы (1) в положении равновесия всегда действительные.

Имеем следующее квадратное уравнение на собственные числа λ :

$$(17) \quad \lambda^2 + \lambda(h_{14}\frac{h_{11}}{h_{13}} - h_{12} + h_{01}) + h_{03}\frac{h_{11}^2}{h_{13}} - h_{01}h_{12} = 0.$$

Проведем анализ знаков корней (17), используя теорему Виета:

- если произведение корней квадратного уравнения $h_{03}\frac{h_{11}^2}{h_{13}} - h_{01}h_{12} > 0$, то это узел, (корни квадратного уравнения одинаковых знаков) при сумме корней квадратного уравнения:

$$-h_{14}\frac{h_{11}}{h_{13}} - h_{12} + h_{01} < 0 \text{ – неустойчивый узел;}$$

$$-h_{14}\frac{h_{11}}{h_{13}} - h_{12} + h_{01} > 0 \text{ – асимптотически устойчивый.}$$

- $h_{03} \frac{h_{11}^2}{h_{13}} - h_{01}h_{12}$ – седло.

При асимптотической устойчивости положения равновесия (15) можно говорить о хорошем качестве клеточной популяции, т.е. здоровые клетки не перерождаются в больные.

Приведем примеры параметров системы (1), при которых система имеет различное число положений равновесия.

Система имеет четыре положения равновесия в неотрицательной четверти при следующем наборе параметров:

$$(18) \quad \begin{array}{llllll} \alpha^0 = 0,3 & \gamma^0 = 0,1 & A_0 = 0,3 & \beta_{00} = 1 & \beta_{01} = 1; \\ \alpha^1 = 0,8 & \mu = 1 & A^1 = 0,1 & \beta_{10} = 1 & \beta_{11} = 1. \end{array}$$

Тогда есть следующие положения равновесия: E_0 (0;0) (неустойчивый узел), E_1 (0;0,243) (седло), E_2 (0,156;0,108) (седло), E_3 (0,159;0,284) (устойчивый узел). Фазовый портрет системы изображен на рис. 1.

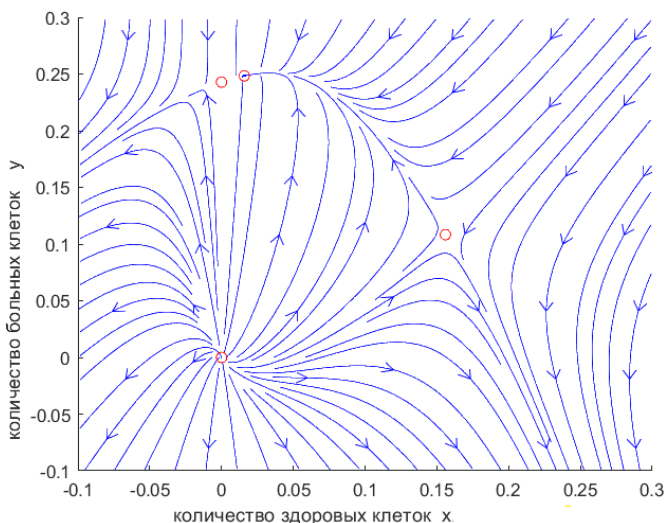


Рис. 1. Фазовый портрет системы с четырьмя точками покоя

Отметим, что реализация благоприятных сценариев развития клеточной популяции возможна в окрестности положений равно-

веса E_0 и E_3 , траектории могут стремиться к оси x . В окрестности положений равновесия E_1 и E_2 таких траекторий не наблюдается, что говорит об отсутствии благоприятных сценариев, здоровые клетки перерождаются в больные.

Система имеет два положения равновесия в неотрицательном квадранте при следующем наборе параметров:

$$(19) \quad \begin{array}{cccccc} \alpha^0 = 0,3 & \gamma^0 = 0,3 & A_0 = 0,3 & \beta_{00} = 1 & \beta_{01} = 1; \\ \alpha^1 = 0,8 & \mu = 1 & A^1 = 0,1 & \beta_{10} = 1 & \beta_{11} = 1. \end{array}$$

В этом случае есть следующие положения равновесия: $E_0 (0; 0)$ (седло), $E_1 (0; 0,243)$ (устойчивый узел). Фазовый портрет системы изображен на рис. 2. Отметим, что реализация благоприятных сценариев развития клеточной популяции невозможна в окрестности положений равновесия E_0 и E_1 , здоровые клетки перерождаются в больные.

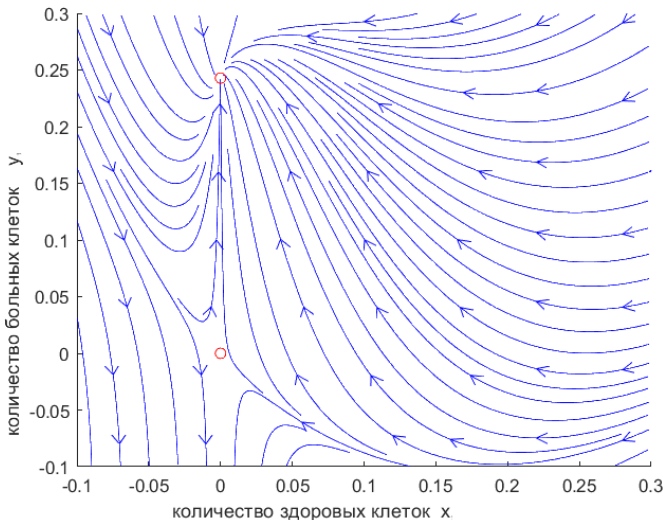


Рис. 2. Фазовый портрет системы с двумя точками покоя $E_0 (0; 0)$, $E_1 (0; 0,243)$

Система имеет два положения равновесия в неотрицательной четверти, при этом одно из положений равновесия — внутрен-

нее (в отличие от предыдущего случая) при следующем наборе параметров:

$$(20) \quad \begin{array}{llllll} \alpha^0 = 0,3 & \gamma^0 = 0,2 & A_0 = 0,3 & \beta_{00} = 1 & \beta_{01} = 1; \\ \alpha^1 = 0,8 & \mu = 0,9 & A^1 = 0,1 & \beta_{10} = 1 & \beta_{11} = 1. \end{array}$$

Положения равновесия в неотрицательной четверти: $E_0 (0; 0)$ (неустойчивый узел), $E_2 (0,071; 0,14)$ (неустойчивый узел). Фазовый портрет представлен на рис. 3. Отметим, что реализация благоприятных сценариев развития клеточной популяции возможна в окрестности положений равновесия E_0 и E_1 , траектории стремятся к оси x .

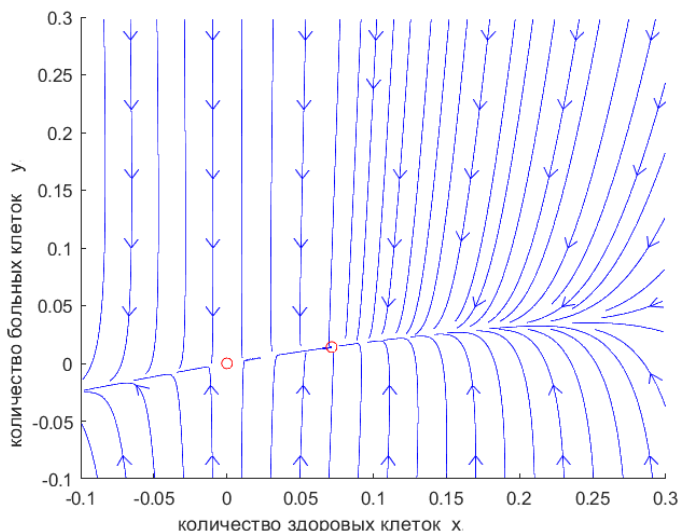


Рис. 3. Фазовый портрет системы с двумя точками покоя $E_0 (0; 0)$, $E_2 (0,071; 0,14)$

4. Построение локализирующего множества

Локализирующие множества можно строить с помощью гладких функций, называемых локализирующими функциями [7, 8, 9].

Основы метода локализирующих функций, использующегося для построения локализирующих множеств, приведены в приложении 1.

Выберем функцию $\phi = Ax + By$ в качестве локализирующей. Запишем ее производную в силу системы (1):

$$\dot{\phi} = A(h_{01}x + h_{02}x^2 + h_{03}xy) + B(h_{11}x + h_{12}y + h_{13}xy + h_{14}x^2 + h_{15}y^2).$$

Тогда универсальное сечение S_ϕ будет описываться уравнением:

$$(21) \quad x(Ah_{01} + Bh_{11}) + yBh_{12} + xy(Ah_{03} + Bh_{13}) + x^2(Ah_{02} + Bh_{14}) + y^2Bh_{15} = 0.$$

Полученное универсальное сечение представляет собой кривую второго порядка. Интересен случай, когда универсальное сечение – ограниченная (компактная) кривая. Тогда экстремальные значения точно конечны и локализирующее множество нетривиально. В случае линейной локализирующей функции можно утверждать, что множество ее значений на кривой 2-го порядка ограничено только в случае эллипса. В этом случае универсальное сечение гарантированно будет иметь точные верхнюю и нижнюю грань. Тогда имеем следующие условия на параметры A и B :

$$(22) \quad (h_{13}^2 - 4h_{14}h_{15})B^2 - (4h_{02}h_{15} - 2h_{03}h_{13})AB + A^2h_{03}^2 < 0.$$

Для выполнения этого условия необходимо $A \neq 0$, $B \neq 0$ одновременно. Заметим, что умножение локализирующей функции на константу не повлияет на соответствующее локализирующее множество. Поэтому можно считать $B = 1$. Условие эллиптичности на параметр A приобретает вид:

$$(23) \quad 0 < h_{15}(h_{15}h_{02}^2 - h_{13}h_{02}h_{03} + h_{14}h_{03}^2).$$

При этом A будет лежать в следующих границах:

$$\frac{(4h_{02}h_{15} - 2h_{03}h_{13}) - \sqrt{D_1}}{2h_{03}^2} \leq A \leq \frac{(4h_{02}h_{15} - 2h_{03}h_{13}) + \sqrt{D_1}}{2h_{03}^2},$$

где

$$D_1 = (4h_{02}h_{15} - 2h_{03}h_{13})^2 - 4(h_{13}^2 - 4h_{14}h_{15})h_{03}^2.$$

Тогда можно сформулировать следующую задачу на условный экстремум для функции ϕ :

$$\phi = Ax + y \rightarrow \text{extr},$$

$$x(Ah_{01} + h_{11}) + yh_{12} + xy(Ah_{03} + h_{13}) + x^2(Ah_{02} + h_{14}) + y^2h_{15} = 0.$$

Введем следующую замену переменных:

$$X = x - \frac{2h_{12}h_{13} - 4h_{11}h_{15} + 2Ah_03h_{12} - 4Ah_{01}h_{15}}{2(A^2h_{03}^2 + 2Ah_{03}h_{13} - 4Ah_{02}h_{15} + h_{13}^2 - 4h_{14}h_{15})};$$

$$Y = y - \frac{h_{12}}{2h_{15}} - x \frac{h_{13} + Ah_{03}}{2h_{15}}.$$

Тогда задача на экстремальные значения упростится:

$$(24) \quad \begin{aligned} uX + vY + w &\rightarrow \text{extr}, \\ aX^2 + bY^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u &= A - \frac{(h_{13} + Ah_{03})}{2h_{15}}; \\ v &= 1; \\ w &= -A \frac{(h_{12}h_{13} - 2h_{11}h_{15} + Ah_{03}h_{12} - 2Ah_{01}h_{15})}{A^2h_{03}^2 + 2Ah_{03}h_{13} - 4Ah_{02}h_{15} + h_{13}^2 - 4h_{14}h_{15}} - \frac{h_{12}}{2h_{15}} + \\ &+ (h_{13} + Ah_{03}) \times \\ &\times \frac{h_{12}h_{13} - 2h_{11}h_{15} + Ah_{03}h_{12} - 2Ah_{01}h_{15}}{2h_{15}(A^2h_{03}^2 + 2Ah_{03}h_{13} - 4Ah_{02}h_{15} + h_{13}^2 - 4h_{14}h_{15})}; \\ a &= -\frac{A^2h_{03}^2 + 2Ah_{03}h_{13} - 4Ah_{02}h_{15} + h_{13}^2 - 4h_{14}h_{15}}{4h_{15}}; \\ b &= h_{15}; \\ r^2 &= \frac{h_{12}^2}{4h_{15}} + \frac{(h_{12}h_{13} - 2h_{11}h_{15} + Ah_{03}h_{12} - 2Ah_{01}h_{15})^2}{4h_{15}(A^2h_{03}^2 + 2Ah_{03}h_{13} - 4Ah_{02}h_{15} + h_{13}^2 - 4h_{14}h_{15})} - \\ &- \frac{h_{12}h_{13} - 2h_{11}h_{15} + Ah_{03}h_{12} - 2Ah_{01}h_{15}}{4h_{15}(A^2h_{03}^2 + 2Ah_{03}h_{13} - 4Ah_{02}h_{15} + h_{13}^2 - 4h_{14}h_{15})} \cdot \\ &\cdot \frac{2h_{12}h_{13} - 4h_{11}h_{15} + 2Ah_{03}h_{12} - 4Ah_{01}h_{15}}{4h_{15}(A^2h_{03}^2 + 2Ah_{03}h_{13} - 4Ah_{02}h_{15} + h_{13}^2 - 4h_{14}h_{15})}. \end{aligned}$$

Задача (24) – стандартная задача на условный экстремум [8, 9]. Решая ее, заключаем, что функция φ лежит в следующих границах:

$$(25) \quad \begin{aligned} \phi_{\inf} &< Ax + y < \phi_{\sup}, \\ \phi_{\inf} &= -r \sqrt{\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b}} + w; \\ \phi_{\sup} &= r \sqrt{\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b}} + w. \end{aligned}$$

В итоге мы получаем семейство локализирующих множеств Ω_ϕ [9] каждое из которых отвечает своему допустимому значению параметра A . Наилучшим локализирующим множеством является пересечение $\Omega_\phi = \bigcap_A^n \Omega_\phi(A)$. Для его описания перепишем (25):

$$\phi_{\inf}(x, y) - Ax < y < \phi_{\sup}(x, y) - Ax.$$

Тогда локализирующее множество Ω_φ можно описать с помощью следующего неравенства:

$$\max_A(\phi_{\inf}(x, y) - Ax) < y < \min_A(\phi_{\sup}(x, y) - Ax).$$

Учитывая, что система (1) рассматривается только в правой верхней четверти, уточним неравенство, описывающее локализирующее множество Ω_φ :

$$(26) \quad \max_A(\max(\phi_{\inf}(x, y) - Ax, 0)) < y < \min_A(\phi_{\sup}(x, y) - Ax), \quad x \geq 0.$$

Проиллюстрируем полученное локализирующее множество на численном примере. Заметим, что в случаях (18), (19) и (20) нарушено условие эллиптичности (23), локализирующего множества нет. Рассмотрим следующий набор параметров:

$$(27) \quad \begin{array}{llllll} \alpha^0 = 0,3 & \gamma^0 = 0,2 & A_0 = 0,3 & \beta_{00} = 1 & \beta_{01} = 1; \\ \alpha^1 = 0,8 & \mu = 0,8 & A^1 = 0,4 & \beta_{10} = 1 & \beta_{11} = 1. \end{array}$$

В этом случае выполнено условие (23). В неотрицательном квадранте кроме нулевого положения равновесия есть внутреннее положение равновесия E_3 (0,06; 0,04). Иллюстрация этого множества приведена на рис. 4 (закрашенная область).

Выясним, при каких условиях в системе (1) в неотрицательном квадранте не будет циклов. В этом случае характерными траекториями системы будут положения равновесия и их сепаратрисы.

Лемма 1. Если выполнены условия на параметры:

$$(28) \quad \begin{array}{l} 2h_{02} + h_{13} \in (0, 2\beta_{00}]; \quad (h_{03} + 2h_{15}) \in (0, \beta_{00}); \\ h_{01} + h_{12} \in (0, 1 + \mu], \end{array}$$

то система (1) в неотрицательном квадранте не имеет циклов.

Доказательство леммы приведено в приложении 2.

Известно [1], что в двумерных системах внутри цикла всегда есть положение равновесия, не являющееся седлом. Отсутствие

таких положений равновесия внутри квадранта также является условием отсутствия у системы циклов. Например, в случае (19) в системе нет циклов, поскольку нет внутренних положений равновесия. В случае (20) есть внутреннее положение равновесия типа узел, так что нельзя утверждать, что цикла нет. Условия леммы 1 также не выполнены. Аналогична ситуация и в случае (18).

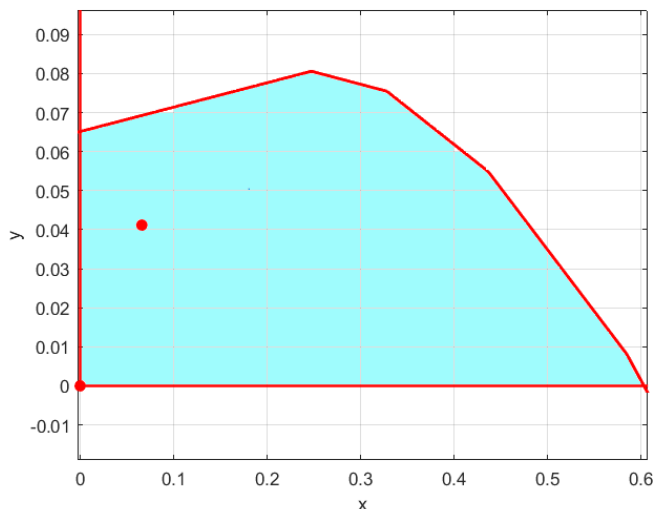


Рис. 4. Локализирующее множество в случае (27)

5. Заключение

В работе изложены результаты исследования нелинейной динамической системы второго порядка. Проведен полный анализ положений равновесия, начатый в более ранних работах. Приведены условия на параметры, когда система имеет одно, два, три или четыре положения равновесия в неотрицательном квадранте, они проиллюстрированы примерами. Описано условие перехода положения равновесия изнутри положительного квадранта на координатную ось. Рассмотрены условия устойчивости положения равновесия в некоторых случаях. Приведена биологическая интерпретация для этих случаев. Для системы построено локали-

80

зирующее множество, которое можно рассматривать как область, в которой сосредоточена сложная динамика система, т.е. область стабильного сосуществования клеточных популяций. Выявлены условия, когда система не имеет предельных циклов. С биологической точки зрения, наличие в рассматриваемой системе предельного цикла означает прекращение развития данной системы. Таким образом, если параметры системы удовлетворяют найденным в работе условиям, можно говорить об избежании подобного сценария развития.

Приложение 1

Построение локализирующего множества для системы второго порядка имеет свои особенности [7, 9]. В качестве локализирующей можно выбрать любую непрерывно дифференцируемую функцию, но неудачный выбор может привести либо к трудностям аналитических вычислений, либо к тривиальному результату, когда локализирующее множество совпадет со всем фазовым пространством. Общего метода выбора локализирующей функции нет, но есть некоторые приемы, работающие для систем определенного типа. Для популяционных систем хорошо работают линейные функции [8].

Рассмотрим динамическую систему вида

$$(29) \quad \dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Подмножество $G \subset \mathbb{R}^n$ называют инвариантным множеством системы (29), если для любой точки $x_0 \in G$ траектория $x(t, x_0)$, проходящая через точку x_0 и определенная на максимальном интервале времени, содержится в G .

Пусть $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ – непрерывно дифференцируемая функция и $\dot{\varphi}(x) = \varphi'(x)F(x)$ – ее производная в силу системы (29). Подмножество $S(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{\varphi}(x) = 0\}$ называют универсальным сечением [7, 8].

Теорема 2. [8] Для произвольного множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ положим:

$$\begin{aligned} \varphi_{\inf}(Q) &= \inf\{\varphi(x) : x \in S(\varphi) \cap Q\}, \\ \varphi_{\sup}(Q) &= \sup\{\varphi(x) : x \in S(\varphi) \cap Q\}. \end{aligned}$$

Тогда все инвариантные компакты системы (29), целиком содержащиеся в множестве Q , содержатся в подмножестве $\Omega(\varphi, Q) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_{\inf}(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}(Q)\}$.

Множество $\Omega(\varphi, Q)$ называют локализирующим для системы (29), а функцию φ , порождающую это множество, – локализирующей.

Строить локализирующее множество можно с помощью последовательного применения нескольких локализирующих функций. Соответствующий процесс называется итерационной процедурой.

Теорема 3. [8] *Рассмотрим последовательность функций $\varphi_k \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ и некоторое множество $Q \subset \mathbb{R}^n$. Положим $Q_0 = Q$, $Q_k = \Omega(\varphi, Q_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots$, и $Q_\infty = \bigcap_{k=1}^\infty Q_k$. Тогда $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_\infty$ и, кроме того, все инвариантные компактные множества, целиком лежащие в Q , также содержатся в Q_∞ .*

Приложение 2

Для доказательства леммы 1 воспользуемся теоремой Бендиксона [1]. Приведем для корректности изложения ее формулировку.

Теорема 4. *Если в некоторой односвязной области U выражение $P'_x + Q'_y$ не меняет знака и не равно нулю тождественно, то в этой области не существует замкнутых контуров, составленных из траекторий системы $\dot{x} = Q(x, y)$, $\dot{y} = P(x, y)$.*

Применим теорему 4 к системе (1). Запишем правую часть системы в терминах теоремы:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= h_{01}x + h_{02}x^2 + h_{03}xy; \\ Q(x, y) &= h_{11}x + h_{12}y + h_{13}xy + h_{14}x^2 + h_{15}y^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} Q(x, y) = \\ &= h_{01} + 2h_{02}x + h_{03}y + h_{12} + h_{13}x + 2h_{15}y = \\ &= x(2h_{02} + h_{13}) + y(h_{03} + 2h_{15}) + h_{01} + h_{12}. \end{aligned}$$

Заметим, что рассматриваемая область – это множество G (3).

Учитывая соотношения (4), заметим, что параметры функции $\omega(x, y)$ лежат в следующих пределах:

$$\begin{aligned}(2h_{02} + h_{13}) &\in [-4\beta_{00}, 2\beta_{00}]; \\ (h_{03} + 2h_{15}) &\in [-\beta_{01} - 2\mu\beta_{11}, \beta_{00}]; \\ h_{01} + h_{12} &\in [-2, 1 + \mu],\end{aligned}$$

где $\beta_{00}, \beta_{10}, \beta_{01}, \mu > 0$. Таким образом, теорема 1 доказана.

Литература

1. БАУТИН Н.Н., ЛЕОНТОВИЧ Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*. – М.: Наука, 1990. – 486 с.
2. ВИНОГРАДОВА М.С. *Динамическая модель клеточной популяционной системы* // Наука и образование. Эл. журнал. МГТУ им. Н.Э. Баумана – 2013. – №12. – С. 175–192.
3. ВИНОГРАДОВА М.С. *Исследование нелинейной модели развития клеточной популяционной системы* // Наука и образование. Эл. журнал МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2014. – №8. – С. 123–138.
4. ВИНОГРАДОВА М.С., КАНАТНИКОВ А.Н., ТКАЧЕВА О.С. *Поведение двухкомпонентной популяционной системы в окрестности нулевого положения равновесия* // Математика и математическое моделирование. – 2017. – №6. – С. 19–31.
5. ВОРКЕЛЬ А.А., КРИЩЕНКО А.П. *Численное исследование асимптотической устойчивости положений равновесия* // Наука и образование. Эл. журнал. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2017. – №3. – С. 44–63.
6. ДРУЖИНИНА О.В., СЕДОВА Н.О. *О методе локализации предельных множества динамических систем* // Материалы VI Международной научно-практической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора А.А. Шестакова. Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина. – Елец. – 2020. – С. 38–52.
7. КАНАТНИКОВ А.Н., КРИЩЕНКО А.П. *Качественные свойства системы Дуффинга с полиномиальной нелинейностью* // Труды МИАН. – 2020. – №308. – С. 197–209.

8. КАНАТНИКОВ А.Н., КРИШЕНКО А.П. *Функциональный метод локализации и принцип инвариантности Ла-Салля* // Математика и математическое моделирование. – 2021. – №1. – С. 1–12.
9. КАНАТНИКОВ А.Н., ФЕДОРОВА Ю.П. *Локализация инвариантных компактов двумерных непрерывных динамических системы* // Наука и образование. Эл. журнал. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2013. – №7. – С. 159–174.
10. КОЛЕСНИКОВ А.А., ВЕСЕЛОВ Г.Е., ВАВИЛОВ О.Т. и др. *Современная прикладная теория управления. Ч. II: синергетический подход в теории управления* / Под ред. А.А. Колесникова. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. – 557 с.
11. МАЛИНЕЦКИЙ Г.Г. *Математические основы синергетики*. – М.: URSS, 2017. – 322 с.
12. ПЛЮСНИНА Т.Ю., ФУРСОВА П.В., ДЬЯКОНОВА А.Н. и др. *Математические модели в биологии: учебное пособие*. Изд. 3-е доп. – М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2021. – 174 с.
13. ТКАЧЕВА О.С. *Исследование модели развития клеточной популяционной системы* // Труды 19-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2023, Воронеж). – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2023. – С. 55–60.
14. ТКАЧЕВА О.С., КАНАТНИКОВ А.Н. *Поведение траекторий в четырехмерной модели ВИЧ-инфекции* // Дифференциальные уравнения. – 2023. – Т. 59. – №11. – С. 1451–1461.
15. BANIYA V., KEVAL R. *The influence of vaccination on the control of JE with a standard incidence rate of mosquitoes, pigs and humans* // Journal of Applied Mathematics and Computing. – 2020. – Vol. 64. – P. 519–550.
16. DUCHESNE B., TUCKER-DROB R., WESOLEK P. *A new lattice invariant for lattices in totally disconnected locally compact groups* // Israel Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 240. – P. 539–565.

17. CHIBYSHEV T., KRASNOVA O., CHABINA A. et al. *Image Processing Application for Pluripotent Stem Cell Colony Migration Quantification* // Mathematics. – 2024. – Vol. 12. – Art. No. 3584 (13 p.).
18. KANATNIKOV A.N., KRISHCHENKO A.P. *Iteration procedure of localization in a chronic Leukemia model* // AIP Conf. Proc. – 2020. – Vol. 2293. – Art. No. 210004 (4 p.).
19. KRISHCHENKO A.P., STARKOV K.E. *5D model of pancreatic cancer: Key features of ultimate dynamics* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2021. – Vol. 103. – Art. No. 105997.
20. MUKHERJEE D. *Effect of constant immigration in plant–pathogen–herbivore interactions* // Mathematics and Computers in Simulation. – 2019. – Vol. 160. – P. 192–200.
21. STARKOV K.E., KANATNIKOV A.N. *Eradication Conditions of Infected Cell Populations in the 7-Order HIV Model with Viral Mutations and Related Results* // Mathematics. – 2021. – Vol. 9. – Art. No. 1862 (14 p.).
22. STARKOV K.E., KANATNIKOV A.N. *Cancer cell eradication in a 6D metastatic tumor model with time delay* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2023. – Vol. 120. – Art. No. 107164 (14 p.).
23. STARKOV K.E. *Ultimate Dynamics Analysis of the 5D Structural Leukemia Model and Partitioning of the Parameter Space* // Int. Journal of Bifurcation and Chaos. – 2022. – Vol. 32. – Art. No. 2250237.
24. STARKOV K.E., KANATNIKOV A.N., ANDRES G. *Ultimate tumor dynamics and eradication using oncolytic virotherapy* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2021. – Vol. 92. – Art. No. 105469.
25. VALLE P.A., CORIA L.N., SALAZAR Y. *Tumor Clearance Analysis on a Cancer Chemo-Immunotherapy Mathematical Model* // Bulletin of Mathematical Biology. – 2019. – Vol. 81. – P. 4144–4173.

BEHAVIOR OF TRAJECTORIES OF THE DEVELOPMENT MODEL OF A CELLULAR POPULATION SYSTEM

Olga Tkacheva, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Junior Researcher, BMSTU, Senior Lecturer of the Department (HolgaTkc@yandex.ru).

Abstract: The paper studies a mathematical model of the development of an «in vitro» cellular population system that includes two types of cells, healthy and diseased, such as cancer cells. The model allows one to describe various scenarios of cell behavior, including the degeneration of healthy cells into cancer cells. The model is represented by a second-order ODE system. The phase space of this system is a non-negative orthant, which must be taken into account when analyzing the behavior of this system. An analysis of constraints on the parameters of the system is presented. The paper completes the analysis of equilibrium positions, which was started in earlier works. Conditions are given for the parameters when the system has one, two, three or four equilibrium positions in a non-negative orthant. The condition for the transition of an equilibrium position from a state located inside the positive region to the coordinate axis is described. The conditions for the stability of equilibrium positions in some cases are considered. Phase portraits of the system are constructed for various parameters, illustrating cases of different numbers of equilibrium positions. For the system, using the method of localization of invariant compacts, boundaries for limited trajectories are found, conditions are determined when there is no cycle in the obtained localizing set.

Keywords: model of cell population development, equilibrium position, localizing set.

УДК 517.925

ББК 32.965.5

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.А. Уткиным.*

Поступила в редакцию 07.11.2024.

Дата опубликования 31.03.2025.

УПРАВЛЕНИЕ СЕТЬЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АГЕНТОВ В УСЛОВИЯХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Имангазиева А.В.¹

(ФГБОУ ВО Астраханский государственный технический университет, Астрахань)

Предлагается структура системы управления синхронизацией сети идентичных агентов в условиях нестационарности и параметрической неопределенности моделей агентов. При синхронизации требуется обеспечить согласованное во времени поведение однотипных агентов сети с учетом действующих на каждый агент внешних возмущений. В подсистемах осуществляется слежение за скалярным выходом ведущего агента-лидера, агенты зависимы. Измерению доступны скалярные входы и выходы агентов. Для решения поставленной сетевой задачи в каждом агенте строятся законы управления на основе метода вспомогательного контура, в основе которого лежит принцип динамической компенсации. Предварительно формируются сигналы, несущие информацию, негативно влияющую на регулирование подсистемы, а затем осуществляется их компенсация. В каждом агенте требуется информация о производных промежуточных сигналов, для чего используются наблюдатели Халила. Для иллюстрации работоспособности предложенной системы синхронизации рассмотрен числовой пример управления сетевым объектом, состоящим из четырех агентов, каждый из которых подвержен действию внешних, различных по амплитуде, возмущений. Проведено моделирование в MATLAB Simulink. Результаты моделирования подтвердили теоретические выводы и показали хорошую работоспособность системы синхронизации в условиях неопределенности и нестационарности моделей агентов сети.

Ключевые слова: управление, синхронизация, нестационарность, сеть агентов, параметрическая неопределенность, наблюдатель, вспомогательный контур, возмущения.

1. Введение

Актуальность задач управления сетевыми объектами управления вызвана широким применением таких агентов сетей как подвижные роботы, беспилотные летательные аппараты, высокотехнологичные установки, суда и т.д. Рост производственных мощностей и связанных с этим задач предполагает многократное увеличение производительности в различных от-

¹ Алия Владимировна Имангазиева, к.т.н., доцент (aliya111@yandex.ru).

раслях промышленности, что обуславливает необходимость внедрения новых современных сетевых систем управления, предназначенных для большого числа агентов управления в условиях неточных знаний о параметрах их моделей. При управлении такими сетями агентов ставятся различные цели: синхронизация, десинхронизация, роение, консенсус и т.д. Так, например, в работе [16] решается задача робастной синхронизации сети взаимосвязанных агентов с лидером, в которой каждая локальная подсистема сети описывается линейным дифференциальным уравнением с параметрической и функциональной неопределенностью, изменяющейся во времени. В работе [7] устанавливается связь между колебательностью и десинхронизацией для диффузионно-связанных сетей из простейших моделей нейронов ФитцХью – Нагумо, а также предложена их полная десинхронизация. В [24] предложен алгоритм стайного поведения агентов управления. В публикации [28] исследуется консенсус линейных мультиагентных систем на неориентированных графах. Проблемы робастного H_∞ -управления цепочками поставок в условиях переключаемой топологии и неопределенных требований предложены в работах [21, 27]. С обзором проблем и моделей сетевого управления можно ознакомиться в работе [9].

Важной проблемой управления является влияние переменных параметров модели объекта на функционирование системы управления [3, 4, 6, 10, 22, 26]. Это связано с тем, что параметры, например, технологических объектов и протекающие в них процессы, при которых они функционируют, не всегда постоянны: меняется качество поставляемого сырья, изнашиваются агрегаты, устаревает технологическое оборудование и т.д. Кроме того технологические объекты управления функционируют в условиях неопределенности [8, 14, 15, 25], а также постоянно действующих возмущений [1, 2, 11–14, 20, 23]. Получение эффективных законов управления, компенсирующих влияние меняющихся во времени параметров, а также действие контролируемых и неконтролируемых возмущений, является одной из важных задач при проектировании систем управления нестационарными объектами. Получены разные решения задач управления нестационарными объектами. Так, например, в работах

[6, 22] приведены исследования по магнитному управлению положением, формой и током плазмы в токамак-реакторе, модель которого описывается системой двух дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Метод вспомогательного контура [15], основанный на принципе динамической компенсации, позволяет синхронизировать сеть агентов с учетом перекрестных связей, нелинейности модели, наличии запаздывания в условиях интервальной неопределенности параметров и подверженных действиям внешних неконтролируемых возмущений [5, 16, 19]. При синхронизации требуется обеспечить согласованное поведение агентов сети.

В данной работе для решения сетевой задачи предлагается одна из возможных структур управления синхронизацией с использованием метода вспомогательного контура. Предлагается в каждом агенте сети формировать управляющие воздействия, используя метод вспомогательного контура: осуществляется параметризация [18], выделяется сигнал, несущий информацию о нестационарных составляющих, внешних и параметрических возмущениях, а затем компенсируется его негативное влияние на подсистему с помощью введенного вспомогательного контура. При построении такой системы синхронизации требуется информация о производных промежуточных сигналов системы, для чего используются, специальным образом, два наблюдателя Халила. Второй наблюдатель Халила позволяет компенсировать погрешность наблюдения первого наблюдателя, в отличие от работы [15], где в каждом агенте сети управляющий сигнал формируется с использованием в контуре управления агентом одного наблюдателя. Кроме того, в отличие от других работ, например, [3], данная схема не требует реализации фильтров состояния для формирования вектора регрессии, что существенно уменьшает порядок замкнутой системы.

В дальнейшем изложении будем рассматривать сеть, состоящую из однотипных агентов.

2. Постановка задачи

Пусть задана сеть взаимосвязных r агентов, динамические процессы в которой описываются нестационарными уравнениями в операторной форме

$$(1) \quad Q_l(p, t)y_l(t) = k_l R_l(p, t)u_l(t) + \sum_{j=1, j \neq l}^r \bar{N}_{lj}(p)y_j(t) + f_l(t),$$

$$p^i y_l(0) = y_{li}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad l = 1, \dots, r,$$

где $y_l(t)$, $u_l(t)$ – выходы и входы агентов, $y_l(t) \in R$, $u_l(t) \in R$, $p = d/dt$ – оператор дифференцирования, $Q_l(p, t) = p^{n_l} + q_{l1}(t)p^{n_l-1} + \dots + q_{ln}(t)$, $R_l(p, t) = p^{m_l} + r_{l1}(t)p^{m_l-1} + \dots + r_{lm}(t)$ – дифференциальные операторы порядков n_l и m_l соответственно, $\deg \bar{N}_{lj}(p) \leq n_l - 1$, $j = 1, \dots, r$, $j \neq l$, $f_l(t)$ – внешние возмущающие воздействия, коэффициенты $k_l > 0$, y_{li} – известные начальные условия.

Будем решать задачу построения системы синхронизации для заданной сети нестационарных агентов с учетом параметрической неопределенности и влияния внешних возмущений.

Задано уравнение ведущего агента – лидера:

$$(2) \quad Q_m(p)y_m(t) = k_m g(t),$$

где $g(t)$ – задающее воздействие, $k_m > 0$, $y_m(t)$ – выход эталонной модели, $y_m(t) \in R$, $\deg Q_m(p) = n_l - m_l$.

Проектируемая система синхронизации r агентов должна обеспечить выполнение целевого условия

$$(3) \quad |y_l(t) - y_m(t)| < \delta \quad \text{при } t \geq T, \quad l = 1, \dots, r.$$

где δ – некоторое достаточно малое положительное число, $T > 0$.

Предположения.

П.1. Коэффициенты $q_{li}(t)$, $r_{lj}(t)$ операторов $Q_l(p, t)$, $R_l(p, t)$ такие, что $q_{li} = q_{li0} + \Delta q_{li}(t)$, $i = 1, \dots, n$, $r_{lj} = r_{lj0} + \Delta r_{lj}(t)$, $|\Delta q_{li}(t)| < \gamma'_{li}$, $|\Delta r_{lj}(t)| < \gamma''_{lj}$, γ'_{li} , γ''_{lj} – некоторые положительные числа, $j = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, r$.

П.2. Величины q_{lj0} , r_{lj0} и величина k_l зависят от вектора неизвестных параметров $\xi_l \in \Xi$, где Ξ – известное ограниченное множество возможных значений вектора ξ_l , $l = 1, \dots, r$.

П.3. Внешние возмущения $f_l(t)$ и задающее воздействие $g(t)$ являются ограниченными функциями, $l = 1, \dots, r$.

П.4. Полиномы $R_l(\lambda, t)$ – гурвицевы при любом фиксированном t , λ – комплексная переменная в преобразовании Лапласа, $l = 1, \dots, r$.

П.5. $\deg Q_l(p, t) = n_l$, $\deg R_l(p, t) = m_l$. Полином $Q_m(\lambda)$ – гурвицев, $l = 1, \dots, r$.

П.6. В системе управления доступны измерению скалярные входы $u_l(t)$ и выходы $y_l(t)$ агентов, $l = 1, \dots, r$.

3. Метод решения

Для решения поставленной задачи в каждом из l агентов сети, $l = 1, \dots, r$, применим робастный алгоритм управления, предложенный в работе [4]. Для этого представим операторы $Q_l(p, t)$ и $R_l(p, t)$ в виде сумм стационарных и нестационарных слагаемых $Q_l(p, t) = Q_{l0}(p) + \Delta Q_l(p, t)$, $R_l(p, t) = R_{l0}(p) + \Delta R_l(p, t)$, где $Q_{l0}(p)$, $R_{l0}(p)$ – дифференциальные операторы с постоянными неизвестными коэффициентами, зависящими от векторов неизвестных параметров $\xi_l \in \Xi$. $\Delta Q_{l0}(p, t)$ и $\Delta R_{l0}(p, t)$ нестационарные операторы, коэффициенты которых являются ограниченными непрерывными функциями времени такие, что

$$\Delta Q_l(p, t) = \Delta q_{l1}(t)p^{n-1} + \dots + \Delta q_{ln}(t),$$

$$\Delta R_l(p, t) = \Delta r_{l1}(t)p^{m-1} + \dots + \Delta r_{lm}(t).$$

$\deg Q_{l0}(p) = n_l$, $\deg \Delta Q_l(p, t) = n_l - 1$, $\deg R_{l0}(p) = m_l$,
 $\deg \Delta R_l(p, t) = m_l - 1$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$(4) \quad \begin{aligned} Q_{l0}(p)y_l(t) &= k_l R_{l0}(p)u_l - \Delta Q_l(p, t)y_l + k_l \Delta R_l(p, t)u_l + \\ &+ \sum_{j=1, j \neq l}^r \bar{N}_{lj}(p)y_j(t) + f_l(t). \end{aligned}$$

Применим известную параметризацию [18], получим

$$(5) \quad \begin{aligned} Q_{lm}(p)y_l(t) &= k_l u_l + \frac{N_{l1}(p)}{M_l(p)} u_l(t) + \frac{N_{l2}(p)}{M_l(p)} y_l(t) + \\ &+ \sum_{j=1, j \neq l}^r \frac{S_l(p) \bar{N}_{lj}(p)}{M_l(p)} y_j(t) - \frac{S_l(p)}{M_l(p)} [\Delta Q_l(p, t)y_l(t)] + \\ &+ \frac{k S_l(p)}{M_l(p)} [\Delta R_l(p, t)u_l(t)] + \frac{S_l(p)}{M_l(p)} f_l(t) + \varepsilon_l(t), \end{aligned}$$

где $M_l(\lambda)$, $S_l(\lambda)$ – гурвицевы полиномы, $\deg M_l(p) = n_l - 1$, $\deg S_l(p) = n_l - m_l - 1$, $\deg N_{l1}(p) = n_l - 2$, $\deg N_{l2}(p) = n_l - 1$; $\varepsilon_l(t)$ – экспоненциально затухающие функции, определяемые начальными условиями, $l = 1, \dots, r$. Рассмотрим сеть, состоящую из однотипных агентов, поэтому $Q_{lm} = Q_m$.

Составим уравнения относительно ошибок $e_l(t) = y_l(t) - y_{lm}(t)$, вычитая (2) из (5):

$$\begin{aligned} Q_m(p)e_l(t) = & k_l u_l(t) + \frac{N_{l1}(p)}{M_l(p)} u_l(t) + \frac{N_{l2}(p)}{M_l(p)} y_l(t) + \\ (6) \quad & + \sum_{j=1, j \neq l}^r \frac{S_l(p) \bar{N}_{lj}(p)}{M_l(p)} y_j(t) - \frac{S_l(p)}{M_l(p)} [\Delta Q_l(p, t) y_l(t)] + \\ & + \frac{k_l S_l(p)}{M_l(p)} [\Delta R_l(p, t) u_l(t)] + \frac{S_l(p)}{M_l(p)} f_l(t) + \varepsilon_l(t) - k_m g(t). \end{aligned}$$

Запишем уравнение (6) в виде

$$(7) \quad Q_m(p)e_l(t) = k_l u_l(t) + \psi_l(t),$$

где

$$\begin{aligned} \psi_l(t) = & \frac{N_{l1}(p)}{M_l(p)} u_l(t) + \frac{N_{l2}(p)}{M_l(p)} y_l(t) + \sum_{j=1, j \neq l}^r \frac{S_l(p) \bar{N}_{lj}(p)}{M_l(p)} y_j(t) - \\ & - \frac{S_l(p)}{M_l(p)} [\Delta Q_l(p, t) y_l(t)] + \frac{k_l S_l(p)}{M_l(p)} [\Delta R_l(p, t) u_l(t)] + \\ & + \frac{S_l(p)}{M_l(p)} f_l(t) + \varepsilon_l(t) - k_m g(t), \quad l = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Применим обратное преобразование Лапласа к уравнению (7) и представим полученные уравнения в векторно-матричной форме:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{\Delta}_l(t) &= A_{ml} \Delta_l(t) + D_0 k_l u_l(t) + D_0 \psi_l(t), \\ e_l(t) &= L \Delta_l(t), \quad l = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

$$\text{где } A_{ml} = \begin{pmatrix} -q_{lm1} & I_{n_l - m_l - 1} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ -q_{lm(n_l - m_l)} & 0 \end{pmatrix}, \quad q_{lm1}, q_{lm2}, \dots, q_{lm(n_l - m_l)} - \text{коэффици-}$$

циенты многочленов Q_{lm} из предположения П.5; $I_{n_l - m_l - 1}$ – единичные матрицы соответствующих размерностей; $D_0 = [0, \dots, 0, 1]^T$, $L = [1, \dots, 0]$.

Зададим закон изменения $u_l(t)$ в виде

$$(9) \quad u_l(t) = T_l(p)\bar{v}_l(t), \quad \bar{v}_l(t) = \alpha_l v_l(t), \quad l = 1, \dots, r.$$

где $\alpha_l > 0$, $v_l(t)$ – новые управляющие сигналы; $T_l(p)$ – линейный дифференциальный оператор такой, что выполнено условие $T_l(\lambda)/Q_{lm}(\lambda) = 1/(\lambda + \alpha_{lm})$, $\alpha_{lm} > 0$. Тогда уравнение (7) можно преобразовать, в результате чего получим

$$(10) \quad (p + a_{lm})e_l(t) = \beta_l v_l(t) + \varphi_l(t), \quad l = 1, \dots, r.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_l(t) = & \frac{N_{1l}(p)}{T_l(p)M_l(p)}u_l(t) + \frac{N_{12}(p)}{T_l(p)M_l(p)}y_l(t) + \sum_{j=1, j \neq l}^r \frac{S_j(p)\bar{N}_{lj}(p)}{T_l(p)M_l(p)}y_j(t) - \\ & - \frac{S_l(p)}{T_l(p)M_l(p)}[\Delta Q_l(p, t)y_l(t)] + \frac{kS_l(p)}{T_l(p)M_l(p)}[\Delta R_l(p, t)u_l(t)] + \\ & + \frac{S_l(p)}{T_l(p)M_l(p)}f_l(t) + \frac{1}{T_l(p)}(\varepsilon_l(t) - k_m g(t)) + (k_l \alpha_l - \beta_l)v_l(t), \quad l = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Функции $\varphi_l(t)$, $l = 1, \dots, r$ описывают сигналы, которые несут информацию о неопределенности и нестационарности параметров модели, перекрестных связях, внешних неконтролируемых возмущениях агентов сети. Будем строить систему управления так, чтобы компенсировать негативное влияние этих сигналов на всю сеть. Для этого введем в каждом агенте вспомогательные контуры

$$(11) \quad (p + a_{lm})\bar{e}_l(t) = \beta_l v_l(t),$$

и получим уравнения для рассогласований $\zeta_l(t) = e_l(t) - \bar{e}_l(t)$:

$$(12) \quad (p + a_{lm})\zeta_l(t) = \varphi_l(t), \quad l = 1, \dots, r.$$

Если сформировать управляющее воздействие $u_l(t)$ в виде

$$(13) \quad v_l(t) = -\frac{1}{\beta_l}(p + a_{lm})\zeta_l(t) = -\frac{1}{\beta_l}\varphi_l(t), \quad l = 1, \dots, r.$$

то из (10) получим

$$(14) \quad (p + a_{lm})e_l(t) = 0, \quad l = 1, \dots, r.$$

Из (14) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} e_l(t) = 0$, $l = 1, \dots, r$.

Докажем ограниченность всех сигналов проектируемой системы. Подставив $\varphi(t)$ в (13), получим

$$(15) \quad v_l(t) = -\frac{1}{\beta_l}(k_l \alpha_l - \beta_l)v_l(t) - \frac{N_{l1}(p)}{\beta_l T_l(p)M_l(p)}u_l(t) - \frac{\varphi_{l1}(t)}{\beta_l},$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{l1}(t) = & \frac{N_{l2}(p)}{T_l(p)M_l(p)}y_l + \sum_{j=1, j \neq l}^r \frac{S_l(p)\bar{N}_{lj}(p)}{T_l(p)M_l(p)}y_j(t) - \\ & - \frac{S_l(p)}{T_l(p)M_l(p)}[\Delta Q_l(p, t)y_l(t)] + \frac{kS_l(p)}{T_l(p)M_l(p)}[\Delta R_l(p, t)u_l(t)] + \\ & + \frac{S_l(p)}{T_l(p)M_l(p)}f_l(t) + \frac{1}{T_l(p)}(\varepsilon_l(t) - k_m g(t)). \end{aligned}$$

Выразим из уравнения (15) переменную $u_l(t)$ и подставим полученное выражение в (9):

$$\begin{aligned} u_l(t) = & -\frac{1}{k_l} \left(\frac{N_{l1}(p)}{M_l(p)}u_l(t) + \frac{N_{l2}(p)}{M_l(p)}y_l(t) - \right. \\ (16) \quad & + \sum_{j=1, j \neq l}^r \frac{S_l(p)\bar{N}_{lj}(p)}{M_l(p)}y_j(t) - \frac{S_l(p)}{M_l(p)}[\Delta Q_l(p, t)y_l(t)] + \\ & \left. + \frac{kS_l(p)}{M_l(p)}[\Delta R_l(p, t)u_l(t)] + \frac{S_l(p)}{M_l(p)}f_l(t) + \varepsilon_l(t) - k_m g(t) \right). \end{aligned}$$

Подставим (16) в (6), в результате чего получим

$$(17) \quad Q_m(p)e_l(t) = 0,$$

откуда следует ограниченность не только величин $y_l(t)$, но и $n_l - m_l$ их производных, а следовательно, и переменных $y_l(t)$ и их производных в силу предположений П.3 и П.5. Представим уравнение (16) в следующем виде:

$$\begin{aligned} (18) \quad & (k_l M_l(p) + N_{l1}(p) + kS_l(p)\Delta R_l(p; t))u_l(t) = \\ & = -(N_{l2}(p)y_l(t) + \sum_{j=1, j \neq l}^r S_l(p)\bar{N}_{lj}(p)y_j(t) - \\ & - S_l(p)\Delta Q_l(p; t)y_l(t) + S_l(p)f_l(t) + M_l(p)\varepsilon_l(t) - M_l(p)k_m g(t)). \end{aligned}$$

Положим $k_l M_l(p) + N_{l1}(p) + k_l S_l(p) \Delta R_l(p, t) = k_l S_l(p) R_l(p, t)$, где полиномы $S_l(\lambda)$ гурвицевы, а $R_l(p, t)$ – устойчивы в силу предположения П.4. Кроме того, $y_l(t)$, $f_l(t)$, $\varepsilon_l(t)$, $g_l(t)$, – ограниченные функции, следовательно, $u_l(t)$ – ограниченные функции. Из чего следует и ограниченность сигналов $\varphi_l(t)$, $l = 1, \dots, r$. Тогда из выражения (12) следует ограниченность переменных $\xi_l(t)$ и их производных.

В силу предположения П.6 реализацию производных сигнала $y_l(t)$ осуществим с помощью наблюдателя [17]. Для этого зададим законы изменения $u_l(t)$ в виде

$$(19) \quad u_l(t) = \bar{T}_l \xi_l(t), \quad l = 1, \dots, r,$$

где $\bar{T}_l = [s_{l0}, s_{l1}, \dots, s_{l(n_l - m_l - 1)}]$, $s_{l0}, s_{l1}, \dots, s_{l(n_l - m_l - 1)}$ – коэффициенты полиномов $T_l(\lambda)$, $\xi_l(t)$ – векторы состояний, полученные с наблюдателей [17], которые представлены в виде

$$(20) \quad \dot{\xi}_l = F_{l0} \xi_l(t) + B_{l0} (v_l(t) - \bar{v}_l(t)), \quad \bar{v}_l(t) = L \xi_l(t), \quad l = 1, \dots, r,$$

Здесь $\xi_l(t) \in R^{n_l - m_l}$, F_{l0} – матрицы в форме Фробениуса

с нулевой нижней строкой, $L = [1, 0, \dots, 0]$, $B_{l0}^T = \left[\frac{b_{l1}}{\mu_l}, \dots, \frac{b_{n_l - m_l}}{\mu_l^{n_l - m_l}} \right]$,

$l = 1, \dots, r$. Параметры $b_{l1}, \dots, b_{l(n_l - m_l)}$ выбираются так, чтобы матрицы $F_l = F_{l0} + B_l L$ были гурвицевыми, $B_l^T = [b_{l1}, \dots, b_{l(n_l - m_l)}]$, $\mu_l > 0$ – достаточно малые числа, $l = 1, \dots, r$.

Подставим (19) в (6) и, выбрав полиномы $T_l(\lambda)$, $l = 1, \dots, r$, так, чтобы передаточные функции удовлетворяли условию

$T_l(\lambda)/Q_{lm}(\lambda) = 1/(\lambda + \alpha_{lm})$, $\alpha_{lm} > 0$, получим

$$(21) \quad (p + a_{lm}) e_l(t) = \beta_l v_l(t) + \bar{\varphi}_l(t), \quad l = 1, \dots, r,$$

где $\bar{\varphi}_l(t) = \varphi_l(t) + \beta_l (\bar{v}_l(t) - v_l(t))$.

Функции $\bar{\varphi}_l(t)$, $l = 1, \dots, r$, описывают информацию о неопределенностях параметров моделей агентов управления, внешних неконтролируемых возмущениях, погрешностях оценок переменных $y_l(t)$ и их $n_l - m_l - 1$ производных.

Система строится при выполнении предположения П.6, поэтому промежуточные сигналы $y_l(t)$ будем формировать в виде

$$(22) \quad v_l(t) = -\frac{1}{\beta_l}(p + a_{lm})\bar{\zeta}_l(t), \quad l = 1, \dots, r,$$

где $\bar{\zeta}_l(t)$ – оценка, получаемая с наблюдателя (20) в виде

$$(23) \quad \begin{aligned} \dot{z}_l &= \bar{F}_{l0}z_l(t) + \bar{B}_{l0}(\zeta_l(t) - \bar{\zeta}_l(t)), \\ \bar{\zeta}_l(t) &= L_2z_l(t), \end{aligned}$$

где $z_l(t) \in R^2$, $\bar{F}_{l0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{B}_{l0} = \begin{bmatrix} \frac{d_{l1}}{\mu_l}, \frac{d_{l2}}{\mu_l^2} \end{bmatrix}$, $L_2 = [1, 0]$. Параметры d_{l1}, d_{l2} выбираются аналогично, как в наблюдателе (20), $l = 1, \dots, r$.

Введем в рассмотрение составные векторы

$$\Delta(t) = \text{col}(\Delta_1, \dots, \Delta_r), \quad k = \text{col}(k_1, \dots, k_r),$$

$$u = \text{col}(u_1, \dots, u_r), \quad \psi = \text{col}(\psi_1, \dots, \psi_r),$$

$$e = \text{col}(e_1, \dots, e_r), \quad \bar{e} = \text{col}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r),$$

$$v = \text{col}(v_1, \dots, v_r), \quad \bar{v} = \text{col}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_r),$$

$$\zeta = \text{col}(\zeta_1, \dots, \zeta_r), \quad \bar{\zeta} = \text{col}(\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_r),$$

$$\phi = \text{col}(\phi_1, \dots, \phi_r), \quad \omega = \text{col}(\omega_1, \dots, \omega_r),$$

$$\xi = \text{col}(\xi_1, \dots, \xi_r), \quad z = \text{col}(z_1, \dots, z_r)$$

и блочно-диагональные матрицы

$$A_m = \text{diag}\{A_{m1}, \dots, A_{mr}\}, \quad D = \text{diag}\{D_0, \dots, D_0\}, \quad \bar{T} = \text{diag}\{\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_r\},$$

$$\beta = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_r\}, \quad L_0 = \text{diag}\{L, \dots, L\}, \quad \alpha = \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\},$$

$$F_0 = \text{diag}\{F_{10}, \dots, F_{r0}\}, \quad B_0 = \text{diag}\{B_{10}, \dots, B_{r0}\}.$$

Преобразуем уравнения (8), (11), (13), (19), (20), (22), (23) в векторно-матричные уравнения

$$(24) \quad \begin{aligned} \dot{\Delta}(t) &= A_m\Delta(t) + D_0ku(t) + D_0\psi(t), \\ e(t) &= L\Delta(t), \end{aligned}$$

$$(25) \quad \dot{\bar{e}} + a_m\bar{e} = \beta v(t),$$

$$(26) \quad \beta v(t) = -(\dot{\zeta}_l(t) + a_m\zeta_l(t)),$$

$$(27) \quad u_l(t) = \bar{T}_l\bar{\zeta}_l(t), \quad l = 1, \dots, r,$$

$$(28) \quad \dot{\xi} = F_0 \xi(t) + B_0(v(t) - \bar{v}(t)), \quad \bar{v}(t) = L \xi(t),$$

$$(29) \quad \beta v(t) = -(\dot{\bar{\zeta}} + a_m \bar{\zeta}_l(t)),$$

где $\bar{\zeta}_l(t)$ – оценки, получаемые с наблюдателей

$$(30) \quad \begin{aligned} \dot{z} &= \bar{F}_0 z(t) + \bar{B}_0(\zeta(t) - \bar{\zeta}(t)), \\ \bar{\zeta}(t) &= L_2 z(t), \end{aligned}$$

Утверждение. Пусть выполнены условия предположений П.1 – П.6, тогда для любого $\delta > 0$ в (3) существуют числа $\mu_0 > 0$, $T > 0$ такие, что при $\mu \leq \mu_0$ и $t \geq T$ для системы (24)–(30) выполнено целевое условие (3) и все переменные в системе ограничены.

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

4. Числовой пример

Рассмотрим однородную сеть, состоящую из четырех взаимосвязанных нестационарных агентов, заданных следующими системами дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12}, \\ \dot{x}_{12} = x_{13}, \\ \dot{x}_{13} = x_{14} + c_{10}u_1 + n_{12}y_2 + n_{13}y_3 + n_{14}y_4, \\ \dot{x}_{14} = -q_{14}(t)x_{11} - q_{13}(t)x_{12} - q_{12}(t)x_{13} - q_{11}(t)x_{14} + c_{11}(t)u_1 + \\ + n_{12}y_2 + n_{13}y_3 + n_{14}y_4 + f_1(t), \\ y_1 = x_{11}; \\ \dot{x}_{21} = x_{22}, \\ \dot{x}_{22} = x_{23}, \\ \dot{x}_{23} = x_{24} + c_{20}u_2 + n_{21}y_1 + n_{23}y_3 + n_{24}y_4, \\ \dot{x}_{24} = -q_{24}(t)x_{21} - q_{23}(t)x_{22} - q_{22}(t)x_{23} - q_{21}(t)x_{24} + c_{21}(t)u_2 + \\ + n_{21}y_1 + n_{23}y_3 + n_{24}y_4 + f_2(t), \\ y_2 = x_{21}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{31} = x_{32}, \\ \dot{x}_{32} = x_{33}, \\ \dot{x}_{33} = x_{34} + c_{30}u_3 + n_{31}y_1 + n_{32}y_2 + n_{34}y_4, \\ \dot{x}_{34} = -q_{34}(t)x_{31} - q_{33}(t)x_{32} - q_{32}(t)x_{33} - q_{31}(t)x_{34} + c_{31}(t)u_3 + \\ + n_{31}y_1 + n_{32}y_2 + n_{34}y_4 + f_3(t), \\ y_3 = x_{31}; \\ \dot{x}_{41} = x_{42}, \\ \dot{x}_{42} = x_{43}, \\ \dot{x}_{43} = x_{44} + c_{40}u_4 + n_{41}y_1 + n_{42}y_2 + n_{43}y_3, \\ \dot{x}_{44} = -q_{44}(t)x_{41} - q_{43}(t)x_{42} - q_{42}(t)x_{43} - q_{41}(t)x_{44} + c_{41}(t)u_4 + \\ + n_{41}y_1 + n_{42}y_2 + n_{43}y_3 + f_4(t), \\ y_4 = x_{41}. \end{cases}$$

Перейдем от канонических форм описания агентов к операторным формам описания. Тогда уравнения в операторных формах примут вид (1):

$$\begin{aligned} (p^4 + q_{l1}(t)p^3 + q_{l2}(t)p^2 + q_{l3}(t)p + q_{l4}(t))y_l(t) = \\ = (r_{l0}p + r_{l1}(t))u_l + \sum_{j=1, j \neq l}^4 \bar{N}_{lj}(p)y_j(t) + f_l(t), \quad l=1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где коэффициенты $r_{l0} = c_{l0}$, $r_{l1} = c_{l1}(t) + c_{l0}q_{l1}(t)$, $\bar{N}_{lj}(p) = n_{lj}p + n_{lj}$, $l=1, 2, 3, 4$, $l \neq j$, $l=1, 2, 3, 4$. Представив коэффициенты $q_{li}(t)$, $r_{li}(t)$, $l=1, 2, 3, 4$, в виде сумм стационарных и нестационарных составляющих $q_{li}(t) = q_{li0} + \Delta q_{li}(t)$, $i=1, 2, 3, 4$, $r_{li}(t) = r_{li0} + \Delta r_{li}(t)$, $\gamma=0, 1$, $l=1, 2, 3, 4$, получим уравнение (4):

$$\begin{aligned} (p^4 + q_{l10}p^3 + q_{l20}p^2 + q_{l30}p + q_{l40}) = (r_{l0}p + r_{l10})u_l - (\Delta q_{l1}(t)p^3 + \\ + \Delta q_{l2}(t)p^2 + \Delta q_{l3}(t)p + \Delta q_{l4}(t)) + \Delta r_{l1}(t)u_l + \sum_{j=1, j \neq l}^4 \bar{N}_{lj}(p)y_j(t) + \\ + f_l(t), \quad l=1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Заметим, что $r_{l0} = k_l$, $l=1, 2, 3, 4$.

Уравнение ведущего агента-лидера: $(p+3)^3y_m(t) = 81r(t)$.

Предположим, что известно множество Ξ возможных зна-

чений параметров моделей агентов: $-4 \leq q_{i0} \leq 4$, $-6 \leq \Delta q_{li}(t) \leq 6$, $i = 1, 2, 3, 4$, $1 \leq r_{i0} \leq 4$, $-7 \leq \Delta r_{li}(t) \leq 25$, $4 \leq r_{l10} \leq 15$. Внешние возмущения в каждом агенте сети не контролируются, согласно предположению П.3 удовлетворяют условию $|f_l(t)| < 10$, $l = 1, 2, 3, 4$.

Выберем в каждом агенте сети полиномы $T_l(\lambda) = (\lambda + 3)^3$, $\beta_l = 20$, $l = 1, 2, 3, 4$.

Вспомогательные контуры введем в виде $(p + 3)\bar{e}_l(t) = 20v_l(t)$, $l = 1, 2, 3, 4$, тогда уравнения наблюдателей (20), (23) примут вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{l1}(t) = \xi_{l2}(t) + \frac{6}{\mu_l}(v_l(t) - \xi_{l1}(t)), \\ \dot{\xi}_{l2}(t) = \frac{8}{\mu_l^2}(v_l(t) - \xi_{l1}(t)), \\ \bar{v}_l(t) = \xi_{l1}(t). \end{cases}$$

Моделирование системы синхронизации сети проводилось при следующих значениях коэффициентов уравнений моделей агентов: $q_{110} = 3$, $q_{210} = 4$, $q_{310} = 2$, $q_{410} = -1$, $\Delta q_{l1}(t) = 3\cos 4t$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\Delta q_{l4}(t) = \sin 2t$, $\Delta q_{l1}(t) = 3\cos 4t$, $\Delta q_{l2}(t) = 5\cos 4t$, $q_{l3}(t) = 3\sin t$, $c_{l1}(t) = 5 + \sin 5t$, $c_{l0} = r_{l0} = k_l = 4$, $r_{l10} = 3$, $\Delta r_{l1}(t) = \sin t$, $l = 1, 2, 3, 4$; $n_{12} = n_{21} = n_{31} = n_{41} = 1$, $n_{13} = n_{23} = n_{32} = n_{42} = 2$, $n_{14} = n_{24} = n_{34} = n_{43} = 3$. Задающее воздействие в уравнении ведущего агента (2) имеет вид $g(t) = 1 + \sin 3t$, $k_m = 81$.

Синхронизируются четыре идентичных агента при условии воздействия на них разных по амплитуде внешних гармонических возмущений:

$$f_1(t) = 9\sin 1,7t, f_2(t) = 8,5\sin 3t, f_3(t) = 7\sin 5t, f_4(t) = 2\sin t.$$

Параметры регулятора: $\mu_l = 0,01$, $a_{lm} = 3$, $l = 1, 2, 3, 4$. Начальные условия нулевые.

На рис.1. представлен выход ведущего агента – лидера, сигнал которого отслеживают выходы агентов сети.

На рис. 2. представлены ошибки слежения $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$, $e_4(t)$ в четырех агентах сети.

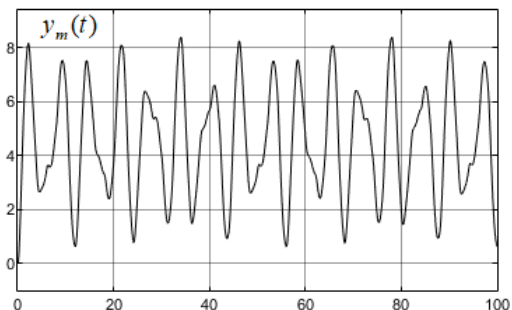


Рис. 1. Переходный процесс по выходу $y_m(t)$ ведущего агента – лидера сети

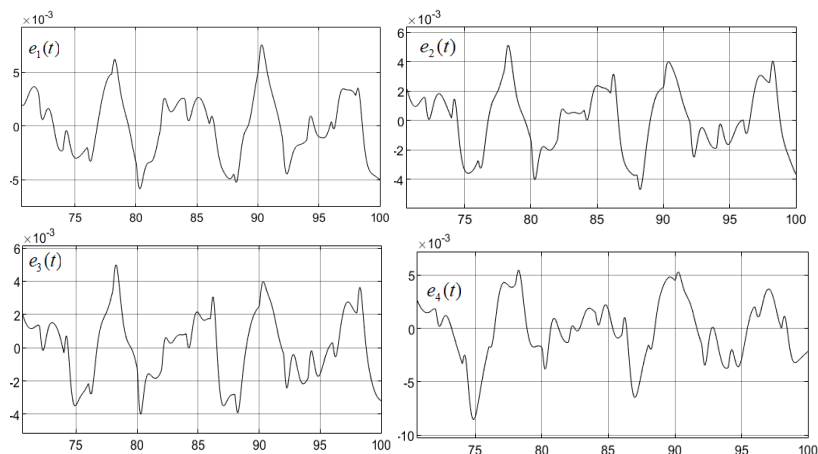


Рис. 2. Переходные процессы по ошибкам слежения $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$, $e_4(t)$

5. Заключение

В работе рассмотрен один из возможных подходов построения системы синхронизации сети взаимосвязанных нестационарных агентов в условиях неопределенности и внешних возмущений с использованием в каждом агенте сети вспомогательного контура и двух наблюдателей переменных. Получена система синхронизации с использованием данных об измерениях ска-

лярных входов и выходов агентов сети. Рассмотрен иллюстрирующий числовой пример сетевого объекта. Имитационное моделирование системы управления сетью, состоящей из четырех агентов, проведено в пакете SimulinkMatlab. Результаты моделирования подтвердили теоретические выводы и продемонстрировали эффективность системы синхронизации в условиях параметрической неопределенности и внешних возмущений.

Приложение

Доказательство утверждения. Введем в рассмотрение нормированные векторы $\bar{\eta}(t), \bar{w}(t)$ ошибок оценок производных переменных $v(t), \zeta(t)$:

$$\bar{\eta}(t) = \Gamma_1^{-1}(\sigma(t) - \xi(t)), \quad \bar{w}(t) = \Gamma_2^{-1}(z_0(t) - z(t)),$$

где $\sigma^T = (v(t), p v(t), \dots, p^{n-m} v(t))$, $z_0^T = [\zeta(t), p \zeta(t)]$,

$\Gamma_1 = \text{diag}\{\mu^{n-m-1}, \dots, \mu, 1\}$, $\Gamma_2 = \text{diag}\{\mu, 1\}$.

Тогда уравнения наблюдателей (20) и (23) с учетом введенных нормированных векторов примут вид

$$(31) \quad \begin{cases} \dot{\bar{\eta}}(t) = \frac{1}{\mu} \bar{F} \bar{\eta} - \bar{b}_0 p^{n-m} v(t), \\ \theta(t) = \mu^{n-m-1} L \bar{\eta}(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\bar{w}}(t) = \frac{1}{\mu} \bar{F} \bar{w}(t) - \bar{b}_0 p^2 \zeta(t), \\ \tau(t) = \mu L_2 \bar{w}(t), \end{cases}$$

где $\bar{F} = \bar{F}_0 + \bar{B}_0 L_2$, $\bar{b}_0^T = [0, \dots, 1]$, $\bar{b}_0^T = [0, 1]$, $L_2 = [1, 0]$,

$\theta(t) = v(t) - \bar{v}(t)$, $\tau(t) = \zeta(t) - \bar{\zeta}(t)$.

Перейдем к операторным формам записи уравнений (31):

$$(32) \quad \left(p^{n-m} + \frac{b_1}{\mu} p^{n-m-1} + \dots + \frac{b_{(n-m)}}{\mu^{n-m}} \right) \theta(t) = p^{n-m} v(t),$$

$$(33) \quad \left(p^2 + \frac{d_1}{\mu} p + \frac{d_2}{\mu^2} \right) \tau(t) = p^2 \zeta(t).$$

Заметим, что уравнения (31) можно записать в виде

$$(34) \quad \begin{cases} \dot{\eta}(t) = \frac{1}{\mu} F \eta(t) - b p v(t), \\ \theta(t) = \mu^{n-m-1} L \eta(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{w}(t) = \frac{1}{\mu} \bar{F} w(t) - \bar{b} p \zeta(t), \\ \tau(t) = \mu L_2 w(t), \end{cases}$$

где $b^T = [1, 0, \dots, 0]$, $\bar{b}^T = [1, 0]$. Уравнения (31) и (34) эквивалентны, так как являются разными векторно-матричными формами записей уравнений (32), (33).

Учитывая (19), (21), (22) и (34), уравнение для рассогласований (12) примет вид

$$(35) \quad e(t) = -\mu L_2 w(t).$$

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V(t) = \eta^T(t) H \eta(t) + w^T(t) H_1 w(t),$$

где матрицы H , H_1 являются решениями уравнений Ляпунова

$$H F + F^T H = -2\rho_1 I, \quad H_1 \bar{F} + \bar{F}^T H_1 = -2\rho_2 I,$$

где $H > 0$, $H_1 > 0$, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$.

Вычислим полную производную на траекториях системы (34):

$$(36) \quad \dot{V}(t) = -2\frac{\rho_1}{\mu} |\eta(t)|^2 - 2\frac{\rho_2}{\mu} |w(t)|^2 - 2\eta^T(t) H p v(t) - 2w^T(t) H_1 p \zeta(t).$$

Запишем уравнения (23) в виде

$$(37) \quad \begin{cases} \mu_1 \dot{\eta}(t) = F \eta(t) - \mu_2 b p v(t), \\ \mu_1 \dot{w}(t) = \bar{F} w(t) - \mu_2 \bar{b} p \zeta(t), \\ (p + a_m) e = -\mu_2 (p + a_m) L_2 w(t), \\ \mu_1 = \mu_2. \end{cases}$$

Воспользуемся леммой 1 [14].

Пусть в (37) $\mu_2 = 0$, тогда имеем две системы

$$\mu_1 \dot{\eta}_l(t) = F \eta(t),$$

$$\mu_1 \dot{w}_l(t) = \bar{F} w(t),$$

которые в силу условий (20) и (23) являются экспоненциально устойчивыми, все производные измеряются. То есть в области Ω , как было доказано ранее, $e(t) \rightarrow 0$, $|v(t)| < k_1$, $|\zeta(t)| < k_2$, а из (9) и (12) следует, что $|\dot{\zeta}(t)| < k_3$, $|\dot{v}(t)| < k_4$, где k_1, k_2, k_3, k_4 –

некоторые положительные константы. Таким образом, условия леммы 1 [14] выполнены.

Покажем, что в случае $\mu_2 \neq 0$, а точнее при $\mu_1 < \mu_0$ и $\mu_2 < \mu_0$ областью диссипативности будет Ω . Положим в (37) $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ и, подставив их в (36), воспользуемся следующими оценками:

$$-2\eta^T(t)Hpv(t) \leq \frac{1}{\mu}|\eta(t)|^2 + \mu\|H\|pv(t) \leq \frac{1}{\mu}|\eta(t)|^2 + \mu\|H\|k_3,$$

$$-2w^T(t)H_1p\zeta(t) \leq \frac{1}{\mu}|w(t)|^2 + \mu\|H_1\|k_4.$$

Оценим производную (36) от функции Ляпунова, используя полученные последние неравенства

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\frac{\rho_1}{\mu}|\eta(t)|^2 - \frac{\rho_2}{\mu}|w(t)|^2 - \frac{1}{\mu}(\rho_1 - 1)|\eta(t)|^2 - \\ & - \frac{1}{\mu}(\rho_2 - 1)|w(t)|^2 + \mu(\|H\|k_3 + \|H_1\|k_4). \end{aligned}$$

Пусть $\rho_1 > 1$ и $\rho_2 > 1$. Тогда имеем

$$(38) \quad \dot{V}(t) \leq -\frac{\rho_1}{\mu}|\eta(t)|^2 - \frac{\rho_2}{\mu}|w(t)|^2 + \mu\beta,$$

где $\beta = \|H\|k_3 + \|H_1\|k_4$. Откуда следует

$$(39) \quad \dot{V}(t) \leq -\beta_1 V(t) + \mu\beta,$$

где $\beta_1 = \min\left\{\frac{\rho_1}{\mu\bar{\lambda}(H)}; \frac{\rho_2}{\mu\bar{\lambda}(H_1)}\right\}$, $\bar{\lambda}(H), \bar{\lambda}(H_1)$ – максимальные

собственные числа матриц H, H_1 соответственно. Разрешив (39),

$$\text{получим } V(t) \leq \frac{\mu\beta}{\beta_1}.$$

Учитывая $|w(t)|^2 \leq \frac{1}{\lambda(H_1)}V(t) \leq \frac{\mu\beta}{\beta_1}$, а также (37), имеем

$$|e(t)| \leq \mu|w(t)| \leq \mu\sqrt{\frac{\mu\beta}{\beta_1}}. \text{ Следовательно, для любых } \delta > 0 \text{ в целе-}$$

вом условии (3) существует μ_0 такое, что будет выполнено условие (3).

Литература

1. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФУРТАТ И.Б. *Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 1. Методы* // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №9. – С. 3–61.
2. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФУРТАТ И.Б. *Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 2. Приложения* // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №10. – С. 35–91.
3. БУЙ В.Х., МАРГУН А.А., БОБЦОВ А.А. *Синтез наблюдателя переменных состояния и синусоидального возмущения для линейной нестационарной системы с неизвестными параметрами* // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2024. – Т. 67, №3. – С. 209–219.
4. ИМАНГАЗИЕВА А.В., ЦЫКУНОВ А.М. *Робастное управление нестационарным динамическим объектом с компенсацией возмущений* // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2009. – №2. – С. 19–23.
5. ИМАНГАЗИЕВА А.В. *Синхронизация сети нелинейных объектов с запаздыванием по состоянию в условиях неопределенности* // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – Т. 21, №5. – С. 266–273.
6. МИТРИШКИН Ю.В., КАРЦЕВ Н.М., КУЗНЕЦОВ Е.А. и др. *Методы и системы магнитного управления плазмой в токамаках*. – М.: КРАСАНД, 2020. – 528 с.
7. ПЛОТНИКОВ С.А. *Десинхронизация и колебательность в возбудимых сетях ФитцХью – Нагумо* // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2023. – Т. 24, №6. – С. 292–299.
8. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Математическая теория автоматического управления: учебное пособие*. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 500 с.
9. ПРОСКУРНИКОВ А.В., ФРАДКОВ А.Л. *Задачи и методы сетевого управления* // Автоматика и телемеханика. – 2016. – №10. – С. 3–39.
10. СТАББЕРУД А.Р. *Методы синтеза линейных систем автоматического управления с переменными параметрами* // Современная теория систем управления / Под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1970. – С. 17–86.

11. ФУРТАТ И.Б., ЦЫКУНОВ А.М. *Адаптивное управление объектами с запаздыванием по выходу* // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2005. – Т. 48, №7. – С. 15–19.
12. ФУРТАТ И.Б. *Дивергентные условия устойчивости динамических систем* // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №2. – С. 62–75.
13. ФУРТАТ И.Б. *Плотностные системы. Анализ и управление* // Автоматика и телемеханика. – 2023. – №11. – С. 55–76.
14. ЦЫКУНОВ А.М. *Адаптивное и робастное управление динамическими объектами по выходу*. – М.: Физматлит, 2009. – 268 с.
15. ЦЫКУНОВ А.М. *Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений* // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №7. – С. 103–115.
16. ЦЫКУНОВ А.М. *Робастная синхронизация сети объектов с распределенным запаздыванием* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №11. – С. 60–75.
17. ATASSI A.N., KHALIL H.K. *Separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. – Vol. 44, No.9. – P. 1672–1687.
18. FEUER A., MORSE A.S. *Adaptive control of single-input, single-output linear systems*// IEEE Trans. on Automatic Control. – 1978. – Vol. 23, No. 4. – P. 557–569.
19. FURTAT I.B., GUSHCHIN P.A., HUY N.B.A. *Control of Electrical Generators Based on Low-pass Filter and Artificial Time-delay* // IFAC – Papers OnLine. – 2022. – Vol. 55, No.12. – P. 353–358.
20. FURTAT I., FRADKOV A., TSYKUNOV A. *Robust synchronization of linear dynamical networks with compensation of disturbances* // Int. Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2014. – Vol. 24, No.17. – P. 2774–2784.
21. LI Q.-K., LIN H., TAN X.et al. *H_∞ Consensus for Multiagent-Based Supply Chain Systems Under Switching Topology and Uncertain Demands* // IEEE Trans.on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. – 2020. – Vol. 50, No. 12. –P. 4905–4918.
22. MITRISHKIN Y.V., KORENEV P.S., KONKOV A.E. *New horizontal and vertical field coils with optimised location for ro-*

- bust decentralized plasma position control in the IGNITOR tokamak* // Fusion Engineering and Design. – 2022. – Vol. 174 – 112993.
23. NIKIFOROV V.O., PARAMONOV A.V., GERASIMOV D.N. *Adaptive Compensation of Unmatched Disturbances in Unstable MIMO LTI Plants with Distinct Input Delays* // IFAC – Papers OnLine. – 2023. – Vol. 56, No. 2. – P. 9179–9184.
24. OLFATI-SABER R. *Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2006. – Vol. 51, No. 3. – P. 401–420.
25. POLYAK B.T., KHLEBNIKOV M.V., SHCHERBAKOV P.S. *Linear matrix inequalities in control systems with uncertainty* // Automation and Remote Control. – 2021. – Vol. 82, No. 1. – P. 1–40.
26. PYRKIN A., BOBTSOV A., ORTEGA R. *An adaptive observer for uncertain linear time-varying systems with unknown additive perturbations* // Automatica. – 2023. – Vol. 147. – 110677.
27. XIA Y., LI C. *Robust Control Strategy for an Uncertain Dual-Channel Closed-Loop supply Chain with Process Innovation for Remanufacturing* // IEEE Access. – 2023. – Vol. 11. – P. 97852–97865.
28. XIANWEI L., YANG T., KARIMI H.R. *Consensus of multi-agent systems via fully distributed event-triggered control* // Automatica. – 2020. – Vol. 116. – 108898.

CONTROL OF A NETWORK OF TIME-VARYING AGENTS UNDER CONDITIONS OF PARAMETRIC UNCERTAINTY AND EXTERNAL DISTURBANCES

Aliya Imangazieva, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, Cand.Sc. (aliya111@yandex.ru).

Abstract: The structure of the control system for synchronisation of a network of identical agents under conditions of nonstationarity and parametric uncertainty of agent models is proposed. During synchronisation, it is required to ensure time-consistent behaviour of identical agents of the network taking into account external perturbations acting on each agent. In subsystems the scalar output of the leading agent is monitored, the agents are independent. Scalar inputs and outputs of agents are available for measurement. To solve the set network problem, controlling laws are built in each agent based on the auxiliary loop method, which is based on the

principle of dynamic compensation. Signals carrying information negatively affecting the regulation of the subsystem are formed in advance, and then their compensation is carried out. In each agent, information about the derivatives of the intermediate signals is required, for which Khalil observers are used. To illustrate the performance of the proposed synchronisation system, we consider a numerical example of controlling a network object consisting of four agents, each of which is subject to external disturbances of different amplitude. Modelling in MATLAB Simulink has been carried out. The simulation results confirmed the theoretical conclusions and showed good performance of the synchronisation system under conditions of uncertainty and non-stationarity of the network agents' models.

Keywords: control, synchronization, time-varying, agent network, parametric uncertainty, observer, auxiliary loop, disturbances.

УДК 519.7

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии И.Б. Фуртатом.*

Поступила в редакцию 28.10.2024.

Опубликована 31.03.2025.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА ИНДУКТИВНО ВЫЗВАННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ЧАСТОТНЫХ ДАННЫХ АЭРОЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

Хлюстов Д. К.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Аэроэлектроразведка является одним из распространенных методов сбора геофизической информации. В процессе исследования территории с летательного аппарата собираются данные магнитного отклика среды в ответ на сигнал контролируемого источника электромагнитных волн. Во многих случаях для моделирования откликов достаточно построить простую модель разреза, имеющую действительные кажущиеся удельные сопротивления. Однако порой на данные существенное влияние оказывает эффект вызванной поляризации. Он выражается в зависимости кажущегося сопротивления среды от частоты сигнала. Классический подход к моделированию ВП заключается в построении модели для частотно-зависимого удельного сопротивления каждого из слоев среды. Однако количество параметров при таком подходе быстро растет с увеличением разрежения, в связи с чем задача инверсии становится некорректной. Отсутствие однозначного решения обратной задачи приводит к тому, что итоговый результат интерпретации данных сильно зависит от используемого начального приближения и априорной информации. В данной работе предлагается подход к решению этой проблемы, который применяется для инверсии реальных данных. Показывается, что в некоторых случаях начальное приближение может быть выбрано исходя из результатов анализа откликов, полученных на участке, близком участку ВП.

Ключевые слова: аэроэлектроразведка, фильтр Калмана, вызванная поляризация.

1. Введение

Аэроэлектроразведка широко применяется для поисков полезных ископаемых и картирования подземных инженерных конструкций [15]. Причиной этому является высокая скорость получения данных: летательный аппарат способен произвести исследование обширных территорий за небольшое время. Кроме того, аэроэлектроразведка применима на территориях, недо-

¹ Дмитрий Кириллович Хлюстов, аспирант (hlustov.d@gmail.com).

ступных для исследования наземными методами ввиду сложных природных условий.

Как правило, аэроэлектроразведочная система состоит из передатчика и приемника, расположенных на летательном аппарате. Передатчик излучает электромагнитный импульс с заданными характеристиками, приемник фиксирует вторичное поле отклика среды. На основании полученных данных строится модель среды, смоделированные отклики которой аппроксимируют реальные данные.

Эффекту вызванной поляризации (ВП) посвящено большое количество исследований в области обработки данных аэроэлектроразведки [11, 12, 17]. Причина этого заключается в том, что на практике часто оказывается невозможным получить физически адекватные результаты инверсии данных без учета ВП [6, 7].

Модели данного эффекта можно разделить на две группы. Согласно одним, ВП является проявлением особых свойств некоторых минералов. Работа [4] посвящена созданию материалов, обладающих свойством накопления заряда. Лабораторные эксперименты показывают, что в присутствии неоднородностей (к примеру, гранулярной структуры) среда может обладать частотно-зависимым сопротивлением. Согласно же альтернативной точке зрения, эффект ВП обусловлен в первую очередь геометрическими характеристиками поверхности (такими как трещиноватость) [3].

Следует отметить, что часто эффект ВП проявляется лишь при условии достаточной плотности частотного спектра аэрогеофизической системы. Немалое значение имеет и высота полета [9].

На рис. 1 приведены результаты обработки данных системы ЭКВАТОР, проводящей съемку на 25 частотах, и системы ЕМ4Н, имеющей лишь 4 частоты в спектре, в двух вариантах: самолетном (с большой высотой полета) и вертолетном (с меньшей высотой).

Высокие контрасты сопротивлений в правой части разреза обусловлены эффектом ВП. При этом в данных системы ЭК-

ВАТОР они наиболее заметны, а в данных самолетного варианта ЕМ4Н практически не видны.

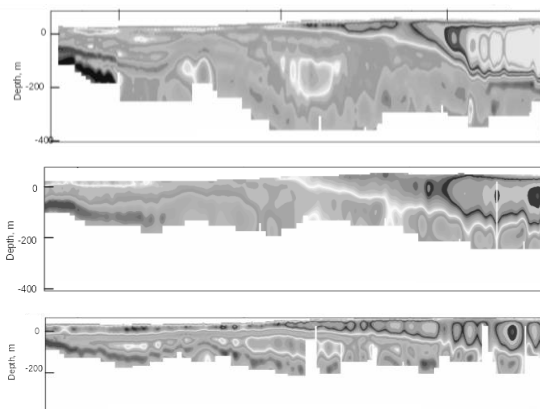


Рис. 1. Результаты инверсии данных системы ЭКВАТОР (сверху), самолетного (в середине) и вертолетного варианта ЕМ4Н

Данному факту можно дать несколько объяснений. Во-первых, плотная сетка частот позволяет с большей вероятностью уловить воздействие ВП, которое имеет характерный диапазон времени проявления. Кроме того, интенсивность эффекта вызванной поляризации зависит от высоты летательного аппарата, а потому данные самолетной системы практически ему не подвержены.

Одним из главных индикаторов ВП являются отрицательные значения отклика во временной области или же отрицательные значения синфазной компоненты отклика – в частотной [7]. В первой части представленной работы показано, что модель на основе формулы Cole-Cole [2] позволяет получить отклик с такими характеристиками. После этого приводится подход к инверсии, представляющий собой компромисс между числом параметров и качеством описания данных. В конце показаны результаты применения данного подхода для инверсии

реальных данных, которые сравниваются с классической моделью без учета накопления заряда.

Все вычисления проводятся в частотной области. Параметры системы, такие как частоты, типичная высота и относительное местоположение передатчика и приемника, соответствуют параметрам реальной аэроэлектроразведочной системы ЭКВАТОР [14]. Данная система способна проводить съемки как в частотной, так и во временной области. Однако в настоящей работе исследуются лишь частотные данные, поскольку частотнозависимое сопротивление в этой области имеет более наглядную интерпретацию.

2. Методы решения задачи

При вычислении кажущегося сопротивления среды часто используется так называемая горизонтально слоистая модель [20]. Подобное упрощение структуры позволяет снизить объем необходимых вычислений, в то же время обеспечивая высокую точность аппроксимации данных [5, 10]. Данная модель позволяет в явном виде выписать значения вторичного поля в ответ на излучение вертикального магнитного диполя. Для фиксированной частоты вертикальная компонента отклика равна

$$(1) \quad H_z(\omega) = \int_0^\infty u(n_0, z, h_T, \omega) J_0(n_0 r) n_0^2 dn_0,$$

где J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; r – горизонтальное смещение приемника относительно диполя; h_T – высота диполя над поверхностью земли; z – высота приемника. Двумерный спектр потенциала вторичного поля задается формулой

$$(2) \quad u(n_0, z, h_T, \omega) = \frac{M \exp(-n_0(z+h))}{2} \frac{n_1 - n_0 R}{n_1 + n_0 R},$$

где M – дипольный момент; R – приведенный спектральный импеданс среды. Для K слоев его значение задается формулой

$$(3) \quad R^0 = \tanh \left(n_1 h_1 + \dots \tanh^{-1} \left(n_{K-1} h_{K-1} + \tanh^{-1} \frac{n_{K-1}}{n_K} \right) \right).$$

$$(4) \quad n_k = \sqrt{n_0^2 - \frac{i\omega\mu_0}{\rho_k}}, \quad \operatorname{Re} n_k > 0.$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м – диэлектрическая проницаемость вакуума; ρ_k – сопротивление k -го слоя.

Одним из возможных методов решения обратной задачи (оценивания сопротивления и толщины каждого слоя) является фильтр Калмана. Поскольку задача нелинейна, необходимо использовать его модификацию – обобщенный итерационный фильтр [1, 8]. Поскольку данные методы используют численные оценки градиента, получить строгие теоретические результаты о сходимости процесса в общем виде не представляется возможным. Поэтому зачастую при работе с реальными данными оказывается необходимо запускать фильтр с разными начальными значениями и параметрами. Как правило, при обработке реальных данных начинают с простейшей модели однородного полупространства, сопротивление которого подбирается фильтром. После этого полученная модель используется в качестве стартовой для расширенной модели, содержащей несколько десятков слоев. Кроме того, для получения физически значимых результатов модель однородного полупространства подбирается лишь по данным откликов на самой низкой частоте, что соответствует слоям породы, обладающим наибольшей относительной мощностью. Оценка параметров расширенной модели производится уже с использованием всех доступных данных.

Алгоритм фильтра Калмана требует задания нескольких матриц в качестве параметров. В данной статье матрица шумов измерений R оценивалась по результатам компенсации (измерения естественного поля местности на большой высоте), матрица вариации параметров Q задавалась вручную так, чтобы обеспечить возможность значительного изменения оцениваемых величин. Матрица F полагалась единичной, что отражает факт отсутствия априорной информации о строении разреза. Матрица H вычисляется в ходе работы алгоритма на основании оценки якобиана [8]. Вектор измерений z формируется из измеренных значений откликов для рабочих частот системы (от 77 Гц до 15 кГц).

Приведенные выше формулы являются прямыми следствиями уравнений Максвелла. С математической точки зрения сопротивления могут быть комплексными или даже частотно-зависимыми.

Часто при изучении эффекта ВП сопротивления моделируются при помощи формулы Cole-Cole [17]:

$$(5) \quad \rho = \rho_0 \left(1 - m \left(1 - \frac{1}{1 + (i\omega\tau)^c} \right) \right),$$

где ρ_0 – сопротивление среды при постоянном токе; m – параметр заряжаемости; τ – время релаксации; c – константа фазового сдвига. Изначально подобные уравнения появились в работах, посвященных медленным электромагнитным процессам (таким как процессы электрохимии), однако позже нашли применение и в других областях, таких как аэроэлектроразведка. Уравнение Cole-Cole не единственное, применяющееся для описания эффекта ВП [3], однако альтернативные модели содержат еще большее число параметров [13].

При изучении источников было выяснено, что формула (4) допускает как «+», так и «–» под корнем. При этом в англоязычной литературе чаще выбирается «+» [16, 18, 19], а в русскоязычной – «–» [15, 20]. В случае действительных значений сопротивления изменение знака влияет лишь на положительность действительной компоненты отклика, оставляя его форму постоянной. Однако при переходе к комплексным сопротивлениям знак становится существенным. В частности, численное решение оптимизационной задачи

$$(6) \quad \Re H_z(\omega) \rightarrow \min,$$

где $\Re H_z(\omega)$ обозначает действительную компоненту отклика для частоты ω , показывает, что при выборе под корнем знака «–» классическая формула Cole-Cole не позволяет получить отрицательных откликов. На рис. 2 представлены графики зависимости от частоты действительной компоненты отклика при выборе различных знаков. Видно, что в варианте с «–» отклики не пересекают горизонтальную ось.

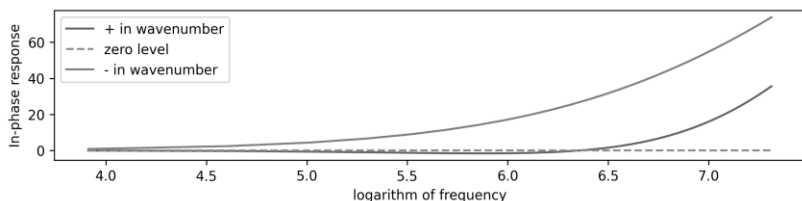


Рис. 2. Действительная компонента отклика однородного полупространства для разных значений знака волнового числа

Следует заметить, что функция $(i\omega\tau)^c$ является многозначной. В самом деле, $i = \exp\left(\frac{i*\pi}{2}\right) = \exp\left(i*\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)$ для целых k . После возведения в степень c мы получим $\exp\left(i\frac{c\pi}{2}\right)$, $\exp\left(i\frac{5c\pi}{2}\right)\dots$ в качестве возможных значений.

При выборе под корнем в формуле (4) для моделирования отрицательных откликов необходимо использовать вторую ветвь степенной функции. В настоящей работе авторы придерживались именно такого подхода.

На рис. 3 показаны результаты моделирования отклика однородного полупространства с параметрами $\rho = 1000\Omega t$, $t = 0,5$, $\tau = 0,001$ с, $c = 0,5$. Показаны значения квадратурной и синфазной компонент, а также кривая затухания во временной области.

Индексом 0 обозначен отклик при выборе первой ветви степенной функции, индексом 1 – при выборе второй, NoIP соответствует среде без поляризации.

В случае когда все слои модели имеют сопротивления, определяемые формулой Cole-Cole, количество параметров растет очень быстро. Для того чтобы повысить корректность обратной задачи, необходимо ввести дополнительную регуляризацию. Часто в работах принимается предположение, что можно локализовать ВП в верхнем слое модели. Однако вопрос о том,

всегда ли можно подобрать модель, аппроксимирующую данные, не имея информации о реальном положении поляризующегося слоя, является открытым.

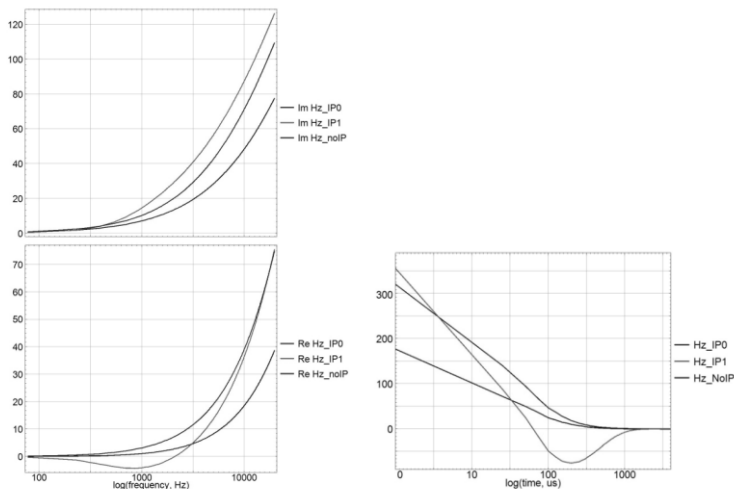


Рис. 3. Отклик однородного поляризующегося пространства

Рис. 4 показывает результаты сходимости алгоритма при подборе откликов синтетической двухслойной модели при различном расположении поляризации. Видно, что в частотных данных сходимость действительно наблюдается, даже если поляризация на самом деле содержится в нижнем слое, а моделируется в верхнем. Однако при переходе к временной области для малых значений толщины верхнего слоя подобная модель оказывается неспособна аппроксимировать отклики.

Ввиду вышесказанного вопрос о правильном определении положения поляризующихся слоев в модели можно считать открытым. Одним из возможных предположений является то, что эффект ВП сосредоточен в относительно небольшом (1–3) количестве слоев. Для нахождения этих слоев были подобраны параметры нескольких моделей, каждая из которых содержала ровно один поляризующийся слой.

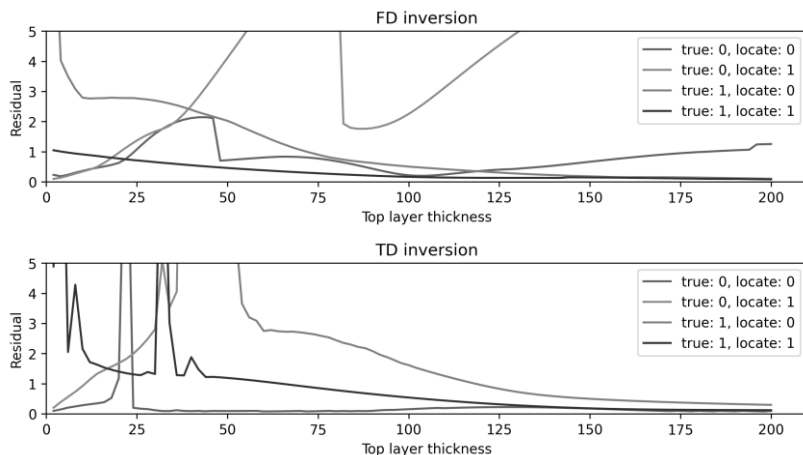


Рис. 4. Результаты сходимости алгоритма во временной и частотной области на двухслойной модели

При варьировании глубины залегания поляризующегося слоя был получен набор невязок между предсказаниями модели и реальными данными. Для некоторых значений глубины невязка оказалась существенно (в 5–10 раз) меньше, чем для других. Несмотря на то, что ее значения по-прежнему были слишком высоки, чтобы считать какую-либо из моделей хорошим приближением, при помощи этой процедуры удалось сделать выбор, сопротивления каких слоев считать частотно-зависимыми.

Данный метод применим лишь для небольших участков данных. Параметры моделей с одним поляризующимся слоем идентифицируются только при наличии хорошего начального приближения, в связи с чем необходимо регулярно повторять описанную процедуру.

3. Основные результаты

Здесь приведены результаты обработки реальных данных, полученных системой ЭКВАТОР. Данные содержат результаты измерений синфазной и квадратурной компонент для 15 частот от 77 до 15000 Гц. Инверсия производилась с помощью двадца-

типятислойной модели, с толщиной i -го слоя равной $4 \cdot 1,1085^i$. Невязка между измеренным откликом и результатом моделирования определялась по формуле

$$(7) \left(\sum_{freqs} \frac{(response_{estimated}(freq) - response_{true}(freq))^2}{\sigma_{noise}^2(freq)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

пример графика невязки для модели с одним поляризующимся слоем приведен на рис. 5.

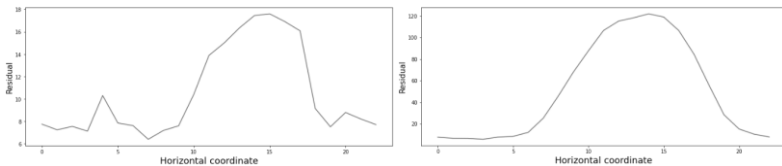


Рис. 5. Значения невязки для модели с поляризуемостью в слоях 2 и 5

Из рисунка видно, что введение частотно-зависимого сопротивления во втором слое позволяет снизить невязку значительно сильнее, чем в пятом.

После проведения описанной выше процедуры по определению оптимального положения поляризующихся слоев было установлено, что наибольшее снижение невязки происходит при введении частотной зависимости сопротивлений слоев 2, 4, 6 и 7. Для дальнейшего снижения количества параметров было предложено заменить слои 6 и 7 на один слой, толщина которого равна сумме толщин исходных. График невязки для данной модели приведен на рис. 6.

Значения невязки не превосходят 10, что можно считать показателем удовлетворительного качества моделирования.

На рис. 7 приведены результаты инверсии. Съёмки проводились в Сибири при наличии вечной мерзлоты. В данном случае принято считать, что основным источником поляризуемости является зона протайки.

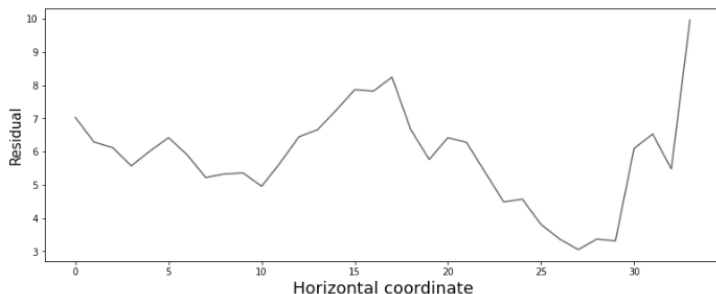


Рис. 6. Значения невязки для модели с поляризуемостью в слоях 2 и 5

Видно, что при использовании поляризующейся модели удалось идентифицировать непрерывные горизонтальные слои, что соответствует представлениям геологов о структуре разреза в данном регионе. Кроме того, даже для участка данных с положительной синфазной компонентой отклика модель с поляризацией позволяет получить более физически адекватное решение: нижний проводящий слой присутствует на всем протяжении съемочной траектории.

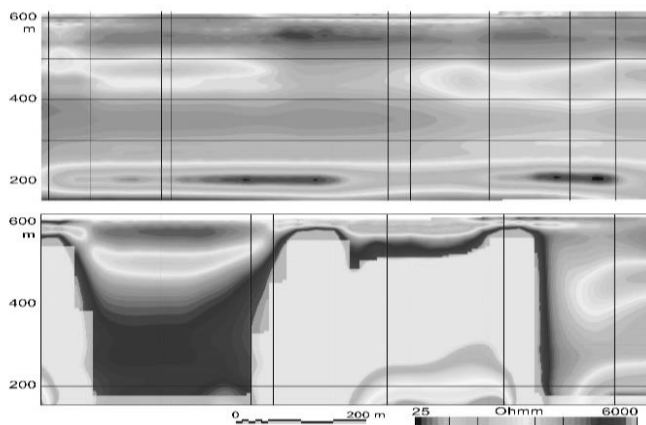


Рис. 7. Результаты инверсии

4. Выводы

В данной работе был предложен подход к инверсии данных аэроэлектроразведки в присутствии эффекта ВП. Были проведены численные исследования используемых моделей и выявлены значения их характеристик, необходимые для описания данных, содержащих ВП. Кроме того, было показано, что в некоторых ситуациях для точного моделирования необходима информация о расположении поляризующихся слоев в среде. Рассмотрение моделей с поляризуемостью, сосредоточенной в одном из слоев, позволило сделать вывод о локальности источников ВП. Было показано, что при введении частотно-зависимых сопротивлений малого количества слоев можно получить физически адекватные результаты инверсии в тех случаях, когда стандартные методы приводят к неправильным результатам.

Литература

1. BAI P., VIGNOLI G., HANSEN T. *1D stochastic inversion of airborne time-domain electromagnetic data with realistic prior and accounting for the forward modeling error* // Remote Sensing. – 2021. – Vol. 13, No. 19. – P. 38–81.
2. COLE K.S., COLE R.H. *Dispersion and absorption in dielectric I* // The Journal of Chemical Physics. – 1941. – Vol. 4, No. 9. – P. 341–351.
3. DIAS C. *Developments in a model to describe low-frequency electrical polarization of rocks* // Geophysics. – 2000. – Vol. 2, No. 65. – P. 437–451.
4. GURIN G., TITOV K., ILYIN Y. *Induced polarization of rocks containing metallic particles: evidence of passivation effect* // Geophysical Research Letters. – 2019. – Vol. 2, No. 46. – P. 670–677.
5. HEAGY L., OLDENBURG D. *Electrical and electromagnetic methods for well integrity* // AGU Fall Meeting Abstracts. – 2021. – Vol. 1, No. 1. – P. 12–15.
6. KAMINSKI V., VIEZZOLI A. *Modeling induced polarization effects in helicopter time-domain electromagnetic data: Field case studies* // Geophysics. – 2017. – Vol. 2, No. 82. – P. 49–61.

7. KARSHAKOV E., MOILANEN J. *Overcoming Airborne IP in Frequency Domain: Hopes and Disappointments* // Proc. of SAGA Biennial Conf. & Exhibition. – 2019. – Vol. 1, No. 1. – P. 1–4.
8. KARSHAKOV E. *Iterated extended Kalman filter for airborne electromagnetic data inversion* // Exploration Geophysics - 2020. – Vol. 1, No. 51. – P. 66–73.
9. KARSHAKOV E. *Airborne electromagnetics: dealing with the aircraft speed* // Proc. of the 8th Int. Airborne Electromagnetics Workshop. – 2023. – Vol. 1, No. 1. – P. 1–4.
10. KLOSE T., GUILLEMOTEAU J., VIGNOLI G. et al. *Laterally constrained inversion (LCI) of multi-configuration EMI data with tunable sharpness.* // Journal of Applied Geophysics. – 2022. – No. 196. – P. 104–519.
11. MACNAE J., HINE K. *Comparing induced polarisation responses from airborne inductive and galvanic ground systems: Tasmania* // Geophysics. – 2016. – Vol. 81, No. 6. – P. E471–E479.
12. MACNAE J. *Geological interpretation of near-surface induced polarization and superparametric effects in airborne electromagnetic data* // Symposium on the Application of Geophysics to Engineering and Environmental Problems. – 2021. – Vol. 1, No. 1. – P. 118–128.
13. MADSEN L., FIANDACA G., AUKEN E. *3D-time-domain spectral inversion of resistivity and full-decay induced polarization data – full solution of Poisson’s equation and modelling of the current waveform* // Geophysics. – 2020. – Vol. 223, No. 3. – P. 2101–2116.
14. MOILANEN J., KARSHAKOV E., VOLKOVITSKY A. *Time-domain helicopter EM System “Equator”: resolution, sensitivity, universality* // Proc. of SAGA Biennial Conf. & Exhibition. – 2013. – Vol. 1, No. 1. – P. 1–4.
15. MOILANEN J. *Modern methods of airborne electromagnetic survey* // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. – 2022. – Vol. 58, No. 5. – P. 755–764.
16. OLDENBURG D., KANG S., HEAGY L. et al. *Direct current resistivity methods* // Engineering Geophysics. – 2022. – Vol. 55, No. 4. – P. 67–75.

17. PELTON W., WARD S., HALLOF G. et al. *Mineral discrimination and removal of inductive coupling with multifrequency IP* // Geophysics. – 1978. – Vol. 3, No. 43. – P. 588–609.
18. WEIS J., HEAGDY L., OLDENBURG D. *Comparison of magnetic vector inversion with sparse norm susceptibility inversion accounting for demagnetization* // SEG. – 2023. – Vol. 1, No. 1. – P. 37–65.
19. XUE G. et al. *Geophysics for critical minerals – Introduction* // Geophysics. – 2024. – Vol. 89, No. 1. – P. 98–116.
20. ZHDANOV M. *Geophysical electromagnetic theory and methods*. – Elsevier, 2009.

MODELLING INDUCED POLARIZATION EFFECT IN FREQUENCY DOMAIN AEM DATA

Dmitrii Khliustov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, PhD student (hlustov.d@gmail.com).

Abstract: Airborne electromagnetics is one of the most widespread methods of geophysical survey. In the process of exploration airplane obtains data on electromagnetic response of the medium to the signal of controlled electromagnetic source. Often it is possible to create a simple model of the medium, having real-valued apparent resistivities. However, sometimes data are significantly impacted by the induced polarization effect. It manifests itself in dependence of apparent resistivity on signal frequency. The classical approach to modelling IP consists in using a frequency dependent resistivity model for each layer of the medium. However, the number of parameters in this approach increases rapidly with resolution, hence the inversion problem becomes incorrect. The lack of unique solution of inverse problem leads to the final result of data interpretation being dependent on starting model and prior information. In this work authors suggest an approach to solving this problem, which is applied for inversion of real data. It is shown that sometimes the starting model may be chosen based on analysis of responses obtained for a part of data close to the one containing IP.

Keywords: airborne electromagnetics, Kalman filter, induced polarization.

УДК 550.83, 681.51
ББК 22.172

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Б.В. Павловым.*

Поступила в редакцию 31.10.2024.

Опубликована 31.03.2025.

ГРАФ ЖУРНАЛЬНОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, МОДИФИКАЦИИ И СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР¹

Печников А. А.²

(Карельский научный центр РАН, Петрозаводск)

Библиометрические сети задаются отношениями между публикациями и/или их авторами, реализуемыми на основе списков соавторов и библиографических списков. Математическими моделями таких сетей, позволяющих исследовать сообщества ученых и связи между их работами, являются соответствующие библиографические графы. В работе определяется новый тип библиографического графа – граф журнальных пересечений, основанный на известной бинарной операции пересечения множеств. В качестве множеств здесь выступают множества авторов: автор принадлежит множеству авторов журнала, если у него есть публикации в этом журнале. Вершинами графа пересечений являются журналы, а связи между ними возникают в том случае, если пересечения соответствующих множеств авторов непустые. Предложены две модификации графа журнальных пересечений, учитывающие мощность подмножества пересечений и сходство множеств авторов, определяемое с использованием коэффициента Жаккара. В качестве примера построения и исследования графа журнальных пересечений и его модификаций использованы данные 20 ведущих российских математических журналов. В результате анализа получены некоторые результаты («замкнутость» или «открытость» сообществ авторов и журналов; высокая корреляция между PageRank вершин графа и SCIENCE INDEX журналов в eLibrary), позволяющие несколько иначе посмотреть на традиционные подходы к ранжированию научных журналов, используемых для оценок научной результативности. Определены направления дальнейших экспериментальных и теоретических исследований.

Ключевые слова: научные сети, библиометрический граф, граф пересечений, коэффициент Жаккара.

1. Введение

В статье [9] говорится, что «... современная наука – это динамичная система, движимая сложными взаимодействиями

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке по проекту FMEN-2024-0005 «Случайные графы, структура и информационный поиск, кооперация и конкуренция в сетях и приложения в сложных системах».

² Андрей Анатольевич Печников, д.т.н., доцент (pechnikov@krc.karelia.ru).

между социальными структурами, представлениями о знаниях и природным миром». В свою очередь наукометрия – научная дисциплина, изучающая эволюцию науки количественными методами. Ответ на вопрос «Зачем?» дается в работе [3, с. 8]: «...единственный правильный ответ – для управления. Потенциально библиометрические (и даже шире – наукометрические) показатели могут и должны использоваться на всех этапах процесса управления научно-исследовательской деятельностью. ... Без решения задачи управления любая оценка, будь то наукометрическая или экспертная, бессмысленна. Но этого мало: чтобы управлять каким-либо процессом или объектом, нужно понимать его природу и закономерности его развития».

Как сказано в [8]: «...наука может быть описана как сложная, самоорганизующаяся и постоянно развивающаяся многомасштабная сеть». Поэтому одним из важных направлений наукометрии является изучение научных сетей во всем их многообразии с использованием математических моделей и методов. Хороший, хотя и несколько устаревший обзор публикаций о научных сетях на английском языке дается в работе [11].

Понятия «граф» и «сеть» довольно часто воспринимаются как синонимичные. Например, «... сети (или графы) выступают в качестве основополагающих структур в различных областях, включая социологию, биологию, неврологию и информатику» [14, с. 95]. Мы исходим из того, что графом называется математический объект, к которому применимы методы теории графов, а о сетях говорится в контексте прикладных исследований. То есть сети – это реальные (и виртуальные) объекты, а графы – абстрактные математические объекты, применяемые для их моделирования. Хотя иногда в одной и той же статье можно встретить оба термина, смысл которых следует понимать из контекста.

Одной из первых публикаций, посвященных анализу научных сетей, считается статья де Солла Прайс [8], вышедшая в 1965 году и, несомненно, связанная с появлением электронных хранилищ научных публикаций, где фактически рассматривается сеть цитирования. Несмотря на большой объем работы, сделанной за эти годы, тема представляется неисчерпаемой, ни-

какой единой теории сетей научного сотрудничества не построено, исследования конкретных электронных библиотек приносят новые, порой неожиданные, результаты, расширяется спектр применяемых теоретических подходов, моделей и методов, появляются новые технические и программные возможности.

Поскольку с 1960-х годов и до настоящего времени наиболее распространенными объектами исследования являются сети, построенные на цитировании и соавторстве, в англоязычной литературе для их обозначения появился термин «библиометрические сети» (bibliometric networks). Как пример приведем цитату из [16]: «...изучение библиометрических сетей, таких как сети соавторства, сходства библиографических списков и совместного цитирования, имеет долгую историю».

В российских публикациях также используется это понятие. Например, в [1] в параграфе, посвященном библиометрическим сетям, описаны такие сети, как сети цитирования статей и журналов, сеть библиографического сочетания (существование связи у двух статей, если они цитируют третью), сеть коцитирования (существование связи у двух статей, если их цитирует третья), сети авторства публикаций (двудольная сеть, связывающая авторов со статьями) и соавторства.

Можно сказать, что библиометрические сети – это сети, построенные на отношениях между публикациями и/или их авторами, которые реализуются на основе списков соавторов и библиографических (пристатейных и прикнижных) списков.

В качестве математических моделей таких сетей, позволяющих исследовать взаимосвязи между учеными и «коммуникации» между их работами, используются соответствующие библиографические графы.

В этой работе мы предлагаем новый тип библиографического графа, основанного на пересечении множеств авторов журналов. Описана формальная процедура построения такого графа, предложен ряд его модификаций и на реальном примере исследованы его свойства.

Намечены перспективы дальнейших исследований и возможности использования результатов анализа в управлении научно-исследовательской деятельностью.

2. Граф журнальных пересечений

Пусть имеется множество журналов $J = \{1, \dots, n\}$, где каждый журнал идентифицируется его номером $j \in J$. Обозначим $A(j)$ множество авторов, имеющих публикации в журнале j . Считаем, что $A(j)$ является множеством без повторяющихся элементов, т.е. каждый автор учитывается один раз независимо от количества его статей в этом журнале.

Пересечение $A(i) \cap A(j)$ содержательно задает подмножество авторов, имеющих публикации как в журнале $A(i)$, так и в $A(j)$.

Тогда граф пересечений журналов по множествам авторов – это

$$G = G(J, E),$$

где $J = \{1, \dots, n\}$ – это множество вершин, а множество ребер –

$$E = \{\{i, j\} \mid A(i) \cap A(j) \neq \emptyset\}.$$

На рис. 1 для наглядности приведен пример графа пересечений для пяти множеств авторов.

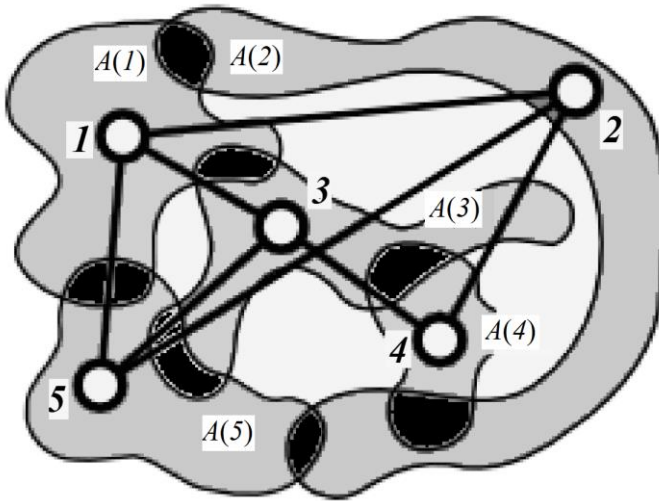


Рис. 1. Пример графа журнальных пересечений по множествам авторов

Основа для рис. 1 взята из [6].

Очевидно, что $G = G(J, E)$ по построению неориентированный граф с петлями, т.е. ребрами вида (i, i) . (На рис. 1 петли отсутствуют для облегчения восприятия).

Граф $G = G(J, E)$ характеризует, существует ли для любой пары журналов хотя бы один автор, опубликовавший статью в каждом из них. Как минимум он позволяет определять компоненты связности и сообщества журналов.

Такая задача может представлять интерес для структурирования множеств журналов одной тематики. Например, в eLibrary [2] к тематике «Экономика. Экономические науки» отнесено 1798 журналов на русском языке, и такая задача представляется актуальной.

Интересным представляется граф следующего вида, имеющий взвешенные ребра:

$$G_W = G(J, E, W), \quad W = \{ \{w_{ij}\} \mid w_{ij} = \text{card}(A(i) \cap A(j)), i, j = \overline{1, n} \},$$
где $\text{card}(M)$ – мощность множества M , а w_{ij} – вес ребра (i, j) , т.е. количество авторов, публиковавшихся в обоих журналах-вершинах.

Здесь в качестве весов ребер принята мощность подмножества пересечения двух множеств. Понятно, что для каждой петли (i, i) это мощность множества авторов $A(i)$.

Одной из задач на таком графе может быть задача ранжирования вершин по сумме весов ребер, инцидентных вершинам (за исключением весов петель), а также их сравнением с весами петель. Содержательно результаты такого исследования показывают, насколько множество авторов каждого журнала открыто (или наоборот, замкнуто) по отношению к другим журналам.

Следующая модификация графа журнальных пересечений выполняется с учетом того, что мощности множеств авторов журналов могут значительно отличаться между собой. В этом случае будем использовать такую меру близости множеств, как коэффициент сходства Жаккара, введенный еще в начале прошлого века. В современной записи (например, как в [13]) для нашего случая коэффициент сходства для журналов i и j можно записать так:

$$k_{ij} = \frac{\text{card}(A(i) \cap A(j))}{\text{card}(A(i) \cup A(j))}.$$

При этом $0 \leq k_{ij} \leq 1$ и $k_{ij} = 0$ при $A(i) \cap A(j) = \emptyset$, $k_{ij} = 1$ при $A(i) = A(j)$.

Тогда граф пересечений, построенный с использованием коэффициента Жаккара, можно определить как

$$G_{KJ} = G(J, E, K),$$

где $K = \{\{k_{ij}\}, i, j = \overline{1, n}\}$, k_{ij} – вес ребра (i, j) .

Назовем граф G_{KJ} графом близости журналов по коэффициенту сходства Жаккара.

Представляют интерес задачи нахождения и анализа теоретико-графовых конструкций и показателей в графе G_{KJ} с их последующей содержательной интерпретацией: связность, сообщество, меры центральности.

При построении всех трех описанных графов журнальных пересечений существенным фактором является временной отрезок, на котором формируются соответствующие множества авторов журналов. Вряд ли имеет смысл построение графовых конструкций на множествах авторов, относящихся к различным отрезкам времени.

Чтобы не усложнять обозначения графов пересечения дополнительными символами типа $G_{KJ}^{T[2000, 2020]}$, в начале проводимого исследования следует акцентировать внимание на выбранном временном отрезке (и дальше иметь его в виду).

3. Пример: исследование графа журнальных пересечений математических журналов

При построении примера графа журнальных пересечений был использован фрагмент данных совместного исследования, проводимого в настоящее время сотрудниками Национальной электронной библиотеки, Математического института им. В.А. Стеклова и Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН, результаты которого готовятся к печати.

3.1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ПРИМЕРА

Источником данных для проведенного исследования является национальная библиографическая база данных научного цитирования РИНЦ – Российский индекс научного цитирования [2]. Были отобраны 20 российских журналов по математике, отвечающие ряду условий: наличие в РИНЦ проиндексированного архива с 2008 по 2020 годы, присутствие в рейтинге Science Index РИНЦ [4], включение в Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science [5].

Акцентируем внимание на том, что далее речь идет о временном отрезке $T = [2008, 2020]$.

Перечень журналов приведен в таблице 1. В колонке «Код» даются мнемонические обозначения журналов, далее идут колонки с названиями журналов и общим количеством статей в них. Содержание колонки «В др. журн.» будет пояснено позже.

На указанном временном отрезке зафиксировано 7503 ученых, являющихся авторами 15196 статей в 20 указанных журналах. Сразу сделаем два примечания: 1) речь идет только об идентифицированных авторах; 2) автор учитывается один раз вне зависимости от количества его статей.

Если же считать количество «авторств» каждого ученого в разных журналах по одному разу, то мы получаем 11524: это сумма в колонке «Кол-во авторов» в таблице 1.

Таблица 1. Информация о множестве журналов

Код	Название журнала	Кол-во статей	Кол-во авторов	В др. журн.
AA	Алгебра и анализ	447	387	631
AL	Алгебра и логика	454	204	346
VMU	Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика	760	581	462

Таблица 1 (продолжение)

VSU	Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки	853	720	301
VMJ	Владикавказский математический журнал	368	286	393
DMJ	Дальневосточный математический журнал	264	173	186
DM	Дискретная математика	386	245	241
IVU	Известия высших учебных заведений. Математика	1252	947	1065
MZ	Математические заметки	1804	1291	2136
MT	Математические труды	201	154	316
MS	Математический сборник	750	579	1274
MM	Математическое моделирование	1384	1722	347
SJV	Сибирский журнал вычислительной математики	355	349	280
SJI	Сибирский журнал индустриальной математики	580	544	458
SMJ	Сибирский математический журнал	1158	717	1316
TVP	Теория вероятностей и ее применения	392	233	226
TIM	Труды Института математики и механики УрО РАН	1253	675	785
TMI	Труды Математического института имени В.А. Стеклова	782	660	1200
UMN	Успехи математических наук	579	770	1304
FAP	Функциональный анализ и его приложения	355	287	559

3.2. ВЗВЕШЕННЫЙ ГРАФ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Поскольку в нашем случае граф пересечений $G = G(J, E)$ построен на множестве высококачественных математических журналов, достаточно очевидно, что почти все они имеют общих авторов. Действительно, плотность этого графа равна 0,96, и только 7 пар журналов не имеют связей в виде ребер. Граф состоит из одной компоненты связности.

Поэтому рассмотрим сразу взвешенный граф $G_W = G(J, E, W)$, который зададим матрицей смежностей в виде таблицы 2.

Таблица 2. Матрица смежности взвешенного графа пересечений

	AA	AL	VMU	...	TMI	UMN	FAP
AA	387	13	8	...	56	101	80
AL		204	5	...	5	20	1
VMU			581	...	59	61	12
$M(G_W) =$	...	...	...	...	...	...	...
TMI				...	660	262	70
UMN				...		770	116
FAP				...			287

В таблице 2 приведена только часть значений матрицы, чтобы не утомлять обилием чисел и с учетом того, что матрица симметрична относительно главной диагонали. Элементы главной диагонали равны количеству авторов каждого журнала.

По этой небольшой части видны примеры большого пересечения журналов «Труды Математического института имени В.А. Стеклова»(TMI) и «Успехи математических наук» (UMN), и минимального у журналов «Алгебра и логика» (AL) и «Функциональный анализ и его приложения» (FAP).

Еще один из результатов приведен в колонке «В др. журн.» таблицы 2: сумма весов рёбер графа, инцидентных каждой вершине. Содержательно это сумма количества авторов данного журнала, у которых есть статьи в других журналах, имеющих непустые пересечения с данным. Очевидно, что эта сумма считается с учетом возможных повторов авторов: к примеру, один и тот же автор из множества авторов $A(i)$ может иметь статьи в журналах $A(k)$ и $A(l)$.

Визуализация приводится в виде диаграммы на рис. 2 и показывает существенную разницу между журналами в отношении этих показателей.

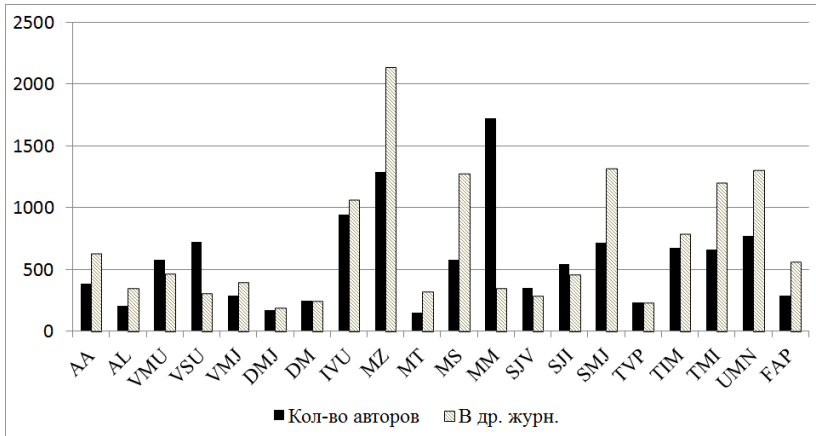


Рис. 2. Показатели журналов по количеству авторов

Наиболее характерные примеры: множество авторов журнала «Математическое моделирование» (ММ) содержит 1384 автора (уникальных), из которых в других журналах имеют статьи 347 авторов (с повторами), в то время как для журнала «Математические заметки» (МЗ) это 1804 и 2136 авторов соответственно.

О чем может говорить этот пример:

- множество специалистов по математическому моделированию более «замкнуто в себе»?
- в России мало высококачественных журналов по математическому моделированию?

Вопросы, очевидно, требуют дальнейшего исследования.

3.3. ГРАФ БЛИЗОСТИ ЖУРНАЛОВ ПО КОЭФФИЦИЕНТУ СХОДСТВА ЖАККАРА

Фрагмент матрицы смежности для графа близости журналов приведен в виде таблицы 3.

Нахождение сообществ графа дает максимальное значение коэффициента модулярности $Q = 0,174$, что означает невысокие тенденции графа к разбиению [15]. Тем не менее даже в этом случае достаточно четко проявляются 3 сообщества.

Таблица 3. Матрица смежности графа близости

$$M(G_{KI}) =$$

	AA	AL	VMU	...	TMI	UMN	FAP
AA	1	0,0222	0,008	...	0,057	0,096	0,135
AL		1	0,006	...	0,006	0,021	0,002
VMU			1	...	0,050	0,047	0,014
...	...	...	...	...	...	...	...
TMI				...	1	0,024	0,080
UMN				...		1	0,123
FAP				...			1

На рис. 3 приведен граф близости журналов с разбиением на три сообщества, обозначенные римскими цифрами.

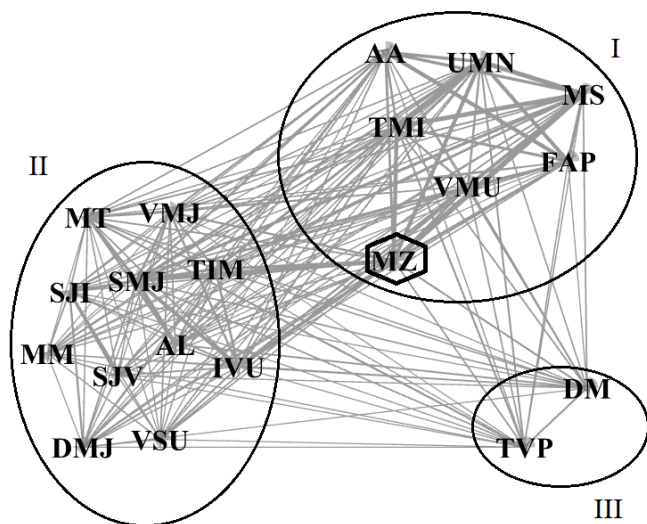


Рис. 3. Граф близости журналов

Пять из семи журналов сообщества I издаются Математическим институтом имени В.А. Стеклова, шестой – его Санкт-Петербургским отделением, а седьмой – МГУ. Оба журнала сообщества III также издаются Математическим институтом имени В.А. Стеклова. Журналы сообщества II имеют четко выра-

женный «нестоличный» акцент: Владивосток, Владикавказ, Екатеринбург, Казань, Новосибирск, Самара и Москва в лице Института прикладной математики им. М.В. Келдыша.

О чем может говорить этот пример:

– множество столичных учёных-математиков более «замкнуто в себе»?

– «нестоличные» математики предпочитают публиковаться в «нестоличных» журналах?

Значения *PageRank* как одной из характеристик значимости вершин графа [7] показывает существенное (почти пятикратное) различие в оценках вершин. Наибольшее значение *PageRank* имеет вершина, соответствующая журналу «Математические заметки» (особо выделена на рис. 3).

Корреляция по Пирсону между *PageRank* и рейтингом SCIENCE INDEX eLibrary за 2023 год [4] высокая (0,87), в то время как между *PageRank* и десятилетним индексом Хирша [10] средняя (0,65), что также порождает ряд вопросов, требующих дальнейшего исследования. Дело в том, что при расчете рейтинга SCIENCE INDEX используются несколько библиометрических показателей, включая индекс Хирша и импакт-фактор журнала. Хотелось бы понять, почему связи между журналами, реализуемые посредством пересечений множеств их авторов, так сильно (или средне) коррелируют с рейтингами, основанными на цитировании.

4. Заключение

В работе формально определяется новый тип библиографического графа – граф журнальных пересечений, основанный на бинарной операции пересечения множеств. В качестве множеств выступают множества авторов: автор принадлежит множеству авторов журнала, если у него есть публикации в этом журнале. Вершинами графа пересечений являются журналы, а связи между ними возникают в том случае, если пересечения соответствующих множеств авторов непустые. Предложены две модификации графа журнальных пересечений, учитывающие

мощность подмножества пересечений и сходство множеств авторов, определяемое с использованием коэффициента Жаккара.

Применение графа журнальных пересечений и его модификаций демонстрируется на реальном примере для 20 ведущих российских математических журналов. Определенные возможности применения графа пересечений и его модификаций, несмотря на небольшой пример, демонстрируются следующими результатами:

- во взвешенном графе пересечений сравнение множества авторов данного журнала и множества авторов, получаемого как сумма мощностей пересечений с журналами, инцидентными данному, показывает существенное различие таких показателей у разных журналов, тем самым показывая «замкнутые» и «открытые» сообщества авторов;

- разбиение графа близости журналов на три сообщества, несмотря на малое значение коэффициента модулярности, позволяет выявить такой признак, как «столичность» и «нестоличность» сообществ, что в принципе можно также отнести к замкнутости или открытости, но уже на уровне сообществ журналов;

- значимость вершин графа близости журналов имеет сильную корреляцию с SCIENCE INDEX eLibrary и среднюю с десятилетним индексом Хирша, т.е. вершины сети, в которой связи реализуются через общих авторов, коррелируют с показателями, построенными на цитировании.

Все три результата позволяют несколько по иному взглянуть на сегодняшние подходы к ранжированию научных журналов, играющие большую роль в оценках результативности научных исследований как организаций, так и конкретных ученых.

Очевидно, что делать выводы о применимости предложенных теоретико-графовых моделей на основании формального описания и небольшого примера нельзя, требуется набирать экспериментальные результаты и ставить и решать новые задачи. Несколько конкретных направлений развития предлагаемого подхода были намечены по ходу изложения материала в статье: связность графов пересечений, ранжирование вершин во взве-

шенном графе, сообщества и меры центральности в графе близости журналов.

К этому следует добавить расширение подходов на другие тематики, увеличение количества журналов и сравнение результатов между собой. Немаловажный аспект – это анализ результатов и попытки их содержательной интерпретации.

Не менее важным является развитие теоретических исследований. Одним из таких направлений, не отраженных в статье, является модификация графа пересечений, заключающаяся в использовании в качестве оценки связи между вершинами-журналами графа расстояния Жаккара

$$d_{ij} = 1 - \frac{\text{card}(A(i) \cap A(j))}{\text{card}(A(i) \cup A(j))}.$$

Известно [12], что расстояние Жаккара является метрикой, поэтому матрица смежности графа, построенного с его использованием, позволяет, в частности, решать задачи иерархической кластеризации. А в широком смысле порождает метрическое пространство журналов и широкий спектр задач, связанных с ним.

Благодарности

Автор приносит благодарность своим коллегам из Научной электронной библиотеки и Математического института им. В.А.Стеклова РАН за предварительную подготовку и обработку данных, использованных в работе.

Литература

1. БРЕДИХИН С.В., ЛЯПУНОВ В.М., ЩЕРБАКОВА Н.Г. *Библиометрические сети научных статей и журналов*. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2021. – 334 с.
2. *Научная электронная библиотека*. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.elibrary.ru>.
3. НОВИКОВ Д.А. *Померяемся «Хиршами»? (Размышления о наукометрии)* // Высшее образование в России. – 2015. – №. 2. – С. 5–13.

4. *О новом рейтинге журналов SCIENCE INDEX*. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elibrary.ru/projects/science_index/ranking_info.asp.
5. *Список журналов, входящих в базу данных RSCI*. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elibrary.ru/project_rsci.asp.
6. *An example of how intersecting sets define a graph*. [Electronic resource]. – Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Intersection_graph.gif.
7. BRIN S., PAGE L. *The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine* // Computer networks and ISDN systems. – 1998. – Vol. 30, Iss. 1–7. – P. 107–117.
8. DE SOLLA PRICE D.J. *Networks of scientific paper* // Science. – 1965. – Vol. 149, Iss. 3683. – P. 510–515.
9. FORTUNATO S. et al. *Science of science* // Science. – 2018. – Vol. 359, Iss. 6379. – P. 0185.
10. HIRSCH J.E. *Index for quantifying the results of scientific research of an individual* // Proc. of the National Academy of Sciences. – 2005. – Vol. 102, No. 46. – P. 16569–16572.
11. KAS M., CARLEY K.M., CARLEY L.R. *Trends in science networks: understanding structures and statistics of scientific networks* // Social Network Analysis and Mining. – 2012. – No. 2. – P. 169–187.
12. KOSUB S. *A note on the triangle inequality for the Jaccard distance* // Pattern Recognition Letters. – 2019. – Vol. 120. – P. 36–38.
13. LEVANDOWSKY M., WINTER D. *Distance between sets* // Nature. – 1971. – Vol. 234, No. 5323. – P. 34–35.
14. MALLIAROS F.D., VAZIRGIANNIS M. *Clustering and community detection in directed networks: A survey* // Physics Reports. – 2013. – Vol. 533, Iss. 4. – P. 95–142.
15. NEWMAN M.E., GIRVAN M. *Finding and evaluating community structure in networks* // Physical Review E. – 2004. – Vol. 69(2). – P. 026113.
16. PERIANES-RODRIGUEZ A., WALTMAN L., VAN ECK N.J. *Constructing bibliometric networks: A comparison between full*

and fractional counting // Journal of Informetrics. – 2016. – Vol. 10, Iss. 4. – P. 1178–1195.

JOURNAL INTERSECTION GRAPH: DEFINITION, MODIFICATIONS AND A MEANINGFUL EXAMPLE

Andrey Pechnikov, Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Dr.Sc., Leading Researcher (pechnikov@krc.karelia.ru).

Abstract: Bibliometric networks are defined by the relationships between publications and/or their authors, implemented on the basis of lists of co-authors and bibliographic lists. The mathematical models of such networks, which allow us to explore the communities of scientists and the connections between their works, are the corresponding bibliographic graphs. The paper defines a new type of bibliographic graph, the graph of journal intersections, based on the well-known binary operation of intersection of sets. The sets here are the sets of authors: the author belongs to the set of authors of the journal, if he has publications in this journal. The vertices of the intersection graph are journals, and connections between them arise if the intersections of the corresponding sets of authors are non-empty. Two modifications of the graph of journal intersections are proposed, taking into account the power of a subset of intersections and the similarity of sets of authors determined using the Jacquard coefficient. Data from 20 leading Russian mathematical journals are used as an example of the construction and study of the journal intersection graph and its modifications. As a result of the analysis, some results were obtained (the "closeness" or "openness" of the communities of authors and journals; a high correlation between the PageRank of graph vertices and the SCIENCE INDEX of journals in eLibrary), allowing a slightly different look at traditional approaches to ranking scientific journals used to assess scientific performance. The directions of further experimental and theoretical research are determined.

Keywords: scientific networks, bibliometric graph, intersection graph, Jacquard coefficient.

УДК 001.8 + 519.17

ББК 72

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.Г. Чхартишвили.*

Поступила в редакцию 14.12.2024.

Опубликована 31.03.2025.

ПРОТОКОЛ ЛАТЕНТНОГО КОНСЕНСУСА СО СЛАБЫМИ ФОНОВЫМИ СВЯЗЯМИ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Хомутов Д. К.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается согласование характеристик в многоагентной системе с информационными влияниями и запаздыванием. В частности, был рассмотрен случай, когда консенсус не достигается при любом векторе начальных значений. Подобная проблема может возникнуть в многоагентной системе со слабосвязанной структурой, т.е. когда есть несколько лидирующих агентов или групп агентов. Для достижения консенсуса был применен протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием. С помощью критерия Найквиста, примененного Цыпкиным, были установлены граничное значение запаздывания, зависящее от спектральных свойств лапласовской матрицы, и условие независимости сходимости от запаздывания. С уменьшением весов фоновых связей граничное значение запаздывания рассматриваемого протокола приближается к граничному значению запаздывания искомого протокола. Установлено, что в случае сходимости протокол латентного консенсуса с фоновыми связями сходится к консенсусу при любом векторе начальных значений, при этом веса фоновых связей могут быть сколь угодно малы. Таким образом применение данного протокола решает указанную выше проблему, а данное исследование позволяет адаптировать другие рассмотренные ранее протоколы латентного консенсуса для многоагентных систем с запаздыванием.

Ключевые слова: многоагентная система, консенсус, лапласовская матрица, управление с запаздыванием, метод Цыпкина.

1. Введение

Многоагентные системы с информационными влияниями имеют широкое применение во многих областях: в управлении движением и формацией автономных агентов [12, 15, 24, 33, 34], в сетевых структурах [6, 25, 39, 42], в социально-экономических системах [3, 4, 26, 45] и пр.

Однако в таких системах возникает запаздывание из-за времени, которое необходимо агенту на реакцию на какие-либо из-

¹ Дмитрий Константинович Хомутов, м.н.с. (homutov-dk@mail.ru).

менения, обработку информации и принятие решения, а также из-за технических ограничений при передаче информации. Так, в [13, 16, 19, 23] представлены модели потока транспорта с запаздыванием, которое возникает из-за времени, необходимого водителю, чтобы среагировать на изменение ситуации. Системы и сети распределения ресурсов и цепочки поставок состоят из взаимосвязанных точек, обменивающихся ресурсом или информацией [47]. В таких сетях запаздывание возникает из-за времени, необходимого на принятие решений, транспортировку ресурса и производство [17, 28, 30, 41]. В моделях управления с прогнозированием, использующихся в производственных процессах, запаздывание возникает вследствие того, что необходимо знать как текущее состояние системы, так и состояния системы в предыдущие моменты времени [27]. В [11] исследуется устойчивость к вибрациям в процессе работы фрезерного станка. Силы, возникающие в процессе прохождения через рабочую поверхность предыдущих зубьев пилы, влияют на устойчивость, вследствие чего в соответствующей математической модели возникает запаздывание.

Запаздывания также возникают в математических моделях, описывающие биологические системы. В генетических сетях запаздывание возникает в следствие того, что химические реакции происходят в течение некоторого времени [44]. При моделировании роста численности популяции животных необходимо принять во внимание, что новорожденные особи должны вырасти, прежде чем быть способными давать новое потомство. При моделировании процесса дыхания человека необходимо учесть, что циркуляция в крови происходит с запаздыванием. В нейронной системе возникает запаздывание при передаче потенциала в силу ограниченной скорости передачи и времени отклика [14, 18, 22, 29, 36]. На основе данного взаимодействия нейронов строятся спайковые нейронные сети [20].

Во второй половине XX века появилось множество классических результатов по дифференциальным, функционально-дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом

(см. например [8, 35]) и системам с запаздыванием (см. например [7, 31, 43]). Устойчивость подобных уравнений тесно связана с устойчивостью квазиполиномов [5, 21, 37, 38].

В данной статье исследуется протокол согласования характеристик в многоагентных системах с временной задержкой. Структуру взаимодействия агентов удобно представить в виде орграфа, где вершины соответствуют агентам, а дуги – их влиянию друг на друга. Агенты получают данные о состоянии своих соседей с некоторым запаздыванием, происходит процесс усреднения данных, тем самым агенты согласовывают свои характеристики. Известно, что в такой системе сходимость протокола зависит от спектральных свойств лапласовской матрицы, построенной на основе орграфа. Если значение запаздывания меньше граничного значения запаздывания, зависящего от спектра, и 0 – простое собственное значение, то агенты достигнут консенсуса при любом векторе начальных значений [10]. Однако если второе условие нарушается, возможно ли при минимальном изменении структуры орграфа и области сходимости достигнуть некоего наиболее естественного консенсуса?

В [2] рассматривалась схожая задача для многоагентной системы без запаздывания, а такой консенсус назывался «латентным» консенсусом. Однако для применения предложенных в [2] протоколов необходимо исследовать их область сходимости и асимптотическое поведение в случае запаздывания. В данной статье будет рассмотрен протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием.

2. Необходимые понятия и результаты

Пусть $V = \{1, \dots, n\}$ – множество вершин, соответствующее агентам; $G = \langle V, E \rangle$ – орграф влияний, в котором $E \subset V \times V$ – множество дуг. Если агент j влияет на агента i с весом $a_{ij} > 0$, то существует дуга из j в i с тем же весом. Если агент j не влияет на агента i , то $a_{ij} = 0$.

Определение 1. Лапласовская матрица $L = (l_{ij})$, соответствующая орграфу G , строится следующим образом:

$$\begin{cases} l_{ij} = -a_{ij}, & i \neq j; \\ l_{ii} = \sum_{k \neq i} a_{ik}. \end{cases}$$

Определение 2. Спектр матрицы L – это множество $\sigma(L) = \{\lambda \mid |A - \lambda I| = 0\}$, где I – единичная матрица. Спектр матрицы $\sigma(L)$, будет рассмотрен в данной статье с учетом кратности. Обозначим через $\sigma(L) \setminus \{0\}$ спектр матрицы L , не содержащий нулевые значения, а $\sigma(L) \setminus (0)$ – спектр матрицы L , не содержащий одно нулевое значение.

Стоит отметить, что $L\mathbf{1} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ – вектор-столбцы из единиц и нулей соответственно. Таким образом, хотя бы одно нулевое значение будет содержаться в $\sigma(L)$. Действительные части собственных значений матрицы L всегда неотрицательные (более подробно о локализации спектра лапласовских матриц см. в [1]).

Базовый протокол консенсуса первого порядка с запаздыванием, который был предложен в [40], имеет вид

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -Lx(t - \tau), & t \geq 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0), \end{cases}$$

где L – лапласовская матрица.

Определение 3. Протокол (1) сходится, если существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, где $x(t)$ – решение системы (1).

Определение 4. Протокол (1) сходится к консенсусу, если конечный предел решения системы (1) можно представить в виде $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c\mathbf{1}$, где c – значение консенсуса.

Теорема 1. (Адаптация результата из [32] в [10]) Протокол (1) сходится тогда и только тогда, когда

$$\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{\pi}{2} - |\arg \lambda| \right).$$

Определение 5. Образом (линейной оболочкой столбцов) матрицы L называется множество $\mathcal{R}(L) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = Lx, x \in \mathbb{R}^n\}$. Ядром матрицы L называется множество $\mathcal{N}(L) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Lx = \mathbf{0}\}$.

Определение 6. Собственным проектором лапласовской матрицы L называется такая идемпотентная стохастическая

матрица $L^\perp$, что $\mathcal{R}(L) = \mathcal{N}(L^\perp)$ и $\mathcal{N}(L) = \mathcal{R}(L^\perp)$ (см. подробнее в [9, 46]).

Утверждение 1. [9]

$$1) \lim_{t \rightarrow \infty} (I + tL)^{-1} = L^\perp.$$

2) $LL^\perp = L^\perp L = \mathbf{0}_{n \times n}$, где $\mathbf{0}_{n \times n}$ – матрица из нулей размерности $n \times n$.

$$3) \text{rank}(L) = n - \text{rank}(L^\perp).$$

Теорема 2. (Адаптация результата из [10])

1) Пусть протокол (1) сходится, $\phi(\theta) = x(0)$. Тогда если $x(t)$ – решение системы (1), то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L^\perp x(0).$$

2) Пусть протокол (1) сходится, $\phi(\theta) = x(0)$. Тогда если 0 – простое собственное значение матрицы L , то протокол (1) будет сходиться к консенсусу при любом векторе начальных значений $x(0)$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Лапласа $x(t - \tau)$:

$$(2) \quad \mathcal{L}(x(t - \tau)) = \int_0^\infty e^{-ts} x(t - \tau) dt.$$

Обозначим $u = t - \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t - \tau)) &= \int_{-\tau}^\infty e^{-(u+\tau)s} x(u) du = \int_{-\tau}^0 e^{-(u+\tau)s} x(u) du + \\ &+ \int_0^\infty e^{-(u+\tau)s} x(u) du = \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) x(0) + e^{-\tau s} X(s). \end{aligned}$$

Тогда преобразованием Лапласа системы (1) будет

$$sX(s) - x(0) = - \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) Lx(0) - e^{-\tau s} LX(s);$$

$$sX(s) + e^{-\tau s} LX(s) = x(0) - \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) Lx(0);$$

$$X(s) = (sI + e^{-\tau s} L)^{-1} \left(I - \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x(0).$$

Так как протокол (1) сходится, то согласно теореме о конечном значении

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s(sI + e^{-\tau s}L)^{-1} \left(I - \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x(0) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(I + \frac{e^{-\tau s}}{s} L \right)^{-1} \left(I - \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x(0).\end{aligned}$$

В силу того, что $\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) = \tau$ и согласно утверждению 1

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(I + \frac{e^{-\tau s}}{s} L \right)^{-1} = L^{\perp},$$

получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L^{\perp}(I - \tau L)x(0) = L^{\perp}x(0) - \tau L^{\perp}Lx(0) = L^{\perp}x(0).$$

Если 0 – простое собственное значение матрицы L , то $\text{rank}(L) = n - 1$. Тогда матрица $L^{\perp}$ будет стохастической матрицей единичного ранга, и $L^{\perp}x(0) = c\mathbf{1}$.

В случае, когда кратность нулевого собственного значения больше 1, для достижения латентного консенсуса в [2] был предложен протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями. В случае МАС с запаздыванием данный протокол примет вид

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -\delta D x(t) - L x(t - \tau), & t \geq 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0), \end{cases}$$

где $\delta > 0$, $D = I - V$, $V = \mathbf{1}v^{\top}$, $\sum_i v_i = 1$.

3. Основной результат

Рассмотрим сходимость и асимптотическое поведение протокола (3) при $\delta \rightarrow 0$. Характеристической функцией уравнения (3) будет

$$F(z) = \det(zI + \delta D + L e^{-\tau z}).$$

Рассмотрим следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 2. Жордановой формой матрицы D будет являться матрица $\Lambda_D = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & I_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}$.

Доказательство. Как было упомянуто ранее, $D = I - V$, где $V = \mathbf{1}v^\top$. Стоит отметить, что $\sigma(V) = (0, \dots, 0, 1)$. Также $\mathbf{1}v^\top \mathbf{1}v^\top = \mathbf{1}v^\top$, что означает, что V – идемпотентная матрица. Тогда жордановой формой матрицы V будет матрица

$$\Lambda_V = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times (n-1)} & \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\Lambda_V = S^{-1}VS; P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times (n-2)} & 1 \\ \mathbf{0}_{(n-2) \times 1} & I_{(n-2) \times (n-2)} & \mathbf{0}_{(n-2) \times 1} \\ 1 & \mathbf{0}_{1 \times (n-2)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда рассмотрим преобразование матрицы D с помощью матрицы SP .

$$\begin{aligned} (SP)^{-1}DSP &= P^{-1}S^{-1}DSP = P^{-1}S^{-1}(I - V)SP = P^{-1}(I - \Lambda_V)P = \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} I_{(n-1) \times (n-1)} & \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & I_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix} = \Lambda_D. \end{aligned}$$

Таким образом посредством матрицы преобразования SP получена жорданова форма Λ_D матрицы D .

Утверждение 3. Характеристическую функцию системы (3) $F(z)$ можно представить как произведение квазиполиномов

$$F(z) = z \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} (z + \delta + e^{-\tau z} \lambda).$$

Доказательство. Согласно утверждению 2 $\Lambda_D = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$ является жордановой формой матрицы D . Пусть $\Lambda_D = S^{-1}DS$. Так как $\mathbf{1}$ – собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению, то матрица S будет иметь вид $S = (\mathbf{1} \ *)$. Тогда $LS = (\mathbf{0} \ *)$, а матрицу $S^{-1}LS$ можно представить как

$$S^{-1}LS = \begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & R_L \end{pmatrix},$$

где R_L – некая матрица, $\sigma(R_L) = \sigma(L) \setminus (0)$. Тогда

$$\begin{aligned} F(z) &= \det(zI + \delta D + Le^{-\tau z}) = \det(S^{-1}(zI + \delta D + Le^{-\tau z})S) = \\ &= \det(zI + \delta S^{-1}DS + e^{-\tau z}S^{-1}LS) = \\ &= \det\left(zI + \delta \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & I_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix} + e^{-\tau z} \begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & R_L \end{pmatrix}\right) = \\ &= z \det((z + \delta)I_{n-1} + e^{-\tau z}R_L) = z \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus (0)} (z + \delta + e^{-\tau z}\lambda). \end{aligned}$$

Обозначим получившиеся квазиполиномы как

$$f_\lambda(z) = z + \delta + e^{-\tau z}\lambda.$$

Если нули квазиполиномов $f_\lambda(z)$, $\lambda \in \sigma(L) \setminus (0)$, находятся левее мнимой оси, то протокол (3) будет сходиться.

Данное условие можно интерпретировать следующим образом. Пусть в протоколе (3) вместо матрицы D будет 1, а вместо матрицы L – собственное значение λ , т.е. будет получено скалярное дифференциальное уравнение:

$$(4) \quad \dot{y}(t) = -\delta y(t) - \lambda y(t - \tau).$$

Тогда характеристической функцией уравнения (4) будет функция $f_\lambda(z)$. Если для любого $\lambda \in \sigma(L) \setminus (0)$ решение уравнения (4) будет устойчивым, то протокол (3) будет сходиться.

Устойчивость решения уравнения (4) будет оценена с помощью метода Цыпкина. Характеристическая функция $f_\lambda(z)$ будет принята за характеристический многочлен эквивалентной системы с запаздывающей обратной связью, который может быть представлен в виде

$$f_\lambda(z) = z + \delta + e^{-\tau z}\lambda = Q(z) - P(z)e^{-\tau z}.$$

Тогда амплитудно-фазовая характеристика эквивалентной системы будет

$$(5) \quad W_\tau(is) = \frac{P(is)}{Q(is)}e^{-i\tau s} = -\frac{\lambda}{is + \delta}e^{-i\tau s} = W_0(is)e^{-i\tau s}.$$

В силу того что $\delta > 0$, следует, что корень $Q(z)$ будет меньше нуля. Это означает, что соответствующая разомкнутая система будет устойчивой. Тогда, согласно методу Цыпкина, если график $W_\tau(is)$ не будет содержать внутри себя точку $(1, 0)$, то решение

уравнения (4) будет устойчивым, и не устойчивым в ином случае. Случай, когда график $W_\tau(is)$ проходит через точку $(1, 0)$, называется критическим.

Обозначим $\alpha = \operatorname{Re}(\lambda)$, $\beta = \operatorname{Im}(\lambda)$. Тогда функцию $W_0(is)$ можно представить как

$$W_0(is) = -\frac{\alpha + i\beta}{\delta + is} = -\frac{\alpha\delta + s\beta}{\delta^2 + s^2} - i\frac{-s\alpha + \delta\beta}{\delta^2 + s^2} = x + iy.$$

Рассмотрим $|W_\tau(is)|$. Очевидно, что $|W_\tau(is)| = |W_0(is)|$. Тогда

$$|W_\tau(is)| = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\delta^2 + s^2}}.$$

Утверждение 4. Пусть для каждого $\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}$ выполнено условие

$$\alpha^2 + \beta^2 < \delta^2.$$

Тогда сходимость протокола (3) не будет зависеть от τ .

Доказательство. Условие из утверждения можно переписать как

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\delta^2} < 1.$$

Тогда для каждого $\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}$ справедливо

$$|W_\tau(is)| = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\delta^2 + s^2}} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\delta^2}} < 1.$$

Это означает, что график $W_\tau(is)$ никогда не захватит точку $(1, 0)$, причем вне зависимости от τ . Таким образом, для каждого $\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}$ решение уравнения (4) будет устойчивым для любого τ , что означает, что сходимость протокола (3) не будет зависеть от τ .

Следствие 1. При $\delta \rightarrow 0$ сходимость протокола (3) всегда будет зависеть от τ .

Теорема 3. Пусть при фиксированном δ множество

$$\bar{\Psi} = \{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\} \mid \alpha^2 + \beta^2 \geq \delta^2\}$$

непусто. Для каждого $\lambda \in \bar{\Psi}$ вычислим значение

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\frac{\alpha\delta + \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}{\alpha^2 + \beta^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}.$$

Тогда протокол (3) будет сходиться тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \bar{\Psi}} \tau_\lambda$.

Доказательство. Найдем критические частоты, при которых $|W_0(is)| = 1$.

$$\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\delta^2 + s^2}} = 1; \quad \alpha^2 + \beta^2 = \delta^2 + s^2; \quad s = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}.$$

График $W_0(is)$ будет пересекать точку $(1, 0)$, если

$$\arg(W_0(is)) - \tau s = 2\pi n;$$

$$\cos(\arg(W_0(is))) = \cos(\tau s + 2\pi n);$$

$$\cos(\arg(W_0(is))) = \cos(\tau s).$$

Стоит отметить, что $\cos(\arg(W_0(is))) = x$. Тогда граничное τ_λ можно вычислить как

$$\begin{aligned} \cos(\tau_\lambda s) &= x; \\ \tau_\lambda &= \frac{\arccos(x)}{s} = \frac{\arccos\left(-\frac{\alpha\delta \pm \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}{\alpha^2 + \beta^2}\right)}{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}. \end{aligned}$$

Стоит отметить, что при отрицательном значении s значение τ_λ будет также отрицательным. Поэтому далее будет рассматриваться только положительное значение s . Тогда решение уравнения (4) будет устойчивым тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_\lambda$, где

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\frac{\alpha\delta + \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}{\alpha^2 + \beta^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}.$$

Решения уравнений (4) для каждого $\lambda \in \Psi$ будут устойчивыми тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \Psi} \tau_\lambda$. А значит и протокол (3) будет сходиться тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \Psi} \tau_\lambda$.

Следствие 2. При $\delta \rightarrow 0$ протокол (3) будет сходиться тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{\pi}{2} - |\arg \lambda|\right)$. Иными словами, при $\delta \rightarrow 0$ граничное значение запаздывания стремится к значению, полученному в теореме 1.

Доказательство. При $\delta \rightarrow 0$ $\Psi = \sigma(L) \setminus \{0\}$. Таким образом, для всех $\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}$ устойчивость решения уравнения (4) будет зависеть от τ .

Решение уравнения (4) при $\delta \rightarrow 0$ будет устойчивым тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_\lambda$, где

$$\begin{aligned}\tau_\lambda &= \frac{\arccos\left(-\frac{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\arccos\left(-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \\ &= \frac{1}{|\lambda|}(\arccos(\sin(-\arg \lambda))) = \frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{\pi}{2} + \arg \lambda\right).\end{aligned}$$

Тогда при $\delta \rightarrow 0$ протокол (3) будет сходиться тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_0$, где

$$\tau_0 = \min_{\lambda \in \Psi} \tau_\lambda = \min_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{\pi}{2} + \arg \lambda\right).$$

В силу того, что если $\sigma(L) \setminus \{0\}$ содержит комплексное значение, то содержит и комплексно сопряженное, полученное значение τ_0 будет идентично значению

$$\tau_0 = \min_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{\pi}{2} - |\arg \lambda|\right),$$

что совпадает со значением, полученным в теореме 1.

Далее рассмотрим асимптотическое поведение протокола (3). Для этого необходимо следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 5. [2]

- 1) $(L + \delta D)^\top = \mathbf{1}v^\top \left(I + \frac{1}{\delta}L\right)^{-1}$;
- 2) $\lim_{\delta \rightarrow 0} (L + \delta D)^\top = \mathbf{1}v^\top L^\top$.

Теорема 4. Пусть дан протокол консенсуса (3), который сходится с начальным условием $\phi(\theta) = x(0)$. Тогда

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{1}v^\top \left(I + \frac{1}{\delta}L\right)^{-1} (I - \tau L)x(0)$;
- 2) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{1}v^\top L^\top x(0)$.

Таким образом, протокол (3) будет сходиться к консенсусу при любом векторе начального значения.

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 2 преобразованием Лапласа $x(t - \tau)$ будет:

$$\mathcal{L}(x(t - \tau)) = \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s}\right) x(0) + e^{-\tau s} X(s).$$

Тогда преобразованием Лапласа системы (3) будет

$$sX(s) - x(0) = -\delta DX(s) - e^{-\tau s} LX(s) - \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) Lx(0);$$

$$sX(s) + \delta DX(s) + e^{-\tau s} LX(s) = x(0) - \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) Lx(0);$$

$$X(s) = (sI + \delta D + e^{-\tau s} L)^{-1} \left(I - \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x(0).$$

Так как протокол (3) сходится, то согласно теореме о конечном значении

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s(sI + \delta D + e^{-\tau s} L)^{-1} \left(I - \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x(0) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(I + \frac{1}{s} (\delta D + e^{-\tau s} L) \right)^{-1} \left(I - \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x(0). \end{aligned}$$

Так как $(\delta D + L)$ – лапласовская матрица, то, согласно утверждению 1,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(I + \frac{1}{s} (\delta D + e^{-\tau s} L) \right)^{-1} = (L + \delta D)^\dagger.$$

Таким образом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (L + \delta D)^\dagger (I - \tau L)x(0) = \mathbf{1}v^\top \left(I + \frac{1}{\delta} L \right)^{-1} (I - \tau L)x(0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{1}v^\top \left(I + \frac{1}{\delta} L \right)^{-1} (I - \tau L)x(0) = \\ &= \mathbf{1}v^\top L^\dagger (I - \tau L)x(0) = \mathbf{1}v^\top L^\dagger x(0). \end{aligned}$$

В силу того, что матрица $\mathbf{1}v^\top L^\dagger$ является стохастической матрицей единичного ранга, протокол (3) будет сходиться к консенсусу при любом векторе начальных значений.

4. Заключение

В данной статье был рассмотрен протокол согласования характеристик агентов в многоагентной системе с информационными влияниями и запаздыванием. Для случая, когда агенты не достигают консенсуса при любом векторе начальных значений, был предложен протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием. Граничное значение запаздывания предложенного протокола с уменьшением весов фоновых связей приближается к граничному значению запаздывания исходного протокола. В то же время предложенный протокол сходится к консенсусу при любом векторе начальных значений и сколь угодно малых весах фоновых связей, что решает вышеуказанную проблему. Данное исследование позволяет адаптировать другие рассмотренные ранее протоколы латентного консенсуса для многоагентных систем с запаздыванием.

Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Лапласовские спектры орграфов и их приложения* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №5. – С. 47–62.
2. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Модели латентного консенсуса* // Автоматика и телемеханика. – 2017. – №1. – С. 106–120.
3. ГУБАНОВ Д.А. *Методы анализа информационного влияния в активных сетевых структурах* // Автоматика и телемеханика. – 2022. – №5. – С. 87–101.
4. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Л. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства* – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2010. – 228 с.
5. ПОНТРЯГИН Л.С. *О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций* // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1942. – Т. 6, №3. – С. 115–134.

6. ПРОСКУРНИКОВ А.В., ФРАДКОВ А.Л. *Задачи и методы сетевого управления* // Автоматика и телемеханика. – 2016. – №10. – С. 3–39.
7. ЦЫПКИН Я.З. *Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью* // Автоматика и телемеханика. – 1946. – Т. 7, №2–3. – С. 107–129.
8. ЭЛЬСГОЛЬЦ Л.Э. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*. – М.: Наука, 1971. – 295 с.
9. AGAEV R., CHEBOTAREV P. *Forest matrices around the Laplacian matrix* // Linear Algebra and Its Applications. – 2002. – Vol. 356, No. 1–3. – P. 253–274.
10. AGAEV R.P., KHOMUTOV D. *On the Asymptotic Behavior of a Multiagent Systems with Arbitrary Structure and Time-Delays* // Proc. of the 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). Moscow: IEEE, 2022. – P. 1–3.
11. ALTINAS Y., ENGIN S., BUDAK E. *Analytical stability prediction and design of variable pitch cutters* // Journal of Manufacturing Science and Engineering. – 1999. – Vol. 121, No. 5. – P. 173–178.
12. ARYANKIA K., SELMIC R.R. *Neuro-Adaptive Formation Control of Nonlinear Multi-Agent Systems With Communication Delays* // Journal of Intelligent & Robotic Systems. – 2023. – Vol. 109, No. 4. – P. 92 (1–15).
13. AVEDISOV S.S., BANSAL G., OROSZ G. *Impacts of connected automated vehicles on freeway traffic patterns at different penetration levels* // IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems. – 2020. – Vol. 23, No. 5. – P. 4305–4318.
14. BAKER C.T.H., BOCHAROV G.A., RIHAN F.A. *A report on the use of delay differential equations in numerical modelling in the biosciences* // Manchester Centre for Computational Mathematics, Manchester. – 1999. – No. 343. – P. 1–46.

15. BALDIVIESO P.E., VEERMAN J.J.P. *Stability conditions for coupled autonomous vehicles formations* // IEEE Trans. on Control of Network Systems. – 2021. – Vol. 8, No. 1. – P. 513–522.
16. BANDO M. et al. *Analysis of optimal velocity model with explicit delay* // Phys. Review E. – 1998. – Vol. 58, No. 5. – P. 5429–5435.
17. BELAIR J., MACKEY M.C. *Consumer memory and price fluctuations in commodity markets: An integrodifferential model* // Journal of Dynamics and Differential Equations. – 1989. – Vol. 1. – P. 299–325.
18. BELINSKAIA A. et al. *Short-delay neurofeedback facilitates training of the parietal alpha rhythm* // Journal of Neural Engineering. – 2020. – Vol. 17, No. 6. – P. 066012 (1–18).
19. CAO Z. et al. *Modeling and simulating urban traffic flow mixed with regular and connected vehicles* // IEEE Access. – 2021. – Vol. 9. – P. 10392–10399.
20. CHAPLINSKAIA N., BAZENKOV N. *Axonal Myelination as a Mechanism for Unsupervised Learning in Spiking Neural Networks* // Proc. of the BICA – Procedia Computer Science, 2023. – Cham, Switzerland: Springer. – 2024. – Vol. 1130. – P. 169–176.
21. CHEBOTAREV N.G., MEIMAN N.N. *The Routh-Hurwitz problem for polynomials and entire functions* // Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova. – 1949. – Vol. 26. – P. 3–331.
22. COOMBES S., WEDGWOOD K.C.A. *Neurodynamics*. – Switherland: Springer, 2023. – 507 p.
23. DE SOUZA F., STERN R. *Calibrating microscopic car-following models for adaptive cruise control vehicles: Multiobjective approach* // Journal of Transportation Engineering, Part A: Systems. – 2021. – Vol. 147, No. 1. – P. 04020150 (1–11).
24. DING T.F. et al. *Second-order bipartite consensus for networked robotic systems with quantized-data interactions*

- and time-varying transmission delays* // ISA Trans. – 2021. – Vol. 108. – P. 178–187.
25. DITTRICH M.A., FOHLMEISTER S. *Cooperative multi-agent system for production control using reinforcement learning* // CIRP Annals. – 2020. – Vol. 69, No. 1. – P. 389–392.
26. DOMENTEANU A. et al. *From Data to Insights: A Bibliometric Assessment of Agent-Based Modeling Applications in Transportation* // Applied Sciences. – 2023. – Vol. 13, No. 23. – P. 12693 (1–37).
27. FERNANDEZ-CAMACHO E., BORDONS-ALBA C. *Model predictive control in the process industry*. – London: Springer, 1995. – 239 p.
28. GOLUBENETS V.O. *Relaxation oscillations in a logistic equation with nonconstant delay* // Mathematical notes. – 2020. – Vol. 107. – P. 920–933.
29. GOPOLSAMY K. *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*. – Dordrecht: Springer, 1992. – 502 p.
30. KASHCHENKO I., KASCHENKO S. *Infinite process of forward and backward bifurcations in the logistic equation with two delays* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2019. – Vol. 22, No. 4. – P. 407–412.
31. GU K., CHEN J., KHARITONOV V.L. *Stability of time-delay systems*. – Berlin: Birkhäuser, 2003 – P. 356.
32. HARA T., SUGIE J. *Stability region for systems of differential-difference equations* // Funkcialaj Ekvacioj. – 1996. – Vol. 39, No. 1. – P. 69–86.
33. HERBRYCH J. et al. *Dynamics of locally coupled agents with next nearest neighbor interaction* // Differential Equations and Dynamical Systems. – 2021. – Vol. 29. – P. 487–509.
34. ISLAM M.S., FARUQUE I.A. *Insect visuomotor delay adjustments in group flight support swarm cohesion* // Scientific Reports. – 2023. – Vol. 13, No. 1. – P. 6407 (1–17).
35. KOLMANOVSKII V., MYSHKIS A. *Applied theory of functional differential equations*. – Dordrecht: Kluwer

- Academic Publishers, 1992. – 234 p.
36. MACDONALD N. *Biological delay systems: linear stability theory*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 235 p.
 37. NICULESCU S.I., LI X.G., CELA A. *Counting characteristic roots of linear delay differential equations. Part I* // Controlling Delay Dynamics: Advances in Theory, Methods and Applications. – 2022. – Vol. 604. – P. 117–155.
 38. NICULESCU S.I., BOUSSAADA I. *Counting characteristic roots of linear delay differential equations. Part II* // Controlling Delay Dynamics: Advances in Theory, Methods and Applications. – 2022. – Vol. 604. – P. 157–193.
 39. NOWZARI C., GARCIA E., CORTÉS J. *Event-triggered communication and control of networked systems for multi-agent consensus* // Automatica. – 2019. – Vol. 105. – P. 1–27.
 40. OLFATI-SABER R., FAX J.A., MURRAY R.M. *Consensus and cooperation in networked multi-agent systems* // Proc. of the IEEE – 2007. – Vol. 95, No. 1. – P. 215–233.
 41. RIDDALLS C.E., BENNETT S. *The stability of supply chains* // Int. Journal of Production Research. – 2002. – Vol.40, No. 2. – P. 459–475.
 42. SILVA M.A.L. ET AL. *A reinforcement learning-based multi-agent framework applied for solving routing and scheduling problems* // Expert Systems with Applications. – 2019. – Vol. 131. – P. 148–171.
 43. TSYPKIN Y.Z. MINGUE FU. *Robust stability of time-delay systems with an uncertain time-delay constant* // Int. Journal of control. – 1993. – Vol. 57, No. 4. – P. 865–879.
 44. UGANDER J. *Delay-dependent stability of genetic regulatory networks* – Lund: Department of Automatic Control, Lund University, 2008. – 52 p.
 45. URENA R. et al. *A social network based approach for consensus achievement in multiperson decision making* // Information Fusion. – 2019. – Vol. 47. – P. 72–87.
 46. VEERMAN J.J.P., KUMMEL E. *Diffusion and consensus*

on weakly connected directed graphs // Linear Algebra and its Applications. – 2019. – Vol. 578. – P. 184–206.

47. ZHILYAKOVA L. KORESHKOV V., CHAPLINSKAIA N. *Some Properties of Stochastic Matrices and Non-Homogeneous Markov Chains Generated by Nonlinearities in the Resource Network Model* // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, No. 25. – P. 4095 (1–17).

LATENT CONSENSUS PROTOCOL WITH WEAK BACKGROUND LINKS AND TIME-DELAY

Dmitriy Khomutov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Junior Researcher (homutov_dk@mail.ru).

Abstract: Coordination in multiagent system with information influences and time-delay is considered. In particular, the case when consensus is not achieved for any vector of initial values was considered. Such a problem may arise in a multi-agent system with a weakly coupled structure, that is, when there are several leading agents or groups of agents. To achieve consensus, a latent consensus protocol with weak background links and time-delay was used. Using the Nyquist criterion applied by Tsyppin, a boundary value of time-delay was established, depending on the spectral properties of the Laplace matrix, and a condition for the independence of convergence from time-delay. With a decrease in the weights of background links, the boundary value of time-delay of the protocol under consideration approaches the one of the required protocol. It was found that in the case of convergence, the latent consensus protocol with background links converges to consensus for any vector of initial values, while the weights of background links can be arbitrarily small. Thus, the use of this protocol solves the above problem, and this study allows adapting other previously considered latent consensus protocols for multiagent systems with time-delay.

Keywords: multiagent system, consensus, laplacian matrix, stability analysis with delay, Tsyppin's test.

УДК 517.9

ББК 22.161.6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Ф.Т. Алескеровым.*

Поступила в редакцию 30.10.2024.

Дата опубликования 31.03.2025.

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕГУЛЯТИВНЫХ ИНСТРУМЕНТОВ РАЗВИТИЯ РЕГИОНОВ РОССИЙСКОЙ АРКТИКИ: ОПЫТ СОЦИОЛОГИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ¹

Волков А. Д.², Рослякова Н. А.³
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Статья посвящена исследованию аспектов проработанности и эффективности мер поддержки бизнеса на территориях Арктической зоны России. Специфика работы определяется уникальными данными, полученными в результате экспедиционных исследований 2024 года и использования методики полуструктуризованного интервью. Выборка исследования включала 18 представителей бизнеса и 18 представителей местных администраций – по 3 эксперта от каждого арктического округа или района Республики Коми и Ненецкого автономного округа. Аналитическая обработка данных осуществлялась с помощью методического подхода, который базируется на методах статистического (сопоставительные и средние оценки) и непараметрического (рейтингование, коэффициент конкордации Кендалла, критерия Манна – Уитни, коэффициент ранговой корреляции Спирмена) анализа. Подход позволяет последовательно выявить согласованность мнений экспертов по оценке отдельных аспектов и проблем, обосновать значимость отличий в оценках между представителями власти и бизнеса и измерить их согласованность в случае солидарности мнений. Выявлены аспекты проработанности мер поддержки по критериям полноты доступной информации, простоты процедуры оформления, скорости получения, квалификации специалистов и общего объема поддержки и пользы. Установлена специфика реализации мер поддержки на местном, региональном и федеральном уровнях. Наиболее проработанными и эффективными являются меры регионального уровня. Среди ключевых проблем на муниципальном и региональном уровнях выделяется процедура оформления документов, на федеральном – объем поддержки. Составлен рейтинг эффективности наиболее используемых мер стимулирования. Выявлены возможные причины различий в территориальных особенностях их эффективности, даны соответствующие рекомендации по их совершенствованию.

¹ Статья подготовлена в рамках проекта Российского научного фонда №24-78-10166 «Моделирование цифровой трансформации управления пространственным развитием Российской Арктики в условиях неравновесной динамики регионов» (<https://rscf.ru/project/24-78-10166/>).

² Александр Дмитриевич Волков, к.э.н., с.н.с. (kov8vol@gmail.com).

³ Наталья Андреевна Рослякова, к.э.н., с.н.с. (na@roslyakova24.ru).

Ключевые слова: Арктическая зона, меры поддержки, резидент Арктики, налоговые льготы, арктический гектар, субсидии.

1. Введение

Перспективное значение Арктики в мировых экономических и политических процессах возрастает в последние десятилетия. Оно определяется потенциалом природных ресурсов [22, 28, 32], перспективным значением Арктики в транспортировке грузов [30, 35], растущим потенциалом Арктики в международных экономических связях [26], а также геополитическим аспектом [6, 23, 29, 31]. При этом арктическими государствами активно реализуются специальные программы и законодательные инициативы, призванные создать благоприятные условия для развития бизнеса и социальной сферы на арктических территориях [21, 27]. Наиболее активно в последнее десятилетие развивается специальное арктическое законодательство и регулятивные инструменты в Российской Федерации [5].

Одной из новаций в арктическом законодательстве России последних лет является инструмент преференциального режима предпринимательской деятельности и ряд связанных нормативно-правовых актов [10, 19]. В рамках режима предусмотрен ряд налоговых и административных преференций для инвесторов, принявших решение локализовать производство на территориях арктических регионов России. Несмотря на то, что в научных работах уже существуют первые оценки его эффективности [4, 8, 33], они опираются на статистическую и ведомственную информацию, поступающую с определенным временным лагом, и не всегда в полной мере отражают соответствие текущим тенденциям. В условиях стремительно изменяющейся экономической и геополитической обстановки особенно актуальной становится разработка таких инструментов оценки эффективности, которые могли бы носить более оперативный характер, что позволило бы выделить первичные направления совершенствования ещё до завершения полного цикла реализации новейших мер. Среди работ, рассматривающих тематику преференциального режима Арктической зоны Российской Федерации, можно отметить

посвященные анализу нормативно-правовых основ и системности законодательной базы [15, 24], оценке общих тенденций реализации преференциального режима АЗРФ [2, 8], анализу эффектов на уровне предприятий [14], анализу социально-экономических эффектов для территорий реализации [33]. Несмотря на положительную динамику числа резидентов, показателей созданных рабочих мест и привлеченных инвестиций, в работах ряда авторов утверждается об общем исчерпании потенциала преференциального режима АЗРФ в привлечении крупных инвестиционных проектов на территории арктических регионов [8, 33], что может быть связано как с исчерпанием эффекта преференций, так и с более системными ограничениями заключающимися в сохранении технологических и институциональных условий функционирования хозяйственных систем. Кроме того, наблюдается существенная территориальная дифференциация показателей реализации преференциального режима по регионам: в числе регионов-лидеров указываются Чукотский АО (за счёт высокой доли резидентов в генерации выручки и создании новых рабочих мест), арктические территории Республики Карелия (за счёт высокой доли резидентов в реализации новых инвестиций и создании новых компаний) и Архангельской области (за счёт высокой доли резидентов в реализации новых инвестиций и генерации выручки), в числе аутсайдеров – Ненецкий АО (за счёт крайне низкой доли резидентов в реализации новых инвестиций и генерации выручки) и Ямало-Ненецкий АО (за счёт крайне низкой доли резидентов в реализации новых инвестиций и создании новых рабочих мест и новых организаций) [2].

Другим относительно новым направлением реализации арктической политики России является инструмент «арктического гектара»: специального порядка предоставления земельных участков для ведения предпринимательской деятельности и жилищного строительства [18]. До настоящего времени данный инструмент регулирования социально-экономического развития Российской Арктики системно не изучен, а ряд имеющихся исследований посвящен в основном аспектам его реализации [16]. Еще более новыми и неизученными механизмами являются:

– Программа «Президентская единая субсидия», представляющая механизм финансирования, направленный на создание, реконструкцию или поддержание деятельности социальных объектов на территории Арктической зоны Российской Федерации и начавший свою реализацию с сентября 2022 года. Основными регламентирующими документами являются Постановление Правительства РФ № 484 от 30.03.2021 [11] и Приказ Минвостокразвития России от 29.02.2024 № 18.

– Программа «Арктическая ипотека», предоставляющая льготные условия приобретения жилья в кредит на территориях арктических регионов России. Данная программа начала свое действие в ноябре 2023 года и регламентируется Решением Минфина России о порядке предоставления субсидии №23-67393-01016-Р от 02.05.2024 г. [3, 12].

– Программа «Опорные населенные пункты Арктической зоны РФ» – механизм территориального развития, предполагающий организованную реализацию экономических, инфраструктурных и социальных проектов в регионах и муниципалитетах Российской Арктики. Механизм начал свое действие в ноябре 2023 года. Основными регламентирующими документами являются Перечень поручений Президента РФ по итогам совещания по развитию ЗАТО и населённых пунктов Арктической зоны России (Пр-1626) [9] и Распоряжение Правительства РФ от № 3377-р 28 ноября 2023 г. [13].

Общее количество специальных механизмов, инструментов и мер поддержки экономической активности на арктических территориях на начало 2025 года составляет более 25. Достаточно полный обзор мер стимулирования экономического развития на территории Российской Арктики дан в работе Д.Л. Кондратовича [7]. Автор выделяет четыре основных группы мер поддержки, включающих специальные режимы (преференциальный режим АЗРФ, территории опережающего развития, налоговые льготы и др.), финансовые инструменты (микрокредиты, займы Фонда развития промышленности, «Народный бюджет» и др.), ресурсную поддержку (аренда участков без торгов, государственное имущество, инжиниринг и др.), а также отдельно выделяемое общее направление «Развитие деловой активности» (инвестиционная декларация, кластерные объединения и др.).

При всем многообразии мер поддержки и стимулирования актуальным остается вопрос их соорганизации и эффективности. С учетом отмечаемой исследователями рассогласованности стратегических документов развития на федеральном и макрорегиональном уровнях [1] (впрочем, характерной и для других стран [25, 34]) вопросы общей и частной эффективности мер стимулирования экономического развития на территории АЗРФ являются чрезвычайно важными. Острота данных вопросов усиливается существующей ограниченностью ресурсов для развития арктических территорий [17, 36]. Сложность такой оценки обуславливается, как отмечалось, существенной задержкой официальных статистических данных и ведомственной информации, возрастающей закрытостью официальных источников. Связанная с этим неточность или, скорее, неактуальность оценок по отношению к текущему состоянию объекта рассмотрения проявляется особенно отчетливо в условиях быстрых изменений макроэкономических и глобальных условий хозяйствования. С учетом этого возрастает значение специализированных социологических исследований, нацеленных на сбор как качественной, так и количественной информации об исследуемых процессах и получаемой при непосредственном взаимодействии с субъектами хозяйствования и управления. При изучении эффективности механизмов стимулирования экономического развития арктических территорий выбор социологического инструментария определяется целью и задачами исследования.

Целью настоящего исследования является выявление аспектов эффективности реализации программ и регулятивных инструментов развития Российской Арктики.

Задачи исследования:

- определение аспектов эффективности реализации арктических программ и управленческих механизмов, применяемых в их рамках;
- составление рейтинга эффективности наиболее используемых хозяйствующими субъектами мер стимулирования;
- выявление возможных причин различий в территориальных особенностях эффективности мер стимулирования.

Для реализации указанных задач целесообразно применение методики полуструктурированных интервью, инструментарий

которых включает открытые вопросы, ориентированные на получение в первую очередь качественной информации, закрытые вопросы, необходимые для дальнейшего анализа количественных данных, и дополнительные вопросы, позволяющие полнее учитывать пространственный и социально-экономический контекст. Подробно применяемый в настоящем исследовании инструментарий будет рассмотрен в разделе 2.

Научная новизна исследования заключается в выявлении аспектов эффективности регулятивных инструментов развития арктических территорий, которые, как правило, затруднительны для оценки с помощью стандартных инструментов и источников данных (таких, как официальная статистика, ведомственная информация и т.д.). Полученные данные позволяют не только оценить относительную и абсолютную эффективность регулятивных инструментов, опираясь на оценки представителей менеджмента предприятий и органов власти, которые непосредственно вовлечены в их реализацию. Это позволяет выделить наиболее проблемные аспекты в применении указанных механизмов, составить рейтинги регулятивных мер и проанализировать возможные причины территориальных отличий в их реализации.

Практическое значение исследования заключается в разработке рекомендаций для совершенствования регулятивных мер и экономических механизмов развития арктических территорий.

2. Методика и данные

Для реализации цели исследования в качестве объекта были выбраны муниципальные образования, относимые к арктическим территориям Республики Коми и Ненецкого автономного округа (ГО Воркута, ГО Усинск, ГО Инта, Усть-Цилемский муниципальный район, ГО Нарьян-Мар, Заполярный муниципальный район). Фактологическую основу исследования составляет серия экспертных полуструктурированных интервью с представителями местных и региональных администраций, бизнеса и НКО [20], а также результаты опроса населения, которые проводились на территориях в сентябре–октябре 2024 г. как самими авторами, так и привлеченными интервьюерами (в рамках опроса населения). Для целей настоящего исследования будут использованы

результаты интервью с представителями местной власти и бизнеса. Целевая выборка включала по 3 представителя предприятий и местных администраций в каждом районе или округе. Общая выборка составила 18 предприятий и 18 представителей органов местного самоуправления.

Вопросы для представителей бизнеса были посвящены оценке динамики и тенденций развития компании, текущим трудностям и проблемам в деятельности, а также тому, используют ли компании специальные меры поддержки со стороны государства. Респонденты могли отметить как специфические меры поддержки предприятий на арктических территориях, так и те меры, которые характерны для всех территорий России.

Представителям руководства тех компаний, которые пользуются мерами поддержки, задавался вопрос¹ об их оценке по критериям полноты доступной информации, простоты процедуры оформления, скорости получения, квалификации специалистов и общего объема поддержки и пользы. Список мер поддержки был открытым: респонденты сами указывали те программы и механизмы, которые они используют в своей деятельности или с которыми они детально знакомы.

Отдельный вопрос был посвящен выявлению возможных причин территориальной дифференциации эффективности мер поддержки². В его рамках респонденту предстояло оценить выраженность тех или иных помех и проблем во взаимодействии бизнеса и государственной и муниципальной власти по пятибалльной шкале. Помимо оценки представленных проблем респонденты могли дополнить и оценить список специфическими или неупомянутыми помехами.

Аналитическая обработка полученных результатов базировалась на методах статистического (сопоставительные и средние

¹ Вопрос «Оцените, пожалуйста, знакомые Вам меры поддержки бизнеса со стороны государства и местной власти по следующим критериям: (от 1 – «крайне плохо» до 5 – «очень хорошо»; необходимо проставить ответ в каждой клетке)».

² Вопрос «Что мешает взаимодействию бизнеса и государственной и муниципальной власти в существующих условиях? (выберите причину и дайте балльную оценку помехам по шкале: 1 – не является помехой; 2 – незначительная помеха; 3 – средняя помеха; 4 – большая помеха; 5 – очень большая помеха)».

оценки) и непараметрического (рейтингование, коэффициент конкордации Кендалла, критерий Манна – Уитни, коэффициент ранговой корреляции Спирмена) анализа. Аналитическая свёртка полученных данных, была реализована по следующей методике:

1. Проверка согласованности мнения экспертов каждой отдельной группы (власти и бизнеса) с помощью коэффициента конкордации Кендалла W (1) на уровне как отдельных территорий, так всех территорий в совокупности:

$$(1) \quad W = \frac{12}{K^2(N^3 - N)} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=1}^K r_k^n - \frac{K(N+1)}{2} \right)^2,$$

где K – количество экспертов; N – количество оцениваемых объектов (аспектов), r_k^n – ранг n -го объекта у k -го эксперта. Значимость расчётного значения W осуществляется через сопоставление с критическим значением для распределения χ^2 .

Кроме прямого результата в виде вывода о сходстве представлений респондентов о порядке распределения ответов, дополнительно данный коэффициент позволяет сделать вывод о предпочтительных методах анализа. Согласованность свидетельствует в пользу того, что на следующем этапе данные могут анализироваться параметрическими методами, в противном случае – непараметрическими методами.

2. Проверка значимости отличий в оценке проблем развития представителями власти и бизнеса, которая осуществляется с помощью непараметрического критерия Манна – Уитни:

$$(2) \quad U = \sum_{n=1}^N a_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n,$$

где a_n – количество элементов (оцениваемых объектов) второй выборки, превосходящих i -й элемент (оцениваемый объект) первой выборки; b_n – количество элементов (оцениваемых объектов) второй выборки, равных i -му элементу (оцениваемому объекту) первой выборки. Значимость расчётного значения U осуществляется через сопоставление с критическим значением для распределения χ^2 .

Критерий Манна – Уитни позволяет сделать вывод о том, что две группы экспертов, оценивая одни и те же характеристики, дали статистически значимо отличающиеся оценки, что, соответственно, можно трактовать как значимое различие в понимании ключевых проблем коммуникации и взаимодействия. В случае,

когда оценки значимо отличаются, можно анализировать профиль оценок, сопоставлять их статистическими методами, иллюстрировать из интервью обоснование значимости решения той или иной проблемы и разницу во взглядах на причину или решение проблемы, которые есть у представителей власти и бизнеса. В случае, когда оценки значимо не отличаются, можно говорить об относительной согласованности взгляда на проблемы; для таких оценок на следующем этапе целесообразно оценить меру скоррелированности мнений бизнеса и власти.

3. Оценка коэффициента ранговой корреляции Спирмена для выявления меры близости (тесноты) (3) взаимосвязи между оценками проблем со стороны представителей власти и бизнеса:

$$(3) \quad r_s = 1 - \frac{6 \sum_{n=1}^N (r_x^n - r_y^n)^2}{N(N^2 - 1)},$$

где r_x^n – ранг (место) n -го объекта при ранжировании в рамках первой выборки; r_y^n – ранг (место) n -го объекта при ранжировании в рамках второй выборки. Значимость расчётного значения r_s осуществляется через сопоставление с критическим значением для распределения Стьюдента.

В случае группы территорий, значимо отличающихся по критерию Манна – Уитни, r_x^n скорее всего будет не значимым, а для территорий, где критерий Манна – Уитни отказался не значимым, r_x^n позволяет измерить близость оценок властью и бизнесом существующих проблем.

Дальнейший содержательный анализ и интерпретация результатов как статистической, так и непараметрической обработки будет базироваться на фактологическом материале интервью респондентов.

3. Результаты исследования

3.1. ОЦЕНКА БИЗНЕСОМ МЕР СТИМУЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩАЯ ОТДЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ИХ ЭФФЕКТИВНОСТИ

По результатам интервью 18 представителей менеджмента компаний установлено 64 случая использования механизмов поддержки. При этом ряд компаний вообще не пользуется мерами поддержки со стороны государства, а другие используют их

очень активно. На первом этапе выявленные меры поддержки были нами обобщены в рамках 9 групп (в скобках указана количество случаев использования той или иной меры):

- субсидии/дотации/гранты на возмещение производственных затрат (16);
- налоговые льготы (10);
- поддержка по линии Центров развития бизнеса (10);
- субсидии/дотации/гранты на приобретение нового оборудования (8);
- статус резидента Арктики (6);
- льготное кредитование (5);
- субсидии/дотации/гранты на организацию нового бизнеса или деятельности (3);
- льготный лизинг (3);
- арктический гектар (3).

Мы видим, что наибольшей популярностью пользуются те меры поддержки, которые были достаточно давно введены в практику использования: субсидии/дотации/гранты на возмещение производственных затрат и налоговые льготы. Специфические «арктические» меры поддержки являются средне- и малораспространенными.

В рамках сопоставления отдельных аспектов реализации мер поддержки выявились характерные для них общие и частные проблемы (рис. 1).

Так, одной из общих сильных сторон реализации мер являются полнота доступной информации и квалификация специалистов. Общей относительно слабой стороной с точки зрения представителей бизнеса выступает объем поддержки и общая польза от указанных мер. Однако есть и исключения. Так, в рамках получения статуса резидента АЗРФ общий объем поддержки и польза являются относительно сильной стороной, но, вероятно, в большей степени ввиду сравнительно низких оценок по критериям полноты информации, простоты процедуры оформления и скорости получения. Это может быть в первую очередь обусловлено тем, что по новейшим мерам поддержки респонденты ещё

не получили полной информации ввиду незавершённости процесса реализации этой меры и отсутствия понимания её интегральной эффективности.

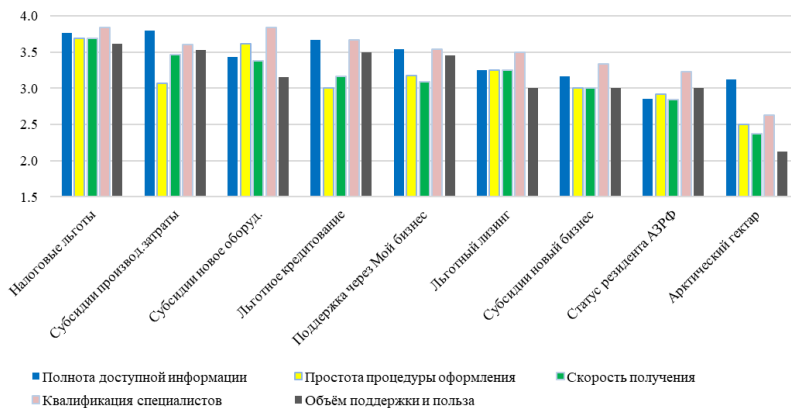


Рис. 1. Распределение баллов по отдельным критериям эффективности для программ развития

На основе сведения оценок бизнеса по различным аспектам реализации программ и мер поддержки нами был разработан их рейтинг, состоящий из частного и сводного ранжирования, представленный в таблице 1.

В целом, основываясь на оценках представителей менеджмента компаний и составленном рейтинге, наиболее эффективной выглядит реализация общих и давно введенных мер, в то время как новым мерам, разработанным специально для АЗРФ, зачастую не хватает проработанности. Причем указанные недостатки относятся в первую очередь к общим мерам, имеющим «сплошное» действие на всех арктических территориях, – как в сфере предпринимательства, так и в социальной сфере.

Так, например, представитель администрации ГО Усинск отмечает: «По Арктической ипотеке: банки дают средства только на приобретение жилья в строящихся новых домах. У нас такого нет. У нас не строятся дома. У нас компания «Лукойл» построила многоквартирный дом, но это служебное жилье. А застройщиков, которые бы построили и свободно продавали – нет.

То есть невозможно реализовать эту программу. Надо пересматривать ее. Надо пересматривать, чтобы люди могли взять ипотеку для покупки вторичного жилья здесь, в Усинске».

Таблица 1. Рейтинг программ развития по отдельным критериям эффективности

Ранг	Полнота доступной информации	Простота процедуры оформления	Скорость получения	Квалификация специалистов	Объём поддержки и польза	Интегральный критерий
1	Субсидии производ. затраты	Налоговые льготы	Налоговые льготы	Налоговые льготы	Налоговые льготы	Налоговые льготы
2	Налоговые льготы	Субсидии новое оборуд.	Субсидии производ. затраты	Субсидии новое оборуд.	Субсидии производ. затраты	Субсидии производ. затраты
3	Льготное кредитование	Льготный лизинг	Субсидии новое оборуд.	Льготное кредитование	Льготное кредитование	Субсидии новое оборуд.
4	Поддержка через «Мой бизнес»	Поддержка через «Мой бизнес»	Льготный лизинг	Субсидии производ. затраты	Поддержка через «Мой бизнес»	Льготное кредитование
5	Субсидии новое оборуд.	Субсидии производ. затраты	Льготное кредитование	Поддержка через «Мой бизнес»	Субсидии новое оборуд.	Поддержка через «Мой бизнес»
6	Льготный лизинг	Льготное кредитование	Поддержка через «Мой бизнес»	Льготный лизинг	Льготный лизинг	Льготный лизинг
7	Субсидии новый бизнес	Субсидии новый бизнес	Субсидии новый бизнес	Субсидии новый бизнес	Субсидии новый бизнес	Субсидии новый бизнес
8	Арктический гектар	Статус резидента АЗРФ	Статус резидента АЗРФ	Статус резидента АЗРФ	Статус резидента АЗРФ	Статус резидента АЗРФ
9	Статус резидента АЗРФ	Арктический гектар	Арктический гектар	Арктический гектар	Арктический гектар	Арктический гектар

В то же время это не относится к таким доказавшим свою эффективность и давно работающим механизмам, как компенсация затрат при осуществлении Северного завоза или специальными мерам поддержки оленеводческих хозяйств. Представитель бизнеса из Заполярного района НАО дает следующую оценку

данным мерам: «Возмещению подлежат 80% стоимости доставки, а на острова – 95% стоимости доставки по 18 наименованиям продукции. Раньше перечень был больше. То, что было принято решение его сократить, – это было неправильное решение. Если в летнее время река обмелела и на судах не завезти, то скоропортящиеся продукты можно доставить вертолетом. Хорошо, что у нас есть это возмещение и есть такая возможность».

С точки зрения дальнейшего анализа представляет интерес дифференциация мер поддержки по уровням их предоставления (местный, региональный и федеральный) и выявление особенностей их реализации.

3.2. ОЦЕНКИ БИЗНЕСОМ АСПЕКТОВ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕР ПОДДЕРЖКИ НА МЕСТНОМ, РЕГИОНАЛЬНОМ И ФЕДЕРАЛЬНОМ УРОВНЯХ

Интерес представляет рассмотрение аспектов эффективности реализации мер поддержки бизнеса в разрезе различных уровней административной организации. Распределение оценок для механизмов местного уровня ($n = 9$) представлено на рис. 2¹.

Из рис. 2 видно, что оценки мер местного уровня весьма поляризованы по большинству критериев: скорости получения, квалификации специалистов и общему объёму и пользе поддержки.

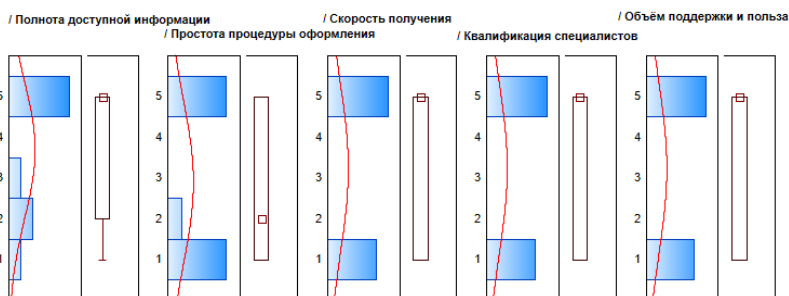


Рис. 2. Распределение оценок бизнесом мер поддержки местного уровня по отдельным аспектам

¹ Здесь и далее на рис. 2-4 квадратик обозначает медиану, кружок – выброс.

Наименьшим сводным баллом характеризуется аспект простоты процедуры оформления, наибольшим – полнота доступной информации. При этом полученные оценки являются согласованными по коэффициенту конкордации Кендалла (W), который составил 0,319 (32%) при уровне вероятности ошибки 0,02, т.е. мы видим, что уровень согласованности является умеренным, но значимым параметром. Такие результаты являются следствием поляризации мнений экспертов. Учитывая поляризацию, в данном случае не вполне уместно говорить о средних оценках.

Несколько иную картину мы видим при анализе мер поддержки, реализуемых на региональном уровне ($n = 27$) (рис. 3).

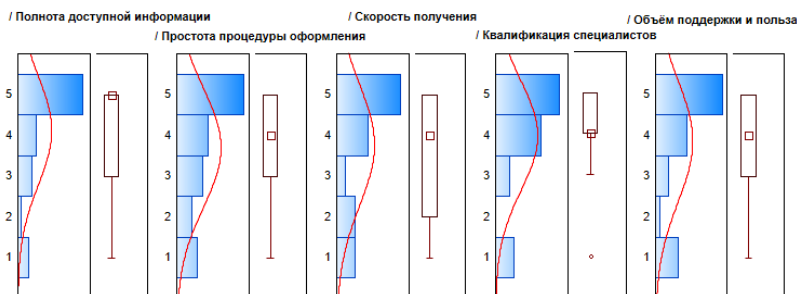


Рис. 3. Распределение оценок бизнесом по отдельным аспектам для программ поддержки регионального уровня

Наиболее критично представители бизнеса оценивают аспект простоты процедуры оформления и скорости получения мер поддержки данного уровня. Определенный вклад в негативные оценки вносит транспортная удаленность периферийных территорий от административных центров, особенно характерная для арктических территорий Республики Коми, сочетающаяся с необходимостью личного посещения инстанций, локализованных в региональных центрах.

Как отмечает респондент из ГО Инта: «У нас в Республике Коми есть специальные микрозаймы для бизнеса, там дают под небольшой процент, ставки, наверное, процентов 5. Но для того чтобы взять эти деньги, мало того, что нужно оценку залоговой недвижимости делать, необходимо еще время найти, несколько

раз съездить в Сыктывкар за этими дешевыми деньгами, назовем их так. Плюс, соответственно, потратить деньги на билеты, зачастую ехать с пересадкой, поскольку прямые поезда ходят редко, а автодороги нет. Плюс проживание, питание и т.д. Соответственно, поскольку мы не такие большие суммы берем, деньги получаются совсем не быстрые, да еще и достаточно дорогие».

Наиболее положительно респондентами оценивается аспект полноты доступной информации о мерах поддержки. При анализе согласованности мнений экспертов мы можем сделать вывод о наличии слабой, но значимой согласованности мнений ($W = 0,109$ при вероятности ошибки 0,01).

Графическое представление распределения оценок мер федерального уровня ($n = 28$) мы видим на рис. 4.

Для оценок мер данной группы характерна большая поляризация относительно наблюдаемой для мер регионального уровня: доля негативных оценок достаточно велика. Наиболее критичны представители бизнеса в оценке аспекта объема поддержки и пользы. Наиболее положительны оценки аспектов квалификации специалистов и полноты доступной информации. При расчете коэффициента конкордации мнений экспертов мы видим их несогласованность (вероятность ошибки 0,74).

Ниже на рис. 5 представлено наглядное отображение аспектов реализации мер поддержки в разрезе уровней их предоставления.

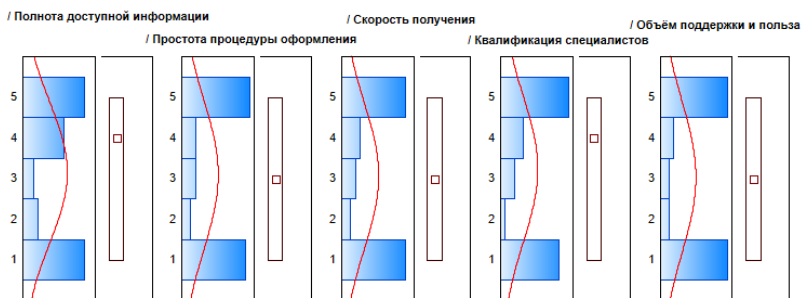


Рис. 4. Распределение оценок бизнесом по отдельным аспектам для программ поддержки федерального уровня

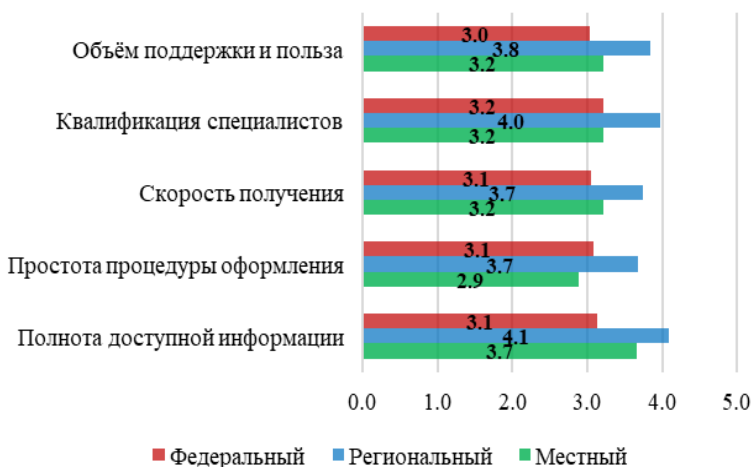


Рис. 5. Средние оценки отдельных аспектов эффективности программ развития в разрезе уровней их предоставления

Полученные результаты на данном этапе анализа позволяют утверждать, что наиболее проработанными и эффективными с точки зрения представителей бизнеса являются механизмы поддержки, реализуемые на региональном уровне. В их основе лежат достаточно широкие административные полномочия регионального уровня управления и значительные бюджетные и организационные ресурсы. Меры поддержки на муниципальном уровне хотя и приближены к специфическим потребностям бизнеса, как правило, ограничены возможностями местных бюджетов, кадровым потенциалом на местах и т.д. В то время как меры поддержки федерального уровня так или иначе характеризуются большей «удаленностью» принятия решений, меньшей гибкостью в отношении местной специфики потребностей бизнеса.

Наиболее проблемными аспектами реализации мер поддержки на муниципальном уровне выступает процедура оформления документов, на региональном уровне – процедура оформления документов и скорость, на федеральном – объем поддержки и польза (хотя разница несущественная). Согласованность мнений экспертов по структуре оценок разных критериев

(иными словами – сонаправленность сочетаний оценок по разным критериям) падает при переходе от местного к федеральному уровню. Таким образом, мы можем говорить о признаках дифференциации не по созданным муниципальным условиям предоставления мер поддержки – их уровень в целом соотносится с уровнем экономического развития и активности в каждом конкретном муниципалитете, и это соотношение относительно пропорционально. Ключевые различия наблюдаются в возможностях и опыте получения мер поддержки более высокого уровня – регионального и особенно федерального. Вероятно, имеют значение объективные причины более высокого или низкого уровня экономического развития предприятий, их организационных возможностей, а также опыт, компетенции и своеобразные «ноу-хау» при получении мер поддержки федерального уровня.

Для дальнейшего анализа представляет интерес рассмотрение возможных причин низкого уровня эффективности отдельных аспектов механизмов экономического стимулирования. Их рассмотрение основано на экспертных оценках препятствий и проблем во взаимодействии бизнеса и власти, полученных от представителей обеих сторон отношений.

3.3. ОЦЕНКИ ВОСПРИЯТИЯ ПРЕПЯТСТВИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БИЗНЕСОМ И ВЛАСТЬЮ

Прежде чем перейти к анализу непосредственных результатов обобщения оценок проблем во взаимодействии бизнеса и власти, рассмотрим показатели меры согласованности ответов респондентов, полученные с использованием коэффициента конкордации Кендалла (таблица 2).

Из таблицы 2 мы видим, что в целом для всех территорий имеет место согласованность мнений экспертов. Она имеет не очень высокий уровень, так как сами коэффициенты конкордации Кендалла принимают значение 11% и 8% для представителей бизнеса и власти соответственно. Однако оба эти результата статистически значимы на уровне 1% вероятности ошибки. Это свидетельствует в пользу того, что данные совокупности могут в дальнейшем рассматриваться в качестве базы для параметрического и эконометрического анализа.

Таблица 2. Коэффициент конкордации Кендалла для оценок представителями бизнеса и власти проблем взаимодействия

Территория	Бизнес	Власть
Заполярный район	0,62**	0,20
ГО Нарьян-Мар	0,32	0,54***
ГО Воркута	0,19	0,41**
ГО Инта	0,32	0,06*
ГО Усинск	0,32	0,06
Усть-Цилемский район	0,29	0,55*
В совокупности по всем территориям	0,11*	0,08*

Примечание: * – значимо на уровне 1%; ** – значимо на уровне 5%; *** – значимо на уровне 10%.

Однако тестирование той же гипотезы на уровне отдельных территорий демонстрирует иные результаты: для бизнеса на всех территориях кроме Заполярного района (Ненецкий АО) согласованность мнений экспертов отсутствует. Это обусловлено как различным профилем (отраслевой принадлежностью) компаний, что в свою очередь обуславливает разный профиль проблем и аспектов ведомственного взаимодействия, так и различием в опыте интеграции в различные программы государственной поддержки государства. Соответственно для интерпретации и дальнейшего анализа этих аспектов большое значение имеют качественные данные, полученные в рамках рассмотрения отдельных кейсов из интервью с представителями бизнеса.

При анализе согласованности ответов представителей власти мы видим обратную ситуацию: в территориальном разрезе почти везде оценки представителей администрации согласованы, что свидетельствует о более однозначном восприятии проблем в коммуникации с бизнесом со стороны представителей власти. Здесь выделяется ГО Инта с относительно низкой, но статистически значимой, мерой согласованности в 6%, тогда как для ГО Воркута и Нарьян-Мар, Усть-Цилемского района характерен уровень в 40–55%.

На следующем этапе решалась задача проверки значимости отличий между оценками, которые были даны бизнесом и властью по отношению к одному и тому же перечню проблем взаи-

модействия, с использованием критерия Манна – Уитни, меньший уровень которого характеризует наибольшую меру достоверности различий (таблица 3).

Таблица 3. Критерий Манна – Уитни (U), отражающий статистическую значимость отличия оценок проблем взаимодействия представителями бизнеса и власти

Территория	U
Заполярный район	48,5
ГО Нарьян-Мар	29,5**
ГО Воркута	21,0**
ГО Инта	37,0
ГО Усинск	23,5**
Усть-Цилемский район	53,5
В совокупности по всем территориям	0,11*

Примечание: * – значимо на уровне 1%; ** – значимо на уровне 5%.

Полученные значимые оценки по критерию Манна – Уитни для ГО Нарьян-Мар, Воркута и Усинск свидетельствуют в пользу того, что наблюдаемые различия в оценках между представителями власти и бизнеса имеют не случайный характер, т.е. отличия статистически достоверны. Можно предположить, что чем более диверсифицирована по отраслевой структуре, сервисному и социальному наполнению территория, тем сильнее и достовернее отличаются оценки проблем между представителями власти и бизнеса. На этом фоне для территорий Заполярного и Усть-Цилемского районов и ГО Инта, которые характеризуются более низким уровнем развития и относительно менее благоприятной социально-экономической динамикой, характерно более схожее понимание проблем представителями как власти, так и бизнеса. В этих условиях естественно то, что достоверность различий на уровне всех рассматриваемых территорий оказывается ещё более выраженной (наименьшая среди всех значимых оценок 0,11).

На заключительном этапе оценим значения коэффициента ранговой корреляции Спирмена (r_s), для измерения согласованности и рассогласованности оценки представителями власти и бизнеса проблем. С учётом проведённых выше процедур мы можем предполагать значимые оценки только для тех территорий,

где оценки власти и бизнеса схожи (где критерий Манна –Уитни оказался не значим (таблица 4)).

Таблица 4. Значения коэффициента ранговой корреляции Спирмена (r_s), отражающего меру согласованности между оценками проблем взаимодействия представителями бизнеса и власти

Территория	Значение r_s
Заполярный район	0,02
ГО Нарьян-Мар	0,46
ГО Воркута	-0,01
ГО Инта	0,66**
ГО Усинск	0,24
Усть-Цилемский район	0,71**
В совокупности по всем территориям	0,25**

Примечание: * – значимо на уровне 1%; ** – значимо на уровне 5%.

Для ГО Инта и Усть-Цилемского района характерна высокая согласованность на уровне 66% и 71% соответственно. Исходя из этих значений мы можем подтвердить предположение, что чем проще локальная экономика по своей структуре и уровню развития, тем более однозначно понимаются проблемы властью и бизнесом, тем определеннее выбор направлений поддержки бизнеса со стороны власти и однозначнее выбор стратегий бизнесом. Фактически на указанных территориях и те и другие субъекты решают вопросы выживания и поддержания хозяйственной деятельности в рамках простого воспроизводства. На тех территориях, где исходные параметры социально-экономической среды и перспективы развития лучше, спектр решаемых властью и бизнесом задач значительно шире и оценки существенно различаются, обуславливаясь индивидуальными аспектами взаимодействия конкретных представителей бизнеса и власти.

Переходя к рассмотрению проблем и препятствий во взаимодействии власти и бизнеса обратимся к графическому отображению соответствующих оценок (рис. 6).



Рис. 6. Распределение баллов при оценке проблем взаимодействия бизнеса и государства

Мы видим, что большинство препятствий взаимодействия воспринимаются как более существенные со стороны бизнеса. В целом имеет место принципиальное различие: представители бизнеса отмечают как более выраженные проблемы, обусловленные действиями или бездействием власти (например, непроработанность и неэффективность законов, малое количество и неэффективность механизмов поддержки бизнеса, изменчивость законов и правил, отсутствие у государства понимания потенциальных возможностей взаимодействия с бизнесом и др.), в то время как представители власти более склонны придавать большую выраженность проблемам, инициированным бизнесом (нежелание бизнеса предоставлять властям «лишнюю» информацию о своей деятельности, слабый спрос бизнеса на помощь со стороны государства). Единственным исключением в этих рядах является проблема коррупции: при ее относительно слабой выраженности для арктических территорий, оценка ее значимости со стороны представителей власти выше, чем со стороны представителей бизнеса. Исходя из содержательной стороны интервью, мы объясняем это

ранее существовавшими случаями коррупции (респонденты отмечали ее в прошедшем времени) в ряде муниципалитетов, о которых в большей степени осведомлены представители местных администраций. В то время как в большинстве муниципалитетов представители местной власти и бизнеса указывали данную проблему как незначимую.

Рассматривая интегральную оценку значимости проблем во взаимодействии власти и бизнеса, можно разделить указанные препятствия на 3 группы:

1. Наиболее существенные: изменчивость законов и правил, препятствующая выстраиванию долгосрочного сотрудничества; малое количество и неэффективность механизмов поддержки бизнеса; непроработанность и неэффективность законов.

2. Значимые: нежелание бизнеса предоставлять властям «лишнюю» информацию о своей деятельности; низкий уровень доверия к партнерам; отсутствие у сторон потребности в сотрудничестве, желание все делать самим; недостаточность информации у властей о потребностях бизнеса в существующих условиях; отсутствие у государства понимания потенциальных возможностей взаимодействия с бизнесом; недостаточная информированность бизнеса о формах и механизмах сотрудничества с властью.

3. Наименее значимые: слабый спрос бизнеса на помощь со стороны государства; проявления коррупции.

Из всего перечня проблем наиболее серьезной по сводным оценкам является изменчивость законов и правил, препятствующая выстраиванию долгосрочного сотрудничества.

4. Заключение

В исследовании была предложена и апробирована методика комплексной оценки на основе экспертных данных, отражающих отдельные аспекты эффективности мер государственной поддержки развития, реализуемых в Арктической Зоне РФ, а также проблемы, возникающие при взаимодействии власти и бизнеса. Данные аспекты лишь в малой степени поддаются статистическим и параметрическим методам анализа. Применение указанной методики позволило количественно измерить и описать аспекты эффективности мер благоприятствования экономическому

развитию арктических территорий. Установлено, что общими сильными сторонами реализации мер являются полнота доступной информации и квалификация специалистов. Общей относительно слабой стороной выступает объем поддержки и польза от указанных мер.

В соответствии с составленным сводным рейтингом, меры благоприятствования расположились в следующем порядке убывания проработанности и эффективности:

- налоговые льготы;
- субсидии/дотации/гранты на возмещение производственных затрат;
- субсидии/дотации/гранты на приобретение нового оборудования;
- льготное кредитование;
- поддержка по линии Центров развития бизнеса;
- льготный лизинг;
- субсидии/дотации/гранты на организацию нового бизнеса или деятельности;
- статус резидента АЗРФ;
- арктический гектар.

Наиболее эффективной выглядит реализация общих и давно введенных мер, в то время как новым мерам, разработанным специально для АЗРФ, зачастую не хватает эффективности. Причем указанные недостатки относятся в первую очередь к общим мерам, имеющим «сплошное» действие на всех арктических территориях, – статус резидента АЗРФ и программы «Арктический гектар». Специальные меры поддержки, такие как компенсация затрат при осуществлении Северного завоза или специальные меры поддержки оленеводческих хозяйств, оказываются более проработанными.

Дифференциация аспектов реализации мер поддержки на разных уровнях административной организации позволила установить, что наиболее проработанными и эффективными с точки зрения представителей бизнеса являются механизмы поддержки регионального уровня. Реализация мер поддержки на муниципальном уровне существенно ограничена возможностями местных бюджетов, кадровым потенциалом администраций на местах.

Механизмы федерального уровня оказываются менее гибкими в отношении местной специфики потребностей бизнеса. Наиболее проблемными аспектами реализации мер поддержки на муниципальном и региональном уровнях выступает сложность процедур оформления документов, также на региональном уровне существенной проблемой является скорость этого оформления. На федеральном уровне наиболее критичны аспекты общего объема поддержки и пользы, а также полноты доступной информации.

Говоря о проблемах, обуславливающих низкий уровень эффективности мер поддержки, можно отметить как наиболее значимые изменчивость законов и правил, препятствующая выстраиванию долгосрочного сотрудничества; малое количество и неэффективность механизмов поддержки бизнеса; непроработанность и неэффективность законов. Наименее значимой проблемой для арктических территорий является коррупция.

Практические рекомендации по результатам исследования касаются направлений совершенствования механизмов стимулирования экономического развития на разных уровнях административной организации. Для муниципального уровня приоритетным является упрощение процедуры оформления документов. Как наиболее частые проблемы эксперты отмечали проблемы с оформлением земельных участков, а также длительное ожидание оформления документов. Для регионального уровня предоставления поддержки приоритетным направлением также является упрощение формальных процедур документооборота. Однако здесь ключевым аспектом является предоставление возможности оформления документов дистанционно: как одну из ключевых проблем эксперты со стороны бизнеса отмечали необходимость личного посещения ведомств и специалистов, что в случае периферийных территорий Арктики предполагает преодоление значительных расстояний при ограниченности транспортных возможностей. Для мер поддержки федерального уровня приоритетным направлением совершенствования является обеспечение большей открытости и полноты информации, а также контроль за уровнем квалификации региональных и местных специалистов, отвечающих за сопровождение федеральных мер. Другим перспективным направлением совершенствования мер федерального уровня является разработка спецификаций отдельной меры

для разных типов арктических территорий. В частности, отдельного внимания заслуживает выработка научных основ для управления развитием территорий, где более остро стоят вопросы сохранения хозяйственных отношений. Учитывая суженное пространство для реализации рыночных принципов хозяйствования и единство понимания властью и бизнесом существующих ограничений, важным является определение таких экономических оснований, которые позволяли бы поддерживать хозяйственные отношения.

Перспективным направлением дальнейших исследований является рассмотрение аспектов проработанности и эффективности программ поддержки некоммерческих организаций на территориях АЗРФ, а также соотнесение проблем во взаимодействии бизнеса, власти, НКО и населения.

Литература

1. БЛАНУЦА В.И. *Пространственное развитие Арктической зоны России: анализ двух стратегий* // Арктика: экология и экономика. – 2021. – Т. 11, №1. – С. 111–121. – DOI: 10.25283/2223-4594-1-111-121.
2. ВОЛКОВ А.Д., РОСЛЯКОВА Н.А., СЛЕПЦОВ Р.С. и др. *Методика оценки эффективности особой экономической зоны Российской Арктики с учетом региональной специфики* // Север и рынок: формирование экономического порядка. – 2024. – №3. – С. 7–26. – DOI: 10.37614/2220-802X.3.2024.85.001.
3. *ДАЛЬНЕВОСТОЧНАЯ И АРКТИЧЕСКАЯ ИПОТЕКА* [Электронный ресурс] // Корпорация развития Дальнего востока и Арктики. – URL: <https://erdc.ru/dv-ipoteka/> (дата обращения: 25.01.2025).
4. КАРГИНОВА-ГУБИНОВА В.В., ВАСИЛЬЕВА А.В., МОРОШКИНА М.В. и др. *Привлечение инвестиций в Арктике: в каких регионах арктические резиденты наиболее значимы, эффективны и устойчивы?* // Арктика: экология и экономика. – 2023. – Т. 13, №3(51). – С. 394–404. – DOI: 10.25283/2223-4594-2023-3-394-404.
5. КАРЦХИЯ А.А., ИБРАГИМОВ Д.Ю. *Российская Арктика: правовые аспекты развития* // Мониторинг правоприменения. – 2023. – №2(47). – С. 39–45. – DOI: 10.21681/2226-0692-2023-2-39-45.
6. КОЗЬМЕНКО С.Ю., КОЗЬМЕНКО А.С. *Новые условия развития «Большой игры» в Арктике и приоритеты актуальной концепции внешней политики России* // Евразийская интеграция: экономика,

- право, политика. – 2023. – Т. 17, №4(46). – С. 52-61. – DOI: 10.22394/2073-2929-2023-04-52-61.
7. КОНДРАТОВИЧ Д.Л. *Некоторые особенности специальных финансовых режимов, направленных на привлечение инвестиций в АЗРФ* // Экономика и управление: проблемы, решения. – 2022. – Т. 4, №11(131). – С. 101–114. – DOI: 10.36871/ek.ur.p.r.2022.11.04.015.
 8. КОТОВ А.В. *Развитие преференциального режима при реализации инвестиционных проектов промышленного освоения территории Арктической зоны Российской Федерации* // Арктика: экология и экономика. – 2023. – Т. 13, №2. – С. 297–309. – DOI: 10.25283/2223-4594-2023-2-297-309.
 9. ПОРУЧЕНИЕ ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ от 18.08.2023 №1626 «Перечень поручений по итогам совещания по развитию ЗАТО и населённых пунктов Арктической зоны России» // Президент России. – URL: <http://www.kremlin.ru/acts/assignments/orders/72097> (дата обращения: 23.01.2025).
 10. ПОСТАНОВЛЕНИЕ ПРАВИТЕЛЬСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ № 1338 «Об утверждении Правил предоставления из федерального бюджета субсидий на возмещение затрат по уплате страховых взносов, возникающих у юридических лиц, индивидуальных предпринимателей, являющихся резидентами Арктической зоны Российской Федерации» от 02.09.2020. – URL: <https://base.garant.ru/74600110> [по состоянию на 23.11.2024].
 11. ПОСТАНОВЛЕНИЕ ПРАВИТЕЛЬСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ № 484 «Об утверждении государственной программы Российской Федерации «Социально-экономическое развитие Арктической зоны Российской Федерации» от 30.03.2021 [по состоянию на 23.11.2024].
 12. РЕШЕНИЕ от 20.11.2024 № 23-67393-01016-Р «О порядке предоставления субсидии» // Минфин России. – URL: https://minfin.gov.ru/ru/document?_id_4=307149-reshenie_ot_02.05.2024_23-67393-01016-r_o_poryadke_predostavleniya_subsidii&ysclid=m1pend1c30207268145 (дата обращения: 23.01.2025).
 13. РАСПОРЯЖЕНИЕ ПРАВИТЕЛЬСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ № 3377-р «Перечень опорных населенных пунктов (муниципальных образований) Арктической зоны Российской Федерации, в том числе выполняющих функции по обеспечению национальной безопасности и (или) функции базы для развития минерально-сы-

- рьевых центров, реализации экономических и (или) инфраструктурных проектов в Арктике» от 28.11.2023 [по состоянию на 13.08.2024].
14. РОСЛЯКОВА Н.А., ВОЛКОВ А.Д. Эффективность преференциального режима для предприятий российской Арктики: инструментарий и результаты оценки // Арктика: экология и экономика. – 2024. – Т. 14, №2. – С. 238–248. – DOI: 10.25283/2223-4594-2024-2-238-248.
 15. САМОНЧИК О.А. Особенности правового регулирования предоставления земельных участков для предпринимательской деятельности в Арктической зоне России // Аграрное и земельное право. – 2021. – №1(193). – С. 14–19. – DOI: 10.47643/1815-1329_2021_1_14.
 16. СИМАКОВА Т.В., СИМАКОВ А.В. Особенности предоставления земельных участков в рамках государственной программы «Гектар в Арктике» // Int. Agricultural Journal. – 2023. – №2. – С. 870–886.
 17. Системные и современные проблемы, риски, возможности экономического развития российской Арктики. – Апатиты: ФГБУН ФИЦ «Кольский научный центр» РАН, 2024. – 222 с. – DOI: 10.37614/978.5.91137.508.9.
 18. ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЗАКОН № 119 «Об особенностях предоставления гражданам земельных участков, находящихся в государственной или муниципальной собственности и расположенных в Арктической зоне Российской Федерации и на других территориях Севера, Сибири и Дальнего Востока Российской Федерации, и о внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации» от 01.05.2016 [по состоянию на 23.11.2024].
 19. ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЗАКОН № 193 «О государственной поддержке предпринимательской деятельности в Арктической зоне Российской Федерации» от 13.07.2020 [по состоянию на 23.11.2024].
 20. ЧЕРНОВА Ж.В. Методологические аспекты экспертных интервью: подходы, возможности и ограничения // Мониторинг общественного мнения: экономические и социальные перемены. – 2023. – №5(177). – С. 74–90. – DOI: 10.14515/monitoring.2023.5.2418.
 21. AFENYO M., NG A.K.Y., SAEED N. *Safe and Sustainable Arctic Shipping Management and Development*. – London: Elsevier, 2024. – 205 p.
 22. BOCHNEVA A., LALOMOV A., LEBARGE W. *Placer mineral deposits of Russian Arctic zone: Genetic prerequisites of formation and*

- prospect of development of mineral resources* // Ore Geology Reviews. – 2021. – Vol. 138. – 104349. – DOI: 10.1016/j.oregeorev.2021.104349.
23. HILDE P. S., OHNISHI F., PETERSSON M. *Cold winds in the north: Three perspectives on the impact of Russia's war in Ukraine on security and international relations in the Arctic* // Polar Science. – 2024. – Vol. 41. – 101050. – DOI: 10.1016/j.polar.2024.101050.
24. KOSHKIN V. *New developments in the regulations of the Arctic Zone of the Russian Federation: Continuity and change* // The Polar Journal. – 2020. – Vol. 10, No 2. – P. 443–458. – DOI: 10.1080/2154896X.2020.1848711.
25. LIU F., TANG J., RUSTAM A. et al. *Evaluation of the central and local power batteries recycling policies in China: A PMC-Index model approach* // Journal of Cleaner Production. – 2023. – Vol. 427. – 139073. – DOI: 10.1016/j.jclepro.2023.139073.
26. MA X., QIANG W., WANG S. et al. *Evolutionary characteristics of export trade network in the Arctic region* // Regional Sustainability. – 2024. – Vol. 5, No. 4. – 100176. – DOI: 10.1016/j.regsus.2024.100176.
27. NILSEN T. *Why Arctic policies matter: The role of exogenous actions in oil and gas industry development in the Norwegian High North* // Energy Research & Social Science. – 2016. – Vol. 16. – P. 45–53. – DOI: 10.1016/j.erss.2016.03.010.
28. O'GARRA T. *Economic value of ecosystem services, minerals and oil in a melting arctic: a preliminary assessment* // Ecosystem services. – 2017. – Vol. 24. – P. 180–186. – DOI: 10.1016/j.ecoser.2017.02.024.
29. PETERSEN M.B., PINCUS R. *Arctic Militarization and Russian Military Theory* // Orbis. – 2021. – Vol. 65, No 3. – P. 490–512. – DOI: 10.1016/j.orbis.2021.06.011.
30. ROVENSKAYA E., STRELKOVSKII N., EROKHIN D. et al. *Future scenarios of commercial freight shipping in the Euro-Asian Arctic* // Futures. – 2024. – Vol. 163. – 103446. – DOI: 10.1016/j.futures.2024.103446.
31. SCHACH M., MADLENER R. *Impacts of an ice-free Northeast Passage on LNG markets and geopolitics* // Energy Policy. – 2018. – Vol. 122. – P. 438–448. – DOI: 10.1016/j.enpol.2018.07.009.
32. SHAPOVALOVA D., STEPHEN K. *No race for the Arctic? Examination of interconnections between legal regimes for offshore petroleum licensing and level of industry activity* // Energy Policy. – 2019. – Vol. 129. – P. 907–917. – DOI: 10.1016/j.enpol.2019.01.045.

33. VOLKOV A.D., ROSLYAKOVA N.A., VASILIEVA A.V. et al. *Preferential Regime of the Russian Arctic: Tendencies and First Results from Realization of the World's Largest Special Economic Zone* // Journal of Risk and Financial Management. – 2024. – Vol. 17, No. 1. – 28. – DOI: 10.3390/jrfm17010028.
34. WANG L., CAI K., SONG Q. et al. *How effective are WEEE policies in China? A strategy evaluation through a PMC-index model with content analysis* // Environmental Impact Assessment Review. – 2025. – Vol. 110. – 107672. – DOI: 10.1016/j.eiar.2024.107672.
35. XIANG Z., XIN X., ZHANG T. et al. *Asia–Europe liner shipping network design model considering Arctic route and black carbon tax* // Ocean & Coastal Management. – 2025. – Vol. 261. – 107492. – DOI: 10.1016/j.ocecoaman.2024.107492.
36. YOKOGAWA K. *Russia lacks the financial resources to improve living standards in the Arctic: A case of the Sakha Republic* // Polar Science. – 2024. – Vol. 41. – 101051. – DOI: 10.1016/j.polar.2024.101051.

ASSESSMENT OF THE EFFECTIVENESS OF REGULATORY INSTRUMENTS FOR THE DEVELOPMENT OF THE RUSSIAN ARCTIC REGIONS: EXPERIENCE OF SOCIOLOGICAL RESEARCH

Alexander Volkov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. Senior Researcher (kov8vol@gmail.com).
Natalia Roslyakova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. Senior Researcher (na@roslyakova24.ru).

Abstract: The article is devoted to the study of aspects of the elaboration and effectiveness of business support measures in the territories of the Arctic zone of Russia. The specifics of the work are determined by unique data obtained as a result of expeditionary research in 2024 and the use of a semi-structured interview technique. The study sample included 18 business representatives and 18 representatives of local administrations – 3 experts from each Arctic district or region of the Komi Republic and the Nenets Autonomous Okrug. Analytical processing of the data was carried out using a methodological approach based on statistical (comparative and average estimates) and non-parametric (rating, Kendall concordance coefficient, Mann-Whitney criterion, Spearman rank correlation coefficient) analysis. The approach allows us to consistently identify the consistency of expert opinions on the assessment of individual aspects and problems, substantiate the significance of differences in assessments between government and business representatives, and measure their consistency in the case of solidarity of opinions. The aspects of the development of support measures according to the criteria of completeness of available information, simplicity of the

registration procedure, speed of receipt, qualification of specialists and the total volume of support and benefit have been identified. The specifics of the implementation of support measures at the local, regional and federal levels have been established. The most developed and effective are the regional measures. Among the key problems at the municipal and regional levels, the procedure for registration of documents stands out, at the federal level - the volume of support. A rating of the effectiveness of the most used incentive measures has been compiled. Possible reasons for differences in the territorial features of their effectiveness have been identified, and corresponding recommendations for their improvement have been given.

Keywords: Arctic zone, support measures, Arctic residents, tax incentives, Arctic hectare, subsidies.

УДК 332.146.2+338.246.027

ББК 65.050

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.*

Поступила в редакцию 28.01.2025.

Опубликована 31.03.2025.

СЦЕНАРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ГРУППОВОМ РЕГИОНАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Команич Н. В.¹, Чернов И. В.²
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматриваются вопросы применения технологий сценарного анализа для исследования проблем повышения эффективности управления обеспечением стабильного и сбалансированного развития регионов в условиях неопределенности и рисков, связанных с деструктивным воздействием различных угроз. Новизна исследования заключается в использовании сценарного подхода к разработке стратегии регионального управления, которая основывается на технологиях группового управления, сочетающих принципы централизации и децентрализации, частно-государственного партнерства и координации. Предлагаемый подход позволяет анализировать складывающуюся в региональных системах ситуацию и обосновывать необходимость переноса центра принятия решений, а также перераспределения функций и полномочий между административными и экономическими субъектами управления различного уровня иерархии, каждый из которых обладает своими уникальными возможностями и уязвимостями. Стратегическое управление в такой модели осуществляется с использованием сценарно-прогнозного подхода, который позволяет выявлять негативные тенденции регионального развития, в том числе возникающие в результате внешних воздействий. На основе математического аппарата знаковых ориентированных графов разработана имитационная модель группового регионального управления. Результатом исследования стали разработанные сценарии регионального развития, анализ которых показал, что в условиях нарастающих угроз наиболее эффективной стратегией является перенос центра управления на государственный субъект на основе сценарно-прогнозного мониторинга. При этом необходимо использовать принципы координирующего управления и стимулирования, а также принцип партнерства для предотвращения противоречий в социально-экономических процессах внутри региональной системы. В безопасных и благоприятных условиях поддержка хозяйствующих субъектов, а также управление стабильностью и сбалансированностью регионального развития и обеспечения его безопасности должны осуществляться преимущественно децентрализованно, под управлением региональных субъектов управления, предпринимательского сектора и частного бизнеса.

Ключевые слова: групповое управление, региональная система, стабильное развитие, ресурсное обеспечение, сценарный анализ, имитационное моделирование, активное противодействие.

¹ Никита Владимирович Команич, м.н.с. (komanichnickitca@gmail.com).

² Игорь Викторович Чернов, к.т.н., в.н.с. (chernov@ipu.ru).

1. Введение

Процесс управления является неотъемлемым и определяющим результаты функционирования любой сложной социально-экономической системы фактором, отражающим внутреннее состояние как самой системы, так и окружающей среды [1].

Накопленный национальный и мировой опыт свидетельствует о повышении роли и значения регионов в развитии экономики государства, что требует разработки и использования новых подходов к пространственному и региональному развитию страны на базе методологии программно-целевого планирования и управления [2, 15, 19], в рамках которого при возникновении угроз стабильности регионального развития во многих случаях оказывается необходимым перенос части управленческих функций и полномочий с федерального на региональный и местный уровни для обеспечения устойчивости региональных социально-экономических систем.

В последнее десятилетие разработан и введен в действие комплекс важных законодательных актов, определяющих политику страны в области регионального развития. К ним относятся Федеральный закон «Об общих принципах организации и деятельности ассоциаций экономического взаимодействия субъектов Российской Федерации», Федеральный закон «Об общих принципах организации местного самоуправления в Российской Федерации», Федеральный закон «Об общих принципах организации публичной власти в субъектах российской федерации» [3], Указ Президента РФ «Об утверждении основ государственной политики регионального развития Российской Федерации на период до 2025 года» [4], Стратегия пространственного развития Российской Федерации на период до 2025 года [5]. Основой перечисленных документов является Конституция Российской Федерации. Одновременно с этим в последнее время возрастает актуальность и необходимость создания новых узкоспециализированных направлений в рамках разрабатываемых федеральных и региональных целевых программ, а также концентрации внимания органов управления на приоритетных целях и задачах социально-экономического регионального развития в условиях деструктивного внешнего влияния на рассматриваемые процессы.

На сегодняшний день в условиях нарастающих внутренних и внешних угроз стабильности нашей страны нарастает необходимость в повышении эффективности управления социально-экономическим региональным развитием, как составной части государственной безопасности. В данном случае необходим комплексный подход к формированию стратегий стабильного регионального и национального развития, который базируется на решении совокупности внутренних и внешних проблем и угроз как на уровне государства, так и его субъектов [6].

Используемый и развиваемый в данной работе сценарный подход в качестве одного из направлений поддержки принятия решений в тактическом региональном управлении позволяет проводить опережающий мониторинг и оценку потенциальных последствий угроз, а также анализировать эффективность управленческих решений, направленных на их предотвращение или уменьшение возможного ущерба. В то же время этот подход направлен как на снижение уязвимости системы, так и на создание или выявление возможностей достижения целей управления, что относится к стратегическому управлению [7, 10]. В рамках данной работы стратегия рассматривается как совокупность планово-управленческих воздействий, обеспечивающих устойчивость функционирования региональных систем на основе результатов сценарного моделирования и опережающего анализа динамики развития ситуации на объекте управления (в управляемой системе), а также характера влияния внешней среды с целью осуществления упреждающей реакции системы управления на потенциальные угрозы. Например, в терминологии SWOT-анализа реализацией стратегии является управление, переводящее систему (субъект и объект управления) из одной матрицы SWOT в другую, т.е. управление в текущих или прогнозируемых условиях, ослабляющее слабые стороны и угрозы и усиливающее сильные стороны и возможности. Анализ текущих условий и прогноз при этом основан на сценарном моделировании. Тактическое управление в рамках рассматриваемого подхода осуществляется в рамках фиксированной SWOT-матрицы системы, учитывая угрозы и используя уже имеющиеся возможности. В работе исследуется частный случай такого подхода к стратегическому

управлению, связанному с перераспределением функций и полномочий между несколькими субъектами управления.

По определению Г. Канна и Э. Винера, сценарий можно рассматривать как изменяющуюся последовательность потенциальных событий, которая акцентирует внимание на причинно-следственных связях и решающих моментах, влияющих на курс развития целой системы или её отдельных элементов [27].

2. Проблематика, цели и задачи

В настоящее время основные исследования, связанные с управлением и развитием регионов, ведутся с учетом:

- недостаточной эффективности существующей системы организации взаимодействия и сотрудничества между государственными и коммерческими структурами в рамках программ регионального развития;
- необходимости модернизации существующей системы управления и внедрения новых методов прогнозирования изменения обстановки,
- возникновения новых рисков и возможных деструктивных воздействий со стороны геополитических противников в условиях растущей конкуренции на мировой арене;
- отсутствия системы сценарно-прогнозной оценки эффективности распределения ресурсов и прогнозирования последствий принимаемых управленческих решений для региона, что во многих случаях является причиной невысокой результативности проводимых политики, целевых, стратегических программ и мероприятий со стороны органов власти.

Также на сегодняшний день мало исследована область регионального развития, связанная с наличием нескольких субъектов управления и их взаимодействием.

Каждый из субъектов управления в общем случае характеризуется наличием собственных целей управления, ресурсами и методами оказания воздействий на значимые факторы регионального развития. Реализация этих целей связана с рисками как для самого субъекта, так и для региона как объекта управления. При этом риски связаны с возникновением и реализацией внешних

и внутренних угроз. Специфика управления сложными системами состоит в том, что целью является не конечное состояние, в которое переводится система из начального, а сама траектория развития системы, т.е. этапы сценария, отражающего динамику основных факторов такой сложной многоаспектной системы как регион. Это является основой безопасного развития региона, поскольку путь к значимой цели управления может пройти через такие этапы (состояния сложной системы), которые являются недопустимыми как для отдельных факторов, так и для существования самой сложной социально-экономической системы региона как объекта управления. Выбор определенной комбинации или координации субъектов управления для каждого этапа реализации целевого сценария в условиях возможной реализации внешних и внутренних угроз является важнейшей задачей, решению которой на основе сценарного моделирования в настоящее время не уделено достаточного внимания.

Исходя из этого основной целью, рассматриваемой в контексте данной работы, является исследование и анализ группового подхода к региональному управлению, основанном на гибком переносе центра принятия решений в зависимости от результатов мониторинга и прогноза изменений складывающейся ситуации в условиях активного противодействия возникающим угрозам. Среди задач для достижения поставленной цели были выделены следующие:

1. Определить субъекты и объекты управления и существующие между ними взаимосвязи.
2. Проанализировать интересы, ресурсы и возможности субъектов управления.
3. Определить наборы эндогенных и экзогенных факторов системы регионального управления. Сформировать группу уязвимостей, рисков и угроз стабильному региональному развитию.
4. Определить стратегию управления активностью воздействия на факторы регионального развития несколькими субъектами.
5. Определить комплекс управляющих воздействий со стороны каждого субъекта, направленных на реализацию этапов целевого сценария в условиях существующих и возникающих угроз и возможностей.

6. Оценить возможности использования сценарного подхода в региональном управлении, основанного на прогнозном мониторинге деструктивного влияния угроз и изменении приоритета управляющих воздействий.

Принципиальной новизной работы является использование сценарного подхода в выборе стратегии упреждающего управления, включающей возможность переноса центра принятия решений и перераспределения полномочий между административными и экономическими субъектами управления различного уровня иерархии на основе данных мониторинга состояния объекта управления (эндогенные факторы) и результатов прогнозирования воздействия внешних угроз (экзогенные факторы).

3. Субъекты регионального управления

Каждый субъект Российской Федерации является сложной многофункциональной системой, обладающей широким спектром факторов и аспектов, таким образом, регионы нашей страны следует рассматривать как сложные системы, в которых существует тесная взаимосвязь между протекающими процессами и элементами, объектами и субъектами управления [7, 23].

Объектом управления в работе является региональная социально-экономическая система. Регион, как составная часть государства, представляет собой самостоятельную систему и субъект управления, принимающий согласованные с федеральными субъектами управления и социально-экономической политикой самостоятельные решения, основанные на собственных приоритетах, задачах и целях, а также способах и возможностях их достижения [8, 20].

Организационная структура группового регионального управления характеризуется взаимодействием нескольких субъектов управления различного уровня иерархии, образующих единую управляющую систему, основанную на постоянных и ситуационных социально-экономических организационных связях, базирующиеся на поставленных целях управления, определенных методах, инструментах, ресурсах и возможностях. Среди них выделяют:

- государственные (федеральный и региональный уровень);
- коммерческие (предпринимательский сектор, частный бизнес, хозяйствования, организационные объединения);
- общественные (муниципальные образования, политические движения, органы самоуправления, социальные сети, средства массовой информации).

В данной работе мы ограничились исследованием государственных и коммерческих субъектов управления, их интересов, а также возможностей управляющих воздействий на факторы региональной системы и их систему взаимоотношений.

В построенной и исследованной сценарной модели интересы субъектов управления отражаются посредством выбора факторов мониторинга ситуации, которые принимаются во внимание при выработке управляющих воздействий.

Государство, как субъект регионального управления, обладает следующими возможностями: на уровне федерации – создание и внедрение национальных и региональных стратегий для социально-экономического развития, а также обеспечения безопасности и стабильности; на межрегиональном уровне – выполнение национальных стратегических программ и координация усилий по их реализации; на уровне конкретного региона – разработка региональной политики, направленной на реализацию интересов, связанных с решением социально-экономических и других актуальных вопросов внутри региона, с использованием доступных ресурсов и возможностей [8, 21].

Коммерческие же субъекты управления активно участвуют в финансовом и ресурсном обеспечении регионального развития или отдельных его эндогенных и экзогенных факторов для достижения максимального воспроизводства товаров и услуг, удовлетворяющих потребности рынка в интересах получения максимальной прибыли.

Под региональным управлением в рамках данной работы понимается совокупность методов, принципов и инструментов системного организационного воздействия на социально-экономические процессы и развитие региона, обеспечивающих координирующую групповую управленческую деятельность, направленную на достижение поставленных целей социально-экономиче-

ского регионального развития, повышение уровня жизни населения, стимулирование экономики и социальных процессов с учетом адаптации к современным реалиям и потребностям [9, 21].

Таким образом, нужно рассматривать региональное управление через призму системного подхода. Роль системного подхода отражается в возможности формирования взаимоприемлемых стратегических организационных решений, направленных на достижение наибольшей выгоды как для составных элементов, так и для рассматриваемой системы в целом. Отсутствие комплексного анализа региона может привести к фрагментации информации и знаний, формированию управляющих решений с полумерами для разрешения возникающих проблем, образованию новых неопределенностей и угроз.

Региональное управление по масштабу решаемых задач традиционно подразделяется на:

- стратегическое управление, направленное на определение целей и задач, на принятие управляющих решений в рамках функционирующей системы или ее перестройки;
- тактическое управление, отражающее конкретные управленческие воздействия на региональную систему с целью достижения поставленных целей;
- оперативное управление, предполагающее решение насущных проблем и задач.

Задача стабильного и сбалансированного динамического регионального развития неотъемлемо связана с адекватной совместной оценкой уязвимостей региона как объекта управления, возникающих угроз и имеющихся ресурсов.

Ресурсы и возможности регионального управления обычно подразделяются на территориальные, инфраструктурные, природно-сырьевые, человеческие, инвестиционные, финансовые, информационные, предпринимательские, правовые, научно-инновационные. Способность наиболее эффективно активизировать и использовать все имеющиеся виды ресурсов и возможностей для формирования и стимулирования условий роста качества жизни, хозяйственной и производственной деятельности и безопасности является важной задачей регионального управления.

4. Особенности и принципы группового регионального управления

Взаимоотношения между рассматриваемыми субъектами регионального управления в рамках проводимых управляющих воздействий должны:

- отражать совокупность прямых и обратных связей как между собой, так и с объектом управления;
- использовать системный подход для комплексной оценки всех факторов внутренней и внешней среды;
- формировать систему интересов, критериев, уязвимостей и возможностей для выработки решений в рамках стратегического управления;
- использовать методы прогнозирования развития обстановки и возникновения угроз для формирования общих проактивных стратегий противоборства.

Под активным противоборством подразумевается комплекс методов и управляющих воздействий, направленных на устранение негативного влияния на управляемую систему внешних угроз и деструктивных воздействий извне (это могут быть политическое, экономическое, санкционное давление со стороны геополитических соперников, информационная пропаганда, военное вмешательство и т.д.) Угрозами также могут быть и природные катаклизмы, чрезвычайные ситуации и т.п.

Среди научных трудов, исследований и учебных пособий [1, 2, 6, 9, 26, 29] часто выделяется ряд основных принципов регионального управления: децентрализация, партнерство, выделения компетенций, субсидиарность и адаптивность.

Региональное управление должно строиться на гибкости и сбалансированности сочетания принципов децентрализации и централизации, которое заключается в перемещении центра принятия управляющих решений от федеральных органов управления верхнего уровня иерархии к органам региональной исполнительной и муниципальной власти, частному, предпринимательскому и хозяйственному секторам, и наоборот. Эти принципы поддерживают процесс формирования и укрепления социально-экономической независимости и самовосполняемости субъектов регионального и предпринимательского управления,

делегирующие функции управления и принятия решений. Следствием такой политики является появление взаимной ответственности за последствия принимаемых решений, а также совместных компетенций и партнерства.

Принцип партнерских отношений основан на изменении парадигмы жесткого иерархического подчинения по вертикали иерархии управления. Данный принцип поведения субъектов регионального управления в принятии управляющих решений и их реализации в процессе их взаимодействия определяется формированием общей системы целей, интересов и задач управления на основе возможностей каждого из субъектов.

Принцип субсидиарности заключается в выделении и перераспределении финансовых, человеческих, природных и иных видов ресурсов под заранее определенные цели, а также контроле последствий реализации управленческих решений для анализа эффективности использования имеющихся ресурсов для дальнейших корректировок стратегического и тактического управления.

Основой принципа адаптивности является умение системы регионального управления и её участников предсказывать и заранее реагировать на изменения как в самой системе, так и в окружающей среде. Этот принцип воплощается в тщательном и непрерывном мониторинге текущей ситуации, а также в эволюции организационных и функциональных структур регионального управления, что способствует гибкости системы и её участников к быстро меняющимся социально-экономическим, политическим и иным обстоятельствам их деятельности.

Принцип разграничения компетенций предполагает четкое разделение обязанностей и перераспределение функций между органами федерального, регионального и корпоративного управления в рамках отдельных сфер и процессов, протекающих в региональной системе, с целью определения принципа субсидирования и ресурсного обеспечения на основе выделенных компетенций и возможностей.

Перечисленные принципы легли в основу данной работы и учитывались при дальнейшем сценарном моделировании.

5. Механизмы группового регионального управления

Результатом анализа закономерностей, принципов, целей, задачах и проблем регионального управления является построенная концептуальная модель системы группового регионального управления (рис. 1).

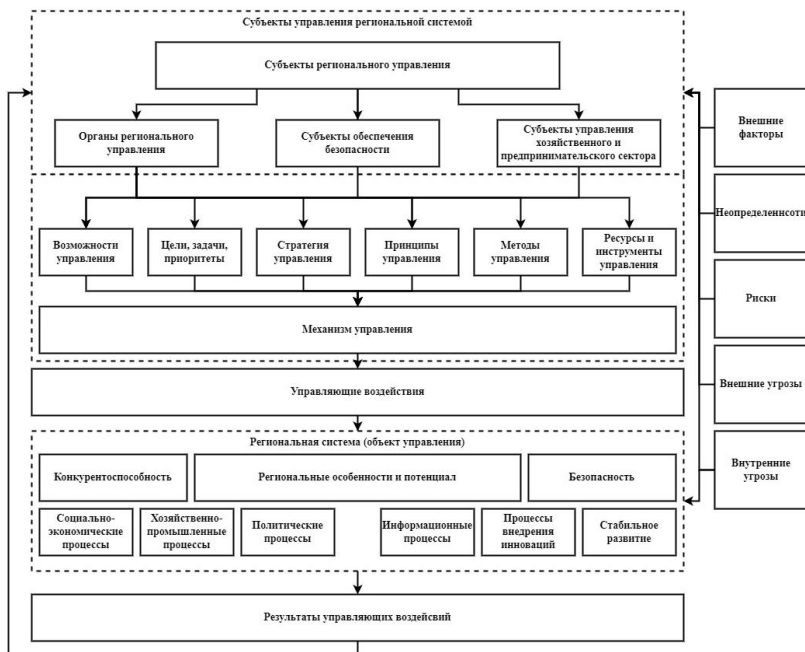


Рис. 1. Принципиальная модель системы группового регионального управления

Данная модель является зависимой от воздействия внешних факторов, существующих и возникающих неопределенностей, а также нарастающих внутренних и внешних угроз. Под системой регионального управления в рамках данной работы понимается сложная социально-экономическая система, являющаяся совокупностью субъектов управления региона как объекта управ-

ления и внешних факторов влияния. Субъекты управления характеризуются как общими целями развития региона, так и собственными целями, вытекающими из их приоритетов. Субъекты управления (СУ) могут иметь собственные принципы, методы, ресурсы, инструменты и возможности управления, которые формируют непосредственно механизм воздействия на региональную систему как объект управления (ОУ) для влияния на ее социально-экономические, хозяйственно-промышленные, политические, информационные процессы, стабильное развитие, безопасность и конкурентоспособность.

Современные управленческие системы, которые опираются на механизмы и технологии, в основе которых лежит реакция на возникающие угрозы и проблемы, как внутренние, так и внешние, сталкиваются со сложностями в достижении своих как текущих, так и стратегических долгосрочных целей по развитию региона. С каждым годом усиливается сложность задач управления, появляются новые вызовы, и придерживаться тактики устранения последствий и нейтрализации накопившихся негативных трендов становится все более затруднительно, а местами и невозможным [22, 24].

Реакция управленческой системы на вызовы – это способность различных уровней управления быстро реагировать на угрозы и принимать меры для их устранения. Эта управленческая стратегия иногда позволяет решить часть возникших проблем и временно улучшить ситуацию. Однако в рамках долгосрочных стратегий управления региона акцент на решение текущих задач без прогноза появления новых угроз может привести к серьезным и непредсказуемым последствиям, а также снизить эффективность использования имеющихся ресурсов и инструментов управления.

Для разрешения сложившейся ситуации и следуя принципам повышения эффективности управления развитием сложных региональных систем необходимо применять методы управления, которые в своей основе содержат опережающее (упреждающее) воздействие на рассматриваемую систему. Результатом такой деятельности является возможность предотвращения кризисных ситуаций и формирования негативных тенденций. В основе рас-

смаатриваемых стратегий управления лежит прогнозирование изменения обстановки во внешней и во внутренней среде. Прогнозирование позволяет выделить и проанализировать ключевые факторы, которые могут привести к возникновению проблем и негативных тенденций. В процессе предварительного анализа и прогнозирования возникновения деструктивных воздействий и угроз необходимо оценивать последствия их реализации не только в качестве реакции на их появление и как отклик на их воздействие, но и применения стратегии упреждающих действий.

Зачастую возникают ситуации, когда возможности единственного СУ как организационной структуры являются ограниченными и сам он подвержен ряду текущих угроз как транслируемых на него угрозами объекту управления, так и непосредственно на него направленных. Следовательно, стратегия управления, основанная на жесткой схеме СУ – ОУ, является уязвимой в условиях, когда необходима гибкость управления региональным развитием.

В соответствии с вышеизложенным построена модифицированная модель группового иерархического регионального управления в условиях деструктивных воздействий (рис. 2).

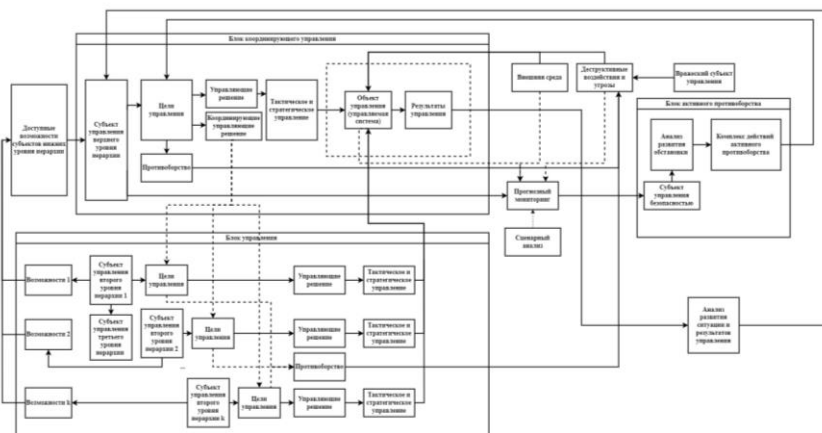


Рис. 2. Модель группового иерархического управления в условиях активного противодействия

При разработке модели учтены выделенные выше принципы децентрализации, партнерства, выделения компетенций, адаптивности. В соответствии с ними построены взаимосвязи между субъектами управления различного уровня иерархии, при этом учитывая возможности субъектов более низких уровней иерархии и их интересы субъект верхнего уровня формирует свои координирующие управляющие решения, направленные на достижение целей управления. Также учитывались задачи обеспечения безопасности и прогнозирования, наличие угроз и влияние внешней среды.

Данная модель разделена на функциональные блоки: блок координирующего управления, отражающий в рамках регионального управления деятельность федеральных органов власти (государства); блок управления, отражающий процессы управляющей деятельности и воздействий со стороны региональных субъектов власти и предпринимательского сектора; блок активного противоборства, отражающий процессы принятия решений по обеспечению безопасности и противодействия угрозам. Также был введен блок прогнозного мониторинга, который в рамках данной работы основан на методологии сценарного моделирования.

Новизной в работе является дополнение стратегического управления в рамках группового подхода механизмом перераспределения центра принятия решений и ресурсов между несколькими субъектами различного уровня иерархии на основе сценарного прогноза изменения ситуации (включающего построение сценарных моделей, получение данных мониторинга и анализа альтернативных сценариев изменения обстановки внутри и вокруг управляемой системы) с целью скоординированного активного противодействия возникающим угрозам в условиях кризисных ситуаций и выявления возможностей реализации целей регионального развития. Стратегия также может подразумевать управление, направленное на изменение структуры объекта управления, на изменение возможностей субъекта управления при реагировании на возникающие угрозы, а также на характер связей между субъектом и объектом. Причем последнее относится как к потокам данных мониторинга, на основе которых принимаются решения, так и к передаче управляющих воздействий.

Тактическое и оперативное управление подразумевает применение субъектами управления тех или иных воздействий на эндогенные и экзогенные факторы системы и использование существующих возможностей и ресурсов на основе результатов реализованной стратегии и развития ситуации с целью нивелирования негативных тенденций внутри системы. Таким образом, в рамках рассматриваемого подхода происходит слияние понятий управляемости и безопасности. Безопасность при этом рассматривается не просто как состояние защищенности, а как функциональное понятие, характеризующее способность системы находиться в поле управления. На рис. 3 в соответствии с решаемыми в работе задачами представлена концептуальная схема стратегического и тактического управления региональным развитием. Предполагается, что существуют интересы развития региона, на реализацию которых в условиях возникающих угроз влияют субъекты управления, действующие в том числе в собственных интересах. Для компактности на рис. 3 не представлены угрозы, которые могут оказывать влияние на все компоненты схемы.

В работе введен новый вид комплексного ресурса, в качестве которого выступают альтернативные субъекты управления, исключительное или кооперативное задействование которых способно в меняющейся обстановке реализовать сценарии безопасного развития. В таком случае решаемая задача состоит из двух частей:

- выбор в текущей или прогнозируемой обстановке субъекта управления, который, учитывая его ограничения и возможности, способен вырабатывать определенные управленческие воздействия для достижения целевого сценария;
- решение задачи определения конкретных воздействий этого субъекта управления для достижения целевого сценария.

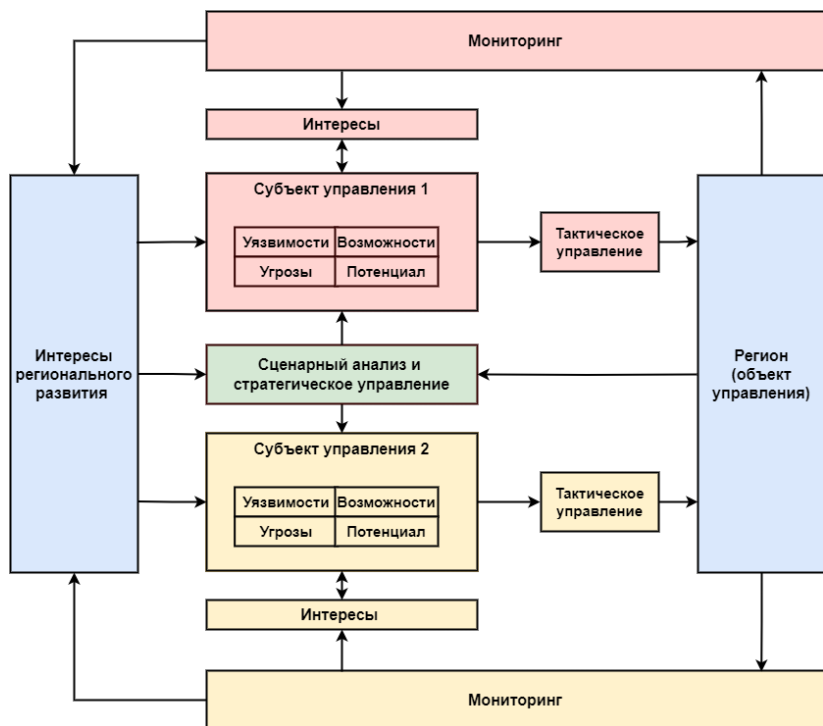


Рис. 3. Стратегическое и тактическое управление региональным развитием

6. Математическая постановка задачи

Принципиальной новизной развития сценарного подхода в работе является возможность формирования стратегии управления, основанной на выборе в определенные моменты времени состава субъектов управления с целью достижения целей в соответствии с прогнозом поведения моделируемых объектов путем формирования сценариев их развития в меняющихся условиях. Анализ полученных альтернативных сценариев развития позволяет оценивать эффективность и согласованность множества распределенных во времени и пространстве управленческих решений при выборе и реализации программ и мероприятий достижения цели.

Предположим, что существует некоторое множество субъектов управления (СУ): $Sm = \{Sm^j\}, j = 1, N^{Sm}$. При описании исследуемой системы S используются следующие основные параметры:

- вектор эндогенных переменных $y \in Y$, характеризующий фазовое состояние объекта системы S или ситуации в сфере регионального управления;
- вектор экзогенных переменных $x \in X$, характеризующий фазовое состояние внешней среды;
- вектор управляемых переменных для каждого СУ Sm^j : $u^j \in U^j \in U$;
- вектор выделенных ресурсов для каждого СУ Sm^j : $p^j \in P^j \in P$.

Расширенное фазовое пространство z включает объединение (прямое произведение) фазового пространства системы S и внешнего пространства [18].

Для учёта вариантов развития системы S (обстановки и/или динамики поведения объекта управления) в работе применяется подход, при котором варианты описываются и исследуются на основе сценариев. При этом G – структура сценарной модели S .

Пусть $Z = Z^{(nav)}(t) \cup Z^{(sec)}(t)$ – множество расширенных состояний социально-экономической системы (СЭС) S в фазовом пространстве z , где $Z^{(nav)}(t)$ – множество недопустимых состояний в момент времени t ; $Z^{(sec)}(t)$ – множество безопасности S в момент времени t ; $Z^{(tar)}(t)$ – множество желаемых состояний S при $Z^{(tar)}(t) \subseteq Z^{(sec)}(t)$.

Выделим уровни безопасного развития системы S :

- 1 уровень (уровень достижения цели): $z(t) \in Z^{(tar)}(t)$;
- 2 уровень (уровень безопасности): $z(t) \in Z^{(sec)}(t)$;
- 3 уровень (уровень опасности): $z(t) \in Z^{(nav)}(t)$.

В основе сценарного управления лежит множество, возможностей управления, а также рисков и уязвимостей, влияющих на достижение цели, т.е. нахождение системы S в состоянии $Z^{(tar)}(t)$ или $Z^{(sec)}(t)$.

Под уязвимостью в рамках работы понимается степень открытости системы S деструктивным воздействиям, которые приводят к отклонению от цели управления.

Причем возможности и уязвимости определяются двумя путями:

- выделенные подструктуры (если их можно явно выделить) сценарной модели объекта управления или ситуации;
- существующие базисные процессы развития, определяемые структурой системы и воздействиями их активирующими.

Пусть событие определяется точкой в фазовом пространстве z . Определим целевой сценарий поведения системы $\mathfrak{R}(t)$ как множество значимых для управления событий (точек в фазовом пространстве) $\{E^{(3H)}(t_i)\}$, $i = 0, 1, \dots, N$; $t_0 = 0$ в дискретные моменты времени, определенных на множестве Z :

$$\mathfrak{R}(t) = \mathfrak{R}\{E^{(3H)}(t_i) = f(Z(t)), (t - t_r) \leq t_i \leq t\},$$

где t_r – глубина сценария.

Тогда целевой сценарий поведения системы $\mathfrak{R}^{(c)}(t)$ определяется как

$$(1) \quad \mathfrak{R}^{(tar)}(t) = \mathfrak{R}\{E^{(3H)}(t_i) = f(Z^{(tar)}(t)), (t - t_r) \leq t_i \leq t\}.$$

А безопасный сценарий как:

$$(2) \quad \mathfrak{R}^{(sec)}(t) = \mathfrak{R}\{E^{(3H)}(t_i) = f(Z^{(sec)}(t)), (t - t_r) \leq t_i \leq t\}.$$

Пусть $Sm = \{Sm^j\}, j = 1, N^{Sm}$ — множество субъектов управления.

Пусть для j -го субъекта управления $\theta = (z, \zeta^j, u^j) \in M\mathfrak{Z}^j = Z \times S^{(cs)}$ – прогноз возможных переходов S в следующее состояние, где $M\mathfrak{Z} \subseteq Z$ – множество возможных событий (состояний); Γ^j – множество неуправляемых факторов ($\zeta^j \in \Gamma^j$); U^j – множество управляемых факторов ($u^j \in U^j$); $S^{(sc)j} = \Gamma^j \times U^j$ – множество условных решений субъекта управления Sm^j при реализации неуправляемого фактора $\zeta^j \in \Gamma^j$ и при применяемом управлении $u^j \in U^j$.

Требуется определить субъект управления $Sm^j \in Sm$ и для него найти такое управление $u^j \in U^j$ с учетом влияния $\zeta^j \in \Gamma^j$, обеспечивающих $\theta = (z, \zeta^j, u^j) \in Z^{(tar)}$ или $\theta = (z, \zeta^j, u^j) \in$

$Z^{(sec)}: \{u \mid \theta = (z, \zeta^j, u^j) \in Z^{(tar)} \vee \theta = (z, \zeta^j, u^j) \in Z^{(sec)}\}$ при реализации сценариев $\mathfrak{R}^{(tar)}$ или $\mathfrak{R}^{(sec)}$.

7. Сценарное моделирование в управлении развитием региональных систем

Для достижения поставленных целей раннего и заблаговременного обнаружения угроз важно провести глубокий анализ текущей ситуации и разработать действенную методологию.

Среди различных методов формирования и анализа альтернативных сценариев поведения сложных социально-экономических систем наиболее актуальным и перспективным является подход, основанный на имитационном моделировании. Он предлагает специалистам, занимающимся принятием решений, всестороннее понимание динамики происходящих процессов и информацию о возможных рисках и существующих неопределённостях, что в значительной степени способствует адекватному реагированию на вызовы времени и обеспечивает устойчивое развитие региональных систем. Основой разрабатываемых и исследуемых моделей является совокупность показателей и их взаимовлияний, описывающих состояние и развитие региональной системы (включая и субъект, и объект управления). Что касается внешней среды, то в процессе моделирования учитывается только ее негативное или, наоборот, позитивное влияние на исследуемую систему в рамках решения рассматриваемых задач.

Задача разработки и внедрения стратегических и тактических решений сталкивается с множеством сложностей, связанных с необходимостью учитывать неопределённость и сопряжённые с ней риски. Это обстоятельство вызвано несколькими сопутствующими факторами регионального развития:

- недостаточное и неполное восприятие протекающих внутри региона процессов, происходящих в реальном времени;
- скрытность и спонтанность многих потенциальных угроз;
- сложность прогнозирования и предсказания развития обстановки во время кризисных и экстренных ситуаций.
- нехватка и ненадежность имеющейся информации о текущем состоянии дел;

– невозможность спрогнозировать заранее и с высокой точностью результаты принимаемых решений.

С учетом множества неопределенностей и непредсказуемости поведения внешних факторов субъекты регионального управления вынуждены использовать гибкие стратегии, позволяющие им адаптироваться к изменяющимся условиям [11].

Ключевым аспектом является применение сценарного анализа, который включает разработку различных моделей вероятного развития событий. Сценарные имитационные модели помогают предвидеть возможные последствия различных решений и уменьшить риски.

Сценарный подход в рамках данной работы предполагает на основе введенного ресурса множества субъектов управления перейти к возможности формирования комплексных стратегий регионального управления, учитывающих существующие угрозы, риски и неопределенности, что позволяет снизить или полностью устранить потенциальные угрозы реализации целей управления.

Рассматриваемая в работе сценарная модель представляет собой ориентированный граф $G(X, E)$ (здесь X – конечное множество вершин, а E – множество дуг), в котором каждой вершине ставится в соответствие ее параметр $v_i \in V$, $V = \{v_i, i \leq N = \|X\|\}$ и вводится функционал преобразования дуг $F(V, E)$ таким образом, что в соответствие каждой дуге ставится знак, вес или функция [12]. Для дальнейшего исследования динамики развития сложных систем вводится термин импульсного процесса. Под импульсом $P_i(t)$ в некоторой вершине x_i понимается изменение значения ее параметра в дискретный момент времени $t = 0, 1, 2, \dots$:

$$(3) \quad P_i(t) = v_i(t) - v_i(t).$$

В импульсном процессе значение параметра вершины x определяется следующим образом:

$$(4) \quad v_i(t) = v_i(t-1) + \sum_{j=1, j \neq i}^N (v_i, v_j, e_{ij}) P_j(t-1) + P_{i0}(t),$$

где $P_{i0}(t)$ – внешний импульс, вносимый в момент времени t в вершину e_i .

Выражение для импульса в исследуемом процессе получается из конечно-разностных уравнений (1) и (2):

$$(5) \quad P_i(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^N F(v_i, v_j, e_{ij}) (P_j(t-1) + P_{i0}(t)).$$

Параметры, описывающие вершины графа, характеризуют текущее состояние СЭС и процессы, происходящие в результате актуальных или прогнозируемых воздействий.

Структура модели визуально иллюстрирует причинно-следственные связи между этими характеристиками. Воздействия на модель сложной СЭС региона имитируются в виде импульсов, которые вводятся в конкретные вершины графа, или как изменения в структуре модели.

В приведенном ниже изложении результатов в сценарном моделировании в качестве основы при формировании событий используются качественные параметры. Для этого, чтобы перейти от вещественно-значимого фазового пространства к сценарному, отражающему качественные характеристики изменения факторов, в работе [13] описан сценарно-событийный алгоритм распознавания динамики факторов. С этой целью вводится в рассмотрение множество базовых типов динамики факторов, каждому n -му фактору присваивается соответствующий идентификатор его текущей динамики $FSc(v_n, t_i)$ (см. таблицу 1).

Таблица 1. Идентификаторы динамик факторов.

Значение ф-сценария $FSc(v_i, t)$	Обозначение	Тип динамики i -ого фактора	Название по умолчанию
0		не определен (не рассчитывается)	не определено
1		рост	растет
2		падение	уменьшается
3		постоянное значение	постоянно
4		колебания, ограниченные по амплитуде	устойчивое состояние
5		расходящиеся колебания	нестабильно
6		сходящиеся колебания	стабилизируется

Также в [13] показано, что в результате такого анализа осуществляется переход от вещественно значимого пространства изменения факторов сценарной модели к ф-сценарному, которое характеризуется шестью типами качественных состояний (динамика) факторов (таблица 1).

Пусть в основе определения событий лежат изменения в динамике поведения множества значимых для анализа ситуации и управления факторов: $V^{(3H)} \subseteq V = \{v_n\}, n = 1, 2, \dots, N$, где N – количество факторов сценарной модели. Тогда значимое для управления событие на i -м шаге (t_i) является функцией от динамики поведения значимых факторов:

$$(6) \quad E^{(3H)}(t_i) = f(FSc(v_n, t_i)), v_n \in V^{(3H)}, n = 1, 2, \dots, N.$$

Таким образом, сценарий задается только последовательностью событий, что соответствует наиболее часто встречающемуся случаю.

Пусть в процессе моделирования при различных начальных данных (управляющих воздействиях) получено множество сценариев $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}^j\}, j = 1, 2, \dots, N^{\mathfrak{R}}$, где $N^{\mathfrak{R}}$ – количество сценариев, и определен целевой сценарий $\mathfrak{R}^0$. При этом целью моделирования является определение стратегии управления путем использования ресурсов нескольких субъектов управления для достижения сценария, наиболее близкого к целевому на заданном временном интервале.

Таким образом, необходим ряд попарных сравнений целевого сценария:

$$(7) \quad \mathfrak{R}^0(t) = \mathfrak{R} \left\{ E^{(3H)0}(t_i) = f \left(Z^{(tar)}(t) \right), (t - t_r) \leq t_i \leq t \right\}.$$

И одного из полученных при моделировании сценариев:

$$(8) \quad \mathfrak{R}^j(t) = \mathfrak{R} \left\{ E^{(3H)j}(t_i) = f \left(Z(t) \right), (t - t_r) \leq t_i \leq t \right\}.$$

При этом задача выбора управления и связанного с ним сценария развития ситуации решается как определение меры близости (сходства) пары сценариев как меры сходства последовательностей событий.

Для обеспечения аналитической и информационной поддержки управленческих процессов, направленных на подготовку, предварительный анализ, принятие решений и оценку их послед-

ствий в условиях неопределенности и возможных угроз, в лаборатории «Сценарного управления» Института проблем управления РАН создан специализированный программно-аналитический комплекс, который реализует функции сценарной системы поддержки принятия решений (СППР), формируя и исследуя модели развития ситуации, получая и оценивая спектр альтернативных сценариев поведения сложных социально-экономических систем при различных управляющих воздействиях. В рамках этой системы сценарии разрабатываются и анализируются с учетом двух ключевых подходов.

Первый подход ориентирован на прогнозирование развития ситуации исключительно за счет изменений, происходящих внутри имитируемой системы, без каких-либо управляющих влияний или целенаправленных импульсов. Другими словами, ситуация развивается самостоятельно, без внешнего вмешательства.

Второе направление отражает методы прогнозирования развития ситуации с применением стратегий управления и гипотез по развитию обстановки после применения определённого набора управляющих воздействий (в предшествующих работах это направление называется прямой задачей, т.е. созданием сценария прямого управления).

В исследовании [14] представлена идея значительного увеличения возможностей программно-аналитического комплекса путём введения обратной задачи, актуальной для поиска и анализа различных допустимых управленческих воздействий с целью достижения заранее определённых результатов.

8. Сценарное моделирование процессов группового регионального управления в условиях реализации угроз

К основным внутренним факторам, включенным в контур группового регионального управления и обеспечения его безопасности, в рамках данной работы и на основании проведенного исследования включены факторы, которые представляют собой составные части внутрирегиональных социально-экономических процессов и представляют собой проводимые мероприятия региональными и муниципальными органами власти, возможности,

ресурсную базу и специфику региона. Среди них можно выделить: социально-экономическую внутрирегиональную политику, уровень жизни населения, территориальный, хозяйственный и экономический потенциал, структуру экономики и ее состояние, ресурсную базу и т.п. [15, 30].

К внешним факторам регионального управления относятся те, что отражают уровень развития государственной политики, мониторинга и контроля поддержки стабильности и сбалансированности развития региона, а также уровни инвестирования, ресурсного обеспечения, реализации программ сотрудничества с частным бизнесом и корпоративным сектором [11, 16, 28]. Далее на рис. 4 и 5 соответственно были конкретизированы данные объединения основных внутренних и внешних факторов регионального развития, проведена их систематизация.

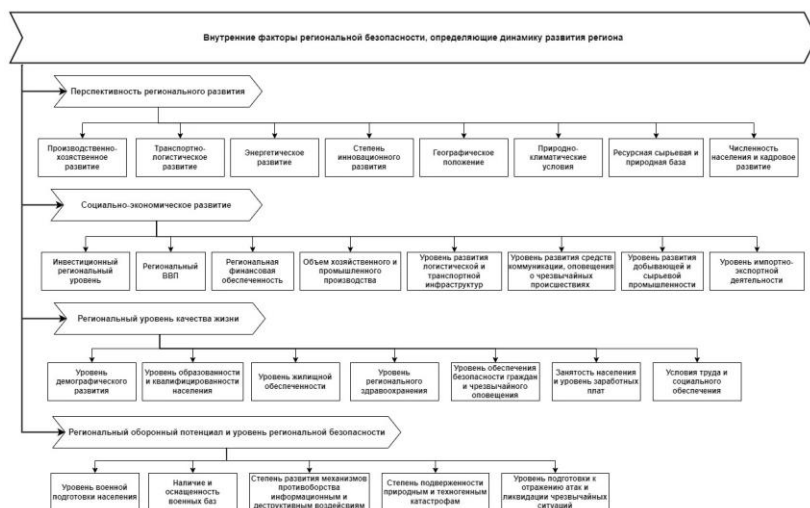


Рис. 4. Внутренние факторы регионального управления

В рамках сценарного исследования группового регионального управления выделено два типа субъектов управления, условно названные:

– «административные» (государственные, региональные и муниципальные субъекты и органы власти);

– «экономические» (частный бизнес, предпринимательский и хозяйствующий региональный сектор, международный бизнес), для более легкого восприятия далее термины употребляются в тексте без кавычек.



Рис. 5. Внешние факторы регионального управления

Административные и экономические субъекты управления характеризуются как общими, так и уникальными присущими им инструментами и возможностями управления, целями и задачами управления, а также уязвимостями к внутренним и внешним угрозам и деструктивным воздействиям со стороны преследующих иные цели субъектов управления. Сценарное исследование строилось на ряде гипотез, отражающих особенности этих субъектов управления.

Административные субъекты управления, как и экономические, заинтересованы в развитии логистики, социально-экономических факторов региона, таких как «Строительство новых транспортных дорог и путей», «Поддержка хозяйственной деятельности», «Строительство новых производств», «Поддержка регионального образования» в целях повышения «Квалифицированности населения», «Геологоразведывательные работы» в рамках расширения «Добычи природных и энергетических ресурсов». Данные интересы направлены лишь на повышение экономических и производственно-хозяйственных факторов развития региона.

Субъекты, условно названные «Государство» и «Региональные субъекты управления», имея большие возможности в рамках

законодательных, политических, научно-исследовательских и социальных процессов и преследуя свои цели управления по обеспечению стабильного и сбалансированного регионального развития и поддержки безопасности сложной социально-экономической системы региона, направляют усилия на поддержку социальных, правовых, информационных и инновационных факторов, таких как: «Создание новой правовой поддержки и механизмов управления», «Создание эффективной здравоохранительной системы», «Уровень развития научно-исследовательских работ», «Социальные программы», «Создание системы информационной безопасности», «Строительство военных баз».

Учитывая возможности субъектов управления и их уязвимости, необходимо создать систему взаимовыгодной поддержки как стабильного регионального развития и его безопасности, но и групповой иерархической поддержки между субъектами управления в условиях стабильного развития обстановки и при наличии внешних деструктивных воздействий и угроз. На рис. 6 представлены возможности влияния рассматриваемых субъектов на эндогенные факторы модели.

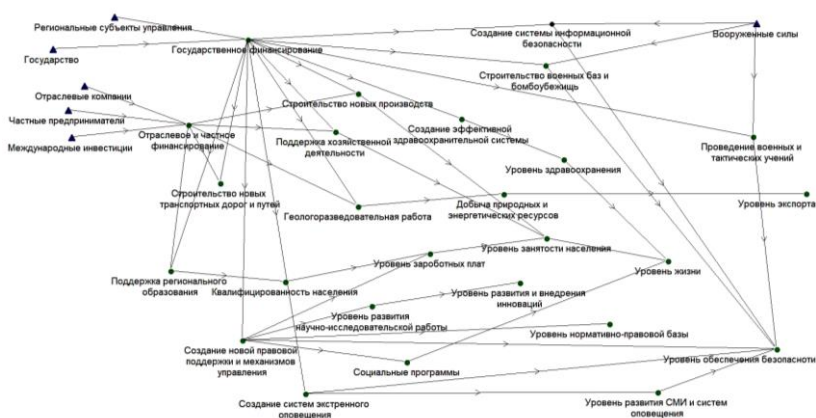


Рис. 6. Возможности воздействия субъектов управления

С целью исследования проблем повышения эффективности группового управления регионом и его безопасностью с использованием аппарата знаковых оргграфов и методологии сценарного

анализа разработана базовая интегрированная многофакторная имитационная модель, позволяющая проводить анализ сценариев развития обстановки в условиях активного противоборства имитируемых деструктивных воздействий и угроз [17, 25]. Структура имитационной модели регионального развития в условиях влияния внешних деструктивных воздействий и угроз представлена на рис. 7.

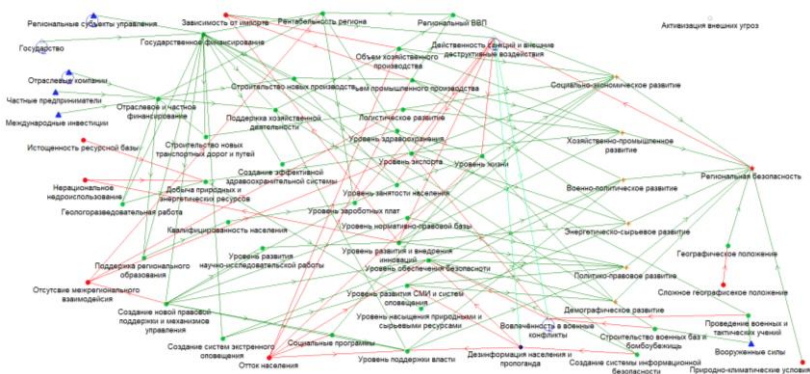


Рис. 7. Структура сценарной имитационной модели регионального развития в условиях влияния внешних деструктивных воздействий и угроз

Модель создана на основе стратегических программных документов, разработанных для нашей страны и отдельных её регионов. Эти документы определяют долгосрочные цели, задачи, основные направления и механизмы реализации государственной региональной политики России, а также выявляют закономерности, принципы и проблемы регионального управления, лежащие в основе этой политики, а также оценка возможностей и целей субъектов группового регионального управления.

На предварительном этапе, до сценарного моделирования, проведен анализ структуры модели. В частности, количество путей от субъекта управления, влияющих на компенсацию негативного влияния санкций (отрицательный вес путей), составляет 72, а количество таких же путей от «отраслевого» субъекта управления равно 19 (количество дуг до 6).

Причем наиболее короткие пути от субъекта управления к фактору «Санкции и внешние деструктивные воздействия» лежат именно от административного (государственного) субъекта управления:

- путь длиной 4: «Создание новой правовой поддержки и механизмов управления» → «Уровень развития научно-исследовательской работы» → «Уровень развития и внедрения инноваций» → «Санкции и внешние деструктивные воздействия»;

- путь длиной 5: «Создание систем экстренного оповещения» → «Уровень обеспечения безопасности» → «Военно-политическое развитие» → «Региональная безопасность» → «Санкции и внешние деструктивные воздействия».

Кроме того, как отмечалось выше, разные субъекты управления имеют как общие, так и различные мотивационные критерии для осуществления управляющих воздействий, которые также необходимо отразить в модели.

Административные субъекты управления также являются более устойчивыми к ряду экономических, социальных и политических угроз и воздействий в отличие от экономических субъектов [17, 23].

В основу проведенного сценарного имитационного моделирования легли способы и направления управляющих воздействий и условия их осуществления, а также варианты развития обстановки в сфере обеспечения стабильного регионального развития с использованием группового централизованного/децентрализованного и скоординированного/нескоординированного группового управления административными и экономическими субъектами управления.

В процессе сценарного моделирования проводится имитация различного рода внешних деструктивных воздействий со стороны преследующего собственные цели субъекта управления и внешней среды. Факторы, модели, которые отражают данные воздействия:

- «Санкции и внешние деструктивные воздействия»;
- «Вовлеченность в военные конфликты»;
- «Дезинформация населения и пропаганда».

Условия их активности задаются в вершине «Активация внешних угроз».

Результатами моделирования данных сценариев являются графики изменения собственных значений целевых факторов модели для оценки проводимых имитационных мероприятий.

Целевыми факторами, которые также составляю множества значимых для анализа ситуации и управления факторов $V^{(3H)} = \{v_1, v_{28}, v_{31}, v_{38}, v_{47}, v_{49}, v_{50}, v_{51}, v_{53}\}$ в исследовании являлись:

- «Региональная безопасность» (данный фактор отражает уровень стабильности региона);

- «Рентабельность региона» (данный фактор комплексно отражает уровень жизни, состояние экономики и влияет на государственное и частное финансирование);

- «Государство» и «Отраслевое и частное финансирование» (данные факторы отражают уровень инвестирования и ресурсного обеспечения со стороны субъектов управления и их способность поддержки факторов регионального развития);

- «Действенность санкций и влияния деструктивных воздействий» (данный фактор отражает объем проводимых осуществляющими деструктивную деятельность субъектами управления мероприятий и включен в данный ряд для наглядного отображения способности проводимых мероприятий регионального управления к его нивелированию);

- «Дезинформация населения и пропаганда» (данный фактор отражает уровень влияния на общественное мнение и поведение массовых групп, а также эффективность манипуляции сознанием, включающим использование искажающих реальность фактов и иных видов дезинформации);

- «Отток населения» (данный фактор отражает уровень демографического кризиса и миграции населения из региона);

- «Зависимость от импорта» (данный фактор отражает уровень зависимости региона от иностранных технологий, инноваций, оборудования, сырья, материалов, комплектующих и т.д.).

Целевой сценарий при этом задается таким образом: обеспечить следующую заданную динамику целевых факторов (см. таблицу 2):

Таблица 2. Динамика развития факторов

Фактор	Тип динамики
Региональная безопасность	$Fsc(v_{12}) = 1$
Отраслевое и частное финансирование	$Fsc(v_{28}) = 1$
Рентабельность региона	$Fsc(v_{31}) = 1$
Государство	$Fsc(v_{38}) \neq 2$
Дезинформация населения и пропаганда	$Fsc(v_{47}) = 2$
Зависимость от импорта	$Fsc(v_{49}) \neq 1$
Вовлеченность в военные конфликты	$Fsc(v_{50}) \neq 1$
Отток населения	$Fsc(v_{50}) \neq 1$
Действенность санкций и влияния деструктивных воздействий	$Fsc(v_{51}) = 2$

Сценарий 1. Реакция субъекта управления «Государство» на возникновение угроз по результатам мониторинга.

Данный сценарий отражает гипотезу, которая предполагает перенос центра управления и принятия решений к государственным субъектам управления и переход от децентрализованного принципа управления к централизованному на основе данных мониторинга возникновения деструктивных воздействий.

В рамках данного сценария были применены все виды имитируемых деструктивных воздействий, описанные выше.

Стратегическое управление предусматривает перенос центра управления и финансирования на основе данных мониторинга преимущественно на административные субъекты управление («Государство» и «Региональные субъекты управления»).

В рамках тактического управления предполагается стабилизация обстановки и нивелирование действия имитируемых деструктивных воздействий за счет вмешательства государственного субъекта управления и значительного притока отечественных инвестиций, ресурсов, увеличения правовой и социальной поддержки, на основе принципа централизации и применения координирующего управления субъектами более низкого уровня иерархии.

Целью данной стратегии управления является стабилизация социально-экономических и других процессов внутри региона за счет перехода к централизованному государственному управле-

нию и значительного увлечения ресурсного обеспечения и инвестирования, основанная на мониторинге обстановки и реакций системы на воздействия извне, а также реакции на проникновения в управляемую региональную систему деструктивных воздействий.

Оценка эффективности проводимых управляющих воздействий происходит на основе анализа попадания собственных значений исследуемых факторов в область целевых, допустимых, безопасных или небезопасных значений, а также в область риска. Результаты моделирования сценария 1 представлены на рис. 8 (поведение факторов модели) и на рис. 9 (анализ результатов моделирования).

Используемые обозначения для типов динамик факторов представлены в таблице 1.

В дальнейшем результаты моделирования будут представлены только в аналитической форме. Результаты моделирования (показатели значений целевых факторов оказались в зоне риска) и их оценки показывают, что реализация реактивного управления в ответ на проводимые деструктивные мероприятия приводит к существенному накоплению негативных тенденций внутри исследуемой системы и отсутствию возможности их преломления.

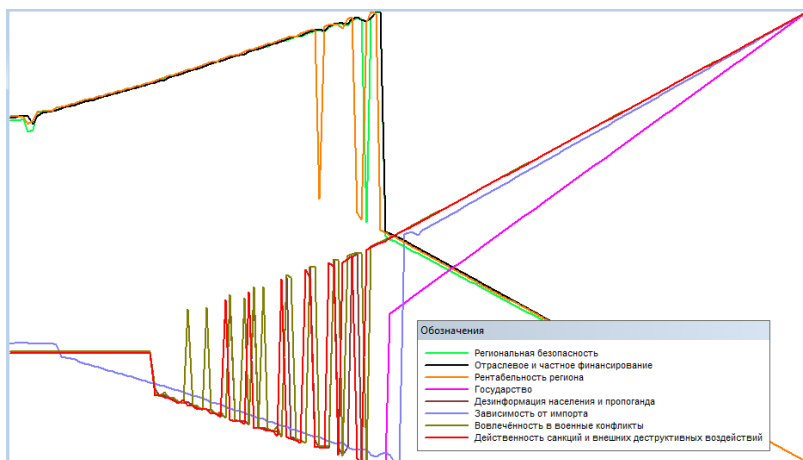


Рис. 8. Сценарий 1. Результаты моделирования

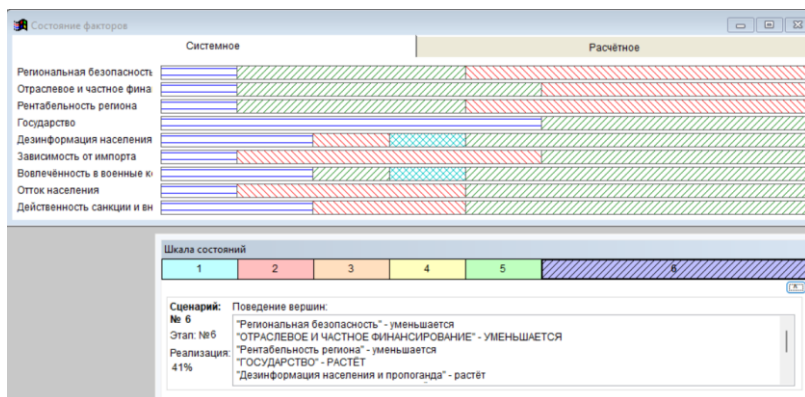


Рис. 9. Сценарий 1. Результаты моделирования

Таблица 3. Анализ результатов моделирования сценария 1

Фактор	Тип динамики		Совпадение
	Цель	Результат	
Региональная безопасность	$Fsc(v_{12}) = 1$	$Fsc(v_{12}) = 2$	–
Отраслевое и частное финансирование	$Fsc(v_{28}) = 1$	$Fsc(v_{28}) = 2$	–
Рентабельность региона	$Fsc(v_{31}) = 1$	$Fsc(v_{31}) = 2$	–
Государство	$Fsc(v_{38}) \neq 2$	$Fsc(v_{38}) = 1$	+
Дезинформация населения и пропаганда	$Fsc(v_{47}) = 2$	$Fsc(v_{47}) = 1$	–
Зависимость от импорта	$Fsc(v_{49}) \neq 1$	$Fsc(v_{49}) = 1$	–
Вовлеченность в военные конфликты	$Fsc(v_{50}) \neq 1$	$Fsc(v_{50}) = 1$	–
Отток населения	$Fsc(v_{50}) \neq 1$	$Fsc(v_{50}) = 1$	–
Действенность санкций и влияния деструктивных воздействий	$Fsc(v_{51}) = 2$	$Fsc(v_{51}) = 1$	–

Последствиями данного сценария являются снижение всех показателей регионального развития, нарушение его стабильности и сбалансированности, а в худшем случае – его полное подавление и переход к форме депрессивной экономики. Таким образом, было показано, что управление, основанное на реактивном воздействии неэффективно.

Результаты анализа близости полученного сценария целевым показателям значений факторов представлен в таблице 3.

Сценарий 2. Прогнозирование развития обстановки при отсутствии скоординированного группового управления.

Данный сценарий (рис. 10) отражает гипотезу, в рамках которой деятельность государственных субъектов управления осуществляется на основе результатов сценарного прогнозирования, когда при подготовке решений происходит отслеживание активизации имитируемых деструктивных воздействий и оцениваются возможности упреждающей реакции на их возникновение. В модели это осуществляется путем анализа динамики изменения значений фактора «Активация внешних угроз» и изменения стратегии управления от децентрализованного к централизованному виду.

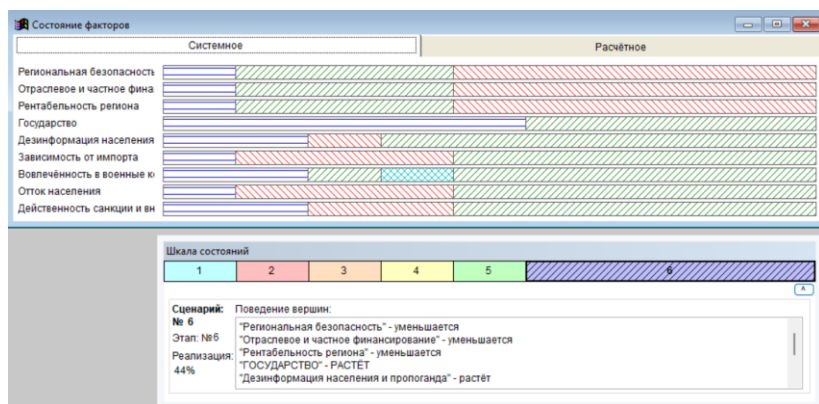


Рис. 10. Сценарий 2. Результаты моделирования

В рамках данного сценария стратегия опирается на перенос центра управления и ресурсного обеспечения с региональных субъектов управления на государственный уровень на основе результатов упреждающего сценарного анализа развития ситуации. Тактическое управление направлено на стабилизацию ситуации и протекающих внутри модели процессов за счет вмешательства государственного субъекта управления при отсутствии прочих

координирующих воздействий. В данном случае проводимые мероприятия экономическими субъектами управления осуществляются на основе их интересов и возможностей.

Негативный (как и в сценарии 1, рис. 10) стационарный режим наступает гораздо раньше. Отраслевое и частное финансирование начинает «играть» против фактора «Государство» и выводить капиталы из региона. Анализ близости сценария аналогичен (см. таблицу 3).

Таким образом, принятие управляющих решений и своевременная ресурсная поддержка экономики и населения региона может привести к временной его стабилизации. Однако отсутствие скоординированной реакции всех субъектов на деструктивные воздействия с учетом несовпадения их целей и интересов приводит к возникновению противоречий в проводимых мероприятиях и, как следствие, к ослаблению активного противодействия возникающим угрозам.

Полученный сценарий демонстрирует неэффективность данной стратегии управления. Анализ рассматриваемого сценария развития ситуации показывает необходимость формирования целевых государственных программ по координации деятельности отраслевых компаний, предпринимательского и хозяйствующего секторов, а также частного бизнеса. В благоприятных условиях регионального развития стоит применять только методы стимулирования социального и экономического секторов для снижения возможности возникновения рисков и противоречий и повышения уровня саморазвития региона. В условиях нестабильности необходимо применять методы централизованного регулирования с целью эффективного использования возможностей и ресурсов экономических субъектов управления для предотвращения самой возможности возникновения противоречий.

Сценарий 3. Прогнозирование развитие обстановки при скоординированном групповом управлении, основанном на прогнозе развития ситуации.

Данный сценарий (рис. 11) придерживается той же гипотезы, что и сценарий 2, но с некоторыми изменениями.

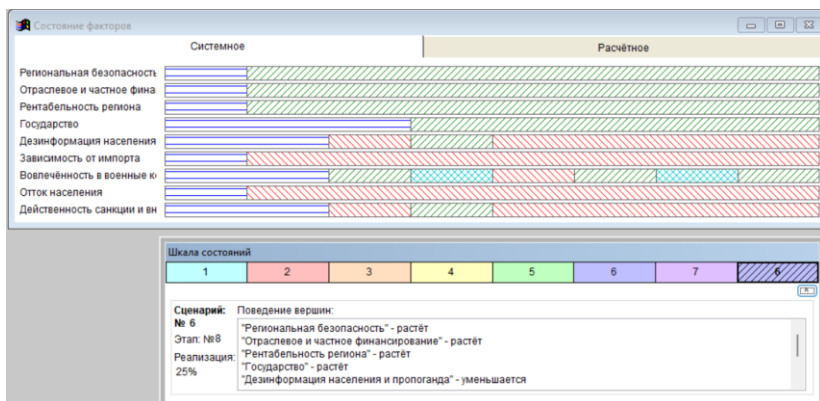


Рис. 11. Сценарий 3. Результаты моделирования

В рассматриваемом случае на этапе реагирования на активацию внешних угроз государство имеет в своем распоряжении инструменты поддержки и стимулирования экономических субъектов управления для повышения скоординированных действий и приводимых мероприятий активного противодействия возникающим угрозам.

В ходе сценарного моделирования были определены условия активности вершин субъектов управления. Вершина «Отраслевые компании» как часть экономического субъекта управления и вершина «Региональные субъекты управления» как часть административного изначально являются активными и зависят от значения фактора вершины «Рентабельность региона», чем выше его показатели, тем больше уровень поддержки. В условиях активации негативных тенденций функция мотивирования этих факторов переходит на фактор «Государство». Таким образом, наблюдается следующая закономерность: при снижении уровня рентабельности региона и при наличии имитируемых деструктивных воздействий заинтересованность данных субъектов падает, вследствие чего интенсивность развития социально-экономических процессов внутри системы существенно снижается. К тому же на первых этапах активации факторов внешних угроз происходит деактивация фактора «Международные инвестиции», как следствие санкционного давления.

«Государство», как субъект управления имеет меньшую подверженность внешним угрозам и значительно большие возможности для обеспечения стабильного регионального развития в сложных условиях. Исходя из данных соображений в структуре модели определяется зависимость централизации управления от уровня факторов «Рентабельность региона» и «Санкция и внешние деструктивные воздействия». Активация данного фактора происходит на основе отслеживания влияния фактора «Активация внешних угроз», который порождает угрозы разного рода, представленные в модели (активация факторов угроз: «Санкции и внешние деструктивные воздействия», «Вовлеченность в военные конфликты», «Дезинформация населения и пропаганда»).

Таким образом, фактор «Государство» наиболее активен только во время существования внешних угроз. В стабильное время (штатный режим) управление внутри модели происходит в основном за счет факторов «Отраслевые компании и «Региональные субъекты управления». Результаты анализа близости полученного сценария целевым показателям значений факторов представлены в таблице 4.

Анализ показал, что полученный сценарий наиболее близок к целевому. Однако не удалось обеспечить ограничение на рост фактора «Вовлеченность в военные конфликты». Дополнительное управление в военной сфере в модели выходит за рамки текущего исследования, однако можно предположить, что задействование механизмов стратегического и иного сдерживания позволит обеспечить полное совпадение с целевым сценарием.

Таким образом результаты исследования возможностей сценарных методов группового регионального управления и анализа гипотез, касающихся альтернативных путей развития обстановки, показали, что в кризисных условиях (активации внешних угроз, наличия неопределённостей, обострения противоречий и т.д.) наиболее эффективной является стратегия управления, предусматривающая возможность переноса центра принятия решений и перераспределения полномочий между субъектами управления различного уровня при условии наличия программ координирующего и стимулирующего управления.

Таблица 4. Анализ результатов моделирования сценария 3

Фактор	Тип динамики		Совпа- дение
	Цель	Результат	
Региональная безопасность	$Fsc(v_{12}) = 1$	$Fsc(v_{12}) = 1$	+
Отраслевое и частное финанси- рование	$Fsc(v_{28}) = 1$	$Fsc(v_{28}) = 1$	+
Рентабельность региона	$Fsc(v_{31}) = 1$	$Fsc(v_{31}) = 1$	+
Государство	$Fsc(v_{38}) \neq 2$	$Fsc(v_{38}) = 1$	+
Дезинформация населения и пропаганда	$Fsc(v_{47}) = 2$	$Fsc(v_{47}) = 2$	+
Зависимость от импорта	$Fsc(v_{49}) \neq 1$	$Fsc(v_{49}) = 2$	+
Вовлеченность в военные конфликты	$Fsc(v_{50}) \neq 1$	$Fsc(v_{50}) = 1$	–
Отток населения	$Fsc(v_{50}) \neq 1$	$Fsc(v_{50}) \neq 1$	+
Действенность санкций и влияния деструктивных воздействий	$Fsc(v_{51}) = 2$	$Fsc(v_{51}) = 2$	+

Государство как субъект верхнего уровня иерархии управления обладает существенными преимуществами в кризисных условиях, поскольку имеет возможность концентрации необходимых ресурсов для решения возникающих проблем, обладает множеством возможностей и различных инструментов управления, а также является менее зависимым от состояния социально-экономических факторов развития регионов, которые гораздо в большей степени подвержены внешнему вмешательству и деструктивному воздействию различных угроз.

Кроме того, государственные органы могут инициировать реформы, направленные на укрепление местного самоуправления и улучшение взаимодействия между различными уровнями исполнительной власти.

Поэтому переход на централизованное координирующие государственное управление является основой для нивелирования и предотвращения негативного влияния ряда социально-экономических уязвимостей на региональную систему.

В безопасных и благоприятных условиях поддержка хозяйствующих субъектов и управление стабильностью и сбалансированностью регионального развития, а также обеспечение его без-

опасности должно осуществляться преимущественно децентрализованно под управлением региональных, муниципальных и местных субъектов управления, представителей частного бизнеса и частного сектора на основе принципа партнерства. Подобная стратегия управления регионом может быть эффективной и осуществляться только при упреждающем прогнозно-сценарном мониторинге, позволяющем заранее подготавливать и отрабатывать стратегии и комплексы действий в рамках активного противодействия угрозам и осуществлять перенос центра принятия решений в сферу больших возможностей и меньших уязвимостей.

9. Заключение

Результаты исследований показывают, что при разработке стратегий регионального управления следует учитывать сложную структуру региона как объекта управления (наличие большого числа эндогенных и экзогенных факторов регионального развития), присутствие нескольких субъектов управления (обладают своими возможностями и интересами), увеличение числа возникающих угроз и внешних воздействий и др.

Применение технологий сценарного моделирования в работе является лишь началом пути к развитию системы принятия решений, направленных на повышение эффективности группового регионального управления. Многообразие целей и задач регионального управления, стоящих перед субъектами нашей страны, требуют дальнейшего исследования рассматриваемой проблемы, разработки детальных гипотез и сценариев развития ситуации.

В работе показано, что адаптивные стратегии группового управления на основе сценарного анализа могут вызвать более продуктивное сотрудничество, основанное на совместных возможностях и интересах субъектов управления для определения приемлемой для региона траектории развития ситуации и достижения поставленных целей управления (с целью успешного противодействия возникающим угрозам в условиях кризисных ситуаций и выявления возможностей реализации целей регионального развития).

Одним из подходов, которые лежат в основе такого управления, является сценарный анализ и упреждающий прогнозный мониторинг не только конечных состояний системы в целом, как последствий проводимых мероприятий, но и состояния отдельных ключевых факторов системы (событий) на протяжении всех этапов реализации управления.

Сценарный подход позволит решать задачи прогнозно-экспертной поддержки при разработки стратегических целевых программ, играющих важную роль в обеспечении безопасного развития региона.

В работе также показано, что в кризисных условиях переход к централизованному принципу управления является наиболее эффективным. В рамках такой стратегии государство, как субъект управления, имеющий особые критерии оценки ситуации, демонстрирует повышенную устойчивость к ряду негативных факторов и обладает широкими возможностями в области регулирования в отличие от субъектов управления, для которых экономические критерии имеют более повышенный приоритет.

В работе также показана значимость сценарных методов в стратегическом управлении, которое рассматривается не только как выработка непосредственных воздействий на объект управления, но как проактивное переопределение центров управления, действия которых приводят к наиболее благоприятному сценарию развития региона.

Применение математических и программных средств автоматизации в сценарно-прогностических исследованиях расширяет возможности дальнейшего использования сценариев для экспертизы целей и дальнейшего планирования мероприятий их реализации, повышая обоснованность, эффективность и надежность разрабатываемых целевых программ.

Следует также отметить, что в отличие от привычного метода, где сценарии разрабатываются вручную экспертами на основе их знаний и опыта, процесс автоматизации управления такого рода кардинально трансформирует процесс, позволяя использовать весь спектр сценариев на любом этапе управления.

Литература

1. ГАПОНЕНКО А.Л., САВЕЛЬЕВА М.В. *Теория Управления: учебник и практикум для вузов.* – М.: Изд-во Юрайт, 2023. – 371 с.
2. ШЕДЬКО Ю.Н. *Региональное управление и планирование: учебник и практикум для вузов.* – М.: Изд-во Юрайт, 2023. – 576 с.
3. *Федеральный закон «Об общих принципах организации публичной власти в субъектах Российской Федерации» от 21.12.2021 N 414-ФЗ (последняя редакция).* – URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_404070/ (дата обращения: 07.10.2024).
4. *Указ Президента РФ от 16.01.2017 N 13 «Об утверждении Основ государственной политики регионального развития Российской Федерации на период до 2025 года».* – URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_210967/ (дата обращения: 12.09.2024).
5. *Распоряжение Правительства РФ от 13.02.2019 N 207-р «Об утверждении Стратегии пространственного развития Российской Федерации на период до 2025 года».* – URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_318094/ (дата обращения: 12.09.2024).
6. РАБКИН С.В. *Институциональная среда регионального управления: современные вызовы социально-экономической безопасности территориального развития // Экономическая безопасность.* – 2021. – Т. 4., №1. – С. 89–100.
7. ДЖАМАЛУДИНОВА М.Ю. *Особенности управления экономикой на региональном уровне // Индустриальная экономика.* – 2021. – Т. 1., №3. – С. 12–16.
8. МАННАПОВ Р.Г., АХТАРИЕВА Л.Г. *Современные закономерности, принципы, задачи и механизм регионального управления // Вестник Челябинского государственного университета.* – 2009. – №3. – С. 47–56.
9. АРАПОВ С.В., КУРОЧКИНА А.А., ПЕТРОВА Е.Е. *Региональное управление и территориальное планирование: учебное пособие.* – С.-Пб.: РГГМУ, 2021. – 460 с.

10. ЦЫГИЧКО В.Н., ЧЕРЕШКИН Д.С. *Сценарный метод прогнозирования и оценки рисков возникновения негативных последствий стратегических решений в организационных системах* // Труды ИСА РАН. – 2018. – Том 68, №4. – С. 74–83.
11. ДРАНКО О.И., НОВИКОВ Д.А., РАЙКОВ А.Н. и др. *Управление развитием региона. Моделирование возможностей*. – М.: URSS, ООО «ЛЕНАНД», 2023. – 432 с.
12. ШУЛЬЦ В.Л., БОЧКАРЕВ С.А., КУЛЬБА В.В. и др. *Сценарное исследование проблем обеспечения общественной безопасности в условиях цифровизации*. – М.: Проспект, 2020. – 240 с.
13. ЧЕРНОВ И.В. *Сценарно-когнитивное моделирование сложных систем на основе событийной идентификации динамики факторов* // Проблемы управления. – 2023. – №3. – С. 65–76.
14. ЧЕРНОВ И.В. *Повышение эффективности управленческих решений на основе использования программно-аналитического комплекса сценарного анализа и прогнозирования* // Вестник РГГУ. Серия: Экономика. Управление. Право. – 2018. – №1(11). – С. 40–57.
15. РИСИН И.Е., ТРЕЩЕВСКИЙ Ю.И. *Региональное управление и территориальное планирование* – М.: Изд-во «КноРус», 2020. – 270 с.
16. АРХИПОВА Л.С., ГОРОХОВА И.В. *Факторы региональной экономической безопасности* // Вестник Российского экономического университета им. ГВ Плеханова. – 2020. – Т. 17., №1(109). – С. 67–77.
17. ШУЛЬЦ В.Л., КУЛЬБА В.В., ШЕЛКОВ А.Б. и др. *Управление региональной безопасностью на основе сценарного подхода*. – М.: ИПУ РАН, 2014. – 163 с.
18. CHERNOV I.V. *Scenario Analysis of Vulnerability in Control of Complex Systems* // Automation and Remote Control. – 2022. – Vol. 83, No. 5. – P. 780–791.
19. BERAN V. *Dynamics of regional development in regional and municipal economy* // Sustainability. – 2020. – Vol. 12, No. 21. – P. 9234.
20. MALIZIA E. *Understanding local economic development*. – Oxford: Taylor & Francis, 2021. – 312 p.

21. BYSTROV V.V., KHALIULLINA D.N., MALYGINA S.N. *Development of the information support system components for personnel security management of the region* // Computer Science On-line Conference. – Cham: Springer International Publishing, 2020. – P. 348–361.
22. KITLER W. *Model of the national security system: selected problems* // European Research Studies Journal. – 24(3B). – P. 1027–1040.
23. KLIMANOV V.V., KAZAKOVA S.M., MIKHAYLOVA A.A. *Economic and fiscal resilience of Russia's regions* // Regional Science Policy& Practice. – 2020. – Vol. 12, No. 4. – P. 627–641.
24. LU D. *Regional development and its spatial structure*. – China: Springer, 2024.
25. VERBIVSKA L. *Regulatory Policy of the Entrepreneurship Development as a Dominant of Economic Security of the National Economy* // Int. Journal of Safety & Security Engineering. – 2022. – Vol. 12, No. 5. – P. 543–552
26. HOOVER E. M., GIARRATANI F. *An Introduction to Regional Economics* // Reprint. Eds.: S. Loveridge, R. Jackson. – WVU Research Repository, 2020.
27. KAHN H., WIENER A. *The year 2000: A framework for speculations on the next 33-year*. – New York: Macmillan, 1967. – 431 p.
28. MENSHIKOVA O.I. *Innovative Motivation as a Factor of Improving the Quality of Human Resources and the Development of Socio-economic Systems* // Complex Systems: Innovation and Sustainability in the Digital Age: Vol. 1. – Cham: Springer International Publishing, 2020. – P. 11–17.
29. BYSTROVA Y. *The main threats to economic security of the country* // E3S Web of Conferences. – EDP Sciences, 2021. – Vol. 273. – P. 08108.
30. SIEVIDOVA I., TKACHENKO S. *Determinants for the formation of socio-economic component of national security* // Norwegian Journal of development of the International Science. – 2022. – No. 85. – P. 20–22.

SCENARIO TECHNOLOGIES IN GROUP REGIONAL MANAGEMENT

Nikita Komanich, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Junior Researcher (komanichnickitca@gmail.com).

Igor Chernov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., Leading Researcher (chernov@ipu.ru).

Abstract: This work is devoted to the application of scenario analysis technologies to study the problems of improving the management efficiency of ensuring stable and balanced development of regions in conditions of uncertainty and risks associated with the destructive impact of various threats. The novelty of the study lies in the use of a scenario approach to developing a regional management strategy, which is based on group management technologies that combine the principles of centralization and decentralization, public-private partnership and coordination. The proposed approach allows us to analyze the situation developing in regional systems and justify the need to transfer the decision-making center, as well as the redistribution of functions and powers between administrative and economic management entities of different levels of hierarchy, each of which has its own unique capabilities and vulnerabilities. Strategic management in such a model is carried out using a scenario-forecasting approach, which allows us to identify negative trends in regional development, including those arising as a result of external influences. A simulation model of group regional management has been developed based on the mathematical apparatus of signed oriented graphs. The study resulted in the developed scenarios of regional development, the analysis of which showed that in the conditions of increasing threats the most effective strategy is to transfer the control center to a state entity based on scenario-forecast monitoring. At the same time, it is necessary to use the principles of coordinating management and stimulation, as well as the principle of partnership to prevent contradictions in socio-economic processes within the regional system. In safe and favorable conditions, support for economic entities, as well as management of stability and balance of regional development and ensuring its security should be carried out mainly in a decentralized manner, under the control of regional management entities, the entrepreneurial sector and private business.

Keywords: group management, regional system, stable development, resource provision, scenario analysis, simulation modeling, active confrontation.

УДК 004.94 + 332.1

ББК 65.050.22.

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.В. Клочковым.*

Поступила в редакцию 30.10.2024.

Опубликована 31.03.2025.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕАЛИЗОВАННОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ НА ОСНОВЕ ИНФОРМАЦИИ, ИЗВЛЕКАЕМОЙ ИЗ ОПЦИОНОВ

Патласов Д. А.¹

(Пермский государственный национальный
исследовательский университет, Пермь)

Рассматривается подход к прогнозированию реализованной волатильности индекса S&P 500 с помощью данных, извлекаемых из опционов благодаря теореме восстановления Росса. Цель настоящего исследования заключается в исследовании возможности использовать показатели, получаемые после применения теоремы восстановления Росса, в качестве экзогенных факторов в модели прогнозирования реализованной волатильности финансовых инструментов. Применяемая для достижения цели исследования методика исключает необходимость использования исторических котировок финансовых активов, фокусируясь исключительно на опционах. В работе проведено сравнение точности прогнозирования реализованной волатильности между предлагаемыми моделями и базовым подходом HAR-RV. Эмпирические результаты показали, что предлагаемый подход обеспечивает более высокую точность предсказаний. Используемый подход в теореме восстановления Росса на основе аппроксимации функции плотности распределения базового актива опциона позволяет более точно учитывать ожидания участников рынка и их предпочтения к риску, что может стать статистически значимыми факторами в моделях прогнозирования различных финансовых индикаторов. Результаты исследования могут быть использованы для оценки систематического риска, прогнозирования вероятности коррекций и кризисов на финансовых рынках.

Ключевые слова: волатильность, распределение доходности финансовых активов, теорема восстановления, вероятностные характеристики, прогнозирование.

1. Введение

Современная цифровизация и рост вычислительных мощностей способствуют развитию математического моделирования, включая финансы. Биржевые агенты агрегируют значительные объемы публичной финансовой информации, используя её для разработки торговых стратегий и управления рисками. Согласно

¹ Дмитрий Александрович Патласов, ассистент кафедры Информационных систем и математических методов (dmitriypatlasov@gmail.com).

гипотезе эффективности рынков [18], цены активов уже отражают всю доступную информацию, и предсказание будущих цен на её основе не приносит систематической сверхприбыли. Это предполагает, что модели, основанные на исторических данных, не могут обеспечить устойчивую доходность. В таких условиях в финансовой эконометрике возникает потребность в использовании дополнительной информации, способной повысить объясняющую способность моделей при сохранении соответствия гипотезе эффективности.

В данном исследовании предлагается использовать показатели, извлекаемые из теоремы восстановления Росса, для прогнозирования реализованной волатильности индекса S&P 500. Этот подход не опирается на исторические котировки, а использует данные по опционам для аппроксимации истинного распределения вероятностей, учитывающего рыночные ожидания и неприятие риска [10, 15]. Для подхода Росса можно использовать опционы на индексы, акции, облигации и другие активы при достаточной ликвидности [28].

Также отметим, что в работах [7, 22] указывается, что рыночные ожидания, выраженные через подразумеваемую волатильность опционов, могут не всегда точно отражать будущую волатильность, особенно на неэффективных рынках. Использование теоремы восстановления Росса как инструмента для исправления ограничений имплицитированной волатильности позволяет учитывать премию за риск и предпочтения участников рынка, что более точно соответствует реальной динамике финансовых активов.

2. Методы

2.1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

В финансовой теории широко используется концепция риск-нейтрального ценообразования, лежащая в основе моделирования цен опционов и других производных инструментов. На развивающихся и развитых рынках цены опционов определяются приведенной стоимостью ожидаемых выплат, дисконтируемых на основе стохастического дисконтирующего фактора (SDF), который учитывает риск-нейтральные вероятности и изменения

в предпочтениях инвесторов [4, 8]. Модели стохастической волатильности и прыжков более точно учитывают экзогенные шоки и нестабильность рынка, улучшая прогнозы и оценку стоимости опционов [16, 17].

Современная интерпретация теоремы восстановления Росса предполагает разложение риск-нейтральных и истинных вероятностей, выделяя компоненты премии за риск. Теорема основывается на двух дополнительных предположениях: 1) нейтральный к риску процесс является однородной по времени цепью Маркова; 2) ядро ценообразования не зависит от траектории. Ядро ценообразования отражает предпочтения инвесторов и определяет дисконтирование будущих денежных потоков [15].

Описанные выше положения позволили доказать теорему о восстановлении истинного распределения вероятностей для базовых активов производных финансовых инструментов [30]. Рассмотрим однородный по времени процесс X_t , определенный на конечном множестве состояний с индексами от 1 до n . Обозначим через p_{ij} элементы матрицы переходных вероятностей $P = \{p_{ij}\}$ размерности $n \times n$, соответствующей цепи Маркова, где i и j принимают значения от 1 до n . Эта матрица соответствует одному шагу вперед в нейтральных к риску вероятностях состояний, отображая вероятность перехода из состояния i в момент времени t в состояние j в момент времени $t + 1$ без учета календарного времени:

$$(1) \quad p_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

В настоящем исследовании риск-нейтральное распределение вероятностей определяется как матрица переходных вероятностей (P), а истинное распределение вероятностей – как матрица (F), полученная после применения теоремы восстановления [30] к матрице переходных вероятностей. Вычисление матрицы истинного распределения вероятностей является аппроксимацией, поэтому термины «истинное» и «аппроксимирующее» распределение вероятностей будут использоваться как синонимы.

Представленные в (1) элементы матрицы P соответствуют однопериодным вероятностям состояний и индексируются по начальным и конечным состояниям. Матрица перехода P состоит

из неотрицательных элементов. Также предполагается, что матрица P неразложима и является цепью Маркова. Под неразложимостью в данном контексте следует понимать, что для любых двух состояний i и j существует такое число t , что вероятность перехода из состояния i в состояние j за t шагов (обозначается как $p_{ij}^{(t)}$) больше нуля. Другими словами, из любого состояния цепи Маркова можно достичь любого другого состояния за конечное количество шагов с положительной вероятностью. Согласно теореме Перрона – Фробениуса для неперiodической цепи Маркова с неразложимой матрицей переходных вероятностей P существует ее единственное положительное собственное значение λ , которое по модулю больше всех остальных собственных значений, при этом соответствующий собственный вектор имеет только положительные компоненты [26]:

$$(2) \quad Pv = \lambda v,$$

где v – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ матрицы P (используется для описания долгосрочного распределения или состояния равновесия модели).

Собственный вектор v является вектором-столбцом, т.е. $v \in \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^n$ обозначает пространство размерности n с компонентами из множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Вектор v соответствует долгосрочному распределению цепи Маркова (с точностью до масштаба). Теоретические основы подобных операций с матрицами, а также с теорией вероятности подробно описаны в работах российских академиков [1, 2, 3].

Если сумма элементов в каждой строке матрицы P равна единице, то P является стохастической матрицей:

$$(3) \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Матрица переходных вероятностей может быть разложена следующим образом:

$$(4) \quad P = \delta MF,$$

где δ – средняя рыночная ставка дисконтирования; $M = \{m_{ij}\}$ – ядро ценообразования (стохастический дисконтирующий фактор (SDF)) с размерностью $n \times n$; $F = \{f_{ij}\}$ – матрица истинных вероятностей перехода (искомая матрица) с размерностью $n \times n$.

Обратим внимание на то, что знание P недостаточно для однозначного определения сомножителей в правой части, так как ядро ценообразования является неизвестной случайной величиной.

Согласно [14] ядро ценообразования M является агентской предельной нормой замещения как функция от агрегированного потребления. Определение вектора предельных полезностей $d = (d_1, \dots, d_n)'$, где $(\cdot)'$ – символ транспонирования, позволяет записать формулу (4) в виде

$$(5) \quad p_{ij} = \delta \left(\frac{d_j}{d_i} \right) f_{ij}.$$

Определение матрицы $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ позволяет представить F следующим образом:

$$(6) \quad P = \delta D^{-1} F D.$$

Или, что эквивалентно,

$$(7) \quad F = \delta^{-1} D P D^{-1}.$$

Используя дискретные пространства для цен состояний, необходимо убедиться, что отсутствуют арбитражные возможности. В модели с экзогенным потреблением отсутствие арбитража является простым условием существования равновесия с положительными ценами состояний. Отсутствие арбитража допустимо проверять по спредам опционов: вертикальный спред, спред «бабочка» и календарный спред [11].

Поскольку F является стохастической матрицей, то $Fe = e$, где e – вектор из единиц. В сочетании с ур. (7) получаем

$$(8) \quad P D^{-1} e = \delta D^{-1} e.$$

Тогда $v = D^{-1} e$, что определяет собственный вектор матрицы P (v – определяется единственным образом при двух допущениях: P однородна по времени и неразложима); $\lambda = \delta$, что определяет собственное значение матрицы P . Было доказано, что если определить вектор v , содержащий обратные диагональные элементы D , будет получено единственное решение из (2), где λ соответствует δ . Коротко говоря, в предположении временной однородности и неразложимости проблема собственных значений имеет только одно положительное решение. Теорема восста-

новления [30] была доказана, поскольку v соответствует обратному ядру ценообразования, которое, в соответствии с отсутствием арбитража, должно быть строго положительным.

2.2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПОДРАЗУМЕВАЕМОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

На первом этапе расчетов проводится интерполяция поверхности подразумеваемой волатильности опционов в матрице сроков до погашения, страйков и подразумеваемой волатильности (implied volatility [29]). Отметим, что сроки до погашения опционов T приведены к годовому формату, а под страйком K следует понимать цену исполнения опциона, указанную в контракте.

Интерполированная матрица задается дискретно 12 сроками до погашения с долями, равными количеству месяцев в году: $T = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots, 1$. Страйки в интерполированной матрице задаются от исходной цены базового актива в день наблюдения от -30% до +30% с шагом 5 п.п. Тогда интерполированная матрица будет иметь размерность 13 на 12. Интерполяция реализуется из наблюдаемой рыночной поверхности подразумеваемой волатильности опционов на индекс S&P 500. Инструментом интерполяции выступает кубический сплайн, как в [6, 24].

После того как были подготовлены рыночные данные: значения страйков K , значения сроков до погашения T и соответствующие им значения подразумеваемой волатильности, реализуется интерполяция с использованием кубического сплайна:

$$(9) \quad S(K, T) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} B_i(K) D_j(T),$$

где K – массив страйков; T – массив сроков до погашения; α_{ij} – коэффициенты, определяемые в ходе интерполяции; $B_i(\cdot)$, $D_j(\cdot)$ – кубические базисные функции.

В представленном кубическом сплайне используются базисные функции (кубические полиномы) вида

$$(10) \quad B_i(K) = a_i + b_i(K - k_i) + l_i(K - k_i)^2 + m_i(K - k_i)^3,$$

$$(11) \quad D_j(T) = a_j + b_j(T - t_j) + l_j(T - t_j)^2 + m_j(T - t_j)^3,$$

где $a_i, b_i, l_i, m_i, a_j, b_j, l_j, m_j$ – коэффициенты, определяемые условиями интерполяции; K и T – независимые переменные, значения которых интерполируются; k_i, t_j – координаты точек на осях k

и t , относящихся к i -му значению страйка и j -му значению сроков до погашения соответственно.

Представленные базисные функции обладают свойствами, которые позволяют сплайну гладко проходить через точки данных и обеспечивать интерполяцию поверхности подразумеваемой волатильности [25].

Обозначим через IV интерполированную матрицу

$$(12) \quad IV = \begin{bmatrix} iv_{1,1} & iv_{1,2} & \cdots & iv_{1,12} \\ iv_{2,1} & iv_{2,2} & \cdots & iv_{2,12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ iv_{11,1} & iv_{11,2} & \cdots & iv_{11,12} \end{bmatrix},$$

где iv_{ij} – интерполированная подразумеваемая волатильность для страйка i и срока до погашения j соответственно.

Рассмотрим целесообразность использования механизма интерполяции для подразумеваемой волатильности опционов вместо более классических подходов для моделирования подразумеваемой волатильности колл- и пут-опционов, например, с помощью модели Хестона в форме системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ).

Модель Хестона описывает динамику базового актива и его волатильности с помощью следующей системы СДУ:

$$(13) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1,$$

$$(14) \quad dv_t = k(\theta - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} S_t dW_t^2,$$

где S_t – цена базового актива; v_t – моментальная волатильность; k – скорость реверсии; θ – долгосрочное среднее; σ – волатильность волатильности; W_t^1, W_t^2 – стандартные броуновские процессы с корреляцией ρ .

Подразумеваемая волатильность оценивается на основе предположений о параметрах модели, однако эмпирические исследования показывают, что она не всегда способна точно предсказать будущие изменения реализованной волатильности. Одной из причин этого является то, что параметрические модели, например модель Хестона, предполагают фиксированные значения параметров (k, θ, σ) , что не всегда соответствует реальным рыночным условиям. Исследования, например [31], показывают, что наличие временной изменчивости параметров существенно

влияет на точность прогнозов, что делает IV менее надежным предиктором.

2.3. РАСЧЕТ ЦЕН КОЛЛ-ОПЦИОНОВ И ПРОВЕРКА НА ОТСУТСТВИЕ АРБИТРАЖА

На следующем этапе имея матрицу интерполированной поверхности подразумеваемой волатильности рассчитываются цены колл-опционов по формуле Блэка – Шоулза [9]:

$$(15) c(K, T) = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2),$$

где c – цена колл-опциона; S – цена базового актива; $N(\cdot)$ – функция стандартного нормального распределения; K – страйк из интерполированной поверхности подразумеваемой волатильности; r – безрисковая процентная ставка в день наблюдения; T – срок до погашения из интерполированной поверхности подразумеваемой волатильности; d_1 и d_2 определяются следующим образом:

$$(16) d_1 = \frac{\left(\ln \frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$(17) d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

где σ – значение волатильности из интерполированной поверхности волатильности.

Рассчитанные цены колл-опционов для каждого страйка i и срока до погашения j являются элементами матрицы $C = \{c_{ij}\}$:

$$(18) C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} \end{bmatrix},$$

где c_{ij} – цены колл-опционов, рассчитанные по формуле Блэка – Шоулза, соответствующие i -му страйку и j -му сроку до погашения.

Полученная матрица цен колл-опционов C проверяется на отсутствие арбитражных возможностей по трем видами спредов: вертикальный, «бабочка» (баттерфляй) и календарный. Следует отметить, что отсутствие арбитража лежит в основе современной теории ценообразования активов.

Пусть имеется цена колл-опциона c_{ij} со страйком K_i , $i = 1, \dots, 13$ и сроки до погашения T_j , $j = 1, \dots, 12$.

Тогда проверка матрицы цен опционов по вертикальному спреду заключается в удовлетворении следующему условию:

$$(19) 0 \leq \frac{c_{i-1,j} - c_{i,j}}{K_i - K_{i-1}} \leq 1.$$

Вертикальный спред по определению является длинной позицией по $\frac{1}{K_i - K_{i-1}}$ колл-опционам на страйке K_{i-1} и короткой позицией по $\frac{1}{K_i - K_{i-1}}$ колл-опционам на страйке K_i . Отсюда следует, что выплаты по таким позиция ограничены сверху единицей, а снизу – нулем. Удовлетворение условию нахождения каждого элемента матрицы C в пределах от 0 до 1 является проверкой на безарбитражность по вертикальному спреду.

Проверка на отсутствие арбитражных возможностей по спреду баттерфляй реализуется в предположении об открытии трех позиций: длинная позиция по колл-опциону со страйком K_{i-1} , короткая позиция по $\frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{K_{i+1} - K_i}$ двум колл-опционам со страйком K_i , длинной позицией по $\frac{K_i - K_{i-1}}{K_{i+1} - K_i}$ колл-опционам со страйком K_{i+1} . Тогда проверка на безарбитражность по спреду баттерфляй заключается в удовлетворении условию, что стоимость спреда больше нуля:

$$(20) 0 \leq c_{i-1,j} - 2 \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{K_{i+1} - K_i} c_{i,j} + \frac{K_i - K_{i-1}}{K_{i+1} - K_i} c_{i+1,j}.$$

Третий тест на отсутствие арбитражных возможностей проводится по календарному спреду. Для любого дискретного страйка и для любого дискретного срока до погашения необходимо выполнение следующего условия:

$$(21) 0 \leq c_{i,j+1} - c_{i,j}.$$

Разница цен колл-опционов с ближайшими сроками до погашения и одним страйком представляет собой календарный спред, это утверждение аналогично открытию длинной позиции по колл-опциону со сроком до погашения T_{j+1} и короткой позиции со сроком до погашения T_j при одинаковых страйках K_i . Отсутствие отрицательной стоимости такой позиции позволяет делать вывод об отсутствии арбитражных возможностей в матрице цен колл-опционов C [22].

2.4. РАСЧЕТ МАТРИЦ ЦЕН СОСТОЯНИЙ И ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ P

Далее следует этап вычисления матрицы состояний (state prices): по формуле [12] определяют функцию цен состояний $\pi(k, t)$ как вторую частную производную по страйку из формулы Блэка – Шоулза:

$$(22) \pi(K, T) = e^{rT} \frac{\partial^2 c(K, T)}{\partial K^2},$$

где $\pi(K, T)$ – функция цен состояний; K – страйк колл-опциона; T – срок до погашения; $c(K, T)$ – функция цены колл-опциона из формулы Блэка – Шоулза.

При использовании разностной аппроксимации 2-го порядка функция $\pi(k, t)$ принимает вид

$$(23) \pi(K, T) \approx e^{rT} \frac{c(K+\Delta_K, T) - 2c(K, T) + c(K-\Delta_K, T)}{(\Delta_K)^2}.$$

Тогда матрица $(\pi) = \{\pi_{ij}\}$ будет иметь размерность 11 на 12.

После получения матрицы состояний предстоит этап оценки матрицы переходных вероятностей. Для нахождения матрицы переходных вероятностей предстоит решить оптимизационную задачу. Отличительной особенностью элементов матрицы переходных вероятностей является то, что они описывают риск-нейтральные переходные вероятности из любого состояния рынка в любое другое возможное состояние [19]. Таким образом, матрица переходных вероятностей – это цепь Маркова, где отражены вероятности изменения рыночной доходности базового актива опциона [26].

Пусть P – это матрица вероятностей перехода рынка из одного состояния в другое, где p_{ij} обозначает вероятность перехода из состояния i в состояние j .

Поскольку оцененная ранее матрица (π) имела размерность 11 на 12, где 11 — это количество страйков, то матрица P будет иметь размерность 11 на 11. Каждый элемент матрицы P интерпретируется как вероятность перехода базового актива опциона, например, индекса S&P 500 из одного значения в другое. Для удобства в матрице P переведем страйки в доходности от -25% до $+25\%$ с шагом 5 п.п. от спот-цены финансового актива в день наблюдения. Тогда можно говорить, что элементы центральной

строки матрицы P отражают вероятности перехода рынка из текущего состояния (0%) в другие возможные дискретно заданные состояния [21].

Для решения задачи вводятся достаточные условия оптимальности:

1. Поскольку искомая матрица P – это матрица вероятностей, то все элементы должны быть ограничены снизу 0, а сверху 1.

2. Искомая матрица P имеет вид цепи Маркова, следовательно, сумма элементов каждой строки этой матрицы должна быть равна 1.

3. Еще одно вводимое ограничение связано с унимодальностью. Для каждой строки i матрицы P вероятности перехода должны возрастать до диагонального элемента и убывать после, тогда по диагонали данной матрицы откладываются максимальные значения каждой строки.

4. Для матрицы переходных вероятностей P и матрицы (π) установим ограничение на равенство центральной строки матрицы P первому столбцу матрицы (π) . Четвертое ограничение заранее задает центральную строку матрицы P , тогда с помощью оптимизации необходимо найти элементы строки матрицы P с первой по пятую и с 7-й по 11-ю.

Таким образом, минимизации целевой функции сводится к решению задачи оптимизации следующего вида:

$$(24) \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=2}^{11} (\pi_{i,j-1} * p_{ij} - \pi_{ij})^2 \rightarrow \min_{p_{ij}},$$

с ограничениями

$$(25) 0 \leq p_{ij} \leq 1,$$

$$(26) \sum_{i=1}^{10} p_{ij} = 1,$$

$$(27) p_{i1} \leq p_{i2} \leq \dots \leq p_{ii} \geq p_{i(i+1)} \geq \dots \geq p_{i11},$$

$$(28) p_{\frac{n+1}{2},j} = (\pi)_{1,j} \quad \forall j = 1, 2, \dots, 11.$$

Поиск минимума в рамках поставленной задачи реализуется с помощью алгоритма SLSQP (последовательное квадратичное программирование методом наименьших квадратов) в Python, модуль `scipy`.

2.5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ И ПОЛУЧЕНИЕ ИСТИННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИНДЕКСА S&P 500

После проведения оптимизации получаем значения искомой матрицы переходных вероятностей P . Пример матрицы P представим в результатах исследования. Применяя к матрице P теорему восстановления, вычисляем матрицу истинных переходных вероятностей (матрица F).

Матрица F также имеет размерность 11 на 11, где каждая ось матрицы является рыночным сценарием ожидаемой доходности от -25% до $+25\%$ с шагом 5 п.п. Наибольший интерес здесь представляет центральная строка матрицы F , так как она показывает вероятности перехода рынка в различные состояния из нулевой точки (0%). Тогда центральная строка матрицы F – это аппроксимация по теореме восстановления плотности вероятности достижения рынком дискретно заданных состояний доходности через месяц из момента времени t . Имея функцию плотности распределения, представляется возможным оценка вероятностных характеристик (моментов) распределения [5]. Моменты распределения (математическое ожидание: μ , стандартное отклонение: σ , асимметрия: γ , эксцесс: ξ) вычисляются по известным формулам. Следует также отметить, что моменты риск-нейтрального распределения вероятностей рассчитаны аналогичным образом, где за исходные данные взята матрица P .

2.6. ОЦЕНКА ПРЕДИКТИВНОЙ СИЛЫ ИСТИННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИНДЕКСА S&P 500 В ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕАЛИЗОВАННОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

В контексте поставленной цели повышения уровня надежности оценки ожидаемой волатильности интерес представляет аппроксимация значения истинного стандартного отклонения. На заключительном этапе исследования производится оценка влияния стандартного отклонения в момент времени t на значение реализованной волатильности в момент времени $t + 1$, как в [20].

Формула для расчета реализованной волатильности:

$$(29) RV_t = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \right)^2},$$

где RV_t – реализованная волатильность в момент времени t ; n – количество наблюдений; S_t – значение индекса S&P 500 (пункты) в момент времени t .

Оцениваемые модели представим в таблице 1.

Таблица 1. Определение переменных используемых в прогностических моделях

Используемые переменные	
Зависимая переменная:	
– Реализованная волатильность S&P 500	RV_{t+1} – реализованная волатильность, оцененная на данных индекса S&P 500, частота данных – 1 месяц
Регрессоры:	
– Восстановленная волатильность (recovered volatility)	REV_t – аппроксимация стандартного отклонения из истинного распределения вероятностей (матрица F)
– Риск-нейтральная волатильность (risk-neutral volatility)	RNV_t – аппроксимация стандартного отклонения из риск-нейтрального распределения вероятностей (матрица P)
– Показатель предпочтения внутристранового риска	$REV_t - RNV_t$
Оцениваемые модели	
Модели регрессии	Методы оценки
1: $RV_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 REV_t + \varepsilon_t$	Оценка МНК с применением коррекции Ньюи – Уэста (1) и Elastic Net-регрессия (2)
2: $RV_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 RNV_t + \varepsilon_t$	
3: $RV_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 (REV_t - RNV_t) + \varepsilon_t$	
4: $RV_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 REV_t + \beta_2 (REV_t - RNV_t) + \varepsilon_t$	
5: $RV_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 RNV_t + \beta_2 (REV_t - RNV_t) + \varepsilon_t$	

Следует отметить, что выбор регрессионных моделей неслучаен. Коррекция стандартных ошибок Ньюи – Веста является методом улучшения оценок стандартных ошибок в случае наличия автокорреляции в остатках регрессионной модели [27].

Elastic Net-регрессия в рамках процедуры оценки дополнительно использует инструменты $L1$ - и $L2$ -регуляризации, что способствует снижению вероятности переобучения модели. В рамках настоящего исследования соотношение использования $L1$ - и $L2$ -методов регуляризации определяется равными весами.

Для оценки и сравнения качества представленных в таблице 1 моделей в настоящем исследовании используются метрики R^2 , скорректированный R^2 , AIC и BIC.

Качество оцениваемых моделей будем сравнивать с базовой бенчмарк-моделью для прогнозирования реализованной волатильности HAR-RV (гетерогенная авторегрессионная модель реализованной волатильности):

$$(30) RV_{t+1} = \alpha + \beta^d RV_t^d + \beta^w RV_t^w + \beta^m RV_t^m + \varepsilon_t,$$

где RV_t^d – реализованная волатильность в день t ; RV_t^w – средняя реализованная волатильность за неделю; RV_t^m – средняя реализованная волатильность за месяц.

3. Данные

Для расчетов используются данные о подразумеваемой волатильности колл-опционов, страйках и сроках до погашения на индекс S&P 500, полученные из цепочек опционов (SPX Option Chains). Эти данные представляют собой трехмерную функцию, позволяющую оценивать уровень подразумеваемой волатильности для любой пары страйка и срока до погашения, формируя поверхность подразумеваемой волатильности. Источник данных: optionsDX. Расчеты проводятся на последний торговый день каждого месяца с 01.01.2010 по 01.10.2023, что составляет 163 торговых дня. Выбор данных по опционам на индекс S&P 500 обусловлен его высокой ликвидностью и наилучшей аппроксимацией динамики финансового рынка США.

Также в исследовании используется значение безрисковой ставки. В качестве безрисковой ставки рынка США используется

доходность по 10-летним казначейским облигациям США. Тикер инструмента: «^TNX», поставщик информации: Yahoo Finance.

Для расчета реализованной волатильности применяются исторические котировки индекса S&P 500.

4. Результаты и обсуждение

В этом разделе представлены результаты вычислений. На первом этапе были подготовлены данные по опционам на индекс S&P 500 и сформирована матрица поверхности подразумеваемой волатильности, где каждый элемент — это колл-опцион с определённым страйком и сроком до погашения, при среднем количестве 515 опционов на вычисление. Эффективность применения кубического сплайна в задаче интерполяции следующая:

Доля успешных проверок по вертикальному спреду: 98,18%.

Доля успешных проверок по спреду баттерфляй: 90,30%.

Доля успешных проверок по календарному спреду: 98,18%.

Как видно по результатам, эффективность кубического сплайна довольно высока по всем спредам. Рассчитанные цены колл-опционов на индекс S&P 500 по трем выбранным видам спредов более чем в 90% циклов вычислений удовлетворяют условиям безарбитражности.

На 31.12.2019 интерполированная поверхность подразумеваемой волатильности на индекс S&P 500 выглядит следующим образом (рис. 1).

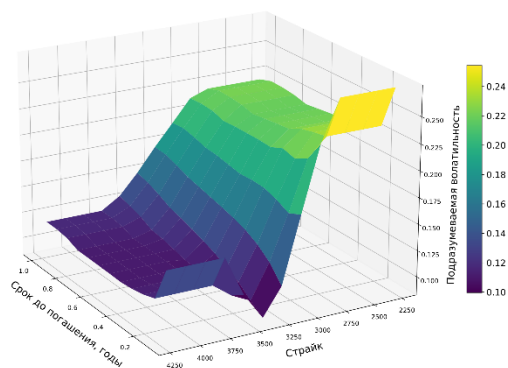


Рис. 1. Интерполированная поверхность подразумеваемой волатильности (дата: 31.12.2019)

Как видно на рис. 1, значение подразумеваемой волатильности имеет свойство увеличиваться по мере уменьшения значения страйка.

После расчета матрицы цен колл-опционов на индекс S&P 500 предстоит этап вычисления матрицы цен состояний и матрицы переходных вероятностей. Интерпретацию значений в матрице переходных вероятностей поясним примером: значение в i -й строке k -го столбца матрицы переходных вероятностей указывает на вероятность перехода доходности базового актива опциона (в данном случае американского фондового индекса S&P 500) из одного состояния в другое через 1 месяц.

Представим вычисленные функции плотности вероятности (рис. 2) и функцию распределения (рис. 3) для центральных строк матриц истинных и риск-нейтральных вероятностей перехода для динамики индекса S&P 500 на 31.12.2019.

Эти распределения позволяют аппроксимировать моменты распределения: математическое ожидание, стандартное отклонение, асимметрию и эксцесс. Далее представим оцененные вероятностные характеристики, начиная с математического ожидания (рис. 4).

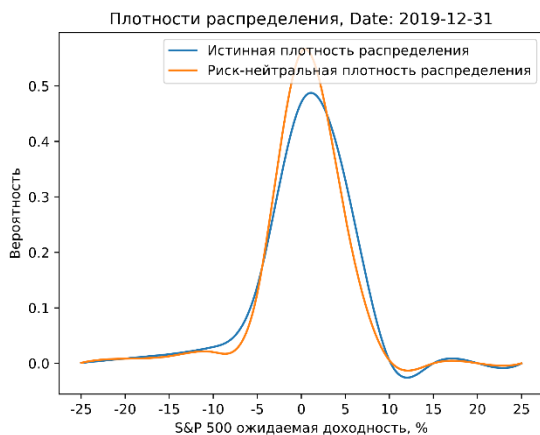


Рис. 2. Аппроксимация восстановленной и риск-нейтральной плотности вероятности (дата: 31.12.2019)



Рис. 3. Аппроксимация восстановленной и риск-нейтральной функции распределения вероятностей (дата: 31.12.2019)

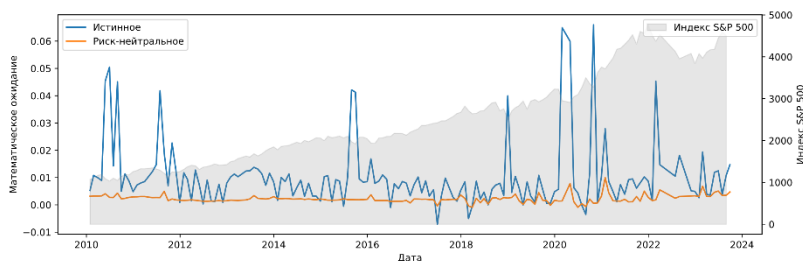


Рис. 4. Аппроксимация восстановленного и риск-нейтрального математического ожидания

По данным рис. 4 наблюдается, что восстановленное математическое ожидание доходности индекса S&P 500 имеет куда более нестабильную динамику, чем риск-нейтральное. Сильный разброс в динамике среднего значения доходности S&P 500 в случае сравнения истинной и риск-нейтральной меры связан с фактором премии за риск. В определенные периоды времени риск аппетит инвесторов повышается, что способствует увеличению ма-

тематического ожидания, полученного по теореме восстановления, чем в случае риск-нейтрального распределения вероятностей.

На следующем рисунке представим динамику стандартного отклонения (рис. 5).

Стандартное отклонение доходности представляет собой меру волатильности. Из рис. 5 видно, что на всем рассматриваемом временном диапазоне волатильность, полученная после применения теоремы восстановления выше, чем риск-нейтральная волатильность. Подобное расхождение в значениях волатильности является примером того, как предпочтения к риску влияют на нестабильность динамики финансовых активов.

Далее отобразим динамику показателей асимметрии и эксцесса (рис. 6–7).

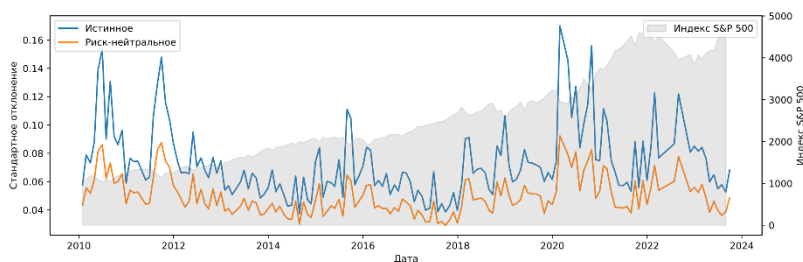


Рис. 5. Аппроксимация восстановленного и риск-нейтрального стандартного отклонения

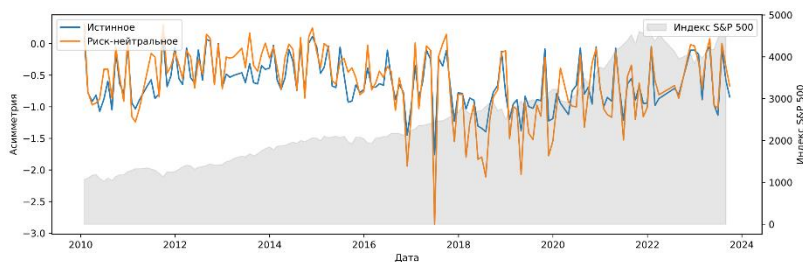


Рис. 6. Аппроксимация восстановленной и риск-нейтральной асимметрии

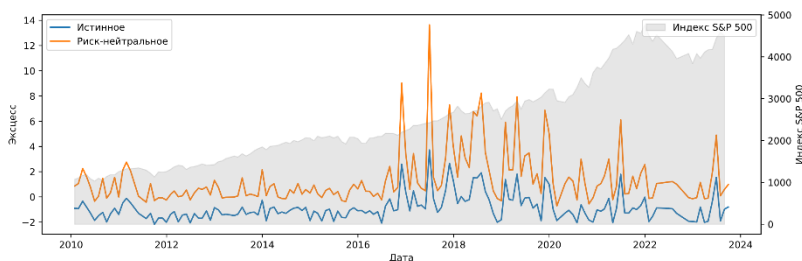


Рис. 7. Аппроксимация восстановленного и риск-нейтрального эксцесса

Следует отметить, что асимметрия имеет тенденцию к нахождению значений в отрицательной зоне, как для риск-нейтрального, так и для истинного распределения вероятностей. В таком случае можно говорить, что хвосты распределения скошены влево относительно пика.

Значения эксцесса в определенные временные периоды имеют тенденцию к возрастанию в область положительных значений, что свидетельствует о более острых пиках и толстых хвостах распределения. Более толстые хвосты указывают на наличие ожиданий об экстремальных значениях доходности в определенное время.

Далее перейдем к рассмотрению результатов построения предиктивных моделей. Как было описано в методологии настоящего исследования, будет производиться моделирование влияния восстановленной и риск-нейтральной волатильности на значение реализованной волатильности будущего месяца. Оценка производится при сравнении двух моделей: оценка МНК с применением коррекции Ньюи – Уэста и Elastic Net-регрессия (таблица 2).

Анализ регрессионных моделей продемонстрировал, что как восстановленная волатильность REV_t , так и риск-нейтральная волатильность RNV_t оказывают статистически значимое влияние на реализованную волатильность в следующем периоде. Оценки коэффициентов для REV_t и RNV_t остаются значимыми на уровне 1% во всех моделях, что подтверждает их положительную связь с будущей реализованной волатильностью.

Сравнительный анализ предложенных моделей показал их превосходство над базовой моделью прогнозирования реализованной волатильности HAR-RV по точности. В частности, модели, включающие REV_t и RNV_t , обеспечивают более высокие значения скорректированного коэффициента детерминации, что свидетельствует о большей предсказательной способности данных факторов. HAR-RV демонстрирует скорректированный R^2 на уровне 21,1%–22,4%, тогда как лучшие модели с REV_t и RNV_t достигают значений 38,2%.

Научно обоснованной среди предложенных моделей является модель 1, поскольку она демонстрирует наивысшее значение скорректированного R^2 , равное 38,2%, что существенно превышает результаты аналогичных исследований. Например, в работе [20] максимальный скорректированный R^2 достигал лишь 22,3% при прогнозировании реализованной волатильности индекса S&P 500 с использованием фактора REV_t и оценкой модели обычным МНК.

Следует отметить, что относительно невысокие значения R^2 объясняются длительным горизонтом прогнозирования. В данном исследовании осуществляется прогноз на месяц вперед, что является максимально возможным периодом предсказания для реализованной волатильности. Если бы прогнозирование осуществлялось на более короткие временные интервалы, значения R^2 были бы выше, что соответствует закономерностям, наблюдаемым в литературе по прогнозированию волатильности.

Сравнение методов оценки параметров регрессионных моделей указывает на превосходство Elastic Net-регрессии перед МНК с коррекцией Ньюи – Уэста. Данный метод позволяет учитывать возможную мультиколлинеарность факторов и предотвращает переобучение модели, что подтверждается более низкими значениями информационных критериев AIC и BIC по сравнению с МНК. В частности, AIC для Elastic Net составляет -1766 против -1322 у МНК, а BIC — -1763 против -1316 соответственно. Таким образом, Elastic Net-регрессия представляет собой более эффективный инструмент для прогнозирования реализованной волатильности, обеспечивая баланс между точностью предсказания и стабильностью оценок параметров модели.

Таблица 2. Результаты оценки регрессионных моделей

Параметр	Оценка МНК с применением коррекции Ньюи – Уэста					Elastic Net-регрессия						
	1	2	3	4	5	HAR- RV	1	2	3	4	5	HAR- RV
Константа	0,001 (0,001)	-0,002 (0,001)	0,004*** (0,001)	0,000 (0,001)	0,000 (0,001)	0,006*** (0,001)	0,003*** (0,000)	0,009*** (0,000)	0,009*** (0,000)	0,009*** (0,001)	0,009*** (0,001)	0,007*** (0,001)
REV_t	0,109*** (0,014)			0,151*** (0,053)			0,003*** (0,000)			0,003** (0,001)		
RNV_t		0,208*** (0,025)			0,152*** (0,053)			0,003*** (0,000)			0,002*** (0,001)	
$REV_t - RNV_t$			0,208*** (0,031)	-0,089 (0,115)	0,063 (0,065)			0,003*** (0,000)	0,000 (0,001)	0,001 (0,001)		
RV_{t-1}						0,110*** (0,010)						0,113*** (0,009)
RV_{t-5}						0,117*** (0,024)						0,125*** (0,021)
RV_{t-21}						0,007*** (0,029)						0,009** (0,035)
R^2	0,386	0,383	0,355	0,389	0,389	0,217	0,386	0,383	0,355	0,386	0,389	0,235
Скоп. R^2	0,382°	0,379	0,351	0,381	0,381	0,211	0,382°	0,379	0,350	0,378	0,381	0,224
AIC	-1322	-1321	-1314	-1320	-1320	-1256	-1766	-1765	-1758	-1764	-1765	-1594
BIC	-1316	-1315	-1308	-1311	-1311	-1252	-1763	-1762	-1756	-1758	-1759	-1589
Примечание:	* соответствует значению $p-value < 0,10$ ** соответствует значению $p-value < 0,05$ *** соответствует значению $p-value < 0,01$ ° соответствует модели с наивысшим значением скор. R^2											

Примечание:

* соответствует значению $p\text{-value} < 0,10$

** соответствует значению $p\text{-value} < 0,05$

*** соответствует значению $p\text{-value} < 0,01$

° соответствует модели с наивысшим значением скорр. R^2

5. Заключение

В результате исследования подчеркивается важность теоремы восстановления, предложенной Россом в 2015 году, для анализа рыночной волатильности. Эмпирические данные показывают, что волатильность, аппроксимированная с использованием теоремы восстановления в сочетании с риск-нейтральной волатильностью, эффективно объясняет будущую реализованную волатильность индекса S&P 500 на горизонте 1 месяц.

1. Результаты подтверждают значимость теоремы восстановления и демонстрируют, что методология точно аппроксимирует истинные ожидания рынка и предпочтения риска.

2. Исследование открывает новые возможности для изучения истинного и риск-нейтрального распределений вероятностей для финансовых активов, включая анализ более высоких моментов. Прогностическая способность переменных, полученных с использованием теоремы, имеет практическое значение для стратегий портфельного управления и анализа рисков.

Литература

1. БРОНЕВИЧ А.Г., ЛЕПСКИЙ А.Е. *Обозрение прикладной и промышленной математики*. – М.: Изд-во ТВП, 2000. – Т. 7, №2. – С. 322–323.
2. ПРОХОРОВ Ю.В. *Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей* // Теория вероятностей и ее применения. – 1956. – Т. 1, №2. – С. 177–238.
3. ПРОХОРОВ Ю.В., КОЛНОГОРОВ А.В., ХОХЛОВ В.И. *Четырнадцатый всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике (осенняя сессия) 29 сентября-5 октября 2013 г. Великий Новгород Научные доклады* // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2013. – Т. 20, №4. – С. 525–574.
4. AMIR A. et al. *Can we recover the cover?* // *Algorithmica*. – 2019. – Vol. 81, No. 7. – P. 2857–2875.

5. ANAMIZU K. *Ross Recovery under the Tree Model and Its Application to Risk Management* : Dis. – Tokyo Metropolitan University, 2018.
6. AUDRINO F., HUITEMA R., LUDWIG M. *An empirical implementation of the Ross recovery theory as a prediction device* // Journal of Financial Econometrics. – 2021. – Vol. 19, No. 2. – P. 291–312.
7. BAKER N.L., HAUGEN R.A. *Low risk stocks outperform within all observable markets of the world* // Available at SSRN 2055431. – 2012.
8. BAKSHI G., CHABI-YO F., GAO X. *A recovery that we can trust? Deducing and testing the restrictions of the recovery theory* // The Review of Financial Studies. – 2018. – Vol. 31, No. 2. – P. 532–555.
9. BLACK F., SCHOLES M. *The pricing of options and corporate liabilities* // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81, No. 3. – P. 637–654.
10. BLISS R.R., PANIGIRTZOGLOU N. *Option-implied risk aversion estimates* // The Journal of Finance. – 2004. – Vol. 59, No. 1. – P. 407–446.
11. BOROVIČKA J., HANSEN L.P., SCHEINKMAN J.A. *Mispecified recovery* // The Journal of Finance. – 2016. – Vol. 71, No. 6. – P. 2493–2544.
12. BREEDEN D.T., LITZENBERGER R.H. *Prices of state-contingent claims implicit in option prices* // Journal of business. – 1978. – P. 621–651.
13. CARR P., YU J. *Risk, return, and Ross recovery* // The Journal of Derivatives. – 2012. – Vol. 20, No. 1. – P. 38–59.
14. CHEN A., DYBVIG P.H. *Optimal casualty insurance and repair in the presence of a securities market* // Available at SSRN 1344239. – 2013.
15. COX J.C., ROSS S.A. *The valuation of options for alternative stochastic processes* // Journal of Financial Economics. – 1976. – Vol. 3, No. 1–2. – P. 145–166.
16. DUFFIE D. *Dark markets: Asset pricing and information transmission in over-the-counter markets* // Princeton University Press, 2012. – Vol. 6.

17. DUFFIE D. *Stochastic Equilibria: Existence, Spanning Number, and the No Expected Financial Gain from Trade Hypothesis* // *Econometrica: Journal of the Econometric Society*. – 1986. – P. 1161–1183.
18. FAMA E.F. *Random walks in stock market prices* // *Financial Analysts Journal*. – 1995. – Vol. 51, No. 1. – P. 75–80.
19. FIGLEWSKI S. *Risk-neutral densities: A review* // *Annual Review of Financial Economics*. – 2018. – Vol. 10. – P. 329–359.
20. GAGNON M.H., POWER G.J., TOUPIN D. *Forecasting market index volatility using Ross-recovered distributions* // *Quantitative Finance*. – 2022. – Vol. 22, No. 2. – P. 255–271.
21. HÄRDLE W., HLÁVKA Z. *Dynamics of state price densities* // *Journal of Econometrics*. – 2009. – Vol. 150, No. 1. – P. 1–15.
22. HAUGEN R.A., BAKER N.L. *Commonality in the determinants of expected stock returns* // *Journal of financial economics*. – 1996. – Vol. 41, No. 3. – P. 401–439.
23. JACKWERTH J.C., MENNER M. *Does the Ross recovery theory work empirically?* // *Journal of Financial Economics*. – 2020. – Vol. 137, No. 3. – P. 723–739.
24. KOSTAKIS A., PANIGIRTZOGLU N., SKIADOPOULOS G. *Market timing with option-implied distributions: A forward-looking approach* // *Management Science*. – 2011. – Vol. 57, No. 7. – P. 1231–1249.
25. LO A.W. *Financial econometrics* // *International Library of Financial Econometrics*, Forthcoming. – 2007.
26. MEYER C.D. *Matrix analysis and applied linear algebra* // *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2023.
27. NEWEY W.K., WEST K.D. *A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix* // *Applied econometrics*. – 2014. – Vol. 33, No.1. – P. 125–132.
28. QIN L., LINETSKY V., NIE Y. *Long forward probabilities, recovery, and the term structure of bond risk premiums* // *The Review of Financial Studies*. – 2018. – Vol. 31, No. 12. – P. 4863–4883.
29. ROSS S.A. *Options and efficiency* // *The Quarterly Journal of Economics*. – 1976. – Vol. 90, No. 1. – P. 75–89.
30. ROSS S. *The recovery theory* // *The Journal of Finance*. – 2015. – Vol. 70, No. 2. – P. 615–648.

31. SØRENSEN H. *Simulated likelihood approximations for stochastic volatility models* // Scandinavian Journal of Statistics. – 2003. – Vol. 30, No. 2. – P. 257–276.

FORECASTING THE REALIZED VOLATILITY BASED ON INFORMATION EXTRACTED FROM THE ROSS RECOVERY THEOREM

Dmitry Patlasov, Perm State University, Perm, assistant
(dmitriypatlasov@gmail.com)

Abstract. This article discusses an approach to predicting the realized volatility of the S&P 500 index using data extracted from options due to the Ross recovery theorem. The purpose of this study is to investigate the possibility of using the indicators obtained after applying the Ross recovery theorem as exogenous factors in the forecasting model of realized volatility of financial instruments. The methodology used to achieve the research objective eliminates the need to use historical quotations of financial assets, focusing solely on options. The paper compares the accuracy of forecasting realized volatility between the proposed models and the basic HAR-RV approach. Empirical results have shown that the proposed approach provides a higher accuracy of predictions. The approach used in the Ross recovery theorem based on the approximation of the distribution density function of the underlying option asset allows for more accurate consideration of market participants' expectations and their risk preferences, which can become statistically significant factors in forecasting models of various financial indicators. The results of the study can be used to assess systematic risk, predict the likelihood of corrections and crises in financial markets.

Keywords: volatility, distribution of profitability of financial assets, recovery theorem, probabilistic characteristics, forecasting.

УДК: 004.942

ББК: 30в6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.И. Гераськиным.*

*Поступила в редакцию 11.11.2024.
Опубликована 31.03.2025.*

МАКСИМИЗАЦИЯ ЭКОНОМИИ ФИНАНСОВЫХ РЕСУРСОВ В РЕЗУЛЬТАТЕ БАЛАНСИРОВКИ ПОТОЧНОЙ ЛИНИИ СБОРКИ НА ПРЕДПРИЯТИЯХ ДИСКРЕТНОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ

Щербак А. В.¹, Овчинников П. В.², Погорелова Л. А.³
*(Южно-Российский государственный политехнический
университет (НПИ) имени М.И. Платова, Новочеркасск)*
Савельчев П. П.⁴

(АО УК «Брянский машиностроительный завод», Брянск)

Рассматриваются вопросы расчета объема высвобождаемых финансовых ресурсов, а также достижение максимального экономического эффекта посредством постановки математической задачи оптимизации при рациональном сочетании параметров, регулирующих течение производственных процессов на сборочном производстве. Методологическую базу исследования составляют теоретические и практические данные по организации сборочного производства, экономике предприятия, математическим методам решения оптимизационных задач. В рамках исследования были реализованы задачи по анализу особенностей функционирования поточной линии сборки; обозначены направления, которые обуславливают формирование высвобождения финансовых ресурсов в результате проведения мероприятий по оптимизации производственного процесса, а также разработаны рекомендации для формирования универсальной методики расчета суммарного экономического эффекта при балансировке поточной линии сборки, сформулирована задача оптимизации, направленная на максимизацию экономического эффекта при рациональном подборе контролируемых параметров работы линии сборки. Приведен общий управленческий подход к балансировке линии сборочного производства. В результате балансировки поточной линии сборки выравнивается производственный такт, что в свою очередь обеспечивает, во-первых, снижение уровня межоперационных заделов в результате сопряжения технологических операций по производственной мощности, во-вторых, способствует сокращению производственного цикла изготовления продукции.

Ключевые слова: ускорение оборачиваемости оборотных средств, управление материальными ресурсами, снижение межоперационных

¹ Александр Васильевич Щербак, студент (alexandershcherbak@mail.ru).

² Петр Вячеславович Овчинников, к.э.н., доцент, декан факультета инноватики и организации производства (pvo78@yandex.ru).

³ Людмила Александровна Погорелова, к.э.н., доцент (pogorelova_la@npi-tu.ru).

⁴ Павел Петрович Савельчев, директор по экономике и финансам (savelchev00@bk.ru).

заделов, снижение объемов незавершенного производства, оптимизация производственного процесса, максимизация прибыли.

1. Введение

В настоящее время при определении уровня финансовой устойчивости и эффективности функционирования финансового механизма предприятий, имеющих продолжительный по времени производственный цикл изготовления изделий, значительное внимание уделяется анализу объемов незавершенного производства.

В общем смысле, незавершённое производство (далее НЗП) – продукция, не прошедшая всех стадий технологического процесса [10]. Как правило, предприятия, имеющие незавершённое производство, относятся к таким отраслям как машиностроение, легкая и пищевая промышленность, а также к другим, производство продукции на которых занимает достаточно долгий календарный период времени.

Оптимизация производственных запасов и уменьшение объемов незавершённого производства играют ключевую роль в эффективном управлении производством [4]. НЗП фактически представляет собой временно иммобилизованные финансовые ресурсы предприятия, поскольку не могут быть быстро превращены в ликвидные финансовые инструменты. НЗП занимает существенную часть оборотных активов, представляя собой одну из наименее ликвидных их частей. Кроме того, рост величины НЗП непосредственно сказывается на размерах затрат на производство продукции, а также снижению её конкурентоспособности. Уменьшение объемов незавершённого производства в целом позволяет повысить экономические показатели промышленных предприятий.

В настоящий момент существует достаточное количество инструментов и способов, позволяющих уменьшить объёмы НЗП на предприятиях промышленного характера [3]. В качестве таковых применяют инструменты бережливого производства, осуществляют модернизацию предприятий новым высокотехнологичным и высокопроизводительным оборудованием, совершен-

ствуют технологию производства изделий. Так как незавершенное производство напрямую зависит от производственного цикла продукции, следовательно, необходимы в том числе определённые организационно-технические мероприятия, направленные на сокращение длительности производственного цикла. Уменьшение объемов НЗП должно приводить к высвобождению финансовых ресурсов. Таким образом, актуальность настоящего исследования определяется тем, что для принятия управленческих решений необходимо иметь представление относительно объемов высвобождаемых финансовых ресурсов в результате проведения оптимизационных мероприятий. Также в условиях сложившихся требований к ускорению развития производственных систем руководство современной российской компании должно оперировать методическими рекомендациями, позволяющими оценить эффективность реализации мероприятий по сокращению затрат времени на производство продукции, с точки зрения экономии финансовых ресурсов [18].

Это, в частности, необходимо учитывать при реализации национальных проектов, в том числе нацпроект «Производительность труда» [8].

Цель исследования – разработать методические рекомендации для оценки и достижения максимального экономического эффекта, выражающегося в высвобождении финансовых ресурсов в результате сокращения длительности производственного цикла посредством балансировки поточной линии на сборочном производстве.

Для достижения цели были поставлены и решены следующие задачи:

- проанализированы особенности функционирования поточной линии сборки;
- определены основные мероприятия при проведении балансировки поточной линии;
- выделены основные направления, которые способствуют снижению материальных затрат при сокращении процесса сборки изделий и сопряжения операций сборочного процесса по производственной мощности;
- разработаны методические рекомендации для определения экономического эффекта по определению высвобождения

финансовых ресурсов в результате изменений при трансформации производственного процесса сборки;

– сформулирована задача максимизации экономического эффекта в множестве заданных параметрах структурных элементов производственной системы.

2. Методология исследования

Основная проблема длительного производства продукции заключается в неравномерности производственного процесса, которая приводит к долгим перегрузкам или простоям оборудования и рабочего персонала [7]. Таким образом, целесообразно разрабатывать и внедрять мероприятия, направленные на выравнивание производственного процесса посредством сопряжения операций по производственной мощности. Рассмотрим далее поточную линию сборки как элемент производственного процесса. Для линии сборки можно говорить о выравнивании такта, т.е. периода времени между выпусками изделий с линии. Для эффективной работы линии выходной такт должен соответствовать интенсивности поступления изделий на линию и ритмичности перемещения на ней. Это достигается балансировкой линии, в частности – внедрением инструментов бережливого производства, что способствует более равномерной загрузке оборудования и рабочего персонала и, как следствие, обеспечивает [2]:

- 1) сокращение длительности производственного цикла продукции;
- 2) рост производительности и качества продукции;
- 3) снижение затрат на производство.

Балансировка линии сборки представляет собой процесс распределения работ между рабочими местами или участками, таким образом, чтобы операторы имели приблизительно одинаковую рабочую загрузку, которая соответствует времени такта производства [13]. На рис. 1 выделены основные этапы балансировки поточной линии на сборочном производстве.

Балансировка поточной линии сборки включает себя следующие этапы:

1. Расчет необходимого времени такта.



Рис. 1. Алгоритм проведения балансировки поточной линии сборки

2. Проведение пооперационных хронометражей и построение критичного пути.

3. Расчет необходимого количества постов на линии (т.е. рабочих мест либо участков, на которых выполняются определенные сборочные операции).

4. Распределение операций между постами.

5. Расчет количества основных рабочих и загрузки линии.

6. Формирование шаблона карт последовательности выполнения операций (ПВО).

7. Анализ загрузки рабочих на сборочной линии.

8. Разработка возможных сценариев балансировки.

Таким образом, балансировка поточной линии на сборочном производстве на всех стадиях технологического процесса посредством минимизации затрат времени и ресурсов позволяет достичь максимальной эффективности производственного процесса, что ведёт к наращиванию объема производства с наименьшими затратами, а также улучшению финансовых показателей предприятия [1].

Повышение уровня сбалансированности операций на поточной линии сборки обеспечивается посредством реализации мероприятий по каждому из направлений, представленных в таблице 1 [15]:

Реализация мероприятий, представленных в таблице 1, обеспечивает повышение уровня сбалансированности операций на поточной линии, что, в свою очередь, обуславливает особый экономический эффект, формируемый за счет более рационального управления оборотными средствами предприятия [9].

Таблица 1. Мероприятия, направленные на повышение уровня сбалансированности операций на поточной линии сборки

Направление	Мероприятия, способствующие повышению уровня сбалансированности поточной линии
Инфраструктура (суммарный параметр по направлению <i>I</i>)	– загрузка рабочего в рамках одной позиции не менее 90% от времени такта; – запуск и закрытие технологических операций сборочной позиции выполняются в 100% соответствии с картой ПВО; – общее плановое время сборки не превышает времени 110% времени критичного пути; – проводится непрерывный мониторинг эффективности работы оборудования; – обеспечивается доступность и наглядность конструкторской и технической документации; – ведется учет инструмента.
Планирование (суммарный параметр по направлению <i>P</i>)	– расчет годового времени такта; – автоматизация формирования внутренних заказов и заданий на смену; – контроль фактического времени выполнения технологических операций и сборки; – автоматизированное закрытие нарядов и списание материалов; – анализ внеплановых простоев линии; – контроль уровня незавершенного производства.
Снабжение – склад – логистика (суммарный параметр по направлению <i>SL</i>)	– прямые поставки комплектующих на линию сборки от крупнейших поставщиков; – формирование комплектов ТМЦ разных поставщиков на буферных складах заводов; – формирование комплектов на складе поставщика/на территории цеха-поставщика; – поставка деталей на линию в 100% соответствии с картой ПВО и с учетом времени проведения входного контроля; – учет местонахождения комплектации в режиме реального времени.
Качество (суммарный параметр по направлению <i>K</i>)	– соответствие компетенций и квалификации работника проводимым работам; – контроль качества покупной продукции осуществляет производитель/поставщик; – внедрение системы бездефектного производства.

Направление	Мероприятия, способствующие повышению уровня сбалансированности поточной линии
Персонал (суммарный параметр по направлению T)	– уровень освоения компетенций одного сотрудника в рамках сборочной позиции - не менее 50%; – в рамках сборочной позиции отсутствуют критичные с точки зрения компетенций операции; – уровень внедренных предложений по улучшению для каждой сборочной позиции = 2 предложения в год на 1 основного рабочего;

Отметим тот факт, что прерывная поточная сборочная линия (ППСЛ) на сборочном производстве преобразуется в непрерывно-поточную сборочную линию (НПСЛ) [19]. Данный факт планируется использовать для расчета экономического эффекта от снижения объемов незавершенного производства и сокращения длительности производственного цикла сборки изделия.

В результате проведения мероприятий, представленных в таблице 1, достигается максимальная сбалансированность операций на поточной линии сборки: длительность всех технологических операций становится примерно равной, а также соответствует такту поточной линии.

Рассмотрим далее общий методический подход к определению размера высвобождаемых финансовых ресурсов в результате балансировки поточной линии сборки на примере предприятия дискретного машиностроения.

Во-первых, при выравнивании такта поточной линии сборки и синхронизации смежных операций по производственной мощности минимизируются затраты на формирование межоперационных заделов. Рассмотрим структурные составляющие задела на линии поточной сборки до и после внедрения мероприятий.

До внедрения мероприятий по синхронизации технологических операций, когда отсутствует кратность длительности операций такту, и для поддержания непрерывности процесса на операциях помимо технологического, транспортного и резервного задела дополнительно создается межоперационный задел [6], динамика которого в течение всего периода работы поточной линии

между смежными операциями рассчитывается следующим образом:

$$(1) Z_{об.i,i+1} = \frac{T_j \times C_i}{t_{шт.i}} - \frac{T_j \times C_{i+1}}{t_{шт.i+1}},$$

где T_j – продолжительность j -го частного периода между смежными операциями при неизменном числе работающих единиц оборудования, мин; C_i и C_{i+1} – число единиц оборудования соответственно на i -й и $(i + 1)$ -й операциях в течение частного периода времени T_j ; $t_{шт.i}$ и $t_{шт.i+1}$ – нормы штучного времени соответственно на i -й и на $(i + 1)$ -й операциях технологического процесса, мин.

Для расчета экономического эффекта, который в данном случае будет выражен в экономии финансовых ресурсов на объемы незавершенного производства, находящихся в межоперационных заделах в каждый момент производственного процесса, обратимся к методике, представленной в работе [5]. В общем виде определение среднего межоперационного задела между каждыми двумя смежными операциями можно представить алгоритмом, приведенном на рис. 2.

На основе рассчитанных средних величин межоперационных заделов в настоящем исследовании предлагается определение экономического эффекта в результате их минимизации при проведении мероприятий по балансировке поточной линии сборки.

Стоимостной размер среднего межоперационного задела между каждыми смежными операциями определяется следующим образом:

$$(2) MO_{i,i+1} = C_{ki} \times Z_{ср.об.и},$$

где C_{ki} – нараставаемая (кумулятивная) стоимость единицы продукции на выходе с i -й операции процесса сборки изделия, руб.

Суммарный экономический эффект при минимизации межоперационных заделов в результате балансировки поточной линии сборки представляет собой сумму стоимостного выражения средних межоперационных заделов по всей технологической цепочке сборки изделия:

$$(3) \Xi_{мо} = \sum_{i=1}^n MO_{i,i+1},$$

где n – количество операций сборочного процесса.

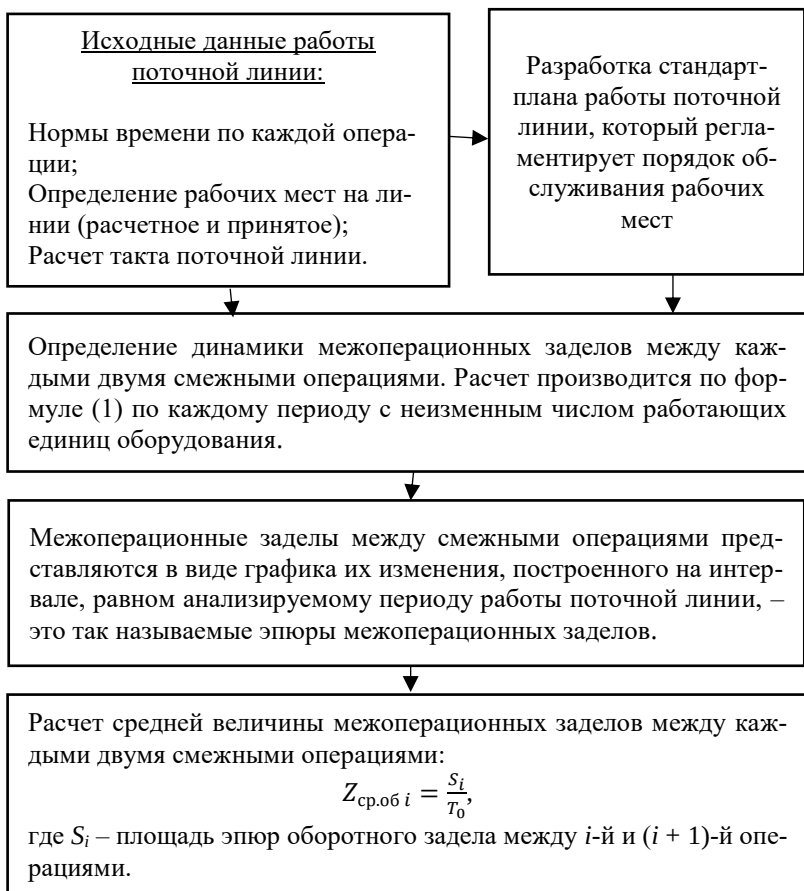


Рис.2. Алгоритм расчета среднего межоперационного задела между смежными операциями на поточной линии

Отметим также, что в результате проведения мероприятий по балансировке поточной линии сборки помимо синхронизации операций по производственной мощности наблюдается сокращение времени процесса сборки изделия, которое формирует экономию финансовых ресурсов на основе ускорения оборачиваемости оборотных средств предприятия.

Методика расчета экономической эффективности в результате сокращения длительности производственного цикла сборки

изделий на примере предприятия дискретного машиностроения представлена в работе [12]. Обобщая практические расчеты, представленные в вышеуказанной работе, последовательность действий для определения экономического эффекта в результате ускорения оборачиваемости оборотных средств можно представить в виде следующих этапов:

1. Расчет входных параметров, в том числе:

1.1. Длительность производственного цикла сборки изделия до и после внедрения балансирующих мероприятий ($T_{ц}$, $T_{ц}'$).

1.2. Стоимость продукции по полной себестоимости (ВП).

1.3. Нормативный фонд времени работы оборудования в течение периода (Φ_n).

2. Определение коэффициента оборачиваемости оборотных средств до и после проведения мероприятий по балансировке [21]:

$$(4) K_{об} = \frac{\Phi_n}{T_{ц}}.$$

3. Расчет на основе коэффициентов оборачиваемости потребности в оборотных средствах до и после проведения мероприятий по балансировке поточной линии сборки:

$$(5) COC = \frac{ВП}{K_{об}}$$

При балансировке поточной линии сборки наблюдается сокращение длительности производственного цикла изготовления изделия. В результате за меньший период времени создается аналогичная прибавочная стоимость. Таким образом, экономический эффект в результате ускорения оборачиваемости оборотных средств представляет собой разницу в потребности в оборотных средствах до и после проведения мероприятий по балансировке поточной линии, оцениваемый на объем продукции по полной себестоимости:

$$(6) \Delta_{об} = \frac{ВП \times T_{ц}}{\Phi_n} - \frac{ВП \times T_{ц}'}{\Phi_n} = \frac{ВП}{\Phi_n} \times (T_{ц} - T_{ц}').$$

Рис. 3 наглядно демонстрирует структурные составляющие каждого из обозначенных направлений при оценке экономической эффективности мероприятий по балансировке поточной линии сборки.

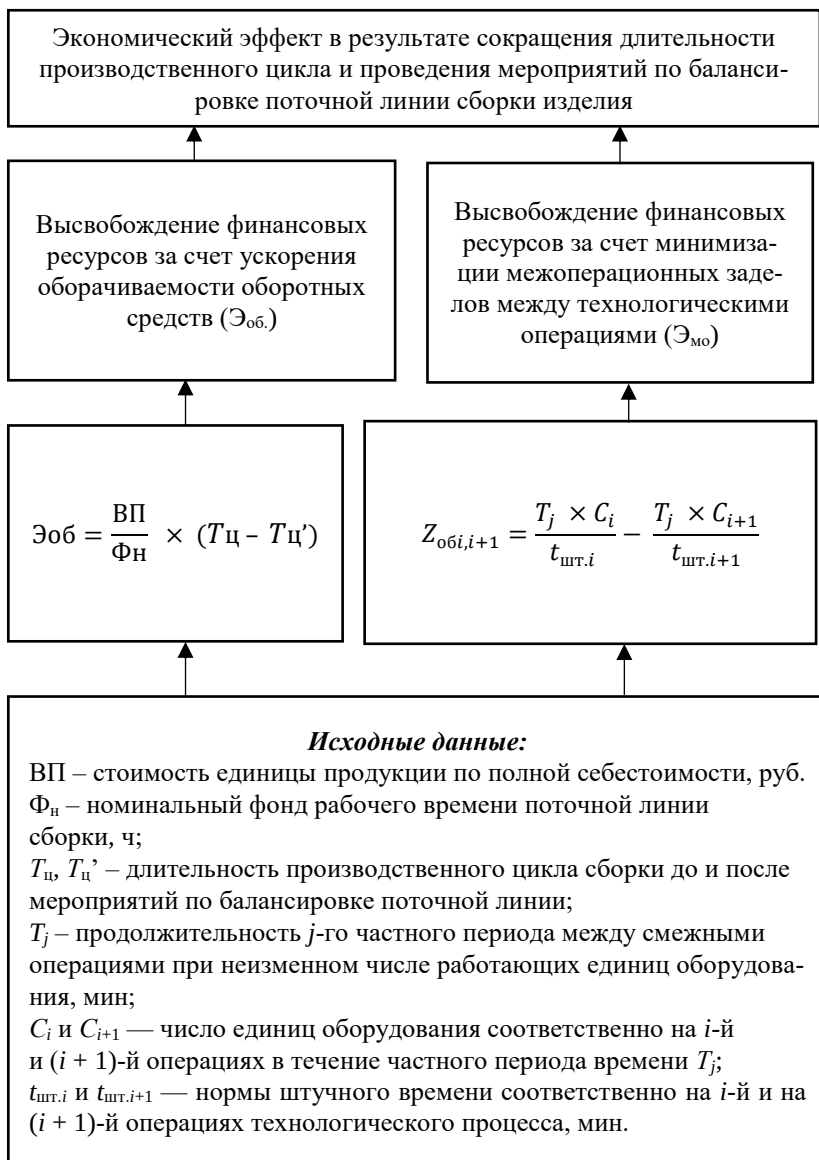


Рис.3. Алгоритм оценки экономического эффекта в результате изменения длительности производственного цикла сборки изделия

Таким образом, потенциальный эффект от снижения объемов незавершенного производства в производственном процессе представляет собой суммарный эффект по следующим направлениям:

1. Минимизация межоперационных заделов при балансировке поточной сборочной линии по всей цепочке технологических операций, что выражается в абсолютном высвобождении финансовых ресурсов, затраченных на их формирование.

2. Ускорение оборачиваемости при сокращении длительности производственного цикла изготовления изделия, т.е. тот же самый объем готовой продукции формируется за счет меньшего объема оборотных фондов. Экономический эффект достигается за счет сокращения потребности в оборотных средствах на изготовление аналогичного объема продукции.

В соответствии с алгоритмом, представленным на рис. 3 суммарный экономический эффект вследствие реализации мероприятий по балансировке сборочной линии, определяется следующим образом:

$$(7) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_{об} + \mathcal{E}_{мо} = \frac{ВП \times \Delta T_{ц}}{\Phi_n} + \sum_{i=1}^n MO_{i,i+1} .$$

На основании формулы (7), представляющей расчет суммарного экономического эффекта от мероприятий по балансировке поточной линии, можно сделать вывод, что основным параметром, который влияет на его величину, является параметр сокращения длительности производственного цикла ($\Delta T_{ц}$). В свою очередь, при сокращении времени производства изделия посредством балансировки смежных операций также происходит сокращение расходов на создание межоперационных заделов ($\sum_{i=1}^n MO_{i,i+1}$), которые поддерживают непрерывность процесса сборки изделий. Показатели выпуска продукции (ВП) и номинального фонда рабочего времени (Φ_n) являются постоянными до и после проведения мероприятий.

С целью получения максимального эффекта от мероприятий по балансировке поточной линии и сокращения длительности производственного процесса сборки изделия, возникает необходимость оптимизации структурных составляющих мероприятий, способствующих повышению уровня сбалансированности поточной линии (изложены в таблице 1).

Стандартное математическое представление задач оптимизации имеет следующий вид:

$$(8) \quad f(x) \Rightarrow \max_{x \in U}(\min)$$

где $f(x)$ – целевая функция; U – допустимое множество, заданное ограничениями на управляемые переменные.

Таким образом, целевая функция суммарного экономического эффекта (Э) при реализации мероприятий по балансировке поточной линии сборки должна стремиться к своему максимальному значению.

В рамках настоящего исследования задача оптимизации сводится к максимизации целевой функции в множестве элементов каждого состояния системы, представленных в таблице 1.

На основании таблицы 1 сформируем матрицу параметров по направлениям повышения уровня сбалансированности поточной линии сборки:

$$(9) \quad X = \begin{pmatrix} I_1 & P_1 & SL_1 & K_1 & T_1 \\ I_2 & P_2 & SL_2 & K_2 & T_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_n & P_n & SL_n & K_n & T_n \end{pmatrix},$$

где X – множество параметров каждого состояния, образуемых производственной системой.

Следовательно, сокращение длительности производственного цикла (ΔT_u) зависит от оптимальной комбинации параметров I, P, SL, K, T .

Стоит отметить, что реализация мероприятий по балансировке поточной линии, представленных в таблице 1, сопровождается определенными расходами, включающими, например, затраты на приобретение дополнительного оборудования, привлечение дополнительных работников на операции, освоение персоналом дополнительных компетенций.

Таким образом, вид целевой функции в рамках решения задачи оптимизации в настоящем исследовании можно представить следующим образом:

$$(10) \quad f(x) = (\mathcal{E}_i - C_i) \Rightarrow \max,$$

где $\mathcal{E}_i$ – суммарный экономический эффект от снижения объемов незавершенного производства при $\Delta T_{цi}$; C_i – затраты на реализацию мероприятий по балансировке поточной линии сборки при $\Delta T_{цi}$, $i = 1, \dots, n$.

Дополнительно в рамках решения задачи оптимизации требуется проверка следующего условия:

$$(11) (C_i) \leq \mathcal{E}_i.$$

Таким образом, для решения задачи оптимизации перспективу исследования представляют следующие направления:

- разработка модели по определению структуры и характера затрат на проведение мероприятий по балансировке поточной линии сборки;
- разработка модели регрессионной зависимости длительности производственного цикла от мероприятий, способствующих повышению уровня сбалансированности поточной линии.

Данные направления представляют собой отдельные подзадачи, требующие дополнительных эмпирических наблюдений в условиях реального производственного процесса.

3. Выводы и результаты

Результаты настоящего исследования позволяют сформировать методику для определения количественных показателей эффективности внедрения мероприятий по оптимизации производственного цикла продукции посредством использования инструментов бережливого производства [14], что позволит руководству производственных предприятий активно акцентировать внимание на совершенствовании элементной структуры организации производственного процесса, а также оценивать и максимизировать финансовый результат от внедряемых производственных мероприятий при внедрении инструментов бережливого производства.

Реализация мероприятий, направленных на сокращение длительности производственного цикла, напрямую взаимосвязана с размером экономического эффекта, получаемого при оптимальном соотношении параметров мониторинга работы поточной линии сборки посредством решения задачи математической опти-

мизации. Максимальный потенциал синергизации экономического эффекта возможен при консолидации исследований в области математической оптимизации параметров мониторинга и аспектов энтропийного управления сборочным производством, рассмотренных в работе [11], что и представляет перспективу дальнейших исследований.

При этом необходимо понимание оптимального сокращения длительности производственного цикла, дающего максимальный экономический эффект, что представляет собой весьма перспективное решение в условиях масштабного внедрения технологий искусственного интеллекта в производственные процессы [18].

Сокращение длительности производственного цикла позволяет:

1) снизить потребность предприятия в оборотных средствах, т.е. использование аналогичного объема оборотных средств позволяет произвести больший объем продукции;

2) соответственно, снижение потребности предприятия в запасах позволяет уменьшить потребность в складских помещениях для хранения сырья, полуфабрикатов и незавершённого производства [20];

3) увеличить эффективность использования основных производственных фондов предприятия;

4) снизить себестоимость и увеличить конкурентоспособность продукции;

5) осуществлять мероприятия по модернизации основных производственных фондов.

В заключение хотелось бы указать, что в рамках реализации национального проекта «Производительность труда», который успешно внедряется на отечественных предприятиях с 2019 года и предполагает использование инструментов бережливого производства [16] при оптимизации производственного процесса с целью повышения производительности труда, разработанные в настоящем исследовании методические рекомендации приобретают особую актуальность, так как позволят собственнику наглядно оценить размер высвобождаемых финансовых ресурсов в результате выполненных мероприятий.

Литература

1. АЛПАТОВ Ю.Н. *Математическое моделирование производственных процессов*. – С.-Пб.: Лань, 2023. – 136 с. // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/330485> (дата обращения: 13.08.2024).
2. АРИСТОВА Н.И. *О повышении эффективности сборочной линии* // Сборка в машиностроении, приборостроении. – 2020. – №10. – С. 440–443.
3. АРТАМОНОВА Ю.С., ЛАПИН Р.Д. *Оптимизация себестоимости промышленной продукции на основе внедрения бережливого производства* // Друкеровский вестник. – 2023. – №1(51). – С. 86–95. // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/journal/issue/335789> (дата обращения: 28.08.2024).
4. ГИЁСОВ У. *Понятие производственного потенциала и основные виды ресурсов, применяемых в производстве* // Бюллетень науки и практики. – 2020. – №3. – С. 279–288. // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/journal/issue/312707> (дата обращения: 25.07.2024).
5. ЛАВРОВ Г.И. *Организация производства и менеджмент в машиностроении: учебное пособие*. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2014. – 256 с. // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/55433> (дата обращения: 05.09.2024).
6. МУРАХТАНОВА Н.М., АЛЕКСАНДРОВА Н.В., БОРГАРДТ Е.А. и др. *Оперативное управление производством: учебник* // Под общ. ред. Н.М. Мурахтановой. – Тольятти: ТГУ, 2014. – 332 с. // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/139795> (дата обращения: 23.07.2024).
7. НАЗАРЕНКО А.В., ЗАПОРОЖЕЦ Д.В./, КЕНИНА Д.С. и др. *Производственный менеджмент: учебное пособие*. – Ставрополь: СтГАУ, 2017. – 140 с. // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/107210> (дата обращения: 11.08.2024).

8. *Национальный проект «Производительность труда» / Министерство экономического развития Российской Федерации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.economy.gov.ru/material/directions/nacionalnyy_proekt_proizvoditelnost_truda/ (дата обращения: 30.08.2024).*
9. ОРЛОВ В.Н. *Использование инструментов бережливого производства для повышения эффективности производства // Вестник Курганского государственного университета. Серия Технические науки. – 2013. – № 29. – С. 93–95. // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/journal/issue/290328> (дата обращения: 20.08.2024).*
10. ПОГОРЕЛОВА Л.А. *Диагностика финансово-хозяйственной деятельности предприятия. – Новочеркасск: Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова, 2023. – 87 с. – EDN BSSERT.*
11. ПОГОРЕЛОВА Л.А., ОВЧИННИКОВ П.В. *Методика энтропийного управления сборочным производством // Вестник Томского государственного университета. Экономика. – 2024. – №68. – С. 235–253. – DOI 10.17223/19988648/68/12. – EDN IYIPSY.*
12. ПОГОРЕЛОВА Л.А., ОВЧИННИКОВ П.В., САВЕЛЬЧЕВ П.П. *Оценка экономического эффекта в результате ускорения оборачиваемости оборотных средств при балансировке сборочного производства // Друкеровский вестник. – 2024. – №4(60). – С. 182–189.*
13. РОМАНЕНКО В.И., ЯРМАК Ю.Ю. *Проектирование механосборочных участков и цехов: учебное пособие. – Минск: БНТУ, 2022. – 57 с. // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/325676> (дата обращения: 13.08.2024).*
14. ШАТЬКО Д.Б. *Бережливое производство: учебное пособие. – Кемерово: КузГТУ имени Т.Ф. Горбачева, 2023. – 155 с. // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/352586> (дата обращения: 24.08.2024).*
15. ALSAADI N. *Assessment and Enhancement of the Manufacturing*

- Productivity through Discrete Event Simulation* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2022. – Vol. 1222, No. 1. – P. 012011. – DOI: 10.1088/1757-899x/1222/1/012011. – EDN VUMFGN.
16. BATTISTELLA C., FORNASIER A., PESSOT E. *How can lean tools support the innovation process of SMEs?* // Journal of Manufacturing Technology Management. – 2023. – Vol. 34, No. 6. – P. 1004–1024. – DOI: 10.1108/jmtm-12-2022-0449. – EDN YAEJXB.
 17. FEBRIANSYAH DINATA M., DAHLENA NASUTION M. *Pengaruh Working Capital Turnover, Current Ratio, Leverage Dan Total Assets Turnover Terhadap Return on Investment* // Account. – 2022. – Vol. 9, No. 2. – P. 1708–1717. – DOI: 10.32722/account.v9i2.4904. – EDN ITXKVX.
 18. GRIGORIEVICH T. A. *The implementation of lean and digital management techniques using artificial intelligence in industrial settings* // Discover Artificial Intelligence. – 2024. – Vol. 4, No. 1. – P. 94. – DOI: 10.1007/s44163-024-00186-5. – EDN OTAVKI.
 19. KOÇ B. *Integration of digital lean principles and line balancing in apparel manufacturing* // Journal of Textile Engineering & Fashion Technology. – 2024. – Vol. 10, No. 1. – P. 1–9. – DOI: 10.15406/jteft.2024.10.00358. – EDN CZLRVR.
 20. KUBETSKA O.M., OSTAPENKO T.M., PALESHKO YA.S. *Management of Current Assets of Enterprise under Special Conditions* // Бизнес информ. – 2022. – Vol. 8, No. 535. – P. 159–165. – DOI: 10.32983/2222-4459-2022-8-159-165. – EDN UKNARZ.
 21. MURTHY T., YEO D. *Life Sciences Discovery and Technology Highlights* // SLAS Technology. – 2022. – Vol. 27, No. 1. – P. 94–96. – DOI: 10.1016/j.slast.2022.01.004. – EDN JIDQZQ.

MAXIMIZING SAVINGS IN FINANCIAL RESOURCES AS A RESULT OF BALANCING THE ASSEMBLY LINE AT DISCRETE ENGINEERING ENTERPRISES

Alexander Shcherbak, M.I. Platonov South Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk, Russia, Student

(alexandershcherbak@mail.ru).

Pyotr Ovchinnikov, M.I. Platov South Russian State Polytechnic University (NPI), Candidate of Economics, Associate Professor, Dean of the Faculty of Innovation and Production Organization (pvo78@yandex.ru).

Lyudmila Pogorelova, M.I. Platov South Russian State Polytechnic University (NPI), Candidate of Economics, Associate Professor (pogorelova_la@npi-tu.ru).

Pavel Savelchev, Director of Economics and Finance, Bryansk Machine-Building Plant Management Company JSC, Bryansk, Russia.

Abstract: The article discusses the issues of calculating the amount of financial resources released, as well as achieving maximum economic effect by setting a mathematical optimization problem with a rational combination of parameters regulating the flow of production processes in the assembly plant. The methodological basis of the research consists of theoretical and practical data on the organization of assembly production, the economics of the enterprise, and mathematical methods for solving optimization problems. Within the framework of the study, tasks were implemented to analyze the functioning of the assembly production line; the directions that determine the release of financial resources as a result of measures to optimize the production process were identified, and recommendations were developed for the formation of a universal methodology for calculating the total economic effect when balancing the assembly production line, the optimization task was formulated, aimed at maximizing the economic effect when rational selection of controlled parameters of the assembly line operation. The general management approach to balancing the assembly line is given. As a result of balancing the assembly line, the production cycle is leveled, which, in turn, ensures: firstly, a reduction in the level of interoperable gaps as a result of interfacing technological operations for production capacity, and secondly, it helps to shorten the production cycle of manufacturing products.

Keywords: acceleration of working capital turnover, management of material resources, reduction of inter-operational reserves, reduction of work-in-progress, optimization of the production process, profit maximization.

УДК 65.011.4

ББК 65.05

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.*

Поступила в редакцию 29.10.2024.

Опубликована 31.03.2025.

РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ КРИТЕРИЕВ НАЛИЧИЯ ШЛАКА ПРИ РАЗЛИВКЕ СТАЛИ

Полещенко Д. А.¹, Корнев А. В.²

(Старооскольский технологический институт
им. А.А. Угарова (филиал) НИТУ «МИСИС», Старый Оскол)

В настоящее время одной из ключевых задач в промышленности является обеспечение высокой эффективности производства, в том числе и в сталелитейной отрасли. Одной из нерешенных задач в этой области в процессе непрерывной разливки стали является определение момента начала поступления шлака в промежуточный ковш при сливе металла из сталеразливочного ковша. Сравнительный анализ методов раннего распознавания шлака показывает, что в настоящее время высокоэффективной системы отсечки шлака не существует. В данной работе для решения задачи раннего распознавания шлака используется именно вибрационный метод ввиду высокой информативности сигнала виброускорения. Апробируется два метода анализа сигнала виброускорения манипулятора защитной трубы для своевременной отсечки шлака и предотвращения его попадания в промежуточный ковш. Анализ результатов апробации показывает, что наилучшую эффективность, равную ста процентам, обеспечивает подход, основанный на анализе спектра мощности сигнала виброускорения совместно с данными о весе плавки. Критерии отсечки шлака на основании дискретного вейвлет-анализа срабатывают в 67 % случаев, что демонстрирует их работоспособность и дает основания для более тщательного исследования данного метода с целью увеличения его эффективности.

Ключевые слова: непрерывная разливка стали, огибающая спектра мощности, сигнал веса плавки, дискретный вейвлет-анализ, критерии отсечки шлака.

1. Введение

Существует три метода разливки: сверху в изложницы («дождевая» разливка), разливка снизу («сифонная» разливка) и с использованием устройства непрерывной разливки стали. Наиболее распространенным на сегодняшний день является именно последний способ [12], при котором жидкому металлу придается форма прямоугольника или квадрата.

¹ Дмитрий Александрович Полещенко, к.т.н., доцент (po-dima@yandex.ru).

² Артем Викторович Корнев, студент магистратуры (korenev01@mail.ru).

Данный метод состоит из совокупности операций, одной из которых является процесс слива стали из сталеразливочного ковша. В данной операции наиболее ответственным этапом служит определение начала поступления шлака в промежуточный ковш [7].

Решение задачи своевременного закрытия шиберного затвора для предотвращения попадания шлака в промковш очень важно, так как его унос приводит к большому количеству негативных последствий.

Во-первых, попадание шлака в промковш и затем в кристаллизатор вызывает ухудшение качества стали. Во-вторых, шлак негативно влияет на промковш, сокращая его срок службы. В шлаке содержатся элементы, которые будут постепенно разрушать его футеровку. В итоге из-за эрозии огнеупорной футеровки промежуточного ковша необходимо остановить разливку, чтобы устранить риск для безопасности процесса [11].

Но нужно также учитывать и тот факт, что преждевременное закрытие шиберного затвора приводит к тому, что в стальковше остается большая часть годного металла, которая бракуется вместе со шлаком [2].

Таким образом, металлургические предприятия несут потери в процессе непрерывной разливки стали.

На сегодняшний день существует несколько методов обнаружения шлака, основанных на различных принципах.

Например, инфракрасный метод [21] основывается на анализе инфракрасного излучения струи металла. Главным недостатком данного способа является тот факт, что он требует наличие открытой струи металла. Однако в большинстве случаев поток стали защищен от окисления сливной трубой, что делает невозможным применение данного метода.

Другим методом является косвенный расчет массы стальковша [2], который основывается на пересчете массы стали и шлака в уровень. Ввиду того, что в большинстве случаев погрешность измерения массы является большой, точность данного метода низкая.

Помимо этого разработан электромагнитный способ, который является одним из наиболее точных на сегодняшний день методов. Он основывается на установке в зону потока металла

двух электромагнитных катушек, одна из которых является излучателем, другая – приемником, а поток стали – своеобразным сердечником [11]. Однако данный метод имеет значительный недостаток, который заключается в том, что чувствительные элементы необходимо защищать от действия повышенных температур с помощью футеровки.

Кроме того, все большую популярность приобретает вибрационный метод раннего распознавания шлака, так как сигнал вибрации обладает высокой информативностью [1, 15]. Данный метод позволяет на основе сигнала вибрации сливной трубы зафиксировать момент истечения шлака. В настоящее время ведутся попытки создания таких систем, например, в [10], но качество их работы остается низким.

Таким образом, на сегодняшний день эффективность различных систем раннего распознавания является недостаточной, что требует дополнительных исследований с целью ее повышения.

Все же вибрационная система определения начала истечения шлака является наиболее перспективной ввиду ее преимуществ, таких как высокое быстродействие и низкая стоимость [10].

2. Цель и методы исследований

В данной работе рассматривается вибрационный метод. Сигналы виброускорения получены с реального промышленного объекта – машины непрерывного литья заготовок.

Вибрация создается за счет биения потока стали о шибберный затвор [10]. Различная плотность стали (порядка $6,9 \text{ т/м}^3$) и шлака (порядка $2,5 \text{ т/м}^3$) приводит к снижению уровня вибрации при попадании последнего в струю металла [4, 16].

Данный факт говорит о том, что с помощью анализа уровня сигнала виброускорения существует возможность определить начало истечения шлака [3]. Снижение вибрации на некоторую величину и будет являться сигналом начала истечения шлака.

Таким образом, целью исследования является разработка алгоритма обработки сигналов виброускорения, способного

своевременно выявлять снижение его амплитуды при начале попадания шлака в промежуточный ковш.

Задачи исследований заключаются в модернизации критериев отсечки шлака для фиксации момента его истечения, описанных в [3], с применением методов:

- анализа спектра мощности совместно с данными веса плавки;
- дискретного вейвлет-анализа для фиксации момента истечения шлака.

Разработанный алгоритм будет внедрен в существующую автоматизированную систему поддержания уровня стали в промежуточном ковше. При начале поступления шлака в промежуточный ковш на основании данного алгоритма будет формироваться сигнал управления на закрытие шиберов.

3. Модернизация метода отсечки шлака на основании анализа спектра мощности

В работе [3] был предложен метод отсечки шлака на основании анализа спектральной плотности мощности [20] сигнала виброускорения, эффективность которого составила 93%.

В данной работе рассмотрена модернизация вышеописанного метода, основанная на совместном анализе мощности сигнала и данных о весе плавки. Его усовершенствование будет способствовать уменьшению количества ложных срабатываний, что в конечном итоге позволит увеличить эффективность метода.

Расчет спектров мощности производится на основании формулы (1), т.е. таким же образом, как и в работе [3]:

$$(1) \quad S_{xx}(f) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(\Delta t)^2}{T} \left| \sum_{n=1}^N x_m e^{-i2\pi f n \Delta t} \right|^2,$$

где T – период времени; N – длина сигнала x ; Δt – интервал выборки в секундах.

Спектры мощности анализируются для различных частотных диапазонов (0–3000 Гц, 800–1200 Гц, 0–100 Гц). Помимо этого их построение также производится для различных временных интервалов, а именно за пять, десять и пятнадцать секунд до ручного закрытия шиберов оператором.

Результаты анализа показывают, что для большинства сигналов снижение мощности происходит на частотах 0–100 Гц, что также представлено в работе [8].

Для данного частотного диапазона вычисляется усредненное значение мощности сигнала (см. формулу (2)):

$$(2) \quad \overline{P_{xx}^q(k)} = \frac{\sum_{i=0}^{f_{max}} S_{xx}^k(i)}{f_{max}},$$

где $k = \overline{1, K^q}$ – номер такта, соответствующий временному отрезку в одну секунду и содержащий 30 000 отсчетов; K^q – номер такта, на котором произошло ручное закрытие шибера оператором; $q = \overline{1, 15}$ – число экспериментов; f_{max} – верхняя граница частоты, равная 100 Гц.

Такая величина называется огибающей спектра мощности и вычисляется с момента отключения автоматического регулирования шибера и до его закрытия оператором.

Исследование огибающих показывает, что перед закрытием шибера наблюдается ниспадающий тренд (см. рис. 1).

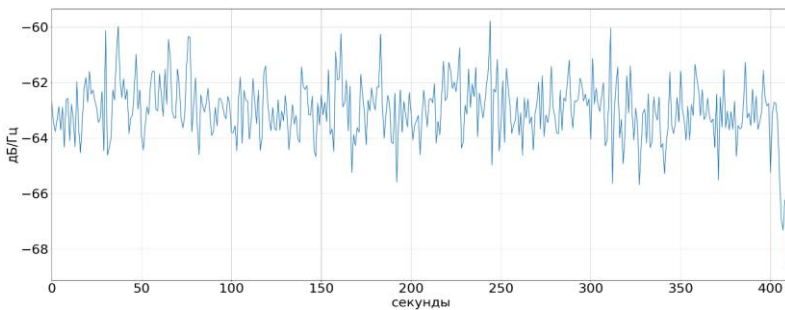


Рис. 1. Огибающая спектра мощности

В данной работе предлагается совместный анализ мощности сигнала виброускорения и данных о весе плавки с целью уменьшения количества ложных срабатываний разрабатываемых критериев отсечки шлака.

Для анализа данных о весе плавки предлагается определить некоторый параметр, на основании которого можно будет судить о начале поступления шлака в промковш.

Данный параметр должен быть обратно пропорциональным весу плавки ввиду того, что вероятность поступления шлака в промковш увеличивается при уменьшении массы содержимого в стальковше. Такая величина называется коэффициентом массы.

Ввиду особенностей съема данных для экспериментов сигнал веса плавки является ступенчатым (см. рис. 2), хотя в реальности он имеет непрерывный характер. Для компенсации данного эффекта формируется коэффициент приращения z , который может быть вычислен по формуле (3), полученной эмпирическим путем:

$$(3) \quad z(t) = \begin{cases} z(t-1) + h, & m(t) = m(t-1), \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

где t – время; m – вес плавки; h – константа приращения; $z(0) = 0$.

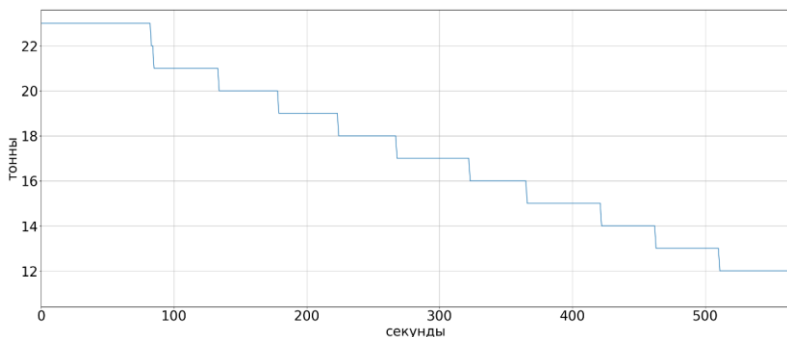


Рис. 2. Сигнал веса плавки

Расчет коэффициента массы осуществляется согласно выражению (4):

$$(4) \quad r = \frac{g + z}{m},$$

где g – некоторая эмпирически определяемая константа.

3.1. РАЗРАБОТКА КРИТЕРИЕВ НАЛИЧИЯ ШЛАКА НА ОСНОВЕ ОГИБАЮЩЕЙ СПЕКТРА МОЩНОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТА МАССЫ

Анализ огибающих спектров мощности совместно с данными о весе плавки позволяет разработать следующие критерии наличия шлака.

Критерий 1: если значение мощности снижается более, чем на 6,6% относительно среднего значения мощности за все время наблюдения, то пошел шлак ($A = 1$):

$$(5) \quad A = \begin{cases} 1, & P_{xx}^q(k) < 0,934 \frac{\sum_{j=1}^k P_{xx}^q(j)}{k}, \\ 0, & P_{xx}^q(k) \geq 0,934 \frac{\sum_{j=1}^k P_{xx}^q(j)}{k}. \end{cases}$$

где A – искомая пороговая функция; $q = \overline{1,15}$ – число экспериментов; $k = \overline{10, K^q}$.

Критерий 2: регистрируется начало поступления шлака, когда уменьшение значения текущей мощности достигает более 5% относительно среднего за все время наблюдения при условии достижения значения коэффициента массы 0,43:

$$(6) \quad A = \begin{cases} 1, & P_{xx}^q(k) < 0,95 \frac{\sum_{j=1}^k P_{xx}^q(j)}{k} \quad \text{и} \quad r > 0,43, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вычисление коэффициента массы производится по формуле (2) для $g = 3$ и $h = 0,002$.

Критерий 3: регистрируется начало поступления шлака, когда уменьшение значения текущей мощности достигает более 5% относительно скользящего среднего с размером окна в 10 тактов при условии достижения значения коэффициента массы 0,44:

$$(7) \quad A = \begin{cases} 1, & P_{xx}^q(k) < 0,95 \frac{\sum_{j=k-10}^k P_{xx}^q(j)}{10} \quad \text{и} \quad r > 0,44, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Как и в критерии 2, вычисление коэффициента массы производится по формуле (2) для $g = 3$, $h = 0,01$.

Критерий 4: регистрируется начало поступления шлака, когда уменьшение значения текущей мощности достигает более 2,5% относительно скользящего среднего с размером окна в 10 тактов при условии достижения значения коэффициента массы 1,2:

$$(8) \quad A = \begin{cases} 1, & P_{xx}^q(k) < 0,975 \frac{\sum_{j=k-10}^k P_{xx}^q(j)}{10} \quad \text{и} \quad r > 1,2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Параметры h и g равны соответствующим величинам, описанным в критерии 3.

Критерий 5: регистрируется начало поступления шлака, когда текущее значение мощности снижается на величину более 4,5% относительно скользящего среднего шириной окна в 10 тактов при условии, что скользящее среднее на текущем такте меньше среднего за все время наблюдения, а также если текущее значение мощности является минимальным за все время наблюдения и последовательно уменьшается в течение последних трех тактов:

$$(9) \quad A = \begin{cases} 1, & R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 = 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

В свою очередь расчет параметров R_1 , R_2 , R_3 , R_4 выполняется согласно выражениям (10)–(13):

$$(10) \quad R_1 = \begin{cases} 1, & P_{xx}^q(k) < P_{xx}^q(k-1) < P_{xx}^q(k-2) < P_{xx}^q(k-3), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$(11) \quad R_2 = \begin{cases} 1, & P_{xx}^q(k) < 0,955 \frac{\sum_{j=k-10}^k P_{xx}^q(j)}{10}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$(12) R_3 = \begin{cases} 1, & \frac{\sum_{j=k-10}^k P_{xx}^q(j)}{10} < \frac{\sum_{j=1}^k P_{xx}^q(j)}{k}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$(13) R_4 = \begin{cases} 1, & P_{xx}^q(k) = \min_{1 \leq i \leq k} \{P_{xx}^q(i)\}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Результаты апробации показывают, что данные критерии позволяют зафиксировать момент начала истечения шлака во всех экспериментах, что можно увидеть в таблице 1.

Таблица 1. Анализ своевременности срабатывания критериев наличия шлака на основе огибающей спектра мощности и коэффициента массы

Дата и номер разливки	Активация критерия, такт					Ручное закрытие шибера, такт	Расхождение по критерию, такт				
	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
03.17_1	608	—	—	—	—	614	6	—	—	—	—
03.17_2	748	—	—	—	745	751	3	—	—	—	6
03.17_3	665	—	—	—	667	668	3	—	—	—	1
05.17_1	—	—	878	—	—	880	—	—	2	—	—
05.17_3	1025	1025	1025	—	1026	1029	4	4	4	—	3
05.17_4	1223	1223	1223	1222	—	1224	1	1	1	2	—
05.17_5	1085	—	—	—	1084	1090	5	—	—	—	6
08.17_1	—	815	—	—	—	817	—	2	—	—	—
08.17_2	508	—	—	—	508	548	40	—	—	—	40
08.17_3	—	—	981	—	—	984	—	—	3	—	—
08.17_4	—	—	—	—	564	565	—	—	—	—	1
09.17_1	677	—	—	—	—	679	2	—	—	—	—
09.17_2	—	—	—	764	—	765	—	—	—	1	—
09.17_3	—	807	—	—	—	837	—	30	—	—	—
09.17_4	758	—	—	—	758	761	3	—	—	—	3

Анализ результатов, представленных в таблице, свидетельствует о том, что этот метод не является идеальным ввиду из-

лишне заблаговременного срабатывания критериев в нескольких экспериментах (порядка 13%). Данный факт свидетельствует о том, что такой метод хотя и обладает высокой эффективностью, однако имеет и свои недостатки.

4. Дискретный вейвлет-анализ

В данной работе описана апробация метода анализа сигнала с помощью вейвлет-преобразования.

Основным преимуществом вейвлет-преобразования по сравнению с Фурье-преобразованием является тот факт, что оно позволяет получить частотно-временное представление сигнала [14].

В данной работе рассматривается метод отсечки шлага на основе дискретного вейвлет-анализа сигнала вибрации [19].

Дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) реализуется по следующей формуле [13, 17]:

$$(14) \quad DWT(j, k) = \frac{1}{2^j} \int x(t) \psi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right) dt,$$

где $x(t)$ – входной сигнал; $\psi(t)$ – материнский вейвлет, или так называемая базисная вейвлет-функция.

Расчет $\psi(t)$ производится по формуле

$$(15) \quad \psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(2^j t - k).$$

Координаты сдвига b и масштаб a принимают вид

$$(16) \quad b = 2^j k,$$

$$(17) \quad a = 2^j.$$

В основе получения ДВП сигнала x лежит использование высокочастотного g и низкочастотного h фильтров [5].

В результате получаются детализирующие коэффициенты (после ВЧ-фильтра) и коэффициенты аппроксимации (после НЧ-фильтра) (см. рис. 3) [6, 9] согласно формулам

$$(18) \quad y_{high}[k] = \sum_n x[n] g[2k - n].$$

$$(19) \quad y_{low}[k] = \sum_n x[n] h[2k - n],$$

где $x[n]$ – входной сигнал; $y_{low}[k]$ – выход после НЧ-фильтра; $y_{high}[k]$ – выход после ВЧ-фильтра.

Причем частотный диапазон коэффициентов аппроксимации и коэффициентов детализации может быть выражен через (20) и (21) соответственно [18]:

$$(20) \ cA_i = \left[0, \frac{f_s}{2^{i+1}} \right],$$

$$(21) \ cD_i = \left[\frac{f_s}{2^{i+1}}, \frac{f_s}{2^i} \right],$$

где i – количество уровней декомпозиции; f_s – частота дискретизации.

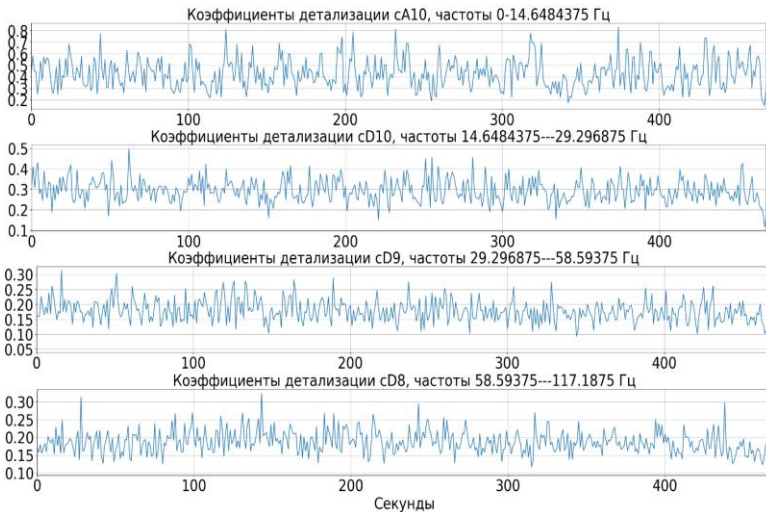


Рис. 3. Кривые значений коэффициентов детализации на данных одной из разливок, полученные с использованием койфлета

Для построения используются функции:

- койфлет;
- Добеши;
- асимметричный вейвлет.

Первоначально строятся кривые значений коэффициентов детализации на основе функции койфлета. Для этого анализи-

руются имеющиеся данные 15 разливок, из них выделяются отрезки с момента отключения системы автоматического регулирования положения шиберов до отсечки потока оператором, т.е. прекращения разливки (см. рис. 3).

Для проведения сравнительного анализа подобные кривые строятся с использованием прочих функций вейвлет-преобразования (асимметричный вейвлет и Добеши). Анализ показывает, что изменение применяемой функции вейвлет-преобразования не дает существенного изменения в характере получаемого на выходе результата, поэтому далее принимается решение проводить исследование с использованием койфлета.

4.1. РАЗРАБОТКА КРИТЕРИЕВ ОТСЕЧКИ ШЛАКА

В ходе анализа графиков, получаемых на различных разливах, формируются эмпирические критерии, позволяющие идентифицировать ситуацию начала истечения шлака из сталковша.

Для этого в качестве базового значения выбирается среднее значение сигнала, на основании которого строятся огибающие коэффициентов аппроксимации и детализации:

$$(22) \quad M_q^{n,\psi}(k) = \frac{\sum_{i=1}^l y_k^{n,\psi}(i)}{l},$$

где $k = \overline{1, K^q}$ – номер такта (1 такт равен 1 с); $q = \overline{1, 15}$ – число экспериментов; K^q – номер такта, на котором оператор закрыл шибер; l – количество коэффициентов аппроксимации (детализации) k -го такта; n – уровень преобразования; $y_k^{n,\psi}$ – коэффициенты аппроксимации (детализации) k -го такта n -го уровня преобразования, полученные на основании вейвлета ψ .

Рассматриваемая частотная область выбирается в диапазоне 0–117 Гц, при этом берется различное (8 и 9) количество ступеней разложения.

Критерии выглядят следующим образом.

Критерий 1: регистрируется начало поступления шлака при условии, когда уменьшение значения ОКД восьмого уровня

преобразования достигает более 40% относительно среднего за все время наблюдения:

$$(23) \quad A = \begin{cases} 1, & M_q^{8,coif}(k) < 0,6 \frac{\sum_{j=1}^k M_q^{8,coif}(j)}{k}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $M_q^{8,coif}$ – ОКД 8-го уровня преобразования на основании вейвлет-функции койфлет; A – пороговая функция.

Критерий 2: регистрируется начало поступления шлака, когда уменьшение значения ОКД девятого уровня преобразования достигает более 50% относительно среднего за все время наблюдения при условии достижения значения коэффициента массы 0,21:

$$(24) \quad A = \begin{cases} 1, & M_q^{9,coif}(k) < 0,5 \frac{\sum_{j=1}^k M_q^{9,coif}(j)}{k} \quad \text{и} \quad r > 0,21, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $M_q^{9,coif}$ – ОКД 9-го уровня преобразования на основании вейвлет-функции койфлет.

Расчет коэффициента массы производится для $g = 3$, $h = 0,002$.

Полученные на данных всех разливок результаты сводятся в таблицу 2 с целью обобщающего анализа.

Из представленных данных наглядно видно, что полученные критерии позволяют зафиксировать начало истечения шлака в 67 процентах случаев, что в условиях реального производства недостаточно. В дальнейшем планируется более углубленное изучение данного метода с целью увеличения показателя эффективности.

Таблица 2. Результаты срабатывания критериев отсечки шлака на основе анализа коэффициентов детализации вейвлет-преобразования

Дата и номер разливки	Срабатывание критерия, такт		Отсечка шлака оператором, такт	Отклонение по критерию, такт	
	1	2		1	2
03.17_1	–	605	614	–	9
03.17_2	749	749	751	2	2
03.17_3	665	–	668	3	–
05.17_1	–	–	880	–	–
05.17_3	1026	1025	1029	3	4
05.17_4	1223	–	1224	1	–
05.17_5	1088	1086	1090	2	4
08.17_1	–	–	817	–	–
08.17_2	510	509	548	38	39
08.17_3	–	–	984	–	–
08.17_4	533	–	565	32	–
09.17_1	674	–	679	5	–
09.17_2	–	–	765	–	–
09.17_3	–	829	837	–	8
09.17_4	–	–	761	–	–

5. Заключение

В данной работе проведено исследование двух различных методов анализа сигнала виброускорения.

Эффективность методов представлена в таблице 3.

Таблица 3. Эффективность рассмотренных методов

Наименование метода	Эффективность метода, %
Метод на основании анализа спектра мощности	100
Метод на основании дискретного вейвлет-анализа	67

Наилучший результат показали критерии отсечки шлака, основанные на анализе спектра мощности сигнала виброускорения совместно с данными о весе плавки, сработавшие во всех экспериментах, однако в 13% случаев их срабатывание было излишне раннее.

Помимо того в данной работе проведено исследование сигналов виброускорения с помощью дискретного вейвлет-анализа совместно с данными о весе плавки, на основании которых разработаны критерии отсечки шлака, эффективность которых составила порядка 67%. Это демонстрирует работоспособность данного метода, и в перспективе дальнейшие исследования позволят увеличить его эффективность. Таким образом, станет возможным его апробация в реальных промышленных условиях, что и является для авторов целью будущей работы.

Литература

1. ЕРЕМЕНКО Ю.И., ПОЛЕЩЕНКО Д.А. *О разработке и промышленной апробации системы отсечки шлака при разливке стали* // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2019. – Т. 62, №5. – С. 353–359.
2. КРИВОНОСОВ В.А., МИТИН А.С. *Повышение точности оценки уровней металла в стальковше и промковше МНЛЗ с использованием нелинейного наблюдателя состояния* // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6, №4. – С. 41–45.
3. ПОЛЕЩЕНКО Д.А., КОРЕНЕВ А.В. *Разработка метода раннего распознавания шлака сталеразливочного ковша машины непрерывного литья заготовок* // Управление большими системами. – 2024. – Вып. 107. – С. 121–141.
4. СЕМЕНОВ М.В., КРАСИЛЬНИКОВ С.С., ШВИДЧЕНКО Д.В. и др. *Вибродетектирование шлака при сливе стали из стальковша в промежуточный ковш* // Автоматизированные технологии и производства. – 2015. – №2. – С. 40–42.
5. ALSHARABI K., BIN SALAMAN Y., ABDURRAQUEEB A.M. et al. *EEG signal processing for Alzheimer's disorders using discrete wavelet transform and machine learning approaches* // IEEE Access. – 2022. – Vol. 10. – P. 89781–89797.

6. BELKACEMI B., SAAD S., GHEMARI Z. et al. *Detection of induction motor improper bearing lubrication by discrete wavelet transforms (DWT) decomposition* // Instrum. Mes. Metrol. – 2020. – Vol. 19, No. 5. – P. 347–354.
7. CHAKRABORTY A., GHOSE J., CHAKRABORTY S. et al. *Vision-based detection system of slag flow from ladle to tundish with the help of the detection of undulation of slag layer of the tundish using an image analysis technique* // Ironmaking & Steelmaking. – 2022. – Vol. 49, No. 1. – P. 10–15.
8. CHEN D., XIAO H., JI Q. *Vibration style ladle slag detection method based on discrete wavelet decomposition* // The 26th Chinese Control and Decision Conference (CCDC-2014). – IEEE, 2014. – P. 3019–3022.
9. GUO T., ZHANG T., LIM E. et al. *A review of wavelet analysis and its applications: Challenges and opportunities* // IEEE Access. – 2022. – Vol. 10. – P. 58869–58903.
10. GÜVENÇ M.A., KAPUSUZ H., MISTIKOĞLU S. *Experimental study on accelerometer-based ladle slag detection in continuous casting process* // The Int. Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2020. – Vol. 106. – P. 2983–2993.
11. KAPUSUZ H., GÜVENÇ M.A., MISTIKOĞLU S. *A review study on ladle slag detection technologies in continuous casting process* // Int. Advanced Researches and Engineering Journal. – 2019. – Vol. 3, No. 3. – P. 144–149.
12. LOUHENKILPI S. *Continuous casting of steel* // Treatise on Process Metallurgy. – Elsevier, 2014. – P. 373–434.
13. NISHAT T.R., KIM J.M. *Bearing fault classification of induction motors using discrete wavelet transform and ensemble machine learning algorithms* // Applied Sciences. – 2020. – Vol. 10, No. 15. – P. 5251.
14. POUYANI M.F., VALI M., GHASEMI M.A. *Lung sound signal denoising using discrete wavelet transform and artificial neural network* // Biomedical Signal Processing and Control. – 2022. – Vol. 72. – P. 103329.
15. TAN D.P., JI S.M., LI PEIYU et al. *Development of vibration style ladle slag detection methods and the key technologies* // Science China. Technological Sciences. 2010. – Vol. 53, No. 9. – P. 2378–2387.

16. TAN D.P., LI P.Y., JI Y.X. et al. *SA-ANN-based slag carry-over detection method and the embedded WME platform* // IEEE Trans. on Industrial Electronics. – 2012. – Vol. 60, No. 10. – P. 4702–4713.
17. WAHAB M.F., O'HAVER T.C. *Wavelet transforms in separation science for denoising and peak overlap detection* // Journal of Separation Science. – 2020. – Vol. 43, No. 9–10. – P. 1998–2010.
18. WANG M.H., LU S.D., LIAO R.M. *Fault diagnosis for power cables based on convolutional neural network with chaotic system and discrete wavelet transform* // IEEE Trans. on Power Delivery. – 2021. – Vol. 37, No. 1. – P. 582–590.
19. WANG Y., LI Z., WANG C. et al. *Implementation of discrete wavelet transform* // 12th IEEE Int. Conf. on Solid-State and Integrated Circuit Technology (ICSICT). – IEEE, 2014. – P. 1–3.
20. YOUNGORTH R.N., GALLAGHER B.B., STAMPER B.L. *An overview of power spectral density (PSD) calculations* // Optical Manufacturing and Testing VI. – 2005. – Vol. 5869. – P. 206–216.
21. ZHANG Z., BIN L., JIANG Y. *Slag detection system based on infrared temperature measurement* // Optik. – 2014. – Vol. 125, No. 3. – P. 1412–1416.

DEVELOPMENT AND EFFICIENCY ANALYSIS OF SLAG CRITERIA DURING STEEL CASTING

Dmitry Poleshchenko, Sary Oskol technological institute n.a. A.A. Ugarov (branch) NUST «MISIS», Sary Oskol, Cand.Sc., assistant professor (po-dima@yandex.ru).

Artem Korenev, Sary Oskol technological institute n.a. A.A. Ugarov (branch) NUST «MISIS», Sary Oskol, master's student (korenev01@mail.ru).

Abstract: Currently, one of the key tasks in industry is to ensure high production efficiency, also in the steel industry. One of the unsolved problems in this area in the process of continuous casting of steel is the determination of the moment when slag begins to enter the intermediate ladle when pouring metal from the ladle. A comparative analysis of methods of early slag detection shows that currently there is no highly effective slag cut-off system. In this paper, in order to solve the problem of early slag detection, the vibration method was used due to the high informativeness of the vibration acceleration signal. Two methods of analyzing the vibration accel-

eration signal of the protective tube manipulator were tested for timely slag cutoff and preventing its entering into the intermediate ladle. Analysis of the results of testing showed that the best efficiency, equal to one hundred percent, was provided by the approach based on the analysis of the power spectrum of the vibration acceleration signal together with the data on the weight of the melting. Slag cutoff criteria based on discrete wavelet analysis worked in 67 percent of cases, which demonstrates their performance and gives grounds for more thorough research of this method in order to increase its efficiency.

Keywords: continuous steel casting, power spectrum envelope, melting weight signal, discrete wavelet analysis, slag cutoff criteria.

УДК 658.562.3 + 004.021

ББК 30.607

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии С.Л. Подвальным.*

*Поступила в редакцию 25.10.2024.
Опубликована 31.03.2025.*

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ СГЛАЖЕННОЙ ТРАЕКТОРИИ ПРИ НАЛИЧИИ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ТОЧЕК ТРАЕКТОРИИ

Макаров М. И.¹, Морозов Ю. В.²
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Представлен метод сглаживания траектории, полученной с использованием высокочастотных данных о движении мототехники по пересечённой местности, с целью повысить точность и плавность траекторий в условиях присутствия шума. Основное внимание уделено особенностям применению квинтических В-сплайнов, которые обеспечивают высокую степень гладкости при описании траектории и предварительной фильтрации данных. В статье последовательно описаны технические и математические сложности, возникающие при реализации алгоритма на реальных данных, а также предложены методы их преодоления. Один из таких методов — фильтрация выбросов для устранения резких отклонений исходной траектории с использованием цифрового фильтра Баттерворта. Рассмотрены и протестированы различные подходы для работы с большим количеством точек траектории, включая разбиение данных на отдельные перекрывающиеся окна с их последовательной сшивкой, что значительно улучшает производительность алгоритма. Для оптимизации вычислений также предложено использовать разреженные матрицы, эффективно работающие с большим объемом данных и занимающих существенно меньший объем памяти компьютера по сравнению с традиционными. Эффективность предложенного подхода подтверждена на примерах, где визуализированы сглаженные траектории, полученные из зашумленных данных.

Ключевые слова: В-сплайн, GNSS-приемник, кривизна, оптимизация, сглаживание траекторий.

1. Введение

В современном мире алгоритмы следования по маршруту играют важную роль в различных областях, начиная от навигации беспилотных транспортных средств и заканчивая робототехникой [11]. Одним из ключевых требований для успешного применения таких алгоритмов является наличие гладкой траектории,

¹ Максим Игоревич Макаров, аспирант, м.н.с. (maxim.i.makarov@gmail.com).

² Юрий Викторович Морозов, к.ф.-м.н., с.н.с. (tot1983@ipu.ru).

которая строится на основе записанных ранее координат. Гладкость траектории обеспечивает плавное и предсказуемое движение, что особенно важно для обеспечения безопасности и эффективности управления.

С развитием технологий и увеличением точности измерительных приборов появилась возможность получать высокочастотные данные о местоположении объекта с высокой точностью (до нескольких сантиметров при использовании технологии RTK¹ [8]). Данные, снятые при движении на мототехнике или снегоциклах [4] по пересечённой местности, предоставляют уникальную возможность для построения точных и детализированных траекторий, однако высокая частота записи и, как результат, объем данных предъявляют дополнительные требования к алгоритмам сглаживания и обработки траекторий.

В [10–17] рассматривается построение трёхмерного покрытия выделенной области с помощью начального пути, пересекающего поле. Такая постановка задачи о планировании пути наиболее популярна. В рамках неё предполагается, что как минимум один реальный проезд уже был. В [14] идёт совершенствование данного подхода на случай наличия препятствий на поле, в том числе новых. Данная работа рассматривает задачу «как построить этот начальный путь, чтобы он был эталонным для дальнейшего использования». Рассматриваются методы и подходы к сглаживанию траекторий, полученных с помощью высокочастотных данных. Особое внимание уделяется алгоритмам, способным эффективно обрабатывать данные, записанные в условиях пересечённой местности, что актуально для применения в мототехни-

¹ Англ. *Real Time Kinematics* – режим позиционирования по измерениям ГНСС, включающим фазовые измерения. Если удалось получить оценки вторых разностей фазовых неоднозначностей в виде целых чисел, то позиция называется фиксированной (*fixed*). Если позиция определяется с использованием вещественных оценок фазовых неоднозначностей, то она называется плавающей (*float*). Если оценки фазовых неоднозначностей не получены, то для позиционирования используются только кодовые измерения. Если для кодовых измерений не вычисляются первые и вторые разности, то позиция называется автономной (*standalone*).

ке. Рассматриваются также примеры практического применения этих методов и анализ их эффективности на реальных данных.

2. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача. Имеется набор контрольных точек $r_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, n$, по которым нужно построить В-сплайновую аппроксимацию траектории. При этом известна ошибка измерения координат, равная δ . Помимо исходного набора точек также рассматриваются все возможные наборы, которые удовлетворяют условию

$$|\tilde{r}_i - r_i| \leq \delta.$$

Среди всех возможных наборов необходимо найти такой, чтобы форма В-сплайновой кривой была оптимальной в соответствии с определённым критерием, который будет детализован далее. Кроме того, предполагается, что аппроксимируемая кривая, будучи траекторией реального колёсного транспортного средства, удовлетворяет необходимым требованиям гладкости и ограничениям на кривизну.

3. Аппроксимация сплайном

Пространственная траектория, заданная n контрольными точками, в данной работе аппроксимируется квинтической¹ В-сплайновой кривой, состоящей из элементарных В-сплайнов пятого порядка (квинтических В-сплайнов) [6, 19]. Каждый элементарный квинтический В-сплайн строится по шести точкам следующим образом:

$$r_i(t) = R_i \text{MT}(t), R_i = r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, r_{i+2}, r_{i+3}, r_{i+4}, \\ T(t) = [1, t, t^2, t^3, t^4, t^5]^T, t \in [0, 1],$$

¹ *Лат. quintus (пятый) – пятого порядка*

$$M = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ 5 & -20 & 30 & -20 & 5 & 0 \\ -10 & 30 & -30 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По сравнению с кубическим сплайном использование сплайна пятого порядка позволяет учитывать и сглаживать изменение угла наклона транспортного средства (ТС)[10].

4. Сглаживание кривизны

В данной работе предлагается усовершенствование метода, предложенного в работе [1] путём введения В-сплайна пятого порядка, который позволяет учитывать не только кривизну кривой, но и ускорение, рывок и изменение рывка, что важно для создания управляемых и устойчивых траекторий. Скачок пятой производной сплайна в i -й точке записывается как

$$\Delta r_i^{(5)} \equiv r_i^{(5)} - r_{i-1}^{(5)} = r_{i-2} - 6r_{i-1} + 15r_i - 20r_{i+1} + 15r_{i+2} - 6r_{i+3} + r_{i+4}.$$

Таким образом, для сглаживания траектории необходимо минимизировать нормы этих векторов всего сплайна. Для вариаций всей траектории в матричном виде:

$$(1) \quad S(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3) = \sum_{j=1}^3 (\vec{r}_j + \vec{\epsilon}_j)^T H (\vec{r}_j + \vec{\epsilon}_j), H = CC^T,$$

$$(2) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $C \in R^{(n-6) \times n}$.

5. Ограничения на вариацию точек

При построении гладкой траектории по данным, снятым с ГНСС-приемника геодезического класса точности, важное зна-

чение имеет точность отдельных точек, полученных с применением RTK. Различия в точности между Fixed, Float и Standalone существенно влияют на необходимость варьирования точек при сглаживании траектории.

Точки со значением Fixed обеспечивает исключительную точность координат, обычно на уровне сантиметров. Эта высокая точность достигается благодаря использованию поправок, передаваемых в реальном времени, что минимизирует ошибки, вызванные атмосферными явлениями, многолучевостью сигнала и другими факторами. Такие точки уже обладают минимальными погрешностями и высокой степенью надежности. Следовательно, варьирование таких точек при построении траектории требует минимальных изменений. Избыточное варьирование может даже ухудшить качество аппроксимации, внося дополнительные искажения в уже точные данные. С другой стороны, данные с точностью Float и Standalone характеризуются значительно большей погрешностью. Float имеет точность на уровне дециметров, а Standalone – на уровне метров. Эти методы не обеспечивают такой высокой устойчивости и точности координат, как RTK Fixed, поэтому они могут быть подвержены значительному варьированию для сглаживания траектории. Для ограничения вариации точек введем функционал штрафа на вариацию точек:

$$(3) \quad P(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3) = \sum_{j=1}^3 \gamma \vec{\epsilon}_j^T D_j \vec{\epsilon}_j,$$

где γ – положительный параметр; $D_j \in R^{n \times n}$ – диагональная матрица с весами, пропорциональными точности (если Fixed – вес большой, Float и Standalone – маленький).

6. Целевой функционал

Учитывая (1) и (3), итоговый функционал для формирования гладкой кривой принимает вид:

$$\Phi(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3) = \frac{1}{2} S(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3) + \frac{1}{2} P(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3).$$

Задача поиска гладкой кривой в итоге сходится к задаче оптимизации:

$$(\vec{\epsilon}_1^*, \vec{\epsilon}_2^*, \vec{\epsilon}_3^*) = \operatorname{argmin}_{\vec{\epsilon}_1^*, \vec{\epsilon}_2^*, \vec{\epsilon}_3^*} \Phi(\vec{\epsilon}_1^*, \vec{\epsilon}_2^*, \vec{\epsilon}_3^*).$$

7. Обработка реальных данных

7.1. Запись данных

Для записи данных использовалась колёсно-гусеничная платформа, приведённая на рис. 1. Движение платформы производилось на специальном бездорожном полигоне с наличием больших и резких перепадов по высоте. В качестве записывающего устройства использовался ГНСС-приёмник геодезического класса точности фирмы Javad с использованием в качестве базовой станции аналогичного приёмника, расположенного в окрестности 350 метров от испытательной площадки. Полигон располагается на месте бывшего карьера, таким образом, приёмник, установленный на движущейся платформе, находился ниже уровня базовой станции, однако разность высот в процессе эксперимента не превышала 40 метров. На таком расстоянии и такой разности высот можно пренебречь как ионосферными [12], так и тропосферными эффектами, искажающими спутниковые данные, а RTK можно использовать с настройками, близкими к режиму, в котором вычисляется ориентация твёрдого тела [13].



Рис. 1. Колёсно-гусеничная платформа для сбора данных

7.2. Первичная обработка и анализ

Набор сырых данных, полученных с приёмника, отражён зелёным и красным цветами на рис. 2. Если запустить предложенный выше алгоритм без предварительной фильтрации на данном наборе данных, то из-за того, что точки с точностью Float содержат ложные позиции, итоговая траектория получается сильно искажена, что отображено на рис. 3, 4.

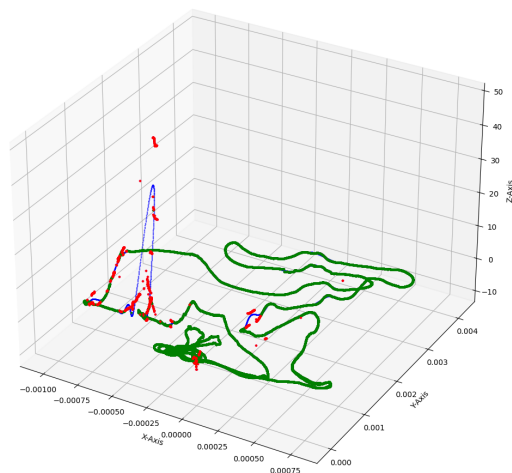


Рис. 2. Сырой набор данных, где красным цветом обозначены выбросы, зелёным цветом – точки без выбросов, синим – набор точек, полученных после применения фильтра Баттерворта

Отдельно необходимо заметить, что для хранения матриц C и D из формул (2), (3) в явном виде может потребоваться довольно большой объем оперативной памяти. Так, при длительности проезда в 12 минут и частотой записи в 100 Гц матрица 2 имеет размер 71 994 на 72 000 с типом данных double и требует для языка Python > 35 Gb оперативной памяти. Данное ограничение можно обойти несколькими способами.

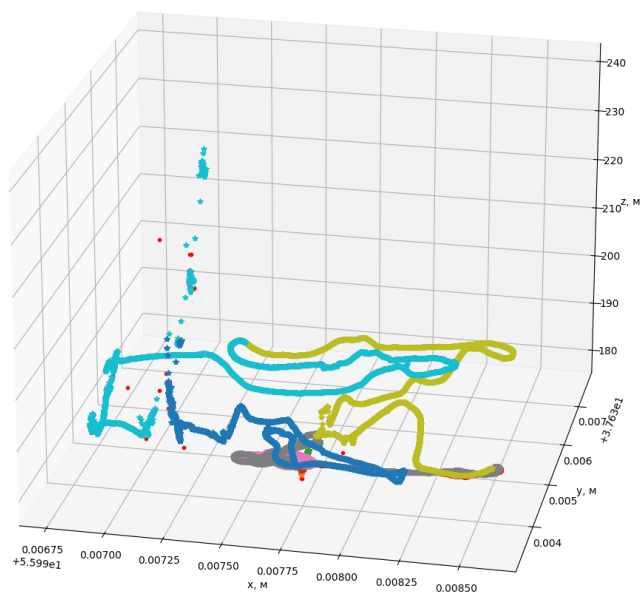


Рис. 3. Результат обработки алгоритма путём разбиения на окна длиной в 7000 точек в 3D

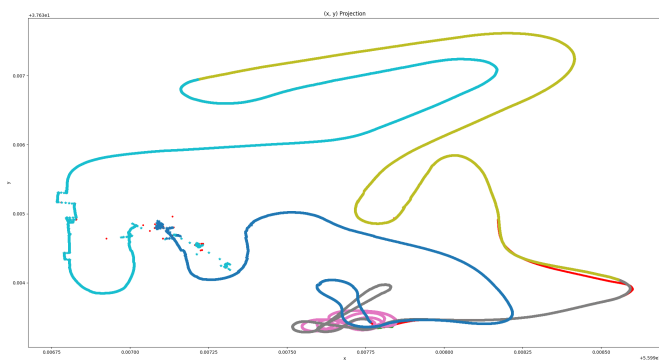


Рис. 4. Результат обработки алгоритма путём разбиения на окна длиной в 7000 точек, спроецированный на плоскость XY

– Первый из них – это разбиение исходной траектории на окна допустимого размера с большим перекрытием. Тогда сглаживание запускается для каждого выделенного окна, после чего производится сшивка с усреднением значений на перекрытиях. Применение данного подхода отображено на рис. 3, 4, где каждый цвет обозначает отдельное окно.

– Второй предполагает использование специальных разреженных матриц, предоставляемых библиотекой Python `scipy.sparse`. Эти матрицы не хранят большое количество бессмысленных нулей, что существенно оптимизирует использование оперативной памяти. На том же самом наборе данных программой использовалось менее 3 Гб оперативной памяти.

7.3. Предварительная фильтрация

Проведём предварительное сглаживание траектории с использованием цифрового фильтра Баттерворта пятого порядка с частотой среза 0,01. Это очень низкочастотный фильтр: он пропускает только очень низкие частоты, эффективно устраняя быстрые колебания и шумы в данных[5]. Применяемый фильтр выполняет двунаправленную фильтрацию, что позволяет избежать фазовых искажений, характерных для односторонней фильтрации. В итоге получается сильно сглаженная траектория $q_i = LP(r_i), i = 1, \dots, n - 2$.

Продифференцируем ее один раз, чтобы иметь скорость движения:

$$w_i = dLP(r_i), i = 1, \dots, n - 3 = I^{(n-3)}.$$

Так как используемый ГНСС позволяет записывать также и скорость, поставим в соответствие множеству координат $r_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, n$, множество векторов скорости $v_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, n$, с которой происходило движение в данной координате. Требуется исключить все точки сглаженной траектории q_i , скорость которых превышает измеренную. Для этого находится множество точек $J = \{i \in I^{(n-3)}, |w_i|_2 < |v_i|_2\}$. Затем новый набор точек будет состоять из всех точек исходного за вычетом тех, у которых скорость полученная дифференцированием координаты выше реальной $r_i \in \mathbb{R}^3, i \in J$.

Также основываясь на рис. 2, большая ошибка содержится в определении вертикального положения. Для фильтрации данных выбросов предлагается выбросить координаты, высота которых превышает 0,9-квантиль, рассчитанный по всем встречающимся в датасете высотам.

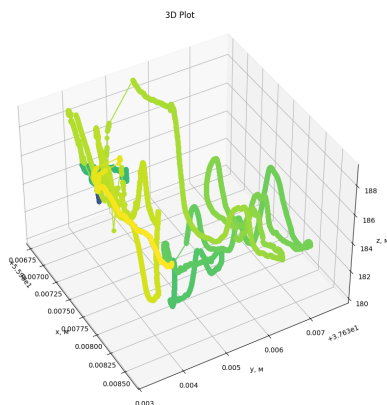


Рис. 5. Исходный набор точек после предварительной фильтрации с градиентным изменением цвета от начала траектории к концу

После данной предварительной фильтрации данных новый набор координат содержит существенно меньшее количество ложных точек, что видно на рис. 5.

Применим алгоритм сглаживания к новому отфильтрованному набору данных. На рис. 6 и 7 показаны результаты. Как видно из графиков, ложные значения с большой амплитудой исчезли. С другой стороны, на траектории все равно присутствуют разрывы, связанные с продолжительной ложной фиксацией ГНСС-приёмника, поэтому чтобы получить более адекватную траекторию, необходимо использовать, например, расширенный фильтр Калмана с дополнительными данными (акселерометры и гироскопы), а также кинематической моделью ТС.

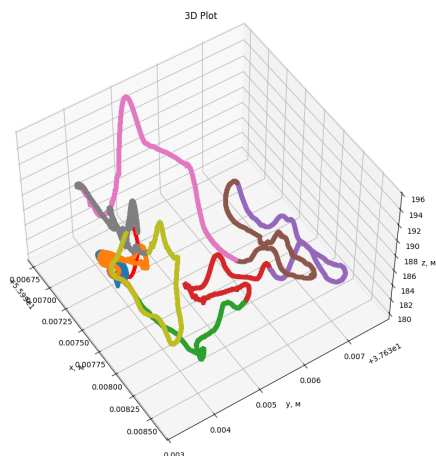


Рис. 6. Сглаженная алгоритмом предварительно отфильтрованная траектория с размером окна в 7000 точек. Каждый цвет соответствует отдельному окну

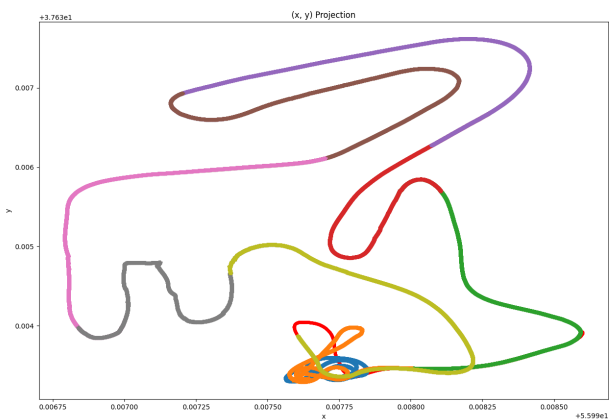


Рис. 7. Проекция сглаженной алгоритмом предварительно отфильтрованной траектории на ось XY с размером окна в 7000 точек. Каждый цвет соответствует отдельному окну

Предварительный анализ данных с IMU¹ на рис. 8 показывает наличие сильной вибрации на данном транспортном средстве при езде не по мягкому грунту, что осложняет восстановление точной ориентации данного ТС, а вместе с ней и инициализацию трёхмерной кинематической модели данного ТС. Таким образом, дальнейшие исследования будут связаны с построением простейшей плоской моделью данного ТС, позволяющей построить устойчивую модель расширенного фильтр Калмана для движения по произвольной поверхности, использующей весь доступный набор синхронизированных данных.

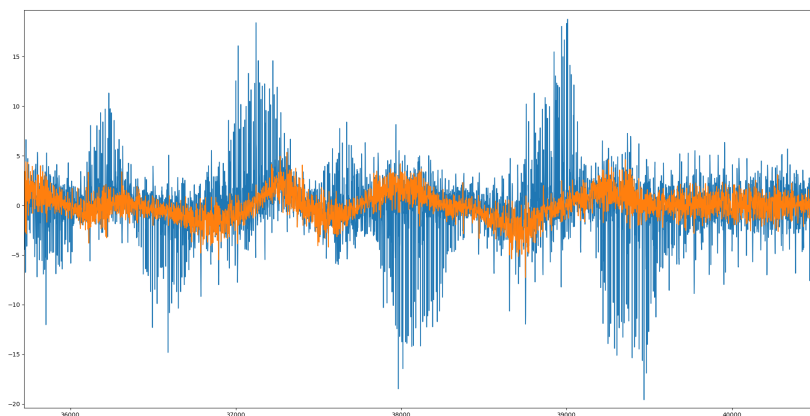


Рис. 8. Данные об ускорении во времени, полученные с IMU. Синим отображены сырые данные, оранжевым цветом данные, полученные с использованием фильтра Калмана

8. Заключение

В статье предложен метод сглаживания траектории, построенной по высокочастотным данным, полученным при движении на мототехнике по пересечённой местности. Особое внимание уделено достижению гладкости траектории с использовани-

¹ Англ. *Inertial Measurement Unit* – устройство для определения угловых отклонений и ускорений

ем квинтических В-сплайнов, которые позволяют минимизировать резкие колебания и обеспечить высокую точность при моделировании реального пути. Для достижения лучшего результата предложен способ фильтрации выбросов в исходном наборе данных на основе цифрового фильтра и скоростей движения. Для подтверждения работоспособности метода был проведён эксперимент с использованием реальных данных большого объёма, где метод последовательно применялся к заданной траектории. Выделение активного набора данных или применение разреженных матриц позволило сэкономить вычислительные ресурсы и выполнить расчёт на персональном компьютере. Результирующая сглаженная траектория, представленная в виде набора окон, наглядно демонстрирует успех предложенного подхода на рис. 6 и 7.

Литература

1. ГИЛИМЬЯНОВ Р.Ф., ПЕСТЕРЕВ А.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Сглаживание кривизны траекторий, построенных по зашумленным измерениям в задачах планирования пути для колесных роботов* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – №5. – С. 148–156.
2. ГИЛИМЬЯНОВ Р.Ф., РАПОПОРТ Л.Б. *Метод деформации пути в задачах планирования движения роботов при наличии препятствий* // Проблемы управления. – 2012. – №1. – С. 70–76.
3. МАКАРОВ М.И. *Алгоритм локального планирования пути для объезда препятствий в путевых координатах* // Проблемы управления. – 2024. – №3. – С. 66–72.
4. МОРОЗОВ Ю.В., КОРГИН Н.А. *Особенности использования ГНСС rtk и imi на электрическом снегоходе однокорпусной компоновки при движении по не жесткой поверхности* // Сборник материалов XVIII Всероссийской научно-практической конференции «Перспективные системы и задачи управления». – Таганрог: 2023. – С. 112–118.
5. РОМАНЮК Ю.А. *Основы цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. Часть 1.* – М., 2007г.

6. FU-CHUNG W., SCHOFIELD S., WRIGHT P. *A Real Time Quintic Spline Interpolator for an Open Architecture Machine Tool* // ASME Int. Mechanical Engineering Congress and Exposition. – 1996. – P. 291–298.
7. GILIMYANOV R.F., RAPOPORT L.B. *Path Deformation Method for Robot Motion Planning Problems in the Presence of Obstacles* // Autom. Remote Control. – 2013. – Vol. 74, No. 12. – P. 70–76.
8. LEICK A., RAPOPORT L., TATARNIKOV D. *GPS Satellite Surveying*. – New York: John Wiley & Sons, 2015.
9. JIN J., TANG L. *Coverage path planning on three-dimensional terrain for arable farming* // J. F. Robot. – 2011. – Vol. 28, No. 3. – P. 424–440.
10. MOROZOV Y. *B-splines Trajectory Planning for Quadrotor Flight* // V Int. Conf. on Optimization Methods and Applications OPTIMIZATION AND APPLICATIONS (OPTIMA-2014), Petrova, Montenegro, 2014. – P. 138–139.
11. MOHAMED R., AHMED O., AMIRA Y.H. et al. *Path planning algorithms in the autonomous driving system: A comprehensive review* // Robotics and Autonomous Systems. – 2024. – Vol. 174. – P. 104630.
12. PADOKHIN A.M., MYLNIKOVA A.A., YASYUKEVICH YU.V. et al. *Galileo E5 AltBOC Signals: Application for Single-Frequency Total Electron Content Estimations* // Remote Sensing. – 2021. – Vol. 13, Iss. 19. – P. 3973 (1–14).
13. RAPOPORT L., MOGILNITSKY V., ASHJAEI J. *Octopus: Four-antennae RTK System and New Attitude Determination Technique* // Proc. 14th Int. Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 2001), Salt Lake City, UT, September 2001. – P. 2972–2979.
14. TORMAGOV T.A. *Path Deformation Method with Constraints on Normal Curvature for Wheeled Robots in Precision Agriculture Based on Second-Order Cone Programming* // Autom. Remote Control. – 2024. – Vol. 85. – P. 123–131.

15. TORMAGOV T., RAPOPORT L. *Coverage Path Planning for 3D Terrain with Constraints on Trajectory Curvature Based on Second-Order Cone Programming* // In: Advances in Optimization and Applications / Eds.: N.N. Olenov et al. – Cham: Springer International Publishing, 2021. – P. 258–272.
16. TORMAGOV T.A., GENERALOV A.A., SHAVIN M.Y. et al. *Motion Control of Autonomous Wheeled Robots in Precision Agriculture* // Gyroscopy Navig. – 2022. – Vol. 13, No. 1. – P. 23–35.
17. TORMAGOV T., RAPOPORT L. *Coverage Path Planning for 3D Terrain with Constraints on Trajectory Curvature Based on Second-Order Cone Programming* // In: Advances in Optimization and Applications / Eds.: N.N. Olenov et al. – Cham: Springer International Publishing, 2021. – P. 258–272.
18. HAMEED I.A., LA COUR-HARBO A., OSEN O.L. *Side-to-side 3D coverage path planning approach for agricultural robots to minimize skip/overlap areas between swaths* // Rob. Auton. Syst. Elsevier. – 2016. – Vol. 76. – P. 36–45.
19. XIWEN G., ZHOU F., QUNJING W. et al. *Smooth Planning for Manipulator with Multi-dimensional Actuator based on Quintic B-spline* // Electrotehnica, Electronica, Automatica. – 2022. – Vol. 70. – P. 20–29.
20. YAN D., WU T., LIU Y. et al. *An efficient sparse-dense matrix multiplication on a multicore system* // IEEE 17th Int. Conf. on Communication Technology (ICCT), Chengdu, China, 2017. – P. 1880–1883.

FEATURES OF CONSTRUCTING A SMOOTHED TRAJECTORY IN THE PRESENCE OF A LARGE NUMBER OF TRAJECTORY POINTS

Maxim Makarov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Graduate Student, Junior Research Fellow (maxim.i.makarov@gmail.com).

Yuriy Morozov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences

of RAS, Moscow, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Research Fellow (tot1983@ipu.ru).

Abstract: The article presents a method for smoothing the trajectory obtained using high-frequency data on the movement of motor vehicles over rough terrain in order to improve the accuracy and smoothness of trajectories in the presence of noise. The main attention is paid to the features of the application of quintic B-splines, which provide a high degree of smoothness in describing the trajectory and preliminary data filtering. The article consistently describes the technical and mathematical difficulties that arise when implementing the algorithm on real data, and suggests methods for overcoming them. One of such methods is filtering outliers to eliminate sharp deviations from the original trajectory using a digital Butterworth filter. Various approaches for working with a large number of trajectory points are considered and tested, including splitting the data into separate overlapping windows with their sequential stitching, which significantly improves the performance of the algorithm. To optimize the calculations, it is also proposed to use sparse matrices that effectively work with large amounts of data and occupy significantly less computer memory compared to traditional ones. The effectiveness of the proposed approach is confirmed by examples where smoothed trajectories obtained from noisy data are visualized.

Keywords: B-spline, GNSS receiver, curvature, optimization, trajectory smoothing.

УДК 007.52

ББК 32.816

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Л.Б. Рапопортом.*

Поступила в редакцию 31.10.2024.

Дата опубликования 31.03.2025.

РАСПОЗНАВАНИЕ СЦЕН В ЗАДАЧЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ МОБИЛЬНОГО РОБОТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ ВЕКТОРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ГРАФОВЫХ ПОДХОДОВ¹

Московский А. Д.²

(НИИЦ «Курчатовский институт», Москва)

Работа посвящена задаче локализации мобильных роботов по визуальным семантическим данным. Центральным элементом такой задачи является распознавание сцен – поиск соответствия между наблюдаемыми объектами и объектами, нанесенными на карту местности (семантическая карта). Предлагаются два метода, использующие определение геометрических особенностей на наблюдаемой сцене и поиск их на карте с помощью различных подходов на графах. Предложенный способ определения отношений между объектами, использующийся в обоих методах, позволяет учитывать погрешности оценки расстояний бортовыми сенсорами. Помимо использования геометрических особенностей в работе также рассматривается применение нейросетевых моделей, которые формируют вектор признаков по изображению, тем самым позволяя определить их визуальное сходство. Визуальное сходство используется для нормирования и оценки результатов, полученных предложенными методами на основе графовых подходов. Кроме того, был модифицирован открытый набор данных KITTI-360 для оценки точности решения задач распознавания сцен. Эксперименты на полученном наборе данных продемонстрировали, что предлагаемый подход, сочетающий геометрические особенности и визуальное сходство, значительно повышает точность рассмотренных методов распознавания сцен. По результатам экспериментов сформированы некоторые рекомендации по использованию данных подходов на практике.

Ключевые слова: локализация мобильных роботов, распознавание сцен, векторное представление изображения, теория графов.

1. Введение

Задача локализации в мобильной робототехнике исконно является одной из важнейших. Навигация мобильных устройств

¹ Работа проведена в рамках выполнения государственного задания НИИЦ «Курчатовский институт».

² Антон Дмитриевич Московский, начальник группы «Системы управления», лаборатории робототехники (moscowskyad@yandex.ru).

в большинстве случаев опирается на знание о своём местоположении. Для решения задачи локализации разработано большое количество различных методов, подходящих под те или иные условия. Одним из самых распространённых на сегодня средством локализации мобильного робота без средств GNSS (спутниковой навигации) является построение плотной карты окружающей среды [29] на основе данных дальномеров, таких как LiDAR, а также средств получения глубины из изображений, например, при помощи стереозрения [23], камер со специальной подсветкой и нейросетевых моделей извлечения глубины. Карта, построенная при помощи данных средств, представляет собой трёхмерное облако точек. Из плюсов такой карты можно отметить то, что она достаточно подробна, в том числе и для того, чтобы использовать её для дальнейшей навигации, так как содержит информацию о препятствиях и других элементах среды. Выделяются две задачи: построение такой карты (методы SLAM) и локализация по готовой карте, в том числе без начальных знаний о положении (global localization).

Локализация на плотной карте происходит путём поиска места, где текущий скан (набор получаемых с сенсоров данных в момент времени) лучшим образом накладывается на данные карты, однако у методов, решающих данную задачу, есть ряд трудностей. Согласно обзору по данной тематике [26], среди открытых вопросов можно выделить проблематику ракурсов, когда лидарные данные одного и того же пространства, полученные с разных точек, имеют мало пересечений. Ещё выделяются проблемы, связанные с масштабированием подходов при увеличении размера карты. Безусловно, размер карты имеет огромное значение и для поиска точки, в которой достигается лучшее совпадение, требуется перебрать много кандидатов и, разумеется, их число растёт с ростом размера карты. Другой проблемой является симметричность и повторяемость окружения. Зачастую здания внутри и снаружи достаточно однообразны с точки зрения геометрии: может существовать несколько мест, на которые полученный с сенсоров робота скан одинаково хорошо накладывается.

В задачах SLAM эти проблемы решаются отслеживанием перемещения робота и использованием информации, получен-

ной с предыдущих шагов. То есть на больших картах требуется проводить поиск нового положения лишь в небольшой области вокруг прошлого положения робота и т.п. Однако всё ещё существует ряд случаев, когда требуется произвести локализацию «с нуля». Первый случай – это задача глобальной локализации, которая происходит при старте робота и когда предыдущее положение ему не известно. Также существует вероятность того, что метод мог ошибиться и это привело к тому, что текущие наблюдения с сенсоров не совпадают с положением робота на карте, значит, придётся пересчитывать положение заново. Также в литературе выделяется ситуация *kidnapping* – перемещение робота третьими лицами, когда он не в состоянии отследить своё смещение, а следовательно, корректно сузить пространство поиска.

Таким образом, определение положения робота без начальной информации является важной задачей в области локализации по плотным картам, однако затруднена такими факторами как симметричность, повторяемость и большими размерами пространства. Эта проблема может быть решена на **семантическом уровне** карты, так как позволяет «сузить» исследуемое пространство, оперируя объектами, а не облаками точек. Требуется видимый роботом набор объектов сопоставить с семантической картой, т.е. решить задачу **распознавания сцены**, иногда также называемую задачей сопоставления данных\объектов (*data association*).

Наличие семантической карты помимо помощи в локализации также позволяет решать ряд других задач в робототехнике. Например, задачи в области планирования [27], которые опираются на задачи человеко-машинного взаимодействия, в том числе и на естественном [22] языке.

Структура работы такова: в разделе 2 приведен обзор и анализ методов семантической локализации, в том числе с использованием графов для выделения геометрических особенностей, а также нейросетевых моделей для создания векторных представлений изображений и определения визуального сходства объектов. В разделе 3 приведена постановка задачи распознавания сцен и предложены два метода, основанные на комбинации выделения геометрических особенностей и визу-

ального сходства объектов. Раздел 4 посвящен порядку получения данных для тестирования исследуемых методов распознавания сцен и оценки их эффективности. Завершает работу раздел 5, в котором приводятся результаты проведенных экспериментов и их обсуждение.

2. Обзор работ по семантической визуальной локализации

Данная работа основана на использовании семантической карты – размеченных (с указанием класса и положения) в пространстве объектах. Однако стоит сказать, что несмотря на доминирование данного подхода в визуально-семантической локализации, он не является единственным. Активно исследуется подход локализации в поле ключевых кадров [7], в котором отсутствует семантическая карта в виде объектов. В этом подходе карта – набор компактных представлений окружающей среды, полученной по сенсорам робота. Задача локализации сводится в поиске наиболее похожего «кадра» на текущий и дальнейшее определение смещения между ними. К преимуществам такого подхода можно отнести большее «вовлечение» окружающей среды по сравнению с картой объектов, так как затрагивает еще и их окружение. Однако для данной постановки острее встают вопросы со сменой ракурса, процедурой картирования и модификации карты.

Задача построения семантической карты активно исследуется в наши дни [28]. Как упоминалось, задача сопоставления объектов решается по-разному для задач картирования и глобальной локализации. Для задач картирования преимущественно используются оптимизационные алгоритмы, примененные к данным продолжительного движения робота. Существуют и другие подходы, основанные на разных математических методах (например логический вывод, формальные грамматики), однако в этой работе будет сделан акцент на методах, использующих графовые представления, как наиболее популярном.

2.1. ГРАФОВЫЕ ПОДХОДЫ В ЛОКАЛИЗАЦИИ

Подходы на основе представления данных в виде графа привлекательны в силу своей естественности и наработанного математического аппарата. Обычно как наблюдаемая сцена, так и семантическая карта представляются в виде графа, вершины которого соответствуют наблюдаемым объектам, а рёбра – отношениям между объектами. Тут надо отметить, что нет единого подхода к тому, как формировать подобные отношения, однако так или иначе они формируются на основе евклидового расстояния между объектами.

В задачах картирования (в том числе в рамках SLAM) активно применяется семантическая информация для решения подзадачи закольцовывания (loop closing) – определения положения, в котором робот уже был, для исправления накопившихся ошибок. Этой тематике посвящен ряд работ, в которых были использованы графы [13, 20, 30]. В данной постановке требуется найти соответствие между двумя кадрами, на которых содержатся объекты.

Задача же глобальной локализации, рассматриваемая в данной работе, подразумевает поиск соответствия между одним кадром и общей картой, что не позволяет использовать наработки из [13, 20, 30], однако такой постановке также посвящен ряд работ. Например, в работах [8, 15] используется метод случайных дескрипторов для сравнения графов, а в работах [4, 16] используется поиск наибольшей клики на графе специального вида, который отражает соответствия между двумя исходными графами. Этот же подход применяется в работе [24] наряду с другими техниками, в том числе с использованием понятия изоморфизма графов.

Автором данной работы также был предложен метод распознавания сцен, в основе которого лежит поиск изоморфного подграфа [2]. Этот же метод был расширен и для работы в условиях неопределённости [3], включающих в себя ошибки первого и второго рода в системах распознавания объектов, а также высокие погрешности в локализации объектов. Метод сравнивался с методами на основе случайных дескрипторов и поиска максимальной клики и показал своё преимущество в точности работы.

Однако все рассмотренные работы опираются исключительно на геометрические особенности наблюдаемой сцены. Любые два отдельно взятых объекта одного класса номинально идентичны друг другу с точки зрения работы методов. В то же время применение моделей, генерирующих векторное представление изображения, может существенно повысить качество работы методов распознавания сцен.

2.2. МОДЕЛИ ВЕКТОРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Нейросетевые модели [25] позволяют из изображения получить вектор чисел, который обладает таким свойством, что векторы для визуально похожих объектов близки по некоторой метрике (часто – косинусному расстоянию), а для непохожих далеки. Такой подход позволяет сравнивать различные изображения, например, он активно используется для распознавания лиц. Одним из ограничений данного подхода являлось то, что получить универсальную модель для произвольных визуальных данных было проблематично и они не обладали достаточной точностью. Однако определённый прорыв в этом направлении был с введением архитектуры CLIP [21]. CLIP является примером языково-визуальной модели и одновременно обучается предсказывать векторы как для изображения, так и для текста, описывающего данное изображение. Это привело к результату, что такая модель очень робастна по отношению к произвольным визуальным данным, что позволяет её применять и в задаче локализации по естественным ориентирам.

Работа [18] использует CLIP для задачи определения типа помещения. На первом этапе при помощи CLIP определяются объекты на входном изображении путем сравнения его вектора с текстовыми запросами, содержащими название объекта. Далее при помощи большой языковой модели по распознанным объектам делается предположение о типе помещения. На последнем этапе полученный текстовый запрос вида «фото рабочего офиса» сравнивается при помощи CLIP с изображением с камеры робота. Авторы отмечают преимущество своего подхода в том, что не требуется подготавливать специально обученные на

определённые типы изображений детекторы, ровно, как и не требуется заранее определять типы помещений.

Идея напрямую использовать кодировку отдельных объектов была опробована в работе [17]. Авторами была вручную размечена трёхмерная карта, где каждый объект задавался эллипсоидом и неким текстом, его описывающим, например «деревянный офисный стол», который потом транслируется в вектор. На этапе локализации на входном изображении определяются объекты и по ним также строятся векторы с помощью CLIP. Далее происходит процедура поиска лучших соответствий между двумя наборами векторов. Авторы никак не используют на этом этапе информацию о геометрическом соотношении объектов. В результате им приходится применять многоитерационный алгоритм определения положения камеры на основе полученных кандидатов. На не очень больших картах, размером с один рабочий кабинет, предложенный метод показывает приемлемые результаты. Авторы также планируют распространить свой подход на решение задачи закольцовывания.

Таким образом, напрашивается соединение методов, работающих по «геометрическому» принципу, и методов, позволяющих определить визуальное сходство объектов путем построения их векторов.

3. Предлагаемые подходы

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача распознавания сцен представляет собой поиск элементарного соответствия между набором объектов S , что наблюдает робот посредством своих сенсоров (сцена), и полным набором объектов M – семантической картой. Каждый объект о характеризуется своим классом (k), положением (p) и визуальным образом (I):

$$(1) \quad S = \{o = \langle k, p, I \rangle\}.$$

Визуальный образ I может представляться как одним, так и несколькими изображениями объекта. Требуется найти такое соответствие между S и M , которое бы лучшим образом отража-

ло как взаиморасположение объектов, так и их визуальное сходство, при этом сохраняя класс объекта k .

3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЙ

Как уже упоминалось, данная работа будет использовать графовую абстракцию для описания множеств сцены и карты. Для формирования графа и добавления в него рёбер требуется определить так называемые отношения между объектами. В большинстве случаев делается это на основе расчёта евклидова расстояния между объектами и дальнейшей его интерпретацией. Однако на семантической карте объект обычно характеризуется положением своего центра, а на наблюдаемой сцене расстояние можно определить с помощью сенсоров, и зачастую это расстояние до видимой поверхности объекта, что часто не совпадает с физическим центром. Развитие систем трёхмерной детекции [31] по данным лидара отчасти решает такие проблемы, но не для всех конфигураций сенсоров такие методы доступны. Более классический подход – это определение объектов по двумерным изображениям и дальнейшее определение расстояния до него по карте глубины или облаку точек. При таком подходе расстояния между объектами на карте и сцене будут отличаться друг от друга. В связи с этим требуется определить способ сравнения двух расстояний между объектами в разных множествах с учётом описанной специфики.

Чтобы оценить погрешность определения расстояния, полученного таким способом, предлагается следующий подход. Положение каждого объекта в локальных координатах робота задаётся двумя величинами: углом на объект φ , для определения которого достаточно лишь изображения и параметров камеры, и расстояние до объекта r , получаемого при помощи сенсора глубины. Для определения расстояния с помощью сенсора глубины, формирующего облако точек, требуется совершить перевод этого облака в пространство изображения, а далее выделить те точки, что относятся к объекту. Для определения точек используется обрамляющий прямоугольник объекта или сегментационная маска, позволяющая отсеять лишние точки. Для определения расстояния обычно используется усреднение полученных точек, обычно в виде медианы, так как помимо усредне-

ния требуется еще отбросить точки других объектов, случайно попавших в маску. Но такой подход может плохо работать для не сплошных и частично прозрачных объектов, где попадает слишком много лишних точек. Также в зависимости от формы объекта и ракурса, с которого объект наблюдается, медиана может давать разное расстояние. Из-за этого имеет смысл пытаться определить кратчайшее расстояние до объекта и переводить его в центр объекта, зная примерные размеры данного объекта. Так как шумы за счет неточного выделения маски всё еще могут быть, то рекомендуется брать не минимальное расстояние, а отсекал выбросы, например рассчитывая первый квартиль всех расстояний до объекта.

Получив расстояние до ближайшей точки объекта описанным способом, предлагается перевести его в расстояние до центра объекта, основываясь на знании о физических размерах тех или иных объектов. На заранее размеченных данных возможно рассчитать среднюю ошибку dr между расстоянием от робота до центра объекта и расстоянием до ближайшей точки, а также среднеквадратичное отклонение этой величины σ . Данные величины должны быть рассчитаны для каждого класса объектов. Имея данные значения для расстояния и угла на объект, можно оценить погрешность расстояния между двумя объектами, которое в свою очередь рассчитывается как

$$(2) \quad D(o_1, o_2) = \sqrt{(r_1 + dr_1)^2 + (r_2 + dr_2)^2 - 2(r_1 + dr_1)(r_2 + dr_2)\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Для оценки погрешности данного значения требуется определить параметры эллипса рассеивания для каждого объекта – σr и $\sigma \varphi$, т.е. значения дисперсий данных величин. Согласно [1], дисперсии рассчитываются следующим образом из значений среднеквадратического отклонений:

$$(3) \quad \sigma r = dr^2,$$

$$(4) \quad \sigma \varphi = r^2 \left(\left(\frac{1}{\cos d\varphi} \right)^4 d\varphi + \frac{\sin d\varphi}{\cos^2 d\varphi} d\varphi^2 \right).$$

Далее, следуя принципу композиции нормальных законов, можно рассчитать результирующий эллипс рассеивания для расстояния между исходными объектами и взять радиус этого эллипса

по направлению рассчитываемого расстояния. Подробные выкладки представлены в [1], параграф 12.8, искомая величина является функцией от указанных, рассчитанных ранее значений:

$$(5) \quad \sigma D(o_1, o_2) = F(r_1 + dr_1, r_2 + dr_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma\varphi_1, \sigma\varphi_2, D).$$

Полученное значение предлагается использовать как приближение среднеквадратичного отклонения расстояния между объектами, рассчитанного по входным данным (рис. 1).

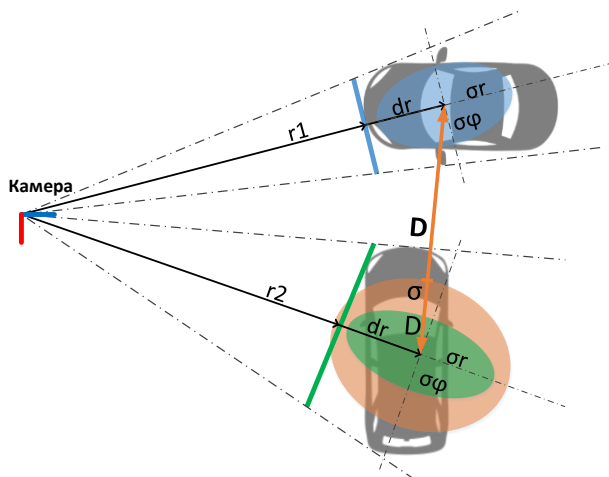


Рис. 1. Оценка погрешности измерения расстояния между двумя объектами. Синий и зелёный эллипсы – распределения положений объектов, оранжевый эллипс – результат композиции двух распределений

Рассчитав расстояние между центрами объектами по сенсорам робота и оценив его погрешность, а также имея расстояние между объектами с карты, предлагается использовать следующую меру сравнения:

$$(6) \quad p(r_1, r_2, \sigma) = e^{\frac{1}{2} \left(\frac{r_1 - r_2}{\sigma} \right)^2}.$$

Такая мера нормирована на отрезок $[0, 1]$ и учитывает погрешность измерений расстояний.

3.3. МЕТОДЫ НА ОСНОВЕ ПОИСКА ИЗОМОРФНЫХ ПОДГРАФОВ

Первые итерации данного метода излагались в работах [2, 3]. В основе метода используется алгоритм поиска изоморфного подграфа семейства VF [5, 6, 11]. Особенность данного семейства заключается в том, что оно позволяет добавлять дополнительные критерии для сравнения вершин и рёбер, например, позволяет учитывать разметку графов. Учёт разметки естественным образом может быть использован в задаче распознавания сцен. Для семантической карты и наблюдаемой сцены строятся свои графы. Каждая вершина графов соответствует своему объекту в исходных множествах. Это соответствие может выступать в качестве разметки вершин полученных графов:

$$(7) \quad G_S = \langle V_S, E_S \rangle, f_{V_S} : V_S \rightarrow S, v \in V_S, f_{V_S}(v) = o,$$

где G_S – граф сцены, состоящий из множества вершин V_S и множества рёбер E_S , а f_{V_S} – функция разметки, определяемая биекций множества вершин в S . Аналогичным образом происходит для графа карты G_M .

Далее требуется определить рёбра графов и произвести их разметку. Цель разметки – указать близкие друг к другу рёбра, при этом разметка должна быть одинаковой для графа карты и графа сцены. Для того чтобы этого добиться, предлагается сначала рассчитать все попарные расстояния (2) в множестве сцены, разбить их на подмножества по классам объектов (ворота – фонарь, светофор – столб и т.п.), а далее для каждого подмножества произвести кластеризацию. Для кластеризации предлагается воспользоваться методами иерархической кластеризации, использующими порог по сходству и разбивающими на заранее неизвестное число кластеров. Критерием кластеризации является расстояние (6) между двумя элементами, удовлетворяющее порогу τ_1 :

$$(8) \quad p(D_i, D_j, \sigma D_i + \sigma D_j) < \tau_1.$$

Таким образом разметка каждого ребра e_{ij} , соединяющего вершины v_i и v_j , есть тип отношения t (идентификатор подмножества, построенный по парам классов объектов, соответствующих вершинам) и идентификатор получившегося кластера c :

$$(9) \quad f_{E_S}(e_{ij} = (v_i, v_j)) = \langle t(k^{o_i}, k^{o_j}), c \rangle.$$

Получив кластеры и рассчитав их центроиды $\bar{D}_C$ (среднее расстояние между объектами в кластере) и среднюю ошибку кластера $\sigma\bar{D}_C$, можно выполнить классификацию рёбер в множестве карты. Для этого также считаются попарные расстояния в множестве карты, а далее каждое из них проверяется на принадлежность получившимся кластерам в соответствующем подмножестве отношений в множестве сцены. Для классификации используется та же метрика (6), однако порог для классификации τ_2 предлагается выбрать отличный от порога для кластеризации τ_1 (8):

$$(10) \quad p(D_{map}, \bar{D}_C, \sigma\bar{D}_C) < \tau_2.$$

В таком случае возможна ситуация, в которой отношение с множества карты будет отнесено сразу к нескольким классам из множества сцены. Чтобы это учитывать, на графе карты вводится свой тип разметки рёбер, который ставит ребру в соответствие тип отношения и набор идентификаторов кластеров, которым оно удовлетворяет. Все отношения, которые удовлетворяют хотя бы одному классу, добавляются на граф карты в виде рёбер с указанной разметкой:

$$(11) \quad f_{E_M}(e_{ij} = (v_i, v_j)) = \langle t(k_{o_i}, k_{o_j}), \{c\} \rangle.$$

Чтобы воспользоваться алгоритмом поиска изоморфного подграфа, требуется определить критерии сравнения вершин и рёбер. В случае с вершинами требуется лишь совпадения разметки, т.е. идентификаторов класса объекта:

$$(12) \quad v_i \in V_S, v_j \in V_M : k^{f_{V_S}(v_i)} = k^{f_{V_M}(v_j)} \rightarrow v_i \cong v_j.$$

В случае с рёбрами два ребра будут считаться идентичным, если у них совпадает тип отношения и кластер ребра сцены присутствует среди набора кластеров ребра карты:

$$(13) \quad e_i \in E_S, e_j \in E_M : t^{f_{E_S}(e_i)} = t^{f_{E_M}(e_j)}, c^{f_{E_S}(e_i)} \in \{c\}^{f_{E_M}(e_j)} \rightarrow e_i \cong e_j.$$

Реализовав эти критерии, возможно воспользоваться алгоритмом из семейства VF. На выходе алгоритм даст набор соответствий $\{f\}$ между двумя графами удовлетворяющий поставленным условиям и, разумеется, сохраняющих изоморфизм:

$$(14) \{f\}, f : S \rightarrow M.$$

Для каждого решения из $\{f\}$ требуется ввести численную оценку, выделив лучшие из них. Сделать это можно на основе степени совпадения геометрических ограничений и на основе степени совпадения визуальных образов. Как уже говорилось, задача сопоставления визуальных образов I может быть решена с помощью архитектур H формирующих векторное представление изображения h :

$$(15) H(I) = h.$$

Меры схожести полученных векторов для каждой пары объектов могут быть рассчитаны с использованием косинусного расстояния:

$$(16) u(h_1, h_2) = \frac{h_1 \cdot h_2}{\|h_1\| \|h_2\|},$$

эта метрика нормирована на отрезок $[0, 1]$. Также для каждой пары соответствий определить схожесть их расстояний по уже многократно использованной метрике (6). Обе полученные меры – для объектов и отношений – можно скомпоновать следующим образом, получив общую степень уверенности dc для каждого из полученных ответов:

$$(17) dc(f) = \frac{1}{|E_S|} \sum_{(v_i, v_j) \in E_S} u(H(I^{o_i^S}), H(I^{o_i^M})) u(H(I^{o_j^S}), H(I^{o_j^M})) \cdot p(D(o_i^S, o_j^S), D(o_i^M, o_j^M), \sigma D(o_i^S, o_j^S)), o_i^S = f_{v_s}(v_i), o_i^M = f_{v_s}(f(v_i)).$$

Однако у предложенного метода распознавания сцен на основе поиска изоморфного подграфа есть существенное ограничение. Из-за ошибок в системах распознавания на сцене могут быть распознаны «лишние» объекты, которые не представлены на семантической карте. Также такая ситуация может произойти ввиду изменчивости окружающей среды. Если на графе сцены присутствуют такие лишние объекты, то метод поиска изоморфных подграфов не найдёт решение. Для этого было предложено расширение метода, которое изложено в работе [3]. Основная идея состоит в добавлении в граф карты «ложных» вершин. Их цель соответствовать лишним объектам на графе сцены, не нарушая изоморфизм. Добавляется фиксированное число

ложных объектов для каждого класса, представленного в сцене. Число объектов зависит от качества системы распознавания и от того, как много ожидается ложных срабатываний на кадрах. Чтобы сохранять изоморфизм, к ложным вершинам проводятся рёбра для всех типов отношений t (9), что присутствуют на графе сцены. Разметка для ложных вершин – это также класс объекта, а разметка для ложных отношений (11) сводится только к его типу, построенному по соединяемым объектам. Критерий сравнения рёбер (13) для ложных элементов учитывает только сравнение типов. При такой модификации графа G_M в ответы $\{f\}$ (14) будут попадать ложные ребра и отношения, для них в результирующем коэффициенте уверенности все функции u и H , аргументом которых является ложный элемент, выбираются равным 0. Это понижает уверенность ответов с ложными элементами, однако позволяет получать решения в ситуациях с ложными распознаваниями. Конечно, такое, *мягкое* расширение метода приводит к увеличению времени исполнения. Общая схема предложенного метода представлена на рис. 2. На схеме используются обозначения S и M (1), G_S и G_M (7), f (9), u (16), p (8), D (2), dc (17).

Для снижения числа расчетов, была предложена модифицированная версия данного метода (рис. 3, на схеме используются те же обозначения, что и для рис. 2). Её отличие от ранее изложенной заключается в том, что вместо разбиения множеств рёбер на кластеры предлагается использовать критерий (10) сразу на этапе определения изоморфных подграфов, встроив в методы семейства VF. С одной стороны, это позволит быть более чувствительным к сравнению рёбер, поскольку они сравниваются напрямую, а не посредством их классов в виде центроидов. Это также потребует подбора только одного параметра τ вместо двух. С другой стороны, может увеличиться время исполнения, так как процедура сравнения требует больше вычислений, что в том числе зависит от выбора параметров методов. Все остальные моменты, включая расчёт коэффициента уверенности (17) и мягкое расширение метода, аналогичны вышеописанному.

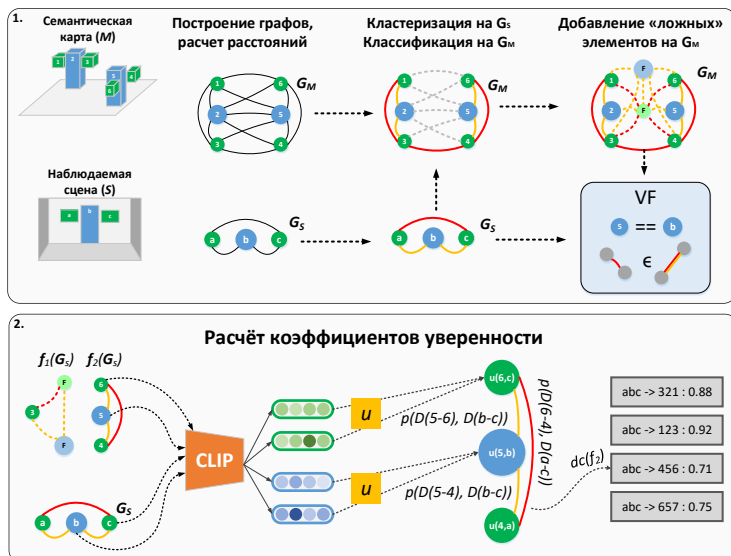


Рис. 2. Схема метода на основе поиска изоморфных подграфов

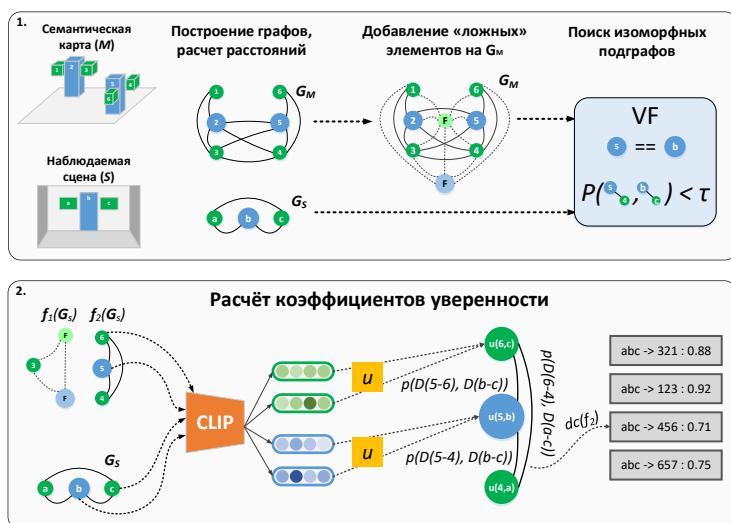


Рис. 3. Схема облегченного метода на основе поиска изоморфного подграфа

3.4. МЕТОД НА ОСНОВЕ ПОИСКА НАИБОЛЬШЕЙ КЛИКИ

Другой метод распознавания сцен основан на процедуре поиска наибольшей клики и изложен в работах [4, 16]. В основе метода лежит построение графа специального вида, где каждая вершина соответствует паре объектов одного типа из множества карты и сцены. Две вершины такого графа соединяются ребром, если разница расстояний между соответствующими исходными объектами в своих множествах не превышает заданного порога. Далее для данного графа осуществляется поиск наибольшей клики, т.е. полносвязного подграфа максимального размера. Такой подграф содержит наибольшее число геометрических пар-совпадений между двумя исходными множествами.

В работе [3] была предложена модификация данного метода с использованием предложенной меры оценки сходства расстояний (6) вместо оригинального порога по разнице расстояний. Это добавило дополнительную «чувствительность» и позволило также ввести численную оценку для до этого не различимых вариантов ответов. По проведенным экспериментам метод показал близкие результаты с методом поиска изоморфных подграфов, а также изначально адаптирован к ситуациям «лишних» данных в сцене.

Учитывая плюсы этого метода, в настоящей работе также приводится его расширение с использованием меры схожести объектов, полученной при помощи нейросетевых моделей. На этапе расчета коэффициента уверенности полученных решений добавляется попарная сверка векторизованных представлений h (15) объектов карты и сцены, как это было предложено для метода на основе поиска изоморфного подграфа (17):

$$(18) \quad dc(G_C) = \frac{1}{|E_C|} \sum_{[(o_i^M, o_i^S), (o_j^M, o_j^S)] \in E_C} u(H(I_{o_i^S}^S), H(I_{o_i^M}^M)) \cdot$$

$$u(H(I_{o_j^S}^S), H(I_{o_j^M}^M)) \cdot p(D(o_i^S, o_j^S), D(o_i^M, o_j^M), \sigma D(o_i^S, o_j^S)),$$

где G_C – клика, а E_C множество ребер данной клики. Схема предложенной модификации представлена на рис. 4. На схеме используются обозначения S и M (1), u (16), p (8), D (2), dc (18).

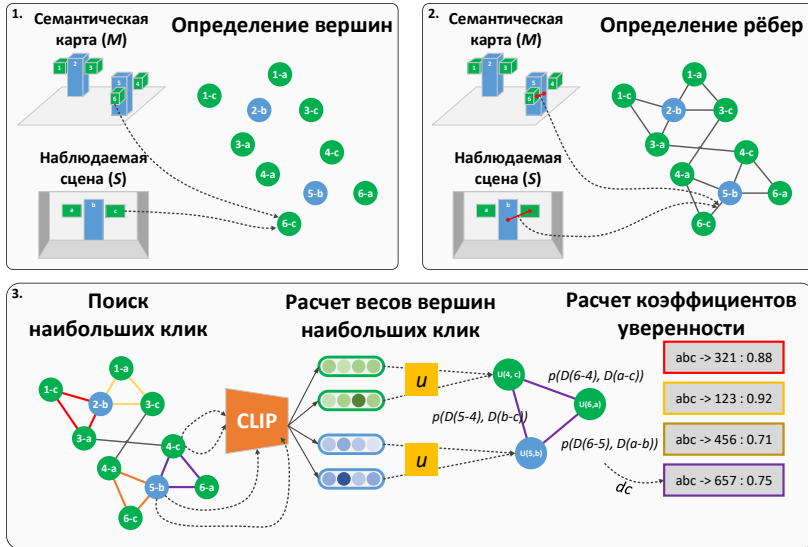


Рис. 4. Схема модифицированного метода на основе поиска наибольших клик

4. Данные для тестирования

Исследования в области распознавания сцен затрудняются отсутствием специализированных открытых наборов данных, позволяющих проводить эксперименты и осуществлять сравнение эффективности методов друг с другом. В приведённых в обзоре работах авторам приходится либо создавать собственные наборы данных, либо адаптировать наборы данных из смежных областей, например, по задаче SLAM. Среди них можно выделить наборы [9, 10, 12]. Эти наборы данных предоставляют траекторию, по которой следовала камера, изображения с неё и ряд дополнительных сенсоров, в том числе определяющих расстояния до объектов, а иногда и некую семантическую разметку. Однако для систем распознавания сцен требуется информация о семантической карте и сопоставленная с ней разметка объектов на изображениях. Поскольку о существовании такого набора данных неизвестно, приходится проводить ручную разметку объектов на карте, что, безусловно, трудоёмко

и не позволяет произвести сравнение между методами, если авторы не публикуют свои дополнительные изменения исходных наборов данных.

В представленной работе также пришлось пойти по пути модификации подходящего набора данных из смежной задачи. Для этих целей интерес представляет набор данных KITTI-360 [14], который, в отличие от своего популярного предшественника KITTY [9], обладает более подробной семантической разметкой и расширенной сенсорикой. Набор данных состоит из нескольких независимых проездов (именуемых далее последовательностями), пронумерованных двузначными числами типа 00, 02 и т.п.

4.1. ПОДГОТОВКА KITTI-360

KITTI-360 обладает трёхмерной глобальной разметкой объектов в виде параллелепипедов, которая фактически является готовой семантической картой, необходимой для задачи распознавания сцен. Также в этом наборе данных существует двумерная разметка объектов для задачи семантической сегментации изображений, что является готовой сценой. При этом для некоторых типов объектов имеется разметка экземплярной сегментации, т.е. разделение на отдельные объекты. Там, где произведена экземплярная сегментация, также выполнена глобальная привязка к идентификатору объекта, т.е. он сохраняется от кадра к кадру для одного и того же объекта. Однако эта глобальная идентификация никак не связана с упомянутой ранее трёхмерной глобальной разметкой объектов, что не позволяет использовать этот набор для задачи распознавания сцен в первозданном виде. Связь в идентификаторах объектов между картой и сценой нужна для возможности оценить точность предлагаемых методов распознавания сцен. Для решения данной проблемы и установki этого соответствия была реализована процедура сопоставления (рис. 5). Стоит отметить, что предлагаемая процедура была выполнена для ограниченного набора объектов. Так как предлагаемые методы работают со статическими и компактными в пространстве объектами, то были исключены все объекты, помеченные как динамические, а также протяженные объекты классов «дорога», «тротуар», «ограждения», «забор» и другие.

Также был удалён класс «растительность», так как помимо подходящих отдельно стоящих деревьев содержит и протяженный кустарник.

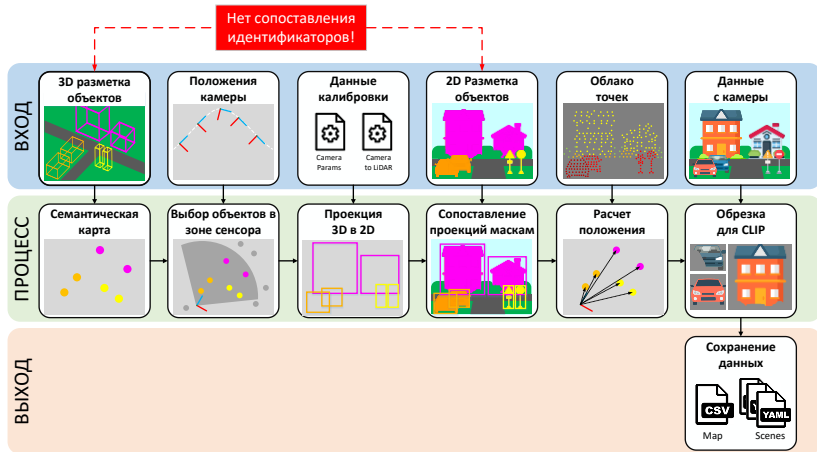


Рис. 5. Схема подготовки набора данных KITTI-360 для задачи распознавания сцен

На первом шаге трёхмерная разметка объектов переводится в семантическую карту посредством расчёта центров этих объектов. Далее для каждого положения камеры определяются видимые объекты, на основании выбранной дальности и угла раствора используемой камеры. Параллелепипеды этих объектов с трехмерной разметки далее проецируются в плоскость изображения и описываются прямоугольниками со сторонами параллельными границам изображения.

Для объектов, для которых есть экземплярная сегментация, происходит сопоставление с полученными прямоугольниками при помощи классического алгоритма решения задачи о назначениях Куна – Манкреса (Венгерский алгоритм) на основе критерия совпадения площадей этого прямоугольника и маски объекта. Для объектов без экземплярной сегментации общая маска класса объектов обрезается по полученному прямоугольнику. Полученные в результате двумерные объекты имеют общие с семантической картой идентификаторы, что позволяет чис-

ленно оценить качество сопоставления в задаче распознавания сцен.

На основе полученной маски определяется также расстояние до объектов по данным лидара. В данном подходе определяются точки лидара, попавшие в маску объекта, фильтруются точки с низкой интенсивностью. Далее несколькими методами рассчитывается расстояние до объекта: определение ближайшей точки, среднее, медианное среднее, первый квартиль, а также взвешенное среднее с учетом интенсивности точек. На основе посчитанного сопоставления был проведен анализ ошибок для каждого из предложенных методов, на рис. 6 приведены результаты для некоторых объектов.

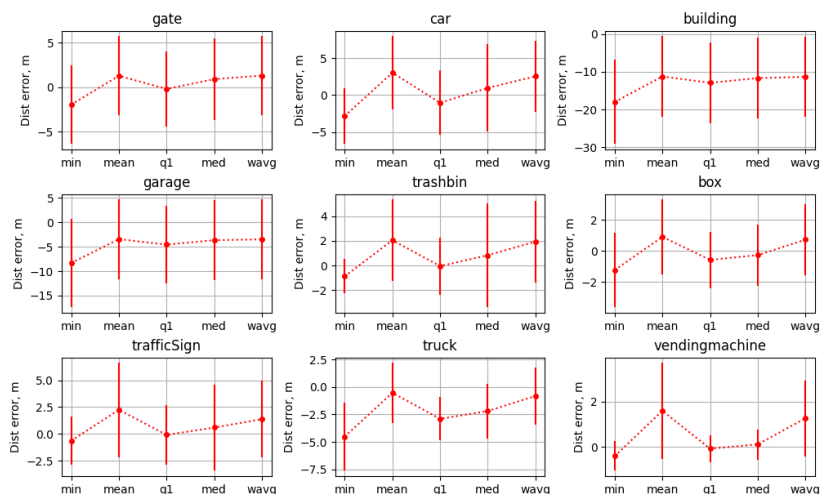


Рис. 6. Значения среднего и среднеквадратичного отклонения для каждого способа расчёта ошибки определения расстояния для некоторых типов объектов из последовательности 00

Медианное расстояние показывает меньшую ошибку, однако у первого квартиля меньше среднеквадратичное отклонение, поэтому далее в работе во всех экспериментах использовался данный метод расчёта расстояния до объектов. Помимо расстояния до объектов определяются углы на него, используя центр обрамляющего прямоугольника, который описывает полученную маску объекта. Для углов также происходит расчёт ошибок,

однако ввиду симметричности средняя ошибка выбирается равной нулю.

Также на основе обрамляющих прямоугольников и маски подготавливается изображение для входа на графический кодировщик CLIP [32]. Все пиксели обрамляющего прямоугольника, не попавшие в маску, закрашиваются нейтральным серым цветом, так как случайно попавшие другие объекты могут дать свой отрицательный вклад в результирующий вектор. Для семантической карты вектор объекта рассчитывается как среднее среди всех векторов этого объекта со всех сцен.

Объекты, попавшие в сцену, но имеющие малую площадь маски или малое число точек лидара, удаляются как ненадёжные. На финальном шаге полученная семантическая карта очищается от объектов, которые не были замечены ни на одной из сцен. Полученные таким образом данные, а также скрипт, их генерирующий, доступны онлайн [33].

Набор KITTI-360 включает себя девять разных последовательностей данных, отличающихся продолжительностью и размером карты, окружением (город\пригород) и характером движения (возвращение в ту же точку, движение в обратную сторону и т.п.). Описанная процедура сопоставления семантических данных была выполнена для каждой из последовательностей.

4.2. РАЗБИЕНИЕ НА ПОДКАРТЫ

Предлагаемые алгоритмы, описанные в работе, так или иначе основаны на методах из теории графов, которые традиционно относятся к классу NP-полных задач; это касается как поиска максимальной клики, так и поиска изоморфных подграфов. Ввиду экспоненциальной зависимости между временем исполнения и количеством объектов на исходном графе целесообразно будет разбить исходную карту на кластеры (подкарты) и производить распознавания сцен на них. Также, имея подкарты, есть возможность обрабатывать их параллельно, что тоже ускорит время исполнения. Проблемой является наличие сцен, объекты которых будут иметь истинное соответствие в разных подкартах, что может привести к падению точности вблизи границ карт. Чтобы этого избежать, предлагается разбивать на подкар-

ты с пересечениями такого размера, чтобы объекты сцены целиком попадали в одну из подкарт.

Для реализации такого разбиения выполняются следующие шаги (рис. 7):

1. Производится начальная иерархическая кластеризация объектов карты. Число кластеров определяется на основе желаемого размера подкарты. Определяются центроиды кластеров.

2. Для каждого кластера рассчитываются диаграммы направленности. С некоторым шагом вокруг центроида определяются секторы и для каждого сектора выбирается наиболее удаленный от центроида объект и рассчитывается расстояние до него.

3. Далее все полученные расстояния увеличиваются на рабочую дальность сенсора дистанции, например, лидара или стереокамеры.

4. Все объекты других начальных кластеров, попавшие в расширенный сектор, добавляются к текущему.

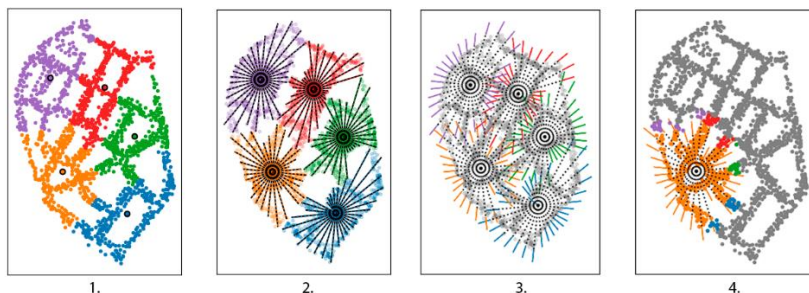


Рис. 7. Пример разделения на подкарты последовательности 09. 1 – начальная кластеризация и определение центроидов; 2 – построение диаграмм направленности; 3 – расширение диаграмм направленности; 4 – добавление новых объектов к одному из кластеров

5. Эксперименты

5.1. МЕТОДЫ И КРИТЕРИИ ТОЧНОСТИ

На полученном наборе данных сравнивались следующие методы:

- оригинальный метод на основе поиска изоморфного подграфа (*sig*), описанный в работе [3], и предлагаемое расширение метода с использованием CLIP-архитектуры (*sig_clip*);
- облегчённый вариант метода *sig_clip* (*sig_lite_clip*) и его мягкое расширение с одним ложным объектом каждого типа (*sig_lite_soft1_clip*);
- методы на основе поиска максимальной клики: реализация, выполненная по оригинальной работе [4] (*mc*), предлагаемая модификация из работы [3] (*mc+*) и предлагаемая модификация из текущей работы с использованием CLIP (*mc+_clip*);
- метод без использования геометрической информации CLIP-Loc из работы [17] (*clip_loc*). Для данного метода был введен критерий оценки решений как среднее сходства полученных соответствий (16).

Все сторонние исследуемые методы были реализованы автором лично по описаниям из соответствующих работ ввиду отсутствия их открытой реализации. Реализация методов выполнялась на языке Python и не является максимально оптимизированной с точки зрения времени исполнения, однако все действия с графами, являющиеся достаточно ресурсоёмкими процедурами, были взяты или реализованы с помощью библиотеки *igraph* [34].

Основной задачей данной работы было исследовать разницу в подходах к задаче распознавания сцен, т.е. замерить точность сопоставления объектов исходной сцены к карте, хотя обычно в литературе исследуется более общая задача и производится процедура локализации. Но поскольку в этом случае работают сразу два метода – распознавания сцен и локализации по видимым объектам, то вклад каждого метода в отдельности сложно оценить.

Зная из набора данных истинное соотношение $f': S \rightarrow M$, в ходе проведения экспериментов замерялись следующие критерии для полученного набора соответствий $\{f\}$ (14), выдаваемого исследуемыми методами:

- доля лучшего ответа (*rate*) – отношение правильно найденных соотношений между сценой и картой к размеру сце-

ны в ответе с наивысшим коэффициентом уверенности (17), (18); иллюстрирует число верных соответствий в лучшем ответе;

- счёт (score) – величина, обратно пропорциональная номеру полностью верного ответа среди всех полученных ответов, упорядоченных по убыванию коэффициента уверенности (17), (18). В случае отсутствия верного ответа равен 0; иллюстрирует позицию верного ответа в общем множестве;

- степень (degree) ответа – четыре величины, показывающие распределение ответов между категориями *полностью верный ответ* (super true) – ответ с единичным счётом; *имеется верный ответ* (has true) – ответ с не нулевым и не единичным счётом; *нет результата* (no result) – нулевой счёт при отсутствии ответов, и *нет верного результата* (wrong) – нулевой счёт при наличии ответов, т.е. полностью верного ответа нет в списке ответов, иллюстрирует общее распределение полученных ответов;

- время работы методов. В поставленных экспериментах время работы было ограничено сверху 120 секундами.

Ограничение по времени было выбрано из тех соображений, что задача глобальной локализации достаточно редко производится: в начале работы и в проблемные моменты, поэтому можно выделить намного больше времени, чем обычно требуется от непрерывных систем локализации, вынужденных работать с субсекундным временем. Также данное ограничение было выбрано ввиду большого количества данных, требующих обработки. Если метод превышал данный порог, то его доля и счёт полагались равными нулю, а степень принимала значение *нет результата*.

Данные критерии оценки точности были введены, чтобы показать с разных сторон способность методов находить правильные решения, пусть и не отмеченные как лучшие. Эта способность интересна тем, что лучшие результаты задачи распознавания сцен обычно проходят верификацию дополнительными методами, позволяющими отсеять неверные решения по различным критериям, и введенные метрики позволяют определить, какие методы лучше использовать и сколько гипотез стоит выбрать.

5.2. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Поскольку все методы имеют ряд настраиваемых параметров, влияющих как на точность, так и на время исполнения, то проводилась оптимизация параметров на отобранном наборе из 100 сцен средством *optuna* [35]. Отобранный набор из последовательности 02 содержал сцены размером от двух до двенадцати объектов в равной пропорции, т.е. по десять каждого вида. Оптимизация длилась 100 шагов и максимизировался введённый критерий доли (rate) полученного ответа и одновременно минимизировалось время работы алгоритма. Полученные параметры методов использовались во всех дальнейших экспериментах.

В поставленных экспериментах объекты «строение» и «гараж» были исключены, так как используемый метод локализации объектов даёт слишком высокую погрешность для данных классов (рис. 6). Важно отметить, что были оставлены все типы припаркованных транспортных средств («автомобиль», «грузовик», «велосипед» и т.п.) с целью увеличения среднего числа объектов на сценах. Конечно, в реальном использовании невозможно опираться на эти типы объектов при составлении семантических карт на долгосрочный период, однако в данном исследовании в первую очередь ставилась цель проверки работоспособности предложенных методов на реальных визуальных данных. В реальном использовании можно увеличить число объектов в сцене за счет таких, как «окно», «дверь», «канализационный люк», «дерево» и т.п.

Расчёты производились на компьютере с процессором AMD Ryzen7 2700X Eight-Core 3.70GHz для всех исследуемых методов и для каждой последовательности из набора данных KITTI-360 в отдельности.

5.3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Так как размер семантической карты (в числе объектов) для каждой последовательности свой, то проведено исследование зависимости выбранных параметров от этого числа. На графиках ниже представлена доля (рис. 8) и счёт (рис. 9) для каждого метода в зависимости от числа объектов на карте.

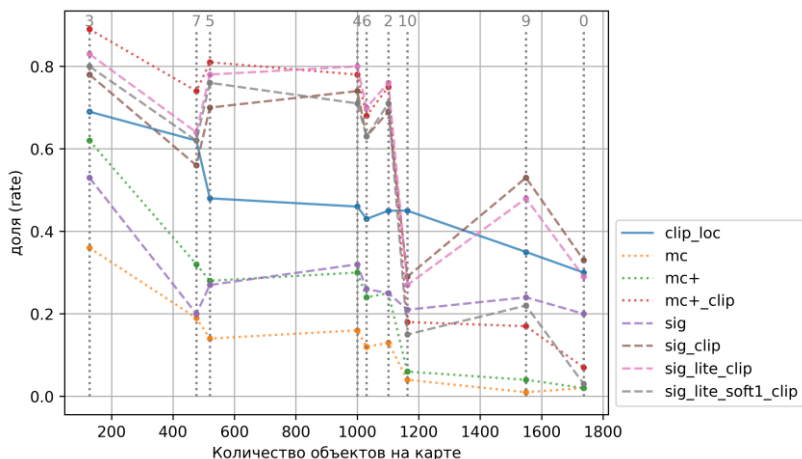


Рис. 8. Средняя для каждой последовательности доля от числа объектов на карте, числами сверху графика отмечен номер последовательности

За исключением некоторых случаев видно убывание обоих критериев точности при увеличении числа объектов. Очевидно, что чем больше карта, тем больше вероятность, что на ней будут похожие сцены, уменьшающие точность. Также размер карты влияет на время исполнения методов, что также важно при введенных ограничениях. Временные показатели приведены на рис. 10.

Общая тенденция на графиках точности (рис. 8, рис. 9) показывает, что методы с использованием визуального сходства всегда превышают свои же реализации, но без использования визуального сходства, причём значительно.

Методы семейства *mc* показывают лучшие результаты по сравнению с аналогичными им (с точки зрения использования/не использования визуального сходства) методами семейства *sig*, за исключением трёх самых больших карт. Это также может быть следствием того, что с выбранным ограничением по времени методы семейства *sig* быстрее (рис. 10), т.е. методы *mc* чаще не успевают обработать данные. Данная скорость, конечно, может быть результатом конкретной реализации используемых методов теории графов.

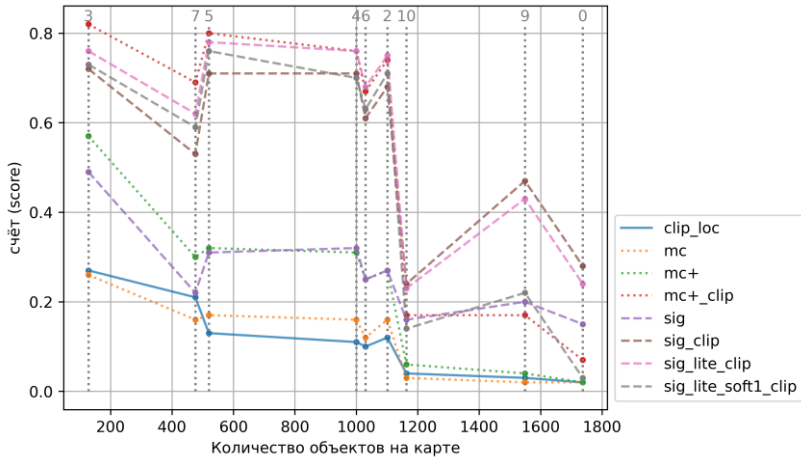


Рис. 9. Средний для каждой последовательности счёт от числа объектов на карте, числами сверху графика отмечен номер последовательности

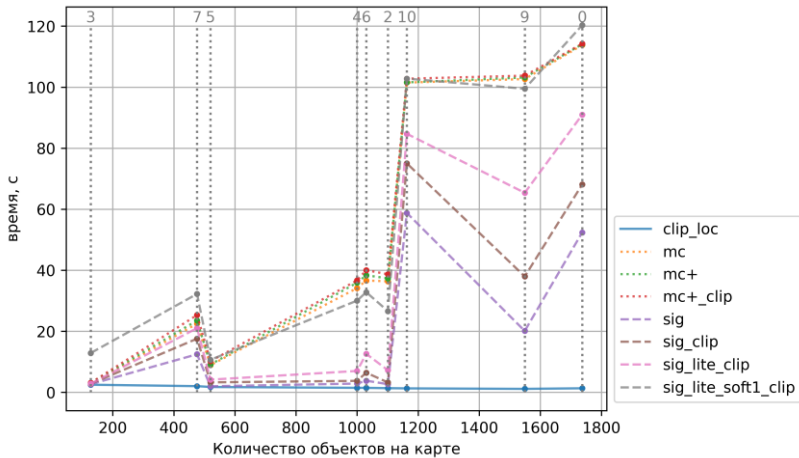


Рис. 10. Среднее время исполнения методов для каждой последовательности в зависимости от числа объектов на карте, числом сверху отмечен номер последовательности

Методы семейства *mc* также примечательны тем, что каждая последовательная их модификация (*mc+* и *mc+_clip*) увеличивает точность по обоим параметрам, при этом практически не увеличивая время.

Последовательные модификации метода *sig* также увеличивают точность за рядом нескольких исключений. Добавление визуального сходства с помощью CLIP также дало существенный скачок в точности. Облегченный вариант метода (*sig_lite_clip*) увеличивает точность и уменьшает скорость. Мягкое расширение метода (*sig_lite_soft1_clip*) уменьшает точность, вероятно также за счёт увеличения времени исполнения.

Отдельного обсуждения заслуживает метод *clip_loc* [17] поскольку он единственный из исследуемых, что использует только визуальное сходство и применяется несколько иначе, чем в оригинальной работе, и к значительно большему числу объектов на карте. По критерию доли (рис. 8) этот метод показывает весьма приемлемые результаты, опережающие все подходы только на геометрическом сравнении и иногда превосходящие даже комбинированные. Однако по критерию счёта метод показывает одни из самых низких показателей. Это говорит о том, что в целом метод в среднем верно распознаёт около половины объектов в сцене, однако верное распознавание сцены целиком для него достаточно редкая ситуация. При этом он показывает наилучшие показатели по времени, очень слабо зависящие от числа объектов на карте.

На графике среднего времени исполнения (рис. 10) примечателен скачок для последовательности 07 при сравнимом с последовательностью 05 числом объектов для всех методов, кроме *clip_loc*. Этот же скачок в виде резкого падения наблюдается и на графиках точности (рис. 8, рис. 9). Несмотря на близкое число объектов и схожую вытянутую топологию, карты этих последовательностей разнятся по наполнению, последовательность 07 содержит много однотипных объектов типа *smallPole* (рис. 11) – это столбики вдоль дорог, установленные с одинаковым интервалом, а так как они произведены заводским способом, то и выглядят одинаково. Поэтому методы, основывающиеся на геометрических особенностях и визуальном сходстве,

испытывают проблемы с такими окружениями как по точности, так и по времени.

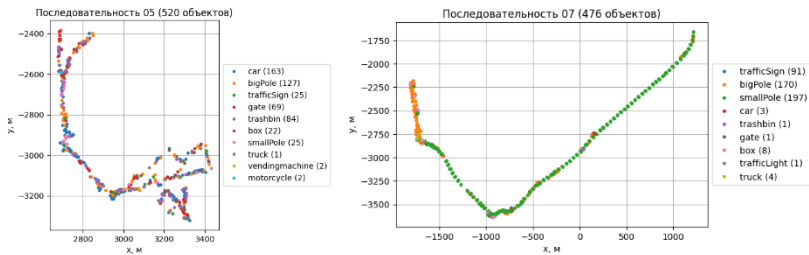


Рис. 11. Карты последовательностей 05 и 07

Были посчитаны эти же критерии для полного набора данных KITTI-360, включающего все последовательности (таблица 1). Указаны средние значения доли ($|rate|$), счёта ($|score|$) и времени ($|time|$), а также их среднеквадратичные ошибки, обозначенные символом σ .

Таблица 1. Численные результаты методов на полном наборе данных KITTI-360. Первый блок содержит метод, основанный на визуальном сходстве, второй – методы на геометрическом сходстве, и третий – методы на обоих критериях

Метод	$ rate $	$\sigma rate$	$ score $	$\sigma score$	$ time $	$\sigma time$
clip_loc	0,4	0,28	0,08	0,26	1,39	9,63
mc	0,08	0,25	0,09	0,22	66,57	48,58
mc+	0,16	0,35	0,17	0,33	67,39	48,52
sig	0,25	0,41	0,23	0,37	19,72	37,23
sig_clip	0,56	0,47	0,53	0,46	28,4	44,97
mc+_clip	0,46	0,48	0,45	0,48	68,28	48,42
sig_lite_clip	0,57	0,46	0,54	0,46	41,55	46,5
sig_lite_soft1_clip	0,43	0,48	0,43	0,47	65,3	51,09

Достаточно высокие ошибки объясняются тем, что размер сцены также влияет на скорость и качество распознавания (рис. 12).

Падение точности от размера сцены на рис. 12 также может быть следствием ограничения по времени. Общие показания для степени (degree) представлены на рис. 13.

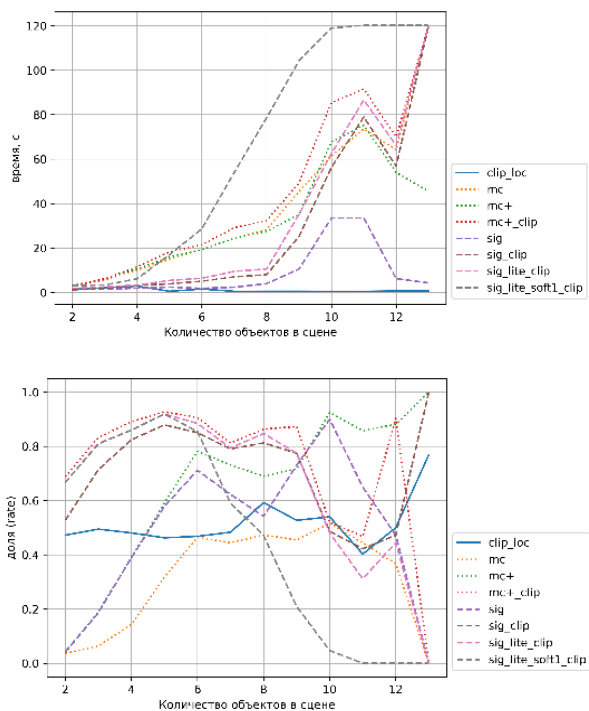


Рис. 12. Графики зависимости времени (сверху) и доли (снизу) для исследуемых методов в зависимости от числа объектов в сцене

Степень методов, изображенная на рис. 13, призвана показать возможность методов находить верный ответ. От этого будет зависеть дальнейшая стратегия по использованию результатов распознавания сцен.

Данный график также показывает, что соединение подходов на основе геометрических особенностей и визуального сходства приводит к наилучшим результатам. Однако можно отметить, что идеальное совпадение лучшего и верного ответа (*super true*) не достигает даже 50% случаев для лучших методов. Немаленький процент наличия верного ответа среди всех полученных (*has true*), а также имеющийся процент неверных решений (*wrong*) говорит о том, что требуется внедрение дополни-

тельных методов, способных оценить качество полученных решений, как, например, упомянутый метод недоопределённой локализации [19]. Такие методы должны обладать возможностью оценивать положение робота на основе нескольких гипотез и определять ошибочные объекты в ответах.

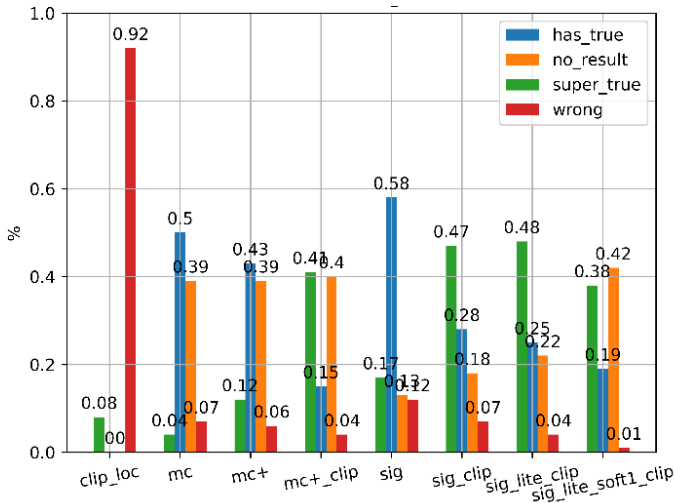


Рис. 13. Степени для исследуемых методов на наборе данных KITTI-360

Также было проведено исследование применимости описанного подхода разбиения на подкарты. Тестировались методы, показавшие лучшие результаты (*mc+_clip* и *sig_lite_clip*) и они же, только примененные к подкартам (*mc+_clip_sm*, *sig_lite_clip_sm*) последовательности 00. Эта последовательность является самой большой по числу объектов и была разделена на 11 подкарт с увеличением общего размера за счёт пересечением на 29%. Несмотря на возможность параллельной обработки подкарт, для чистоты эксперимента расчёты проводились последовательно. Значения точности в виде доли, а также времени исполнения приведены на рис. 14.

У метода *mc+_clip_sm* наблюдается значительный прирост по точности (+285%), выходящий на уровень *sig_lite_clip*, а так-

же ускорение по времени (–20%). У метода *sig_lite_clip_sm* особого изменения в точности не наблюдается, однако также фиксируется ускорение (–14%).

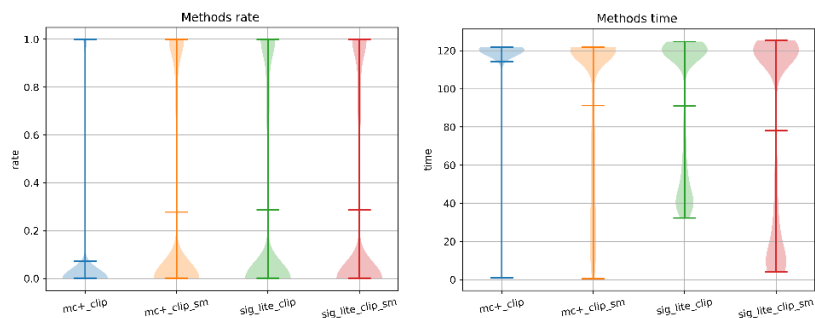


Рис. 14. Сравнение точности (доли) и времени методов работы с полной картой и подкартами

Тут стоит отметить, что в случае, когда любой из методов на подкартах не успевал закончить за отведённое время, фиксировался полученный на этот момент ответ, который мог содержать как реальный ответ, так и ошибочный, но близкий к требуемому. Поэтому на графике степени (рис. 15) также видно увеличение неверных решений (*wrong*) у методов семейства *mc*.

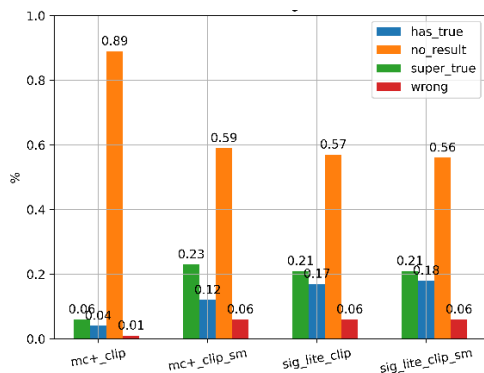


Рис. 15. Сравнение степени методов работы с полной картой и подкартами

У методов семейства *sig* практически отсутствуют изменения в точности. Таким образом, использование разбиения на подкарты потенциально позволит увеличить точность и быстродействие предлагаемых методов даже без учёта параллельного исполнения.

5.4. ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

По итогам проведённых экспериментов были сделаны следующие заключения:

1. Одновременное использование подходов на основе геометрических особенностей и визуального сходства дают наилучший результат.

2. Увеличение точности достигается путем допустимого увеличения времени исполнения методов, а также требует особого формата семантической карты и предварительного расчёта погрешностей.

3. Метод *sig_lite_clip* показал лучшую точность, однако его «мягкое» расширение *sig_lite_clip1_soft*, адаптированное под сложные ситуации, показывает сравнимые результаты с методом *mc+_clip*, который исходно адаптирован к этим ситуациям. Поэтому выбор «лучшего» метода зависит от условий конкретного применения.

4. Поскольку существует прямая зависимость времени исполнения от размера семантической карты, то была предложена процедура разбиения на подкарты, ускоряющая процессы распознавания сцен.

5. Показано падение производительности и точности в зависимости от размера сцены. Возможно, процедура обрезки сцены до некоторого числа объектов позволит ускорить процесс без потери точности.

6. Помимо зависимости от размеров сцены и карты на исследуемые методы также влияет наполнение их объектами. Множество одиноковых и периодически расположенных объектов также является трудностью ввиду отсутствия геометрических особенностей и визуальных различий.

7. Полученной точности недостаточно для использования результата распознавания сцен без дальнейшей обработки и отсеивания неверных результатов.

6. Заключение

В данной работе приведены два метода, решающие задачу распознавания сцен на основе геометрических особенностей, дополненные технологией визуального сравнения объектов на основе нейросетевой архитектуры CLIP. Результативность полученных методов и их временные характеристики были исследованы на подготовленной модификации реального набора данных KITTI-360. Эта модификация предназначена для тестирования методов распознавания сцен и опубликована в открытом доступе. Проведённые эксперименты показали значительное преимущество предложенных методов в сравнении с методами, которые основываются только на визуальном сходстве или геометрических особенностях. Утверждается, что такой результат получен за счёт использования одновременно обоих подходов. Полученный результат достигается в ущерб времени работы методов, а также требует построение семантической карты, содержащей визуальные образы объектов. Также отмечается, что несмотря на сильное повышение качества задачи распознавания сцен, полученной точности недостаточно, чтобы использовать результат без сторонних методов уточнения результата. Дальнейшими направлениями исследования будут проведение экспериментов совместно с методами оценки результата и использовании систем лидарной локализации.

Литература

1. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Теория вероятностей*. – М.: Высшая школа, 1999. – 576 с.
2. МОСКОВСКИЙ А.Д. *Распознавание сцен для задачи глобальной локализации робота* // Труды 34-й Международной научно-технической конференции «Экстремальная робототехника». – 2023. – С. 267–274.
3. МОСКОВСКИЙ А.Д. *Распознавание сцен для задач локализации мобильного робота в условиях неопределённости* // Сборник научных трудов XII Международной научно-практической конференции «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте» (ИММВ-

- 2024), Коломна, 14-17 мая 2024 г. В 2-х томах. – 2024. – Т. 2. – С. 255–266.
4. ANKENBAUER J., LUSK P.C., THOMAS A. et al. *Global Localization in Unstructured Environments using Semantic Object Maps Built from Various Viewpoints* // IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS). – IEEE, 2023. – P. 1358–1365.
 5. CARLETTI V., FOGGIA P., GRECO A. et al. *VF3-Light: A lightweight subgraph isomorphism algorithm and its experimental evaluation* // Pattern Recognition Letters. – 2019. – Vol. 125. – P. 591–596.
 6. CORDELLA L.P., FOGGIA P., SANSONE C. et al. *Performance evaluation of the VF graph matching algorithm* // Proc. of the 10th Int. Conf. on Image Analysis and Processing. – 1999. – P. 1172–1177.
 7. GARG S., FISCHER T., MILFORD M. *Where Is Your Place, Visual Place Recognition?* // Proc. of the 13th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence. – 2021. – P. 4416–4425.
 8. GAWEL A., DON C. DEL, SIEGWART R. et al. *X-View: Graph-Based Semantic Multi-View Localization* // IEEE Robot. Autom. Lett. – 2018. – Vol. 3, No. 3. – P. 1687–1694.
 9. GEIGER A., LENZ P., URTASUN R. *Are we ready for autonomous driving? The KITTI vision benchmark suite* // IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2012. – P. 3354–3361.
 10. HEWITT R.A., BOUKAS E., AZKARATE M. et al. *The Katwijk beach planetary rover dataset* // The Int. Journal of Robotics Research. – 2018. – No. 1(37). – P. 3–12.
 11. JÜTTNER A., MADARASI P. *VF2++—An improved subgraph isomorphism algorithm* // Discrete Applied Mathematics. – 2018. – Vol. 242. – P. 69–81.
 12. KERL C., STURM J., CREMERS D. *Dense visual SLAM for RGB-D cameras* // IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems. – 2013. – P. 2100–2106.
 13. KONG X., YANG X., ZHAI G. et al. *Semantic Graph Based Place Recognition for 3D Point Clouds* // IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS). – 2020. – P. 8216–8223.

14. LIAO Y., XIE J., GEIGER A. *KITTI-360: A Novel Dataset and Benchmarks for Urban Scene Understanding in 2D and 3D* // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. – 2023. – Vol. 45, No. 3. – P. 3292–3310.
15. LIU Y., PETILLOT Y., LANE D. et al. *Global Localization with Object-Level Semantics and Topology* // Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA). – 2019. – P. 4909–4915.
16. LUSK P.C., FATHIAN K., HOW J.P. *CLIPPER: A Graph-Theoretic Framework for Robust Data Association* // IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA). – 2021. – P. 13828–13834.
17. MATSUZAKI S., SUGINO T., TANAKA K. et al. *CLIP-Loc: Multi-modal Landmark Association for Global Localization in Object-based Maps* // IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA). – 2024. – P. 13673–13679.
18. MIRJALILI R., KRAWEZ M., BURGARD W. *FM-Loc: Using Foundation Models for Improved Vision-based Localization* // IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS). – 2023. – P. 1381–1387.
19. MOSCOWSKY A. *Subdefinite Computations for Reducing the Search Space in Mobile Robot Localization Task* // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). – 2021. – (12948 LNAI) – P. 180–196.
20. QIN C., ZHANG Y., LIU Y. et al. *Semantic loop closure detection based on graph matching in multi-objects scenes* // Journal of Visual Communication and Image Representation. – 2021. – Vol. 76. – P. 103072.
21. RADFORD A., KIM J.W., HALLACY C. et al. *Learning Transferable Visual Models From Natural Language Supervision* // Int. Conf. on Machine Learning. – 2021. – P. 8748–8763.
22. ROVBO M.A., SOROKOUMOV P.S. *Symbolic Control System for a Mobile Robotic Platform Based on Soar Cognitive Architecture* // Smart Electromechanical Systems. – 2022. – P. 259–275.
23. SAHILI A.R., HASSAN S., SAKHRIEH S.M. et al. *A Survey of Visual SLAM Methods* // IEEE Access. – 2023. – Vol. 11. – P. 139643–139677.

24. SHAHEER M., MILLAN-ROMERA J.A., BAVLE H. et al. *Graph-based Global Robot Localization Informing Situational Graphs with Architectural Graphs* // IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS). – 2023. – P. 9155–9162.
25. UEKI K. *Survey of Visual-Semantic Embedding Methods for Zero-Shot Image Retrieval* // 20th IEEE Int. Conf. on Machine Learning and Applications (ICMLA). – 2021. – P. 628–634.
26. YIN H., XU X., LU S. et al. *A Survey on Global LiDAR Localization: Challenges, Advances and Open Problems* // Int. Journal of Computer Vision. – 2024. – No. 8(132). – P. 3139–3171.
27. ZEMSKOVA T., STAROVEROV A., MURAVYEV K. et al. *Interactive Semantic Map Representation for Skill-Based Visual Object Navigation* // IEEE Access. – 2024. – Vol. 12. – P. 44628–44639.
28. ZHANG X.Y., ABD RAHMAN A.H., QAMAR F. *Semantic visual simultaneous localization and mapping (SLAM) using deep learning for dynamic scenes* // PeerJ Computer Science. – 2023. – Vol. 9. – P. e1628.
29. ZHANG Y., SHI P., LI J. *3D LiDAR SLAM: A survey* // The Photogrammetric Record. – 2024. – No. 186(39). – P. 457–517.
30. ZHU Y., MA Y., CHEN L. et al. *GOSMatch: Graph-of-Semantics Matching for Detecting Loop Closures in 3D LiDAR data* // IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS). – 2020. – P. 5151–5157.
31. ZIMMER W., ERCELIK E., ZHOU X. et al. *A Survey of Robust 3D Object Detection Methods in Point Clouds* // arXiv preprint. – arXiv:2204.00106.
32. <https://huggingface.co/openai/clip-vit-base-patch32>.
33. https://github.com/MoscowskyAnton/scene_recognition_kitti_360.
34. <https://python.igraph.org/en/stable/>.
35. <https://optuna.org/>.

SCENE RECOGNITION FOR THE MOBILE ROBOT GLOBAL LOCALIZATION PROBLEM BASED ON IMAGE VECTORIZATION AND GRAPHS APPROACHES

Anton Moscovsky, National Research Ceneter «Kurchatov Institute», Moscow, Head of the group (moscovskyad@yandex.ru)

Abstract: The paper is devoted to the problem of localization of mobile robots based on visual semantic data. The central element of such a problem is scene recognition task, i.e. searching for a correspondence between observed objects and objects on a semantic map. Paper proposes two methods based on definition of geometric features in the observed scene and searching for them on the map using various graph approaches. The proposed method for determining the relationships between objects, used in both methods, allows taking into account the errors in estimating distances by onboard sensors. In addition to using geometric features, the paper also considers the use of neural network models forming a feature vector based on an image, determining their visual similarity. Visual similarity is used to evaluate and sort the results obtained by the proposed methods based on graph approaches. In addition, the open KITTI-360 dataset was modified to evaluate the accuracy of solving scene recognition problems. Experiments on the resulting dataset demonstrated that the proposed approach, which combines geometric features and visual similarity, significantly increases the accuracy of the considered scene recognition methods. Based on the results of the experiments, some recommendations were formulated for the use of these approaches in practice.

Keywords: mobile robot localization, scene recognition, image vectorization, graph theory.

УДК 004.896:007.5

ББК 32.813

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.И. Алчиновым.*

*Поступила в редакцию 12.12.2024.
Опубликована 31.03.2025.*

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ДВУХ ДИПОЛЕЙ

Третьякова Е. А.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Решение задачи относительного позиционирования источника и приёмника переменного магнитного поля заключается в определении радиус-вектора между рассматриваемыми объектами и их взаимной ориентации. В данной работе ставится задача определения взаимного пространственного расположения и ориентации двух объектов в электромагнитном поле. Актуальность обусловлена необходимостью повышения точности и достоверности результатов аэроэлектроразведки, особенно при наличии наведенных помех. Рассматривается метод относительного позиционирования источника и приёмника электромагнитного поля в поле двух диполей в трехмерной постановке. Реализованы два этапа: определение радиус-вектора «источник – приемник» и взаимной ориентации между ними. Приводится методика калибровки магнитных моментов источника поля, которая необходима для применения алгоритмов. Обрабатываются экспериментальные данные новой аэроэлектроразведочной системы. Проводится сравнение результатов, полученных для различных алгоритмов позиционирования: ГНСС-решение, двумерное электромагнитное позиционирование в поле двух диполей, трехмерное электромагнитное позиционирование в поле двух диполей. Анализируется возможность применения полученного решения для увеличения качества полученных данных, а именно, для борьбы с остаточной после стандартного метода компенсации наведенной помехой неопределенной природы. Результаты исследования показывают, что использование трехмерного электромагнитного позиционирования в поле двух диполей позволяет определить взаимное расположение объектов с точностью, не уступающей стандартному решению ГНСС, и в будущем разобраться с вопросом помех, что ведет к улучшению качества данных аэроэлектроразведки.

Ключевые слова: относительное позиционирование, переменное электромагнитное поле, источник, приёмник.

1. Введение

Необходимость определения взаимного расположения двух объектов проявляется во многих технических сферах: авиация,

¹ Екатерина Алексеевна Третьякова, аспирант (ekaterina_tretikova@mail.ru).

судостроение и т.д. [7, 9, 10]. В данной работе рассмотрено практическое применение предложенных ранее алгоритмов относительного позиционирования [15] в области аэроэлектроразведки.

Аэроэлектроразведка является методом аэрогеофизической съёмки, при помощи которого исследуется распределение удельной электропроводности в верхних слоях земной коры. Во время аэроэлектроразведки оборудование устанавливается на летательном аппарате [4, 8, 18, 22]. Данный метод применяется для поиска алмазов [14, 20], воды [6, 21], золота [5, 19] и других рудных полезных ископаемых. Генерируемое источником первичное переменное магнитное поле рассматривается как поле диполя, характеристикой которого является вектор дипольного магнитного момента $\mathbf{M}$. В среде, проводящей электрический ток, переменное магнитное поле приводит к возникновению вихревых токов, порождающих вторичное магнитное поле – отклик среды. Измерителем поля в случае рассматриваемых в работе систем служит трехкомпонентный векторный индукционный приемник, который находится в буксируемой гондоле. Источник и приемник соединяет кабель-трос. Их взаимное расположение определяется радиус-вектором $\mathbf{R}$. Решение задачи определения взаимного расположения двух объектов состоит в вычислении радиус-вектора точки расположения одного объекта относительно другого, а также их взаимной ориентации.

Одной из важных проблем, с которой сталкиваются при обработке данных аэроэлектроразведки, является влияние поля неконтролируемых токов, возникающих в проводящих частях буксируемой конструкции и фюзеляжа летательного аппарата. Эти токи можно представить через вектор напряженности *наведенного* поля $\Delta \mathbf{H}$ с дипольным моментом его источника $\Delta \mathbf{M}$ (рис. 1). Наведенная помеха соизмерима с величиной отклика, поэтому её необходимо исключать из данных. Для этого проводится этап компенсации, суть которого заключается в перемещении системы на большую высоту (500–700 м), где можно пренебречь откликами от Земли и посмотреть на параметры наведенного поля. Регистрируемые приемником показания при таких условиях будут соответствовать наведенному полю –

квадратурной компоненте на высоте компенсации. После чего поправки вводятся в измерения поля на высоте съёмки.

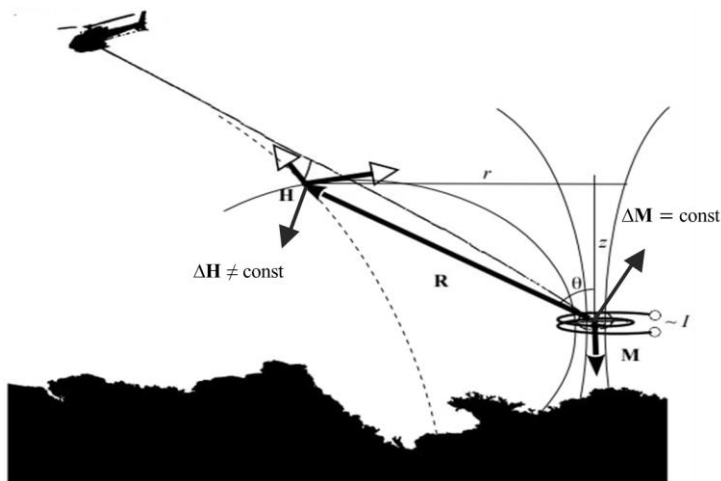


Рис. 1. Аэроэлектроразведка. $\mathbf{R}$ – радиус-вектор «источник – приемник»; $\mathbf{M}$ – вектор магнитного момента возбуждающего диполя; $\Delta\mathbf{M}$ – вектор магнитного момента наведенного поля; $\mathbf{H}$ – вектор напряженности поля возбуждающего диполя; $\Delta\mathbf{H}$ – вектор напряженности наведенного поля

Существует несколько подходов к проведению этапа компенсации. Один из них основан на предположении о незначительных перемещениях приемника относительно передатчика. В этом случае можно считать, что вектор напряжённости наведённого поля постоянный в системе координат приемника. Поэтому можно просто вычесть из измерений на рабочей высоте среднее значение помехи на высоте компенсации. Этот метод называется *pulling* [16]. Иной подход – учитывать непостоянство вектора $\Delta\mathbf{H}$, анализируя взаимное пространственное и угловое расположение передатчика и приёмника [1]. Данная работа, а также предыдущие исследования связаны с последним из представленных подходов.

Ранее использовалась модель влияния наведенной помехи в форме поля точечного диполя, которая работала в течение долгого времени и на основе которой было получено удачное решение [17]. Однако в более современных системах предъявляются повышенные требования к чувствительности приемника, при этом сокращается расстояние между передатчиком и приемником [8]. Стандартная процедура компенсации в дипольном приближении оказывается недостаточной в некоторых случаях (рис. 6). Поэтому требуется учитывать составляющие в модели наведенного поля более высокого порядка, например, квадруполь. Для этого необходимо использовать высокоточное решение задачи определения взаимного расположения передатчика и приемника.

2. Постановка задачи

Аэроэлектроразведочная зондирующая установка включает в себя источник и трехкомпонентный приемник переменного магнитного поля (рис. 2).

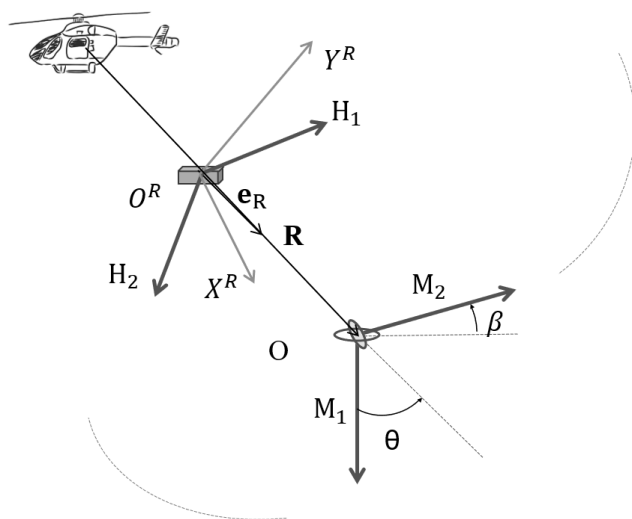


Рис. 2. Схема установки (оси Z ортогональны соответствующим парам осей X и Y)

Источником первичного поля служит система петлевых дипольных излучателей, подпитываемых переменным током на разных частотах. Плоскость основной петли расположена горизонтально, плоскость дополнительной петли расположена под углом $\eta = 90^\circ + \beta$. Значение угла β находится в интервале от 15 до 30 градусов. Вектор дипольного момента для каждой из них лежит перпендикулярно плоскости петли. Центры петель совмещены настолько это возможно для того, чтобы «совместить» магнитные диполи. Измерителем поля в случае рассматриваемой в работе системы служит трехкомпонентный векторный индукционный приемник, который находится в буксируемой гондоле. Напряженность переменного магнитного поля измеряется покомпонентно в системе координат приемника $O^R X^R Y^R Z^R$.

3. Калибровка магнитных моментов

Для применения алгоритмов определения относительного положения в пространстве по двум диполям необходимо определить величину основного и вспомогательного магнитных моментов. На рис. 3 представлен результат калибровки [12].

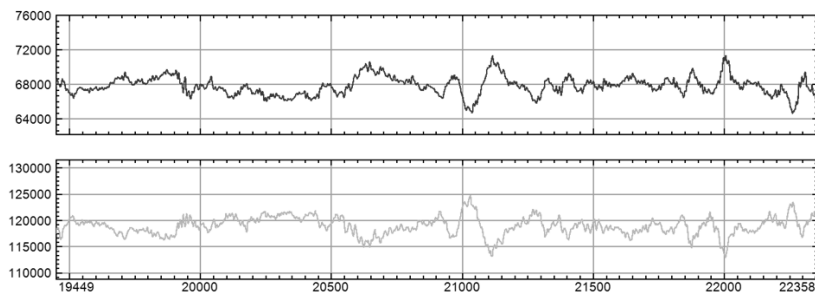


Рис. 3. Результат калибровки магнитных моментов системы (темный – основной, светлый – вспомогательный)

4. Решение задачи относительного позиционирования в пространстве

В работе [15] предложен алгоритм решения задачи электромагнитного позиционирования по полю двух диполей в трехмерной постановке. В рассматриваемом алгоритме не накладывается никаких ограничений на то, как располагаются векторы дипольных магнитных моментов. В реальности вектор вспомогательного диполя в рассматриваемой аэроэлектроразведочной установке не перпендикулярен основному, а находится к нему под тупым углом.

За основу взято соотношение для поля точечного диполя [2], записанное в матричном виде [11], [13]:

$$(1) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|^3} (3e_R e_R^T - I) \mathbf{M} = \Omega(\mathbf{R}) \mathbf{M},$$

где $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки относительно источника; $\mathbf{H}$ – вектор напряженности магнитного поля; $\mathbf{M}$ – вектор магнитного момента диполя; I – единичная матрица 3×3 .

Согласно приведенному алгоритму, последовательно определяются радиус-вектор (его модуль и направление) и углы ориентации. Анализ результатов решения задачи позиционирования проводился на экспериментальных данных систем ЕМ4Н и ЭК-ВАТОР на разных носителях.

На рис. 4 представлено сравнение результатов, полученных по трёхмерному и двумерному алгоритмам относительного позиционирования, и геометрии, полученной при помощи ГНСС-измерений (глобальная навигационная спутниковая система). Также на рис. 5 показаны результаты вычисления угла тангажа передатчика.

Таким образом, вычислен полный вектор взаимного расположения передатчика и приемника – координаты и углы ориентации. Это позволяет решать задачу компенсации паразитного влияния с более сложной моделью, чем модель диполя.

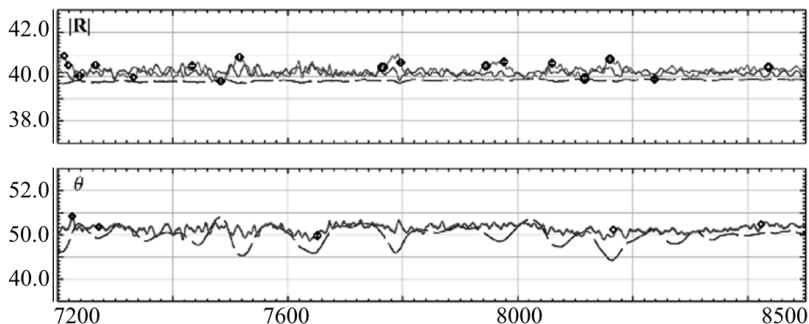


Рис. 4. Сравнение модуля радиус-вектора в метрах и угла наклона радиус-вектора, в градусах. Пунктир – ГНСС, сплошная с кругами – двумерное электромагнитное позиционирование, сплошная – трехмерное электромагнитное позиционирование

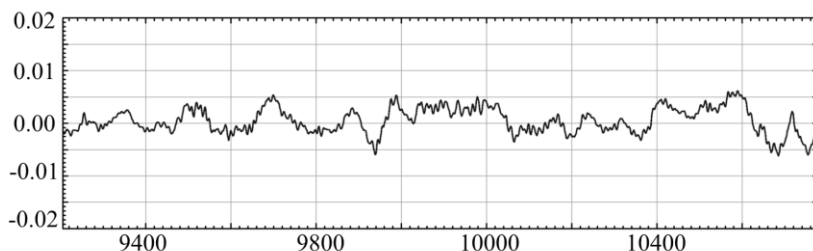


Рис. 5. Угол тангажа приемника относительно передатчика

Чувствительность приемника является величиной порядка 10^{-5} , поэтому при соблюдении точной установки (исключая систематическую ошибку) можно говорить о шумах измерения расстояния между источником и приемником, которые вычислены на порядок более точно, чем по ГНСС-решению. Вместе с тем можно заметить, что электромагнитное позиционирование дает решение, существенно отличающееся от ГНСС. Кроме того, предложенное решение позволяет вычислить углы ориентации, которые в случае применения только ГНСС решения не определяются.

5. Методы борьбы с некомпенсированной наведенной помехой

При измерении вектора напряженности поля $\mathbf{H}$ проводится процедура синхронного детектирования (когерентного накопления) в специальном цифровом вычислителе. Свертка полученного сигнала с синусом будет определять квадратурную компоненту отклика $\mathbf{H}^Q$, а с косинусом – синфазную $\mathbf{H}^I$:

$$(2) \quad \mathbf{H}^Q = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cdot \mathbf{H}_A \cdot \sin(\omega t) dt = \text{Im}(\mathbf{H}_A e^{i\varphi}),$$

$$(3) \quad \mathbf{H}^I = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cdot \mathbf{H}_A \cdot \cos(\omega t) dt = \text{Re}(\mathbf{H}_A e^{i\varphi}),$$

где $f(t)$ весовая функция когерентного накопления.

Сумма квадратурной и синфазной компонент задает комплексную амплитуду $\mathbf{H}_A e^{i\varphi}$:

$$(4) \quad \mathbf{H}_A e^{i\varphi} = \mathbf{H}^I + i \cdot \mathbf{H}^Q.$$

Как уже отмечалось выше, квадратурная компонента на высоте, при которой проводится этап компенсации, будет соответствовать наведенной помехе. В идеальных условиях отсутствия помех квадратурная составляющая должна быть равна нулю [3]. Существует проблема «недо-компенсации» рассматриваемой помехи, имеющей нехарактерное поведение. Это сказывается в наибольшей степени на измерениях вертикальной компоненты поля. На рис. 6 представлены измерения трех квадратурных компонент поля после процедуры компенсации (боковая, вертикальная и продольная) для вертолетной системы ЕМ4Н.

Установка ЕМ4Н [1], работающая только в частотной области, имеет буксируемую петлю источника в вертолетном варианте (рис. 1). Она представляет собой систему для определения удельной электропроводности на исследуемых площадях, подходящую для разведки полезных ископаемых, оценки ресурсов подземных вод, геологического картирования, детального изучения потенциальных полезных ископаемых. Система генери-

рует четыре синусоидальных сигнала на частотах от 130 Гц до 8 кГц.

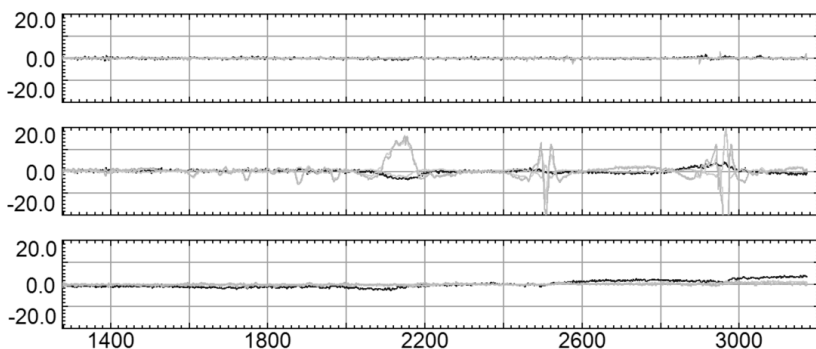


Рис. 6. Квадратурные компоненты поля после компенсации: боковая, вертикальная и продольная (сверху вниз соответственно)

Ставится задача, которая заключается в моделировании наведенной помехи. Результаты моделирования будут рассматриваться как поправка для измерений. Предполагается сравнить несколько подходов к моделированию помехи: рассмотреть квадрупольную модель поля, при помощи МНК подобрать параметры квадратичной формы. Для этих целей будут использоваться полученные результаты относительного позиционирования.

5.1. КВАДРУПОЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Все рассуждения, приводимые в работе, основываются на квазистационарной модели электромагнитного поля [2]. Рассмотрим первое уравнение Максвелла в общей постановке:

$$(5) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{d\mathbf{D}}{dt}.$$

В квазистационарной постановке в первом уравнении Максвелла пренебрегают токами смещения:

$$(6) \quad \frac{d\mathbf{D}}{dt} = 0, \mathbf{j} = 0 \rightarrow \mathbf{H} = -\nabla \varphi,$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \rightarrow \nabla \mathbf{B} = 0 = \mu_0 \nabla(-\nabla \varphi) \rightarrow \Delta \varphi = 0,$$

где $\mathbf{B}$ – индукция магнитного поля, $\mathbf{D}$ – электрическая индукция, $\mathbf{j}$ – плотность токов проводимости, ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Рассмотрим общий вид потенциала:

$$(7) \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \theta}} = \frac{1}{R'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{R'} \right)^n P_n \cos \theta.$$

R – радиус-вектор рассматриваемой точки пространства (приемник), R' – радиус-вектор источника поля, θ – угол между векторами. В частности, дипольному приближению соответствует первое приближение, которое содержит квадрат координаты:

$$(8) \quad \varphi_1 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{d}}{R'^3},$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{3(\mathbf{R}' \cdot \mathbf{d}) - R'^2 \cdot \mathbf{d}}{R'^5}.$$

Дипольное приближение для моделирования наведенной помехи оказалось недостаточным, смотря на рис. 6. Поэтому было расписано поле квадрупольного, которое включает в себя координаты в первой и третьей степенях:

$$(9) \quad \varphi_2 = \frac{Q_{\alpha\beta}}{8\pi} \cdot \frac{\mathbf{R}'^\alpha \cdot \mathbf{R}'^\beta}{R'^5},$$

$$\mathbf{H}_2^\gamma = \frac{5}{8\pi} \cdot \frac{Q_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{R}'^\alpha \cdot \mathbf{R}'^\beta \cdot \mathbf{R}'^\gamma}{R'^7} - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q_{\gamma\beta} \cdot \mathbf{R}'^\beta}{R'^5}.$$

В дальнейшем планируется объединить дипольное и квадрупольное решение, которое будет соответствовать полной кубической форме зависимости.

5.2. РАЗЛОЖЕНИЕ НАВЕДЕННОГО ПОЛЯ ПО КОМПОНЕНТАМ РАДИУС-ВЕКТОРА

В результате решения задачи относительного позиционирования были получены компоненты радиус-вектора в системе координат передатчика. При помощи полученного вектора были разложены рассмотренные квадратурные компоненты для каждой из четырех частот. На рис. 7 представлены начальные этапы моделирования наведенного поля. Видно, что местами полученные результаты отличаются от реальных измерений, однако это имеет объяснение. Во-первых, добиться большего соответствия можно предварительной фильтрацией данных, на этом этапе для чистоты эксперимента были взяты сырые данные. Во-вторых, разложение наведенного поля через полином второй степени, коэффициенты которого подбирались МНК, является не полным и недостаточным, так как мы уже выяснили необходимость рассмотрения квадрупольной составляющей. В-третьих, планируется осуществить представление вектора наведенной помехи через полином третьей степени или же последующих степеней.

6. Заключение

- Реализован алгоритм, определяющий радиус-вектор между источником и приёмником электромагнитного поля, а также их взаимную ориентацию в трехмерном пространстве;
- Приведена методика калибровки магнитных моментов источника поля, что является необходимой частью для решения задачи относительного позиционирования;
- Определение расстояния в трехмерной постановке отличается от ГНСС и двумерного решений не более, чем на 0.5% от среднего значения исследуемой величины.
- Определение угла на гондолу в трехмерной постановке отличается от ГНСС и двумерного решений не более, чем на 2.5% от среднего значения исследуемой величины.
- Относительное позиционирование в поле двух диполей может обеспечить точность, не уступающую стандартному решению спутниковой навигационной системы.
- Результаты работы алгоритмов относительного позиционирования можно применять для компенсации наведенной по-

межи в нелинейной постановке. В перспективе стоит задача разработки методики для компенсации такой помехи.

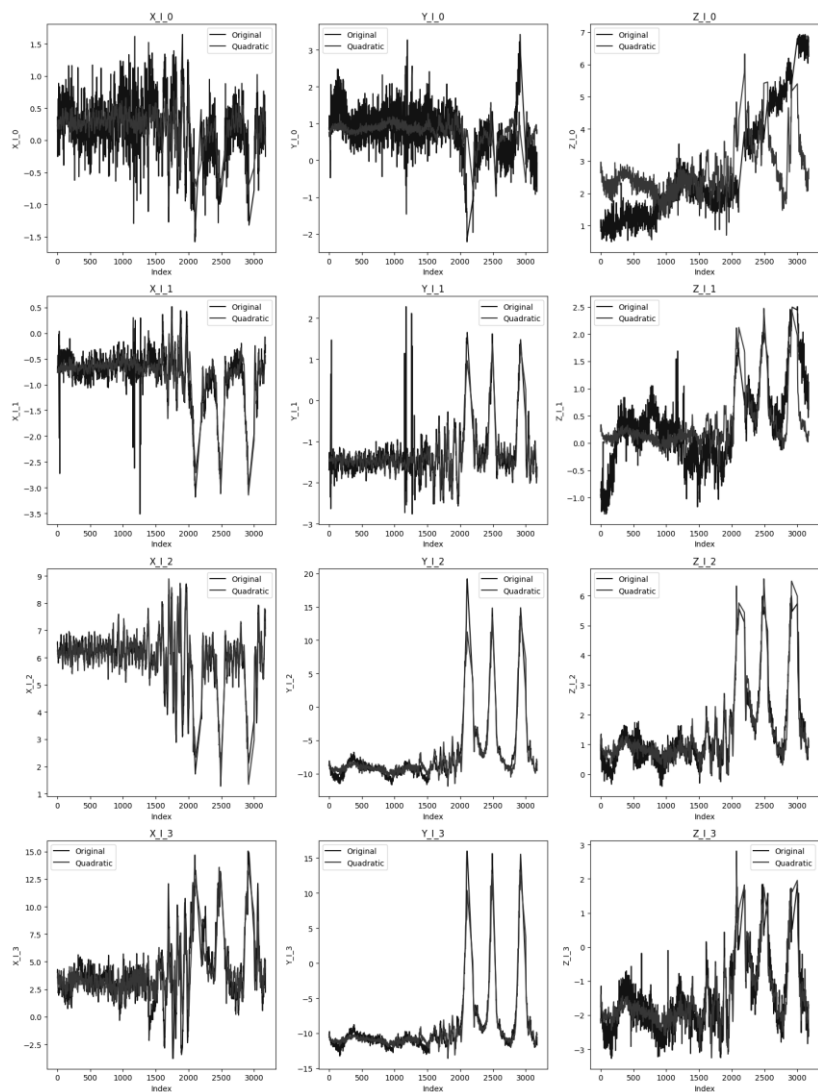


Рис. 7. Моделирование наведенной помехи при помощи разложения поля по компонентам радиус вектора. Темный – реальные данные, светлый – смоделированные данные

Литература

1. ВОЛКОВИЦКИЙ А.К., КАРШАКОВ Е.В., ПОПОВИЧ В.В. *Низкочастотная индуктивная аэроэлектроразведочная система ЕМ-4Н* // Записки Горного института. – 2009. – Т. 183. – С. 224–227.
2. ЖДАНОВ М.С. *Электроразведка*. Учебник для вузов. – М.: Недра, 1986. – С. 316.
3. ЖЕЛАМСКИЙ М.В. *Первая отечественная система магнитного позиционирования* // Датчики и системы. – 2009. – №1. – С. 2–7.
4. *Инструкция по электроразведке: наземная электроразведка, скважинная электроразведка, шахто-рудничная электроразведка, аэроэлектроразведка, морская электроразведка* // Под ред. Л.А. Рейхерт. – Л.: Недра, 1984. – С. 352.
5. КЕРЦМАН В.М., МОЙЛАНЕН Е.В., ПОДМОГОВ Ю.Г. *Применение аэрогеофизики в зоне Центрально-Африканского разлома, на золоторудных месторождениях в Иркутской области (Сухой Лог, Урях) и в Якутии* // Золото и технологии. – 2020. – №4. – С. 74–80.
6. КОЗАК С.З., АГЕЕВ В.В., МОЙЛАНЕН Е.В. и др. *Комплексирование наземной и вертолетной электроразведки методом переходных процессов при выделении участков, перспективных для бурения на воду (на 228 примере Якутии)* // Инженерные изыскания. – 2015. – №10–11. – С. 42–45.
7. КОЛЕСНИКОВ М.П., МАРТЫНОВА Л.А., ПАШКЕВИЧ И.В. и др. *Метод позиционирования автономного необитаемого подводного аппарата в процессе приведения к причальному устройству* // Изв. Тул. гос. ун-та. Технические науки. – 2015. – №11. – С. 38–48.
8. МОЙЛАНЕН Е.В. *Современные методы аэроэлектроразведки* // Физика Земли. – 2022. – Т. 68, №5. – С. 171–180
9. НЕБЫЛОВ А.В., ПЕРЛЮК В.В., ЛЕОНТЬЕВА Т.С. *Исследование технологии взаимной навигации и ориентации малых космических аппаратов в группе* // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2019. – Т. 18, №1. – С. 88–93.

10. ОБОЛЕНСКИЙ Ю.Г., ПОХВАЛЕНСКИЙ В.Л., ЧЕГЛАКОВ Д.И. *Алгоритм автоматического управления летательным аппаратом при дозаправке топливом в воздухе* // Труды МАИ. – 2013. – №65. – С. 1–17.
11. ПАВЛОВ Б.В., ВОЛКОВИЦКИЙ А.К., КАРШАКОВ Е.В. *Низкочастотная электромагнитная система относительной навигации и ориентации* // Гироскопия и навигация. – 2010. – С. 3–15.
12. ТРЕТЬЯКОВА Е.А. *Решение задачи относительного позиционирования в электромагнитном поле двух диполей* // Труды 19-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2023, Воронеж). – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2023. – С. 401–407.
13. ТХОРЕНКО М.Ю., КАРШАКОВ Е.В., ПАВЛОВ Б.В. и др. *Алгоритм позиционирования подвижного объекта в низкочастотном электромагнитном поле* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №11. – С. 160–173.
14. ФЕЛИКС Ж.Т., КАРШАКОВ Е.В., МЕЛЬНИКОВ П.В. и др. *Результаты сопоставления данных аэро- и наземных электроразведочных систем, используемых при поисках кимберлитов в республике Ангола* // Геофизика. – 2014. – №4. – С. 17–22.
15. BARABANOVA L.P., BARABANOV O.O. *Effective solution of the problem of electromagnetic positioning based on two-axial radiator* // Journal of Mathematical Sciences. – 2021. – Vol. 255, No. 5. – P. 551–560.
16. BRODIE R., SAMBRIDGE M. *A holistic approach to inversion of frequency-domain airborne EM data* // Geophysics. – 2006. – Vol. 71, No. 6. – P. 301–312.
17. KARSHAKOV E.V., TRETYAKOVA E.A., KAPLUN D.V. *Analysis of the self-interference model and compensation methods in airborne electromagnetics* // Short abstracts of the 8th Workshop on Airborne Electromagnetics (AEM 2023, Fitzroy Island). Fitzroy Island: Australian Society of Exploration Geophysicists. – 2023. – Vol. 2023 (2). – P. 97–100 (1–4).

18. LEGAULT J.M. *Airborne Electromagnetic Systems – State of the Art and Future Directions* // CSEG Recorder. – 2015. – Vol. 40, No. 6. – P. 38–49.
19. LEGAULT J.M., KWAN K., GREIG J. et al. *Targeting epithermal Au-Ag using helicopter TDEM, magnetic, and radio-metric data at Lawyers Project, North-Central BC, Canada* // Proc. of the 8th Int. Airborne Electromagnetics Workshop, (AEM-2023). – P. 1-6.
20. PERSOVA M.G., SOLOVEICHNIK Y.G., TRIGUBOVICH G.M. et al. *Geometric 3-D inversion of airborne time-domain electromagnetic data with applications to kimberlite pipes prospecting in a complex medium* // Journal of Applied Geophysics. – 2022. – Vol. 200. – Art. 104611.
21. RUTHERFORD J., IBRAHIMI T., MUNDAY T. et al. *An Assessment of Water Sources for Heritage Listed Organic Mound Springs in NW Australia Using Airborne Geophysical (Electromagnetics and Magnetics) and Satellite Remote Sensing Methods* // Journal of Remote Sensing. – 2023. – Vol. 13(7):1288. – P. 1-30.
22. TELFORD W.M., GELDART L.R. AND SHERIF R.E. *Applied Geophysics*. – Cambridge University Press. – 2004. – P. 744.

EXPERIENCE OF APPLYING RELATIVE POSITIONING ALGORITHMS IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD OF TWO DIPOLES

Ekaterina Tretiakova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Graduate Student
(ekaterina_tretikova@mail.ru).

Abstract: The solution of the problem of relative positioning of the alternating magnetic field transmitter and the receiver is to determine the radius vector between the objects under consideration and their mutual orientation. In this paper, determining the mutual spatial location and orientation of two objects in an electromagnetic field problem is set. The relevance is due to the need to improve the accuracy and reliability of the airborne electrical exploration results, especially in the presence of induced interference. The method of electromagnetic field source and receiver relative positioning in the field of two dipoles in a three-dimensional formulation is considered. Two stages are implemented: determining the source-receiver radius

vector and their mutual orientation. A technique for calibrating the field source magnetic moments, which is necessary for applying the algorithms, is given. Experimental data of a new airborne electrical exploration system were processed. The results obtained for different positioning algorithms are compared: GNSS solution, two-dimensional electromagnetic positioning in the field of two dipoles, three-dimensional electromagnetic positioning in the field of two dipoles. The possibility of using the obtained solution to improve the quality of the obtained data is analyzed, namely, to control the uncertain nature residual induced interference after the standard compensation method. The study results show that the use of three-dimensional electromagnetic positioning in the two dipoles field allows determining the objects relative position with an accuracy not inferior to the standard GNSS solution, and in the future to deal with the issue of interference, which leads to an improvement in the quality of airborne electrical exploration data.

Keywords: relative positioning, alternating magnetic field, transmitter, receiver.

УДК 527.62+ 519.24

ББК 30в6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Б.Р. Андриевским.*

*Поступила в редакцию 11.11.2024.
Опубликована 31.03.2025.*