СИНТЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО ИЗМЕРЯЕМОМУ ВЫХОДУ ПРИ ВЫПОЛНИМОСТИ УСЛОВИЯ КИМУРЫ[1]

Мухин А. В.[2]
(*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород*)

Многие задачи управления, такие, например, как поиск стабилизирующих законов управления по измеряемому выходу, выражаются в виде билинейных матричных неравенств. Решение таких неравенств на основе итерационных алгоритмов сопровождается немалыми временными затратами, особенно в случае большеразмерных систем. Если при данных начальных значениях решение не найдено, то повторение вычислений с иными начальными значениями не гарантирует успеха. Причина кроется в невыпуклости множеств допустимых значений билинейных матричных неравенств. В статье исследована возможность сведения билинейных матричных неравенств к линейным матричным неравенствам путем замены произвольной матрицы функции Ляпунова блочно-диагональной. Достаточное условие для такой замены – выполнение условия Кимуры. Доказано, что необходимые условия разрешимости линейного матричного неравенства удовлетворяются с помощью двух обратимых линейных преобразований базиса системы. Для исследования разрешимости задачи синтеза в рамках линейных матричных неравенств проводились вычислительные эксперименты, в которых случайным образом генерировались 1000 линейных систем. На основании результатов вычислительных экспериментов высказана гипотеза, согласно которой, условие Кимуры является достаточным условием сведения билинейных матричных неравенств к линейным матричным неравенствам с непустыми множествами допустимых значений.

Ключевые слова: законы управления по измеряемому выходу, условие Кимуры, линейные матричные неравенства, гурвицева матрица.

1. Введение

Несмотря на наличие итерационных алгоритмов решения билинейных матричных неравенств [1, 4, 9–13, 18], желание свести задачу к решению линейного матричного неравенства вполне обосновано. Как следует из [20], в общем случае это

---

[1] *Работа выполнена при поддержке Министерство науки и высшего образования РФ, государственное задание FSWR-2023-0034.*

[2] *Алексей Валерьевич Мухин, м.н.с.* (*muhin-aleksei@yandex.ru*).

вряд ли возможно. Тем не менее в некоторых частных случаях и отельных классах задач это удается. Обзор некоторых из них приведен в работах [2, 19]. Следует отметить, что их количество пополняется, о чем свидетельствуют работы [6, 7, 16, 17].

В статье показано, что если выполняется условие Кимуры нулевого порядка [15], т.е. сумма размерностей векторов входа и выходов превышает размерность пространства состояний линейной управляемой и наблюдаемой системы, то решение задачи синтеза стабилизирующих регуляторов по измеряемому выходу можно свести к решению линейного матричного неравенства. Результаты вычислительных экспериментов дают основания считать, что полученное линейное матричное неравенство имеет непустое множество допустимых значений. По итогам вычислительных экспериментов сформулирована соответствующая гипотеза.

2. Формулировка задачи

Для поиска стабилизирующих законов управления по измеряемому выходу для управляемой и наблюдаемой линейной системы, определяемой в произвольном базисе тройкой матриц $\widetilde{\Sigma} = (A, B, C)$, в общем случае требуется решить матричное неравенство

(1) $A_c Y + Y A_c^{\mathrm{T}} = \left(A + BKC\right)Y + Y\left(A + BKC\right)^{\mathrm{T}} = AY + BKCY + (*)^{\mathrm{T}} \prec 0$

относительно $Y \in R^{n\times n} \succ 0$ и $K \in R^{m\times p}$. Здесь $A \in R^{n\times n}$ – матрица системы, $B \in R^{n\times m}$ – матрица входа и $C \in R^{p\times n}$ – матрица выхода. Разрешимость (1) означает, что существует положительно определенная матрица Y и матрица K, обеспечивающие отрицательную определённость матрицы $A_c Y + Y A_c^{\mathrm{T}}$. Не умаляя общности, полагаем, что матрицы B и C имеют полный столбцовый и строчный ранг соответственно. Для определённости будем считать, что $p \geq m$. Это требование всегда может быть обеспечено транспонированием системы. Трудность решения (1) связана с невыпуклостью множества допустимых значений. Применив лемму исключения матрицы K [5, 14], неравенство

(1) заменяется двумя линейными матричными неравенствами относительно двух взаимообратных матриц:

(2) $\mathcal{N}_{B^{\mathrm{T}}}^{\mathrm{T}}\big(AY+(*)^{\mathrm{T}}\big)\mathcal{N}_{B^{\mathrm{T}}} \prec 0,$

$\mathcal{N}_{C}^{\mathrm{T}}\big(XA+(*)^{\mathrm{T}}\big)\mathcal{N}_{C} \prec 0,$

где матрицы $\mathcal{N}_{B^{\mathrm{T}}}$ и $\mathcal{N}_{C}$ образуют ядра B^{T} и C соответственно. Равенство $XY = I$ не позволяет решать (2) методами выпуклой оптимизации. Заметим, что к подобной системе неравенств сводятся и многие другие задачи синтеза [1, 3]. Итак, в общем случае решение задачи поиска стабилизирующей матрицы K представляет задачу невыпуклой оптимизации. Труднорешаемость (1) доказана в [20]. Исследуем возможность замены (1) линейным матричным неравенством для задач, в которых выполняется условие Кимуры нулевого порядка [15]:

(3) $m + p > n.$

Ввиду того, что цель стабилизирующих законов управления состоит в обеспечении устойчивости системы, то достаточно, чтобы линейное матричное неравенство, которым заменятся (1), имело непустое множество допустимых значений. Так как (3) есть достаточное условие разрешимости задачи о назначении полюсов для управляемой и наблюдаемой системы [8, 15], то оно является также достаточным условием разрешимости более слабой задачи – стабилизации. Однако из (3) еще не следует явно, что (1) можно заменить линейным матричным неравенством. Исследованию этой задачи посвящены последующие разделы.

3. Решение (1) в классе блочно-диагональных матриц функции Ляпунова

Матрица функции Ляпунова $Y \succ 0$ в (1) является произвольной положительно определенной матрицей. Рассмотрим (1), когда матрица функции Ляпунова имеет блочно-диагональную структуру. Предположим, что матрица выхода задана в виде

(4) $C = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix}.$

Произведение CY принимает в таком случае вид

$$CY = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix},$$

где $Y_{11} \in R^{p\times p}$.

Обозначив $\widetilde{M} = KY_{11}$, видим, что неравенство (1) преобразуется в линейное матричное неравенство:

$$(5) \quad A\begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix} + BKY_{11}C + (*)^{\mathrm{T}} \prec 0.$$

Таким образом, если матрица функции Ляпунова блочно-однородная и матрица выхода удовлетворят (4), то (1) преобразуется в линейное матричное неравенство (5). Прежде чем переходить к исследованию разрешимости (5), выясним необходимые условия разрешимости. Для этого приведем сумму матриц в левой части (5) к одной симметрической матрице. Разобьем матрицы системы $\widetilde{\Sigma}$ на блоки следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \end{pmatrix},$$

где $A_{11} \in R^{p\times p}$;$B_{11} \in R^{p\times m}$; $C_{11} \in R^{p\times p}$.

После этого левая часть (5) принимает вид симметрической матрицы с неизвестными $Y_{11} \succ 0$, $Y_{22} \succ 0$ и $\widetilde{M}$:

$$(6) \quad \begin{pmatrix} A_{11}Y_{11} + B_{11}\widetilde{M} + (*)^{\mathrm{T}} & A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^{\mathrm{T}} + \widetilde{M}^{\mathrm{T}}B_{21}^{\mathrm{T}} \\ (*)^{\mathrm{T}} & A_{22}Y_{22} + (*)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \prec 0.$$

В случае разрешимости (6) матрица регулятора находится из равенства $K = \widetilde{M}Y_{11}^{-1}$. Для отрицательной определённости (6) необходимо, чтобы оба диагональных блока были отрицательно определены. Таким образом, для разрешимости (5) необходимо, чтобы удовлетворялись три условия:

$$(7) \quad C = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix},$$

$$(8) \quad \sigma_{max}\left(A_{22} \in R^{(n-p)\times(n-p)}\right) < 0,$$

$$(9) \quad rank\begin{pmatrix} \lambda I - A_{11} & B_{11} \end{pmatrix} = p \quad \forall\lambda \in \left\{\sigma\left(A_{11}\right) \cap \left\{\mathbb{C}^{+} \cup 0\right\}\right\}.$$

Под символом $\sigma_{max}(*)$ в (8) понимается спектральная абсцисса матрицы. Условие (9) равносильно стабилизируемости пары

(A_{11}, B_{11}). Понятно, что если $B_{11} = 0$, то пара (A_{11}, B_{11}) не может быть стабилизируемой. Так как $B_{11} = CB$, а из (3) следует, что $CB \neq 0 \ \forall C, B$, то и $B_{11} \neq 0$, т.е. условие (3) есть достаточное условие для $B_{11} \neq 0$. Ненулевое произведение матриц C и B возможно и в случаях, когда условие (3) не выполняется.

4. Преобразования базиса системы

Докажем, что существует такой базис в пространстве состояний системы $\widetilde{\Sigma}$, в котором совместно выполняются условия (7)–(8).

Теорема 1. *Существует такой базис в пространстве состояний для системы $\widetilde{\Sigma}$, в котором совместно выполняются условия* (7)–(8).

Доказательство. Выполним линейное преобразование базиса системы $\widetilde{\Sigma}$ посредством обратимой блочной матрицы

$$\mathscr{T} = \begin{pmatrix} C \\ (\mathscr{N}_C^{\mathrm{T}} \mathscr{N}_C)^{-1} \mathscr{N}_C^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

где $\mathscr{N}_C$ – ядро матрицы C.

Из равенства $\mathscr{T}\mathscr{T}^{-1} = I$ находим обратную матрицу:

$$\mathscr{T}^{-1} = \begin{pmatrix} C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1} & \mathscr{N}_C \end{pmatrix}.$$

Выполнив линейное преобразование вида $\mathscr{T}\Sigma\mathscr{T}^{-1}$, получим матрицы системы в новом базисе:

$$A = \mathscr{T} A \mathscr{T}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} CAC^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1} & CA\mathscr{N}_C \\ (\mathscr{N}_C^{\mathrm{T}} \mathscr{N}_C)^{-1} \mathscr{N}_C^{\mathrm{T}} AC^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1} & (\mathscr{N}_C^{\mathrm{T}} \mathscr{N}_C)^{-1} \mathscr{N}_C^{\mathrm{T}} A\mathscr{N}_C \end{pmatrix},$$

$$B = \mathscr{T} B = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CB \\ (\mathscr{N}_C^{\mathrm{T}} \mathscr{N}_C)^{-1} \mathscr{N}_C^{\mathrm{T}} B \end{pmatrix},$$

$$C = C\mathscr{T}^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix}.$$

Получаем систему $\widehat{\Sigma} = (A, B, C)$, в которой условие (7) удовлетворено. Так как система $\widetilde{\Sigma}$ наблюдаема, то и подобная ей система $\widehat{\Sigma}$ также наблюдаема. Из этого следует разрешимость линейного матричного неравенства:

(10) $\mathscr{N}_C^{\mathrm{T}}\left(\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + (*)^{\mathrm{T}}\right)\mathscr{N}_C \prec 0.$

где $\mathscr{N}_C$ – ядро матрицы $\boldsymbol{C}$; $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^{\mathrm{T}} & X_{22} \end{pmatrix} \succ 0.$

Обозначим сумму матриц в левой части (10) как $\begin{pmatrix} \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} \\ \mathscr{L}_{12}^{\mathrm{T}} & \mathscr{L}_{22} \end{pmatrix}$, где $\mathscr{L}_{11} \in \boldsymbol{R}^{p\times p}$. Так как $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_p & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix}$, то $\mathscr{N}_C = \begin{pmatrix} 0_{p\times(n-p)} \\ \boldsymbol{I}_{(n-p)} \end{pmatrix}$. Тогда (10) преобразуется к виду:

$$\mathscr{N}_C^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \mathscr{L}_{11} & \mathscr{L}_{12} \\ \mathscr{L}_{12}^{\mathrm{T}} & \mathscr{L}_{22} \end{pmatrix}\mathscr{N}_C = \mathscr{L}_{22} = X_{22}A_{22} + X_{12}^{\mathrm{T}}A_{12} + (*)^{\mathrm{T}} \prec 0.$$

Перепишем $\mathscr{L}_{22} \prec 0$ в виде неравенства Ляпунова:

(11) $\mathscr{L}_{22} = X_{22}\left(A_{22} + X_{22}^{-1}X_{12}^{\mathrm{T}}A_{12}\right) + (*)^{\mathrm{T}} \prec 0.$

Так как $\mathscr{L}_{22} \prec 0$, то матрица $A_{22} + X_{22}^{-1}X_{12}^{\mathrm{T}}A_{12}$ гурвицева. Выполним линейное преобразование системы $\widehat{\Sigma}$ с помощью матрицы

$$\mathscr{S} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_p & 0_{p\times(n-p)} \\ X_{22}^{-1}X_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Из условия $\mathscr{S}\mathscr{S}^{-1} = \boldsymbol{I}$ находим

$$\mathscr{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_p & 0_{p\times(n-p)} \\ -X_{22}^{-1}X_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I}_{n-p} \end{pmatrix}.$$

После преобразования $\mathscr{S}\Sigma\mathscr{S}^{-1}$ получаем систему $\Sigma = (A, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, блоки матриц которой определяются следующим образом:

(12) $A_{11} = A_{11} - A_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^{\mathrm{T}},$

$$A_{12} = A_{12},$$

$$A_{21} = X_{22}^{-1}X_{12}^{\mathrm{T}}A_{11} + A_{21} - \left(X_{22}^{-1}X_{12}^{\mathrm{T}}A_{12} + A_{22}\right)X_{22}^{-1}X_{12}^{\mathrm{T}},$$

$$A_{22} = A_{22} + X_{22}^{-1}X_{12}^{\mathrm{T}}A_{12},$$

$$\boldsymbol{B} = \mathscr{S}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} \\ \boldsymbol{B}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} \\ X_{22}^{-1}X_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{21} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\mathscr{S}^{-1} = \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_p & 0_{p\times(n-p)} \end{pmatrix}.$$

Замечаем, что в силу (11) блок A_{22} гурвицев. Условие (8) также выполнено, а условие (7) сохраняется. Теорема доказана.

Замечание. Условия (7) и (8) будут выполняться и в случае, когда $CB = 0$. Однако для выполнения условия (9) необходимо, чтобы $CB \neq 0$.

5. Вычислительные эксперименты

Неравенство (5) для системы $\Sigma = (A, B, C)$ примет вид

$$A \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} I_p & 0 \end{pmatrix} + (*)^{\mathrm{T}} \prec 0,$$

где $M = KY_{11}$.

Для численного решения в пакете MATLAB перепишем его в виде блочной матрицы:

$$\begin{pmatrix} A_{11}Y_{11} + B_{11}M + (*)^{\mathrm{T}} & A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^{\mathrm{T}} + M^{\mathrm{T}}B_{21}^{\mathrm{T}} \\ * & A_{22}Y_{22} + (*)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \prec 0. \tag{13}$$

Для исследования разрешимости (13) при условии (3) была проведена серия вычислительных экспериментов, в которых случайным образом генерировались по $j_1 = 1000$ линейных систем. Размерность пространства состояний изменялась в пределах $n = 5, \ldots, 15$. Для моделирования линейных систем использовались следующие функции пакета MATLAB:

$A = \mathrm{randn}(n)$,

$B = \mathrm{randn}(n, m)$,

$C = r\mathrm{andn}(p, n)$.

Относительно размерностей m и p во всех случаях выполнялось равенство $m + p = n + 1$. Так как $m + p > n$, то в соответствии с условиями Кимуры задача стабилизации для всех $j_1 = 1000$ линейных управляемых и наблюдаемых систем разрешима. Обозначим количество разрешимых задач j_2. Для удовлетворения необходимых условий разрешимости (13) применялась теорема 1. Покажем эти действия на примере одной из линейных систем:

$A = \mathrm{randn}(5) =$

$$\begin{pmatrix} 0{,}5377 & -1{,}3077 & -1{,}3499 & -0{,}2050 & 0{,}6715 \\ 1{,}8339 & -0{,}4336 & 3{,}0349 & -0{,}1241 & -1{,}2075 \\ -2{,}2588 & 0{,}3426 & 0{,}7254 & 1{,}4897 & 0{,}7172 \\ 0{,}8622 & 3{,}5784 & -0{,}0631 & 1{,}4090 & 1{,}6302 \\ 0{,}3188 & 2{,}7694 & 0{,}7147 & 1{,}4172 & 0{,}4889 \end{pmatrix},$$

$$B = \mathrm{randn}(5,\ 3) = \begin{pmatrix} -0{,}1022 & -0{,}0301 & -0{,}8637 \\ -0{,}2414 & -0{,}1649 & 0{,}0774 \\ 0{,}3192 & 0{,}6277 & -1{,}2141 \\ 0{,}3129 & 1{,}0933 & -1{,}1135 \\ -0{,}8649 & 1{,}1093 & -0{,}0068 \end{pmatrix},$$

$C = \mathrm{randn}(3, 5) =$

$$\begin{pmatrix} 1{,}0347 & 0{,}2939 & -1{,}1471 & -2{,}9443 & -0{,}7549 \\ 0{,}7269 & -0{,}7873 & -1{,}0689 & 1{,}4384 & 1{,}3703 \\ -0{,}3034 & 0{,}8884 & -0{,}8095 & 0{,}3252 & -1{,}7115 \end{pmatrix}.$$

Для первого преобразования использовалась следующая матрица:

$$\mathscr{T} = \begin{pmatrix} C \\ (\mathscr{N}_C^{\mathrm{T}} \mathscr{N}_C)^{-1} \mathscr{N}_C^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}0347 & 0{,}2939 & -1{,}1471 & -2{,}9443 & -0{,}7549 \\ 0{,}7269 & -0{,}7873 & -1{,}0689 & 1{,}4384 & 1{,}3703 \\ -0{,}3034 & 0{,}8884 & -0{,}8095 & 0{,}3252 & -1{,}7115 \\ 0{,}8133 & 0{,}3523 & 0{,}4046 & 0{,}1931 & -0{,}1160 \\ -0{,}1917 & 0{,}8179 & -0{,}1498 & -0{,}0602 & 0{,}5179 \end{pmatrix}.$$

После линейного преобразования матрица выхода удовлетворяет (7). Далее из решения линейного матричного неравенства (11) было найдено произведение $X_{22}^{-1} X_{12}^{\mathrm{T}}$:

$$X_{22}^{-1} X_{12}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0{,}1110 & -0{,}0372 & 0{,}1666 \\ 0{,}0114 & -0{,}0224 & -0{,}0734 \end{pmatrix}.$$

Выполнив второе преобразование линейное преобразование системы с помощью матрицы

$$\mathscr{S} = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p\times(n-p)} \\ X_{22}^{-1} X_{12}^{\mathrm{T}} & I_{n-p} \end{pmatrix},$$

окончательно получим следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3{,}0497 & -0{,}4064 & -1{,}5976 & -5{,}7853 & -14{,}2755 \\ -0{,}1403 & 2{,}2450 & 1{,}3507 & 3{,}9813 & 8{,}1910 \\ 0{,}9104 & -0{,}4093 & -1{,}5673 & 1{,}2548 & -4{,}8408 \\ 0{,}4104 & 0{,}0218 & -0{,}8145 & -0{,}5000 & -3{,}0417 \\ -0{,}7498 & -0{,}7957 & -0{,}8181 & 3{,}0417 & -0{,}5000 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -0{,}8111 & -4{,}8559 & 3{,}8054 \\ -0{,}9606 & 2{,}5296 & -1{,}0020 \\ 1{,}1401 & -2{,}1885 & 0{,}9632 \\ 0{,}2573 & -0{,}7440 & -0{,}7603 \\ -0{,}7639 & 0{,}3345 & 0{,}4690 \end{pmatrix},$$

$$C = (I_3 \quad 0_{3\times2}).$$

Находим, что блок

$$A_{22} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -3{,}0417 \\ 3{,}0417 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

гурвицев: $\sigma_{max}(A_{22}) = -0{,}5$. Условия (9) оказывается также выполненным. В этом можно убедиться, проверив разрешимость линейного матричного неравенства

$$A_{11}Y_{11} + B_{11}Z + (*)^{\mathrm{T}} \prec 0.$$

Решая линейное матричное неравенство (13), находим матрицу K:

$$K = \begin{pmatrix} -4{,}4952 & 97{,}0356 & 21{,}7672 \\ 2{,}3571 & 47{,}8898 & 11{,}3364 \\ -2{,}5381 & 26{,}3320 & 7{,}0735 \end{pmatrix}.$$

Проверяем и убеждаемся, что матрица замкнутой системы действительно гурвицева:

$$\sigma_{max}(A + BKC) = -0{,}4194.$$

Проведённые эксперименты для $n = 5, \dots, 15$ показали разрешимость (13) во всех случаях ($j_2 = j_1$). Это значит, что множество допустимых значений (13) при условии (3) не пусто. Таким образом, есть основания полагать, что условие (3) совместно с теоремой 1 обеспечивает достаточные условия преобразования билинейных матричных неравенств к линейным матричным неравенствам с непустым множеством допустимых значений. Сформулируем гипотезу:

Гипотеза. *Множество допустимых значений линейного матричного неравенства* (13) *при условии* (3) *не пусто.*

6. Заключение

Статья посвящена решению задачи синтеза стабилизирующих законов управления по измеряемому выходу. Показано, что если выполняется условие Кимуры, то задача может быть сведена к решению линейного матричного неравенства. Результаты вычислительных экспериментов убедительно показывают, что множества допустимых значений соответствующих неравенств не пусты. Несмотря на то, что получается лишь некоторое частное решение, тем не менее, главное требование к закону управления – устойчивость системы – обеспечивается. Сформулирована соответствующая гипотеза. Интерес представляет поиск доказательства. Дальнейшей задачей является проверка полученного результата для более широкого класса задач, в котором выполнение условие Кимуры не требуется, а необходимо лишь, чтобы произведение матриц выхода и входа давало ненулевую матрицу.

Автор благодарит Дмитрия Владимировича Баландина за полезные советы.

Литература

1. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М. М. *Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимно-обратных матриц* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №1. – С. 82–99.
2. ШУМАФОВ М.М. *Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор* // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2019. – Т. 6(64). – Вып. 4. – С. 564–591.
3. ЧАЙКОВСКИЙ М.М. *Синтез анизотропийных субоптимальных регуляторов заданного порядка на основе полуопределенного программирования и алгоритма поиска взаимообратных матриц* // Управление большими системами. – 2012. – Вып. 39. – С. 95–137.
4. APKARIAN P., TUAN H. D. *Robust control via concave minimization local and global algorithms* // IEEE Trans. Automat. Control. – 2000. – Vol. 45, No. 2. – P. 299–305.
5. EL GHAOUI L., GAHINET P. *Rank minimization under LMI constraints: a framework for output feedback problems* // Proc. Eur. Control Conf. Groningen. – 1993. – P. 1176–1179.
6. ELIAS A. *A Novel relaxation of the static output feedback problem for a class of plants* // Automatica. – 2023. – No. 158. – P. 111285–111290.
7. ELIAS A., POCCINI J., PAPACHRISTODOULOU A. *Static Output Feedback for a Certain Class of Systems of Order Four* // European Control Conf. (ECC). – 2024. – P. 2586–2592.
8. EREMENKO A., GABRIELOV A. *Pole placement by static output feedback for generic linear system* // SIAM J. Control Optim. – 2002. – Vol. 41. – P. 303–312.

9. GOH K.-C., SAFONOV M.G., PAPAVASSILOPOLUS G.P. *A global optimization approach for the BMN problem* // Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control. – IEEE Press, Piscataway, NJ. – 1994. – P. 2009–2014.
10. HASSIBI A., HOW J., BOYD S. *A path following method for solving BMI problems in control* // Proc. of American Control Conf. – 1999. – Vol. 2. – P. 1385–1389.
11. HENRION D., LOEFBERG J., KOCVARA M. et al. *Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI* // Proc. Joint IEEE Conf. Decision Control and Europ. Control Conf. – 2005. – P. 7581–7586.
12. IWASAKI T. *The dual iteration for fixed order control* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. – Vol. 44, No. 4. – P. 783–788.
13. IWASAKI T., SKELTON R. E. *The XY-centering algorithm for the dual LMI problem: a new approach to fixed order control design* // Int. Journal of Control. – 1995. – Vol .62, No. 6. – P. 1257–1272.
14. IWASAKI T., SKELTON R.E. *Parameterization of all stabilizing controllers via quadratic Lyapunov functions* // J. Optim. Theory Appl. – 1995. – Vol. 77. – P. 291–307.
15. KIMURA H. *On pole placement by gain output feedback* // IEEE Trans. Automat. Control. –1975. – Vol. 20. – P. 509–519.
16. MUSHTAQ T., SEILER P., HEMATI M. S. *On the convexity of static output feedback control synthesis for systems with lossless nonlinearities* // Automatica. – 2024. – No. 159. – P. 111380–111385.
17. RODRIGUES L. *From LQR to Static Output Feedback: a New LMI Approach* // Proc. of IEEE 61st Conf. on Decision and Control. – 2022. – P. 4878–4883.
18. RÖBENACK K., VOSWINKEL R., FRANKE MIRCO et al. *Stabilization by static output feedback: a quantifier elimination approach* // Proc. Int. Conf. Syst. Theory, Control, Computing (ICSTCC-2018). – 2018. – P. 715–721.
19. SADABADI M.S., PEAUCELLE D. *From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey* // Annual Reviews in Control. – 2016. –Vol. 42. –P. 11–26.
20. TOKER O., OZBAY H. *On the NP hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static*

output feedback // Proc. of the American Control Conf. – 1995. – Vol.4. – P. 2525–2526.

SYNTHESIS OF STATIC OUTPUT FEEDBACK CONTROL LAWS SUBJECT TO FEASIBILITY THE KIMURA CONDITION

Aleksey Mukhin, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, Junior Researcher (myhin-aleksei@yandex.ru).

Abstract: A lot of control tasks, such as, for example, the synthesis of static output feedback, are expressed in the form of bilinear matrix inequalities. Solving such tasks based on iterative algorithms attended with considerable time, especially in the case of large-scale systems. If no solution is found for the initial values, then repeating calculations with different initial values does not guarantee success. The reason is the non-convexity of the feasible sets. The article investigates the possibility of bilinear matrix inequalities reducing to linear matrix inequalities by replacing of Lyapunov function matrix arbitrary to block-diagonal matrix. A sufficient condition for such a replacing is Kimura condition feasibility. It is proved that the necessary conditions for the linear matrix inequality feasibility are satisfied by two linear non-generate transformations of the system basis. To the synthesis problem investigating within the framework of linear matrix inequalities computational experiments were performed, in which 1000 linear systems were randomly generated. Based on the results of computational experiments, a hypothesis is proposed according to which the Kimura condition is a sufficient condition for bilinear matrix inequalities reducing to linear matrix inequalities with nonempty feasible sets.

Keywords: static output feedback, Kimura condition, linear matrix inequalities, Hurwitz matrix.

УДК 517.977
ББК 22.18

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.

*Поступила в редакцию 02.06.2025.
Опубликована 30.09.2025.*