

АНАЛИЗ РАЗДЕЛИМОСТИ ДВИЖЕНИЙ УПРАВЛЕНИЕМ ДЛЯ ДВУХ ИДЕНТИЧНЫХ МАЯТНИКОВ

Сулиман Б.¹

(Университет Алеппо, Сирия,

Санкт-Петербургский государственный университет,

Санкт-Петербург)

Фрадков А.Л.²

(Институт проблем машиноведения РАН,

Санкт-Петербургский государственный университет,

Санкт-Петербург)

Исследуется возможность разделения движений двух идентичных управляемых маятников по их энергии при помощи одного скалярного воздействия, генерируемого механизмом обратной связи. Такая задача может возникнуть при неполноприводном (*underactuated*) управлении колебательными механическими системами, при избирательном (селективном) управлении системами отдельных молекул и т.п. Исследован типовой случай, когда разделение требуется произвести по уровню энергий подсистем. Для решения задачи предложено синтезировать управление с обратной связью. Алгоритм управления строится на основе метода скоростного градиента, модифицированного для решения задач с фазовыми ограничениями. Для синтеза управления с ограничениями используется идея метода штрафных функций. Для задачи управления идентичными несвязанными маятниками при помощи одного управления компьютерным моделированием показано, что даже небольшая разница в начальных состояниях маятников позволяет реализовать требуемое разделение, причем результат слабо зависит от существенных изменений параметров объекта и от наличия возмущений. Показано также, что результат слабо зависит от параметров регулятора (коэффициента усиления γ) и от силы штрафа α . Результаты моделирования подтверждают достаточно высокую скорость сходимости алгоритма.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, управление энергией, фазовые ограничения, управление механическими системами, связанные маятники, штрафная функция, метод скоростного градиента, скорость сходимости, численное моделирование.

¹ Сулиман Башар, аспирант (st102994@student.spbu.ru).

² Александр Львович Фрадков, д.т.н., профессор (fradkov@mail.ru).

1. Введение

Многие практические задачи управления физическими и механическими системами требуют учета ограничений, наложенных на переменные состояния системы. Однако решение задач с ограничениями может быть очень сложным, особенно для задач оптимального управления. Ограничения, которые должны выполняться в каждый момент времени, могут существенно изменить динамические свойства замкнутой системы. Трудности становятся еще больше для нелинейных и неопределенных систем.

Сложные механические системы обычно состоят из нескольких подсистем. Одной из практических задач управления ими является селективное возбуждение, когда требуется увеличить энергию одной подсистемы и ограничить энергию другой. К числу таких задач относятся, например, управление прохождением через зону резонанса [14], селективное возбуждение молекул [2]. Известно, что для решения подобных задач применяется метод скоростного градиента [3, 4, 10, 1]. Метод скоростного градиента применим для случая, когда цель управления задана как асимптотическая минимизация скалярной целевой функции состояния системы. Он позволяет сконструировать обратную связь по состоянию, позволяющую достичь цели управления при определенных естественных условиях. Метод применялся к различным задачам нелинейного и адаптивного управления физическими и механическими системами [10]. Однако фазовые ограничения в виде неравенств ранее не учитывались (случай ограничений типа равенства рассмотрен в книге [8]). В работах [5, 6] был предложен подход к управлению при фазовых ограничениях типа неравенства, основанный на расширенной версии метода скоростного градиента. Ограничения учитываются с помощью версии штрафных (барьерных) функций, хорошо известных в математическом программировании [7]. Приведен общий результат, дающий условия достижения цели управления при ограничениях, заданных скалярной функцией ограничений. Применение метода проиллюстрировано на примере пары маятников, находящихся под воз-

действием одной управляющей силы. Целью является достижение заданного значения энергии одного маятника при соблюдении ограничения на энергию другого маятника. Как аналитическое исследование, так и численные результаты подтверждают хорошую работу предлагаемого регулятора. Однако исследование работы метода при вариациях параметров системы в [5, 6] не проводилось.

В настоящей работе проводится систематическое исследование поведения замкнутой системы из двух идентичных маятников при изменении параметров и начальных условий маятников, а также параметров синтезированного регулятора. Основная цель исследования – анализ разделимости движений по энергии при помощи управления.

2. Алгоритм управления: постановка задачи и синтез регулятора

Опишем, следуя [5], постановку задачи и ее решение на основе метода скоростного градиента. Рассмотрим управляемую систему, описываемую уравнениями состояния:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = F(x, u), \quad x(0) \in X_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R},$$

где x – вектор состояния; u – управляющий вход; t – время; X_0 – множество возможных начальных состояний; $F(x, u)$ – гладкая функция по обоим аргументам. Цель управления задаётся с помощью неотрицательной гладкой функции $Q(x)$ (далее – целевая функция):

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} Q(x(t)) = 0,$$

где $x(t)$ – решение (1) с некоторым допустимым $u(t)$ и $x(0) \in X_0$. Фазовые ограничения задаются неравенством для гладкой функции $B(x)$ (далее – функция ограничений):

$$(3) \quad B(x(t)) > 0 \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad \text{и} \quad x(0) \in X_0.$$

Предполагается, что $B(x) > 0$ для $x \in X_0$. Цель управления – минимизировать целевую функцию $Q(x)$ без пересечения множества $B^{-1}(0)$, где $B^{-1}(0) = x \in X_0 : B(x) = 0$. Для синтеза алгоритма управления используется идея метода скоростного

градиента для случая без ограничений. Для этого предлагается ввести штрафную функцию для минимизации без ограничений:

$$(4) \quad V(x, \alpha) = Q(x) + \frac{\alpha}{B(x)},$$

где $\alpha > 0$ — штрафной параметр. В отличие от стандартного метода штрафных функций (внутренней точки) [7], в предлагаемом подходе штрафной параметр не устремляется к нулю с ростом t , а остается постоянным. Таким образом, в данной работе исследуется возможность приближенного решения задачи в этом случае на основе метода скоростного градиента и оценивается погрешность решения при различных значениях штрафного параметра $\alpha > 0$.

Согласно методу скоростного градиента вычисляется скалярная функция $w(x, u, \alpha)$:

$$(5) \quad w(x, u, \alpha) = \mathcal{L}_F V(x, \alpha) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\alpha}{B(x)^2} \frac{\partial B}{\partial x} \right) F(x, u),$$

где \mathcal{L}_F означает производную вдоль траекторий системы (1), а $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial x}$ — векторы-строки частных производных. Затем вычисляется градиент $w(x, u, \alpha)$ по управляющим переменным:

$$(6) \quad \nabla_u w(x, u, \alpha) = \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^\top = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^\top \left(\nabla_x Q(x) - \frac{\alpha}{B(x)^2} \nabla_x B(x) \right).$$

Алгоритм изменения $u(t)$ определяется уравнением

$$(7) \quad u(t) = u_0 - \gamma \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^\top \left(\nabla_x Q(x) - \frac{\alpha}{B(x)^2} \nabla_x B(x) \right),$$

где u_0 — начальное значение управляющей переменной (например, $u_0 = 0$), а $\gamma = \gamma^\top > 0$ — положительно определённая матрица усиления. Если $\alpha = 0$, то (7) преобразуется в алгоритм скоростного градиента в конечной форме без фазовых ограничений.

Алгоритм (7) определен только в области $\{x : B(x) > 0\}$.

3. Управление энергией гамильтоновых систем с ограничением

Аналитическое исследование задачи в общем случае затруднительно, поэтому ниже рассмотрим частный случай задачи:

управление энергией гамильтоновой системы при ограничении на энергию другой идентичной гамильтоновой системы. Специфика задачи в том, что требуется разделить движения двух одинаковых систем при помощи всего лишь одного управления, не нарушая ограничения в течение всего процесса функционирования систем.

Рассмотрим гамильтонову систему

$$(8) \quad \frac{dp^k}{dt} = -\frac{\partial H(p, q, u)}{\partial q^k}, \quad \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H(p, q, u)}{\partial p^k},$$

$$k = 1, \dots, n, \quad (q(0), p(0)) \in X_0.$$

Здесь $q = (q^1, \dots, q^n)^\top$, $p = (p^1, \dots, p^n)^\top$ — векторы обобщённых координат и импульсов, составляющие вектор состояния (p, q) ; $H(p, q, u)$ — управляемый гамильтониан; $u \in \mathbb{R}^m$ — вход (обобщённая сила); X_0 — множество начальных состояний. Предположим, что гамильтониан аффинен по управлению:

$$(9) \quad H(p, q) = H_0(p, q) + H_1(p, q)^\top u,$$

где $H_0(p, q)$ — внутренний гамильтониан, $H_1(p, q)$ — m -мерный вектор (столбец) потенциалов взаимодействия [12]. Предположим, что система состоит из двух подсистем, и рассмотрим задачу избирательного возбуждения, когда требуется увеличить энергию одной подсистемы и ограничить энергию другой (например, прохождение через резонанс [14], избирательное возбуждение молекулы [2]). Пусть q_1, p_1 — векторы обобщённых координат и импульсов первой подсистемы, а q_2, p_2 — соответственно, второй. Будем считать, что подсистемы независимы, т.е.

$$(10) \quad H_0(p, q) = H_0^1(p_1, q_1) + H_0^2(p_2, q_2),$$

где H_0^1 — гамильтониан первой подсистемы; H_0^2 — гамильтониан второй подсистемы.

Задача избирательного возбуждения формализуется следующим образом. Цель управления — стабилизация энергии первой подсистемы на заданном значении E_1 :

$$(11) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} H_0^1(p_1(t), q_1(t)) = E_1$$

при ограничении энергии второй подсистемы значением E_2 :

$$(12) \quad H_0^2(p_2(t), q_2(t)) < E_2, \quad t \geq 0.$$

Предполагается, что начальное состояние системы удовлетворяет ограничению (12).

Вводятся целевая функция и функция ограничений:

$$(13) \quad Q(p_1, q_1) = \frac{1}{2} (H_0^1(p_1, q_1) - E_1)^2,$$

$$(14) \quad B(p_2, q_2) = E_2 - H_0^2(p_2, q_2).$$

Тогда цель управления (11) принимает вид (2), а ограничение (12) — вид (3). Согласно (4) штрафная функция:

$$(15) \quad V(p, q, \alpha) = Q(p_1, q_1) + \frac{\alpha}{B(p_2, q_2)} = \\ = \frac{(H_0^1(p_1, q_1) - E_1)^2}{2} + \frac{\alpha}{E_2 - H_0^2(p_2, q_2)}.$$

Для задачи избирательного возбуждения (11), (12) гамильтоновой системы (8) закон управления (7) принимает вид

$$(16) \quad u(t) = u_0 - \gamma \nabla_u \mathcal{L}_F V(p(t), q(t), \alpha),$$

где \mathcal{L}_F — производная вдоль траекторий системы (11); u_0 — начальное значение управления; $\gamma = \gamma^\top > 0$ — матрица усиления; $\alpha > 0$ — параметр.

4. Два маятника под действием одной силы

Для демонстрации предложенных алгоритмов исследуется задача избирательного управления энергией двух маятников. Рассмотрим два независимых нелинейных маятника, находящихся под действием одной силы (рис. 1). Уравнения системы:

$$(17) \quad \begin{cases} \dot{q}_1 = (ml^2)^{-1} p_1, \\ \dot{p}_1 = -mgl \sin q_1 + ul \cos q_1, \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{q}_2 = (ml^2)^{-1} p_2, \\ \dot{p}_2 = -mgl \sin q_2 + ul \cos q_2. \end{cases}$$

Точка над переменной обозначает её производную по t ; q_1 , p_1 — угловая координата и импульс первого маятника; q_2 , p_2 — второго; g — ускорение свободного падения. Маятники имеют одинаковую массу m , длину l . Управляющий момент u приложен к оси подвеса маятников и создает вращательное воздействие относительно этой оси.

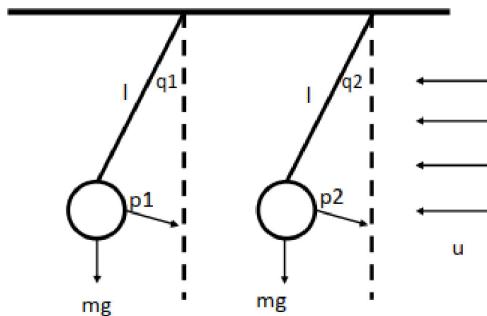


Рис. 1. Два независимых нелинейных маятника под действием единой управляемой силы u

Перепишем систему (17), (18) в гамильтоновой форме (8), (9), (10). Гамильтониан каждого маятника:

$$(19) \quad H_0^k(p_k, q_k) = \frac{1}{2ml^2} p_k^2 + mgl(1 - \cos q_k), \quad k = 1, 2.$$

Маятники независимы, поэтому справедливо соотношение (10).

Гамильтониан взаимодействия:

$$(20) \quad H_1(p, q) = -l(\sin q_1 + \sin q_2).$$

Отметим, что в системе (17), (18) две регулируемые величины и всего лишь одно управляемое воздействие. Эта ситуация соответствует соответствует английскому термину «underactuated system», означающему систему, у которой размерность множества управлений меньше, чем размерность целевого множества (множества регулируемых величин). В случае механической системы общего положения это свойство выполнено, если число управляемых переменных меньше числа степеней свободы системы. В таком случае часто используется термин «неполноприводная система». Отметим, что, в силу идентичности маятников, если $q_1(t) = q_2(t)$ и $p_1(t) = p_2(t)$ при каком-то $t > 0$, то они останутся равными для всех t при любом управлении $u(t)$.

4.1. Постановка задачи управления

Требуется синтезировать управление, которое раскачивает первый маятник до заданного уровня энергии E_1 и ограничивает энергию второго значением E_2 . Цель формализуется соотношением (11), ограничение – (12). Необходимо найти закон обратной связи $u(p, q)$, обеспечивающий цель (11) и ограничение (12).

Предположим, что начальные условия маятников различны:

$$(21) \quad (p_1(0), q_1(0)) \neq (p_2(0), q_2(0)),$$

и удовлетворяют ограничению (12):

$$(22) \quad H_0^2(p_2(0), q_2(0)) < E_2.$$

4.2. Синтез алгоритма управления

Согласно подходу, представленному в предыдущем разделе, алгоритм синтезируется на основе уравнения (15) при $u_0 = 0$ и уравнения (16) при $u_0 = 0$.

$$(23) \quad \begin{aligned} u(p, q) &= -\gamma \nabla_u \mathcal{L}_F \mathbb{V}(p, q, \alpha) = \\ &= -\gamma \nabla_u \mathcal{L}_F \left[\frac{(H_0^1(p_1, q_1) - E_1)^2}{2} + \frac{\alpha}{E_2 - H_0^2(p_2, q_2)} \right], \\ u(p, q) &= -\gamma \left(\frac{p_1 \cos q_1}{ml} (H_0^1(p_1, q_1) - E_1) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \frac{p_2 \cos q_2}{ml} (H_0^2(p_2, q_2) - E_2)^{-2} \right) \end{aligned}$$

Здесь $\gamma > 0$ – скалярный коэффициент, $\alpha > 0$ – коэффициент штрафа.

5. Численный анализ разделимости движений одинаковых маятников общим управлением

5.1. Исследование задачи без возмущений

Для исследования способности регулятора обеспечивать достижение цели управления при выполнении заданных фазовых ограничений было проведено компьютерное моделирование. Были выбраны следующие базовые значения параметров системы и начальных условий, удовлетворяющие ограничению на энергию второго маятника:

- параметры каждого маятника: $m = 0,1$, $l = 1$, $g = 10$;
- начальные условия: $q_1 = 0$, $q_2 = 0,05$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$;
- целевое значение энергии для первого маятника: $E_1 = 20$;
- ограничение по энергии для второго маятника: $E_2 = 5$;
- время моделирования: 80 с.

Результаты моделирования представлены на рис. 2.

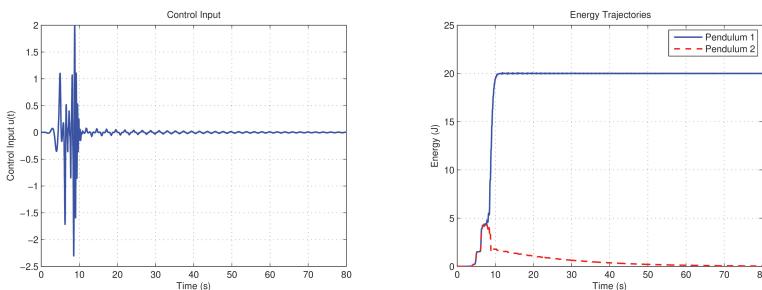


Рис. 2. Результаты моделирования при $\gamma = 0,015$, $\alpha = 10$.
Слева – динамика управляющего воздействия, справа –
динамика энергий маятников

Из рисунка видно, что при $\gamma = 0,015, \alpha = 10$ управляющее воздействия после некоторого периода активных колебаний становится малым. Первый маятник достигает заданного уровня энергии, а энергия второго маятника находится в заданных пределах и также становится малой.

Анализ для $\gamma = 0,03, \alpha = 10$ показывает (рис. 3), что с ростом коэффициента усиления γ амплитуда управления остаётся небольшой, а требования к энергиям обоих маятников также удовлетворяются. При этом промежуток времени, в течение которого разделения движений маятников не происходит, несколько возрастает.

Анализ результатов моделирования для $\gamma = 0,015, \alpha = 1$ показывает (рис. 4), что уменьшение коэффициента штрафа для второго маятника приводит к дальнейшему увеличению промежутка времени, на котором движения маятников не разделены по энергиям, хотя асимптотические требования к поведению энергий выполняются.

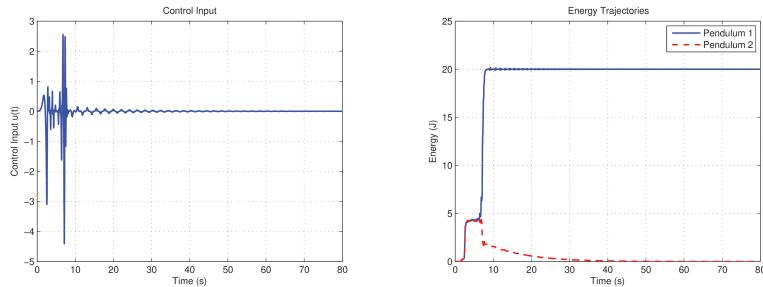


Рис. 3. Результаты моделирования при $\gamma = 0,03, \alpha = 10$

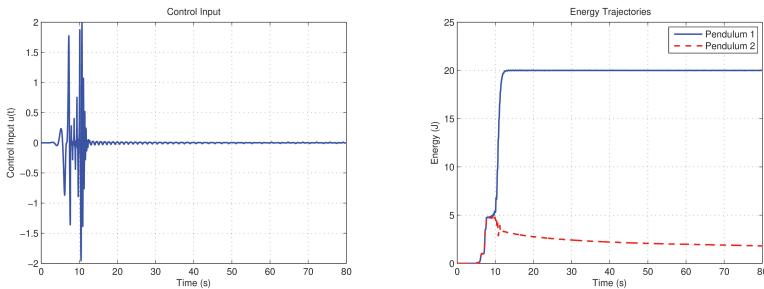


Рис. 4. Результаты моделирования при $\gamma = 0,015, \alpha = 1$

5.2. Исследование влияния демпфирования

Мы будем исследовать влияние потерь энергии в первом и во втором маятнике по отдельности. Возмущенные уравнения маятников имеют вид

$$(24) \quad \begin{cases} \dot{q}_1 = (ml^2)^{-1}p_1, \\ \dot{p}_1 = -mgl \sin(q_1) - K_1 p_1 + ul \cos(q_1), \end{cases}$$

$$(25) \quad \begin{cases} \dot{q}_2 = (ml^2)^{-1}p_2, \\ \dot{p}_2 = -mgl \sin(q_2) - K_2 p_2 + ul \cos(q_2), \end{cases}$$

где K_1, K_2 – коэффициенты трения для 1-го и 2-го маятника соответственно.

На рис. 5 видно, что слабые потери ($K_1 = 0,01$) не оказывают существенного влияния на процессы в системе.

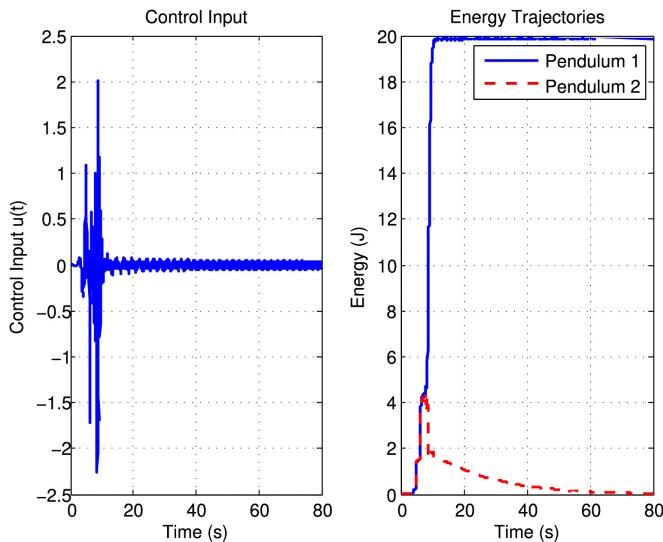


Рис. 5. Результаты моделирования при $k_1 = 0,01, k_2 = 0$

Следующие графики (рис. 6, 7) показывают, что увеличение демпфирования ($K_1 = 0,1$) не дает возможность первому маятнику достичь желаемого значения энергии, несмотря на существенный рост амплитуды колебаний управляющего воздействия.

Были проведены также эксперименты по моделированию процессов в условиях демпфирования второго маятника, но они показали, что этот тип возмущения не ухудшает свойства разделимости процессов по энергии маятников.

5.3. Исследование влияния начальных условий

Как уже было сказано, нетривиальность рассматриваемой задачи состоит в исследовании возможности разделять движения двух идентичных механических систем при помощи одного управления, т.е. в условиях неполной управляемости системы. Теоретически было показано [5], что такое разделение возможно при неодинаковых начальных состояниях маятников, однако практическая возможность и характер динамики системы вблизи

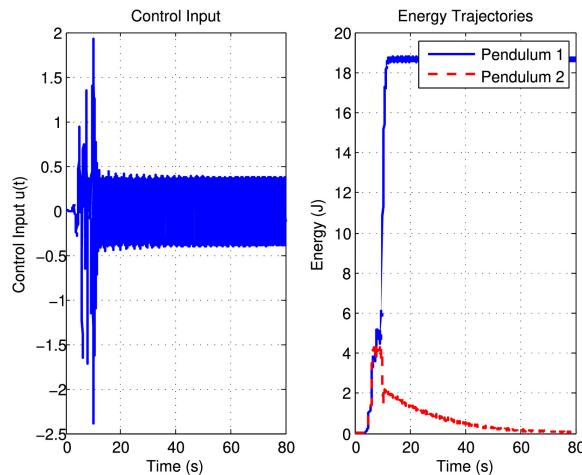


Рис. 6. Результаты моделирования при $k_1 = 0.1, k_2 = 0$

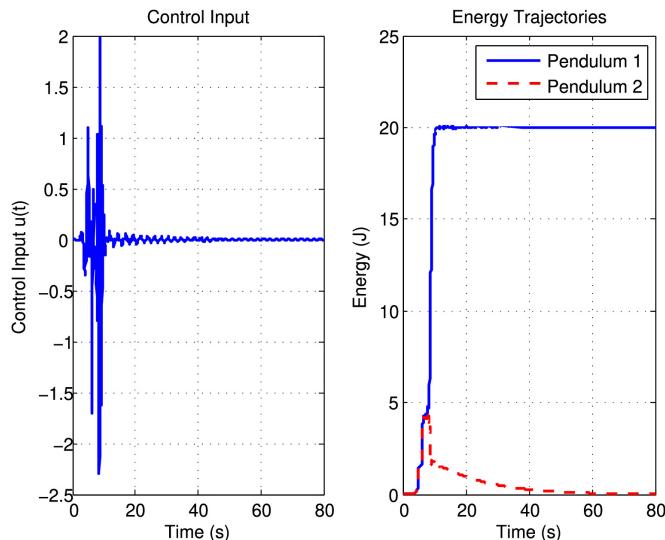


Рис. 7. Результаты моделирования при $k_2 = 0.01, k_1 = 0$

совпадающих начальных условий не исследовалась. Ниже демонстрируется характер поведения системы управления при сближающихся начальных условиях.

Рисунок 8 показывает, что уменьшение разности начальных условий в 5 раз (до 10^{-2}) изменяет динамику процессов незначительно.

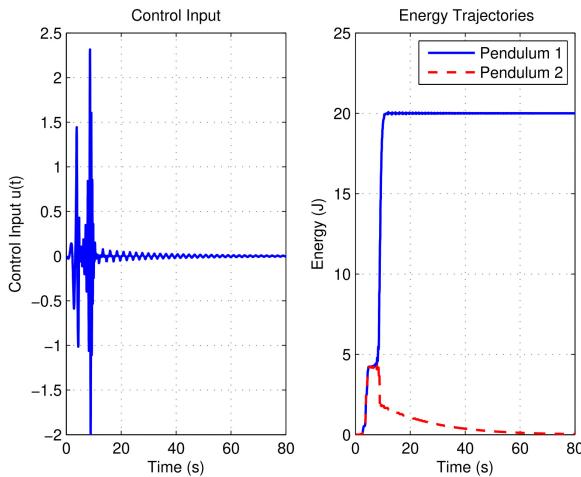


Рис. 8. Результаты моделирования
при $q_1(0) = 0, q_2(0) = 0,01, p_1(0) = 0, p_2(0) = 0$

Уменьшение же разности начальных условий до 10^{-5} приводит к существенному затягиванию фазы, когда движения по энергии не разделены. Тем не менее ожидаемое разделение характера движений маятников происходит, при этом в момент разделения величина управляющего воздействия резко возрастает (рис. 9). И только когда начальные условия маятников полностью совпадают, разделения движений не происходит, причем ценой такого свойства является появление мгновенной ошибки численного интегрирования, приводящей к скачку траекторий через энергетический барьер (рис. 10).

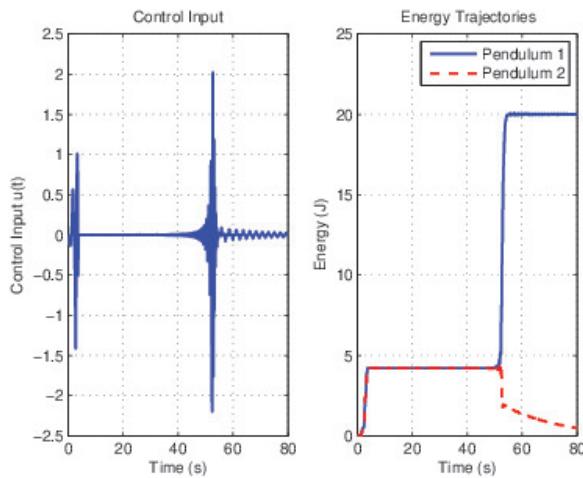


Рис. 9. Результаты моделирования
при $q_1(0) = 0,05$, $q_2(0) = 0,04999$, $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = 0$

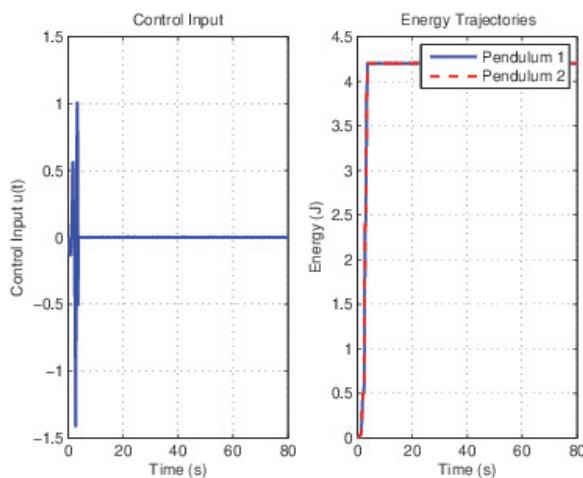


Рис. 10. Результаты моделирования
при $q_1(0) = 0,05$, $q_2(0) = 0,05$, $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = 0$

6. Заключение

В работе исследована возможность разделения движений двух идентичных динамических систем при помощи одного скалярного воздействия, генерируемого механизмом обратной связи. Такая задача может возникнуть при неполноприводном (underactuated) управлении колебательными механическими системами, при избирательном (селективном) управлении системами отдельных молекул и т.д. Исследован типовой случай, когда в качестве динамических систем рассматриваются идентичные нелинейные маятники, а разделение требуется произвести по уровню энергий подсистем. Для решения задачи предложено синтезировать управление с обратной связью. Алгоритм управления строится на основе метода скоростного градиента, расширенного для решения задач с фазовыми ограничениями. Для синтеза управления с ограничениями используется идея метода штрафных функций, работоспособность которого в данном случае следует из инвариантности энергий подсистем, см [5, 6].

Показано, что даже небольшая разница в начальных состояниях маятников позволяет реализовать требуемое разделение, причем результат слабо зависит от существенных изменений параметров объекта и от наличия возмущений. Показано также, что результат слабо зависит от параметров регулятора (коэффициента усиления γ) и от силы штрафа α .

Сказанное подтверждает перспективность предложенного подхода.

Литература

1. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Метод скоростного градиента и его приложения* // Автоматика и телемеханика. — 2021. — №9. — С. 3–72; Autom. Remote Control. — 2021. — Vol. 82, No. 9. — P. 1463–1518.
2. АНАНЬЕВСКИЙ М.С. *Селективное управление наблюдаемыми в ансамбле квантовомеханических молекулярных систем* // Автоматика и телемеханика. — 2007. — №8. —

- C. 32–43; *Autom. Remote Control.* — 2007. — Vol. 68, No. 8. — P. 1322–1332.
3. ФРАДКОВ А.Л. *Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления* // *Автоматика и телемеханика*. — 1979. — №9. — С. 90–101; *Autom. Remote Control.* — 1980. — Vol. 40, No. 9. — P. 1333–1342.
 4. ФРАДКОВ А.Л. *Адаптивное управление в сложных системах*. — М.: Наука, 1990. — 296 с.
 5. ANANYEVSKII M.S., FRADKOV A.L., NIJMEIJER H. *Control of Mechanical Systems with Constraints: Two Pendulums Case Study* // Proc. 17th IFAC World Congress. — Seoul, 2008. — P. 7690–7694.
 6. ANANYEVSKII M.S., FRADKOV A.L., NIJMEIJER H. *Swinging control of two-pendulum system under energy constraints* // *Dynamics and Control of Hybrid Mechanical Systems* / Ed. by G. Leonov, H. Nijmeijer, A. Pogromsky, A. Fradkov. — Singapore: World Scientific, 2010. — P. 167–180.
 7. FIACCO A.V., MCCORMICK G.P. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. — SIAM, 1990. — 210 p.
 8. FRADKOV A.L. *Cybernetical physics*. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. — 241 p.
 9. FRADKOV A.L., MIROSHNIK I.V., NIKIFOROV V.O. *Nonlinear and adaptive control of complex systems*. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 500 p.
 10. FRADKOV A.L., POGROMSKY A.YU. *Introduction to Control of Oscillations and Chaos*. — Singapore: World Scientific, 1998. — 320 p.
 11. KHALIL H.K. *Nonlinear systems*. — Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002. — 750 p.
 12. NIJMEIJER H., VAN DER SCHAFT A.J. *Nonlinear dynamical control systems*. — New York: Springer-Verlag, 1990. — 467 p.
 13. POGROMSKY A.YU., BELYKH V.N., NIJMEIJER H. *A study of controlled synchronization of Huijgens' pendula* // *Group coordination and cooperative control* / Ed. by K.Y. Pettersen,

- J.T. Gravdahl, H. Nijmeijer. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. — Vol. 336. — P. 205–216.
14. TOMCHINA O.P., TOMCHIN D.A., FRADKOV A.L. *Speed-gradient control of passing through resonance in one-and two-dimensional motion* // 16th IFAC World Congress Autom. Control. — June 2005. — 6 p.

ANALYSIS OF MOTION SEPARATION BY CONTROL FOR TWO IDENTICAL PENDULUMS

Bashar Suliman, Aleppo University, Syria, Saint Petersburg State University, Russia, PhD Student, (st102994@student.spbu.ru).

Alexander Fradkov, Dr. Sci. (Eng.), Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, Saint Petersburg State University, Russia, Professor (fradkov@mail.ru).

Abstract: The paper studies the possibility of separating the motions of two identical dynamic systems using a single scalar action generated by a feedback mechanism. Such a problem may arise with underactuated control of oscillatory mechanical systems, with selective control of individual molecule systems, etc. A typical case is studied when separation must be performed based on the energy level of subsystems. To solve the problem, it is proposed to synthesize feedback control. The control algorithm is based on the speed gradient method extended to account for constraints. To design control under constraints the inner penalty function is used. Its operability in this case follows from the invariance of the subsystem energies in the absence of control. It is shown that even a small difference in the initial states of the controlled systems allows the required separation to be achieved, and the result depends weakly on significant changes in the parameters of the controlled system and on the presence of disturbances. Finally, the result depends weakly on the parameters of the controller (gain γ) and the strength of the penalty α .

Keywords: Hamiltonian systems, energy control, phase constraints, control of mechanical systems, coupled pendulums, penalty functions, convergence rate, numerical simulation.

УДК 681.5

ББК 22.21

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Б.Р. Андриевским.*

Поступила в редакцию 08.05.2025.

Дата опубликования 30.09.2025.