ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПО ФАКТОРАМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ[1]

Сысоев А. С.[2], **Сараев П. В.**[3], **Погодаев А. К.**[4]
(*ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет», Липецк*)

Статья посвящена планированию эксперимента для проведения анализа чувствительности математических моделей, используемых в прогнозировании и управлении сложными системами. Основное внимание уделяется случаям, когда факторы распределены в пространстве неравномерно, что характерно для задач с нелинейными зависимостями, локальными особенностями и высокой вычислительной сложностью. В таких ситуациях оправданным является использование математического ремоделирования, когда модели, имеющие сложную структуру, заменяются (ремоделируются) объектами некоторого выбранного ремоделирующего класса, имеющими заданную структуру, что позволяет унифицировать исследование систем. Цель работы – разработка и сравнение стратегий планирования эксперимента, направленных на повышение эффективности анализа чувствительности. Рассматриваются методы, адаптированные к неравномерному распределению данных. В основе исследования чувствительности – метод анализа конечных изменений, построенный на применении теоремы Лагранжа о промежуточной точке. Численные эксперименты на тестовой функции и ее нейросетевой аппроксимации подтвердили, что предложенные алгоритмы (центральный композиционный план и адаптивный алгоритм на основе латинского гиперкуба) позволяют с высокой точностью идентифицировать значимые факторы. Указанные алгоритмы согласуются с классическими методами (индексы Соболя, метод Морриса) и существенно сокращают вычислительные затраты. Показано, что подход с ремоделированием уточняет оценки чувствительности и обеспечивает унификацию процедуры анализа для моделей сложной структуры.

Ключевые слова: анализ чувствительности, планирование эксперимента, ремоделирование.

---

[1] *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-21-00474, https://rscf.ru/project/24-21-00474/*

[2] *Антон Сергеевич Сысоев, к.т.н., доцент* (*sysoev_as@stu.lipetsk.ru*).

[3] *Павел Викторович Сараев, д.т.н., доцент* (*psaraev@yandex.ru*).

[4] *Анатолий Кирьянович Погодаев, д.т.н., профессор* (*pak@stu.lipetsk.ru*).

1. Введение

Сложные системы, в основе которых лежат разнородные математические модели, требуют детального анализа перед использованием. Важным этапом идентификации математической модели, ее дальнейшего исследования или оптимизации является планирование эксперимента [1]. Во-первых, это важно делать из-за эффективности использования вычислительных ресурсов, так как планирование позволяет минимизировать количество необходимых запусков модели, сокращая время и стоимость исследования. Во-вторых, правильное планирование помогает избежать переобучения модели, построения недостоверных связей между факторами. В-третьих, планирование эксперимента позволяет выделить наиболее ключевые факторы и их возможные взаимодействия, особенно в случае нелинейных зависимостей. Использование чувствительности позволяет оценить, как вариации входных данных влияют на результат, что особенно критично для прогнозирования и управления рисками [2, 6]. Правильно выбранный план эксперимента позволяет сократить объем вычислений за счет сосредоточения на ключевых факторах, что особенно актуально для задач с большой размерностью, характеризующихся чрезвычайно большим числом возможных комбинаций входных данных.

Анализ чувствительности по факторам математических моделей представляет собой метод изучения влияния изменений факторов на поведение некоторого показателя. Этот подход помогает определить наиболее важные факторы, выявить ключевые зависимости в данных, произвести структурную оптимизацию модели. По типу проведения анализа выделяют локальный анализ (исследуются малые изменения факторов в окрестности рассматриваемой точки, например, применяются частные производные, конечные разности) и глобальный анализ (оцениваются влияния изменений факторов во всем диапазоне их возможных значений, например, применяется метод Морриса [8]). По используемым техникам выделяют: методы на основе дисперсии (оценивается вклад каждого фактора в общую дисперсию выходных данных, например, использование коэффициентов Соболя [2], дисперсионного анализа [6] и др.); методы на основе регрессионных моделей (строится аппроксимирующая модель и анализируются ее коэффициенты, например, используется стандартизированная регрессия); методы на основе выборки (используются случайные или квазислучайные выборки для оценки влияния факторов на выход, например, метод латинского гиперкуба [5]). В ситуациях, когда математическая модели системы имеет представление, сложное для анализа и оптимизации, оправданным является подход математического ремоделирования, который представляет собой замену модели системы или процесса на другую структуру из заданного заранее класса ремоделирующих моделей, методы исследования которых унифицированы [7]. Такой подход играет важную роль в исследовании чувствительности по факторам математических моделей.

Данное исследование посвящено построению планов проведения эксперимента при проведении анализа чувствительности, основанного на применении анализа конечных изменений [10]. Цель статьи – синтезировать алгоритмы планирования эксперимента и сравнить их эффективность.

2. Исследование чувствительности математической модели на основе анализа конечных изменений

Пусть элемент рассматриваемой системы описывается скалярной функцией векторного аргумента $f(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

Глобальный анализ чувствительности в таком случае предполагает получение результатов с учетом одновременных изменений всех факторов модели с целью учета возможных взаимодействий между ними. Наиболее известным примером глобальных мер чувствительности является индекс чувствительности первого порядка, предложенный Соболем [9]:

$$S_i = \frac{V_{X_i}(E_{\mathbf{X}\sim i}(f|X_i))}{V(f)}, \tag{1}$$

где $V(f)$ – безусловная дисперсия f, получаемая при варьировании всех факторов X_i; V_{X_i} – условная дисперсия фактора X_i; $E_{\mathbf{X}\sim i}(f|X_i)$ – среднее значение f при фиксированном одном факторе.

В дополнение к индексам первого порядка (которые оценивают влияние отдельного фактора X_i без учёта взаимодействий), полные индексы Соболя позволяют количественно оценить суммарный вклад фактора, включая все его взаимодействия с другими переменными:

(2) $$S_{T_i} = 1 - \frac{V_{\mathbf{X}\sim i}(E_{X_i}(f|\mathbf{X} \sim i))}{V(f)},$$

где S_{T_i} – полный индекс Соболя относительно фактора X_i; $V(f)$ – общая дисперсия выходной величины f, $E_{X_i}(f|\mathbf{X} \sim i)$ – условное математическое ожидание f при фиксированных всех факторах, кроме X_i; $V_{\mathbf{X}\sim i}(E_{X_i}(f|\mathbf{X} \sim i))$ – дисперсия этого условного ожидания.

Задача анализа конечных изменений заключается в построении для имеющейся математической модели новой модели зависимости конечного изменения отклика от конечных изменений оказывающих на отклик влияние факторов. Такую задачу можно рассматривать как замещение имеющейся модели новой моделью, описываемой в терминах приращений; в этом смысле процесс имеет аналогию с ремоделированием [7].

Рассмотрим изменение величины $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$, заданное в форме $\mu(\mathbf{X}) = (\mu(X_1), ..., \mu(X_n))$, представленной конечными приращениями $\mu(\mathbf{X}) = (\Delta X_1, ...\Delta X_n)$. Задача анализа конечных изменений в таком случае может быть сформулирована следующим образом: пусть имеется структурно и параметрически идентифицированная модель

(3) $$f(\mathbf{X}) = f(X_1, ..., X_n), \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n,$$

определяющая связь между откликом f и его аргументами X_i. Необходимо привести модель (3) к виду

(4) $$\Delta f = \phi(\Delta\mathbf{X}) = \phi(\Delta X_1, ..., \Delta X_n),$$

описывающему связь между конечными изменениями отклика f и конечными изменениями ΔX_i его аргументов.

Таким образом, основная задача анализа конечных изменений сводится к нахождению способа перехода от модели (3) к модели структуры (4).

Вычисление частных производных в начальных точках интервалов приращений факторов может дать приближение модели (4), однако теорема Лагранжа о промежуточной точке для функций нескольких переменных дает точное равенство. Она представлена следующим образом:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(X^*)}{\partial X_i} \cdot \Delta X_i, \tag{5}$$

$$\mathbf{X}^* = (X_1^*, ..., X_n^*), \quad X_i^* = X_i^0 + \alpha \cdot \Delta X_i, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Здесь средние (или промежуточные) значения аргументов X_i^* определяются значением параметра α.

Пусть в выбранной точке имеющегося плана эксперимента аргументы находятся в некотором начальном состоянии $\mathbf{X}^0 = (X_1^0, \ldots, X_n^0)$ и, соответственно, отклик имеет вид $f(\mathbf{X}^0)$. В следующей точке аргументы претерпели изменения и представимы как $\mathbf{X}^1 = (X_1^1, \ldots, X_n^1)$, соответственно отклик принимает вид $f(\mathbf{X}^1)$.

Таким образом, абсолютное приращение отклика можно определить, с одной стороны, как разность нового и предыдущего значений, а с другой стороны, по теореме Лагранжа (5). Такое определение приращения отклика приводит к уравнению относительно параметра α:

$$f(\mathbf{X}^1) - f(\mathbf{X}^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(\ldots, X_i^0 + \alpha \cdot \Delta X_i, \ldots) \cdot \Delta X_i, \tag{6}$$

решение которого позволяет оценить влияние конечных изменений аргументов на конечное изменение отклика и получить модель вида

$$\begin{aligned} \Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(\ldots, X_i^{(0)} + \alpha \cdot \Delta X_i, \ldots) \cdot \Delta X_i = \\ = S_{x_1}\Delta X_1 + \cdots + S_{x_n}\Delta X_n. \end{aligned} \tag{7}$$

Описанная выше процедура повторяется t раз (где t – количество доступных наблюдений); численные результаты анализа должны быть усреднены для построения меры чувствительности [3]. В частности, можно применить процедуру нахождения среднего взвешенного Тьюки для построения точечной и интервальной оценки множества найденных мер чувствительности. Однако описанная процедура требует больших вычислительных ресурсов, что сказывается на времени проведения анализа. Актуальной становится задача построения набора точек (плана эксперимента), достаточных для проведения анализа чувствительности на приемлемом уровне.

3. Планирование эксперимента при проведении анализа чувствительности

Правильно спланированный эксперимент служит основой для статистически значимых выводов об относительной важности факторов модели. Методы на основе латинского гиперкуба и ортогональных планов особенно эффективны для задач большой размерности, где традиционные подходы становятся вычислительно нецелесообразными. Данные подходы позволяют сократить количество необходимых вычислительных экспериментов при сохранении требуемой точности оценок. Это особенно критично при работе с ресурсоемкими моделями, где прямое вычисление полного набора индексов Соболя или аналогичных мер чувствительности невозможно для практической реализации.

3.1. Центральный композиционный план анализа чувствительности

Неадаптивные методы предполагают фиксированный набор точек при проведении эксперимента, которые определены до начала исследования. Такие подходы к планированию эксперимента применяются, когда нет возможности динамически корректировать условия анализа модели системы, требуется строгая воспроизводимость полученных результатов, или используемые ресурсы ограничены.

При моделировании реальных систем часто применяются модели с нелинейными зависимостями. В таком случае использование полных и дробных факторных экспериментов становится неэффективным из-за увеличения количества точек для анализа при увеличении количества уровней факторов и наличия при этом огромного количества избыточных точек, в которых необходим запуск моделей. Эти проблемы приводят к использованию центрального композиционного плана [11], направленного на построение оптимальных (или близких к ним) планов эксперимента при изучении влияния нескольких факторов на отклик в ситуациях, когда присутствует нелинейность их связи.

На начальной стадии описываемого далее алгоритма осуществляется выбор дискретных значений для определяющих модель факторов системы (общее число базовых значений факторов составляет k). Одновременно задается параметр $\gamma \in (0, 1)$, регулирующий плотность дополнительных точек в пространстве параметров, включаемых в план эксперимента. Затем строится композиционный план, который состоит из трех основных частей: факторной (количество точек, включенных в эту часть, равно 2^k), дополнительных точек, учитывающих нелинейность связи (количество точек, включенных в эту часть, $2k$), центральных точек, учитывающих дисперсию разброса значений факторов (количество таких точек n_0). Таким образом, общее число точек в плане $N = 2^k + 2k + n_0$.

Синтезируем алгоритм построения плана эксперимента при проведении анализа чувствительности системы, основанный на применении центрального-композиционного плана.

В качестве целевой функции выберем модель системы, чувствительность которой необходимо исследовать $f(\mathbf{X})$, где $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$.

1. Формирование базового плана. Сформируем:

– факторные точки $\mathbb{F} = \{-1, 1\}^k$;

– центральные точки $\mathbb{C} = \{\mathbf{0}\}$;

– начальные дополнительные точки

$$\mathbb{S} = \{\pm\gamma\mathbf{e}_i \mid i = 1, ..., k\},$$

где $\mathbf{e}_i$ – базисный вектор.

2. Оценим чувствительность. Для этого необходимо:

– вычислить отклики для каждой из точек начального плана $y = f(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in \mathbb{F} \cup \mathbb{C} \cup \mathbb{S}$;

– для всех пар $(\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b)$, где $\mathbf{X}_a \in \mathbb{F} \cup \mathbb{C}$, $\mathbf{X}_b \in \mathbb{S}$ вычислить приращения факторов $\Delta\mathbf{X}$=$\mathbf{X}_b$–$\mathbf{X}_a$ и отклика Δf=$f(\mathbf{X}_b)$–$f(\mathbf{X}_a)$;

– найти параметры промежуточной точки $\alpha \in (0, 1)$ из основного соотношения анализа конечных изменений:

$$\Delta f = \sum_{m=1}^{n} \left. \frac{\partial f}{\partial X_m} \right|_{\mathbf{X}^{(i)}+\alpha\Delta\mathbf{X}} \cdot \Delta X_m;$$

– для каждой промежуточной точки X^* приращения определить чувствительность с помощью найденных параметров α как

$$S_m = \left| \left. \frac{\partial f}{\partial X_m} \right|_{\mathbf{X}^{(i)}+\alpha\Delta\mathbf{X}} \right|.$$

3. Обновим план. Для этого необходимо:

– определить максимальную чувствительность

$$S_{\max} = \max_{X^*(S_m)}; \tag{8}$$

– определить порог для включения точек в план

$$S_{threshold} = \lambda \cdot S_{\max};$$

– сформировать новый набор дополнительных точек:

$$\mathbb{S}_{new} = \{\mathbf{X}^* \mid S(\mathbf{X}^*) \geqslant S_{threshold}\};$$

– сформировать итоговый план:

$$\mathbf{X} = (\mathbb{F} \cup \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}) \cup \mathbb{S}_{new}.$$

3.2. Адаптивное планирование на основе метода латинского гиперкуба

Метод латинского гиперкуба представляет собой стратегию планирования экспериментов, обеспечивающая равномерное покрытие многомерного пространства факторов при ограниченном количестве испытаний. Каждая входная переменная разбивается на интервалы с равной вероятностью, из которых выбирается по одному значению. Эти значения комбинируются без повторения комбинаций, что обеспечивает сбалансированность выборки.

Существуют адаптивные модификации метода, динамически добавляющие точки на основе промежуточных результатов, что повышает эффективность эксперимента без потери точности.

Синтезируем адаптивный алгоритм построения плана эксперимента при проведении анализа чувствительности системы, основанный на применении латинского гиперкуба.

В качестве целевой функции выберем модель системы, чувствительность которой необходимо исследовать $f(\mathbf{X})$, где $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$. Зададим начальное число точек в плане и максимальное число точек N_0 и N_{max} соответственно. Зададим значение константы ε, которое будем использовать в качестве критерия останова.

1. Генерация начального плана:

$$\mathbf{X}_0 = \{\mathbf{X}^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}^{(N_0)}\}, \quad \mathbf{X}^{(i)} \in [X_i^{min}, X_i^{max}]^n,$$

$$f_0 = \{f(\mathbf{X}^{(1)}), \ldots, f(\mathbf{X}^{(N_0)})\}.$$

2. Автоматический выбор числа ближайших точек.

– Для текущего плана $\mathbf{X}$ вычислить средние расстояния до k ближайших точек:

$$D(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \|\mathbf{X}^{(i)} - \mathbf{X}^{(j)}\|, \quad k \in \{1, \ldots, k_{\max}\}.$$

– Определить оптимальное число k как точку перегиба:

$$k^* = \arg\max_k \left| \frac{\partial^2 D(k)}{\partial k^2} \right|.$$

3. Поиск промежуточных точек.

– Для каждой точки $\mathbf{X}^{(i)}$ выбрать k^* ближайших точек N_i.

– Для каждой из выбранных точек $\mathbf{X}^{(j)} \in N_i$ вычислить приращение:

$$\Delta f = f(\mathbf{X}^{(j)}) - f(\mathbf{X}^{(i)}), \quad \Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(j)} - \mathbf{X}^{(i)},$$

и используя основное соотношение анализа конечных изменений найти параметр промежуточной точки $\alpha \in (0, 1)$:

$$\Delta f = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_m}\bigg|_{\mathbf{X}^{(i)} + \alpha\Delta\mathbf{X}} \cdot \Delta X_m.$$

4. Определение чувствительности.

– Для каждой промежуточной точки X^* приращения каждой из выбранных k соседних точек определить чувствительность с помощью найденных параметров α как $\left.\dfrac{\partial f}{\partial X_m}\right|_{\mathbf{X}^{(i)}+\alpha\Delta\mathbf{X}}$.

– Нормировать полученные оценки чувствительности:

$$S_m(\mathbf{X}^*) = \left| \left.\frac{\partial f}{\partial X_m}\right|_{\mathbf{X}+\alpha\Delta\mathbf{X}} \right| \cdot (X_m^{max} - X_m^{min}).$$

5. Добавление новых точек в план.

– Определить точки с максимальной чувствительностью с учетом заданного порога λ:

$$\mathcal{X}_{top}^* = \{\mathbf{X}^* | S(\mathbf{X}^*) > \lambda \cdot \max S\}.$$

– Сгенерировать новые точки в окрестностях найденных:

$$\mathbf{X}_{new} = \mathbf{X}^* + \delta, \quad \delta_m \sim U(-\xi \cdot (X_m^{max} - X_m^{min}), \xi \cdot (X_m^{max} - X_m^{min})).$$

– Проверить, что найденные новые точки не совпадают с имеющимися в плане и не выходят за границы $[X_i^{min}, X_i^{max}]$.

6. Критерий останова. Остановить вычисления, когда

$$\max_m \left| \frac{S_m^{(t)} - S_m^{(t-1)}}{S_m^{(t-1)}} \right| < \varepsilon.$$

4. Численный пример

4.1. Описание исходных данных и анализируемых моделей

В качестве примера рассмотрим модификацию функции, представленной в работе [4], которая используется как тестовая при проведении анализа чувствительности:

$$f(\mathbf{X}) = \sin(\pi X_1 X_2) + 20X_3^2 + 10X_4 + 5X_5, \tag{9}$$

где входные факторы X_i равномерно распределены на интервалах $0 \leqslant X_i \leqslant 1$, $i = 1, ..., 5$. Для модели (9) с помощью стандартных алгоритмов рассчитаны полные индексы Соболя и показатели чувствительности Морриса (см. таблицу 1).

В качестве моделей ремоделирующего класса использованы полносвязные нейронные сети следующей структуры:

$$f(\mathbf{X}) = \phi_1 \left(b_0 + \sum_{k=1}^{n_2} w_k \phi_2 \left(b_k + \sum_{i=1}^{n_1} w_{ki} \phi_3 \left(b_i + \sum_{j=1}^{n} w_{ij} X_j \right) \right) \right), \tag{10}$$

где $f \in \mathbb{R}$ – значение выхода; $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ – вектор входов; w_k – весовые коэффициенты выходного слоя; w_{ki} – весовые коэффициенты второго скрытого слоя; w_{ij} – весовые коэффициенты первого скрытого слоя; b_0 – свободный коэффициент выходного слоя; b_k – свободные коэффициенты второго скрытого слоя; b_i – свободные коэффициенты первого скрытого слоя;

$$\phi_1(net) = \phi_2(net) = \phi_3(net) = \frac{1}{(1 + \exp(-net))} -$$

логистические функции активации.

Таблица 1. Показатели чувствительности модели (9)

Фактор	Полный индекс Соболя	Метод Морриса
X_1	0,07	0,15
X_2	0,09	0,17
X_3	0,68	0,39
X_4	0,16	0,19
X_5	0	0,09

4.2. Планирование эксперимента и нахождение чувствительности предлагаемыми алгоритмами

Вначале для модели (9) был построен центральный композиционный план, состоящий из 52 точек. Параметры алгоритма: порог отбора точек, обладающих наибольшей чувствительностью $\lambda = 0{,}9$, параметр выбора новых точек вокруг отобранных $\gamma = 0{,}15$. Результаты вычисления мер чувствительности представлены ниже на рис. 3.

С помощью адаптивного метода латинского гиперкуба для исследуемой модели (9) был построен план эксперимента, включающий 23 точки, полученные за 9 итераций. Динамика выбора количества ближайших точек k и добавления новых точек в план представлена на рис. 1. Далее был получен массив табулированных значений модели с шагом 0,25 по каждому фактору. С помощью структуры (10) восстановлена функция и проведен анализ чувствительности, в результате в плане получено 42 точки за 17 итераций. Динамика выбора количества ближайших точек k и добавления новых точек в план представлена на рис. 2.

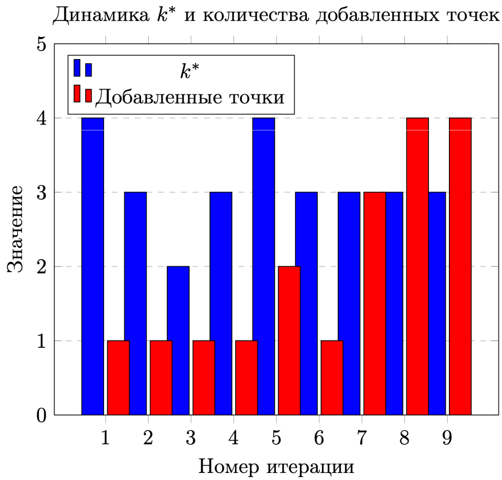

Рис. 1. Динамика выбора k ближайших точек при построении плана эксперимента и добавления точек в план (исходная модель)

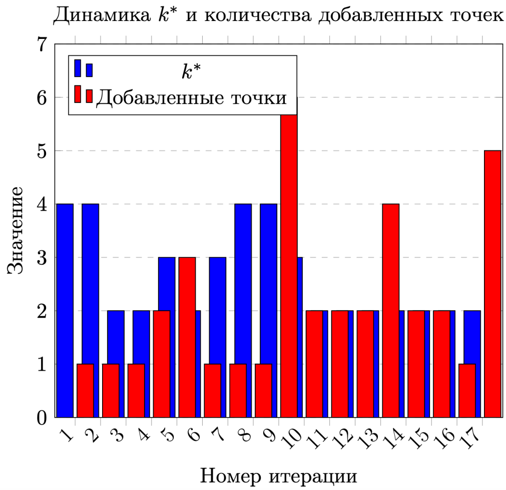

Рис. 2. Динамика выбора k ближайших точек при построении плана эксперимента и добавления точек в план (полученная ремоделированием модель)

В обоих случаях использованы следующие параметры алгоритма: начальных точек в плане $N_0 = 5$, максимальное число ближайших точек $k_{\max} = 5$, константа для определения максимальной чувствительности $\lambda = 0{,}99$, постоянная для построения окрестностей $\xi = 0{,}15$, точность останова $\varepsilon = 0{,}05$.

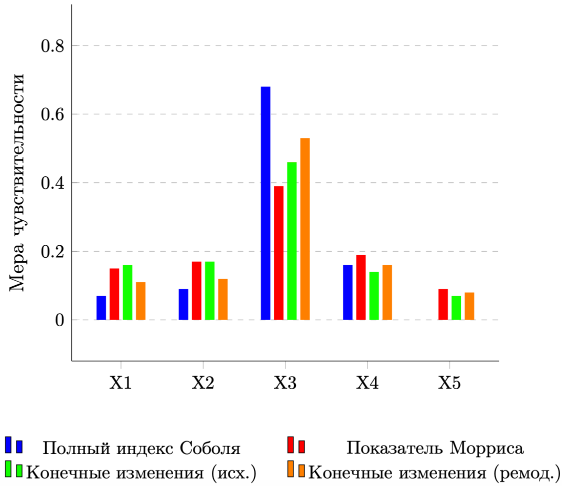

Рис. 3. Сравнение мер чувствительности по факторам для разных методов анализа

На рис. 3 представлены сравнительные результаты расчетов мер чувствительности, полученные различными методами. Из сравнения видно, что фактор X_3 имеет самую высокую чувствительность, что говорит о его доминировании в модели, в то время как фактор X_5 незначителен. Полные индексы Соболя выявляют более резкие различия между факторами, а метод Морриса дает более сглаженные оценки; оба варианта анализа конечных изменений дают схожие результаты, однако, анализ на модели, полученной ремоделированием, уточняет чувствительность модели. Относительный порядок ранжирования факторов сохраняется во всех вариантах анализа, что говорит о согласованности результатов. Стоит отметить, что центральный композиционный план дал результаты, схожие с методом Морриса, что подтверждает возможность его использования для быстрого скриннинга модели, не погружаясь в исследование эволюции чувствительности на интервалах изменения значений факторов.

5. Выводы и перспективы

Каждый из представленных методов имеет свои сильные и слабые стороны. Полные индексы Соболя применимы для глобального анализа чувствительности, однако их вычисление требует большого количества запусков модели, и метод сложен в случае большой размерности задачи. Метод Морриса применим для быстрого скрининга и отсева незначительных факторов, но он является менее точным. Анализ конечных изменений применим в случае, когда важна чувствительность к распределению выходных данных (а не только к их дисперсии, как в случае индексов Соболя), в связи с этим он применим для моделей с необычным распределением, к числу которых относятся нейросетевые модели. Подход ремоделирования в таком случае помогает унифицировать механизм анализа чувствительности и поиска плана для проведения качественного эксперимента по определению мер чувствительности. Одной из актуальных проблем в сфере анализа чувствительности является отсутствие универсального метода его проведения. Выбор зачастую зависит от размерности задачи, вычислительной стоимости модели, характера распределения данных. Перспективной является задача построения мета-алгоритма, который анализирует модель по указанным параметрам, автоматически определяет рациональный метод проведения анализа чувствительности и, при необходимости, применяет ремоделирование перед анализом чувствительности для упрощения исследования модели.

Литература

1. АДЛЕР Ю.П., МАРКОВА Е.В., ГРАНОВСКИЙ Ю.В. *Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий.* – М.: Наука, 1976. – 279 с.

2. СОБОЛЬ И.М., СТАТНИКОВ Р.Б. *Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями*. – М.: Дрофа, 2006. – 176 с.
3. ЩЕГЛЕВАТЫХ Р.В., СЫСОЕВ А.С. *Исследование нейросетевой модели обнаружения аномальных наблюдений в массивах данных* // Прикладная математика и вопросы управления. – 2021. – №1. – С. 23–40.
4. HORIGUCHI A., PRATOLA M.T., SANTNER T.J. *Assessing variable activity for Bayesian regression trees* // Reliability Engineering & System Safety. – 2021. – No. 207. – P. 107391.
5. PETELET M., IOOSS B., ASSERIN O. et al. *Latin hypercube sampling with inequality constraints* // AStA – Advances in Statistical Analysis. – 2010. – No. 94(4). – P. 325–339.
6. SALTELLI A. *Global Sensitivity Analysis: the Primer*. – Chichester: John Wiley & Sons, 2008.
7. SARAEV P., BLYUMIN S., GALKIN A. et al. *Mathematical remodeling concept in simulation of complicated variable structure transportation systems* // Transportation Research Procedia. – 2020. – No. 45. – P. 475-482.
8. SIN G., GERNAEY K.V. *Improving the Morris method for sensitivity analysis by scaling the elementary effects* // Computer aided chemical engineering. – 2009. – No. 26. – P. 925–930.
9. SOBOL I.M. *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates* // Mathematics and computers in simulation. – 2001. – No. 1–3. – P. 271–280.
10. SYSOEV A. *Sensitivity analysis of mathematical models* // Computation. – 2023. – No. 11(8). – P. 159.
11. SZPISJAK-GULYAS N., AL-TAYAWI A.N., HORVATH Z.H. et al. *Methods for experimental design, central composite design and the Box–Behnken design, to optimise operational parameters: A review* // Acta Alimentaria. – 2023. – No. 52(4). – P. 521–537.

DESIGN OF EXPERIMENT FOR SENSITIVITY ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS FROM DIFFERENT CLASSES

Anton Sysoev, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Cand.Sc., Associate Professor (sysoev_as@stu.lipetsk.ru),
Pavel Saraev, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, D.Sc., Associate Professor (psaraev@yandex.ru),
Anatoly Pogodaev, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, D.Sc., Professor (pak@stu.lipetsk.ru).

Abstract: The article focuses on design of experiment for conducting Sensitivity Analysis of mathematical models used in forecasting and controlling complex systems. Special attention is given to cases where factors are unevenly distributed in space, which is typical for problems with nonlinear dependencies, local features, and high computational complexity. In such situations, the application of mathematical remodeling is justified, whereby models with a complex structure are replaced (remodeled) by objects of a selected remodeling class that have a predefined structure, which allows unificating system research. The purpose of the study is the development and comparison of the design of experiment strategies aimed at improving the efficiency of Sensitivity Analysis. Methods adapted to uneven data distribution are considered. The foundation of sensitivity research is the analysis of finite fluctuations, built upon the application of the Lagrange mean value theorem. Numerical experiments on a test function and its neural network approximation confirmed that the proposed algorithms (central composite design and an adaptive Latin hypercube sampling-based method) enable highly accurate identification of significant factors, aligning with classical methods (Sobol indices, Morris method), while significantly reducing computational costs. It is shown that the remodeling approach refines sensitivity estimates and ensures a unified analysis procedure for models of complex structure.

Keywords: sensitivity analysis, design of experiment, remodeling.

УДК 519.7
ББК 22.18

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.

*Поступила в редакцию 01.08.2025.
Дата опубликования 30.09.2025.*