ПРОТОКОЛ ЛАТЕНТНОГО КОНСЕНСУСА СО СЛАБЫМИ ФОНОВЫМИ СВЯЗЯМИ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Хомутов Д. К.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Рассматривается согласование характеристик в многоагентной системе с информационными влияниями и запаздыванием. В частности, был рассмотрен случай, когда консенсус не достигается при любом векторе начальных значений. Подобная проблема может возникнуть в многоагентной системе со слабосвязанной структурой, т.е. когда есть несколько лидирующих агентов или групп агентов. Для достижения консенсуса был применен протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием. С помощью критерия Найквиста, примененного Цыпкиным, были установлены граничное значение запаздывания, зависящее от спектральных свойств лапласовской матрицы, и условие независимости сходимости от запаздывания. С уменьшением весов фоновых связей граничное значение запаздывания рассматриваемого протокола приближается к граничному значению запаздывания искомого протокола. Установлено, что в случае сходимости протокол латентного консенсуса с фоновыми связями сходится к консенсусу при любом векторе начальных значений, при этом веса фоновых связей могут быть сколь угодно малы. Таким образом применение данного протокола решает указанную выше проблему, а данное исследование позволяет адаптировать другие рассмотренные ранее протоколы латентного консенсуса для многоагентных систем с запаздыванием.

Ключевые слова: многоагентная система, консенсус, лапласовская матрица, управление с запаздыванием, метод Цыпкина.

1. Введение

Многоагентные системы с информационными влияниями имеют широкое применение во многих областях: в управлении движением и формацией автономных агентов [12, 15, 24, 33, 34], в сетевых структурах [6, 25, 39, 42], в социально-экономических системах [3, 4, 26, 45] и пр.

Однако в таких системах возникает запаздывание из-за времени, которое необходимо агенту на реакцию на какие-либо из-

[1] *Дмитрий Константинович Хомутов, м.н.с.* (*homutov_dk@mail.ru*).

менения, обработку информации и принятие решения, а также из-за технических ограничений при передаче информации. Так, в [13, 16, 19, 23] представлены модели потока транспорта с запаздыванием, которое возникает из-за времени, необходимого водителю, чтобы среагировать на изменение ситуации. Системы и сети распределения ресурсов и цепочки поставок состоят из взаимосвязанных точек, обменивающихся ресурсом или информацией [47]. В таких сетях запаздывание возникает из-за времени, необходимого на принятие решений, транспортировку ресурса и производство [17, 28, 30, 41]. В моделях управления с прогнозированием, использующихся в производственных процессах, запаздывание возникает вследствие того, что необходимо знать как текущее состояние системы, так и состояния системы в предыдущие моменты времени [27]. В [11] исследуется устойчивость к вибрациям в процессе работы фрезерного станка. Силы, возникающие в процессе прохождения через рабочую поверхность предыдущих зубьев пилы, влияют на устойчивость, вследствие чего в соответствующей математической модели возникает запаздывание.

Запаздывания также возникают в математических моделях, описывающие биологические системы. В генетических сетях запаздывание возникает в следствие того, что химические реакции происходят в течение некоторого времени [44]. При моделировании роста численности популяции животных необходимо принять во внимание, что новорожденные особи должны вырасти, прежде чем быть способными давать новое потомство. При моделировании процесса дыхания человека необходимо учесть, что циркуляция в крови происходит с запаздыванием. В нейронной системе возникает запаздывание при передаче потенциала в силу ограниченной скорости передачи и времени отклика [14, 18, 22, 29, 36]. На основе данного взаимодействия нейронов строятся спайковые нейронные сети [20].

Во второй половине XX века появилось множество классических результатов по дифференциальным, функционально-дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом (см. например [8, 35]) и системам с запаздыванием (см. например [7, 31, 43]). Устойчивость подобных уравнений тесно связана с устойчивостью квазиполиномов [5, 21, 37, 38].

В данной статье исследуется протокол согласования характеристик в многоагентных системах с временной задержкой. Структуру взаимодействия агентов удобно представить в виде орграфа, где вершины соответствуют агентам, а дуги – их влиянию друг на друга. Агенты получают данные о состоянии своих соседей с некоторым запаздыванием, происходит процесс усреднения данных, тем самым агенты согласовывают свои характеристики. Известно, что в такой системе сходимость протокола зависит от спектральных свойств лапласовской матрицы, построенной на основе орграфа. Если значение запаздывания меньше граничного значения запаздывания, зависящего от спектра, и 0 – простое собственное значение, то агенты достигнут консенсуса при любом векторе начальных значений [10]. Однако если второе условие нарушается, возможно ли при минимальном изменении структуры орграфа и области сходимости достигнуть некого наиболее естественного консенсуса?

В [2] рассматривалась схожая задача для многоагентной системы без запаздывания, а такой консенсус назывался «латентным» консенсусом. Однако для применения предложенных в [2] протоколов необходимо исследовать их область сходимости и асимптотическое поведение в случае запаздывания. В данной статье будет рассмотрен протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием.

2. Необходимые понятия и результаты

Пусть $V = \{1, ..., n\}$ – множество вершин, соответствующее агентам; $G =< V, E >$ – орграф влияний, в котором $E \subset V \times V$ – множество дуг. Если агент j влияет на агента i с весом $a_{ij} > 0$, то существует дуга из j в i с тем же весом. Если агент j не влияет на агента i, то $a_{ij} = 0$.

Определение 1. *Лапласовская матрица $L = (l_{ij})$, соответствующая орграфу G, строится следующим образом:*

$$\begin{cases} l_{ij} = -a_{ij}, & i \neq j; \\ l_{ii} = \sum_{k \neq i} a_{ik}. \end{cases}$$

Определение 2. *Спектр матрицы L – это множество $\sigma(L) = \{\lambda \mid |A - \lambda I| = 0\}$, где I – единичная матрица. Спектр матрицы $\sigma(L)$, будет рассмотрен в данной статье с учетом кратности. Обозначим через $\sigma(L) \setminus \{0\}$ спектр матрицы L, не содержащий нулевые значения, а $\sigma(L) \setminus (0)$ – спектр матрицы L, не содержащий одно нулевое значение.*

Стоит отметить, что $L\mathbf{1} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ – вектор-столбцы из единиц и нулей соответственно. Таким образом, хотя бы одно нулевое значение будет содержаться в $\sigma(L)$. Действительные части собственных значений матрицы L всегда неотрицательные (более подробно о локализации спектра лапласовских матриц см. в [1]).

Базовый протокол консенсуса первого порядка с запаздыванием, который был предложен в [40], имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Lx(t - \tau), & t \geqslant 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0), \end{cases} \tag{1}$$

где L – лапласовская матрица.

Определение 3. *Протокол* (1) *сходится, если существует конечный предел $\lim_{t\to\infty} x(t)$, где $x(t)$ – решение системы* (1).

Определение 4. *Протокол* (1) *сходится к консенсусу, если конечный предел решения системы* (1) *можно представить в виде $\lim_{t\to\infty} x(t) = c\mathbf{1}$, где c – значение консенсуса.*

Теорема 1. (*Адаптация результата из* [32] *в* [10]) *Протокол* (1) *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{\pi}{2} - |\arg \lambda| \right).$$

Определение 5. *Образом (линейной оболчкой столбцов) матрицы L называется множество $\mathcal{R}(L) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = Lx, x \in \mathbb{R}^n\}$. Ядром матрицы L называется множество $\mathcal{N}(L) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Lx = \mathbf{0}\}$.*

Определение 6. *Собственным проектором лапласовской матрицы L называется такая идемпотентная стохастическая* *матрица* $L^{\vdash}$, *что* $\mathcal{R}(L) = \mathcal{N}(L^{\vdash})$ *и* $\mathcal{N}(L) = \mathcal{R}(L^{\vdash})$ *(см. подробнее в* [9, 46]*)*.

***Утверждение* 1.** [9]

1) $\lim_{t\to\infty}(I + tL)^{-1} = L^{\vdash}$.

2) $LL^{\vdash} = L^{\vdash}L = \mathbf{0}_{n\times n}$, *где* $\mathbf{0}_{n\times n}$ *– матрица из нулей размерности* $n \times n$.

3) $\mathrm{rank}(L) = n - \mathrm{rank}(L^{\vdash})$.

Теорема 2. (*Адаптация результата из* [10])

1) *Пусть протокол* (1) *сходится,* $\phi(\theta) = x(0)$. *Тогда если* $x(t)$ *– решение системы* (1)*, то*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = L^{\vdash}x(0).$$

2) *Пусть протокол* (1) *сходится,* $\phi(\theta) = x(0)$. *Тогда если 0 – простое собственное значение матрицы* L, *то протокол* (1) *будет сходиться к консенсусу при любом векторе начальных значений* $x(0)$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Лапласа $x(t-\tau)$:

$$\mathcal{L}(x(t-\tau)) = \int_0^{\infty} e^{-ts}x(t-\tau)dt. \tag{2}$$

Обозначим $u = t - \tau$. Тогда

$$\mathcal{L}(x(t-\tau)) = \int_{-\tau}^{\infty} e^{-(u+\tau)s}x(u)du = \int_{-\tau}^{0} e^{-(u+\tau)s}x(u)du +$$
$$+ \int_0^{\infty} e^{-(u+\tau)s}x(u)du = \left(\frac{1-e^{-\tau s}}{s}\right)x(0) + e^{-\tau s}X(s).$$

Тогда преобразованием Лапласа системы (1) будет

$$sX(s) - x(0) = -\left(\frac{1-e^{-\tau s}}{s}\right)Lx(0) - e^{-\tau s}LX(s);$$

$$sX(s) + e^{-\tau s}LX(s) = x(0) - \left(\frac{1-e^{-\tau s}}{s}\right)Lx(0);$$

$$X(s) = (sI + e^{-\tau s}L)^{-1}\left(I - \left(\frac{1-e^{-\tau s}}{s}\right)L\right)x(0).$$

Так как протокол (1) сходится, то согласно теореме о конечном значении

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s(sI + e^{-\tau s}L)^{-1}\left(I - \left(\frac{1-e^{-\tau s}}{s}\right)L\right)x(0) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(I + \frac{e^{-\tau s}}{s}L\right)^{-1}\left(I - \left(\frac{1-e^{-\tau s}}{s}\right)L\right)x(0).$$

В силу того, что $\lim_{s\to 0}\left(\frac{1-e^{-\tau s}}{s}\right) = \tau$ и согласно утверждению 1

$$\lim_{s\to 0}\left(I + \frac{e^{-\tau s}}{s}L\right)^{-1} = L^{\vdash},$$

получаем

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = L^{\vdash}(I - \tau L)x(0) = L^{\vdash}x(0) - \tau L^{\vdash}Lx(0) = L^{\vdash}x(0).$$

Если 0 – простое собственное значение матрицы L, то $\operatorname{rank}(L) = n - 1$. Тогда матрица $L^{\vdash}$ будет стохастической матрицей единичного ранга, и $L^{\vdash}x(0) = c\mathbf{1}$.

В случае, когда кратность нулевого собственного значения больше 1, для достижения латентного консесуса в [2] был предложен протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями. В случае МАС с запаздыванием данный протокол примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\delta Dx(t) - Lx(t-\tau), & t \geqslant 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0), \end{cases} \tag{3}$$

где $\delta > 0$, $D = I - V$, $V = \mathbf{1}v^{\top}$, $\sum_i v_i = 1$.

3. Основной результат

Рассмотрим сходимость и асимптотическое поведение протокола (3) при $\delta \to 0$. Характеристической функцией уравнения (3) будет

$$F(z) = \det(zI + \delta D + Le^{-\tau z}).$$

Рассмотрим следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 2. *Жордановой формой матрицы D будет являться матрица* $\Lambda_D = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1\times(n-1)} \\ \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} & I_{(n-1)\times(n-1)} \end{pmatrix}$.

Доказательство. Как было упомянуто ранее, $D = I - V$, где $V = \mathbf{1}v^\top$. Стоит отметить, что $\sigma(V) = (0, ..., 0, 1)$. Также $\mathbf{1}v^\top\mathbf{1}v^\top = \mathbf{1}v^\top$, что означает, что V – идемптотентная матрица. Тогда жордановой формой матрицы V будет матрица

$$\Lambda_V = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(n-1)\times(n-1)} & \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\Lambda_V = S^{-1}VS;\ P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1\times(n-2)} & 1 \\ \mathbf{0}_{(n-2)\times 1} & I_{(n-2)\times(n-2)} & \mathbf{0}_{(n-2)\times 1} \\ 1 & \mathbf{0}_{1\times(n-2)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда рассмотрим преобразование матрицы D с помощью матрицы SP.

$$(SP)^{-1}DSP = P^{-1}S^{-1}DSP = P^{-1}S^{-1}(I - V)SP = P^{-1}(I - \Lambda_V)P =$$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix} I_{(n-1)\times(n-1)} & \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times(n-1)} & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1\times(n-1)} \\ \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} & I_{(n-1)\times(n-1)} \end{pmatrix} = \Lambda_D.$$

Таким образом посредством матрицы преобразования SP получена жорданова форма Λ_D матрицы D.

Утверждение 3. *Характеристическую функцию системы* (3) $F(z)$ *можно представить как произведение квазиполиномов*

$$F(z) = z \prod_{\lambda\in\sigma(L)\setminus(0)} (z + \delta + e^{-\tau z}\lambda).$$

Доказательство. Согласно утверждению 2 $\Lambda_D = \operatorname{diag}(0, 1, ..., 1)$ является жордановой формой матрицы D. Пусть $\Lambda_D = S^{-1}DS$. Так как $\mathbf{1}$ – собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению, то матрица S будет иметь вид $S = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & * \end{pmatrix}$. Тогда $LS = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & * \end{pmatrix}$, а матрицу $S^{-1}LS$ можно представить как

$$S^{-1}LS = \begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} & R_L \end{pmatrix},$$

где R_L – некая матрица, $\sigma(R_L) = \sigma(L) \setminus (0)$. Тогда

$$F(z) = \det(zI + \delta D + Le^{-\tau z}) = \det(S^{-1}(zI + \delta D + Le^{-\tau z})S) =$$
$$= \det(zI + \delta S^{-1}DS + e^{-\tau z}S^{-1}LS) =$$
$$= \det\left(zI + \delta\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1\times(n-1)} \\ \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} & I_{(n-1)\times(n-1)}\end{pmatrix} + e^{-\tau z}\begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} & R_L\end{pmatrix}\right) =$$
$$= z\det((z+\delta)I_{n-1} + e^{-\tau z}R_L) = z\prod_{\lambda\in\sigma(L)\setminus(0)}(z + \delta + e^{-\tau z}\lambda).$$

Обозначим получившиеся квазиполиномы как

$$f_\lambda(z) = z + \delta + e^{-\tau z}\lambda.$$

Если нули квазиполиномов $f_\lambda(z)$, $\lambda \in \sigma(L) \setminus (0)$, находятся левее мнимой оси, то протокол (3) будет сходиться.

Данное условие можно интерпретировать следующим образом. Пусть в протоколе (3) вместо матрицы D будет 1, а вместо матрицы L – собственное значение λ, т.е. будет получено скалярное дифференциальное уравнение:

$$\dot{y}(t) = -\delta y(t) - \lambda y(t - \tau). \tag{4}$$

Тогда характеристической функцией уравнения (4) будет функция $f_\lambda(z)$. Если для любого $\lambda \in \sigma(L) \setminus (0)$ решение уравнения (4) будет устойчивым, то протокол (3) будет сходиться.

Устойчивость решения уравнения (4) будет оценена с помощью метода Цыпкина. Характеристическая функция $f_\lambda(z)$ будет принята за характеристический многочлен эквивалентной системы с запаздывающей обратной связью, который может быть представлен в виде

$$f_\lambda(z) = z + \delta + e^{-\tau z}\lambda = Q(z) - P(z)e^{-\tau z}.$$

Тогда амплитудно-фазовая характеристика эквивалентной системы будет

$$W_\tau(is) = \frac{P(is)}{Q(is)}e^{-i\tau s} = -\frac{\lambda}{is + \delta}e^{-i\tau s} = W_0(is)e^{-i\tau s}. \tag{5}$$

В силу того что $\delta > 0$, следует, что корень $Q(z)$ будет меньше нуля. Это означает, что соответствующая разомкнутая система будет устойчивой. Тогда, согласно методу Цыпкина, если график $W_\tau(is)$ не будет содержать внутри себя точку $(1, 0)$, то решение уравнения (4) будет устойчивым, и не устойчивым в ином случае. Случай, когда график $W_\tau(is)$ проходит через точку $(1,0)$, называется критическим.

Обозначим $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda)$, $\beta = \mathrm{Im}(\lambda)$. Тогда функцию $W_0(is)$ можно представить как

$$W_0(is) = -\frac{\alpha + i\beta}{\delta + is} = -\frac{\alpha\delta + s\beta}{\delta^2 + s^2} - i\frac{-s\alpha + \delta\beta}{\delta^2 + s^2} = x + iy.$$

Рассмотрим $|W_\tau(is)|$. Очевидно, что $|W_\tau(is)| = |W_0(is)|$. Тогда

$$|W_\tau(is)| = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\delta^2 + s^2}}.$$

Утверждение 4. *Пусть для каждого $\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}$ выполнено условие*

$$\alpha^2 + \beta^2 < \delta^2.$$

Тогда сходимость протокола (3) *не будет зависеть от τ.*

Доказательство. Условие из утверждения можно переписать как

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\delta^2} < 1.$$

Тогда для каждого $\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}$ справедливо

$$|W_\tau(is)| = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\delta^2 + s^2}} \leqslant \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\delta^2}} < 1.$$

Это означает, что график $W_\tau(is)$ никогда не захватит точку $(1,0)$, причем вне зависимости от τ. Таким образом, для каждого $\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}$ решение уравнения (4) будет устойчивым для любого τ, что означает, что сходимость протокола (3) не будет зависеть от τ.

Следствие 1. *При $\delta \to 0$ сходимость протокола* (3) *всегда будет зависеть от τ.*

Теорема 3. *Пусть при фиксированном δ множество*

$$\Psi = \{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\} \mid \alpha^2 + \beta^2 \geqslant \delta^2\}$$

непусто. Для каждого $\lambda \in \Psi$ вычислим значение

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\frac{\alpha\delta + \beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\delta^2}}{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}.$$

Тогда протокол (3) *будет сходиться тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \Psi} \tau_\lambda$.*

Доказательство. Найдем критические частоты, при которых $|W_0(is)| = 1$.

$\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\delta^2+s^2}} = 1;\ \alpha^2+\beta^2 = \delta^2+s^2;\ s = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\delta^2}.$

График $W_0(is)$ будет пересекать точку $(1, 0)$, если

$$\arg(W_0(is)) - \tau s = 2\pi n;$$
$$\cos(\arg(W_0(is))) = \cos(\tau s + 2\pi n);$$
$$\cos(\arg(W_0(is))) = \cos(\tau s).$$

Стоит отметить, что $\cos(\arg(W_0(is))) = x$. Тогда граничное τ_λ можно вычислить как

$$\cos(\tau_\lambda s) = x;$$
$$\tau_\lambda = \frac{\arccos(x)}{s} = \frac{\arccos\left(-\frac{\alpha\delta\pm\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\delta^2}}{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\delta^2}}.$$

Стоит отметить, что при отрицательном значении s значение τ_λ будет также отрицательным. Поэтому далее будет рассматриваться только положительное значение s. Тогда решение уравнения (4) будет устойчивым тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_\lambda$, где

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\frac{\alpha\delta+\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\delta^2}}{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\delta^2}}.$$

Решения уравнений (4) для каждого $\lambda \in \Psi$ будут устойчивыми тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda\in\Psi}\tau_\lambda$. А значит и протокол (3) будет сходиться тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda\in\Psi}\tau_\lambda$.

Следствие 2. *При* $\delta \to 0$ *протокол* (3) *будет сходиться тогда и только тогда, когда* $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda\in\sigma(L)\setminus\{0\}} \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{\pi}{2} - |\arg\lambda|\right)$. *Иными словами, при* $\delta \to 0$ *граничное значение запаздывания стремится к значению, полученному в теореме 1.*

Доказательство. При $\delta \to 0$ $\Psi = \sigma(L)\setminus\{0\}$. Таким образом, для всех $\lambda \in \sigma(L)\setminus\{0\}$ устойчивость решения уравнения (4) будет зависеть от τ.

Решение уравнения (4) при $\delta \to 0$ будет устойчивым тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_\lambda$, где

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\frac{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\arccos\left(-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} =$$

$$= \frac{1}{|\lambda|}(\arccos(\sin(-\arg\lambda))) = \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{\pi}{2} + \arg\lambda\right).$$

Тогда при $\delta \to 0$ протокол (3) будет сходиться тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_0$, где

$$\tau_0 = \min_{\lambda\in\Psi} \tau_\lambda = \min_{\lambda\in\sigma(L)\setminus\{0\}} \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{\pi}{2} + \arg\lambda\right).$$

В силу того, что если $\sigma(L) \setminus \{0\}$ содержит комплексное значение, то содержит и комплексно сопряженное, полученное значение τ_0 будет идентично значению

$$\tau_0 = \min_{\lambda\in\sigma(L)\setminus\{0\}} \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{\pi}{2} - |\arg\lambda|\right),$$

что совпадает со значением, полученным в теореме 1.

Далее рассмотрим асимптотическое поведение протокола (3). Для этого необходимо следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 5. [2]

1) $(L + \delta D)^{\vdash} = \mathbf{1}v^\top \left(I + \frac{1}{\delta}L\right)^{-1}$;

2) $\lim_{\delta\to 0}(L + \delta D)^{\vdash} = \mathbf{1}v^\top L^{\vdash}$.

Теорема 4. *Пусть дан протокол консенсуса* (3)*, который сходится с начальным условием* $\phi(\theta) = x(0)$. *Тогда*

1) $\lim_{t\to\infty} x(t) = \mathbf{1}v^\top \left(I + \frac{1}{\delta}L\right)^{-1}(I - \tau L)x(0)$;

2) $\lim_{\delta\to 0}\lim_{t\to\infty} x(t) = \mathbf{1}v^\top L^{\vdash}x(0)$.

Таким образом, протокол (3) *будет сходиться к консенсусу при любом векторе начального значения.*

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 2 преобразованием Лапласа $x(t-\tau)$ будет:

$$\mathcal{L}(x(t-\tau)) = \left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{s}\right)x(0) + e^{-\tau s}X(s).$$

Тогда преобразованием Лапласа системы (3) будет

$$sX(s) - x(0) = -\delta DX(s) - e^{-\tau s}LX(s) - \left(\frac{1-e^{-\tau s}}{s}\right)Lx(0);$$

$$sX(s) + \delta DX(s) + e^{-\tau s}LX(s) = x(0) - \left(\frac{1-e^{-\tau s}}{s}\right)Lx(0);$$

$$X(s) = (sI + \delta D + e^{-\tau s}L)^{-1}\left(I - \left(\frac{1-e^{-\tau s}}{s}\right)L\right)x(0).$$

Так как протокол (3) сходится, то согласно теореме о конечном значении

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s(sI + \delta D + e^{-\tau s}L)^{-1}\left(I - \left(\frac{1-e^{-\tau s}}{s}\right)L\right)x(0) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(I + \frac{1}{s}(\delta D + e^{-\tau s}L)\right)^{-1}\left(I - \left(\frac{1-e^{-\tau s}}{s}\right)L\right)x(0).$$

Так как $(\delta D + L)$ – лапласовская матрица, то, согласно утверждению 1,

$$\lim_{s\to 0}\left(I + \frac{1}{s}(\delta D + e^{-\tau s}L)\right)^{-1} = (L + \delta D)^{\vdash}.$$

Таким образом

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = (L+\delta D)^{\vdash}(I-\tau L)x(0) = \mathbf{1}v^{\top}\left(I + \frac{1}{\delta}L\right)^{-1}(I-\tau L)x(0).$$

Тогда

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{\delta\to 0}\mathbf{1}v^{\top}\left(I + \frac{1}{\delta}L\right)^{-1}(I - \tau L)x(0) =$$

$$= \mathbf{1}v^{\top}L^{\vdash}(I - \tau L)x(0) = \mathbf{1}v^{\top}L^{\vdash}x(0).$$

В силу того, что матрица $\mathbf{1}v^{\top}L^{\vdash}$ является стохастической матрицей единичного ранга, протокол (3) будет сходиться к консенсусу при любом векторе начальных значений.

4. Заключение

В данной статье был рассмотрен протокол согласования характеристик агентов в многоагентной системе с информационными влияниями и запаздыванием. Для случая, когда агенты не достигают консенсуса при любом векторе начальных значений, был предложен протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием. Граничное значение запаздывания предложенного протокола с уменьшением весов фоновых связей приближается к граничному значению запаздывания исходного протокола. В то же время предложенный протокол сходится к консенсусу при любом векторе начальных значений и сколь угодно малых весах фоновых связей, что решает вышеуказанную проблему. Данное исследование позволяет адаптировать другие рассмотренные ранее протоколы латентного консенсуса для многоагентных систем с запаздыванием.

Литература

1. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Лапласовские спектры орграфов и их приложения* // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №5. – С. 47–62.
2. АГАЕВ Р.П., ЧЕБОТАРЕВ П.Ю. *Модели латентного консенсуса* // Автоматика и телемеханика. – 2017. – №1. – С. 106–120.
3. ГУБАНОВ Д.А. *Методы анализа информационного влияния в активных сетевых структурах* // Автоматика и телемеханика. – 2022. – №5. – С. 87–101.
4. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Л. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства* – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2010. – 228 с.
5. ПОНТРЯГИН Л.С. *О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций* // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1942. – Т. 6, №3. – С. 115–134.

6. ПРОСКУРНИКОВ А.В., ФРАДКОВ А.Л. *Задачи и методы сетевого управления* // Автоматика и телемеханика. – 2016. – №10. – С. 3–39.
7. ЦЫПКИН Я.З. *Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью* // Автоматика и телемеханика. – 1946. – Т. 7, №2–3. – С. 107–129.
8. ЭЛЬСГОЛЬЦ Л.Э. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* – М.: Наука, 1971. – 295 с.
9. AGAEV R., CHEBOTAREV P. *Forest matrices around the Laplacian matrix* // Linear Algebra and Its Applications. – 2002. – Vol. 356, No. 1–3. – P. 253–274.
10. AGAEV R.P., KHOMUTOV D. *On the Asymptotic Behavior of a Multiagent Systems with Arbitrary Structure and Time-Delays* // Proc. of the 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). Moscow: IEEE, 2022. – P. 1–3.
11. ALTINAS Y., ENGIN S., BUDAK E. *Analytical stability prediction and design of variable pitch cutters* // Journal of Manufacturing Science and Engineering. – 1999. – Vol. 121, No. 5. – P. 173–178.
12. ARYANKIA K., SELMIC R.R. *Neuro-Adaptive Formation Control of Nonlinear Multi-Agent Systems With Communication Delays* // Journal of Intelligent & Robotic Systems. – 2023. – Vol. 109, No. 4. – P. 92 (1–15).
13. AVEDISOV S.S., BANSAL G., OROSZ G. *Impacts of connected automated vehicles on freeway traffic patterns at different penetration levels* // IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems. – 2020. – Vol. 23, No. 5. – P. 4305–4318.
14. BAKER C.T.H., BOCHAROV G.A., RIHAN F.A. *A report on the use of delay differential equations in numerical modelling in the biosciences* // Manchester Centre for Computational Mathematics, Manchester. – 1999. – No. 343. – P. 1–46.

15. BALDIVIESO P.E., VEERMAN J.J.P. *Stability conditions for coupled autonomous vehicles formations* // IEEE Trans. on Control of Network Systems. – 2021. – Vol. 8, No. 1. – P. 513–522.
16. BANDO M. et al. *Analysis of optimal velocity model with explicit delay* // Phys. Review E. – 1998. – Vol. 58, No. 5. – P. 5429–5435.
17. BELAIR J., MACKEY M.C. *Consumer memory and price fluctuations in commodity markets: An integrodifferential model* // Journal of Dynamics and Differential Equations. – 1989. – Vol. 1. – P. 299–325.
18. BELINSKAIA A. et al. *Short-delay neurofeedback facilitates training of the parietal alpha rhythm* // Journal of Neural Engineering. – 2020. – Vol. 17, No. 6. – P. 066012 (1–18).
19. CAO Z. et al. *Modeling and simulating urban traffic flow mixed with regular and connected vehicles* // IEEE Access. – 2021. – Vol. 9. – P. 10392–10399.
20. CHAPLINSKAIA N., BAZENKOV N. *Axonal Myelination as a Mechanism for Unsupervised Learning in Spiking Neural Networks* // Proc. of the BICA – Procedia Computer Science, 2023. – Cham, Switzerland: Springer. – 2024. – Vol. 1130. – P. 169–176.
21. CHEBOTAREV N.G., MEIMAN N.N. *The Routh-Hurwitz problem for polynomials and entire functions* // Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova. – 1949. – Vol. 26. – P. 3–331.
22. COOMBES S., WEDGWOOD K.C.A. *Neurodynamics.* – Switherland: Springer, 2023. – 507 p.
23. DE SOUZA F., STERN R. *Calibrating microscopic car-following models for adaptive cruise control vehicles: Multiobjective approach* // Journal of Transportation Engineering, Part A: Systems. – 2021. – Vol. 147, No. 1. – P. 04020150 (1–11).
24. DING T.F. et al. *Second-order bipartite consensus for networked robotic systems with quantized-data interactions*

and time-varying transmission delays // ISA Trans. – 2021. – Vol. 108. – P. 178–187.

25. DITTRICH M.A., FOHLMEISTER S. *Cooperative multi-agent system for production control using reinforcement learning* // CIRP Annals. – 2020. – Vol. 69, No. 1. – P. 389–392.
26. DOMENTEANU A. et al. *From Data to Insights: A Bibliometric Assessment of Agent-Based Modeling Applications in Transportation* // Applied Sciences. – 2023. – Vol. 13, No. 23. – P. 12693 (1–37).
27. FERNANDEZ-CAMACHO E., BORDONS-ALBA C. *Model predictive control in the process industry.* – London: Springer, 1995. – 239 p.
28. GOLUBENETS V.O. *Relaxation oscillations in a logistic equation with nonconstant delay* // Mathematical notes. – 2020. – Vol. 107. – P. 920–933.
29. GOPOLSAMY K. *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics.* – Dordrecht: Springer, 1992. – 502 p.
30. KASHCHENKO I., KASCHENKO S. *Infinite process of forward and backward bifurcations in the logistic equation with two delays* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2019. – Vol. 22, No. 4. – P. 407–412.
31. GU K., CHEN J., KHARITONOV V.L. *Stability of time-delay systems.* – Berlin: Birkhäuser, 2003 – P. 356.
32. HARA T., SUGIE J. *Stability region for systems of differential-difference equations* // Funkcialaj Ekvacioj. – 1996. – Vol. 39, No. 1. – P. 69–86.
33. HERBRYCH J. et al. *Dynamics of locally coupled agents with next nearest neighbor interaction* // Differential Equations and Dynamical Systems. – 2021. – Vol. 29. – P. 487–509.
34. ISLAM M.S., FARUQUE I.A. *Insect visuomotor delay adjustments in group flight support swarm cohesion* // Scientific Reports. – 2023. – Vol. 13, No. 1. – P. 6407 (1–17).
35. KOLMANOVSKII V., MYSHKIS A. *Applied theory of functional differential equations.* – Dordrecht: Kluwer

Academic Publishers, 1992. – 234 p.

36. MACDONALD N. *Biological delay systems: linear stability theory.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1989. – 235 p.
37. NICULESCU S.I., LI X.G., CELA A. *Counting characteristic roots of linear delay differential equations. Part I* // Controlling Delay Dynamics: Advances in Theory, Methods and Applications. – 2022. – Vol. 604. – P. 117–155.
38. NICULESCU S.I., BOUSSAADA I. *Counting characteristic roots of linear delay differential equations. Part II* // Controlling Delay Dynamics: Advances in Theory, Methods and Applications. – 2022. – Vol. 604. – P. 157–193.
39. NOWZARI C., GARCIA E., CORTÉS J. *Event-triggered communication and control of networked systems for multi-agent consensus* // Automatica. – 2019. – Vol. 105. – P. 1–27.
40. OLFATI-SABER R., FAX J.A., MURRAY R.M. *Consensus and cooperation in networked multi-agent systems* // Proc. of the IEEE – 2007. – Vol. 95, No. 1. – P. 215–233.
41. RIDDALLS C.E., BENNETT S. *The stability of supply chains* // Int. Journal of Production Research. – 2002. – Vol.40, No. 2. – P. 459–475.
42. SILVA M.A.L. ET AL. *A reinforcement learning-based multi-agent framework applied for solving routing and scheduling problems* // Expert Systems with Applications. – 2019. – Vol. 131. – P. 148–171.
43. TSYPKIN Y.Z. MINGUE FU. *Robust stability of time-delay systems with an uncertain time-delay constant* // Int. Journal of control. – 1993. – Vol. 57, No. 4. – P. 865–879.
44. UGANDER J. *Delay-dependent stability of genetic regulatory networks* – Lund: Departament of Autimatic Control, Lund University, 2008. – 52 p.
45. URENA R. et al. *A social network based approach for consensus achievement in multiperson decision making* // Information Fusion. – 2019. – Vol. 47. – P. 72–87.
46. VEERMAN J.J.P., KUMMEL E. *Diffusion and consensus*

on weakly connected directed graphs // Linear Algebra and its Applications. – 2019. – Vol. 578. – P. 184–206.

47. ZHILYAKOVA L. KORESHKOV V., CHAPLINSKAIA N. *Some Properties of Stochastic Matrices and Non-Homogeneous Markov Chains Generated by Nonlinearities in the Resource Network Model* // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, No. 25. – P. 4095 (1–17).

LATENT CONSENSUS PROTOCOL WITH WEAK BACKGROUND LINKS AND TIME-DELAY

Dmitriy Khomutov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Junior Researcher (homutov_dk@mail.ru).

Abstract: Coordination in multiagent system with information influences and time-delay is considered. In particular, the case when consensus is not achieved for any vector of initial values was considered. Such a problem may arise in a multi-agent system with a weakly coupled structure, that is, when there are several leading agents or groups of agents. To achieve consensus, a latent consensus protocol with weak background links and time-delay was used. Using the Nyquist criterion applied by Tsypkin, a boundary value of time-delay was established, depending on the spectral properties of the Laplace matrix, and a condition for the independence of convergence from time-delay. With a decrease in the weights of background links, the boundary value of time-delay of the protocol under consideration approaches the one of the required protocol. It was found that in the case of convergence, the latent consensus protocol with background links converges to consensus for any vector of initial values, while the weights of background links can be arbitrarily small. Thus, the use of this protocol solves the above problem, and this study allows adapting other previously considered latent consensus protocols for multiagent systems with time-delay.

Keywords: multiagent system, consensus, laplacian matrix, stability analysis with delay, Tsypkin’s test.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 30.10.2024.
Дата опубликования 31.03.2025.