СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ВНЕШНЕЕ ВОЗМУЩЕНИЕ В РАМКАХ АНИЗОТРОПИЙНОЙ ТЕОРИИ[1]

Юрченков А. В.[2]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Рассматривается линейная дискретная стационарная система с управлением под влиянием окрашенного возмущения. Внешнее возмущение выбирается из класса нецентрированных стационарных гауссовских последовательностей случайных векторов с известным ограничением на уровень средней анизотропии. Для указанного класса объектов управления вводится динамический регулятор, с помощью которого необходимо обеспечить ограниченность анизотропийной нормы от внешнего возмущения к управляемому выходу замкнутой системы. Задача синтеза анизотропийного динамического регулятора заключается в нахождении пространственной реализации регулятора из условия ограниченности анизотропийной нормы замкнутой системы. Используя линеаризующую обратимую замену переменных, поставленную задачу можно свести к численному решению задачи выпуклой оптимизации с ограничениями специального вида, характерными для анизотропийной теории. В постановке задачи считается, что среднее внешнего возмущения неизвестно, но известно ограничение на него в виде неравенства. Этот параметр обуславливает появление дополнительного ограничения в задаче выпуклой оптимизации. Результирующая система неравенств представляет собой линейные матричные неравенства в совокупности с неравенством специального вида, которое является нелинейным относительно неизвестных параметров, но одновременно является выпуклым по этим параметрам. Задача поиска матриц регулятора может быть решена стандартными методами.

Ключевые слова: анизотропийная теория, выпуклая оптимизация, нецентрированные возмущения.

1. Введение

Рассматривая самые различные динамические объекты, практически невозможно найти такие, которые в процессе функ-

---

[1] *Автор признателен к.ф.-м.н. А.Ю. Кустову за ценное обсуждение содержания статьи.*

[2] *Александр Викторович Юрченков, к.ф.-м.н., с.н.с.* (*alexander.yurchenkov@yandex.ru*)

ционирования не были бы подвержены влиянию внешних факторов в самом широком смысле: окружающая среда, неизмеряемые силы, помехи в каналах связи, – список можно продолжать, и каждый инженер может добавить свои пункты. Поэтому и задачи теории управления можно разделить на два больших класса: с внешними возмущениями и без них. Каждая из таких задач имеет свои допущения и методы решения, причем для одного и того же объекта возможно применение суперпозиции управлений. В данной работе будет сделан упор на подавлении влияния внешнего возмущения из специального класса. Хорошо известные в теории управления $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-оптимальные подходы используют соответствующие нормы передаточной функции замкнутой системы в пространствах Харди. Однако выбор конкретного критерия качества зависит от гипотезы о принадлежности внешнего возмущения к конкретному классу. Например, $\mathcal{H}_\infty$-оптимальная теория управления подразумевает, что внешнее возмущение (входной сигнал) квадратично интегрируем или квадратично суммируем (в зависимости от выбранного способа описания времени), что подробно обсуждается в [14]. Однако законы управления, синтезируемые в рамках этой теории, достаточно консервативны [16] (т.е. требуют значительных ресурсов на формирование управления, поскольку рассчитаны на «наихудший случай»). С другой стороны, $\mathcal{H}_2$-оптимальная теория управления обладает наилучшими показателями качества в случае гауссовского возмущения для управляемой системы. Каждая из перечисленных теорий накладывают ограничения на входной сигнал при минимизации соответствующей нормы для систем с замкнутым контуром. Стоит упомянуть, что как и $\mathcal{H}_2$-, так и $\mathcal{H}_\infty$-оптимальный синтез управления может быть реализован численно с помощью решения уравнений Риккати. Но несмотря на простоту реализации, регуляторы на базе $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-теорий эффективны только в том случае, если верны основные гипотезы о внешних возмущениях. Многокритериальные задачи в терминах смешанных формулировок $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$-оптимизации могут компенсировать некоторые недостатки обеих теорий [1, 17, 18, 33].

Но более интересный и физически обоснованный случай возникает, когда свойства экзогенного возмущения точно не известны. Для измерения неопределенности стохастических свойств возмущений можно применить некоторые концепции теории информации. Таким образом была создана теория, основанная на анизотропии. В этой части теории управления в качестве критерия эффективности анализируется анизотропийная норма системы.

Теория, предложенная И.Г. Владимировым в последнем десятилетии 20-го века, обобщает $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-подходы с точки зрения описания множества внешних возмущений. Основы этой теории были представлены в работах [3, 25, 28]. Введенное понятие анизотропии случайного вектора позволило максимально расширить класс внешних возмущений, действующих на динамические системы, эталоном при этом служили вектора с равномерным распределением на единичной сфере. В зависимости от введенной меры отличия от эталонного вектора внешнего возмущения, анизотропийная норма находится между масштабированной $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-нормами той же системы, включая и эти предельные случаи. Существует несколько подходов к вычислению анизотропийной нормы системы, но стоит выделить алгоритм на основе выпуклой оптимизации [29]. Методами выпуклой оптимизации можно найти минимальное пороговое значение анизотропийной нормы, которое гарантировано ограничит анизотропийную норму сверху. В основе такого подхода лежит утверждение, называемое леммой о вещественной ограниченности в рамках анизотропийной теории [22].

Изначально в анизотропийной теории были рассмотрены линейные дискретные стационарные системы с центрированным возмущением [13]. За тридцать лет были рассмотрены различные задачи теории управления в анизотропийной постановке: от синтеза ПИД-регулятора [8] и предельных случаев [2, 11] до параметризации оптимальных регуляторов [4] и постановки задачи в непрерывном случае [12]. Также были рассмотрены случаи ненулевого среднего внешнего возмущения [20, 23]. В настоящее время класс объектов не ограничивается детерминированным случаем и включает в себя системы с мультипликативными шумами [9, 10, 19, 32] и стохастические системы [21].

В данной работе рассматривается задача построения анизотропийного субоптимального управления для стационарной системы, на вход которой поступает возмущение с ограничениями. Решение задачи сводится к решению системы линейных матричных неравенств с выпуклым ограничением специального вида, характерного для анизотропийной теории. Численно задача может быть решена стандартными прикладными пакетами [26]. Статья организована следующим образом: во второй части приводится необходимый теоретический минимум для дальнейшего изложения, третья содержит постановку задачи, четвертая часть посвящена основному результату, в пятой части продемонстрированы результаты численного моделирования, последняя часть – заключение.

2. Предварительные сведения

В этом разделе приводятся краткие теоретические сведения, касающиеся дискретных линейных стационарных систем в рамках анизотропийной теории, а также сведения относительно нецентрированного внешнего возмущения.

2.1. СРЕДНЯЯ АНИЗОТРОПИЯ И АНИЗОРОПИЙНАЯ НОРМА

Первое определение анизотропии случайного m-мерного вектора было дано в статье [3]. В более поздних работах, например, в статье [13], под анизотропией случайного вектора w с плотностью распределения $f(x)$ понимается следующее.

Определение 1 [3]. *Анизотропией случайного m-мерного вектора с плотностью распределения $f(x)$ называют величину*

$$\mathbf{A}(w) = \min_{\lambda>0} \mathbf{D}(f||p_\lambda),$$

где

$$\mathbf{D}(f||p_\lambda) = \mathbf{E}\left[\ln \frac{f}{p_\lambda}\right],$$

что представляет собой относительную энтропию или информационное уклонение Кульбака – Лейблера функции f по отношению к плотности p_λ центрированного симметричного гауссовского распределения

$$p_\lambda(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\lambda}\right).$$

В качестве внешнего возмущения для дискретных стационарных систем выбирают последовательности векторов, в анизотропийной теории в качестве характеристики последовательности $\{w_k\}$ рассматривают среднюю анизотропию.

Определение 2 [3]. *Средней анизотропией последовательности $W = \{w_k\}$ называют величину*

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}, \tag{1}$$

где $W_{0:N-1} = \left[W_0^\top, \ldots, W_{N-1}^\top\right]^\top$ – расширенный вектор.

Обозначим в качестве входа и выхода линейной системы F последовательности $W \in \mathbb{L}_2^m$ и $Z \in \mathbb{L}_2^p$ соответственно, где $\mathbb{L}_2^*$ обозначает пространство Лебега векторов с конечной нормой. Причем возмущающая последовательность W получена с помощью линейного формирующего фильтра G из стандартного гауссовского белого шума V:

$$w_j = \sum_{k=0}^{\infty} g_k v_{j-k}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

где $g_k \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Формирующий фильтр G имеет передаточную матричнозначную функцию $G(z)$:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k,$$

которая является аналитичной внутри единичного диска $|z| < 1$, $z \in \mathbb{Z}$. Передаточная функция $G(z)$ имеет конечную $\mathcal{H}_2$-норму, равную

$$\|G\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{tr}(g_k g_k^\top)\right)^{1/2}.$$

Линейная система F имеет передаточную функцию $F(z)$ в соответствующем пространстве Харди $\mathcal{H}_\infty^{p\times m}$ с конечной $\mathcal{H}_\infty$-нормой:

$$\|F\|_\infty = \sup_{|z|<1} \overline{\sigma}(F(z)) = \operatorname*{ess\,sup}_{-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi} \overline{\sigma}(\widehat{F}(\omega)),$$

где $\overline{\sigma}(\cdot)$ обозначает максимальное сингулярное значение матрицы.

Рассмотрим множество формирующих фильтров

$$\mathcal{G}_a = \left\{G \in \mathcal{H}_2^{m\times m} :\ W = GV,\ \overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a\right\},$$

где $V = \{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – стандартный гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, как это постулируется в работе [25].

Определение 3 [28]. *Анизотропийной нормой $|\!|\!|F|\!|\!|_a$ линейной системы F называют величину*

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a = \sup_G \left\{ \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2} :\ \ G \in \mathcal{G}_a \right\}. \tag{2}$$

Для любой несферичной системы $F \in \mathcal{H}_\infty^{p\times m}$ выполнено следующее ограничение на анизотропийную норму:

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|F\|_2 = |\!|\!|F|\!|\!|_0 \leqslant |\!|\!|F|\!|\!|_a \leqslant \lim_{a\to\infty} |\!|\!|F|\!|\!|_a = \|F\|_\infty,$$

что в определенном смысле и служит основанием для утверждения, что анизотропийная теория обобщает результаты $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-теорий, поскольку в предельных случаях получает результаты, характерные для отмеченных теорий.

2.2. ЧАСТОТНАЯ ОБЛАСТЬ

Выражения для средней анизотропии и анизотропийной нормы линейной дискретной системы можно сформулировать на языке передаточных функций. Для этого рассмотрим набор специальных функций:

$$\mathcal{A}_0(q) = \frac{m}{2}\left(\ln(\Phi(q)) - \Psi(q)\right), \tag{3}$$

$$\mathcal{N}_0(q) = \left(\frac{\Phi(q) - 1}{q\Phi(q)}\right)^{1/2}, \tag{4}$$

где

$$\Phi(q) = \frac{1}{2\pi m}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr}((I_m - q\Lambda)^{-1})d\omega \tag{5}$$

$$\Psi = \frac{1}{2\pi m}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\det(I_m - q\Lambda)d\omega \tag{6}$$

и $\Lambda = \left(\widehat{F}(\omega)\right)^* \widehat{F}(\omega)$, $\omega \in [-\pi;\pi)$. Здесь под $\widehat{F}(\omega)$ понимается значение передаточной функции на границе единичного диска

$$\widehat{F}(\omega) = \lim_{r \to 1_-} F(r\exp(i\omega)),\ \omega \in [-\pi;\pi)\,.$$

Функции (3)–(6) являются неубывающими по параметру $q \in \left(0; \|F\|_\infty^{-2}\right)$.

Теорема 1 [27]. *Для любой линейной системы с передаточной функцией $F(z)$, удовлетворяющей выражению*

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|F\|_2 < \|F\|_\infty\,,$$

анизотропийная норма будет равна

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a = \mathcal{N}_0(\mathcal{A}_0^{-1}(a)), \tag{7}$$

где $q = \mathcal{A}_0^{-1}(a)$ и любой формирующий фильтр, удовлетворяющий представлению

$$\widehat{G}\widehat{G}^* = (I_m - q\Lambda)^{-1},$$

генерирует последовательность случайных векторов W с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$.

Также такое множество формирующих фильтров обозначается следующим образом:

$$\mathcal{G}_a^\diamond = \arg\max_{G \in \mathcal{G}_a} \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2}.$$

2.3. ВРЕМЕННАЯ ОБЛАСТЬ

Рассмотрим стандартное представление динамического дискретного линейного объекта в пространстве состояний:

$$F : \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, \\ z_k = Cx_k + Dw_k, \end{cases} \tag{8}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $w_k \in \mathbb{R}^m$ – вход, $z_k \in \mathbb{R}^p$ – выход системы. Матрицы A, B, C, D с вещественными элементами известны и имеют соответствующую размерность. На матрицу A накладывается дополнительное условие устойчивости по Шуру. Полагаем, что формирующий фильтр G генерирует внешнее возмущение $W = GV$ из гауссовской белошумной последовательности V случайных векторов. Тогда внутренняя динамика формирующего фильтра может повторять динамику объекта (8) в совокупности со следующим уравнением:

$$w_k = Lx_k + \Sigma^{1/2} v_k,$$

где $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times m}$ – симметричная положительно определенная матрица, а матрица $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$ выбрана из соображений, что выражение $A + BL$ обеспечивает асимптотическую устойчивость. Пользуясь перечисленными обозначениями, анизотропийную норму стационарной системы можно вычислить согласно следующему утверждению.

Теорема 2 [27]. *Для системы* (8) *с устойчивой матрицей* A *и внешним возмущением с ограниченным уровнем* a *средней анизотропии анизотропийная норма может быть вычислена согласно выражению*

$$|||F|||_a = \left(\frac{1}{q}\left(1 - \frac{m}{\mathrm{tr}(LPL^\top + \Sigma)}\right)\right)^{1/2},$$

где $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *– решение уравнения Ляпунова*

$$P = (A + BL)P(A + BL)^\top + B\Sigma B^\top, \tag{9}$$

и скалярный параметр q *совместно с матрицами* L, Σ *удовлетворяют уравнению Риккати:*

$$\begin{aligned} R &= A^\top RA + qC^\top C + L^\top \Sigma^{-1} L, \\ \Sigma &= (I_m - qD^\top D - B^\top RB)^{-1}, \\ L &= \Sigma(B^\top RA + qD^\top C) \end{aligned} \tag{10}$$

в совокупности с уравнением специального вида

$$a = -\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{m\Sigma}{\operatorname{tr}(LPL^\top + \Sigma)}\right). \tag{11}$$

Таким образом, независимо от способа описания стационарной системы – на языке передаточных функций (частотная область) или пространства состояний (временна́я область) – существуют точные формулы для вычисления анизотропийной нормы.

2.4. СУБОПТИМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Несмотря на наличие точных формул для вычисления анизотропийной нормы, поиск единственного решения системы (10)–(11) из нелинейных матричных уравнений представляет собой достаточно трудную задачу. Для того чтобы получить эффективный инструмент численного решения задач в анизотропийной теории, была предложена идея заместить оптимальную постановку (поиск точного значения анизотропийной нормы (2)) субоптимальной (т.е. поиск верхней границы этой нормы). Методика перехода от системы равенств к системе неравенств описана в работе [5]. Позднее в статьях [29, 30] авторы развивают идею перехода к выпуклой задаче оптимизации для численного решения задач в анизотропийной постановке. Приведем утверждение, основанное на лемме о вещественной ограниченности для анизотропийной нормы системы с представлением (8).

Теорема 3 [7]. *Анизотропийная норма* $\|F\|_a$ *системы* (8) *строго ограничена пороговым значением* γ*, если существует число* $\eta > \gamma^2$*, такое что система неравенств*

$$\eta - (\exp(-2a)\det\Xi)^{1/m} < \gamma^2, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \Xi - \eta I_m & * & * \\ B & -\Theta^{-1} & * \\ D & 0 & -I_p \end{bmatrix} \prec 0, \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} -\Theta & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ A & B & -\Theta^{-1} & * \\ C & D & 0 & -I_p \end{bmatrix} \prec 0 \tag{14}$$

имеет некоторое положительно определенное решение $\Xi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *и* $\Theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Относительно неизвестных матриц система (12)–(14) не является ни линейной, ни выпуклой, однако существуют приемы, включающие замену переменных и конгруэнтные преобразования, позволяющие в каждом конкретном случае успешно свести эти неравенства к виду линейных с выпуклым ограничением.

2.5. СЛУЧАЙ НЕЦЕНТРИРОВАННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Предыдущие разделы посвящены базовым понятиям анизотропийной теории для стационарных систем при центрированном возмущении. В случае, когда внешнее возмущение имеет ненулевое матожидание, впервые рассмотрен в работах [20, 23], где определение и вычисление анизотропийной нормы адаптированы для указанного условия. В текущей работе накладываются дополнительные условия на первые два момента возмущающей последовательности $\{w_k\}$ в системе (8) следующего вида:

$$|\mathbf{E}W| \geqslant \tau, \quad \mathbf{E}(|W - \mathbf{E}W|^2) \leqslant \sigma, \quad (\sigma = 1 - \tau^2),$$

где τ и σ являются некоторыми положительными константами. В таком случае средняя анизотропия возмущения W может быть определена как

$$\begin{aligned}(15)\quad \overline{\mathbf{A}}_\tau(W) &= \lim_{N\to\infty} \frac{\mathbf{A}_\tau(W_{0:N-1})}{N} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1}) - \frac{mN}{2}\ln(1-\tau^2)}{N} \\ &= \overline{\mathbf{A}}(W) - \frac{m}{2}\ln(1-\tau^2),\end{aligned}$$

где $\overline{\mathbf{A}}(W)$ определяется согласно (1). Ограниченность среднего уровня анизотропии (15) следует из ограниченности $\overline{\mathbf{A}}(W) < b$. Рассмотрим следующее выражение:

$$|||F|||_{a,\tau} = \sqrt{|||F|||_{b,0}^2\,(1-\tau^2) + \|F\|_\infty^2\,\tau^2},$$

где $|||F|||_{b,0} = |||F|||_a$ при условии $b = a$. Выражение $|||F|||_{a,\tau}$ будем называть (a,τ)-анизотропийной нормой системы F. Задача построения управления для линейной нестационарной системы с нецентрированным возмущением разобрана в работе [20], откуда взяты некоторые используемые обозначения.

Специальные функции (3) и (4) изменяются следующим образом:

$$\mathcal{A}_\tau(q) = \mathcal{A}_0(q) - \frac{m}{2}\ln(1-\tau^2) = \frac{m}{2}\left(\ln\left(\frac{\Phi(q)}{1-\tau^2}\right) - \Psi(q)\right), \tag{16}$$

$$\mathcal{N}_\tau(q) = \Big((\mathcal{N}_0(q))^2(1-\tau^2) + \|F\|_\infty^2\,\tau^2\Big)^{1/2} = \left(\frac{\Phi(q)-1}{q\Phi(q)}(1-\tau^2) + \|F\|_\infty^2\,\tau^2\right)^{1/2}. \tag{17}$$

В формулах (16)–(17) вспомогательные функции $\Phi(q)$ и $\Psi(q)$ определяются согласно (5) и (6).

При использовании выражений (16) и (17) анизотропийная норма системы F, выраженная через специальные функции (7), изменяется следующим образом:

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a = \mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(b)),$$

где $q = \mathcal{A}^{-1}(b)$, $b = a + \frac{m}{2}\ln(1-\tau^2)$, что детально описано в работе [20].

3. Постановка задачи

В этом разделе рассмотрим задачу построения управления для линейной дискретной стационарной системы с нецентрированным возмущением в рамках анизотропийной теории.

Задача 1. *Для объекта управления, динамика которого описывается в пространстве состояний следующим образом:*

$$\mathcal{F}: \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B_w w_k + B_u u_k, \\ z_k = C_z x_k + D_{zw} w_k + D_{zu} u_k, \\ y_k = C_y x_k + D_{yw} w_k, \end{cases} \tag{18}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ – внутренне состояние, $w_k \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение с ограничением на первый момент $|\mathbf{E}w_k| < \tau$ и средний *уровень анизотропии* $a \geqslant 0$, $u_k \in \mathbb{R}^q$ *– управляющее воздействие,* $z_k \in \mathbb{R}^p$ *– управляемый выход,* $y_k \in \mathbb{R}^r$ *– наблюдаемый выход, требуется найти представление динамического регулятора в пространстве состояний*

$$\mathcal{F}_c : \begin{cases} \xi_{k+1} = A_c\xi_k + B_c y_k, \\ u_k = C_c\xi_k + D_c y_k, \end{cases} \tag{19}$$

такого, чтобы анизотропийная норма $\| \mathcal{F}_{cl} \|_a$ *замкнутой управлением системы* (18) *была бы ограничена минимально возможным пороговым значением* $\gamma = \gamma_{min}$. *В системе* (19) *вектор* $\xi_k \in \mathbb{R}^n$ *соответствует внутреннему состоянию регулятора.*

4. Решение задачи

Сформулируем в виде утверждения решение поставленной задачи 1.

Теорема 4. *Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему* $\mathcal{F}$ *в пространстве состояний* (18)*, на которую действует внешнее возмущение в виде гауссовской последовательности случайных векторов с ограниченным уровнем средней анизотропии числом* a *при дополнительном условии* $|\mathbf{E}w_k| < \tau$*, параметры* a *и* τ *считаются фиксированными. Тогда если выпуклая задача оптимизации*

$$\gamma^2 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{bmatrix} -\Pi_{11} & * & * & * & * & * \\ -I_n & -\Phi_{11} & * & * & * & * \\ 0_{m\times n} & 0_{m\times n} & -\eta_i I_m & * & * & * \\ A\Pi_{11} + B_u\mathbf{C} & A + B_u\mathbf{D}C_y & B_w + B_u\mathbf{D}D_{yw} & -\Pi_{11} & * & * \\ \mathbf{A} & \Phi_{11}A + \mathbf{B}C_y & \Phi_{11}B_w + \mathbf{B}D_{yw} & -I_n & -\Phi_{11} & * \\ C_z\Pi_{11} + D_{zu}\mathbf{C} & C_z + D_{zu}\mathbf{D}C_y & D_{zw} + D_{zu}\mathbf{D}D_{yw} & 0_{p\times n} & 0_{p\times n} & -I_p \end{bmatrix} \prec 0, \tag{20}$$

$$(21)\quad \begin{bmatrix} -\Psi_i - \eta_i I_m & * & * & * \\ B_w + B_u\mathbf{D}D_{yw} & -\Pi_{11} & * & * \\ \Phi_{11}B_w + \mathbf{B}D_{yw} & -I_n & -\Phi_{11} & * \\ D_{zw} + D_{zu}\mathbf{D}D_{yw} & 0_{p\times n} & 0_{p\times n} & -I_p \end{bmatrix} \prec 0, \quad i = \overline{1,2},$$

$$(22)\quad \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_n \\ I_n & \Phi_{11} \end{bmatrix} \succ 0, \quad \eta > \gamma_1^2,$$

$$(23)\quad \eta - \exp(-2b/m)(\det\Psi_1)^{1/m} < \gamma_1^2,$$

$$(24)\quad \gamma_1^2(1-\tau^2) + \gamma_2^2\tau^2 < \gamma^2,$$

где $b = a + \frac{m}{2}\ln(1-\tau^2)$, $\eta_1 = \eta$, $\eta_2 = \gamma_2^2$, *имеет решение* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q\times r}$, $\Pi_{11} \succ 0$, $\Phi_{11} \succ 0$, $\Psi_1 \succ 0$, $\Psi_2 \succ 0$, $\eta > 0$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, *то для системы* (18) *матрицы динамического регулятора* (19) *имеют вид:*

$$\begin{aligned} A_c &= \Phi_{12}^{-1}(\mathbf{A} - \Phi_{12}\mathbf{B}C_y\Pi_{11} - \Phi_{11}B_u\mathbf{C}\Pi_{12}^\top - \\ &\qquad - \Phi_{12}(A + B_u\mathbf{D}C_y)\Pi_{11})\Pi_{12}^{-\top}, \\ B_c &= \Phi_{12}^{-1}(\mathbf{B} - \Phi_{11}B_u\mathbf{D}), \\ C_c &= (\mathbf{C} - \mathbf{D}C_y\Pi_{11})\Pi_{12}^{-\top}, \\ D_c &= \mathbf{D}, \end{aligned}$$

где $\Pi_{12}\Phi_{12}^\top = I_n - \Pi_{11}\Phi_{11}$.

Доказательство. Сформируем замкнутую систему F_{cl} на основе объекта (18) и регулятора (19):

$$(25)\quad \begin{aligned} \zeta(k+1) &= \mathcal{A}\zeta(k) + \mathcal{B}w(k), \\ z(k) &= \mathcal{C}\zeta(k) + \mathcal{D}w(k), \end{aligned}$$

где $\zeta(k) \in \mathbb{R}^{2n}$ обозначает объединенный вектор состояния:

$$\zeta(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix},$$

матрицы системы $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{2n\times m}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{p\times 2n}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ имеют следующий вид:

$$(26)\quad \begin{gathered} \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A + B_uD_cC_y & B_uC_c \\ B_cC_y & A_c \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_uD_cD_{yw} \\ B_cD_{yw} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C_1 + D_{zu}D_cC_y & D_{zu}C_c \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = D_{zu}D_cD_{yw}. \end{gathered}$$

Для замкнутой системы (25) можно сформулировать утверждение об ограниченности анизотропийной нормы замкнутой системы значением γ_1 в виде задачи выпуклой оптимизации, в основе которой лежит линеаризующая замена, предложенная в работах [15, 24]. Эта задача будет состоять в виде неравенств (20)–(23).

Так как внешнее возмущение нецентрировано, (a, τ)-анизотропийная норма системы $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию $|||\mathcal{F}|||_{a,\tau} \leqslant \gamma$, если существуют параметры γ_1 и γ_2, такие что

$$\gamma_1^2(1-\tau^2) + \gamma_2^2\tau^2 \leqslant \gamma^2,$$

$$|||\mathcal{F}|||_{b,0} \leqslant \gamma_1, \quad \|\mathcal{F}\|_\infty \leqslant \gamma_2,$$

где $b = a + \frac{m}{2}\ln(1-\tau^2)$. Поскольку функция (17) ограничена величиной γ для всех q, при которых $\mathcal{A}_\tau(q) \leqslant a$, всегда найдутся такие γ_1 и γ_2, при которых

$$\mathcal{N}_0(q) \leqslant \gamma_1, \quad \|F\|_\infty \leqslant \gamma_2,$$

что как раз эквивалентно условию ограниченности анизотропийной нормы, что указано в работе [20]. Условие ограниченности анизотропийной нормы $|||\mathcal{F}|||_{b,0} \leqslant \gamma_1$ в терминах матричных неравенств сформулировано в [29]. Неравенство (12), учитывающее связь среднего уровня анизотропийной нормы с ограничением на анизотропийную норму в случае ненулевого среднего примет, соответственно, следующий вид:

$$\eta - \exp(-2b/m)(\det \Psi_1)^{1/m} < \gamma_1^2.$$

5. Численное моделирование

Данный раздел содержит результаты численного моделирования вычисления анизотропийной нормы и сравнение полученной нормы с $\mathcal{H}_\infty$-нормой той же системы.

Пример 1. Данные взяты из работы [31]. Объект управления представляет собой линеаризованную модель биомеханической руки. Матрицы объекта в пространстве состояний (18) имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta/m & 0 \\ 0 & 0 & 1-\Delta/\delta_2 & \Delta/\delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\Delta/\delta_1 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta/\delta_1 \end{bmatrix}, C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{zw} = I, D_{zu} = 0,$$

$$C_y = C_z, D_{yw} = 0, D_{yu} = 0,$$

где $m = 1$, $\Delta = 0{,}01$, $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}04$. Цель моделирования состоит в поиске пространственной реализации γ-субоптимального динамического регулятора (19) в зависимости от различных значений уровня средней анизотропии a и параметра τ, участвующего в ограничении матожидания возмущения. Численно задача была решена с помощью пакетов Yalmip Matlab toolbox и SeDuMi optimization package [26]. Сравнительные результаты сведены в таблицу 1, где в каждой клетке дано отношение анизотропийной нормы $|\!|\!|F_{cl}|\!|\!|_a$ и $\mathcal{H}_\infty$-нормы $\|F_{cl}\|_\infty$.

В первом столбце таблицы 1 приведены разные уровни средней анизотропии a, используемые при моделировании, в первой строке – параметр τ нецентрированности внешнего возмущения. В каждой клетке таблицы приведено отношение анизотропийной нормы $|\!|\!|F_{cl}|\!|\!|_a$ системы к соответствующему значению $\|F_{cl}\|_\infty$-нормы этой же системы. Из приведенных соотношений можно заметить, что при слабо окрашенных возмущениях (т.е. небольшом значении параметра a, ограничивающего уровень средней анизотропии) преимущество системы управления на основе анизотропийного подхода с точки зрения выбранного показателя качества может достигать 25%. В то же время при увеличении параметров a и τ анизотропийная норма стремится к $\mathcal{H}_\infty$-норме, что при наличии априорной информации о внешнем возмущении может служить критерием выбора закона управления, поскольку реализация $\mathcal{H}_\infty$-подхода при формировании управления требует меньше вычислительных ресурсов.

Таблица 1. Отношение норм $|||F_{cl}|||_a \,/\, \|F_{cl}\|_\infty$

$a \setminus \tau$	0,01	0,05	0,1	0,15
0,01	0,730	0,730	0,834	0,926
0,1	0,755	0,844	0,943	0,942
1	0,761	0,872	0,967	0,956
10	0,863	0,952	0,986	0,986

6. Выводы

Применение анизотропийного подхода к решению задач подавления влияния внешних возмущений имеет как свои плюсы в виде более гибкого механизма учета информации о внешнем возмущении, так и минусы в виде более сложного численного решения по сравнению со стандартными задачами $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-оптимальных теорий.

Литература

1. БАЛАНДИН Д.В., БИРЮКОВ Р.С., КОГАН М.М. *Многокритериальная оптимизация индуцированных норм линейных опреаторов: прямая и двойственная задачи управления и фильтрации* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2022. – №2 . – С. 43–57.
2. БЕЛОВ И.Р., КУСТОВ А.Ю. *О применении фильтра Калмана в задаче оценивания при слабо окрашенных входных шумах* // Управление большими системами. – 2023. – Вып. 103. – С. 94–120.

3. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем* // Доклады РАН. – 1995. – Т. 342, №5. – С. 583–585.
4. КУСТОВ А.Ю. *Параметризация оптимальных анизотропийных регуляторов* // Автоматика и телемеханика. – 2023. – №10. – С. 59–71.
5. ЧАЙКОВСКИЙ М.М. *Нахождение сильно минимизирующего ранг решения линейного матричного неравенства* // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №9. – С. 96–105.
6. ЧАЙКОВСКИЙ М.М., КУРДЮКОВ А.П. *Критерий строгой ограниченности анизотропийной нормы заданным значением в терминах матричных неравенств* // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. – 441, №3. – С. 318–321.
7. ЧАЙКОВСКИЙ М.М. *Синтез субоптимальных регуляторов методами выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования* // Управление большими системами. – 2015. – Вып. 42. – С. 100–152.
8. ЧАЙКОВСКИЙ М.М., ТИМИН В.Н., КУРДЮКОВ А.П. *Синтез анизотропийного субоптимального пид регулятора для дискретной линейной стационарной системы: одномерный случай* // Автоматика и телемеханика. – 2019. – Вып. 9. – С. 156–172.
9. ЮРЧЕНКОВ А.В., КУСТОВ А.Ю., КУРДЮКОВ А.П. *Условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами* // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 467, №4. – С. 396–399.
10. ЮРЧЕНКОВ А.В., БЕЛОВ И.Р. *Лемма об ограниченности анизотропийной нормы стационарной системы с мультипликативными шумами* // Дифференциальные уравнения. – 2023. – Т. 59, №11. – С. 1550–1560.
11. BELOV I.R. *On the Approximation of Anisotropic Controller by $\mathcal{H}_2$-Optimal Controller* // Proc. of the 32th Mediterranean Conference on Control and Automation. – 2024. – Vol. 9. – P. 891–895.

12. BOICHENKOV V.A., BELOV A.A., ANDRIANOVA O.G. *Axiomatic Foundations of Anisotropy-Based and Spectral Entropy Analysis: A Comparative Study* // Mathematics. – 2023. – Vol. 11, No. 12. – P. 2751 (1–10).
13. DIAMOND P., VLADIMIROV I., KURDYUKOV A. et al. *Anisotropy–based performance analysis of linear discrete time invariant control systems* // Int. Journal of Control. – 2001. – Vol. 74, No. 1. – P. 28–42.
14. DOYLE J.C., GLOVER K., KHARGONEKAR P.P. et al. *State–space solution to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1989. – Vol. 34. – P. 831–846.
15. GAHINET P. *Explicit controller formulas for LMI-based $\mathcal{H}_\infty$ synthesis* // Automatica. – 1996. – Vol. 32. – P. 1007–1014.
16. GU D.–W., TSAI M.C., O'YOUNG S.D. et al. *State–space formulae for discrete–time $\mathcal{H}_\infty$ optimization* // Int. J. Contr. – 1989. – Vol. 49. – P. 1683–1723.
17. HADDAD W.M., BERNSTEIN D.S., MUSTAFA D. *Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ regulation and estimation: The discrete time case* // Syst. Control Lett. – 1991. – Vol. 16. – P. 235–247.
18. KHARGONEKAR P.P., ROTEA M.A. *Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: a convex optimization approach* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 2011. – Vol. 36. – P. 824–837.
19. KUSTOV A.YU., KURDYUKOV A.P., YURCHENKOV A.V *On the Anisotropy–Based Bounded Real Lemma Formulation for the Systems with Disturbance–Term Multiplicative Noise* // Proc. of the 12th IFAC Int. Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing. – 2016. – P. 1–5.
20. KUSTOV A.YU., TIMIN V.N. *Suboptimal Anisotropy-based Control for Linear Discrete Time Varying Systems with Noncentered Disturbances* // IFAC–PapersOnLine. – 2017. – Vol. 50, Iss. 1. – P. 6122–6127.
21. KUSTOV A.YU. *State-Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic System* // Proc. of the 15th Int. Conf. on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control. – 2018. – P. 1–6.

22. KURDYUKOV A.P., MAXIMOV E.A. TCHAIKOVSKY M.M. *Anisotropy–Based Bounded Real Lemma* // Proc. of the 19th Int. Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. – 2010. – P. 2391–2397.
23. KURDYUKOV A.P., YURCHENKOV A.V., KUSTOV A.YU. *Robust Stability in Anisotropy–Based Theory with Non–Zero Mean of Input Sequence* // Proc. of the 21st Int. Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. – 2014. – P. 208–214.
24. SCHERER C.W., GAHINET P., CHILALI M. *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1997. – Vol 42. – P. 896–911.
25. SEMYONOV A.V., VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P. *Stochastic approach to $\mathcal{H}_\infty$-optimization* // Proc. of the 33rd Conf. on Decision and Control. – 1994. – Vol. 3. – P. 2249–2250.
26. STURM J.F. *Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones* // Optimization Methods and Software. – 1999. – Vol. 11–12. – P. 625–653.
27. VLADIMIROV I.G., KURDYUKOV A.P., SEMENOV A.V. *On computing the anisotropic norm of linear discrete–time–invariant systems* // Proc. of the 13 IFAC World Congr. – 1996. – Paper IFAC–2d–01.6. – H. – P. 179–184.
28. VLADIMIROV I.G., KURDYUKOV A.P., SEMENOV A.V. *State–space solution to anisotropy–based stochastic $\mathcal{H}_\infty$-optimization problem* // Proc. of the 13 IFAC World Congr. – 1996. – Paper IFAC–3d–01.6. – H. – P. 427–432.
29. TCHAIKOVSKY M.M., KURDYUKOV A.P., TIMIN V.N. *Strict anisotropic norm bounded real lemma in terms of inequalities* // Proc. of the 18th IFAC World Congr. – 2011. – P. 2332–2337.
30. TCHAIKOVSKY M.M. *Static Output Feedback Anisotropic Controller Design by LMI–based Approach: General and Special Cases* // Proc. of the American Control Conf. ACC. – 2012. – P. 5208–5213.

31. WEIWEI L., TODOROV E., SKELTON R.E. *Estimation and Control Systems with Multiplicative Noise via Linear Matrix Inequalities* // Am. Contr. Conf. – 2005. – P. 1811–1816.
32. YURCHENKOV A.V., KUSTOV A.YU., TIMIN V.N. *The sensor network estimation with dropouts: Anisotropy-based approach* // Automatica. – 2023. – Vol. 151. – P. 110924 (1–8).
33. ZHOU K., GLOVER K., BODENHEIMER B.A. et al. *Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ performance objectives I: Robust performance analysis, II: Optimal control* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1994. – Vol. –39. – P. 1564–1587.

ANISOTROPY-BASED CONTROL DESIGN FOR LINEAR TIME–INVARIANT SYSTEMS WITH MOMENTS CONSTRAINTS OF DISTURBANCES

Alexander Yurchenkov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Cand.Sc., Senior Researcher (alexander.yurchenkov@yandex.ru).

Abstract: In this paper, a linear discrete time-invariant system with control under the influence of a colored disturbance is considered. The external disturbance is selected from the class of non-centered stationary Gaussian sequences of random vectors with a known restriction on the level of mean anisotropy. For the specified class of control objects, a dynamic regulator is introduced, with the help of which it is necessary to ensure the boundedness of the anisotropic norm from an external disturbance to the controlled output of a closed–loop system. The control design problem is to construct an anisotropy–based dynamic regulator in terms of state–space representation. The boundedness of the closed–loop system is provided by anisotropy–based small gain theorem. Using linearizing reversible variable change, the problem can be reduced to a numerical solution of the convex optimization problem with special constraints characteristic of anisotropy–based theory. In the formulation of the problem, it is assumed that the expectation of the external disturbance is unknown, but a condition on it in the form of inequality is known. This parameter causes an additional constraint to appear in the convex optimization problem. The resulting system of inequalities is linear matrix inequalities in combination with an inequality of a special type, which is nonlinear with respect to unknown parameters, but at the same time convex in these parameters. The problem of finding the regulator matrices can be solved by standard methods.

Keywords: anisotropy-based theory, convex optimization, noncentered disturbance.

УДК 62-5
ББК 30в6

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.И. Маликовым.

Поступила в редакцию 22.08.2024.
Дата опубликования 30.11.2024.