АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МНОГОПОТОЧНОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ СМО В УСЛОВИИ ПРЕДЕЛЬНО РЕДКИХ ИЗМЕНЕНИЙ СОСТОЯНИЙ УПРАВЛЯЮЩЕЙ ВХОДЯЩИМИ ПОТОКАМИ ЦЕПИ МАРКОВА[1]

Моисеева С. П.[2]
(*ФГАОУ Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск*)
Панкратова Е. В.[3]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

В настоящее время многомодальные системы набирают популярность с развитием многомодальных интерфейсов. Многомодальные потоки представляют собой интегрированные разнотипные потоки, включающие передачу голоса, текстовых данных и видео, поэтому для их описания логично применять непуассоновские модели. В качестве математической модели многомодальной обслуживающей системы рассматривается многопоточная система массового обслуживания с потоками, меняющими свою интенсивность в зависимости от состояний марковской случайной среды. Поступающие требования различных потоков обслуживаются в течении экспоненциально распределенного случайного времени с параметрами, определяемыми типом потока. Ставится задача исследования многомерного марковского процесса числа занятых приборов в системе в стационарном режиме. Используя свойства характеристических функций, получены выражения для нахождения допредельных значений основных вероятностных характеристик числа занятых приборов каждого типа. Асимптотическое исследование проводится в условии предельно редких изменений состояний среды. Получен вид многомерной асимптотической характеристической функции. Полученное асимптотическое распределение является многомодальным, так как имеет несколько локальных максимумов, что имеет принципиальное значение для применения результатов на практике. Доказано, что одномерные (маргинальные) стационарные распределения вероятностей числа занятых приборов каждого типа являются взвешенными суммами пуассоновских распределений. Проведен численный анализ области применимости полученной аппроксимации.

---

[1] *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00454 https://rscf.ru/project/24-21-00454.*

[2] *Светлана Петровна Моисеева, д.ф.-м.н., профессор* (smoiseeva@mailt.ru).
[3] *Екатерина Владимировна Панкратова, к.ф.-м.н., с.н.с.* (pankate@gmail.com).

Ключевые слова: марковски модулированные пуассоновские потоки, асимптотический анализ, предельно редкие изменения состояний цепи Маркова.

1. Введение

С повсеместным распространением беспроводных пользовательских устройств стала актуальна беспроводная передача данных различных приложений пользователей. Несмотря на то, что по прогнозам пропускная способность беспроводных сетей значительно вырастет в ближайшие годы, также вырастет и объем передаваемого трафика. Это обусловлено, с одной стороны, ростом технологии Интернета вещей (Internet of Things, IoT), с другой стороны, существенно увеличивается роль телекоммуникаций в профессиональной деятельности, обучении и обеспечении общественных отношений. Таким образом, в структуре информационных потоков увеличивается доля услуг, потребляющих значительные объемы ресурса передачи данных. Ввиду этого обеспечение эффективной передачи данных в сети остается актуальной задачей.

Многомодальные системы также в настоящее время набирают популярность с развитием многомодальных интерфейсов. Под модальностью при этом понимаются физически регистрируемые элементы коммуникации (человеко-машинной и/или межличностной), включающие как собственно передаваемую информацию (сообщение), так и информацию о самом индивиде (его состоянии; отношении к сообщению, к собеседнику, к коммуникации и пр.) [4].

Тенденция передачи данных по беспроводным каналам связи актуальна и для многомодальных информационных систем. Набор многомодальных данных и их размер могут быть различными в зависимости от задачи. Так, например, для речевой модальности в системе распознавания речи по аудиозаписи может быть достаточно 70–80 кбайт, тогда как для жестовой модальности в системе распознавания русского жестового языка объем одной записи модальности может составлять примерно 125 Мбайт [1].

Учитывая, что многомодальные потоки представляют собой интегрированные разнотипные потоки, включающие передачу голоса, текстовых данных и видео, для их описания логично применять непуассоновские модели. Так как на обслуживание различных информационных единиц затрачивается различное время в зависимости от формата, применяемых протоколов и других параметров, то в качестве моделей процессов в информационных системах используют системы массового обслуживания с разнотипными заявками, требующими разного времени обслуживания.

В данной работе предлагается модель многопоточной гетерогенной системы передачи данных по каналам различной интенсивности обслуживания в виде гетерогенной системы массового обслуживания.

Решение задач анализа немарковских многомерных моделей массового обслуживания с непуассоновскими входящими потоками, к сожалению, представлено лишь отдельными работами, в которых, как правило, рассматриваются модели узкого класса или специфической конфигурации [2, 3, 5, 10, 11]. Выработка же общих подходов и методов исследования немарковских моделей массового обслуживания в настоящее время является актуальной научной проблемой.

2. Математическая модель

2.1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

На вход системы поступают N пуассоновских потоков с интенсивностями, зависящими от состояния случайной среды. Случайная среда является цепью Маркова с непрерывным временем с числом состояний $k(t) = 1, 2, \ldots, K$ и определяется матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$, $i, j = 1, ..., K$.

Таким образом, можно говорить о том, что входящие потоки являются марковски модулированнными пуассоновскими потоками (Markov Modulated Poisson Process) [8, 9], которые имеют общий управляющий процесс $k(t)$ и определяются диагональными матрицами условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda}^{(l)}$, $l = 1, ..., N$, с элементами $\lambda_k^{(l)}$ на главной диагонали.

Поступающее требование всегда застаёт свободный прибор и занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ_l, $l = 1, ..., N$, соответственно. Таким образом, в системе находятся разнотипные требования, отличающиеся параметрами обслуживания, которые мы условно определим как разные блоки.

То есть рассматривается бесконечнолинейная система массового обслуживания с поступающими на вход MMPP-потоками разнотипных заявок и, соответственно, их разнотипным обслуживанием, отличающимся скоростью обслуживания. Используя символику Кендалла, будем обозначать такую систему массового обслуживания $\text{MMPP}^{(n)}|\text{M}_n|\infty$.

Ставится задача исследования N-мерного немарковского случайного процесса $\{i_1(t), \dots, i_N(t)\}$, описывающего число заявок в соответствующем блоке обслуживания.

2.2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

Для построения марковского случайного процесса воспользуемся методом дополнительной компоненты [5]. Введем случайный процесс $k(t)$ – состояние случайной среды, управляемое цепью Маркова, и будем рассматривать $(N + 1)$-мерный марковский процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t), ..., i_N(t)\}$. Определим совместное распределение вероятностей

(1) $$P(k, i_1, i_2, \dots i_N, t) = P\left\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, \dots, i_N(t) = i_N\right\}.$$

Для более компактной записи в дальнейшем будем использовать векторную запись. Для этого введем следующие обозначения: $\mathbf{i}(t) = [i_1(t), i_2(t), ..., i_N(t)]$, $\mathbf{e}_1 = [1, 0, ..., 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1, ..., 0]$, ..., $\mathbf{e}_N = [0, 0, ..., 1]$ – вектор-строки размерности $1 \times N$.

Используя формулу полной вероятности, для распределения вероятностей рассматриваемого случайного процесса составим систему равенств

$$(2)\quad P(k,\mathbf{i},t+\Delta t)=P(k,\mathbf{i},t)\left\{1+\left[q_{kk}\sum_{l=1}^{N}\left(\lambda_k^{(l)}+i_l\mu_l\right)\Delta t\right]\right\}+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\lambda_k^{(l)}\Delta tP(k,\mathbf{i}-\mathbf{e}_l,t)+\sum_{l=1}^{N}\left(i_l+1\right)\mu_l\Delta tP(k,\mathbf{i}+\mathbf{e}_l,t)+$$

$$+\sum_{\nu=1,\nu\neq k}^{K}q_{\nu k}\Delta tP(k,\mathbf{i},t)+\mathrm{o}(\Delta t)\,.$$

Откуда получаем прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$(3)\quad \frac{\partial P(k,\mathbf{i},t)}{\partial t}=-P(k,\mathbf{i},t)\left[\sum_{l=1}^{N}\left(\lambda_k^{(l)}+i_l\mu_l\right)\right]+\sum_{l=1}^{N}\lambda_k^{(l)}P(k,\mathbf{i}-\mathbf{e}_l,t)$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\left(i_l+1\right)\mu_l P(k,\mathbf{i}+\mathbf{e}_l,t)+\sum_{\nu=1}^{K}q_{\nu k}P(k,\mathbf{i},t)\,,\quad k=1,\ldots,K\,.$$

В стационарном режиме функционирования система уравнений (3) примет вид

$$(4)\quad 0=-\Pi(k,\mathbf{i})\left[\sum_{l=1}^{N}\left(\lambda_k^{(l)}+i_l\mu_l\right)\right]+\sum_{l=1}^{N}\lambda_k^{(l)}\Pi(k,\mathbf{i}-\mathbf{e}_l)+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}\left(i_l+1\right)\mu_l\Pi(k,\mathbf{i}+\mathbf{e}_l)+\sum_{\nu=1}^{K}q_{\nu k}\Pi(k,\mathbf{i})\,,\quad k=1,\ldots,K\,.$$

3. Вероятностные характеристики числа занятых приборов каждого типа

Введем в рассмотрение частичные характеристические функции вида

$$(5)\quad h(k,u_1,u_2,...,u_N)=H(k,\mathbf{u})=\sum_{i_1}e^{ju_1i_1}\sum_{i_2}e^{ju_2i_2}...\sum_{i_N}e^{ju_Si_N}\Pi(k,\mathbf{i})\,,$$

$$\mathbf{u}=(u_1,u_2,...,u_N)\,,$$

для которых система уравнений (4) перепишется в виде

$$(6)\quad j\sum_{l=1}^{N}\mu_l\left(e^{-ju_l}-1\right)\frac{\partial h(k,\mathbf{u})}{\partial u_l}=\sum_{l=1}^{N}\lambda_k^{(l)}\left(e^{ju_l}-1\right)h(k,\mathbf{u})+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{K}q_{\nu k}h(\nu,\mathbf{u})\,,\quad k=1,\ldots,K,$$

с начальным условием

(7) $h(k,u_1,u_2,...,u_N)\big|_{u_1=\ldots u_N=0} = H(k,\mathbf{0}) = r(k)$,

$r(k)$ – стационарное распределение вероятностей состояний управляющей цепи Маркова $k(t)$.

Здесь и далее принимаем, что $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Запишем систему (6) в матричном виде:

(8) $$j\sum_{l=1}^{N}\mu_l\left(e^{-ju_l}-1\right)\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial u_l} = \mathbf{h}(\mathbf{u})\left[\sum_{l=1}^{N}\mathbf{\Lambda}^{(l)}\left(e^{ju_l}-1\right)+\mathbf{Q}\right],$$

где введены вектор строки

(9) $$\mathbf{h}(\mathbf{u})=\left[h(1,\mathbf{u}),h(2,\mathbf{u}),...,h(K,\mathbf{u})\right],$$

$$\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial u_l}=\left[\frac{\partial h(1,\mathbf{u})}{\partial u_l},\frac{\partial h(2,\mathbf{u})}{\partial u_l},...,\frac{\partial h(K,\mathbf{u})}{\partial u_l}\right],$$

$$\frac{\partial\mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial u_l}=\left[\frac{\partial h(1,\mathbf{u})}{\partial u_l},\frac{\partial h(2,\mathbf{u})}{\partial u_l},...,\frac{\partial h(K,\mathbf{u})}{\partial u_l}\right].$$

Используя свойства характеристических функций, можно показать, что среднее число занятых приборов каждого типа определяется по формуле

(10) $$m_1^{(l)} = M\left\{i_l\right\} = \frac{\mathbf{r}\mathbf{\Lambda}^{(l)}\mathbf{e}}{\mu_l},\ \ l=1,\ldots,N,$$

где $\mathbf{r}=[r(1), r(2), \ldots, r(K)]$ – вектор-строка стационарного распределения вероятностей состояний случайной среды, определяемая системой линейных уравнений

(11) $$\begin{cases}\mathbf{rQ}=\mathbf{0},\\ \mathbf{re}=1.\end{cases}$$

Здесь и далее $\mathbf{e}$ – единичный вектор-столбец.

Вторые начальные моменты:

(12) $$m_2^{(l)} = \left\{\mathbf{r}\mathbf{\Lambda}^{(l)}\left[\mu_l\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right]^{-1}\left[2\mathbf{\Lambda}^{(l)}-\mu_l\mathbf{I}\right]+\mathbf{r}\mathbf{\Lambda}^{(l)}\right\}\left[2\mu_l\mathbf{I}-\mathbf{Q}\right]^{-1}\mathbf{e},$$

$l=1,\ldots,N,$

$\mathbf{I}$ – матрица размерности $K\times K$, у которой главная диагональ состоит из единиц, а все остальные элементы 0.

Корреляционный момент:

$$(13)\quad m^{(ls)} = M\left\{i_l \cdot i_s\right\} = \frac{1}{\mu_l + \mu_s}\left[\mathbf{m}_1^{(s)}\mathbf{\Lambda}^{(l)} + \mathbf{m}_1^{(l)}\mathbf{\Lambda}^{(s)}\right]\mathbf{e},$$

$$\mathbf{m}_1^{(l)} = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}^{(l)}\left[\mu_l\mathbf{I} - \mathbf{Q}\right]^{-1}, \quad l, s = 1, \ldots, N, \quad l \neq s.$$

4. Асимптотический анализ при условии предельно редких изменениях случайной среды

4.1. УСЛОВИЕ ПРЕДЕЛЬНО РЕДКИХ ИЗМЕНЕНИЙ СОСТОЯНИЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЫ

Далее будем искать решение системы (8) при условии предельно редких изменений состояний случайной среды.

Известно [5], что значения диагональных элементов матрицы инфинитезимальных характеристик определяют продолжительности времени пребывания потока в соответствующем состоянии.

Обозначив T_k – длительность пребывания цепи Маркова в k-м состоянии, имеем:

$$(14)\quad T_k = -\frac{1}{q_{kk}}, \quad k = 1, \ldots, K.$$

Если q_{kk} принимает достаточно малые значения, то продолжительность времени пребывания потока в k-м состоянии неограниченно возрастает, что оправдывает название рассматриваемого асимптотического условия.

Таким образом, условием предельно редких изменений состояний цепи Маркова будем называть равенства

$$(15)\quad q_{\nu k} = \varepsilon q_{\nu k}^{*}, \ \varepsilon \to 0.$$

Здесь ε – некоторый малый положительный параметр.

4.2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ

Принимая во внимание (15), систему уравнений (8) перепишем в виде

$$(16)\quad j\sum_{l=1}^{N}\mu_l\left(e^{-ju_l} - 1\right)\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{u})}{\partial u_l} = \mathbf{h}(\mathbf{u})\left[\sum_{l=1}^{N}\mathbf{\Lambda}^{(l)}\left(e^{ju_l} - 1\right) + \varepsilon\mathbf{Q}^{*}\right].$$

Решение $\mathbf{h}(\mathbf{u})$ этой системы, зависящее от параметра ε, обозначим

(17) $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \varepsilon) = \mathbf{f}(u_1, \ldots, u_N, \varepsilon)$

с начальными условиями

(18) $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \varepsilon) = \mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{r}$.

В силу теоремы о непрерывной зависимости решения системы дифференциальных уравнений от параметра существует предел

(19) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathbf{f}(\mathbf{u}, \varepsilon) = \mathbf{f}_1(\mathbf{u})$.

Тогда, выполнив системе (16) предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим матричное уравнение

(20) $$j\sum_{l=1}^{N} \mu_l \left(e^{-ju_l} - 1\right) \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{u})}{\partial u_l} = \mathbf{f}_1(\mathbf{u}) \sum_{l=1}^{N} \mathbf{\Lambda}^{(l)} \left(e^{ju_l} - 1\right).$$

Очевидно, что система (20) представляет собой систему уравнений в частных производных вида

(21) $$\sum_{l=1}^{N} j\mu_l (e^{-ju_l} - 1) \frac{\partial f_1(k, u_1, \ldots, u_N)}{\partial u_l} =$$
$$= f_1(k, u_1, \ldots, u_N) \sum_{l=1}^{N} \lambda_k^{(l)} (e^{ju_l} - 1), \quad k = 1, \ldots, K.$$

Запишем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений [7]:

(22) $$\frac{du_1}{j\mu_1(e^{-ju_1} - 1)} = \cdots = \frac{du_N}{j\mu_N(e^{-ju_N} - 1)} = \frac{df_1(k, \mathbf{u})}{f_1(k, \mathbf{u}) \sum\limits_{l=1}^{N} \lambda_k^{(l)} (e^{ju_l} - 1)},$$
$$k = 1, \ldots, K.$$

Рассмотрим первые N интегралов вида

(23) $$\frac{du_1}{j\mu_1(e^{-ju_1} - 1)} = \frac{du_s}{j\mu_s(e^{-ju_s} - 1)}, \quad s = 2, \ldots, N.$$

Нетрудно убедиться, что решение имеет вид

(24) $$\left(\frac{e^{ju_1} - 1}{C_s}\right)^{\frac{1}{\mu_1}} = (e^{ju_s} - 1)^{\frac{1}{\mu_s}},$$
$$(e^{ju_1} - 1)^{\frac{\mu_s}{\mu_1}} = C_s (e^{ju_s} - 1), \; s = 2, \ldots, N.$$

Далее рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(25)\quad \frac{du_1}{j\mu_1(e^{-ju_1}-1)} = \frac{df_1(k,\mathbf{u})}{f_1(k,\mathbf{u})\sum_{l=1}^{N}\lambda_k^{(l)}(e^{ju_l}-1)},\quad k=1,\ldots,K.$$

которое перепишем в виде

$$(26)\quad \frac{\sum_{l=1}^{N}\lambda_k^{(l)}(e^{ju_l}-1)du_1}{j\mu_1(e^{-ju_1}-1)} = \frac{df_1(k,\mathbf{u})}{f_1(k,\mathbf{u})}.$$

Далее, учитывая (24), получим

$$(27)\quad \frac{\lambda_k^{(1)}(e^{ju_1}-1)+\sum_{l=2}^{N}\lambda_k^{(l)}\frac{(e^{ju_1}-1)^{\frac{\mu_l}{\mu_1}}}{C_l}du_1}{j\mu_1 e^{-ju_1}(e^{ju_1}-1)} = \frac{df_1(k,\mathbf{u})}{f_1(k,\mathbf{u})}.$$

Откуда получаем

$$(28)\quad \left(\frac{\lambda_k^{(1)}}{\mu_1}+\sum_{l=2}^{N}\lambda_k^{(l)}\frac{(e^{ju_1}-1)^{\frac{\mu_l}{\mu_1}-1}}{\mu_l C_l}\right)d\left(e^{ju_1}-1\right) = \frac{df_1(k,\mathbf{u})}{f_1(k,\mathbf{u})}.$$

Общее решение принимает вид

$$(29)\quad f_1(k,\mathbf{u}) = C\exp\left\{\frac{\lambda_k^{(1)}}{\mu_1}(e^{ju_1}-1)+\sum_{l=2}^{N}\lambda_k^{(l)}\frac{(e^{ju_1}-1)^{\frac{\mu_l}{\mu_1}}}{\frac{\mu_l}{\mu_1}C_l\mu_1}\right\}.$$

Далее, подставляя (24), получаем

$$(30)\quad f_1(k,\mathbf{u}) = C(k)\exp\left\{\sum_{l=1}^{N}\frac{\lambda_k^{(l)}}{\mu_l}(e^{ju_l}-1)\right\},\quad k=1,\ldots,K.$$

Константа $C(k)$ определяется начальными условиями (18):

$$(31)\quad f_1(k,\mathbf{0}) = C(k) = r(k),\quad k=1,\ldots,K.$$

Окончательно получаем

$$(32)\quad h(k,\mathbf{u}) = \mathbf{f}(k,\mathbf{u},\varepsilon) \approx \mathbf{f}_1(k,u) = r(k)\exp\left\{\sum_{l=1}^{N}\frac{\lambda_k^{(l)}}{\mu_l}(e^{ju_l}-1)\right\}.$$

Тогда, просуммировав (32) по всем $k = 1, \ldots, K$, находим, что характеристическая функция совместного распределения вероятностей числа занятых приборов каждого типа имеет вид

(33) $$h(\mathbf{u}) \approx \sum_{k=0}^{N} r(k) \exp\left\{ \sum_{l=1}^{N} \frac{\lambda_k^{(l)}}{\mu_l} (e^{ju_l} - 1) \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что одномерные характеристические функции стационарного распределения вероятностей числа занятых приборов каждого типа для всех $s = 1, .., N$ имеют вид

(34) $$h(u_s) = M\left\{ e^{ju_s i_s} \right\} \approx \sum_{k=0}^{N} r(k) \exp\left\{ \frac{\lambda_k^{(s)}}{\mu_s} (e^{ju_s} - 1) \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} r(k) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda_k^{(s)}}{\mu_s} e^{ju_s} \right)^i}{i!} e^{-\frac{\lambda_k^{(s)}}{\mu_s}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(e^{ju_s} \right)^i \sum_{k=1}^{K} r(k) \frac{\left(\frac{\lambda_k^{(s)}}{\mu_s} \right)^i}{i!} e^{-\frac{\lambda_k^{(s)}}{\mu_s}}.$$

Следовательно, маргинальные распределения вероятностей числа занятых приборов каждого типа являются взвешенной суммой пуассоновских распределений:

(35) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \Pi(i_s, \varepsilon) = \Pi(i_s) = \sum_{k=1}^{K} r(k) \frac{(\rho_k^{(s)})^{i_s}}{i_s!} e^{-\rho_k^{(s)}},$$

где

(36) $$\rho_k^{(s)} = \lambda_k^{(s)} / \mu_s.$$

Аналогично можно показать, что двумерное распределение вероятностей определяется формулой

(37) $$\Pi(i_s, i_l) = \sum_{k=1}^{K} r(k) \frac{(\rho_k^{(s)})^{i_s}}{i_s!} \frac{(\rho_k^{(l)})^{i_l}}{i_l!} e^{-\rho_k^{(s)}} e^{-\rho_k^{(l)}}, \quad l, s = 1, \ldots, N.$$

На рис. 1–2 представлены графики одномерных распределений вероятностей при следующих параметрах системы: $N = 2$, $\mu_1 = 0{,}1$, $\mu_2 = 0{,}2$, а входящие потоки заданы матрицами условных интенсивностей вида

$$(38)\quad \mathbf{\Lambda}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Lambda}^{(2)} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix},$$

и матрицей инфинитезимальных характеристик

$$(39)\quad \mathbf{Q} = \varepsilon \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3 & 2 & 1 \\ 0,4 & -1,5 & 0,1 & 1 \\ 1 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

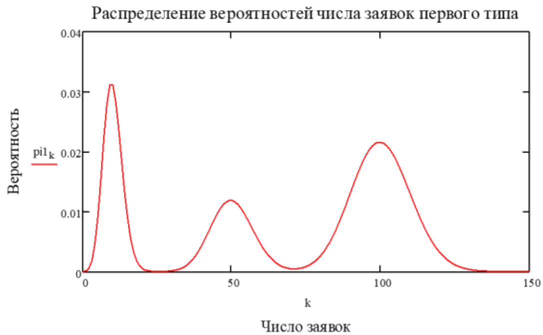

Рис. 1. Распределение вероятностей числа заявок первого типа при ε = 0,1

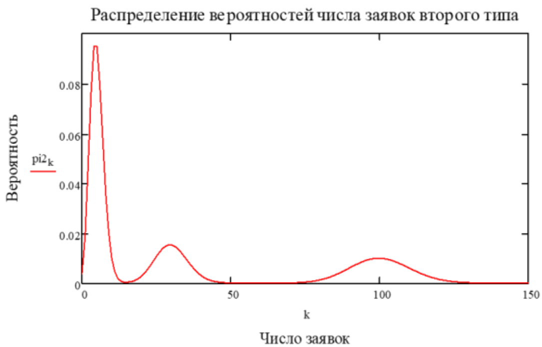

Рис. 2. Распределение вероятностей числа заявок второго типа при ε = 0,1

Следует заметить, что полученное асимптотическое распределение является многомодальным, так как имеет несколько локальных максимумов, что имеет принципиальное значение для применения результатов на практике.

5. Численный анализ

Поскольку результат (33) получен в условии предельно редких изменений состояний среды, необходимо установить, достаточно ли точна полученная аппроксимация, чтобы ее можно было применять на практике.

Из (33) согласно свойствам характеристических функций нетрудно получить асимптотические вероятностные характеристики.

Математическое ожидание числа заявок каждого типа:

$$(40)\quad M_1 as^{(l)} = j\sum_{k=1}^{K} r(k)\cdot\frac{\lambda_k^{(l)}}{\mu_l},\quad l=1,\ldots,N.$$

Вторые начальные моменты числа заявок каждого типа:

$$(41)\quad M_2 as^{(l)} = \sum_{k=1}^{K} r(k)\left[\left(\frac{\lambda_k^{(l)}}{\mu_l}\right)^2 + \frac{\lambda_k^{(l)}}{\mu_l}\right],\quad l=1,\ldots,N.$$

Корреляционный момент:

$$(42)\quad Mas\{i_l i_s\} = \sum_{k=1}^{K} r(k)\frac{\lambda_k^{(1)}}{\mu_1}\frac{\lambda_k^{(2)}}{\mu_2},\quad l,s=1,\ldots,N.$$

Для определения точности аппроксимации сравним ее асимптотические вероятностные значения с точными значениями (10), (12), (13).

Для анализа рассмотрим систему с двумя входящими потоками с параметрами (38)–(39) при различных значениях ε.

Так как асимптотические и точные средние определяются одинаковыми выражениями, то оценим относительную погрешность, сравнивая моменты второго порядка:

$$(43)\quad \Delta_l = \frac{\left|m_2^{(l)} - M_2 as^{(l)}\right|}{m_2^{(l)}}.$$

В таблице 1 приведены значения относительных погрешностей между значениями точных и аппроксимационных начальных моментов второго порядка.

Таблица 1. Относительная погрешность аппроксимации

Δ	$\varepsilon = 0{,}1$	$\varepsilon = 0{,}01$	$\varepsilon = 0{,}005$
$\Delta 1$	0,24	0,07	0,04
$\Delta 2$	0,69	0,15	0,08

Очевидно, что при уменьшении параметра ε уменьшаются значения относительных погрешностей. При $\varepsilon \leq 0{,}005$ относительная погрешность составляет менее 10%.

6. Заключение

В настоящей статье представлена математическая модель мультипотоковой системы передачи данных в виде гетерогенной бесконечнолинейной системы массового обслуживания с несколькими входящими потоками разной модальности.

На практике обычно предоставляемые для использования резервы ресурсов ограничены, поэтому допущение, что количество каналов неограниченное, достаточно сильное, так как в этом случае в рассматриваемой системе нет потерь. Но полученные результаты, а именно асимптотическое распределение вероятностей и выражения для моментов, позволяют оценить оптимально необходимое количество ресурсов каждого блока для системы с ограниченным ресурсом, обеспечивающее заданную вероятность потерь.

В дальнейшем планируется реализовать имитационную модель, чтобы сравнить асимптотическое и эмпирическое распределения вероятностей исследуемых процессов, а также для решения задач оптимизации.

Литература

1. БАСОВ О.О., ПАКУЛОВА Е.А., САИТОВ И.А. *Методологические основы построения интеллектуальных инфоком-*

муникационных систем. – Орёл: Академия ФСО России, 2020. – 272 с.

2. ВИШНЕВСКИЙ В.М., ДУДИН А.Н., КЛИМЕНОК В.И. *Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях.* – М.: Рекламно-издательский центр "ТЕХНОСФЕРА", 2018. – 564 с.
3. ГОРБАТЕНКО А.Е. *Асимптотики произвольного порядка для системы* MAP|GI|∞ в условии растущей интенсивности входящего потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – №2(11). – С. 35–43.
4. МАТВЕЕВ Ю.Н. *Технологии биометрической идентификации личности по голосу и другим модальностям* // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. – 2012. – №3(3). –С. 5.
5. НАЗАРОВ А.А., МОИСЕЕВА С.П. *Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания*. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
6. НАУМОВ В.А., САМУЙЛОВ К.Е. *О моделировании систем массового обслуживания с множественными ресурсами* // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. – 2014. – №3. – С. 60–64.
7. ЭЛЬСГОЛЬЦ Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
8. LUCANTONI D.M. *New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process* // Stochastic Models. – 1991. – Vol. 7. – P. 1–46.
9. NEUTS M.F., He Q.-M. *Markov arrival process with marked transitions* // Stochastic Processes and Applications. – 1998. – Vol. 74. – P. 37–52.
10. SINGH V.P. *Markovian queues with three heterogeneous servers* // AIIE Transactions. – 1971. – Vol. 3 (1). – P.45–48.
11. SINGH V.P. *Two-server Markovian queues with balking: Heterogeneous vs. homogeneous servers* // Operations Research. – 1970. – No. 18(1). – P. 145–159.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF A MULTI-FLOW HETEROGENEOUS QS UNDER CONDITIONS OF EXTREMELY RARE STATE CHANGES MANAGER OF INPUT FLOWS MARKOV CHAINS

Svetlana Moiseeva, National Research Tomsk State University, Tomsk, Doctor of Science, professor (smoiseeva@mail.ru).
Ekaterina Pankratova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, PhD (pankatya86@gmail.com).

Abstract: Currently, multimodal systems are gaining popularity with the development of multimodal interfaces. Multimodal streams are integrated streams of different types, including the transmission of voice, text data and video, so it is logical to use non-Poisson models to describe them. As a mathematical model of a multimodal servicing system, a multi-threaded heterogeneous queuing system with flows changing their intensity depending on the states of the Markov random environment is considered. Incoming requests from various flows are serviced during an exponentially distributed random time with parameters determined by the type of flow. Expressions are obtained for finding the maximum values of the main probabilistic characteristics of the number of occupied devices of each type. Asymptotic research is carried out under the condition of extremely rare changes in the states of the environment. The form of the multidimensional asymptotic characteristic function is obtained. It is proven that one-dimensional (marginal) stationary probability distributions of the number of occupied devices of each type are weighted sums of Poisson distributions. A numerical analysis of the range of applicability of the obtained approximation was carried out.

Keywords: Markov modulated Poisson flows, asymptotic analysis, extremely rare changes in the states of a Markov chain.

УДК 519.872
ББК 22.18

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.С. Манделем.

Поступила в редакцию 17.06.2024.
Опубликована 30.11.2024.