



МЕТОДИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 242–254
Izvestiya of Saratov University. Physics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 242–254
<https://fizika.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-2-242-254>, EDN: ILZMKE

Научная статья
УДК 537.8:537.9:621.371

Об огибающей волнового пакета (импульса)

М. В. Давидович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Давидович Михаил Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиотехники и электродинамики, DavidovichMV@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8706-8523>

Аннотация. В методической работе рассмотрены вопросы о скоростях и временах распространения волновых пакетов (импульсов) через слой среды с дисперсией толщины d . Показано, что импульс на выходе появляется не ранее, чем через время d/c , при этом он ослабляется и расширяется с образованием хвоста. Численно исследовано туннелирование через слой плазмы, при этом парадоксы туннелирования типа Хартмана не наблюдаются.
Ключевые слова: волновой пакет, импульс, огибающая, дисперсия, групповая скорость, туннелирование, парадокс Хартмана

Благодарности: Работа частично поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 16-19-10033) и Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания (№ FSRR-2023-0008).

Для цитирования: Давидович М. В. Об огибающей волнового пакета (импульса) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 242–254. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-2-242-254>, EDN: ILZMKE

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

About the envelope of the wave packet (pulse)

M. V. Davidovich

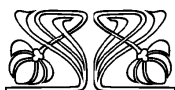
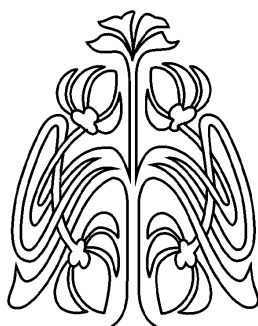
Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Michael V. Davidovich, DavidovichMV@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8706-8523>

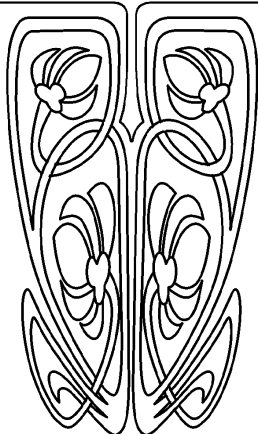
Abstract. Background and Objectives: The methodological work considers the issues of the velocities and times of propagation of wave packets (pulses) through a medium layer of thickness d with dispersion. **Methods:** The spectral method of numerical calculation of the wave packet is used, taking into account the dispersion of the dielectric constant. **Results:** It has been shown that the output pulse appears no earlier than after time d/c , while it weakens and expands with the formation of a tail. Tunneling through a plasma layer has been numerically investigated, while no Hartmann-type tunneling paradoxes have been observed.

Keywords: wave packet, pulse, envelope, dispersion, group velocity, tunneling, Hartman's paradox

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Science Foundation (project No. 16-19-10033) and by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the State Task (No. FSRR-2023-0008).



МЕТОДИЧЕСКИЙ
ОТДЕЛ





For citation: Davidovich M. V. About the envelope of the wave packet (pulse). *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 242–254 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-2-242-254>, EDN: ILZMKE

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

В курсах по электродинамике и распространению волн, оптике и по ряду других дисциплин, преподаваемых в вузах с физическим и техническим уклоном, рассматриваются вопросы распространения электромагнитных (оптических) импульсов – цугов волн или волновых пакетов (ВП) $u(z, t)$ в различных средах. ВП в исходной точке $z = 0$ обычно описывают через форм-фактор (например, прямоугольный $\Pi(t)$) как множитель при высокочастотном заполнении: $u(0, t) = \Pi(t) \sin(\omega t)$. Функция $u(0, t)$ имеет спектр с некой шириной $\Delta\omega$, поэтому ВП также называют спектральным пакетом или цугом. Часто форм-фактор ошибочно ассоциируют с амплитудой или огибающей ВП. Очень часто используют нефизические гауссовы форм-факторы, имеющие бесконечные фронты.

В учебной и журнальной литературе также рассматриваются вопросы распространения (передачи) энергии и информации. По этим вопросам учебная литература дает однозначный ответ: энергия и информация не могут распространяться быстрее скорости света c в вакууме [1–3]. Впервые в монографиях по электродинамике это было показано Стрэттоном [3]. Дифракция волновых пакетов или импульсов происходит при их прохождении через различные структуры, например, ионосферу. Время прохождения ВП здесь существенно, например, для синхронизации часов спутников и точного определения координат в системах JPS и ГЛОНАСС. Попадание характерных (резонансных) частот среды в спектр ВП может приводить к туннелированию. Определение времени прохождения частиц и времени срабатывания актуально для квантовых приборов, например, резонансно-туннельных диодов.

В то же время, начиная с 1930 г., в научной литературе, посвященной вопросам дифракции электронов и фотонов на структурах, туннелированию, распространению импульсов в средах с дисперсией и (как следствие) с потерями, до сих пор обсуждается ряд парадоксов по сверхсветовому распространению, сверхсветовому туннелированию различных частиц (электронов, фотонов), нулевому или даже отрицательному времени задержки (прохождения простейших структур) и т. п. (см., например,

обзоры литературы в работах [4–8]). Все эти парадоксы обусловлены подменой понятий, поскольку строгое нестационарное рассмотрение однозначно отвечает на вопрос о невозможности сверхсветовых движений энергии и импульса. Учебная литература более консервативна и рассматривает уже установившиеся понятия, а в периодических изданиях некоторые авторы пытаются выдать за сенсацию свои ошибочные результаты. Имеются многочисленные публикации и по так называемому эффекту Хартмана, а также по обобщенному эффекту Хартмана в электродинамике (по поводу парадокса Хартмана также см. работы [6–8] и ссылки в них). В большом числе публикаций говорится о сверхсветовом туннелировании электромагнитных волн, при этом рассматривают туннелирование через одиночный слой, слоистые структуры типа 1D фотонных кристаллов, воздушные зазоры между двумя призмами при нарушении полного внутреннего отражения, через запредельные участки волноводов, через фильтры и ряд других структур (см., например, [9–17] и приводимую там литературу). Поскольку такие выводы контрастируют с теорией Эйнштейна, выдвигаются утверждения, что сверхсветовые движения (например, сверхсветовая скорость максимума импульса) не нарушают принцип причинности (например, в [14, 17]). При этом высказываются даже утверждения, что сигнал на выходе диссипативного фильтра может появиться раньше, чем он попал на вход, и это не нарушает принцип причинности (см. работу [17] и ее анализ в [18]). Все такие выводы при тщательном рассмотрении не выдерживают критики.

Сверхсветовые скорости существуют: фазовая скорость (ФС), групповая скорость (ГС), скорость перемещения «зайчика» или поляризации при скользящем движении волн вдоль поверхности среды. Движения сверхсветовые и кажущиеся сверхсветовыми описаны в монографии [19], где объяснено, почему они не связаны с переносом энергии и информации и не нарушают принцип причинности. Указанное разъяснял еще Л. И. Мандельштам в своих лекциях. Любая такая передача осуществляется созданием ВП, который движется и детектируется при приеме.



Под ВП мы понимаем нестационарную волну

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}(\omega) \mathbf{r}) d\omega \quad (1)$$

(\mathbf{r} – радиус-вектор, \mathbf{k} – волновой вектор), в среде с дисперсией частота $\omega = \Omega(\mathbf{k})$, ФС $\mathbf{v}_p = \mathbf{k}\omega/|\mathbf{k}|^2$ и ГС $\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\Omega(\omega)$. Функция $\Omega(\mathbf{k})$ – действительная, однако в среде с дисперсией вектор $\mathbf{k} = \mathbf{k}' - i\mathbf{k}''$ комплексный. ВП (1) записан для электрического поля. Мнимая составляющая ФС \mathbf{v}_p не вызывает вопросов: действительная часть \mathbf{v}_p определяет фазовый набег, а мнимая часть – потери (убывание амплитуды). Мнимая ГС не имеет смысла. ГС имеет смысл как полярный вектор, преобразующийся как радиус-вектор, то есть как скорость материальной точки, только если диссипации нет: $\mathbf{k}'' = 0$. В этом случае согласно теореме Леонтовича – Лайтхилла – Рытова [20] ГС характеризует скорость энергии. В этом же случае ВП (1) движется как целое с ГС [1], если последняя не имеет дисперсии (ВП – узкий). Однако диссипация есть всегда, и для всех законов дисперсии есть области сверхсветовой ГС, если ее определить как градиент по действительной части волнового вектора: $\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}'}\Omega(\omega)$. Для одномерного движения (в направлении z с единичным вектором \mathbf{z}_0) групповая скорость $\mathbf{v}_g = \mathbf{z}_0 \partial \omega(k)/\partial k$, где $k = \text{Re}(k_z)$. Впервые сверхсветовую ГС обнаружил Эренфест в 1910 г. [21, 22] для дисперсии в неравновесной среде. Поскольку ГС дает в первом приближении описание движения узкого ВП в области, где почти нет диссипации, это привело к подмене понятия скорости энергии на ГС, в том числе на случаи, когда ГС превышает скорость света c . Поэтому возникли утверждения о сверхсветовом распространении импульсов с ГС.

После открытия туннельного эффекта в 1928 г. встал вопрос о времени туннелирования. Внутри барьера импульс частицы мнимый. В квантовой яме с конечной шириной барьера возможны метастабильные (комплексные) уровни энергии $E_n = E'_n - iE''_n$, и тогда можно ввести время жизни уровня $\tau_n = 2\hbar/E''_n$ и вероятность полураспада $1/\tau_n$. В развитой в 1928 г. Фаулером и Нордгеймом (ФН) теории туннелирования рассматривались электроны с непрерывным спектром энергий (от нуля до энергии Ферми), набигающие на потенциальный барьер на границе металла. Возник вопрос о времени прохождения такого барьера, хотя и использовалась стационарная теория. Эта проблема

впервые рассмотрена в 1932 г. в работе [23], где было сделано утверждение о нулевом времени прохождения барьера ВП. Существенный вклад в рассмотрение вопроса внес Вигнер [24], определивший так называемое вигнеровское, или фазовое время $\tau_w = d\phi(T(\omega))/d\omega$. Здесь $\phi(T(\omega))$ – фаза коэффициента передачи, поэтому это время и называют фазовым (не путать со временем движения фазы $\tau_p = L/v_p$). Обратим внимание на то, что оно, как определение ГС и группового времени задержки, основано на стационарных процессах.

С 1960 г. возникли области новых парадоксов, связанных с туннелированием частиц через потенциальные барьеры и туннелированием фотонов. Они связаны с публикациями Смитта и Хартмана [25, 26]. Известен парадокс Хартмана [6, 7, 26], основанный на введении для ВП времени τ_w . Для бесконечного барьера время туннелирования τ_w перестает зависеть от его длины, то есть возникает утверждение о бесконечной скорости туннелирования. После указанных публикаций появилось много других, где вводились разные времена туннелирования (см. [6–8]). При этом стали рассматривать и туннелирование фотонов через слой плазмы, через зазор между двумя призмами, когда выполняется полное внутреннее отражение, через запрещенный отрезок волновода, через запрещенную зону фотонного кристалла. В большинстве таких публикаций стали вводить сверхсветовые и даже отрицательные времена прохождения структур. Обзор подобных публикаций можно найти в работах [4–8]. Отметим ряд ученых, внесших вклад в определение времен туннелирования: МакКолл, Вигнер, Смитт, Хартман, Буттикер, Ландауэр, Базь, Ольховский и др. Наличие множества различных времен, ни одно из которых правильно не описывает все процессы прохождения и туннелирования волн, вызывает неудовлетворенность и стимулирует появление новых работ вплоть до настоящего времени. Несостоятельность вигнеровского времени заключается уже в том, что оно может быть отрицательным [16]. Все упомянутые выше времена не основаны на строго нестационарных процессах, использование которых приводит к выводу, что все времена не могут быть меньше, чем d/c , где d размер структуры [3, 27, 28].

Волновые процессы можно классифицировать на стационарные и нестационарные (волновые пакеты). Так, Солнце излучает почти как



абсолютно черное тело с известной средней спектральной плотностью, причем так долго, что процесс почти стационарный (не считая малых флуктуаций Солнечной активности). Имеет место движение фотонов разных частот в потоке излучения от Солнца. Дошедшие до ионосферы фотоны низких радиочастот могут туннелировать. Здесь, как и в теории Фаулера – Нордгейма, следует рассматривать поток частиц разных энергий, а не прохождение отдельной частицы. Взрыв сверхновой – процесс нестационарный. Здесь также следует рассматривать движение фотонов всех энергий, но в ВП. В стационарном процессе вводить время не конструктивно, поскольку сдвиг по времени ничего не меняет. Скорость же ввести можно [8] как движение некой субстанции (например, энергии) за какую-то разность времен. Однако такие времена вводят. В нестационарном процессе или ВП обычно определяют огибающую импульса. Другой синоним – мгновенная (зависящая от момента времени t) амплитуда. Обычно высокочастотные колебания (высокочастотное заполнение импульса) нас не интересует, а интересует мгновенная амплитуда $a(t)$. Именно она обычно и несет информацию, а максимальная энергия соответствует максимальной амплитуде. Именно ее определяет амплитудный детектор [29]. Он имеется в любом демодуляторе, например, в фазовом детекторе. Поэтому все парадоксы сверхсветовых ВП связаны с некорректным определением мгновенной амплитуды, например, через ГС: $a(z, t) = A_0 \exp(t - z/v_g)$. Такая волна движется как целое вдоль направления z с ГС. Однако даже при пренебрежении диссипацией такой ВП в диспергирующей среде расплывается [30]. Правильное определение амплитуды связано с введением аналитического сигнала с помощью преобразование Гильберта \hat{H} и определения амплитуды комплексного сигнала $w = \mathbf{E} + i\hat{H}(\mathbf{E})$: для ВП (1) надо определить сопряженный ВП $\hat{H}(\mathbf{E})$ и огибающую $a(\mathbf{r}, t) = |w|^2 = \sqrt{|E(\mathbf{r}, t)|^2 + [\hat{H}E(\mathbf{r}, t)]^2}$. Поскольку оператор \hat{H} интегральный [30], такое определение часто весьма сложное и редко применяется. При других определениях $a(\mathbf{r}, t)$ происходит подмена понятий, что и приводит к парадоксам. Приведенное определение не дает сверхсветовых движений.

ВП (1) определяется через спектральное электрическое поле \mathbf{E} . Из уравнений Максвелла можно определить магнитное поле \mathbf{H} . В изотропной однородной диэлектрической среде оно

связано с (1) множителем $\sqrt{\epsilon_0 \epsilon(\omega)}/\mu_0$ под интегралом. Также при задании диэлектрической проницаемости (ДП) такой среды $\epsilon(\omega)$ можно определить дисперсию ДП $k^2 = k_0^2 \epsilon(\omega)$. Это простейшее уравнение Френеля. В общем случае пространственной дисперсии (ПД) оно имеет вид определителя при тензорной ДП $\hat{\epsilon}(\omega, \mathbf{k})$ [31]. Далее для простоты мы не рассматриваем ПД. Стационарное уравнение Шредингера (УШ) и волновое уравнение Гельмгольца идентичны, поэтому идентично описывается стационарное прохождение (туннелирование) электронов и фотонов. Для первых при энергии E в потенциале V можно ввести волновой импеданс $\rho = 1/k = \hbar/\sqrt{2m_e(E - V)}$, а для вторых соответственно $\rho = 1/\sqrt{\epsilon}$ [8]. Имеет место соответствие $\epsilon = 1 - V/E$, т. е. при $E \gg V$ электрон движется как фотон в вакууме (конечно, со скоростью $v = \sqrt{2E/m_e} < c$), а при $E < V$ электрон туннелирует через барьер как фотон через слой плазмы с $\epsilon < 0$. Эта аналогия породила большой поток публикаций по сверхсветовому туннелированию фотонов. Сразу отметим, что туннелируют не электроны и фотоны, а квазичастицы: квазиэлектроны и квазифотоны, определяемые коллективным взаимодействием многих частиц. Для ВП (1) в работе [29] определена пропагаторная функция Грина (ПФГ) распространения ВП в однородной среде вдоль оси z :

$$g(z - z', t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega(t - t') - ik(\omega)(z - z')) d\omega. \quad (2)$$

Она определяет распространение ФП из одной точки в другую, удовлетворяет принципу причинности и сразу отвечает на вопрос, что любое распространение ВП таково, что его максимальная скорость не превышает c . Собственно это и решает проблему. Надо построить ПФГ для слоя с произвольной дисперсией и определить ПФГ на выходе. Некоторая проблема заключается в том, что ВП от слоя отражается, т. е. раздваивается. Внутри он имеет сложный характер волн обоих направлений. Мы будем рассматривать только прошедший ВП и для простоты только электромагнитное туннелирование. Все такие электродинамические задачи следует рассматривать как распространение ВП через один или несколько слоев диэлектрика, причем туннелированию соответствует отрицательная реальная часть $\epsilon' < 0$ ДП слоя. Туннелирование также возможно через запрещенную зону



1D фотонного кристалла, все слои которого могут, в частности, состоять из прозрачных диэлектриков с положительной ДП, но имеется зона непропускания (bandgap). Поскольку выводы о характере движения волн часто основывают на стационарных подходах, решение нестационарной задачи о прохождении ВП через такой слой диэлектрика актуально. Актуальность подтверждают и недавно опубликованные работы, например, [15, 16].

Мы рассматриваем задачу дифракции одномерного ВП со спектром $U(\omega)$ на слое диэлектрика $0 < z < d$, описываемого спектральной ДП $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$ без пространственной дисперсии (ПД). В численном примере туннелирования спектральную ДП берем для холодной плазмы в виде

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega_c\omega}, \quad (3)$$

или для действительной и мнимой ее частей

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \omega_c^2}, \quad \varepsilon''(\omega) = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 + \omega_c^2)}.$$

(ω_p – плазменная частота, ω_c – частота столкновений). Для газообразной плазмы $\varepsilon_L = 1$. Для металлов и полупроводников $\varepsilon_L \sim 1020$ и не зависит от частоты вплоть до плазменной частоты (ПЧ) ω_p . В пренебрежении частотой столкновений (ЧС) ω_c туннелирование будет при $\omega < \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L}$. Такое пренебрежение требует, чтобы спектр ВП был существенно выше ЧС: $\omega \gg \omega_c$. Учет ЧС приводит к диссипативному туннелированию. В общем случае следует рассматривать прохождение ВП через слой диэлектрика. Дисперсия реальных диэлектриков в широком диапазоне обычно весьма сложная. Используя закон дисперсии Лоренца, ее можно представить в виде:

$$\varepsilon(\omega) = \frac{1 + \frac{2}{3} \sum_{n,m=1} \frac{\omega_{pm}^2}{\omega_{mn}^2 - \omega^2 + i\omega_{cmn}\omega}}{1 - \frac{1}{3} \sum_{n,m=1} \frac{\omega_{pm}^2}{\omega_{mn}^2 - \omega^2 + i\omega_{cmn}\omega}}. \quad (4)$$

Здесь мы использовали поляризуемость Лоренца одиночного атома

$$\alpha_m = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_{mn}^2 - \omega^2 + i\omega\omega_{cmn}}$$

и формулу Лоренц-Лоренца. Если концентрации атомов N_m сорта m (квадраты плазменных частот ω_{pm}^2) малы, т. е. мала сумма по сравнению

с единицей, (4) можно разложить по малому параметру:

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 + \sum_{n,m=1} \frac{\omega_{pm}^2}{\omega_{mn}^2 - \omega^2 + i\omega_{cmn}\omega}. \quad (5)$$

Эта формула справедлива для очень разреженного газа осцилляторов с несколькими резонансными частотами ω_{mn} . Если имеются атомы только одного сорта, то $m = 1$. Если имеет место только одна резонансная частота, то $n = 1$. Величины ω_{pm}^2 характеризуют силы осцилляторов, вычисляемых из решения квантовомеханической задачи. Если $\omega = \omega_{mn}$, в силу малой ЧС будет $\varepsilon(\omega_{mn}) \approx -2 < 0$. Формулу (5) в этом случае применять нельзя, поскольку она получена в приближении малой суммы. В другом резонансном случае, когда сумма в (2) велика по сравнению с единицей, имеем:

$$\varepsilon(\omega) \approx -2 + \frac{3}{\sum_{n,m=1} \frac{\omega_{pm}^2}{\omega_{mn}^2 - \omega^2 + i\omega_{cmn}\omega}}. \quad (6)$$

Формула (6) справедлива только в окрестностях резонансных частот. На резонансной частоте ДП согласно (4) имеет малую мнимую часть: $\varepsilon(\omega_{mn}) \approx -2 + 3i\omega_{cmn}\omega_{mn}/\omega_{pm}^2$. Что касается формулы (5), то для нее выше резонанса при малых потерях ДП ε' может быть любой отрицательной величиной, при этом ε'' тем больше в этой области, чем меньше потери. В реальных средах при существенных потерях и малых силах осцилляторов ДП ε' не переходит через ноль. Получить среду с дисперсией Лоренца при отрицательной ε' достаточно проблематично. Тем не менее, рассмотрение сред с дисперсией (5) представляет интерес [16]. Отметим, что (3) для области существенно ниже резонансных частот получается из (5), когда в этой области все резонансные частоты равны нулю, т. е. лежат существенно выше, при этом

$$\varepsilon_L = 1 + \sum_{n,m=1} \frac{\omega_{pm}^2}{\omega_{mn}^2}.$$

Это оптическая часть ДП, определяемая поляризацией кристалла, квадраты ПЧ ω_{pm}^2 определяют концентрации атомов, а электронная восприимчивость

$$\chi_e = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega_c\omega}$$

определяется ПЧ и ЧС для электронов проводимости. Для них резонансная частота равна нулю, поскольку они свободные и не связаны с атомами (модель абсолютно неупругих диполей). Отметим, что из (5) также можно получить в пределе



закон дисперсии Дебая для абсолютно жестких диполей с ориентационной поляризацией [32].

ВП (импульс) – это нестационарная волна. В рамках нестационарной электродинамики реакция поляризации $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$ или индукции \mathbf{D} на электрическое поле описывается как [33]:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \int_V \hat{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt'. \quad (7)$$

Здесь тензорный оператор $\hat{\epsilon}$ (ядро) приведен с учетом ПД. В этом случае пространственное интегрирование в (7) ведется по области, отстоящей от точки \mathbf{r} менее $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < c(t - t')$. В однородной среде без ПД преобразование Фурье для (7) дает $\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega)$. В такой среде $\tilde{\epsilon}(t)$ – скалярная функция. Для дисперсии (5) имеем:

$$\tilde{\epsilon}(t) = \delta(t) + \chi(t) \sum_{m,n} \frac{\omega_{pm}^2 \exp(-\omega_{cn} t / 2)}{\sqrt{\omega_{mn}^2 - \omega_{cn}^2 / 4}} \sin\left(t \sqrt{\omega_{mn}^2 - \omega_{cn}^2 / 4}\right). \quad (8)$$

Здесь $\chi(t)$ – функция Хэвисайда, обеспечивающая принцип причинности: $\tilde{\epsilon}(t) = 0$ при $t < 0$. Для газовой плазмы в (8) следует положить $\omega_{mn} = 0$, т. е. считать заряды свободными (для однокомпонентной плазмы $m = 1$, $\omega_{p1} = \omega_p$). Для среды со многими уровнями квантовых переходов следует учесть все частоты переходов, а для твердотельной плазмы добавить в (8) и ее электронно-дырочную восприимчивость. Используя (8), можно сформулировать интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) для электрического поля в пространственно-временной области при дифракции ВП на однородном слое [27]. Для неоднородной среды это также можно сделать, считая ω_{pm}^2 функциями координат.

Далее рассмотрим спектральный подход, не требующий решения ИДУ. Используем ВП в виде поля падающей из вакуума плоской квази-монохроматической волны:

$$E_x(z, t) = A(z, t) E_0 \sin(\omega_0(t - z/c)). \quad (9)$$

Компонента магнитного поля $H_y(z, t) = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} E_x(z, t)$, а форм-фактор (амплитудный множитель) берем прямоугольным: $A(z, t) = \chi(t - z/c) - \chi(t - \tau - z/c)$. Здесь $\chi(t)$ – функция Хэвисайда, равная единице при положительных временах и нулю при отрицательных. Таким образом, пакет движется к слою слева, и сигнал на границе слоя в точке $z = 0$ возникает в момент $t = 0$. Для простоты длительность

ВП полагаем равной $\tau = d/c$. В момент $t = \tau$ сигнал в рассмотренной точке заканчивается. В этот же момент он может появиться (в виде ВП с высокочастотными компонентами спектра) на выходе слоя. Очевидно, длительность ВП можно взять любую. Под спектром ВП понимаем как обычно величину

$$U(\omega) = \int_0^\tau E_x(0, t) \exp(-i\omega t) dt.$$

В обозначениях $\Omega_- = (\omega - \omega_0)\tau$, $\Omega_+ = (\omega + \omega_0)\tau$, $\Omega_0 = \omega_0\tau$, $\Omega = \omega\tau$, $a = E_0\tau[\Omega_+ \cos(\Omega_-) - \Omega_- \cos(\Omega_+) - 2\Omega_0]/(2\Omega_+\Omega_-)$, $b = E_0\tau[\Omega_+ \sin(\Omega_-) - \Omega_- \sin(\Omega_+)]/(2\Omega_+\Omega_-)$, имеем:

$$U(\omega) = a(\omega) - ib(\omega) = |U(\omega)| \exp(i\varphi_U). \quad (10)$$

Здесь $|U(\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi_U = -\arctan(b/a)$, ω_0 – центральная («несущая») частота спектра. Предельное при больших частотах значение спектра (10) есть $U_\infty(\omega) = 2iE_0\tau \sin(\Omega_0) \exp(-i\Omega)/\Omega$. Используя функцию $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$, соотношение (10) можно записать по-другому:

$$U(\omega) = iE_0\tau [\exp(-i\Omega_+/2) \text{sinc}(\Omega_+/2) - \exp(-i\Omega_-/2) \text{sinc}(\Omega_-/2)]. \quad (11)$$

При $\Omega_0 \gg 1$ (длительность ВП много больше периода колебания $T_0 = 2\pi/\omega_0$) основной вклад в спектр дает область около несущей частоты, а сам спектр узкий: $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$.

Спектр прошедшего поля при дифракции монохроматической волны определяется коэффициентом прохождения $T(\omega)$, а отраженного – коэффициентом отражения $R(\omega)$. Имеем [8]:

$$T(\omega) = [\cos(k_0\sqrt{\epsilon}d) + i(\epsilon^{1/2} + \epsilon^{-1/2}) \sin(k_0\sqrt{\epsilon}d)/2]^{-1}, \quad (12)$$

$$\frac{1 + R(\omega)}{1 - R(\omega)} = \frac{1 + i\epsilon^{-1/2} \tan(k_0\sqrt{\epsilon}d)}{1 + i\epsilon^{1/2} \tan(k_0\sqrt{\epsilon}d)}. \quad (13)$$

Здесь $k_0 = \omega/c$. Отметим, что замена $k_0\sqrt{\epsilon} \rightarrow k = \sqrt{2m_e(E - V)}/\hbar$ соответствует задаче прохождения электрона через прямоугольный потенциальный барьер. При туннелировании k мнимое. В прямоугольном волноводе дисперсия волны H_{10} имеет вид $k = k_0\sqrt{1 - \pi^2/(k_0a)^2}$. Для запердельного участка ($k_0 \ll \pi/a$) имеем $k = ik_0\sqrt{\pi^2/(k_0a)^2} \approx i\pi/(k_0a^2)$, и можно определить эффективную ДП $\epsilon = -\pi^2/(k_0a)^2$, действительный коэффициент прохождения

$$T(\omega) = [\cos(\pi d/a) + (\pi/k_0a - k_0a/\pi) \sin(\pi d/a)/2]^{-1}$$



и нулевое время Вигнера. В общем случае ДП является комплексной величиной, время Вигнера τ_w мало.

Мы ищем поле ВП, прошедшего через слой (в точке $z = d$), в виде:

$$E_x(d, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(\omega) U(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (14)$$

Действительно, если слой отсутствует, то $\varepsilon = 1$ и $T(\omega) = \exp(-ik_0 d)$. Подставляя в (14), получаем $E_x(d, t) = E_x(0, t - d/c)$. Если $t < d/c$, то сигнал (14) отсутствует. При анализе интеграла (14) следует учесть, что $U(-\omega) = U^*(\omega)$, $T(-\omega) = T^*(\omega)$, поэтому значение (14) действительное. Для оценки интеграла (14) в общем случае для $T(\omega)$ и $U(\omega)$ вводим комплексные представления: $T(\omega) = |T(\omega)| \exp(i\varphi_T(\omega))$, $U(\omega) = |U(\omega)| \exp(i\varphi_U(\omega))$. Вид выражения (8) таков, что в нижней полуплоскости на полуокружности большого радиуса оно дает нулевое значение. При больших частотах $T(\omega) \rightarrow \exp(-ik_0 d)$, и тогда $\varphi_T \rightarrow -\omega\tau$. При $\omega \rightarrow 0$ имеем $\varepsilon \approx -i\omega_p^2/(\omega\omega_c)$, $T(\omega) \approx 1/[1 + \omega_p^2\tau/(\omega_c) + i\omega\tau]$, $\varphi_T \approx 0$. Если $t < \tau$, то функция $\exp(i\omega(t - \tau))$ также исчезает на такой полуокружности. Поэтому интеграл (14) равен нулю при $t < \tau$, поскольку контур интегрирования можно замкнуть в нижней полуплоскости комплексной плоскости ω , где нет полюсов. Действительно, у функции $U(\omega)$ полюсов нет. Для полюсов $T(\omega)$ имеем:

$$\omega = \tau^{-1} \varepsilon^{-1/2} \text{Arctan} \left(2i\varepsilon^{1/2}/(\varepsilon + 1) \right). \quad (15)$$

Если ДП действительная, полюса лежат в верхней полуплоскости. Если ДП имеет малую отрицательную мнимую часть и большую по сравнению с ней положительную часть, то также полюса лежат в верхней полуплоскости. Если ДП имеет большую мнимую отрицательную часть, полюса также лежат в верхней полуплоскости. В общем случае, когда ДП есть функция частоты, принимаем:

$$\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon'', \varepsilon^{1/2} = \alpha - i\beta,$$

где $\varepsilon'' > 0$, $\alpha = \sqrt{(\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} + \varepsilon')/2} > 0$, $\beta = \sqrt{(\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} - \varepsilon')/2} > 0$. Поэтому

$$\omega = \tau^{-1} \frac{(\alpha + i\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\text{Arctan} \left(2 \frac{\beta(\varepsilon' + 1) - \alpha\varepsilon'' + i[\alpha(\varepsilon' + 1) + \beta\varepsilon'']}{(\varepsilon' + 1)^2 + \varepsilon''^2} \right) \right].$$

Аргумент арктангенса представим в виде $z = x + iy$, $y = 2[\alpha(\varepsilon' + 1) + \beta\varepsilon'']/[(\varepsilon' + 1)^2 + \varepsilon''^2] > 0$. Выражаем арктангенс через логарифм ([34], формула 507.31):

$$\text{Arctan}(z) = \arctan \left(\frac{2x}{1 - x^2 - y^2} \right) + \frac{i}{4} \ln \left(\frac{(1 + y)^2 + x^2}{(1 - y)^2 + x^2} \right) + 2n\pi,$$

$$x^2 + y^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2) / [(\varepsilon' + 1)^2 + \varepsilon''^2] = 4\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} / [(\varepsilon' + 1)^2 + \varepsilon''^2],$$

$$x = 2[\beta(\varepsilon' + 1) - \alpha\varepsilon''].$$

Здесь арктангенс в правой части формулы берется в квадранте, определяемом знаком числителя и знаменателя, а не в смысле главного значения (он определяет положительный угол комплексного числа $Z = 1 - x^2 - y^2 + 2ix$). Видим, что все полюса лежат в верхней полуплоскости. Тот же результат получаем на основе формулы 507.32 [34].

Уравнение (15) разрешено относительно частоты, однако при частотной дисперсии ДП его правая часть нелинейно от нее зависит. Поэтому определение полюсов требует итерационного решения (15). Определив полюса и вычислив интеграл (14) при $t > d/c$ методом теории вычетов, можно определить поле в рассматриваемой точке. Оно представляет собой бесконечный ряд, сходимость которого невысокая. Это требует численного определения большого числа полюсов. Проще непосредственно численно проинтегрировать (12). Для этого мы преобразовываем его к пределам $0 \leq \omega < \infty$:

$$E_x(d, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |T(\omega)| |U(\omega)| \cos(\omega t + \varphi_T(\omega) + \varphi_U(\omega)) d\omega. \quad (16)$$

Для вычисления (16) необходимо фазовые набеги определять в полном виде, который может существенно превышать 2π , что неудобно. Поэтому запишем: $T(\omega) = \kappa(\omega) + i\vartheta(\omega)$. При больших частотах $\kappa(\omega) = \cos(\omega\tau)$, $\vartheta(\omega) = -\sin(\omega\tau)$, $|T_\infty(\omega)| = 1$, $\varphi_T(\omega) = -\omega\tau$, $U_\infty(\omega) = 2E_0\tau \sin(\omega_0\tau) \exp(i(\pi/2 - \omega\tau))/(\omega\tau)$, $|U_\infty(\omega)| = 2E_0\tau \sin(\omega_0\tau)/(\omega\tau)$, $\varphi_U = \pi/22\omega\tau$, $a(\omega) = |U_\infty(\omega)| \cos(\varphi_U)$, $b(\omega) = |U_\infty(\omega)| \sin(\varphi_U)$. Вводя обозначение $F(\omega) = |U_\infty(\omega)| \exp(i(\pi/22\omega\tau))$, получаем интеграл типа (16) от этой предельной



функции:

$$E_x^\infty(d, t) = \frac{2E_0}{\pi} \int_0^\infty (\omega\tau)^{-1} \sin(\omega\tau(t/\tau - 2)) d(\omega\tau) = E_0 \operatorname{sgn}(t/\tau - 2). \quad (17)$$

Теперь интеграл (14) представим в виде

$$E_x(d, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{ [a(\omega)\kappa(\omega) + b(\omega)\vartheta(\omega)] \cos(\omega t) + [b(\omega)\kappa(\omega) - a(\omega)\vartheta(\omega)] \sin(\omega t) \} d\omega. \quad (18)$$

Интеграл усекаем, взяв максимальную частоту $\omega_{\max} = 80\omega_0$. Отбрасывание остаточного члена, как показали вычисления, дает погрешность не более 0.1%. Это обусловлено тем, что подынтегральные функции убывают с частотой быстрее чем ω^2 . Для увеличения точности вычитаем из подынтегрального значения (18) величину $F(\omega)$, а к результату добавляем значение (17). Это позволяет еще на два порядка повысить точность. Для интегрирования использован метод Симпсона на 32001 точках.

На рисунке приведены результаты расчетов поля на выходе из слоя при разных значениях плазменной частоты. С ее увеличением увеличивается разность между скоростями движения энергии спектральных компонент: скорость высокочастотных слабо, а низкочастотных сильно уменьшается по сравнению со скоростью света c . Образуется предвестник, движущийся почти со скоростью света, импульс расширяется за счет растягивания основной части, отставания ее от предвестника и образования медленного хвоста. Особенно сильны изменения формы при переходе плазменной частоты ω_p через значение несущей частоты ω_0 . В целом амплитуда импульса падает.

Даже при превышении величины плазменной частоты ω_p значения несущей частоты ω_0 всего на несколько процентов основная часть импульса может расширяться в несколько раз. Выражения в квадратных скобках в (18) при вычислениях обуславливают «гашение» значения интеграла при $t < \tau$ полностью (с точностью до погрешности вычислений), а при $t > 2\tau$ — частично. При этом образуется затухающий хвост импульса, связанный с дисперсией. В приведенных примерах хвост практически затухает при $t > 20\tau$. Если $\omega_p \geq \omega_0$, основная часть импульса движется в несколько раз медленнее, чем предвестник. Так, для импульса 6 (рис. 1, в) эта скорость примерно в 4 раза меньше c . Если

$\omega_p \ll \omega_0$, то скорость движения энергии $v_E(\omega_0)$ основной части ВП становится весьма малой по сравнению со скоростью света c , а время туннелирования экспоненциально большим относительно величины $k_0 |\epsilon|^{1/2} d / \omega_0 = \tau |\epsilon|^{1/2}$ [8, 27]. Определение скорости движения импульса как целого целесообразно выполнять путем вычисления средней взвешенной по спектральной плотности мощности скорости движения энергии [7], то есть в виде:

$$\bar{v} = \int_0^\infty v_E(\omega) |U(\omega)|^2 d\omega / \int_0^\infty |U(\omega)|^2 d\omega. \quad (19)$$

Скорость переноса энергии в плазме $v_E(\omega)$ приведена в [8]:

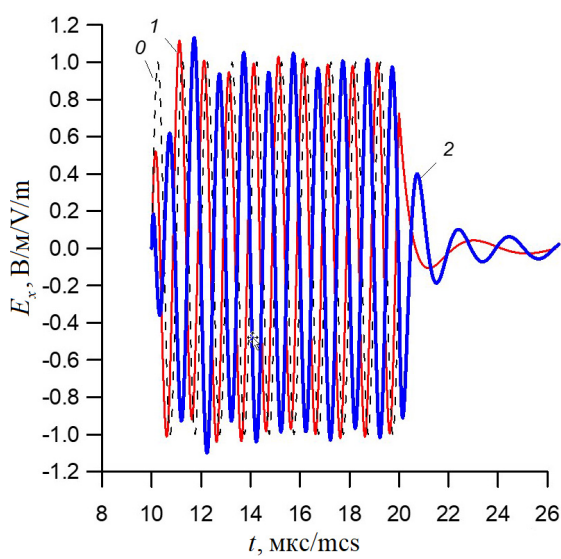
$$1v_E(\omega) = c \sqrt{2(\epsilon' + \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2})} / (2 - \epsilon' + \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}).$$

В слабо диссипативной плазме $\epsilon'' \ll |\epsilon'|$ для области туннелирования ($\epsilon' < 0$) имеем $v_E(\omega) \approx c\epsilon'' / (2|\epsilon'| + 2\epsilon'^2 + \epsilon''^2/2) \ll c$. Для $\omega \ll \omega_p$ получаем $v_E(\omega) \approx c\epsilon'' / (2\epsilon'^2)$. Для $\omega > \omega_p$ скорость переноса энергии $v_E(\omega) \approx c\sqrt{\epsilon'} < c$. В окрестности плазменной частоты ($\omega = \omega_p$) применять разложения нельзя, и непосредственно получаем $v_E(\omega) = c\sqrt{2\epsilon''} / (2 + \epsilon'') < c$. Интеграл в знаменателе (17) в силу теоремы Винера–Хинчина–Колмогорова имеет вид

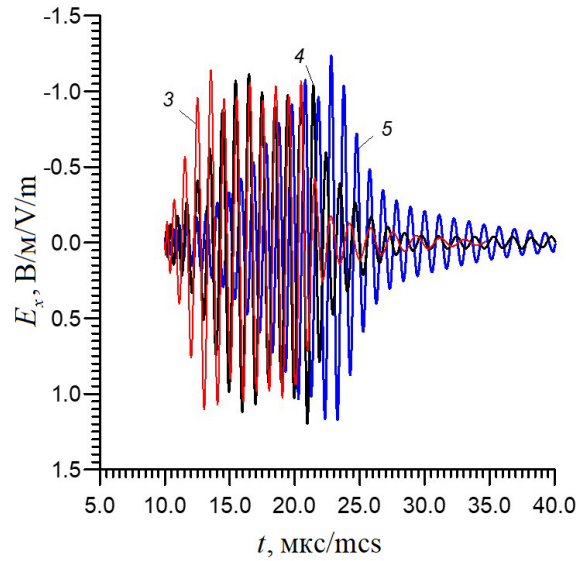
$$\begin{aligned} \int_0^\infty |U(\omega)|^2 d\omega &= 2\pi \int_0^\tau E_x^2(\omega_0 t) dt = \\ &= 2\pi \int_{-d}^0 E_x^2(\omega_0(t - z/c)) dz = \\ &= 2\pi\epsilon_0^{-1} \int_{-d}^0 W(z) dz, \end{aligned}$$

где $W(z) = \epsilon_0 E_x^2(z)$ — плотность энергии ВП в вакууме, то есть он (с точностью до множителя) определяет энергию ВП на единицу поперечной площади. Распространение такого ВП в безграничной среде определяет пропагаторная функция Грина (ФГ) [30]. В нашем случае вместо $|U(\omega)|^2$ в (19) следует использовать вес $|T(\omega)U(\omega)|^2$. При этом формулу (14) также можно записать с помощью такой ФГ:

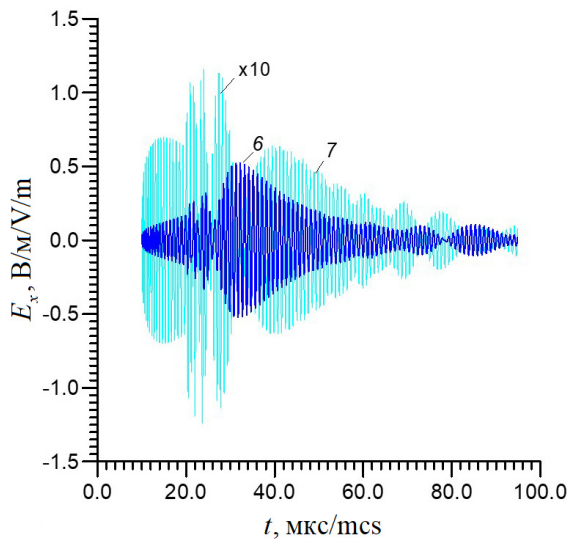
$$\begin{aligned} E_x(d, t) &= \int_{-\infty}^\infty g(d, t - t') E_x(0, t') dt', \\ g(d, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty T(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (20)$$



a/a



б/б



в/с

Рис. Электрическое поле E_x (В/м) при частотах $\omega_0 = 6.283$ и $\omega = 0.0001$ МГц в зависимости от времени t , мкс на выходе плазменного слоя $d=3000$ м при разных плазменных частотах, МГц: $\omega_p = 0$ (кривая 0), $\omega_p = 1$ (1), $\omega_p = 2$ (2) (а); $\omega_p = 3$ (3), $\omega_p = 4$ (4), $\omega_p = 5$ (5) (б); $\omega_p = 6$ (6), $\omega_p = 7$ (7) (в) (цвет онлайн)

Fig. Electric field E_x (V/m) with frequency $\omega_0 = 6.283$ and $\omega = 0.0001$ (MHz) as a function of time t (mcs) at the output of the plasma layer $d = 3000$ m at different plasma frequencies (MHz): $\omega_p = 0$ (curve 0), $\omega_p = 1$ (1), $\omega_p = 2$ (2) (a); $\omega_p = 3$ (3), $\omega_p = 4$ (4), $\omega_p = 5$ (5) (b); c: $\omega_p = 6$ (6), $\omega_p = 7$ (7) (c) (color online)

ФГ (20) совпадает с соответствующей ФГ из [30], если в формуле (10) положить $(\epsilon^{1/2} + \epsilon^{-1/2})/2 = 1$. Этот множитель как раз отвечает за возникновение отражений, связанных с наличием границ. Таким образом, можно определить ФГ (20) для многослойной или даже неоднородной структуры, если вычислить ее коэффициент прохождения $T(\omega)$, например, методом матриц передачи. Вычисление импульса при этом сводится к интегрированию по времени, что удобно для ограниченных во времени ВП. При рассмотрении импульса с длительностью $\tau > d/c$ следует учесть, что передаваемый спектр является мгновенным, т. е. зависящим от времени. Он определяется

в точке $z = 0$ в момент $t + d/c$. Приведенные интегралы также можно вычислить приближенно, например, методом стационарной фазы. Однако такие результаты не совсем точно и адекватно отражают процесс. Аналогично вычисляется и отраженный импульс, который также приобретает хвост. Эти результаты не приводим. Построить пространственный профиль ВП в любой момент времени можно добавлением в (18) множителя $\exp(-i\omega(z-d)/c)$ и вычислением зависимости от z . Такой ВП ограничен в пространстве, и его можно построить в виде прошедшего и отраженного импульсов. Природа хвостов заключается в сильном замедлении низкочастотных компонент спектра и в частич-



ных отражениях от границ, что сопровождается затухающими колебаниями в области слоя.

Формально туннелирование ничем не отличается от дифракции и прохождения волны через хорошо прозрачный слой. Отличие только в более сильном ослаблении прошедшей волны за счет отражений и в более сильном замедлении [8, 27]. Сильное отражение без туннелирования имеет место при большой ДП $\epsilon \gg 1$. Но в этом случае возможно и резонансное прохождение при $k_0 d \sqrt{\epsilon} = n\pi$. Полное прохождение в этом случае и при резонансном туннелировании возможно только без диссипации. Для двух и более слоев также возможно появление зон резонансного туннелирования (резонансного прохождения), а между ними возникновение зон сильного резонансного отражения. В бесконечном 1D фотонном кристалле последним соответствует мнимая постоянная распространения, точно так, как при туннелировании в плазме с $\epsilon' < 0$. Для таких структур $T(\omega)$ определяется методом матриц передачи, и задача вычисления сигнала на выходе ничем не отличается от рассмотренной выше.

Рассмотренный подход применим к любым ВП, например, звуковым, электрическим сигналам в цепях и т. п. В длинном (узкополосном) ВП модуляция и информация содержится в средней части импульса. Идеальное детектирование сигнала – это взятие его модуля. Для получения огибающей следует сгладить положительные пульсации, т. е. пропустить сигнал через низкочастотный фильтр. Простейший такой цифровой фильтр можно построить методом скользящего среднего, который задерживает огибающую. Любой детектор задерживает мгновенную амплитуду. Кроме того, задерживается и сам ВП. Современные коммерческие пакеты прикладных программ легко позволяют моделировать прохождение ВП через различные структуры, например, фотонные кристаллы или заперделные волноводы. Естественно, они приводят к тем же результатам. Тем не менее, и для них есть современные публикации и по сверхсветовым движениям [35].

В работах [7, 8] высказано утверждение, что сигнал на выходе слоя из диспергирующей среды не может появиться раньше времени $t = \tau = d/c$. Там оно было доказано путем решения интегрального уравнения, а также на основе рассмотрения скорости движения энергии. В данной работе это утверждение доказано спектральным методом для произвольной

диссипативной ($\epsilon'' > 0$) диспергирующей среды, а также численно рассчитано туннелирование для слоя газообразной плазмы. При туннелировании ВП сильно ослабляется, а его основная часть задерживается по сравнению с условиями без туннелирования. В нашем случае достаточно узкого спектрального ВП распространению соответствует $\omega_0 > \omega_p$ с небольшой задержкой, а туннелирование при $\omega_0 < \omega_p$ сопровождается существенной задержкой (см. [27]). ВП с широким спектром, захватывающим ω_p , может исказиться катастрофически, особенно если имеет место селективное по частоте поглощение. Мы использовали общие спектральные свойства ДП $\epsilon(\omega)$ заключающиеся в том, что ее полюса лежат в верхней полуплоскости комплексной плоскости частоты ω . Можно использовать и другие законы дисперсии. В частности, для дисперсии Лоренца при большой силе осцилляторов также возможны отрицательные значения $\epsilon'(\omega)$ в узкой спектральной области аномальной отрицательной дисперсии. Соотношения (12), (13) есть формулы Френеля для слоя. Условия для полюсов $T(\omega)$ фактически выражают принцип причинности. Для неоднородного слоя вместо этих формул следует использовать интегральные уравнения [27], а для структуры из нескольких слоев – матрицы передачи. Наличие границ может приводить к весьма сильным изменениям формы ВП по сравнению с распространением в однородных средах. В случае неоднородных и нелинейных сред метод Фурье неприменим, и необходимо решать ИДУ. Отметим, что по туннелированию в плазме есть работа [16], где рассматривается время Вигнера, в том числе отрицательное.

Итак, хотя на протяжении почти ста лет в литературе идет дискуссия о временах и скоростях туннелирования (квантового, электромагнитного, звукового) и огромное количество работ посвящено сверхсветовым движениям, в работе показано, что сверхсветовые движения частей ВП невозможны. Только предвестник ВП в диспергирующей среде движется с близкой к c скоростью. Волновой фронт, максимум и другие части импульса движутся с досветовой скоростью. Обнаруженные в 1965 г. Н. Г. Басовым сверхсветовые «движения» максимума в активной среде оказались не движениями, а неоднородными усилениями уже существующей в этих областях волны [36]. В диспергирующей среде импульс с резким фронтом не может распространяться быстрее скорости света. В данной



работе это показано и для конечной структуры – слоя вещества. При этом мы не использовали явно скорость движения энергии (как в [7, 8]), а рассматривали сам сигнал. Скорость движения предвестника при туннелировании такая же, как и в средах без туннелирования. Это обусловлено тем, что он образуется весьма высокими частотами, для которых ДП уже не отрицательная и, более того, близка к единице.

Список литературы

1. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны. М. : Советское радио, 1971. 664 с.
2. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А. Электромагнетизм и электромагнитные волны. М. : Высшая школа, 1985. 504 с.
3. Страттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1948. 539 с.
4. Hauge E. H., Støvneng J. A. Tunneling times: A critical review // *Rev. Mod. Phys.* 1989. Vol. 61, № 4. P. 917–936. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.61.917>
5. Азбель М. Я. Время туннелирования и турбулентность // *УФН.* 1989. Т. 168, № 6. С. 613–623. <https://doi.org/10.3367/UfNr.0168.199806b.0613>
6. Шварцбург А. Б. Туннелирование электромагнитных волн – парадоксы и перспективы // *УФН.* 2007. Т. 177, № 1. С. 43–58. <https://doi.org/10.3367/UfNr.0177.200701b.0043>
7. Давидович М. В. О парадоксе Хартмана, туннелировании электромагнитных волн и сверхсветовых скоростях (отклик на статью Шварцбурга А. Б. «Туннелирование электромагнитных волн – парадоксы и перспективы») // *УФН.* 2009. Т. 179, № 4. С. 443–446. <https://doi.org/10.3367/UfNr.0179.200904o.0443>
8. Давидович М. В. О временах и скоростях нестационарного квантового и электромагнитного туннелирования // *ЖЭТФ.* 2020. Т. 157, № 1. С. 44–62. <https://doi.org/10.31857/S0044451020010056>
9. Enders A., Nimtz G. Evanescent-mode propagation and quantum tunneling // *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 48. P. 632–634. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.48.632>
10. Enders A., Nimtz G. Photonic-tunneling experiments // *Phys. Rev. B.* 1993. Vol. 47, № 15. P. 9605–9609. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.47.9605>
11. Nimtz G. Superluminal signal velocity // *Annalen der Physik (Leipzig).* 1998. Vol. 7. P. 618–624.
12. Nimtz G., Heitmann W. Superluminal Photonic Tunneling and Quantum Electronics // *Progress in Quantum Electronics.* 1997. Vol. 21, № 2. P. 81–108. [https://doi.org/10.1016/S0079-6727\(97\)84686-1](https://doi.org/10.1016/S0079-6727(97)84686-1)
13. Steinberg A. M., Kwiat P. G., Chiao R. Y. Measurement of the Single-Photon Tunneling Time // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71. P. 708–711. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.708>
14. Chiao R. Y. Superluminal (but causal) propagation of wavepackets in transparent media with inverted atomic populations // *Phys. Rev. A.* 1993. Vol. 48. P. R34–R37. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.48.R34>
15. Macke B., Ségard B. J. Material slow and fast light in a zero-dispersion configuration // *Opt. Soc. America B.* 2020. Vol. 37, iss. 7. P. 2080–2087. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.389480>
16. Gaponenko S. V., Novitsky D. V. Wigner time for electromagnetic radiation in plasma // *Phys. Rev. A.* 2022. Vol. 106. Art. 023502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.106.023502>
17. Бухман Н. С., Бухман С. В. Об отрицательном времени задержки узкополосного сигнала при прохождении через резонансный фильтр поглощения // *Известия вузов. Радиофизика.* 2004. Т. 47, № 1. С. 75–84.
18. Давидович М. В. Прохождение сигналов через фильтр с поглощением и отрицательное время задержки // *ЖТФ.* 2012. Т. 82, вып. 3. С. 15–22.
19. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. М. : Наука, 1987. 486 с.
20. Рытов С. М. Некоторые теоремы о групповой скорости электромагнитных волн // *ЖЭТФ.* 1947. Т. 17. С. 930–936.
21. Ehrenfest P. Mißt der Aberrationwinkel im Fall einer Dispersion des Äthers die Wellengeschwindigkeit? // *Annalen der Physik (Leipzig).* 1910. Bd. 33, H. 16. S. 1571–1576.
22. Эренфест П., Исаков Л. Д. О так называемой «групповой скорости» // П. Эренфест. Относительность. Кванты. Статистика. М. : Наука, 1972. С. 22–32.
23. MacColl L. A. Note on the Transmission and Reflection of Wave Packets by Potential Barriers // *Phys. Rev.* 1932. Vol. 40, № 4. P. 621–626. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.40.621>
24. Wigner E. P. Lower limit for the energy derivative of the scattering phase shift // *Phys. Rev.* 1955. Vol. 98, № 1. P. 145–147. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.98.145>
25. Smith F. T. Lifetime matrix in collision theory // *Phys. Rev.* 1960. Vol. 118, № 1. P. 349–356. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.118.349>
26. Hartman T. E. Tunneling of a wave packet // *J. Appl. Phys.* 1962. Vol. 33, № 12. P. 3427–3433. <https://doi.org/10.1063/1.1702424>
27. Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М. : Наука, 1983. 287 с.
28. Давидович М. В. Нелинейное туннелирование электромагнитной волны через слой плазмы // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Физика.* 2021. Т. 21, вып. 2. С. 116–132. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-2-116-132>
29. Давидович М. В., Нефедов И. С. О временах жизни квазистационарных уровней при туннелировании в резонансно-туннельной структуре // *ЖЭТФ* 2025 Т. 167, вып. 1. С. 5–26. <https://doi.org/10.31857/S0044451025010018>
30. Вайнштейн Л. А. Распространение импульсов // *УФН.* 1976. Т. 118, № 2. С. 339–367. <https://doi.org/10.3367/UfNr.0118.197602h.0339>
31. Давидович М. В. Гиперболические метаматериалы: получение, свойства, применения, перспективы // *УФН.* 2019. Т. 189, № 12. С. 1250–1284. <https://doi.org/10.3367/UfNr.2019.08.038643>



32. Давидович М. В. О плотности электромагнитной энергии и ее скорости в среде с аномальной положительной дисперсией // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, вып. 22. С. 53–63.
33. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : в 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. М. : Физматлит, 2005. 656 с.
34. Девят Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М. : Наука, 1973. 228 с.
35. Ouchani N., El Moussaouy A., Aynaou H., El Hassouani Y., El Boudouti E. H., Djafari-Rouhani B. Superluminal and negative delay times in isotropic-anisotropic one-dimensional photonic crystal // J. Appl. Phys. 2017. Vol. 122. Art. 183106. <https://doi.org/10.1063/1.4999095>
36. Басов Н. Г., Амбарцумян Р. В., Зуев В. С., Крюков П. Г., Летохов В. С. Нелинейное усиление световых импульсов // ЖЭТФ. 1966. Т. 50, № 1. С. 23–34.
1. Goldstein L. D., Zernov N. V. *Electromagnitnye Polya i Volny* [Electromagnetic fields and waves]. Moscow, Sovetskoe radio, 1971. 664 p. (in Russian).
2. Akhiezer A. I., Akhiezer I. A. *Electromagnetizm i Electromagnitnye Volny* [Electromagnetism and Electromagnetic Waves]. Moscow, Vysshaya Skola, 1985. 504 p. (in Russian).
3. Stratton J. A. *Electromagnetic Theory*. New York, London, McGraw-Hill Inc., 1941.
4. Hauge E. H., Støvneng J. A. Tunneling times: A critical review. *Rev. Mod. Phys.*, 1989, vol. 61, no. 4, pp. 917–936 (1989). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.61.917>
5. Azbel M. Ya. Time tunneling and turbulence. *Phys. Usp.*, 1989, vol. 41, no. 6, pp. 543–552. <http://doi.org/10.1070/PU1998v041n06ABEH000402>
6. Shvartsburg A. B. Tunneling of electromagnetic waves: paradoxes and prospects. *Phys. Usp.*, 2007, vol. 50, no. 1, pp. 37–51. <https://doi.org/10.1070/PU2007v050n01ABEH006148>
7. Davidovich M. V. On the Hartman paradox, electromagnetic wave tunneling and supraluminal velocities (comment on “Tunneling of electromagnetic waves: paradoxes and prospects” by A B Shvartsburg). *Phys. Usp.*, 2009, vol. 52, no. 4, pp. 415–418. <https://doi.org/10.3367/UFNe.0179.200904o.0443>
8. Davidovich M. V. On times and speed of time-dependent quantum and electromagnetic tunneling. *JETP*, 2020, vol. 130, iss. 1, pp. 35–51. <https://doi.org/10.1134/S1063776119120161>
9. Enders A., Nimtz G. Evanescent-mode propagation and quantum tunneling. *Phys. Rev. E*, 1993, vol. 48, pp. 632–634 (1993). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.48.632>
10. Enders A., Nimtz G. Photonic-tunneling experiments. *Phys. Rev. B*, 1993, vol. 47, no. 1, pp. 9605–9609. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.47.9605>
11. Nimtz G. Superluminal signal velocity. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 1998, vol. 7, pp. 618–624.
12. Nimtz G., Heitmann W. Superluminal photonic tunneling and quantum electronics. *Progress in Quantum Electronics*, 1997, vol. 21, no. 2, pp. 81–108. [https://doi.org/10.1016/S0079-6727\(97\)84686-1](https://doi.org/10.1016/S0079-6727(97)84686-1)
13. Steinberg A. M., Kwiat P. G., Chiao R. Y. Measurement of the Single-Photon Tunneling Time. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, vol. 71, pp. 708–711. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.708>
14. Chiao R. Y. Superluminal (but causal) propagation of wavepackets in transparent media with inverted atomic populations. *Phys. Rev. A*, 1993, vol. 48, pp. R34–R37. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.48.R34>
15. Macke B., Ségard B. J. Material slow and fast light in a zero-dispersion configuration. *Opt. Soc. America B*, 2020, vol. 37, no. 7, pp. 2080–2087. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.389480>
16. Gaponenko S. V., Novitsky D. V. Wigner time for electromagnetic radiation in plasma. *Phys. Rev. A*, 2022, vol. 106, art. 023502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.106.023502>
17. Bukhman N. S., Bukhman S. V. On the negative delay time of a narrow-band signal as it passes through the resonant filter of absorption. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2004, vol. 47, pp. 68–76. <https://doi.org/10.1023/B:RAQE.0000031672.70934.3a>
18. Davidovich M. V. Propagation of signals through a dissipative filter and the negative time delay. *Technical Physics*, 2012, vol. 57, pp. 328–335. <https://doi.org/10.1134/S1063784212030048>
19. Ginzburg V. L. *Teoreticheskaya Fizika i Astrofizika. Dopolnitel'nye Glavy* [Theoretical Physics and Astrophysics. Additional Chapters]. Moscow, Nauka, 1987. 486 p. (in Russian).
20. Rytov S. M. Some theorems on group velocity electromagnetic waves. *J. Exp. Theor. Phys.*, 1947, vol. 17, pp. 930–936.
21. Ehrenfest P. Mißt der Aberrationawinkel im Fall einer Dispersion des Äthers die Wellengeschwindigkeit? *Annalen der Physik (Leipzig)*, 1910, Bd. 33, H. 16, S. 1571–1576.
22. Ehrenfest P., Isakov L. D. About the so-called “group velocity”. In: Ehrenfest P. *Relativity. Quanta. Statistics*. Moscow, Nauka, 1972, pp. 22–32 (in Russian).
23. MacColl L. A. Note on the transmission and reflection of wave packets by potential Barriers. *Phys. Rev.*, 1932, vol. 40, pp. 621–626. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.40.621>
24. Wigner E. P. Lower limit for the energy derivative of the scattering phase shift, *Phys. Rev.*, 1995, vol. 98, pp. 145–147. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.98.145>
25. Smith F. T. Lifetime matrix in collision theory. *Phys. Rev.*, 1960, vol. 118, pp. 349–356. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.118.34>
26. Hartman T. E. Tunneling of a wave packet. *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33, pp. 3427–3433. <https://doi.org/10.1063/1.1702424>
27. Vainshtein L. A., Wakman D. E. *Frequency separation in the theory of vibrations and waves*. Moscow, Nauka, 1983. 287 p. (in Russian).



28. Davidovich M. V. Nonlinear tunneling of an electromagnetic wave through a plasma layer. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 116–132. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-2-116-132>
29. Davidovich M. V., Nefedov I. S. On the lifetimes of quasi-stationary levels during tunneling in a resonant tunnel structure. *JETP*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 5–26. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-2-116-132>
30. Vainshtein L. A. Propagation of pulses. *Sov. Phys. Usp.*, 1976, vol. 19, pp. 189–205. <https://doi.org/10.1070/PU1976v019n02ABEH005138>
31. Davidovich M. V. Hyperbolic metamaterials: Production, properties, applications, and prospects. *Phys. Usp.*, 2019, vol. 62, pp. 1173–1207. <https://doi.org/10.3367/UFNe.2019.08.038643>
32. Davidovich M. V. Electromagnetic energy density and velocity in a medium with anomalous positive dispersion. *Technical Physics Letter*, 2006, vol. 32, iss. 22, pp. 982–986. <https://doi.org/10.1134/S106378500611023X>
33. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Electrodynamics of Continuous Media* (Course of Theoretical Physics, vol. 8). New York, Pergamon Press, 1984. 474 p.
34. Dwight G. B. *Tables of integrals and other mathematical data*. New York, Macmillan, 1961. 250 p.
35. Ouchani N., El Moussaouy A., Aynaou H., El Hasouani Y., El Boudouti E. H., Djafari-Rouhani B. Superluminal and negative delay times in isotropic-anisotropic one-dimensional photonic crystal. *J. Appl. Phys.*, 2017, vol. 122, art. 183106. <https://doi.org/10.1063/1.4999095>
36. Basov N. G., Ambartsumyan R. V., Zuev V. S., Kryukov P. G., Letokhov V. S. Nonlinear amplification of light pulses. *Sov. Phys. JETP*, 1966, vol. 23, no. 1, pp. 16–22.

Поступила в редакцию 20.05.2024; одобрена после рецензирования 03.06.2024; принята к публикации 20.06.2024; опубликована 30.06.2025

The article was submitted 20.05.2024; approved after reviewing 03.06.2024; accepted for publication 20.06.2024; published 30.06.2025