

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 167–177
Izvestiya of Saratov University. Physics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 167–177
<https://fizika.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-2-167-177>, EDN: TGFWM

Научная статья
УДК 537.9:538.9:538.915

Квантовые шайбы в сильном магнитном поле – носители электронных состояний с управляемыми квантовыми числами

А. М. Мандель¹✉, В. Б. Ошурко^{1,2}, Е. Е. Карпова¹, К. Г. Соломахо¹

¹Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Россия, 127994, г. Москва, Вадковский пер., д. 3А

²Научный центр волновых исследований Института общей физики им. А. М. Прохорова РАН, Россия, 119991, г. Москва, ул. Вавилова, д. 38

Мандель Аркадий Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, arkadimandel@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0008-7516-2596>, AuthorID: 154243

Ошурко Вадим Борисович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики, ведущий научный сотрудник, vbo08@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8566-6407>, AuthorID: 53808

Карпова Елена Евгеньевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, ekarpova1@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0007-3454-9033>, AuthorID: 637662

Соломахо Кирилл Георгиевич, старший преподаватель кафедры физики, kirgeosol@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7515-8564>, AuthorID: 881263

Аннотация. Рассмотрены электронные состояния плоских тонких квантовых колец прямоугольного сечения («квантовых шайб»), толщина которых h , внутренний радиус R_{in} и внешний R_{ex} связаны соотношениями $h \ll R_{\text{ex}} - R_{\text{in}} \ll R_{\text{in}}$. Установлено, что такого типа узкозонные гетероструктуры в широкозонной матрице могут стать базовыми элементами для спинtronных систем. Их спектр во внешнем магнитном поле можно свести к единственному устойчивому уровню, все квантовые числа которого (спиновое в том числе) контролируются внешним полем. Это доказано как численными расчетами, так и приближенными аналитическими оценками, проясняющими механизм формирования такого состояния. Из-за сохранения незатухающего квантового тока и связанного с ним магнитного момента состояния эти более устойчивы, чем в идеальных квантовых точках с похожим спектром. Рассмотрены варианты изменения спинового состояния локализованного на шайбе электрона на продольным магнитным полем.

Ключевые слова: квантовая шайба, внешнее магнитное поле, состояния с управляемыми квантовыми числами, элементы спинtronных систем

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00559, https://rsfc.ru/prjcard_int?23-29-00559).

Для цитирования: Мандель А. М., Ошурко В. Б., Карпова Е. Е., Соломахо К. Г. Квантовые шайбы в сильном магнитном поле – носители электронных состояний с управляемыми квантовыми числами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 167–177. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-2-167-177>, EDN: TGFWM

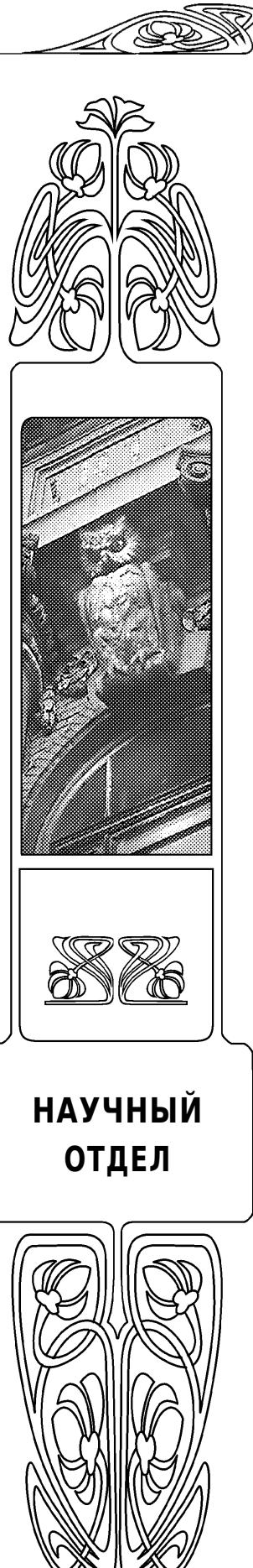
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Quantum shims in a strong magnetic field – carriers of electronic states with controllable quantum numbers

A. M. Mandel¹✉, V. B. Oshurko^{1,2}, E. E. Karpova¹, K. G. Solomakho¹

© Мандель А. М., Ошурко В. Б., Карпова Е. Е., Соломахо К. Г., 2025



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ



¹Moscow State University of Technology "STANKIN", 3A Vakrovsky Side St., Moscow 127994, Russia

²Scientific Center for Wave Research, A. M. Prokhorov Institute of General Physics, Russian Academy of Sciences, 38 Vavilova St., Moscow 119991, Russia

Arkady M. Mandel, arkadimandel@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0008-7516-2596>, AuthorID: 154243

Vadim B. Oshurko, vbo08@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8566-6407>, AuthorID: 53808

Elena E. Karpova, ekarpova1@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0007-3454-9033>, AuthorID: 637662

Kirill G. Solomakho, kirgeosol@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7515-8564>, AuthorID: 881263

Abstract. *Background and Objectives:* One of the most promising properties of thin quantum rings – their selective properties for localized electrons in a magnetic field – is practically not discussed in the modern literature. Meanwhile, the spectrum of such rings can be reduced to a single stable level, all quantum numbers of which (including spin number) are controlled by the magnetic field. The electronic states of flat thin quantum rings of rectangular cross section, whose thickness h , inner radius R_{in} and outer radius R_{ex} are related by the relations $h \ll R_{ex} - R_{in} \ll R_{in}$, are considered; hereinafter we will call them "quantum shims". This paper is devoted to select the parameters of a quantum shim so that it holds an electron only in a particular spin state. *Materials and Methods:* The equations for the radial function, which are of primary physical interest, are obtained by analytically solving the Schrödinger equation for this structure. *Results:* It has turned out that narrow-gap quantum shims in a wide-gap matrix have the most pronounced and fully controllable selection properties. To keep an electron in such a shim at a single stable level, an external homogeneous magnetic field of strictly defined strength is required. Each set of quantum numbers – radial, orbital and spin – corresponds to a unique value of field strength stabilizing this level. *Conclusion:* It has been found that this type of narrow-gap heterostructures in a wide-gap matrix can become basic elements for spintronic systems. Their spectrum in an external magnetic field can be reduced to a single stable level, all quantum numbers of which (spin including) are controlled by the external field. We have considered variants of changing the spin state of an electron localized on a shim by a longitudinal magnetic field.

Keywords: quantum ring, external magnetic field, states with controlled quantum numbers, elements of spintronic systems

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-29-00559, https://rscf.ru/prjcard_int?23-29-00559).

For citation: Mandel A. M., Oshurko V. B., Karpova E. E., Solomakho K. G. Quantum shims in a strong magnetic field – carriers of electronic states with controllable quantum numbers. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 167–177 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-2-167-177>, EDN: TGFWM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение.

Постановка задачи и планируемые результаты

Литература, посвященная гетероструктурам типа квантовых колец и различным способам их применения, весьма обширна (см., например, [1–16]). Незатухающий квантовый ток (persistent currents), управляемый эффект Ааронова-Бома, дробное квантование магнитного потока, весьма специфическое спин-орбитальное взаимодействие и т. д. – все это представляет интерес для фундаментальной физики и важно для технических приложений.

Однако одно из самых перспективных свойств именно тонких квантовых колец – их селективные свойства для локализованных электронов в магнитном поле – в литературе, насколько нам известно, вообще не обсуждается. Между тем, спектр таких колец (при определенных геометрических и зонных параметрах) можно свести к единственному устойчивому уровню, все квантовые числа которого (в том числе спиновое) контролируются магнитным полем. Отметим, что термин «сильное магнитное поле» в названии статьи подразумевает, что воздействие поля на волновые функции описывается вне рамок теории возмущений. Ранее

подобный спектр считался присущим только идеальным квантовым точкам [17–19]. Далее мы будем для краткости называть «квантовыми шайбами» кольца, толщина которых h в нормальном к их плоскости направлении, внутренний R_{in} и внешний R_{ex} радиусы связаны соотношением

$$h \ll R_{ex} - R_{in} \ll R_{in}. \quad (1)$$

Увидеть селективные свойства квантовой шайбы можно только при адекватном выборе удерживающего потенциала, не предусматривающего конфайнмент для связанного электрона. В известной нам литературе это делается крайне редко. Обычно удерживающий радиальный потенциал кольца вообще не выписывают, постулируя, что кольцо локализует любое необходимое число электронов (см. обзоры [1, 2, 9, 10, 13, 14]). Реже ищут связанные состояния в потенциале с бесконечно растущей асимптотикой типа параболического (как в «чистом» магнитном поле в безграничной среде) или Тана – Инксона [3]. Маскируют селективные свойства также сильные спин-орбитальные взаимодействия, запутывающие спиновые состояния локализованных электронов и значительно усложняющие вид волновых функций и незатухающего тока



в магнитном поле [5–8, 11–12, 15–16]. Редчайшее известное нам исключение – работа [4], о чём подробнее пойдет речь ниже.

В результате ценность плоских кольцевых гетероструктур именно для решения задач спин-tronики остается совершенно нераскрытым. Основная цель предлагаемой работы – сделать некоторый шаг в этом, насколько нам известно, сравнительно новом направлении. Мы ожидаем, что параметры квантовой шайбы можно подобрать так, что она будет удерживать электрон только в определенном спиновом состоянии. Состояние с противоположным спином будет вытесняться в зону проводимости матрицы. Это возможно для состояния с небольшой энергией связи при достаточном размере зеемановской щели. Существуют различные варианты менять спин локализованного на шайбе электрона, управляя внешним магнитным полем.

1. Квантовая шайба в магнитном поле. Система уравнений Шредингера и граничные условия

В самом общем виде одноэлектронные состояния в квантовых кольцах описывают уравнением Паули с гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V + \hat{H}_B + \alpha \hat{H}_R + \beta \hat{H}_D,$$

где \hat{H}_0 – кинетическая часть, V – удерживающий потенциал электрона в кольце, \hat{H}_B – член, описывающий взаимодействие электрона с магнитным полем, \hat{H}_R и \hat{H}_D – гамильтонианы спин-орбитального взаимодействия типа Рашибы и Дрессельхуса соответственно. Чтобы продемонстрировать основную идею работы максимально просто, оставим в гамильтониане только три первых слагаемых. Другими словами, на первом этапе рассматривать спин-орбитальные взаимодействия мы не будем. Из соображений симметрии ясно, что принципиально изменить ситуацию они не могут, но основную цель статьи – продемонстрировать селективные свойства квантовых шайб в магнитном поле – спин-орбитальные взаимодействия значительно осложняют. Отметим только, что взаимодействие типа Дрессельхуса проявляется обычно в электрическом или световом поле, что в нашем случае не очень актуально. Взаимодействие типа Рашибы связано с нарушением зеркальной симметрии в нормальном к плоскости шайбы направлении [3, 7].

Тем не менее, в целом ряде полупроводниковых гетероструктур (InAs/AlSb , Si/SiGe и т. д.) и им можно пренебречь ввиду относительной малости. Кроме того, мы рассматриваем квантовую шайбу не на свободной поверхности матрицы, а в симметричном по оси z окружении.

Центральный момент здесь – адекватный выбор удерживающего потенциала шайбы, допускающего выход электрона в зону проводимости матрицы. Будем считать, что узкая квантовая шайба при $r < R_{\text{in}}$ (в материале матрицы) является широкозонным полупроводником, внутри кольца при $R_{\text{in}} < r < R_{\text{ex}}$ – узкозонным материалом, а при $r > R_{\text{ex}}$ – вакуумом. Другими словами, квантовая шайба является тонким и узким «кольцевым внедрением» в цилиндрическую квантовую нить (матрицу) широкозонного полупроводника круглого сечения радиуса R_{ex} . Поэтому удерживающий потенциал можно представить в виде

$$V = \begin{cases} 0, & r < R_{\text{in}}, \\ -\Delta E_c, & R_{\text{in}} < r < R_{\text{ex}}, -h/2 < z < h/2; \\ U, & r > R_{\text{ex}}, \end{cases} \quad (2)$$

где $-\Delta E_c$ – скачок дна зоны проводимости на гетерогранице¹, U – внешняя работа выхода электрона со дна зоны проводимости материала шайбы (электронное сродство). Энергия отсчитывается от дна зоны проводимости матрицы (материала барьера), как обычно в подобных случаях. Квантовая шайба является тонкой, ее геометрические параметры удовлетворяют условию (1). Система таких квантовых шайб показана на рис. 1.

Уравнение Шредингера для пространственной части волновой функции электронных компонентов кийновских 8-компонентных «тетраспиноров» $\Psi_{nl0}(r, \varphi, z)$ в однородном продольном магнитном поле имеет вид [18, 19]:

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{ex}}^*} \frac{\partial^2 \Psi_{nl0}}{\partial z^2} - \frac{\hbar^2}{2m_{\text{ex}}^* r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi_{nl0}}{\partial r} \right) - \\ & - \frac{\hbar^2}{2m_{\text{ex}}^* r^2} \frac{\partial^2 \Psi_{nl0}}{\partial \varphi^2} - i \frac{e\hbar B}{2m_{\text{ex}}^*} \frac{\partial \Psi_{nl0}}{\partial \varphi} + \frac{e^2 B^2}{8m_{\text{ex}}^*} r^2 \Psi_{nl0} = \\ & = \left(\epsilon_{nl0} - E_c(B) \pm \frac{g_{\text{ex}}}{2} \mu_B B \right) \Psi_{nl0}; \quad r < R_{\text{in}}. \end{aligned} \quad (3a)$$

¹ Ввиду малых геометрических размеров квантовой шайбы ее зонная структура «не успевает» сформироваться до характерного для объемного материала вида, так что ΔE_c может не совпадать с разностью уровней дна зон проводимости материалов матрицы и шайбы. Для размерного квантования такая ситуация вполне типична.

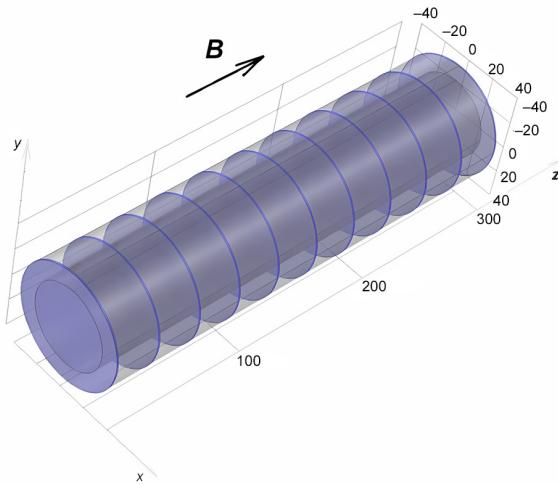


Рис. 1. Система параллельных узкозонных квантовых шайб, впрессованных в матрицу широкозонного полупроводника в магнитном поле (цвет онлайн)

Fig. 1. System of parallel narrow-gap quantum shims pressed into a matrix of a wide-gap semiconductor in a magnetic field (color online)

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2}{2m_{\text{ex}}^*} \frac{\partial^2 \Psi_{nl0}}{\partial z^2} - \frac{\hbar^2}{2m_{\text{in}}^* r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi_{nl0}}{\partial r} \right) - \\ & - \frac{\hbar^2}{2m_{\text{in}}^* r^2} \frac{\partial^2 \Psi_{nl0}}{\partial \varphi^2} - i \frac{e\hbar B}{2m_{\text{in}}^*} \frac{\partial \Psi_{nl0}}{\partial \varphi} + \frac{e^2 B^2}{8m_{\text{in}}^*} r^2 \Psi_{nl0} = \\ & = \left(\Delta E_c + \epsilon_{nl0} - E_c(B) \pm \frac{g_{\text{in}}}{2} \mu_B B \right) \Psi_{nl0}, \end{aligned} \quad (3b)$$

$$R_{\text{in}} < r < R_{\text{ex}}, \quad -h/2 < z < h/2;$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_{nl0}}{\partial z^2} - \frac{\hbar^2}{2mr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi_{nl0}}{\partial r} \right) - \\ & - \frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial^2 \Psi_{nl0}}{\partial \varphi^2} - i \frac{e\hbar B}{2m} \frac{\partial \Psi_{nl0}}{\partial \varphi} + \frac{e^2 B^2}{8m} r^2 \Psi_{nl0} = \\ & = (-U - E_c(B) + \epsilon_{nl0} \pm \mu_B B) \Psi_{nl0}, \quad r > R_{\text{ex}}. \end{aligned} \quad (3c)$$

Здесь m – масса свободного электрона, m_{ex}^* – эффективная масса электрона в окрестности дна зоны проводимости материала матрицы, а $m_{\text{in}}^*(R_{\text{in}}, R_{\text{ex}})$ – эффективная масса электрона в материале шайбы для радиального и углового движения. Последняя существенно зависит от геометрических размеров шайбы [18, 20]. Можно считать, что продольная масса в шайбе, связанная с движением по оси z , практически не перенормируется ввиду малости h и совпадает с m_{ex}^* . К сожалению, в отношении поперечной

массы этого уже сказать нельзя, что существенно усложняет задачу. Именно по этой причине в (3b) входят две разные массы, g_{ex} и $g_{\text{in}}(R_{\text{in}}, R_{\text{ex}})$ – соответственно факторы Ланда в материале барьера и в материале шайбы, причем последний еще более существенно зависит от параметров шайбы. Естественно, в вакууме $g = 2$, что учтено в (3c). Переменные r , φ и z – координаты цилиндрической системы, $\epsilon_{nl0} < 0$ – энергия связанных уровня в шайбе, n и l – квантовые числа радиального и углового движения соответственно, 0 – квантовое число, задающее минимальный энергетический уровень продольного движения². Ввиду малости h этот уровень будет «вытесняться» к верхнему краю ямы, так что состояние электрона в шайбе будет слабосвязанным [21]. В уравнениях (3) B – индукция магнитного поля, $\mu_B = e\hbar/2m$ – магнетон Бора. Содержащее его последнее слагаемое в правой части – энергия взаимодействия спина с магнитным полем; разные знаки соответствуют различной ориентации спина. Дырочные компоненты огибающих кейновских функций в данной постановке рассматривать бессмысленно, что далее будет видно. Отметим, что на фоне $U \approx 5$ эВ можно пренебречь всеми остальными слагаемыми в правой части (3c).

В энергетическую часть введено слагаемое $E_c(B)$, явно учитывающее тот факт, что уровень дна зоны проводимости, от которого отсчитывается энергия, тоже расщепляется (по Зееману) и сдвигается в магнитном поле. Для не очень сильного (неквантующего) магнитного поля, когда уровни Ланда сливаются в квазиклассическую подзону (именно с такими полями обычно имеют дело в лабораторных условиях), дно зоны проводимости матрицы эволюционирует в магнитном поле по закону [18, 20]

$$E_c(B) = \mu_B B \left(\frac{m}{m_{\text{ex}}^*} - \frac{g_{\text{ex}}}{2} \right),$$

где g_{ex} для определенности предполагается положительным (то есть на дне зоны проводимости матрицы – состояние со спином против поля). Обычно считается, что $E_c(B)$ медленно растет, т. е. магнитное поле увеличивает эффективную энергию связи и стабилизирует тем самым связанные состояния. Однако вполне возможна и обратная ситуация, учитывая разнообразие свойств кристаллов. Рубежными между этими

²По известной классификации Флюгге, это минимальный симметричный уровень. Следующий в яме уже «не умещается», т. к. в силу малости h уровни вертикально движения сильно разрежены.



противоположными тенденциями являются характеристики вакуумных электронов

$$m^* = m, g = 2, E_c(B) = 0 = \text{const},$$

дающие «неподвижное» по энергии основное состояние. Как показано в [22, 23], даже в этом случае магнитное поле играет роль катализатора в пороговых квантовополевых реакциях, т. е. дестабилизирует связанные состояния и ускоряет распады. Важно, что спин при этом играет решающую роль, так что игнорировать его, несмотря на явно нерелятивистский характер решаемых задач, категорически недопустимо.

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$\Psi_{nl0}(r, \varphi, z) = \Psi_{nl}(r) \cos(k_0 z) \exp(-il\varphi), \quad (4)$$

поскольку структура продольного и углового компонентов очевидны. Орбитальное квантовое число l целое и задает орбитальный момент локализованного на шайбе электрона. Точное значение k_0 определяется из известного трансцендентного уравнения [21]

$$k_0 h \cdot \operatorname{tg}(k_0 h) = (2m_{\text{ex}}^* \Delta E_c h^2 / \hbar^2 - (k_0 h)^2)^{1/2}.$$

Для данного случая слабосвязанного состояния хорошо работает аналитическое приближение

$$k_0 \approx 2m_{\text{ex}}^* \Delta E_c h / \hbar^2. \quad (5)$$

После подстановки решения (4) в (3) получаем уравнения для радиальной функции, представляющие основной физический интерес

$$-\frac{\hbar^2}{2m_{\text{ex}}^* r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Psi_{nl}(r)}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 q_{\text{ex}}^2}{2m_{\text{ex}}^* r^2} \Psi_{nl}(r) = \varepsilon_{nl} \Psi_{nl}(r), \quad r < R_{\text{in}}, \quad (6a)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_{\text{in}}^* r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Psi_{nl}(r)}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 q_{\text{in}}^2}{2m_{\text{in}}^* r^2} \Psi_{nl}(r) = (\widetilde{\Delta E}_c + \varepsilon_{nl}) \Psi_{nl}(r), \quad R_{\text{in}} < r < R_{\text{ex}}, \quad (6b)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2mr} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Psi_{nl}(r)}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 q^2}{2mr^2} \Psi_{nl}(r) = -U \Psi_{nl}(r), \quad r > R_{\text{ex}}. \quad (6c)$$

В этих выражениях введены обозначения:

$$q_{\text{in}}^2 = \left(l - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \pm \frac{g_{\text{in}}}{2} \frac{m_{\text{in}}^*}{m} \frac{\Phi}{\Phi_0} - \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{g_{\text{ex}}}{2} \frac{m_{\text{ex}}^*}{m} \frac{\Phi}{\Phi_0} > 0, \quad (7a)$$

$$q_{\text{ex}}^2 = \left(l - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 - \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{g_{\text{ex}}}{2} \frac{m_{\text{ex}}^*}{m} \frac{\Phi}{\Phi_0} (1 \pm 1) > 0, \quad (7b)$$

$$q^2 = \left(l - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \pm \frac{\Phi}{\Phi_0} > 0, \quad (7c)$$

где Φ – магнитный поток через кольцо радиуса r , а Φ_0 – его квант³:

$$\Phi = B \cdot \pi r^2, \quad \Phi_0 = 2\pi\hbar/e.$$

Общепринятое в теории квантовых колец приближение – считать этот поток примерно постоянной величиной, связанной с радиусом максимальной электронной плотности в плоскости кольца [1–16]

$$\Phi = B \cdot \pi R_0^2 \approx \text{const}. \quad (8)$$

Это обусловлено, во-первых, тем, что поле влияет на электрон сильнее всего там, где электрон бывает чаще, т. е. внутри достаточно узкой шайбы $R_{\text{in}} < R_0 < R_{\text{ex}}$. Во-вторых, на это приближение работает закон сохранения магнитного потока, связанный с незатухающим квантовым током в кольце. Кроме того, ясно, что «вакуумный хвост» убывает очень быстро из-за больших U и m , так что рост квадратичного слагаемого $\sim B^2 r^2$ в (3) при больших r подавлен экспоненциальным убыванием квадрата волновой функции и на физическую картину практически не влияет. В грубом приближении от него вообще можно избавиться, взяв предел $U \rightarrow \infty$ и положив $\Psi_{nl}(R_{\text{ex}}) = 0$ ⁴.

Глубина «эффективной» потенциальной ямы $\widetilde{\Delta E}_c$ для радиальной волновой функции составляет

$$\widetilde{\Delta E}_c \approx 2m_{\text{ex}}^* \Delta E_c^2 h^2 / \hbar^2 \ll \Delta E_c, \quad (9)$$

т. е. «радиальная» потенциальная яма относительно матрицы является мелкой. Большую часть глубины ямы на гетерогранице ΔE_c «заполняет» кинетическая энергия вертикального движения ввиду малости h (1). Это ощутимо влияет на характер решения уравнений (6) и на физику задачи.

³Напомним, что ток здесь создает не куперовская пара с зарядом $-2e$, как в сверхпроводнике, а одноэлектронное состояние в квантовой шайбе.

⁴Когда во введении речь шла об отсутствии конфайнмента для электрона в шайбе, имелась в виду возможность его перехода в зону проводимости матрицы. Переход его в вакуум, разумеется, крайне маловероятен в таких условиях.

Решение уравнения (6):

$$\Psi_{nl}(r) = \begin{cases} AI_{q_{\text{ex}}}(\sqrt{-2m_{\text{ex}}^*\epsilon_{nl}}r/\hbar), & r < R_{\text{in}}, \\ B \left| J_{q_{\text{in}}} \left(\sqrt{2m_{\text{in}}^*(\Delta E_c + \epsilon_{nl})}r/\hbar \right) \right|, & R_{\text{in}} < r < R_{\text{ex}}, \\ DK_q(\sqrt{2mU}r/\hbar), & R_{\text{ex}} < r, \end{cases} \quad (10)$$

где I , J , K – цилиндрические функции соответственно Инфельда, Бесселя и Макдональда, A , B и D – нормировочные постоянные (их значения в дальнейшем не понадобятся). Узость кольца (1) предполагает, что внутри кольца может «поместиться» только один экстремум радиальной волновой функции. В решение внутри кольца не включено слагаемое с функцией Неймана из-за ее расходимости в нуле, актуальной в связи с (9) (отметим, что энергия связи для движения в плоскости шайбы $\epsilon_{nl} < 0$). Практически это означает, что максимум электронной плотности R_0 может располагаться только в районе экстремумов функций Бесселя, и возникает какой-то отбор по возможным радиусам шайб.

Кроме того, решение (10) должно удовлетворять трем дополнительным условиям: двум условиям непрерывности логарифмической производной на внутреннем и внешнем радиусах шайбы:

$$\begin{aligned} \sqrt{-m_{\text{ex}}^*\epsilon_{nl}} |J_{q_{\text{in}}}(R_{\text{in}})| \frac{dI_{q_{\text{ex}}}(R_{\text{in}})}{dr} = \\ = \sqrt{m_{\text{in}}^*(\Delta E_c + \epsilon_{nl})} I_{q_{\text{ex}}}(R_{\text{in}}) \frac{d|J_{q_{\text{in}}}(R_{\text{in}})|}{dr}, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{mU} |J_{q_{\text{in}}}(R_{\text{ex}})| \frac{dK_q(R_{\text{ex}})}{dr} = \\ = \sqrt{m_{\text{in}}^*(\Delta E_c + \epsilon_{nl})} K_q(R_{\text{ex}}) \frac{d|J_{q_{\text{in}}}(R_{\text{ex}})|}{dr}, \end{aligned} \quad (11b)$$

а также условию того, что экстремум функции Бесселя лежит внутри шайбы:

$$d|J_{q_{\text{in}}}(R_{\text{ex}})|/dr = 0, \quad R_{\text{in}} < R_0 < R_{\text{ex}}. \quad (11c)$$

Кроме этих уравнений, есть еще два физических требования к волновой функции локализованного на шайбе электрона. Энергия электрона в кольцевой потенциальной яме должна быть ниже дна зоны проводимости матрицы, чтобы уровень лежал в ее запрещенной зоне, с одной

стороны, но не меньшей глубины (мелкой) ямы, с другой:

$$\widetilde{-\Delta E_c} + E_c(B) < \epsilon_{nl} + \frac{\hbar^2 q_{\text{in}}^2}{2m_{\text{in}}^* R_0^2} < E_c(B). \quad (12)$$

Это ограничивает величину всех q_{in}^2 сверху. Снизу все q ограничены требованием (7). Отсюда сразу видно, что случай $l = 0$ можно исключить. Это и физически понятно – не может s -состояние в 2D иметь максимум плотности на кольце. Данным признаком и еще рядом других (целочисленный орбитальный момент, плоские орбиты электронов и т. д.) рассматриваемая система напоминает квазиклассический атом Бора [19].

Таким образом, совокупность соотношений (7) и (10)–(12) формирует очень жесткие селекционные свойства квантовой шайбы для электронных состояний. Из-за этих условий не только геометрические и физические параметры шайб, но и возможные значения магнитного поля ограничиваются определенными диапазонами. В условиях такой чувствительности к параметрам задачи локализацию на шайбе дырочных уровней рассматривать вообще бессмысленно. Их эффективные массы и факторы Ланде значительно отличаются от электронных, да и глубина радиальной потенциальной ямы совершенно иная. Отметим, что в упоминавшейся во введении работе [4] авторы в качестве удерживающего потенциала кольца тоже использовали потенциал типа (2). В результате они получили систему уравнений типа (6), (11), но анализировать ее на разрешимость не стали⁵. Возможно, причиной была очевидная сложность полученной системы. Тем более целесообразно вначале разобраться с более простым случаем отсутствия спин-орбитального взаимодействия.

В заключение раздела рассмотрим конкретный численный пример с гетероструктурой InAs/AlSb. Ее параметры [24, 25]: $m_{\text{in}}^* = 0.023m$, $m_{\text{ex}}^* = 0.14m$, $g_{\text{in}} = -14.8$, $g_{\text{ex}} = 1.9$, $\Delta E_c = 2.2$ эВ. Глубина «эффективной» потенциальной ямы для радиальной волновой функции, согласно (9), $\Delta E_c \approx 0.72$ эВ при $h \approx 0.5$ нм (примерно период решетки). С неопределенными массами и g -факторами внутри шайбы поступим следующим образом. Поскольку рассчитать их теоретически при такой сложной форме внедрения довольно трудно⁶, примем (исключительно для простоты

⁵Перенормировка эффективных масс и g – факторов в материале кольца в [4] не учитывалась, но рассматривалось спин-орбитальное взаимодействие.

⁶Для сферически симметричной квантовой точки это сделано в [18].



иллюстрации основной идеи) средние от объемных значений компонентов гетероструктуры: $m_{in}^*(R_{in}, R_{ex}) \approx 0.07m$, $g_{in}(R_{in}, R_{ex}) \approx -8.3$. Возьмем, например (далее будет видно, почему) следующие геометрические параметры кольца: $R_{in} = 30$ нм, $R_{ex} = 40$ нм.

На рис. 2 показаны зависимости модуля энергии связи $-\epsilon_{nl}$ (в эВ) от числа квантов магнитного потока Φ/Φ_0 , задаваемые граничными условиями (11). Зависимости получены путем численного решения неявных уравнений (11) с помощью алгоритма Евклида в стандартном пакете CAS Maple 12. Устойчивым состоянию может быть только при выполнении всех трех условий, так что три одноцветные кривые должны пересекаться в одной точке. Семейство кривых рис. 2, а соответствует состоянию с орбитальным квантовым числом $l = 1$, рис. 2, б – с $l = 2$. Возможные при этом значения радиального квантового числа n (они соответствуют номеру экстремума функции Бесселя) уменьшаются последовательно слева направо от $n = 10$ до $n = 7$. Спиновые состояния выделены цветом: красные кривые соответствуют ориентации спина против внешнего поля, синие – соответственно по полю.

Из проведенного расчета можно сделать следующие предварительные выводы. Во-первых,

энергия связи для движения в плоскости шайбы (зеленая линия) практически не зависит ни от магнитного поля, ни от квантовых чисел уровня. Таким образом, индексы в ϵ_{nl} фактически теряют смысл. Во-вторых (и это, наверное, главное), каждое состояния с определенным набором квантовых чисел устойчиво только при определенном значении магнитного поля. Меняя его (причем дискретно), мы можем менять квантовые числа этого устойчивого уровня. Эти, на наш взгляд, нетривиальные результаты требуют специального объяснения, которое будет дано в следующем разделе.

Однако выполнения условий (11), иллюстрируемых графиками рис. 2, для устойчивости уровня мало. Необходимо еще удовлетворить условиям (12) и (7). Физически это означает, что «эффективная центробежная энергия» $\hbar^2 q_{in}^2 / 2m_{in}^* R_0^2$ не должна «выкинуть» электрон из потенциальной ямы глубины $-\Delta E_c$, чтобы уровень оставался в запрещенной зоне матрицы. На самом деле, разумеется, эффективная центробежная энергия – это совокупность собственно механической центробежной энергии, $\sim l^2$, энергии взаимодействия орбитального момента и спина с магнитным полем, $\sim l\Phi$ и $\sim g_{in}\Phi$, и собственной энергии магнитного поля, $\sim \Phi^2$,

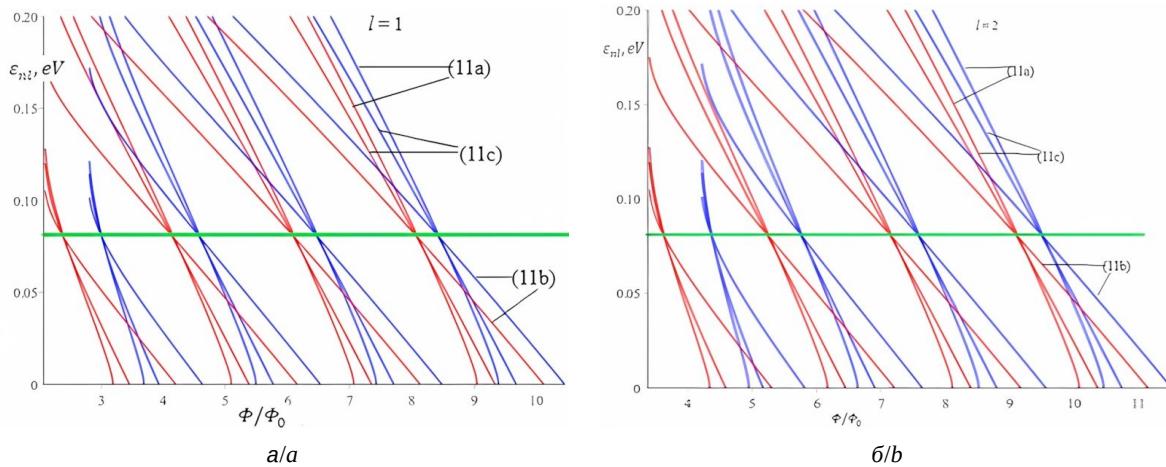


Рис. 2. Зависимость модуля энергии связи в плоскости шайбы (эВ) от внешнего магнитного поля (в квантах магнитного потока), задаваемая граничными условиями (11a)–(11c). Состояния устойчивы только при значении поля, соответствующем точке пересечения трех кривых. Семейства кривых на разных рисунках различаются значением орбитального числа l ($l = 1$ (а), $l = 2$ (б)) и радиального числа n (последовательно слева направо на обоих рисунках $n = 10, 9, 8, 7$). Красными (левее) кривыми показаны состояния со спином против поля, синими (правее) – соответственно по полю.

Зеленой линией отмечена постоянная энергия связи для движения в плоскости шайбы (цвет онлайн)

Fig. 2. Dependence of the coupling energy modulus (eV) on the external magnetic field (in quanta of a magnetic flux) given by the boundary conditions (11a)–(11c). The states are stable only at the value of the field corresponding to the point of intersection of the three curves. The families of curves in different figures differ in the value of the orbital number l ($l = 1$ (a), $l = 2$ (b)) and radial number n (from left to right in both figures $n = 10, 9, 8, 7$). The red (left) curves show states with spin against the field, the blue (right) curves – respectively along the field. The green line marks the constant binding energy for motion in the plane of the shim (color online)

причем – с учетом эволюции в магнитном поле основного состояния системы (дна зоны проводимости матрицы).

Рис. 3 иллюстрирует зависимость от магнитного поля модуля энергии связи в плоскости шайбы $-\varepsilon_{nl}$ (она, как уже отмечалось, практически постоянна), энергии дна зоны проводимости матрицы E_c (при данном наборе постоянных она медленно растет, т. е. магнитное поле немножко стабилизирует уровень), и модуля полной энергии уровня в яме

$$|E_{nq}| = -\varepsilon_{nq} - \frac{\hbar^2 q_{in}^2}{2m_{in}^* R_0^2} \quad (13)$$

в двух спиновых состояниях. Пока правая часть положительна, уровень не выходит из ямы. Кружками соответствующего цвета отмечены устойчивые состояния; их абсциссы дают необходимое для их стабилизации магнитное поле. То, что состояния со спином, параллельным полю, более устойчивы, чем со спином против поля (в вакууме наоборот), связано с отрицательностью фактора Ланде в материале шайбы $g_{in} < 0$. Отметим два несколько необычных обстоятельства, связанных с приведенными кривыми. Во-первых, спиновое расщепление Зеемана обусловливает

не столько разницу энергий уровней (она порядка ~ 0.001 эВ), сколько разницу напряженностей магнитных полей, необходимых для их стабилизации. Это существенно упрощает управление спиновым состоянием локализованного в шайбе электрона. Во-вторых, уменьшение радиального квантового числа (номера экстремума функции Бесселя) требует все более сильного магнитного поля для удержания уровня в шайбе. Это видно и из рис. 2.

Таким образом, проведенные расчеты демонстрируют во многом необычное поведение характеристик локализованного на квантовой шайбе электрона. Необходим качественный анализ приведенной выше системы уравнений.

2. Аналитические оценки.

Механизм формирования уровня с управляемыми квантовыми числами

Проследим механизм возникновения в запрещенной зоне матрицы уединенного уровня с набором квантовых чисел, контролируемым магнитным полем. Вначале воспользуемся тонкостью кольца, учтем малость отношения $(R_{ex} - R_{in})/R_0$, Линеаризуем трансцендентные граничные условия (11), разлагая все функ-

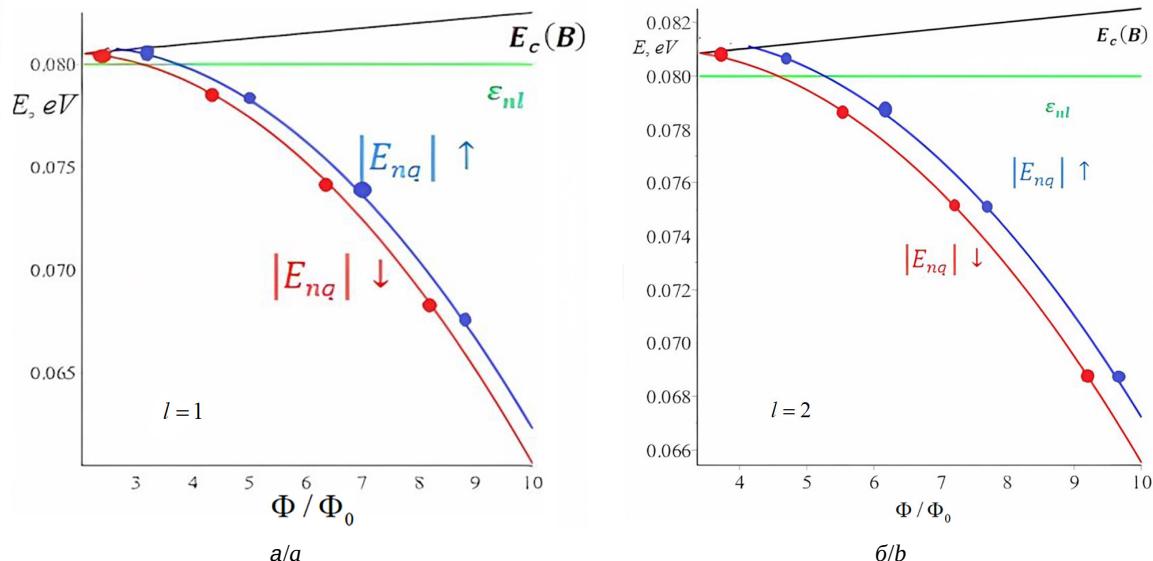


Рис. 3. Зависимость от магнитного поля: модуля энергии связи для движения в плоскости шайбы (зеленая прямая линия), энергии дна зоны проводимости матрицы (6) (черная наклонная линия), модуля полной энергии движения в плоскости шайбы (13) для состояния со спином против магнитного поля (красная линия, левее) и по полю (синяя линия, правее). Устойчивые состояния отмечены цветными кружками на этих кривых; их квантовые числа $l = 1$ (а) и $l = 2$ (б), а n последовательно слева направо на обоих рисунках $n = 10, 9, 8, 7$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Magnetic field dependence of the binding energy modulus for movement in the plane of the puck (green straight line), energy of the bottom of the conduction band of the matrix (6) (black inclined line), the modulus of the total energy of motion in the plane of the washer (13) for the state with spin against the magnetic field (red line, to the left) and along the field (blue line, to the right). The stable states are marked by colored circles on these curves; their quantum numbers are $l = 1$ (a) and $l = 2$ (b), and n is successively from left to right in both figures $n = 10, 9, 8, 7$ (color online)



ции Бесселя в точке R_0 . Это позволяет привести граничные условия к виду:

$$R_0 - R_{\text{in}} = \left((x_{nl}^0)^2 - q_{\text{in}}^2 \right)^{-1} R_0^2 \frac{dI_{q_{\text{ex}}}(R_0)}{dr} I_{q_{\text{ex}}}^{-1}(R_0), \quad (14a)$$

$$R_{\text{ex}} - R_0 = - \left((x_{nl}^0)^2 - q_{\text{in}}^2 \right)^{-1} R_0^2 \frac{dK_q(R_0)}{dr} K_q^{-1}(R_0). \quad (14b)$$

При этом радиус максимума электронной плотности, как видно из (11c), есть

$$R_0 = \hbar x_{nl}^0 / \sqrt{2m_{\text{in}}^* (\widetilde{\Delta E}_c + \epsilon_{nl})}, \quad (14c)$$

где x_{nl}^0 – координата экстремума функции Бесселя. Теперь ясно, что при фиксированных геометрических параметрах кольца R_{in} и R_{ex} положение максимума электронной плотности R_0 также фиксировано. Однако относительно энергии связи это далеко не очевидно, ибо квантовые числа n и l , как и магнитное поле, остаются «степенями свободы» уровня.

Все окончательно проясняется, если увидеть, что в области переменных (1) функции Бесселя в выражениях (11), (14) выходят на свои асимптотики

$$I_{q_{\text{ex}}}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{4q_{\text{ex}}^2 - 1}{16x} \right) \exp(x), \quad (15a)$$

$$J_{q_{\text{in}}}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{2} (q_{\text{in}} + \frac{1}{2}) \right) - \frac{4q_{\text{in}}^2 - 1}{8x} \sin \left(x - \frac{\pi}{2} (q_{\text{in}} + \frac{1}{2}) \right) \right], \quad (15b)$$

$$K_q(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 - \frac{1}{8x} \right) \exp(-x). \quad (15c)$$

Перестают работать эти оценки для очень маленьких шайб $R_{\text{in}} \rightarrow 0$, когда нарушаются условия (1). Рассматривать слишком большие шайбы также бессмысленно, прежде всего из практических соображений. Кроме того, разница граничных условий на внешнем и внутреннем радиусах шайбы при этом нивелируется, так что квантовое кольцо фактически перестает отличаться от плоской квантовой нити.

С учетом соотношений (15) легко видеть, что

$$x_{nl}^0 \approx \pi (n + q_{\text{in}}/2 + 1/4), \quad (16)$$

а граничные условия (14) переходят в простые и явные выражения

$$R_{\text{in}} \approx R_0 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m_{\text{in}}^*}} \frac{\sqrt{-m_{\text{ex}}^* \epsilon_{nl}}}{\widetilde{\Delta E}_c + \epsilon_{nl}}, \quad (17a)$$

$$R_{\text{ex}} \approx R_0 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m_{\text{in}}^*}} \frac{\sqrt{mU}}{\widetilde{\Delta E}_c + \epsilon_{nl}}. \quad (17b)$$

Теперь становится очевидным, что энергия связи уровня зависит только от ширины квантовой шайбы (как и ранее, пренебрегаем всеми энергетическими добавками на фоне U):

$$d = R_{\text{ex}} - R_0 + R_0 - R_{\text{in}} \approx \frac{\hbar}{\sqrt{2m_{\text{in}}^*}} \frac{\sqrt{mU}}{\widetilde{\Delta E}_c + \epsilon_{nl}}. \quad (18)$$

При подстановке в это уравнение ранее приведенных постоянных и $d = 10$ нм получаем энергию связи уровня $\epsilon_{nl} \approx 0.08$ эВ (см. рис. 1 и 2, зеленые линии). Так объясняются результаты численного эксперимента предыдущего раздела – точнее, факт независимости энергии связи от квантовых чисел уровня и внешнего магнитного поля. Видим также, что существует ограничения снизу на ширину квантовой шайбы, способной удержать электрон в кольцевой потенциальной яме:

$$d > d_{\min} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_{\text{in}}^*}} \frac{\sqrt{mU}}{\widetilde{\Delta E}_c}. \quad (19)$$

Этим квантовое кольцо в 2D принципиально отличается от «плоской» квантовой точки, которая формально может удержать уровень при любом радиусе и глубине [21] (хотя бы с экспоненциально малой энергией [19]). Физическая причина этого та же, что и в 3D-яме: радиальная волновая функция должна «гладко замкнуть» экспоненциально растущую внутри шайбы функцию Инфельда и экспоненциально убывающую вне шайбы функцию Макдональда. «Остроту максимума» при этом определяет кинетическая энергия радиального движения электрона в кольце $\widetilde{\Delta E}_c + \epsilon_{nl}$, которая, естественно, не может быть больше ΔE_c . Отметим, что в известном пределе кольцевой дельта-ямы (потенциал $\sim -\delta(r - R_0)$) пропадает всякая связь между характеристиками материала шайбы и глубиной уровня, так что аналогий с рассматриваемой задачей здесь искать не стоит.

Что в данной ситуации может изменить магнитное поле? На этот вопрос на качественном уровне отвечает выражение (16). Из всех свободных параметров задачи n , l и q_{in} (фактически B) непрерывно меняется только последний. Чтобы x_{nl}^0 оставался постоянным (как того требуют соотношения (14c) и (16)), должно выполняться

условие

$$n + \frac{q_{\text{in}}}{2} = n + \frac{1}{2} \sqrt{\left(l - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \pm \frac{g_{\text{in}} m_{\text{in}}^*}{2m} \frac{\Phi}{\Phi_0} - \left(-\frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{g_{\text{ex}} m_{\text{ex}}^*}{2m} \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)} = \text{const.} \quad (20)$$

Именно оно обеспечивает взаимно-однозначное соответствие между (дискретно меняющимися) квантовыми числами связанного уровня и магнитным полем. Физический смысл полученного соотношения состоит в следующем. Магнитное поле, согласно (15b), меняет фазу радиальной волновой функции⁷ и потому может изменить положение максимума электронной плотности. Оно, однако, меняться не должно, ибо положение шайбы фиксировано. Таким образом, магнитное поле компенсирует изменение фазы радиальной функции, обусловленное дискретным изменением квантовых чисел n , l и (главное для нас) спинового числа. Другими словами, поле «загоняет» электрон в кольцевую потенциальную яму заранее заданного размера. Если при этом фиксировать l , как в нашем численном эксперименте, рост n должен сопровождаться уменьшением магнитного поля. Возможное значение магнитного поля ограничено снизу условием (7), а сверху – условием (12).

Главный же результат состоит в том, что квантовая шайба – гетероструктура достаточно тонкая и гибкая, а также и управляемая. Подбирай физические и геометрические параметры гетеросистемы, мы всегда можем найти уровни с необходимой в данной задаче энергетикой и управлять их квантовыми числами с помощью внешних полей разумной величины. В частности, в данном примере для изменения только спинового состояния уровня без изменения других квантовых чисел необходимо изменение магнитного потока $\Delta\Phi \approx \Phi_0/2$, как видно из рис. 2 (переход с синей на красную кривую). В абсолютных единицах это составляет ~ 0.5 Тл как «компенсация» зеемановского расщепления энергии уровня за счет энергии магнитного поля.

Заключение. Основные результаты и выводы

Итак, среди всех известных нам полупроводниковых гетероструктур, включая 0-мерные квантовые точки, узкозонные квантовые шайбы (1) в щирокозонной матрице обладают наиболее

ярко выраженным и полностью управляемыми селекционными свойствами. Для удержания электрона в такой шайбе на единственном стабильном уровне необходимо внешнее однородное магнитное поле строго определенной напряженности. Каждому набору квантовых чисел – радиального, орбитального и спинового – соответствует свое, единственное значение напряженности поля, стабилизирующее этот уровень. В силу геометрии шайбы уровень является слабо-связанным, что повышает его «управляемость». С другой стороны, незатухающий квантовый ток и связанный с ним сохраняющийся магнитный момент повышают устойчивость этого уровня (например, к тепловым флуктуациям). Этим квантовые шайбы (теоретически, во всяком случае) выгодно отличаются от идеальных квантовых точек, в которых используются s -состояния [17, 18].

В заключение остановимся на вариантах изменения спина локализованного на шайбе электрона. Как известно, переходы с переворотом спина обычно имеют определенную степень запрета и потому происходят достаточно медленно, по сравнению с типичным временем разрешенных переходов в твердом теле $\sim 10^{-8}$ с. Пусть, для определенности, эффективное значение g -фактора электрона будет положительным. Тогда в основном состоянии спин локализованного электрона будет ориентирован против внешнего поля. При быстром переключении поля (по сравнению с временем жизни возбужденного состояния электрона со спином в направлении поля), очевидно, что связанный уровень будет терять устойчивость, и это приведет к вытеснению электрона в зону проводимости матрицы. На освободившийся уровень будет «опускаться» другой электрон из зоны проводимости с «правильным» направлением спина. При медленном (адиабатическом) переключении поля более вероятна реакция с переворотом спина без перехода в зону проводимости. Таким образом, существует (во всяком случае, теоретическая) возможность контролировать не только направление спинового перехода, но и его время и характер внешним магнитным полем.

Список литературы / References

- Viefers S., Koskinen P., Singha Deo P., Manninen M. Quantum rings for beginners: energy spectra and persistent currents. *Physica E*, 2004, vol. 21, iss. 1, pp. 1–35. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2003.08.076>

⁷Типичная ситуация для явлений типа эффекта Ааронова–Бома.



2. Manninen M., Viefers S., Reimann S. M. Quantum rings for beginners II: Bosons versus fermions. *Physica E*, 2012, vol. 46, pp. 119–132. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2012.09.013>
3. Manolescu A., Daday C., Gudmundsson V. Coulomb and spin-orbit interaction effects in a mesoscopic ring. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2011, vol. 2, no. 3, pp. 29–36.
4. Baran A. V., Kudryashov V. V. Spin-orbit interactions in semiconductor quantum ring in the presence of magnetic field. *International Journal of Nanoscience*, 2019, vol. 18, no. 3–4, art. 1940016. <https://doi.org/10.1142/S0219581X19400167>
5. Kammermeier M., Seith A., Wenk P., Schliemann J. Persistent spin textures and currents in wurtzite nanowire-based quantum structures. *Phys. Rev. B*, 2020, vol. 101, no. 19, art. 195418. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.195418>
6. Li B., Magnus W., Peeters F. M. Tunable exciton Aharonov-Bohm effect in a quantum ring. *Journal of Physics: Conference Series*, 2010, vol. 210, no. 1, art. 012030. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/210/1/012030>
7. Lia J. M., Tamborenea P. I. Narrow quantum rings with general Rashba and Dresselhaus spin-orbit interaction. *Physica E*, 2020, vol. 126, art. 114419. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2020.114419>
8. Kozin V. K., Iorsh I. V., Kibis O. V., Shelykh I. A. Periodic array of quantum rings strongly coupled to circularly polarized light as a topological insulator. *Phys. Rev. B*, 2018, vol. 97, no. 3, art. 035416. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.035416>
9. De Lira F. A. G., Pereira L. F. C., Silva E. O. Study on the effects of anisotropic effective mass on electronic properties, magnetization and persistent current in semiconductor quantum ring with conical geometry. *Physica E*, 2021, vol. 132, art. 114760. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2021.114760>
10. Sullivan H. T., Cole J. H. A link between shape dependent lifetimes and thermal escape in quantum dots and rings. *Physical Review Research*, 2024, vol. 6, art. 013086. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.6.013086>
11. Panneerselvam K., Muralidharan B. Giant excitonic magneto-optical Faraday rotation in single semimagnetic CdTe/Cd1-xMnxTe quantum ring. *Physica E*, 2024, vol. 157, art. 115876. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2023.115876>
12. Rubo Y. G. Spin-orbital effect on polariton state in traps. *Phys. Rev. B*, 2022, vol. 106, art. 235306. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.106.235306>
13. Planelles J., Movilla J. L., Climente J. I. Topological magnetoelectric effect in semiconductor nanostructures: Quantum wells, wires, dots, and rings. *Phys. Rev. Research*, 2023, vol. 5, art. 023119. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.5.023119>
14. Blackman N., Genov D. A. Temperature dependent diamagnetic-paramagnetic transitions in metal/semiconductor quantum rings. *Phys. Rev. B*, 2020, vol. 102, art. 245429. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.102.245429>
15. Gioia L., Zülicke U., Governale M., Winkler R. Dirac electrons in quantum rings. *Phys. Rev. B*, 2018, vol. 97, art. 205421. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.205421>
16. Chakraborty T., Manaselyan A., Barseghyan M. Irregular Aharonov-Bohm effect for interacting electrons in a ZnO quantum ring. *J. Phys.: Condens. Matter*, 2016, vol. 29, no. 7, art. 075605. <https://doi.org/10.1088/1361-648X/aa5168>
17. Ledentsov V. M., Ustinov V. M., Shchukin V. A., Kop'ev P. S., Alferov Zh. I., Bimberg D. Quantum dot heterostructures: Fabrication, properties, lasers. *Semiconductors*, 1998, vol. 32, iss. 4, pp. 343–365. <https://doi.org/10.1134/1.1187396>
18. Mandel A. M., Oshurko V. B., Karpova E. E. Renormalization of the Landé factor and effective mass in small spherical quantum dots. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2019, vol. 64, pp. 1127–1134. <https://doi.org/10.1134/S1064226919100085>
19. Mandel A. M., Oshurko V. B., Pershin S. M. A thin semiconductor quantum ring as an analog of a magnetically controlled Bohr Atom. *Doklady Physics*, 2021, vol. 66, no. 9, pp. 253–256. <https://doi.org/10.1134/S1028335821090020>
20. Rodionov V. N., Kravtsova G., Mandel A. M. On the influence of strong electric and magnetic fields on spatial dispersion and anisotropy of optical properties of semiconductor. *JETP Letters*, 2003, vol. 78, iss. 4, pp. 218–222. <https://doi.org/10.1134/1.1622035>
21. Baz A. I., Zeldovich Ya. B., Perelomov A. M. *Rassianie, reaktsii i raspady v nerelativistskoi kvantovoi mehanike* [Scattering, reactions and decays in non-relativistic quantum mechanics]. Moscow, Nauka, 1971. 544 p. (in Russian).
22. Rodionov V. N., Kravtsova G. A., Mandel A. M. Ionization from a short-range potential under the action of electromagnetic fields of complex configuration. *JETP Letters*, 2002, vol. 75, iss. 8, pp. 363–467. <https://doi.org/10.1134/1.1490000>
23. Rodionov V. N., Kravtsova G. A., Mandel A. M. Lack of stabilization of quasi-stationary states of the electron in a strong magnetic field. *Doklady Physics*, 2002, vol. 386, no. 1, pp. 725–727. <https://doi.org/10.1134/1.1519315>
24. Vurgaftman I., Meyer J. R., Ram-Mohan L. R. Band parameters for III-V compound semiconductors and their alloys. *J. Appl. Phys.*, 2001, vol. 89, iss. 11, pp. 5815–5875. <https://doi.org/10.1063/1.1368156>
25. Aleshkin V. Ya., Gavrilenko V. I., Ikonnikov A. V., Krishtopenko S. S., Sadofyev Yu. G., Spirin K. E. Exchange enhancement of g-factor in InAs/AlSb heterostructures. *Semiconductors*, 2008, vol. 42, iss. 7, pp. 828–833. <https://doi.org/10.1134/S1063782608070129>

Поступила в редакцию 30.10.2024; одобрена после рецензирования 27.01.2025; принята к публикации 17.02.2025; опубликована 30.06.2025

The article was submitted 30.10.2024; approved after reviewing 27.01.2025; accepted for publication 17.02.2025; published 30.06.2025