



## РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 134–146  
*Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 134–146  
<https://fizika.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-2-134-146>, EDN: ZUYNTS

Научная статья  
УДК 530.182

### Ансамбли четырех дискретных фазовых осцилляторов

А. П. Кузнецов, Ю. В. Седова<sup>✉</sup>

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,  
Россия, 410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Кузнецов Александр Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, [apkuz@rambler.ru](mailto:apkuz@rambler.ru), <https://orcid.org/0000-0001-5528-1979>, AuthorID: 509  
Седова Юлия Викторовна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, [sedovayv@yandex.ru](mailto:sedovayv@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-7843-646X>, AuthorID: 168897

**Аннотация.** Исследованы ансамбли из четырех дискретных фазовых осцилляторов. Рассмотрение проведено с использованием трехмерных отображений для моделирования относительных фаз осцилляторов. Изучены и сопоставлены случаи связи осцилляторов в цепочку, кольцо и звезду. Анализ проведен с помощью метода карт ляпуновских показателей, выявляющего периодические режимы, квазипериодические режимы с разным числом несоизмеримых частот и хаоса. Для случаев разной топологии связи обсуждение проведено с учетом возможных резонансов. Наблюдаемые режимы иллюстрируются с помощью фазовых портретов, включая случаи различных квазипериодических резонансов с разным числом несоизмеримых частот.

**Ключевые слова:** фаза, модель Курамото, дискретное отображение, показатели Ляпунова, квазипериодичность

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН.

**Для цитирования:** Кузнецов А. П., Седова Ю. В. Ансамбли четырех дискретных фазовых осцилляторов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 134–146. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-2-134-146>, EDN: ZUYNTS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

#### Ensembles of four discrete phase oscillators

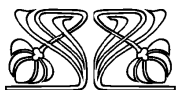
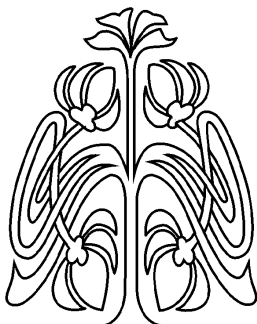
A. P. Kuznetsov, Yu. V. Sedova<sup>✉</sup>

Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, 38 Zelyonaya St., Saratov 410019, Russia

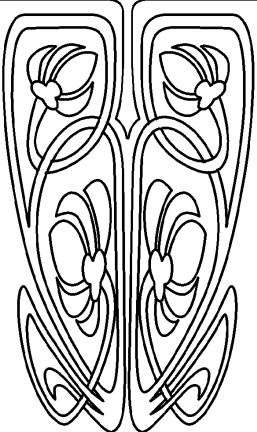
Alexander P. Kuznetsov, [apkuz@rambler.ru](mailto:apkuz@rambler.ru), <https://orcid.org/0000-0001-5528-1979>, AuthorID: 509

Yuliya V. Sedova, [sedovayv@yandex.ru](mailto:sedovayv@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-7843-646X>, AuthorID: 168897

**Abstract. Background and Objectives:** Ensembles of four discrete phase oscillators are considered. The aim of the research is to study and compare ensembles with different topologies of coupling: chains, rings and stars. **Materials and Methods:** We carry out the analysis using three-dimensional discrete maps for the relative phases of oscillators. We use the method of Lyapunov exponent chart, which identifies periodic regimes, quasi-periodic regimes with a different number of incommensurable frequencies and chaos. The various modes are illustrated using phase portraits.



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





**Results:** We have found the regions of different regimes in the frequency detuning space of oscillators for different topologies of coupling. Resonances are indicated and illustrated both for pairs and for triples of synchronized oscillators, which corresponds to three- and two-frequency quasi-periodicity. We observe Arnold resonance web based on four frequency as well as on chaotic regimes. **Conclusion:** The ensemble of four discrete phase oscillators demonstrates a variety of quasi-periodic regimes with a different number of incommensurable frequencies, which are caused by possible resonances depending on the topology of coupling.

**Keywords:** phase, Kuramoto model, discrete map, Lyapunov exponents, quasi-periodicity

**Acknowledgements:** The study was carried in the framework of the State Task of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences.

**For citation:** Kuznetsov A. P., Sedova Yu. V. Ensembles of four discrete phase oscillators. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 134–146 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2025-25-2-134-146>, EDN: ZUYNTS

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Изучение ансамблей нелинейных осцилляторов принадлежит к числу фундаментальных проблем физики, электроники, биологии, химии и других наук [1, 2]. Во многих случаях достаточно следить за динамикой фаз осцилляторов. Одной из основных моделей такого типа является модель Курамото, для которой каждый фазовый осциллятор связан с каждым [1,3,4]:

$$\dot{\psi}_n = \omega_n + \mu \sum_{i=1}^N \sin(\psi_i - \psi_n). \quad (1)$$

Здесь  $\psi_n$  – фаза  $n$ -го осциллятора,  $\omega_n$  – его собственная частота,  $\mu$  – величина связи. Этой модели посвящено огромное количество публикаций, включая монографии и обзоры, описывающие разные аспекты динамики.

В литературе обсуждается также дискретная версия этой модели, когда производные по времени в системе (1) заменяются конечными разностями:

$$\psi_n \rightarrow \omega_n + \psi_n + \mu \sum_{i=1}^N \sin(\psi_i - \psi_n). \quad (2)$$

Удобство построенной таким способом модели состоит в том, что анализ отображений существенно проще, чем дифференциальных уравнений. При этом динамика дискретной модели наследует многие свойства потоковой системы-прототипа, но оказывается даже богаче, чем у исходной системы. Это подтверждают различные примеры систем, построенных путем дискретизации, – моделей нейронов, динамики популяций, генных сетей, электронных генераторов и др. Большое количество примеров и ссылок можно найти в обзорной части [5].

В последнее время при исследовании сетей внимание привлекают ансамбли из сравнительно небольшого числа элементов в силу многообразие возможных нелинейных феноменов [6–9].

Некоторые авторы называют такие системы «минимальными сетями» (minimal networks) [6, 8–9], имея в виду минимальное количество элементов, необходимое для реализации тех или иных эффектов коллективной динамики, например, химерных состояний (chimera states) [8, 9]. Как подчеркнуто в [6], по сравнению с большими сетями минимальные сети более восприимчивы к изменениям параметров связи и топологий сети. В данной работе в этом контексте исследуются сети из четырех дискретных осцилляторов.

Дискретная модель Курамото в виде сети из четырех-пяти осцилляторов исследовалась в [10–13]. Обсуждались такие вопросы, как выявление в пространстве параметров различных типов динамики, разрушение инвариантных торов с возникновением фазового хаоса, мультистабильность и др. В [10, 11] для четырех осцилляторов выявлены области периодических, квазипериодических и хаотических режимов. Используется также построение дополнительного сечения аттрактора. В этом сечении инвариантная кривая (двухчастотный тор) представляется некоторым циклом, так что оказывается возможным визуализировать и классифицировать эти режимы. Однако авторы выбирают определенное, фиксированное соотношение между частотными расстройками осцилляторов. Поэтому в поле зрения не попадают различные резонансы, возможные в системе, а также трех- и четырехчастотные квазипериодические режимы. В [12] анализируется случай пяти осцилляторов для произвольных расстроек; с помощью ляпуновского анализа выявляются квазипериодические режимы разной размерности. Демонстрируется возможность иерархии резонансных квазипериодических режимов, возникающих на поверхности инвариантных торов большей размерности. Обнаружена резонансная паутина Арнольда [14], представляющая собой сеть пересекающихся узких областей квазипериодической динамики на основе колебаний с разным числом несоиз-

меримых частот. Отметим, что большое число дискретных осцилляторов ( $10^2$  и  $10^5$ ) исследовано в [15]. Переход от непрерывной к дискретной модели Курамото обсуждается в [16].

Рассматриваются и цепочки из дискретных осцилляторов. Пионерскими работами для трех осцилляторов можно назвать исследования отображения Кима–Остлунда [17, 18]. В рамках этой модели обсуждался широкий круг проблем, включая резонансную паутину Арнольда (в [18] она называется «mode-locking web»), бифуркационное устройство различных резонансов, тороидальный хаос (toroidal chaos) и др. Эта модель, однако, с физической точки зрения имеет некоторую особенность: связь осцилляторов асимметрична и включает диссипативную и активную (отталкивающую) компоненты. Сопоставление дискретных моделей трех осцилляторов с учетом разных типов связи и моделью Кима–Остлунда дано в [19].

В настоящем сообщении мы рассмотрим систему из четырех дискретных фазовых осцилляторов с разной, отличной от глобальной связи «каждый с каждым», топологией связи. В разд. 1 обсуждается цепочка осцилляторов. В разд. 2 мы обсудим случай связи в виде кольца. По аналогии в разд. 3 будет рассмотрена конфигурация ансамбля осцилляторов типа звезда (star network), когда один осциллятор располагается в центре, а остальные – по периферии, и которая также сейчас достаточно популярна [6, 20–22]. В центре нашего внимания будет выяснение возможности квазипериодических колебаний с разным числом несоизмеримых частот, а также возможные основные резонансы в системе.

## 1. Цепочка четырех дискретных осцилляторов

Обратимся сначала к случаю цепочки из четырех дискретных фазовых осцилляторов. Уравнения в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned}\psi_1 &\rightarrow \omega_1 + \psi_1 + \mu \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \psi_2 &\rightarrow \omega_2 + \psi_2 + \mu \sin(\psi_1 - \psi_2) + \mu \sin(\psi_3 - \psi_2), \\ \psi_3 &\rightarrow \omega_3 + \psi_3 + \mu \sin(\psi_2 - \psi_3) + \mu \sin(\psi_4 - \psi_3), \\ \psi_4 &\rightarrow \omega_4 + \psi_4 + \mu \sin(\psi_3 - \psi_4).\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь и далее в силу периодичности по фазам все отображения берутся по  $(\bmod 2\pi)$ . Введем относительные фазы осцилляторов:

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \phi = \psi_2 - \psi_3, \phi = \psi_3 - \psi_4 \quad (4)$$

для понижения размерности системы до трех:

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow 2\pi w_1 + \theta - 2\mu \sin \theta + \mu \sin \phi, \\ \phi &\rightarrow 2\pi w_2 + \phi + \mu \sin \theta - 2\mu \sin \phi + \mu \sin \phi, \\ \phi &\rightarrow 2\pi w_3 + \phi + \mu \sin \phi - 2\mu \sin \phi.\end{aligned}\quad (5)$$

Введем параметры  $w_n$  – относительные числа вращения ( $n = 1, 2, 3$ ), определяемые разностью собственных частот осцилляторов:

$$\begin{aligned}(\omega_1 - \omega_2) &= 2\pi w_1, \\ (\omega_2 - \omega_3) &= 2\pi w_2, \quad (\omega_3 - \omega_4) = 2\pi w_3.\end{aligned}\quad (6)$$

Мы «сконструировали» фазовые уравнения, в случае системы с непрерывным временем они могут быть получены для цепочки осцилляторов ван дер Поля методом медленно меняющихся амплитуд в фазовом приближении [23, 24]. Заменяя, по аналогии с переходом от (1) к (2) производные по времени конечными разностями, можно прийти к уравнениям (5).

Система (5) характеризуется четырьмя параметрами: три числа вращения  $w_1, w_2, w_3$  и константа связи  $\mu$ . Обратимся к устройству плоскости параметров  $(w_1, w_2)$ . Сначала рассмотрим случай малого третьего числа вращения  $w_3 = 0.01$ . На рис. 1 показана соответствующая ляпуновская карта для величины связи  $\mu = 0.3$ , на которой разными цветами показаны различные типы режимов в соответствии с сигнатурой спектра показателей Ляпунова (таблица).

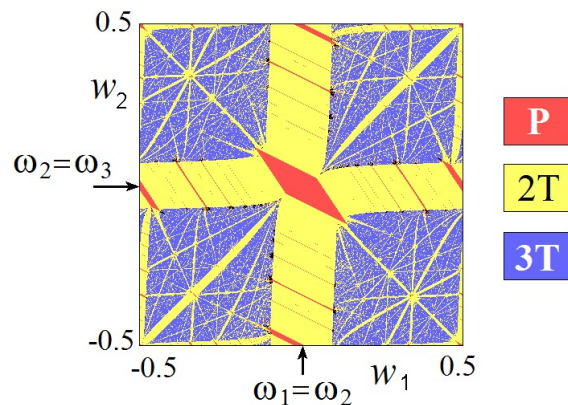


Рис. 1. Ляпуновская карта цепочки осцилляторов (5),  $w_3 = 0.01$ ,  $\mu = 0.3$ . Стрелками отмечены основные резонансы (цвет онлайн)

Fig. 1. Lyapunov exponent chart for the chain of oscillators (5),  $w_3 = 0.01$ ,  $\mu = 0.3$ . The arrows mark the main resonances (color online)

Отметим, что при построении карт обращение в ноль показателя определяется с некоторой точностью. Мы полагали ее равной  $\nu = 0.001$ ,



Типы динамики системы и спектр показателей Ляпунова  
Table. Types of system dynamics and the spectrum of Lyapunov exponents

Обозначение / Designation	Тип режима / Mode type	Показатели Ляпунова / Lyapunov exponents
P	Равновесие или периодический / Equilibrium or periodic	$\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$
2T	Двухчастотный / Two-frequency	$\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$
3T	Трехчастотный / Three-frequency	$\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0$
4T	Четырехчастотный / Four-frequency	$\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = 0$
C	Хаос/Chaos	$\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$

что в данном случае является достаточно подходящим выбором, когда визуализируются даже мелкие элементы структуры. Сильно уменьшать параметр  $\nu$  нецелесообразно, поскольку сами показатели вычисляются приближенно.

В данном случае в силу малости  $w_3$  в соответствии с (6) собственные частоты третьего и четвертого осцилляторов  $\omega_3$  и  $\omega_4$  очень близки. Поэтому эти осцилляторы взаимно захвачены. В результате устройство плоскости  $(w_1, w_2)$  близко к случаю трех осцилляторов [19]. На рис. 1 в центре можно видеть область устойчивой неподвижной точки в форме параллелограмма, отвечающую полной синхронизации всех четырех осцилляторов. Эта область лежит на пересечении двух широких полос двухчастотной квазипериодичности 2T, центры которых отвечают линиям  $w_1 = 0$  или  $w_2 = 0$ . В соответствии с (6), это отвечает резонансным условиям  $\omega_1 = \omega_2$  или  $\omega_2 = \omega_3$ . Для удобства эти резонансы показаны стрелочками (см. рис. 1). В соответствии с ними, с учетом близости частот  $\omega_3$  и  $\omega_4$ , внутри вертикальной полосы взаимно захвачены попарно первый–второй и третий–четвертый осцилляторы. Соответственно, внутри горизонтальной полосы захвачены второй–третий–четвертый осцилляторы. Вне этих полос располагается область трехчастотной квазипериодичности 3T. В нее погружена система пересекающихся более тонких полос двухчастотных режимов. Она формирует структуру типа сети, известную как резонансная паутина Арнольда [14]. Вершины параллелограмма образуют точки коразмерности два, вблизи которых наблюдается веерообразная структура тонких языков двухчастотных режимов. В [25, 26] для потоков подобные точки получили название «saddle node fan» – седло-узловой веер.

Увеличим теперь третье число вращения до значения  $w_3 = 0.1$ . Пример такой ляпуновской карты для  $\mu = 0.2$  представлен в центре рис. 2. В этом случае картина близка к обсуждавшемуся

выше случаю, показанному на рис. 1, но с заменой периодических режимов на двухчастотные, а трехчастотных – на четырехчастотные. В центре карты на рис. 2, а опять находится область в форме параллелограмма, но теперь ей отвечает двухчастотный режим. Соответствующий фазовый портрет в пространстве  $(\theta, \phi, \psi)$  для этой области дан на рис. 2, б. Он представляет собой отрезок инвариантной линии, причем фазы  $\theta$  и  $\phi$  осциллируют около равновесных значений, а фаза  $\psi$  «бежит» в интервале  $0 < \psi < 2\pi$ . В соответствии с определением относительных фаз (4) это означает, что первый–второй–третий осцилляторы взаимно захвачены, а четвертый по отношению к ним находится в режиме биений. Периодические режимы в данном случае отсутствуют – малая связь не может синхронизовать четвертый осциллятор с остальными. Отметим, что на карте рис. 2, а возникают области хаоса, которые лежат в окрестности точек коразмерности два – вершин параллелограмма, и которых не было на рис. 1.

При переходе от рис. 1 к рис. 2, а на смену двухчастотным режимам, лежащим в окрестности значений  $w_1 = 0$  и  $w_2 = 0$ , приходят полосы трехчастотных режимов. В свою очередь, в них встроены узкие «поперечные» резонансные полосы двухчастотной квазипериодичности. Рис. 2, в, г, д, иллюстрируют вид фазовых портретов в таких резонансных областях, а также их эволюцию при переходе от одного резонанса к другому. Они представляют собой инвариантные кривые разного вида. Эти кривые могут отвечать разному числу точек пересечения граней куба со стороной  $2\pi$ . Например, случай (в), в отличие от (б), отвечает двум пересечениям верхней грани.

На рис. 2, а отмечены также области четырехчастотной квазипериодичности 4T, со встроенной сетью узких пересекающихся полос резонансных трехчастотных режимов. В увеличенном виде подобная область представлена

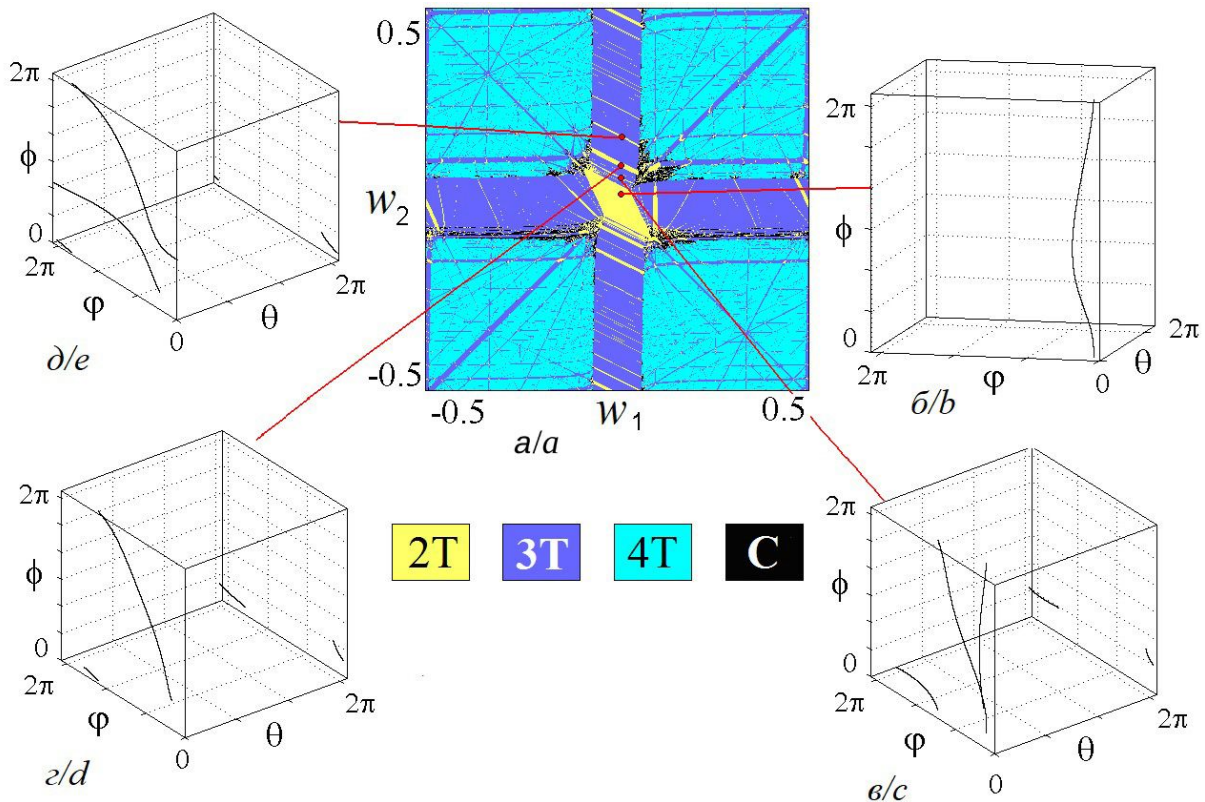


Рис. 2. Карта ляпуновских показателей (а) и фазовые портреты в областях двухчастотной квазипериодичности цепочки осцилляторов для значений  $w_1 = 0.01$ ,  $w_3 = 0.1$ ,  $\mu = 0.2$ :  $w_2 = 0.013$  (б),  $w_2 = 0.054$  (в),  $w_2 = 0.087$  (г),  $w_2 = 0.163$  (д) (цвет онлайн)

Fig. 2. Lyapunov exponent chart (a) and phase portraits in the regions of two-frequency quasi-periodicity of the chain of oscillators;  $w_3 = 0.1$ ,  $\mu = 0.2$ :  $w_2 = 0.013$  (b),  $w_2 = 0.054$  (c),  $w_2 = 0.087$  (d),  $w_2 = 0.163$  (e) (color online)

на рис. 3, а. Таким образом, возникает резонансная паутина Арнольда, но уже на базе четырехчастотных режимов.

Примеры портретов трехчастотных режимов для той же величины связи  $\mu = 0.2$  даны по периферии рис. 3. Теперь это некоторые инвариантные поверхности. На рис. 3, е представлен один из «базовых» трехчастотных режимов внутри полосы  $w_1 \approx 0$ . В этом случае первый и второй осцилляторы взаимно захвачены, так что их относительная фаза  $\theta$  слабо колеблется около некоторого равновесного значения. Две другие фазы  $\phi$  и  $\phi$  пробегают весь интервал  $[0; 2\pi]$ .

Остальные портреты (б–з) на рис. 3 относятся к трехчастотным нитям резонансной паутины. Соответствующие инвариантные поверхности могут быть разной формы и состоять из нескольких компонент. Рис. 3 иллюстрирует их многообразие. Отметим, что эти поверхности пересекают грани куба по некоторым кривым, дающим их сечение Пуанкаре. Например, для рис. 3, б такое сечение аттрактора плоскостью

$\phi = 2\pi$  дает одну, а для рис. 3, д – две инвариантные кривые.

Кроме основных, в системе возможны вторичные резонансы. На карте рис. 3, а одним из самых выраженных таких трехчастотных режимов является диагональ  $w_2 = w_1$ . Подставляя это соотношение в выражение для чисел вращения (6), получаем соответствующее резонансное условие  $\omega_1 + \omega_3 = 2\omega_2$ , и в этом случае собственная частота второго осциллятора совпадает со средней частотой соседних первого и третьего. Из соответствующего фазового портрета на рис. 3, б видно, что аттрактором в этом случае является однокомпонентная (с учетом свойства периодичности) поверхность, но при этом все три фазы ( $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\phi$ ) «пробегают» весь интервал  $[0; 2\pi]$ , в отличие от основного резонанса  $\omega_1 = \omega_2$  на рис. 3, е, когда одна из относительных фаз  $\theta$  осциллирует.

Когда  $\omega_2 + \omega_4 = 2\omega_3$ , наблюдается достаточно сильный аналогичный резонанс второго, третьего и четвертого осцилляторов. С учетом (6) получаем соответствующее резонансное условие





$w_2 = w_3$ . Данная линия также хорошо просматривается на рис. 3, а, как одна из самых широких горизонтальных полос. Соответствующий портрет приведен на рис. 3, г. Для него все три относительные фазы пробегает весь интервал  $[0; 2\pi]$ .

Увеличим теперь связь до значения  $\mu = 0.25$  и перейдем к рис. 4, а. Отмечаем появление, хотя и узкой, области полной синхронизации Р – большая связь позволяет захватить все осцилляторы. «Нити» резонансной паутины становятся шире, и внутри них теперь могут наблюдаться

встроенные островки хаоса. Увеличиваются и полосы двухчастотных режимов. При еще большей связи  $\mu = 0.45$  на рис. 4, б возникает картина, отчасти похожая на рис. 1. Можно видеть большую область полной синхронизации в форме параллелограмма, лежащую на пересечении двух полос двухчастотных режимов, и систему паутины режимов этого типа. Но теперь она встроена в хаотическую область. Таким образом, паутина может возникать также и на базе хаоса, когда более высокоразмерные квазипериодические режимы разрушены.

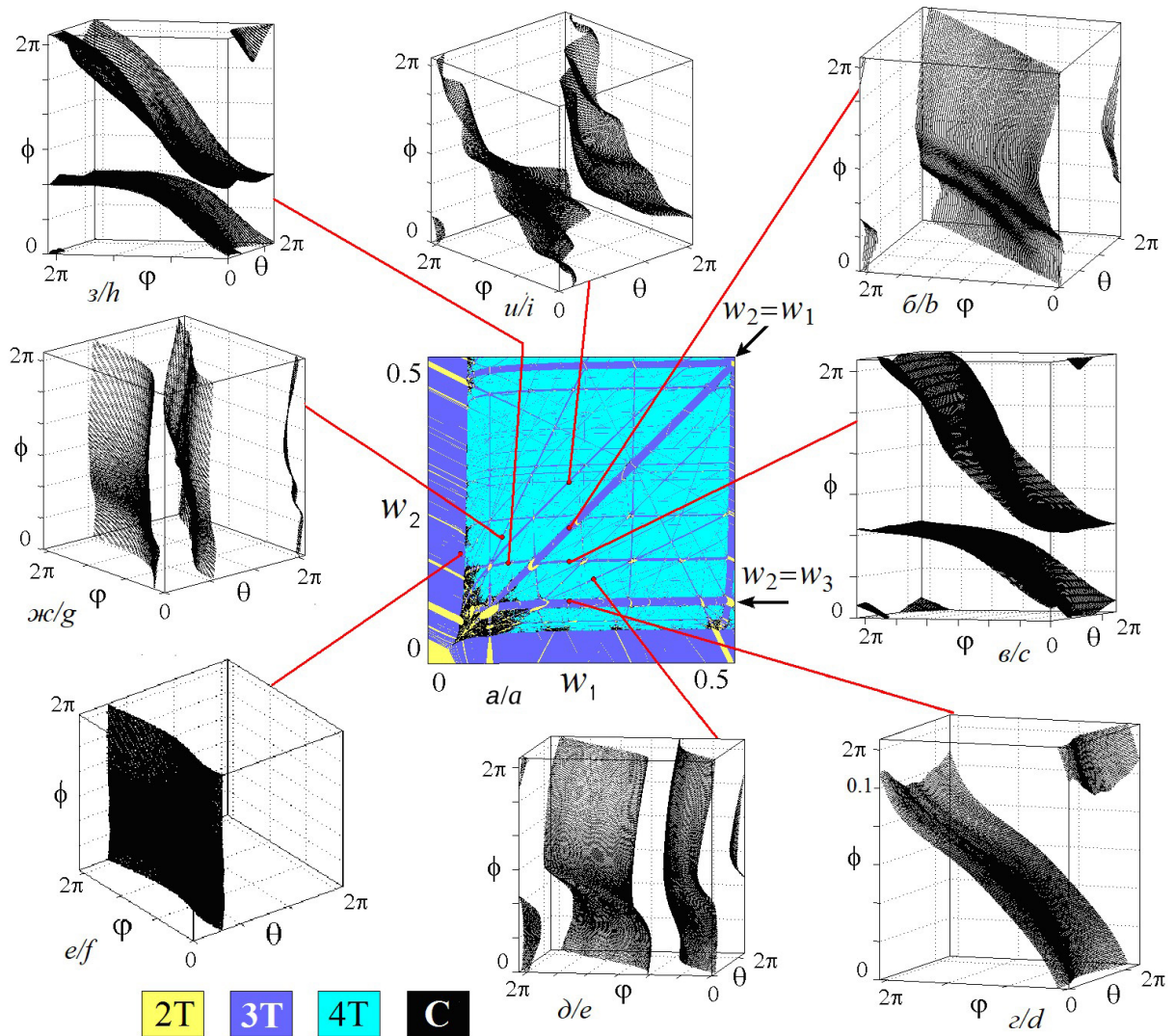


Рис. 3. Фрагмент ляпуновской карты (а) и фазовые портреты трехчастотных режимов для  $w_3 = 0.1$ ,  $\mu = 0.2$  (рис. б–з):  $w_1 = 0.23$ ,  $w_2 = 0.22$  (б);  $w_1 = 0.23$ ;  $w_2 = 0.165$  (в);  $w_1 = 0.23$ ,  $w_2 = 0.1$  (г);  $w_1 = 0.27$ ,  $w_2 = 0.136$  (д);  $w_1 = 0.058$ ,  $w_2 = 0.18$  (е);  $w_1 = 0.12$ ,  $w_2 = 0.205$  (ж),  $w_1 = 0.13$ ,  $w_2 = 0.163$  (з);  $w_1 = 0.23$ ,  $w_2 = 0.295$  (и). Стрелками на карте отмечены области, соответствующие выполнению условий двух вторичных резонансов (цвет онлайн)

Fig. 3. Fragment of the Lyapunov exponent chart (a) and phase portraits of three-frequency regimes for  $w_3 = 0.1$ ,  $\mu = 0.2$  (Fig. b–i) and  $w_1 = 0.23$ ,  $w_2 = 0.22$  (b);  $w_1 = 0.23$ ;  $w_2 = 0.165$  (c);  $w_1 = 0.23$ ,  $w_2 = 0.1$  (d);  $w_1 = 0.27$ ,  $w_2 = 0.136$  (e);  $w_1 = 0.058$ ,  $w_2 = 0.18$  (f);  $w_1 = 0.12$ ,  $w_2 = 0.205$  (g),  $w_1 = 0.13$ ,  $w_2 = 0.163$  (h);  $w_1 = 0.23$ ,  $w_2 = 0.295$  (i). The arrows on the chart indicate the regions corresponding to the conditions of two secondary resonances (color online)

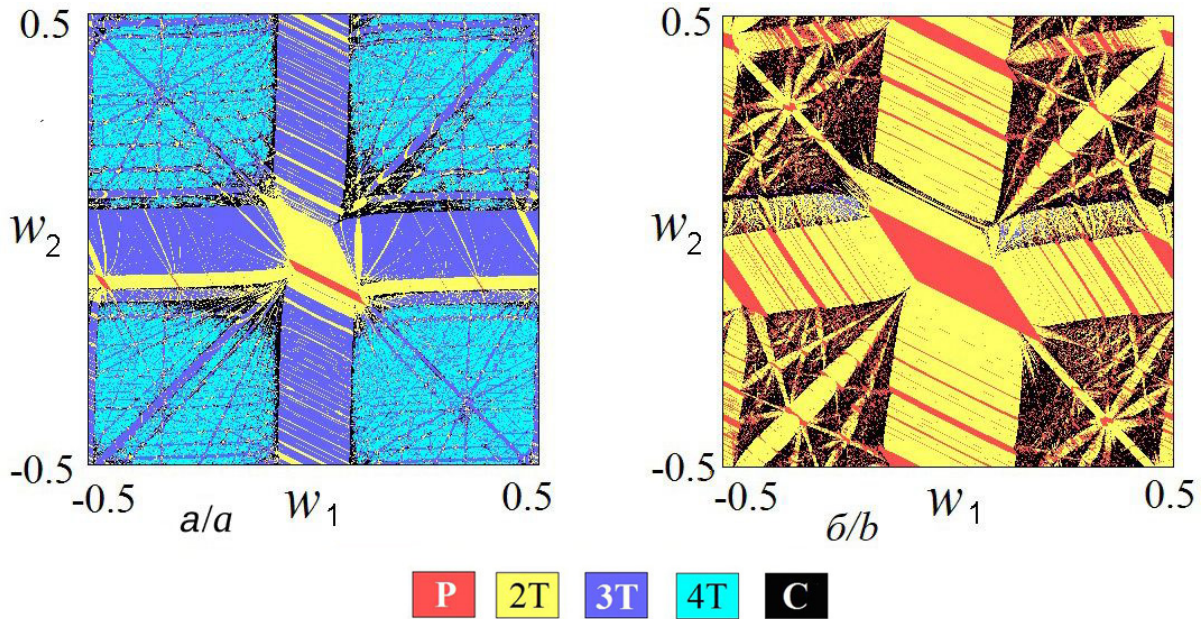


Рис. 4. Ляпуновские карты цепочки осцилляторов для  $w_3 = 0.1$  и  $\mu = 0.25$  (а),  $\mu = 0.45$  (б) (цвет онлайн)  
Fig. 4. Lyapunov exponent charts for the chain of oscillators for  $w_3 = 0.1$ ;  $\mu = 0.25$  (a),  $\mu = 0.45$  (b) (color online)

## 2. Кольцо из четырех дискретных осцилляторов

Выберем теперь топологию связи в виде кольца. В этом случае каждый осциллятор связан с двумя соседями, так что для фаз можно записать:

$$\begin{aligned}\psi_1 &\rightarrow \omega_1 + \psi_1 + \mu \sin(\psi_2 - \psi_1) + \mu \sin(\psi_4 - \psi_1), \\ \psi_2 &\rightarrow \omega_2 + \psi_2 + \mu \sin(\psi_1 - \psi_2) + \mu \sin(\psi_3 - \psi_2), \\ \psi_3 &\rightarrow \omega_3 + \psi_3 + \mu \sin(\psi_2 - \psi_3) + \mu \sin(\psi_4 - \psi_3), \\ \psi_4 &\rightarrow \omega_4 + \psi_4 + \mu \sin(\psi_3 - \psi_4) + \mu \sin(\psi_1 - \psi_4).\end{aligned}\quad (7)$$

Вводя относительные фазы в соответствии с (4), получаем:

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow 2\pi w_1 + \theta - 2\mu \sin \theta - \mu \sin(\theta + \phi + \phi) + \mu \sin \phi, \\ \phi &\rightarrow 2\pi w_2 + \phi - 2\mu \sin \phi + \mu \sin \theta + \mu \sin \phi, \\ \phi &\rightarrow 2\pi w_3 + \phi - 2\mu \sin \phi + \mu \sin \phi - \mu \sin(\theta + \phi + \phi).\end{aligned}\quad (8)$$

Как и для цепочки, начнем обсуждение со случая малых частотных расстройок третьего и четвертого осцилляторов  $w_3$ . На рис. 5 показана ляпуновская карта при  $w_3 = 0.01$  для величины связи  $\mu = 0.15$ . В силу малости  $w_3$  третий и четвертый осцилляторы взаимно захвачены, и картина оказывается аналогичной случаю трех осцилляторов. Область полной синхронизации теперь имеет форму овала и лежит на пересечении уже трех резонансных полос двухчастотных режимов. Условия этих резонансов в кольце

соответствуют его топологии и указаны на рисунке. Данная структура погружена в область трехчастотной квазипериодичности. Для потоковой системы аналогичное описание для кольца из трех фазовых осцилляторов можно найти в [26].

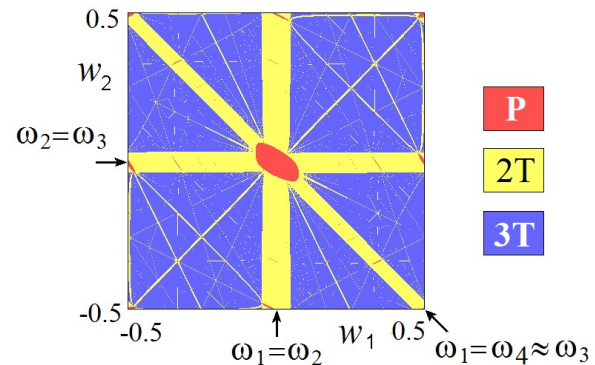


Рис. 5. Ляпуновская карта для кольца осцилляторов (8),  $w_3 = 0.01$ ,  $\mu = 0.15$  (цвет онлайн)

Fig. 5. Lyapunov exponent chart for the ring of oscillators (8),  $w_3 = 0.01$ ,  $\mu = 0.15$  (color online)

Увеличим теперь расстройку четвертого осциллятора до значения  $w_3 = 0.1$  при той же связи  $\mu = 0.15$ . На рис. 6, а показана соответствующая ляпуновская карта. Можно видеть, что трехчастотные режимы сменились на четырехчастотные, а полосы двухчастотных – на трехчастотные. При этом полная синхронизация в окрестности точки  $w_1 = w_2 = 0$  не наблюдается. Вместо нее



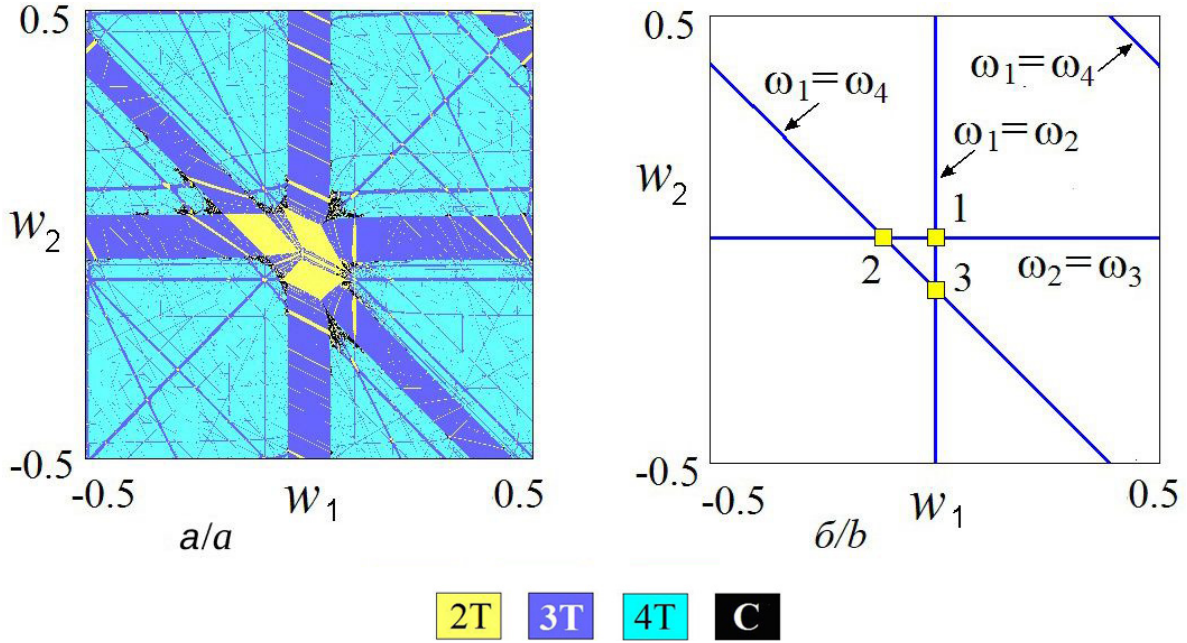


Рис. 6. Ляпуновская карта кольца из осцилляторов для  $w_3 = 0.1$ ,  $\mu = 0.15$  (а), линии и точки резонансных условий (9) и (11) (б) (цвет онлайн)

Fig. 6. Lyapunov exponent chart for the ring of oscillators,  $w_3 = 0.1$ ,  $\mu = 0.15$  (a); lines and points of resonance conditions (9) and (11) (b) (color online)

возникают двухчастотные режимы, представленные тремя близко расположенными островами. Чтобы пояснить характер динамики в этом случае, обсудим подробнее основные резонансы в кольцевой системе.

В соответствии с конфигурацией связи в виде кольца их три, когда совпадают собственные частоты первого – второго, второго – третьего и первого – четвертого осцилляторов, так что при точном резонансе  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $\omega_2 = \omega_3$  и  $\omega_1 = \omega_4$ . Подобный резонанс третьего и четвертого осцилляторов невозможен, поскольку мы рассматриваем случай конечной их расстройки  $w_3$ . В соответствии с (6) получаем три резонансных условия:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0, \\ w_2 &= 0, \\ w_2 &= -w_1 - w_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Первые два из них совпадают со случаем цепочки и отвечают горизонтальной и вертикальной полосам трехчастотных режимов на рис. 6, а. Третье резонансное условие является новым, в соответствии с ним на рис. 6, а наблюдается полоса трехчастотных режимов в окрестности линии  $w_2 = -w_1 - w_3$ . Для удобства восприятия на рис. 6, б показаны линии (9) и приведены соответствующие резонансные условия. Отметим,

что в силу периодичности системы по фазам и числам вращения линия резонанса  $\omega_1 = \omega_4$  на рис. 6, б состоит из двух, продолжающих друг друга ветвей. На рисунке они отмечены стрелочками.

Фазовые портреты аттракторов для основных трехчастотных полос показаны на рис. 7. Внутри вертикальной полосы относительная фаза первого и второго осцилляторов  $\theta$  колеблется около некоторого равновесного значения, что отвечает режиму, когда частично захвачены первый и второй осцилляторы. На втором портрете для горизонтальной полосы осциллирует относительная фаза  $\phi$ , что отвечает трехчастотному режиму с захватом второго–третьего осцилляторов. Портрет, отвечающий резонансу  $\omega_1 = \omega_4$ , показан на рис. 7, в. Чтобы проиллюстрировать данный резонанс, портрет построен в координатах  $(\theta + \phi + \phi, \phi, \phi)$ , поскольку в соответствии с (4)

$$\psi_1 - \psi_4 = \theta + \phi + \phi. \quad (10)$$

Можно видеть, что эта переменная осциллирует вблизи равновесного значения, что говорит о захвате первого и четвертого осцилляторов.

Проведем сопоставление с предыдущими рисунками. Линии на рис. 6, б пересекаются



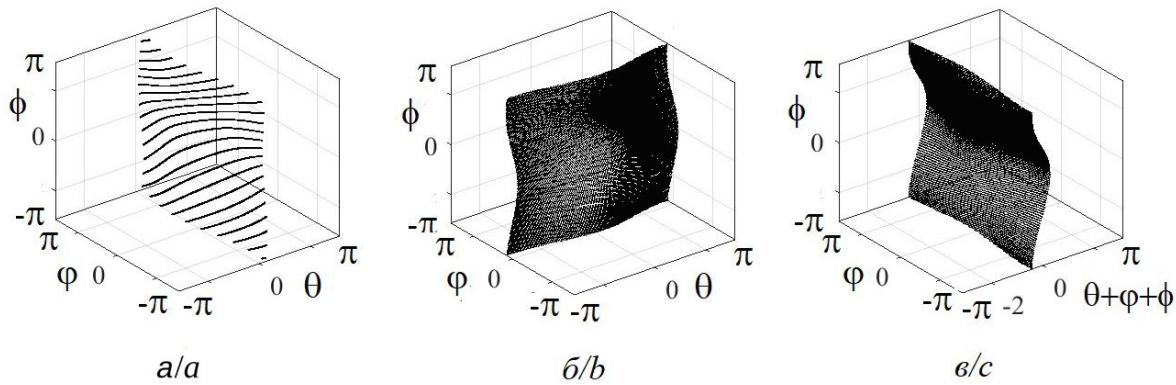


Рис. 7. Фазовые портреты «базовых» трехчастотных режимов для кольца ( $w_3 = 0.1$ ,  $\mu = 0.15$ ):  $w_1 = 0.005$ ,  $w_2 = 0.3$  (а),  $w_1 = 0.15$ ,  $w_2 = -0.015$  (б),  $w_1 = -0.3$ ,  $w_2 = 0.2$  (в)  
 Fig. 7. Phase portraits of the «base» three-frequency regimes for the ring ( $w_3 = 0.1$ ,  $\mu = 0.15$ ):  $w_1 = 0.005$ ,  $w_2 = 0.3$  (a),  $w_1 = 0.15$ ,  $w_2 = -0.015$  (b),  $w_1 = -0.3$ ,  $w_2 = 0.2$  (c)

в трех точках, в которых выполняются одновременно по два резонансных условия:

$$\begin{aligned} \text{точка 1: } \omega_1 &= \omega_2 = \omega_3, \\ \text{точка 2: } \omega_1 &= \omega_4, \omega_2 = \omega_3, \\ \text{точка 3: } \omega_1 &= \omega_2 = \omega_4. \end{aligned} \quad (11)$$

На ляпуновской карте рис. 6, а в окрестности каждой из таких точек возникают острова двухчастотных режимов. На схематическом рис. 6, б резонансные точки (11) выделены квадратицами, как и двухчастотные режимы на картах. Фазовые портреты в каждом из этих островов приведены на рис. 8. Портрет в окрестности точки 1 иллюстрирует колебания относительных фаз  $\theta$  и  $\phi$ , что в соответствии с (4) отвечает захвату первого, второго и третьего осцилляторов. Для идентификации режима в окрестности точки 2 использована переменная, отвечающая

разностям фаз  $\psi_1 - \psi_4 = \theta + \phi + \phi$ . По ее поведению и поведению фазы  $\phi$  заключаем, что попарно захвачены первый-четвертый и второй-третий осцилляторы. Для точки 3 используем переменные  $\theta$ ,  $\psi_2 - \psi_4 = \phi + \phi$  и  $\phi$ . Тогда можно видеть двухчастотный режим захвата первого-второго-четвертого осцилляторов.

Для рис. 6, а указанные острова двухчастотных режимов расположены близко друг к другу в силу малости параметра  $w_3 = 0.1$ . Увеличим теперь его значение до  $w_3 = 0.3$ . Такая карта показана на рис. 9, а. В этом случае в соответствии с (9) линия резонанса  $\omega_1 = \omega_4$  (точнее, ее два «куска») существенно опускается вниз, а линии двух других резонансов не меняются, как показано на схематическом рис. 9, б. В соответствии с этим можно видеть заметное смещение полосы третьего резонанса вниз. В результате три основных острова двухчастотных режимов ока-

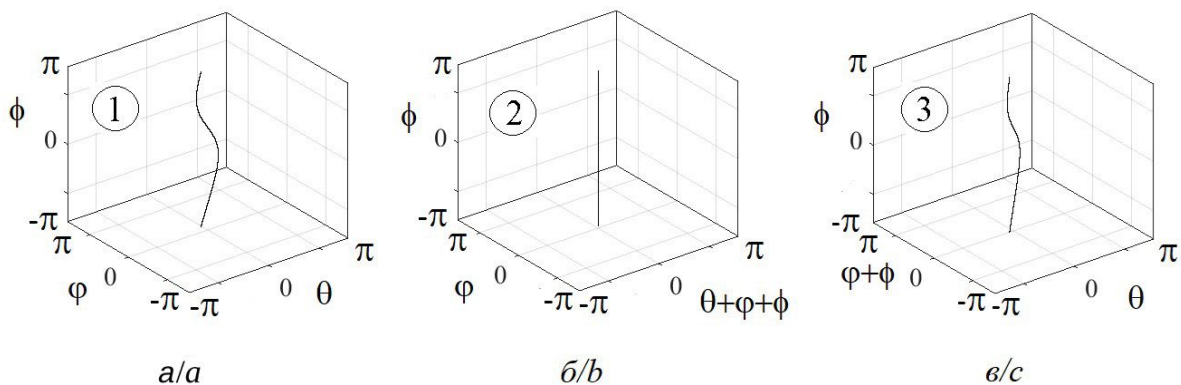


Рис. 8. Фазовые портреты основных двухчастотных режимов для кольца ( $w_3 = 0.1$ ,  $\mu = 0.15$ ):  $w_1 = 0.005$ ,  $w_2 = 0.0$  (а),  $w_1 = -0.1$ ,  $w_2 = 0.005$  (б),  $w_1 = 0.005$ ,  $w_2 = -0.1$  (в)  
 Fig. 8. Phase portraits of the base two-frequency regimes for the ring ( $w_3 = 0.1$ ,  $\mu = 0.15$ ):  $w_1 = 0.005$ ,  $w_2 = 0.0$  (a),  $w_1 = -0.1$ ,  $w_2 = 0.005$  (b),  $w_1 = 0.005$ ,  $w_2 = -0.1$  (c)

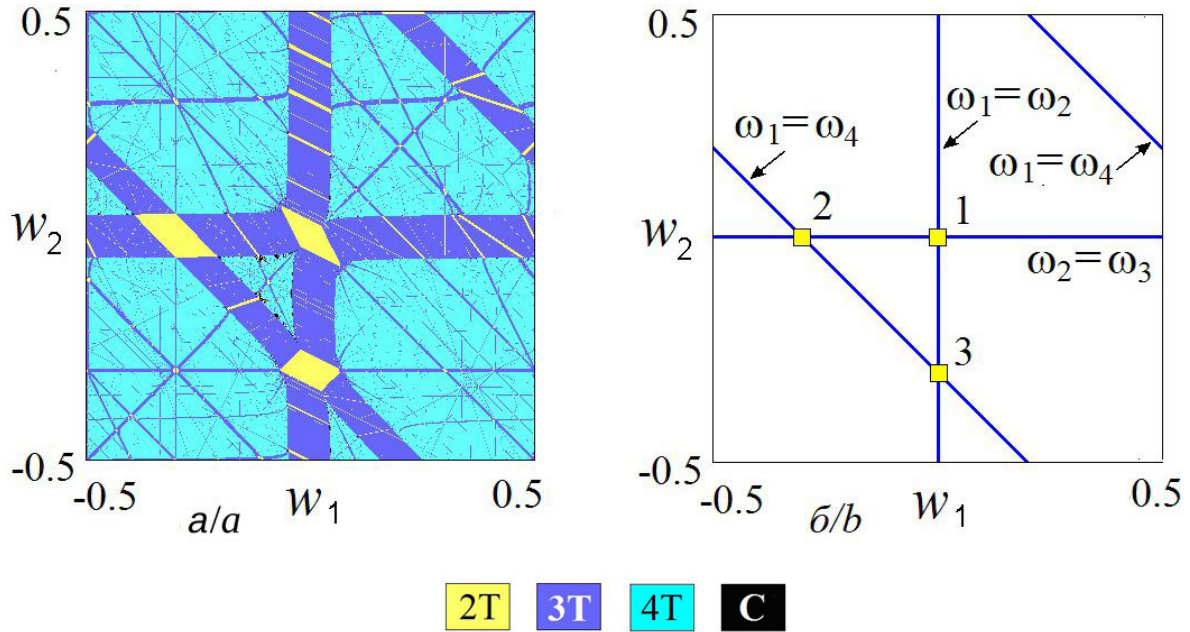


Рис. 9. Ляпуновская карта кольца из осцилляторов для  $w_3 = 0.3$ ,  $\mu = 0.15$  (а) линии и точки резонансных условий (9) и (11) (б) (цвет онлайн)

Fig.9. Lyapunov exponent chart for the ring of oscillators,  $w_3 = 0.3$ ,  $\mu = 0.15$  (a), lines and points of resonance conditions (9), (11) (b) (color online)

зываются сильно разнесенными. При этом они, как и в случае цепочки, имеют форму параллелограммов, что обусловлено заметной частотной отстройкой четвертого осциллятора.

Обсудим теперь влияние величины связи  $\mu$ . Сначала вернемся к случаю небольшой расстрой-

ки  $w_3 = 0.1$ . Ляпуновская карта для  $\mu = 0.25$  показана на рис. 10, а. По сравнению с рис. 6, а увеличение связи привело к объединению двух-частотных островов, хотя их структура отчасти просматривается. На их фоне возникла также область полной синхронизации – увеличение

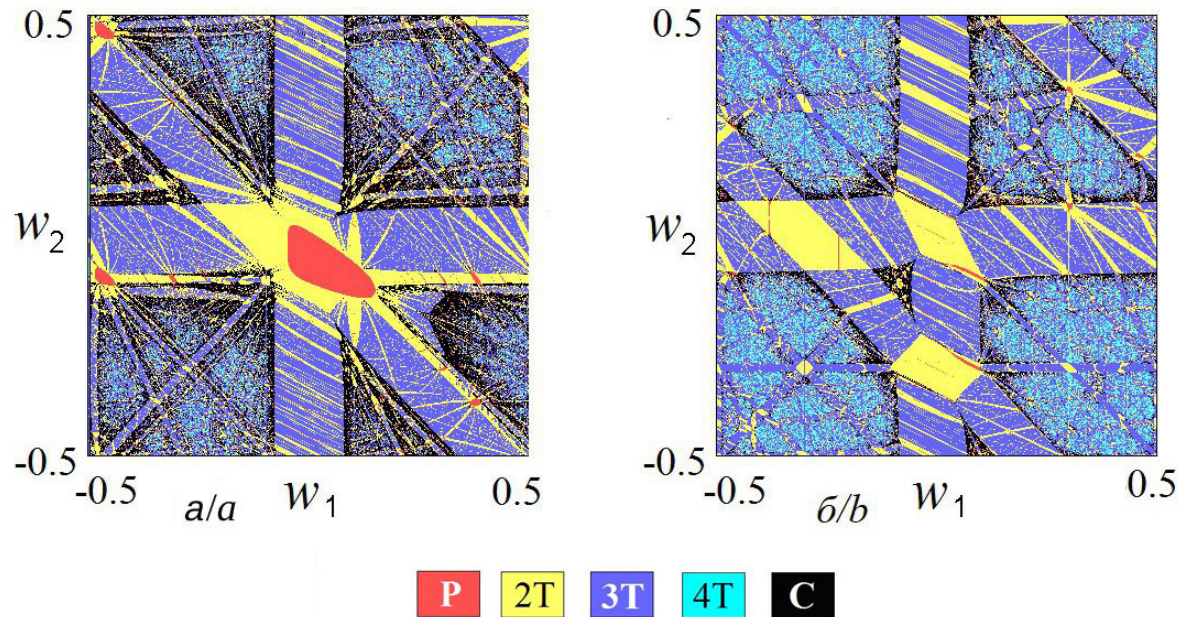


Рис. 10. Ляпуновские карты кольца из осцилляторов для  $\mu = 0.25$ :  $w_3 = 0.1$  (а),  $w_3 = 0.3$  (б) (цвет онлайн)

Fig.10. Lyapunov exponent charts for the ring of oscillators for  $\mu = 0.25$ :  $w_3 = 0.1$  (a),  $w_3 = 0.3$  (b) (color online)



связи сделало возможным захват всех четырех осцилляторов. Отмечаем также расширение полос трехчастотных режимов и встроенных в них областей двухчастотных.

Сравнивая со случаем цепочки, заключаем, что для кольца связь оказывается более «сильной», чем для цепочки. Это проявляется в появлении большой области полной синхронизации всех четырех осцилляторов, а также выраженном разрушении резонансной паутины на бее четырехчастотного режима с образованием хаоса. Причина состоит в том, что для цепочки два осциллятора имеют двух соседей, а два других – только одного. Для кольца все осцилляторы имеют по два соседа.

На рис. 10, б для той же связи показан случай большой расстройки  $w_3 = 0.3$ . Увеличение расстройки снова приводит к появлению трех характерных двухчастотных островов. Из-за увеличения связи их размер и размер резонансных полос больше, чем на рис. 9, а. Кроме того, увеличение расстройки отчасти подавляет хаос в области резонансной паутины.

### 3. Звезда из четырех дискретных осцилляторов

Обратимся теперь к связи типа звезда. В этом случае центральный осциллятор связан с тремя периферийными, а они только с ним. Будем считать, что в центре находится четвертый осциллятор. Тогда можно записать следующее отображение для фаз:

$$\begin{aligned}\psi_1 &\rightarrow \omega_1 + \psi_1^+ \mu \sin(\psi_4 - \psi_1), \\ \psi_2 &\rightarrow \omega_2 + \psi_2 + \mu \sin(\psi_4 - \psi_2), \\ \psi_3 &\rightarrow \omega_3 + \psi_3 + \mu \sin(\psi_4 - \psi_3), \\ \psi_4 &\rightarrow \omega_4 + \psi_4 + \mu \sin(\psi_1 - \psi_4) + \\ &\quad + \mu \sin(\psi_2 - \psi_4) + \mu \sin(\psi_3 - \psi_4).\end{aligned}\quad (12)$$

Вводя относительные фазы в соответствии с (4), получаем:

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow 2\pi w_1 + \theta - \mu \sin(\theta + \phi + \phi) + \mu \sin(\phi + \phi), \\ \phi &\rightarrow 2\pi w_2 + \phi - \mu \sin(\phi + \phi) + \mu \sin \phi, \\ \phi &\rightarrow 2\pi w_3 + \phi - 2\mu \sin \phi - \mu \sin(\theta + \phi + \phi) - \\ &\quad - \mu \sin(\phi + \phi).\end{aligned}\quad (13)$$

В случае очень малой расстройки  $w_3$  эта система редуцируется к случаю цепочки из трех осцилляторов. Это очевидно из геометрии связи, когда третий и четвертый осцилляторы захвачены. Поэтому сразу обсудим случай конечных  $w_3$ .

Резонансные условия для звезды имеют вид (исключается, как и выше, случай  $\omega_3 = \omega_4$ ):

$$\omega_1 = \omega_4, \quad \omega_2 = \omega_4. \quad (14)$$

Используя соотношения (6), получаем резонансные условия для чисел вращения:

$$w_2 = -w_1 - w_3, \quad w_2 = -w_3. \quad (15)$$

Эти линии на плоскости  $(w_1, w_2)$  пересекаются в точке

$$w_1 = 0, \quad w_2 = -w_3. \quad (16)$$

Соответствующая ляпуновская карта для  $w_3 = 0.1$  и  $\mu = 0.15$  показана на рис. 11, а. Сравнивая ее со случаем цепочки на рис. 2, а, заключаем, что эти два случая качественно близки. Основное отличие состоит в конфигурации основных резонансов – для звезды они даются линиями (15) и точкой (16). В то же время есть и отличия в структуре резонансной паутины. Так по сравнению со случаем цепочки исчезает обсуждавшийся в разделе 1 резонанс  $\omega_1 + \omega_3 = 2\omega_2$ , для которого  $w_2 = w_1$ . Причина состоит в том, что для звезды первые три осциллятора не являются соседями. Также можно отметить несколько более развитые области хаоса вблизи вершин параллелограмма, отвечающего основному двухчастотному режиму.

На рис. 11, б показана карта для звезды для несколько большего значения связи  $\mu = 0.25$ . Сравнение со случаем цепочки говорит о более сильном влиянии связи для звезды – резонансная паутина сильно разрушена и хаос более выражен. За счет более сильной связи на рис. 11, б также появляется область полной синхронизации – в форме треугольника. Отмечаем также появление двух не очень широких двухчастотных полос в окрестности линий  $w_2 = 0$   $w_2 = -w_1$ . Они отвечают резонансам  $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4$  и  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_4$ . Они возникают на границах трехчастотных полос за счет их расширения и захвата еще одного осциллятора. Таким образом, внутри двухчастотных полос будут захвачены по два периферийных (второй – третий или первый – второй) и центральный осциллятор.

### Заключение

Дискретные отображения оказываются удобным объектом для исследования ансамблей фазовых осцилляторов. Метод карт ляпуновских показателей, дополненный построением фазовых портретов, позволяет выявить периодические, двух-, трех- и четырехчастотные квазипериодические режимы, а также области хаоса для



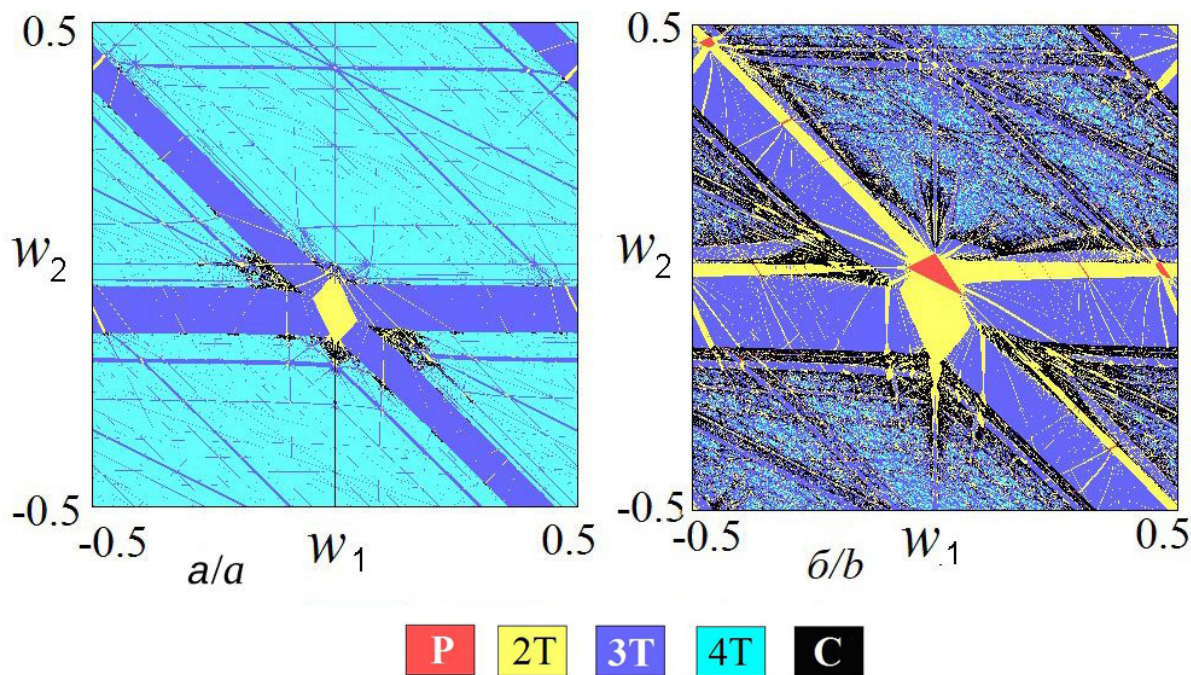


Рис. 11. Ляпуновские карты звезды из осцилляторов для  $w_3 = 0.1$ :  $\mu = 0.15$  (а),  $\mu = 0.25$  (б) (цвет онлайн)  
Fig.11. Lyapunov exponent charts for the star of oscillators,  $w_3 = 0.1$ :  $\mu = 0.15$  (a),  $\mu = 0.25$  (b) (color online)

четырёх фазовых осцилляторов. Для таких ансамблей устройство пространства параметров относительных частотных расстройек для случаев связи типа цепочки, кольца и звезды имеют свои особенности. Они обусловлены различием условий основных резонансов в системах с разной топологией связи. При этом можно выделить резонансы как для пар, так и для троек синхронизированных осцилляторов, чему отвечают разные типы трехчастотных и двухчастотных колебаний. Наблюдается резонансная паутина Арнольда на базе четырехчастотных колебаний. Для нее характерны резонансы более высокого порядка, например, когда собственная частота одного из осцилляторов равна средней для двух ближайших соседей. При сильной связи возможно появление резонансной паутины на базе хаоса. Воздействие связи по сравнению со случаями цепочки для кольца и звезды оказывается более выраженным, что обусловлено увеличением количества связей в двух последних случаях.

#### Список литературы / References

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science*. Cambridge University Press, 2001. 411 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511755743>
2. Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O. *Synchronization: From Simple to Complex*. Springer, 2009. 425 p.
3. Strogatz S. H. From Kuramoto to Crawford: Exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, 2000, vol. 143, iss. 1–4, pp. 1–20. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(00\)00094-4](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00094-4)
4. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F., Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. of Mod. Phys.*, 2005, vol. 77, iss. 1, pp. 137–185. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.137>
5. Kuznetsov A. P., Sedova Y. V., Stankevich N. V. Discrete Rössler Oscillators: Maps and Their Ensembles. *Int. J. of Bifur. and Chaos*, 2023, vol. 33, no. 15, art. 2330037. <https://doi.org/10.1142/S0218127423300379>
6. Biju A. E., Srikanth S., Manoj K., Pawar S. A., Sujith R. I. Dynamics of minimal networks of limit cycle oscillators. *Nonlinear Dynamics*, 2024, vol. 112, pp. 11329–11348. <https://doi.org/10.1007/s11071-024-09641-5>
7. Arefev A. M., Grines E. A., Osipov G. V. Heteroclinic cycles and chaos in a system of four identical phase oscillators with global biharmonic coupling. *Chaos*, 2023, vol. 33, iss. 8, art. 083112. <https://doi.org/10.1063/5.0156446>
8. Ashwin P., Burylko O. Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators. *Chaos*, 2015, vol. 25, iss. 1, art. 013106. <https://doi.org/10.1063/1.4905197>
9. Guan Y., Moon K., Kim K. T., Li L. K. Chimera states in a can-annular combustion system. *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*,





- 2023, vol. 265, iss. 4, pp. 3350–3357. [https://doi.org/10.3397/IN\\_2022\\_{\\_}0473](https://doi.org/10.3397/IN_2022_{_}0473)
10. Maistrenko V., Vasylenko A., Maistrenko Y., Mosekilde E. Phase chaos in the discrete Kuramoto model. *Int. J. of Bifur. and Chaos*, 2010, vol. 20, no. 6, pp. 1811–1823. <https://doi.org/10.1142/S0218127410026861>
11. Maistrenko V., Vasylenko A., Maistrenko Y., Mosekilde E. Phase chaos and multistability in the discrete Kuramoto model. *Nonlinear Oscillations*, 2008, vol. 11, pp. 229–241. <https://doi.org/10.1007/s11072-008-0026-4>
12. Kuznetsov A. P., Sedova Y. V. Low-dimensional discrete Kuramoto model: Hierarchy of multifrequency quasiperiodicity regimes. *Int. J. of Bifur. and Chaos*, 2014, vol. 24, no. 7, art. 1430022. <https://doi.org/10.1142/S0218127414300225>
13. Shim W. On the generic complete synchronization of the discrete Kuramoto model. *Kinetic & Related Models*, 2020, vol. 13, iss. 5, pp. 979–1005. <https://doi.org/10.3934/krm.2020034>
14. Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: the Arnol'd resonance web. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2008, vol. 15, iss. 5, pp. 769–787. <https://doi.org/10.36045/bbms/1228486406>
15. Barlev G., Girvan M., Ott E. Map model for synchronization of systems of many coupled oscillators. *Chaos*, 2010, vol. 20, iss. 2, art. 023109. <https://doi.org/10.1063/1.3357983>
16. Ha S. Y., Kim D., Kim J., Zhang X. Uniform-in-time transition from discrete to continuous dynamics in the Kuramoto synchronization. *J. of Mathematical Phys.*, 2019, vol. 60, iss. 5, art. 051508. <https://doi.org/10.1063/1.5051788>
17. Kim S., MacKay R. S., Guckenheimer J. Resonance regions for families of torus maps. *Nonlinearity*, 1989, vol. 2, no. 3, pp. 391–404. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/2/3/001>
18. Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R. S. Three coupled oscillators: mode-locking, global bifurcations and toroidal chaos. *Physica D*, 1991, vol. 49, iss. 3, pp. 387–475. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(91\)90155-3](https://doi.org/10.1016/0167-2789(91)90155-3)
19. Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Sedova Y. V., Turukina L. V. On modelling the dynamics of coupled self-oscillators using the simplest phase maps. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 20, no. 2, pp. 112–137 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2012-20-2-112-137>
20. Chen J., Zhou L., Sun W. Consensus analysis of chain star networks coupled by leaf nodes. *Physica Scripta*, 2023, vol. 98, no. 12, art. 125204. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad0588>
21. Chen X., Li F., Liu S., Zou W. Emergent behavior of conjugate-coupled Stuart–Landau oscillators in directed star networks. *Physica A*, 2023, vol. 629, art. 129211. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2023.129211>
22. Li X. Y., Chang J. M. LP-Star: Embedding Longest Paths into Star Networks with Large-Scale Missing Edges under an Emerging Assessment Model. *IEEE TETC*, 2025, vol. 13, pp. 147–161. <https://doi.org/10.1109/TETC.2024.3387119>
23. Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V. Regional Structure of Two-and Three-Frequency Regimes in a Model of Four Phase Oscillators. *Int. J. of Bifur. and Chaos*, 2022, vol. 32, no. 3, art. 2230008. <https://doi.org/10.1142/S0218127422300087>
24. Emelianova Y. P., Kuznetsov A. P., Turukina L. V., Sataev I. R., Chernyshov N. Y. A structure of the oscillation frequencies parameter space for the system of dissipatively coupled oscillators. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2014, vol. 19, iss. 4, pp. 1203–1212. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.08.004>
25. Ashwin P., Guaschi J., Phelps J. M. Rotation sets and phase-locking in an electronic three oscillator system. *Physica D*, 1993, vol. 66, iss. 3–4, pp. 392–411. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90075-C](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90075-C)
26. Kuznetsov A. P., Turukina L. V., Sataev I. R., Chernyshov N. Y. Synchronization and multi-frequency quasi-periodicity in the dynamics of coupled oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2014, vol. 22, no. 1, pp. 27–54 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2014-22-1-27-54>

Поступила в редакцию 27.11.2024; одобрена после рецензирования 11.01.2025;  
принята к публикации 20.01.2025; опубликована 30.06.2025

The article was submitted 27.11.2024; approved after reviewing 11.01.2025;  
accepted for publication 20.01.2025; published 30.06.2025