



РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 4–13
Izvestiya of Saratov University. Physics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 4–13
<https://fizika.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-1-4-13>, EDN: AKMGFG

Научная статья
УДК 517.9

Анализ трех неидентичных контактов Джозефсона методом карт ляпуновских показателей

А. П. Кузнецов, И. Р. Сатаев, Ю. В. Седова 

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Россия, 410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

Кузнецов Александр Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, kuzalexp@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5528-1979>

Сатаев Игорь Рустамович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, sataevir@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-3551-471X>

Седова Юлия Викторовна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, sedovayv@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7843-646X>

Аннотация. Рассматривается система трех неидентичных контактов Джозефсона, связанных через RLC цепь. Используется метод карт ляпуновских показателей, позволяющий выявить основные типы динамики системы и провести анализ зависимости ее свойств от параметров. Продемонстрирована возможность как двух-, так и трехчастотных инвариантных торов. Обсуждается зависимость картины от типа связи в системе.

Ключевые слова: контакт Джозефсона, карта ляпуновских показателей, инвариантный тор, квазипериодичность, резонансная паутина Арнольда

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-12-00121, <https://rscf.ru/en/project/21-12-00121/>).

Для цитирования: Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Седова Ю. В. Анализ трех неидентичных контактов Джозефсона методом карт ляпуновских показателей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 4–13. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-1-4-13>, EDN: AKMGFG

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Analysis of three non-identical Josephson junctions by the method of Lyapunov exponent charts

A. P. Kuznetsov, I. R. Sataev, Yu. V. Sedova 

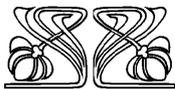
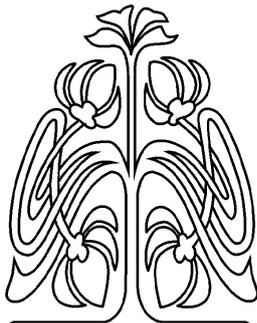
Saratov Branch of the Institute of RadioEngineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, 38 Zelyonaya St., Saratov 410019, Russia

Alexander P. Kuznetsov, kuzalexp@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5528-1979>, AuthorID: 509

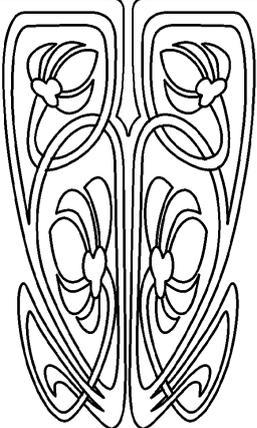
Igor R. Sataev, sataevir@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-3551-471X>, AuthorID: 29427

Yuliya V. Sedova, sedovayv@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7843-646X>, AuthorID: 168897

Abstract. Background and Objectives: The Josephson effect is widely used for both generating and receiving very high frequency signals. The approaches and methods of nonlinear dynamics are commonly used: construction of phase portraits, bifurcation analysis, Kuramoto model



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





approach, etc. Usually large arrays of identical junctions are considered. However, the non-identity of junctions leads to new and interesting effects. A very popular model is a chain of junctions connected via an RLC circuit. In this case, two types of non-identity are possible – in terms of critical currents I_n through the junctions and in terms of the value r_n of junction resistances. An increase in the number of junctions from two to three leads to the possibility of quasiperiodic dynamics with invariant tori of dimensions both two and three and to a complex structure of the parameter space. **Materials and Methods:** In this paper, we will mainly consider three junctions that are not identical in terms of resistance. As the main research tool, we will use the method of construction of Lyapunov exponent charts. Within the framework of this method, the type of dynamics of the system is determined by the signature of the spectrum of Lyapunov exponents. The parameter plane is scanned and the types of modes are identified at each point. The method is effective in that it allows one to study all types of possible regimes and fine details of the parameter space arrangement. **Results:** For the analysis of the dynamics of non-identical Josephson junctions, the method of Lyapunov exponent charts is effective. With its help, the regions of periodic regimes, regimes of two-frequency and three-frequency quasiperiodicity, chaos have been revealed. As a rule, the regions of two-frequency quasiperiodicity have the form of bands of different widths immersed in the region of three-frequency quasiperiodicity, which form the structure of the Arnold's resonant web. **Conclusion:** The boundaries of the regions of two-frequency quasiperiodicity are the lines of saddle-node bifurcations of invariant tori. As the area of chaos increases, the Arnold's resonant web can collapse. Changing the type of external circuit coupling the junctions does not fundamentally affect the dynamics of the system.

Keywords: Josephson junction, Lyapunov exponent chart, invariant torus, quasiperiodicity, Arnold's resonant web

Acknowledgements: This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 21-12-00121, <https://rscf.ru/en/project/21-12-00121/>).

For citation: Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Sedova Yu. V. Analysis of three non-identical Josephson junctions by the method of Lyapunov exponent charts. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 4–13 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-1-4-13>, EDN: AKMGFG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Эффект Джозефсона находит широкое применение, как для генерации, так и приема сигналов очень высокой частоты. Контакт Джозефсона посвящена обширная литература (например, [1–19]). Часто используются подходы и методы нелинейной динамики: построение фазовых портретов, бифуркационный анализ, использование модели Курамото и т. д. Обычно рассматривают большие массивы идентичных контактов. Однако неидентичность контактов приводит к новым интересным эффектам. Два неидентичных контакта со связью через емкость описаны в [11, 12], а через резистор – в [2, 13–16]. Обнаружена сложная динамика, включая хаос и гиперхаос.

Весьма популярной является модель последовательно соединенных через RLC цепь контактов, как показано на рис.1 [4–7,18]. В этом случае возможны два типа неидентичности – по критическим токам через контакты I_n и по величине сопротивлений контактов r_n . Увеличение числа контактов от двух до трех приводит к возможности квазипериодической динамики с инвариантными торами размерности как два, так и три и к сложному устройству пространства параметров. В [19] рассмотрена система из трех контактов с неидентичностью по критическим токам.

В настоящей работе мы рассмотрим три контакта, неидентичных в основном по величине сопротивлений. С этой целью будем использовать метод карт ляпуновских показателей.

В рамках данного метода тип динамики системы определяется в каждой точке плоскости параметров по сигнатуре спектра показателей Ляпунова [20–26]. Затем выполняется сканирование всей плоскости параметров и идентификация всех типов режимов. Метод эффективен тем, что позволяет изучить все типы режимов и тонкие детали устройства пространства параметров.

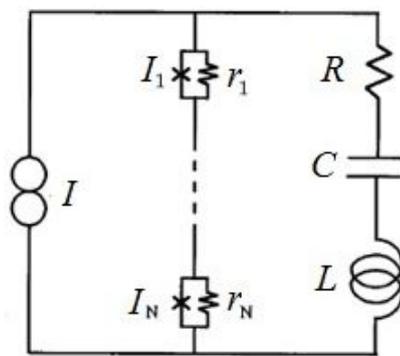


Рис.1. Модель N нагруженных на RLC цепь контактов Джозефсона [4–7]

Fig.1. Model of a chain of N Josephson contacts loaded on an RLC circuit [4–7]

1. Уравнения

Уравнения для нагруженных на RLC цепь N контактов Джозефсона имеют вид [1, 4–7]:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2er} \dot{\phi}_n + I_n \sin \phi_n &= I - \dot{Q}, \\ L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C &= \frac{\hbar}{2e} \sum_{n=1}^N \dot{\phi}_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \hbar – постоянная Планка, e – заряд электрона, $I_n \sin \phi_n$ – сверхпроводящий ток, I_n – критический



ток через соответствующий контакт с сопротивлением r_n , R , L , C – элементы цепи, в которую включены контакты, I – внешний ток, \dot{Q} – ток через параллельную RLC нагрузку. Величина ϕ_n является разностью фаз между волновыми функциями сверхпроводников по обе стороны n -го контакта. В контексте динамики контактов Джозефсона ее обычно называют просто «фазой» (см. [1, п. 7.4.1]). Отметим, что уравнения для каждого контакта содержат только первую производную от величины ϕ_n по времени, а вторая – отброшена. Это можно сделать в случае, когда емкость контакта стремится к нулю [1, п. 7.4.2].

Введем замену переменных

$$Q = \alpha Q^*, \quad t = \beta t^*, \quad I = I_1 I^*, \quad (2)$$

где

$$\alpha = \frac{\hbar^2 N}{4e^2 I_1^2 r_1}, \quad \beta = \frac{\hbar}{2e I_1 r_1}. \quad (3)$$

Тогда получаем следующие безразмерные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{r_n} \dot{\phi}_n + \frac{I_n}{I_1} \sin \phi_n &= I - \varepsilon \dot{Q}, \\ \ddot{Q} + \gamma \dot{Q} + \omega_0^2 Q &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \dot{\phi}_n. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{N \hbar}{L 2e I_1}, \quad \gamma = \frac{\hbar R}{2e I_1 L r_1}, \quad \omega_0 = \frac{\hbar}{2e I_1 r_1 \sqrt{LC}}. \quad (5)$$

Для сокращения записи знак звездочки у новых переменных опускаем. Нормируем параметры и переменные на критический ток I_1 и сопротивление r_1 первого контакта; понятно, что можно выбрать любое сопротивление и ток.

2. Динамика неидентичных по сопротивлению контактов

Рассмотрим три идентичных по критическому току и неидентичных по величине сопротивлений контакта. Тогда из (4) получаем

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= I - \sin \phi_1 - \varepsilon \dot{Q}, \\ \dot{\phi}_2 &= \eta_1 (I - \sin \phi_2 - \varepsilon \dot{Q}), \\ \dot{\phi}_3 &= \eta_2 (I - \sin \phi_3 - \varepsilon \dot{Q}), \\ \ddot{Q} + \gamma \dot{Q} + \omega_0^2 Q &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 \dot{\phi}_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\eta_1 = \frac{r_2}{r_1}$, $\eta_2 = \frac{r_3}{r_1}$ – параметры неидентичности по сопротивлениям контактов. Случай $\eta_1 = \eta_2 = 1$ отвечает идентичным контактам.

На рис. 2 представлены карты ляпуновских показателей системы (6) на плоскости параметров неидентичности η_1, η_2 при разных параметрах связи ε . Значения остальных параметров здесь и далее: $I = 1.1$, $\gamma = 1$, $\omega_0^2 = 1.2$. Параметр тока через контакты I выбираем больше единицы, поскольку иначе в соответствии с (6) для фаз наблюдается тривиальный режим устойчивого равновесия. Использованы обозначения: Р – периодический режим, 2Т – двухчастотные торы, 3Т – трехчастотные торы, С – хаос. Тип режима определяется по сигнатуре спектра показателей Ляпунова в соответствии с таблицей. При построении карт в каждой точке плоскости параметров выбирались фиксированные начальные условия в окрестности начала координат. Мультистабильность в области регулярных режимов может наблюдаться в узкой окрестности границ островов полной синхронизации, однако в использованных в статье масштабах карт она визуально практически не сказывается. В области сложных режимов мультистабильность, вероятно, также возможна, этот вопрос требует специального исследования.

При $\varepsilon = 0.3$ для $\eta_1 > 1$ и $\eta_2 > 1$ доминируют хаотические области со встроенными областями двухчастотных торов и периодических режимов. В случае $\eta_1 < 1$ или $\eta_2 < 1$ доминируют режимы трехчастотных торов. Их область пересекают полосы двухчастотных торов разной

Соответствие сигнатуры спектра показателей Ляпунова, буквенного и цветового обозначения

Table. Correspondence between the signature of the spectrum of Lyapunov exponents, lettering and color designations

Обозначение / Symbols	Сигнатура спектра показателей Ляпунова ($\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5$) / Signature of the Lyapunov exponent spectrum ($\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5$)
Р	(0, -, -, -, -) – периодические автоколебания / periodic self-sustained oscillations
2Т	(0, 0, -, -, -) – двухчастотные квазипериодические автоколебания / two-frequency quasi-periodic self-sustained oscillations
3Т	(0, 0, 0, -, -) – трехчастотные квазипериодические автоколебания / three-frequency quasi-periodic self-sustained oscillations
С	(+, 0, -, -, -) – хаотические автоколебания / chaotic self-sustained oscillations

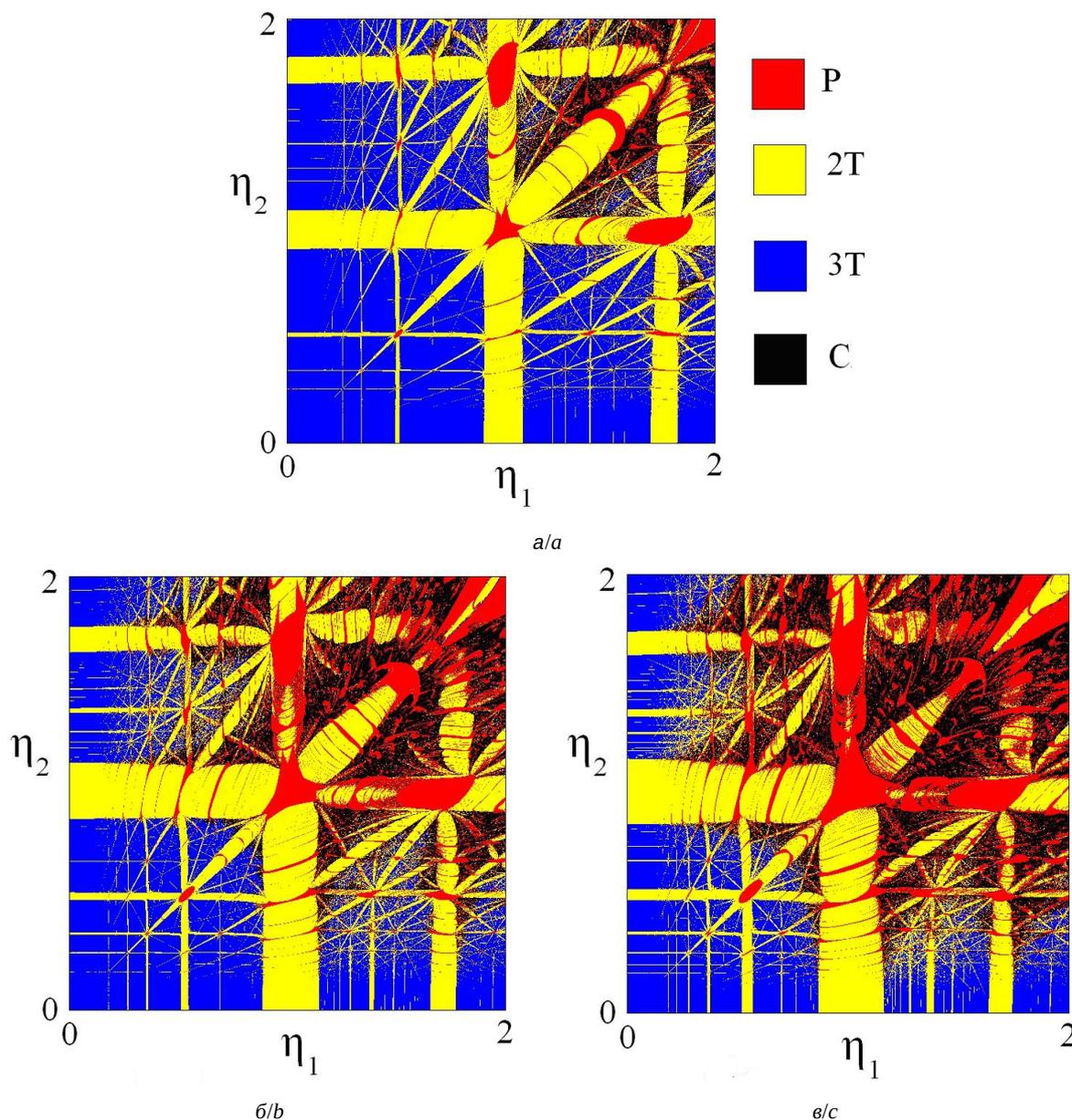


Рис. 2. Карты ляпуновских показателей системы (6) на плоскости параметров неидентичности, $I = 1.1$, $\gamma = 1$, $\omega_0^2 = 1.2$; $a - \varepsilon = 0.3$, $b - \varepsilon = 0.5$, $c - \varepsilon = 0.7$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Lyapunov exponent charts of the system (6) in the plane of nonidentity parameters, $I = 1.1$, $\gamma = 1$, $\omega_0^2 = 1.2$; $a - \varepsilon = 0.3$, $b - \varepsilon = 0.5$, $c - \varepsilon = 0.7$ (color online)

ширины, образующих сложную фракталоподобную структуру. Такую структуру часто называют резонансной паутиной Арнольда [20–24].

Отметим, что наиболее широкие полосы располагаются в окрестностях линий $\eta_1 = 1$ и $\eta_2 = 1$, отвечающих идентичным первый-второй и первый-третий контакт. Из рис. 2 также видно, что при идентичности всех трех контактов $\eta_1 = \eta_2 = 1$ в рассматриваемом случае наблюдаются только периодический режим. Этот режим оказывается в некоторой степени устой-

чивым по отношению к изменению параметров неидентичности. В этом плане картина отчасти аналогична случаю трех связанных осцилляторов ван дер Поля, для которых на плоскости частотных расстройек наблюдаются две широкие полосы двухчастотных торов, пересечение которых дает область периодических режимов в форме параллелограмма [25]. В нашем случае пересечение полос двухчастотных торов при других значениях параметров η_1 и η_2 (например, в окрестности $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 1.8$ или $\eta_1 = 1.8$,



$\eta_2 = 1$) также соответствует периодическим режимам, отвечающим более высоким резонансам на торе.

С ростом ϵ до значения $\epsilon = 0.5$ хаотическая область расширяется (рис.2, б). Для $\eta_1 > 1$, $\eta_2 > 1$ мелкие полосы двухчастотных торов разрушаются. Хаос становится возможным и при $\eta_1 > 1$ и при $\eta_2 > 1$.

При $\epsilon = 0.7$ область хаоса еще более расширяется и проникает в область, когда оба параметра неидентичности меньше единицы (рис. 2, в). В полосах же двухчастотных торов в правой верхней части карты заметно расширяются области встроенных периодических режимов.

3. Резонансная паутина Арнольда

На рис. 3 показан фрагмент карты, приведенной на рис. 2, а, демонстрирующий в увеличенном виде резонансную паутину Арнольда. Можно видеть множество полос двухчастотных торов, на пересечении которых наблюдаются небольшие области периодических режимов.

Интересным является вопрос о типе бифуркаций инвариантных торов (квазипериодических бифуркаций). Ответ может быть получен также с помощью показателей Ляпунова. Графики ляпуновских показателей для $\eta_1 = 1.65$ показаны на рис. 4. Стрелками показаны точки, в которых один из показателей Ляпунова обращается в ноль при переходе от 2Т тора к 3Т тору. Вид графиков

в соответствии с классификацией [27] позволяет заключить, что наблюдается седло-узловая бифуркация инвариантных торов, когда устойчивый и седловой 2-торы сливаются и образуется устойчивый 3-тор.

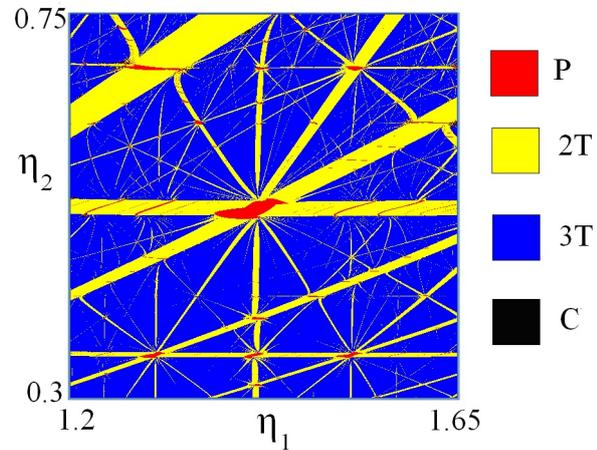


Рис. 3. Резонансная паутина Арнольда, $\epsilon = 0.3$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Arnold's resonance web, $\epsilon = 0.3$ (color online)

4. Учет неидентичности контактов по критическим токам

Обсудим теперь влияние неидентичности контактов по критическим токам. Для идентичных по сопротивлениям контактов из (4)

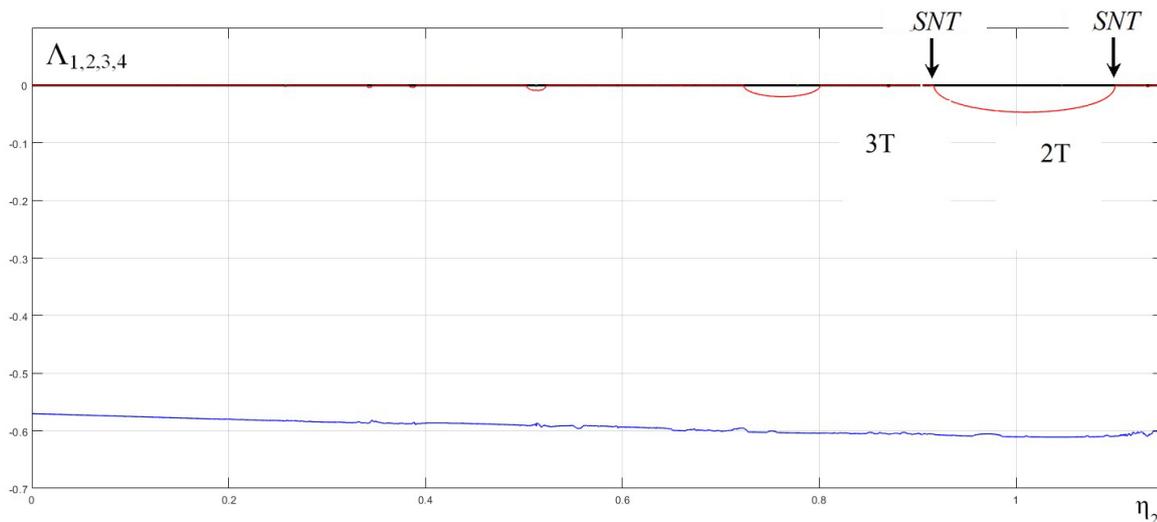


Рис.4. Графики ляпуновских показателей, стрелками показаны седло-узловые бифуркации инвариантных торов SNT; $\epsilon = 0.3$, $\eta_1 = 1.65$

Fig.4. Graphs of Lyapunov exponents. The arrows indicate saddle-node bifurcations of invariant tori SNT; $\epsilon = 0.3$, $\eta_1 = 1.65$



получаем

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= I - \sin \phi_1 - \varepsilon \dot{Q}, \\ \dot{\phi}_2 &= I - \xi_1 \sin \phi_2 - \varepsilon \dot{Q}, \\ \dot{\phi}_3 &= I - \xi_2 \sin \phi_3 - \varepsilon \dot{Q}, \\ \ddot{Q} + \gamma \dot{Q} + \omega_0^2 Q &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 \dot{\phi}_n. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\xi_1 = \frac{I_2}{I_1}, \xi_2 = \frac{I_3}{I_1}$ – параметры неидентичности по критическим токам.

На рис.5 показана карта ляпуновских показателей на плоскости параметров неидентичности ξ_1, ξ_2 для использовавшихся выше значений параметров $I = 1.1, \gamma = 1, \omega_0^2 = 1.2$.

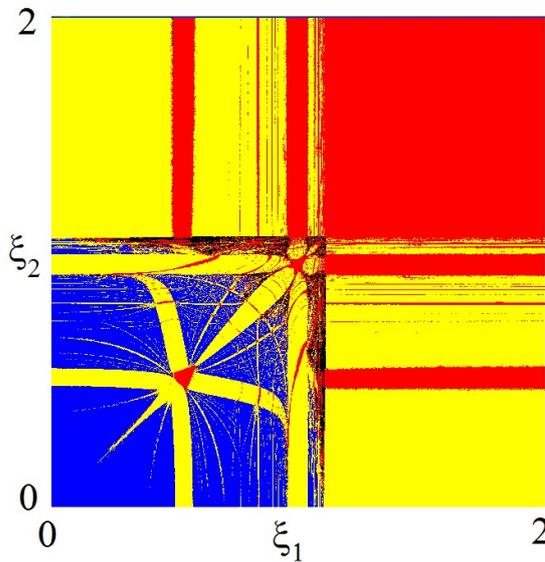


Рис. 5. Карта ляпуновских показателей для неидентичных по критическим токам трех связанных контактов (7); $\varepsilon = 0.5, I = 1.1, \gamma = 1, \omega_0^2 = 1.2$ (цвет онлайн)

Fig.5. Lyapunov exponent chart for three connected junctions that are not identical in critical currents (7); $\varepsilon = 0.5, I = 1.1, \gamma = 1, \omega_0^2 = 1.2$ (color online)

Наблюдается большая область периодических режимов, появление которой обусловлено вытекающими из (7) условиями $I < \xi_1, I < \xi_2$, когда в отсутствие связи наблюдаются устойчивые состояния равновесия для второго и третьего контактов.

Можно видеть также, что область трехчастотных торов занимает меньший размер и локализована в левой нижней части карты. Области хаоса практически отсутствуют. Более детальное обсуждение этого случая можно найти в [19].

Дадим теперь иллюстрации для случая обоих типов неидентичности – по сопротивлениям

и критическим токам. Тогда из (4) следуют уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= I - \sin \phi_1 - \varepsilon \dot{Q}, \\ \dot{\phi}_2 &= \eta_1 (I - \xi_1 \sin \phi_2 - \varepsilon \dot{Q}), \\ \dot{\phi}_3 &= \eta_2 (I - \xi_2 \sin \phi_3 - \varepsilon \dot{Q}), \\ \ddot{Q} + \gamma \dot{Q} + \omega_0^2 Q &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 \dot{\phi}_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\eta_1 = \frac{r_2}{r_1}, \eta_2 = \frac{r_3}{r_1}, \xi_1 = \frac{I_2}{I_1}, \xi_2 = \frac{I_3}{I_1}$.

На рис. 6 показана ляпуновская карта на плоскости параметров неидентичности η_1, η_2 для $\xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.2$. Последняя пара параметров выбрана в соответствии с рис. 5 так, чтобы им отвечал режим трехчастотной квазипериодичности. Можно видеть, что трехчастотная квазипериодичность в основном сохраняется и при неидентичности сопротивлений за исключением узких полос двухчастотных торов.

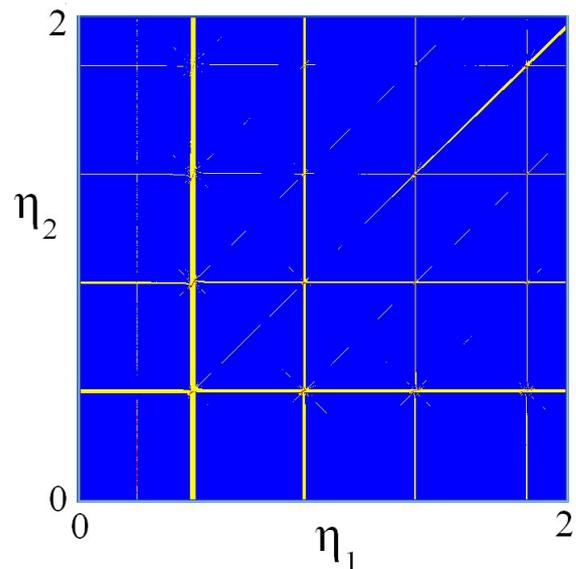


Рис. 6. Ляпуновская карта для контактов, неидентичных как по величине сопротивлений, так и по критическим токам (8); $I = 1.1, \gamma = 1, \omega_0^2 = 1.2, \varepsilon = 0.5, \xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.2$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Lyapunov chart for junctions that are not identical in terms of both resistance values and critical currents (8); $I = 1.1, \gamma = 1, \omega_0^2 = 1.2, \varepsilon = 0.5, \xi_1 = 0.3, \xi_2 = 0.2$ (color online)

5. Влияние типа связи

Нами рассматривались уравнения в рамках модели [4–7], когда связь между контактами осуществлялась через RLC цепочку. Обсудим, как влияют на динамику системы различные типы



связи. Этот вопрос является достаточно интересным, поскольку даже для простейшего случая связанных осцилляторов ван дер Поля характер наблюдаемых режимов существенно зависит от типа связи (через резистор, емкость или индуктивность) [28,29].

Пусть внешняя цепь представляет собой LC-цепочку, т. е. $R=0$. Тогда в соответствии с (5) $\gamma = 0$. (Отметим, что обращение с безразмерными уравнениями требует определенной аккуратности. Например, в нормировке [18] $\gamma = 0$ отвечает одновременно равенству нулю как сопротивления внешней цепи, так и сопротивлений контактов.)

Карта ляпуновских показателей для рассматриваемого случая на плоскости η_1, η_2 показана на рис.7. Можно видеть, что область хаоса расширяется. Также наблюдаются широкие области двухчастотных торов. Резонансная паутина Арнольда разрушается.

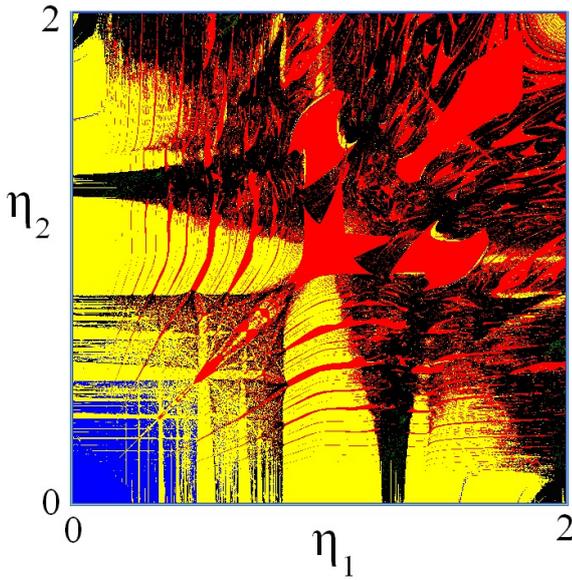


Рис. 7. Ляпуновская карта для неидентичных контактов (6) при связи через LC-цепь; $\varepsilon = 0.5, \gamma = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 7. Lyapunov chart for non-identical junctions (6) with coupling via an LC circuit; $\varepsilon = 0.5, \gamma = 0$ (color online)

Пусть теперь контакты связаны через емкость и резистор. В этом случае нормировка (3), (5) приводит к особенности при $L=0$ и неприемлима. Используем замену переменных (2), но выбираем условия нормировки

$$\alpha = \frac{\hbar N}{2eR}, \quad \beta = \frac{\hbar}{2eI r_1}. \quad (9)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{r_n} \dot{\phi}_n + \sin \phi_n &= I - \varepsilon \dot{Q}, \\ \dot{Q} + Q/\tau &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \dot{\phi}_n, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\tau = 2eI r_1 \frac{RC}{\hbar}, \varepsilon = \frac{N}{R} r_1$.

Для трех неидентичных контактов получаем

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= I - \sin \phi_1 - \varepsilon \dot{Q}, \\ \dot{\phi}_2 &= \eta_1 (I - \sin \phi_2 - \varepsilon \dot{Q}), \\ \dot{\phi}_3 &= \eta_2 (I - \sin \phi_3 - \varepsilon \dot{Q}), \\ \dot{Q} + Q/\tau &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 \dot{\phi}_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Карта ляпуновских показателей системы (11) для $\varepsilon = 0.5$ и $\tau = 0.3$ показана на рис. 8. Вид карты качественно близок случаю связи через RLC цепь, но область трехчастотных торов занимает и правую верхнюю часть карты.

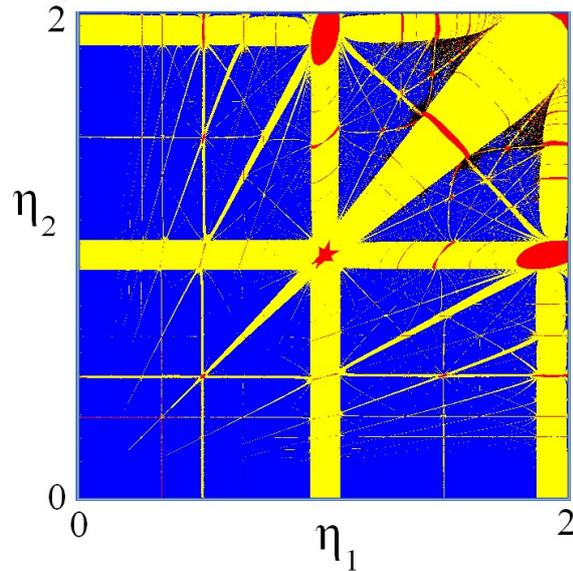


Рис. 8. Ляпуновская карта для неидентичных контактов (11) при связи через RLC цепь; $\varepsilon = 0.5, \tau = 0.3$ (цвет онлайн)

Fig. 8. Lyapunov chart for non-identical junctions (11) with coupling via an RLC circuit; $\varepsilon = 0.5, \tau = 0.3$ (color online)

Заключение

Для анализа динамики неидентичных контактов Джозефсона эффективным является метод карт ляпуновских показателей. С его помощью выявляются области периодических режимов, режимов двухчастотной и трехчастотной квазипериодичности, хаоса. Как правило, области двухчастотной квазипериодичности имеют вид



полос разной ширины, погруженных в область трехчастотной квазипериодичности, формирующей структуру резонансной паутины Арнольда. Границами областей двухчастотной квазипериодичности являются линии седло-узловых бифуркаций инвариантных торов. С увеличением области хаоса паутина может разрушаться. Изменение типа внешней цепи, объединяющей контакты, приводит к заметному изменению вида ляпуновских карт, однако характерная область резонансной паутины сохраняется.

Список литературы

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М. : Техносфера, 2003. 508 с. (Сер. Мир физики и техники).
2. Askerzade I., Bozbey A., Cantürk M. Modern aspects of Josephson dynamics and superconductivity electronics. Springer International Publishing. 2017. 186 p.
3. Likharev K. K. Dynamics of Josephson Junctions and Circuits. New York : Gordon and Breach, 1986.
4. Wiesenfeld K., Colet P., Strogatz S. H. Synchronization Transitions in a Disordered Josephson Series Array // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, № 3. P. 404–407. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.404>
5. Wiesenfeld K., Colet P., Strogatz S. H. Frequency locking in Josephson arrays: Connection with the Kuramoto model // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 1563–1569. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.1563>
6. Wiesenfeld K., Swift J. W. Averaged equations for Josephson junction series arrays // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51, iss. 2. P. 1020–1025. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.1020>
7. Nichols S., Wiesenfeld K. Ubiquitous neutral stability of splay-phase states // Physical Review A. 1992. Vol. 45, № 12. P. 8430–8435. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.8430>
8. Filatrella G., Pedersen N. F., Wiesenfeld K. High-Q cavity-induced synchronization in oscillator arrays // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61, iss. 3. P. 2513–2518. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.2513>
9. Jain A. K., Likharev K. K., Lukens J. E., Sauvageau J. E. Mutual phase-locking in Josephson junction arrays // Phys. Rep. 1984. Vol. 109. P. 310–426. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(84\)90002-4](https://doi.org/10.1016/0370-1573(84)90002-4)
10. Dana S. K., Sengupta D. C., Edoh K. D. Chaotic dynamics in Josephson junction // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 2001. Vol. 48, № 8. P. 990–996. <https://doi.org/10.1109/81.940189>
11. Valkering T. P., Hooijer C. L. A., Kroon M. F. Dynamics of two capacitively coupled Josephson junctions in the overdamped limit // Physica D. 2009. Vol. 135, iss. 1–2. P. 137–153. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(99\)00116-5](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(99)00116-5)
12. Abdullaev F. Kh., Abdumalikov A. A., Jr., Buisson O., Tsoy E. N. Phase-locked states in the system of two capacitively coupled Josephson junctions // Phys. Rev. B. 2000. Vol. 62, iss. 10. P. 6766–6773. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.62.6766>
13. Kurt E., Canturk M. Chaotic dynamics of resistively coupled DC-driven distinct Josephson junctions and the effects of circuit parameters // Physica D. 2009. Vol. 238, № 22. P. 2229–2237. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2009.09.005>
14. Kurt E., Canturk M. Bifurcations and Hyperchaos from a DC Driven Nonidentical Josephson Junction System // Int. J. Bifur. Chaos. 2010. Vol. 20, № 11. P. 3725–374 <https://doi.org/10.1142/S021812741002801X>
15. Stork M., Kurt E. Control system approach to the dynamics of nonidentical Josephson junction systems // 2015 International Conference on Applied Electronics (AE). IEEE. 2015. P. 233–238.
16. Celik K., Kurt E., Stork M. Can non-identical Josephson junctions be synchronized? // 2017 IEEE 58th International Scientific Conference on Power and Electrical Engineering of Riga Technical University (RTUCON). IEEE. 2017. P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/RTUCO~N.2017.8124771>
17. Ojo K. S., Njah A. N., Olusola O. I., Omeike M. O. Generalized reduced-order hybrid combination synchronization of three Josephson junctions via backstepping technique // Nonlinear Dynamics. 2014. Vol. 77, № 3. P. 583–595. <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1319-z>
18. Vlasov V., Pikovskiy A. Synchronization of a Josephson junction array in terms of global variables // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 88, iss. 2. P. 022908 (5 pages). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.022908>
19. Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Sedova Yu. V. Dynamics of three and four non-identical Josephson junctions // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 7, № 1. P. 105–110. <https://doi.org/10.5890/JAND.2018.03.009>
20. Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R. S. Three coupled oscillators: Mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // Physica D. 1991. Vol. 49. P. 387–475. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(91\)90155-3](https://doi.org/10.1016/0167-2789(91)90155-3)
21. Broer H., Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol'd resonance web // Reprint from the Belgian Mathematical Society. 2008. P. 769–787. <https://doi.org/10.36045/bbms/1228486406>
22. Inaba N., Kamiyama K., Kousaka T., Endo T. Numerical and experimental observation of Arnol'd resonance webs in an electrical circuit // Physica D. 2015. Vol. 311. P. 17–24. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2015.08.008>
23. Truong T. Q., Tsubone T., Sekikawa M., Inaba N., Endo T. Arnol'd resonance webs and Chenciner bubbles from a three-dimensional piecewise-constant hysteresis oscillator // Progress of Theoretical and Experimental Physics. 2017. Vol. 2017, iss. 5, P. 053A04 (15 pages). <https://doi.org/10.1093/ptep/ptx058>
24. Kuznetsov A. P., Sedova Y. V. Low-dimensional discrete Kuramoto model: Hierarchy of multifrequency quasiperiodicity regimes // Int. J. Bifurcation Chaos.



2014. Vol. 24, iss. 07. P. 1430022 (10 pages). <https://doi.org/10.1142/S0218127414300225>
25. Emelianova Y. P., Kuznetsov A. P., Turukina L. V., Sataev I. R., Chernyshov N. Yu. A structure of the oscillation frequencies parameter space for the system of dissipatively coupled oscillators // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2014. Vol. 19, iss. 4. P. 1203–1212. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.08.004>
26. Emelianova Yu. P., Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V. Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Physica D*. 2013. Vol. 244, № 1. P. 36–49. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2012.10.012>
27. Broer H., Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2011. Vol. 16, № 1–2. P. 154–184. <https://doi.org/10.1134/S1560354711010060>
28. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М. : ЛИБРОКОМ, 2010. 360 с.
29. Balanov A. G., Janson N. B., Postnov D. E., Sosnovtseva O. Synchronization: from simple to complex. Springer. 2009. 425 с.
10. Dana S. K., Sengupta D. C., Etoh K. D. Chaotic dynamics in Josephson junction. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2001, vol. 48, no. 8, pp. 990–996. <https://doi.org/10.1109/81.940189>
11. Valkering T. P., Hooijer C. L. A., Kroon M. F. Dynamics of two capacitively coupled Josephson junctions in the overdamped limit. *Physica D*, 2009, vol. 135, iss. 1–2, pp. 137–153. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(99\)00116-5](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(99)00116-5)
12. Abdullaev F. Kh., Abdumalikov A. A., Jr., Buisson O., Tsoy E. N. Phase-locked states in the system of two capacitively coupled Josephson junctions. *Phys. Rev. B*, 2000, vol. 62, iss. 10, pp. 6766–6773. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.62.6766>
13. Kurt E., Canturk M. Chaotic dynamics of resistively coupled DC-driven distinct Josephson junctions and the effects of circuit parameters. *Physica D*, 2009, vol. 238, no. 22, pp. 2229–2237. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2009.09.005>
14. Kurt E., Canturk M. Bifurcations and Hyperchaos from a DC Driven Nonidentical Josephson Junction System. *Int. J. Bifur. Chaos*, 2010, vol. 20, no. 11, pp. 3725–374 <https://doi.org/10.1142/S021812741002801X>
15. Stork M., Kurt E. Control system approach to the dynamics of nonidentical Josephson junction systems. *2015 International Conference on Applied Electronics (AE)*. IEEE, 2015, pp. 233–238.
16. Celik K., Kurt E., Stork M. Can non-identical josephson junctions be synchronized? *2017 IEEE 58th International Scientific Conference on Power and Electrical Engineering of Riga Technical University (RTUCON)*. IEEE, 2017, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/RTUCON.2017.8124771>
17. Ojo K. S., Njah A. N., Olusola O. I., Omeike M. O. Generalized reduced-order hybrid combination synchronization of three Josephson junctions via backstepping technique. *Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 77, no. 3, pp. 583–595. <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1319-z>
18. Vlasov V., Pikovsky A. Synchronization of a Josephson junction array in terms of global variables. *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 88, iss. 2, pp. 022908 (5 pages). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.022908>
19. Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Sedova Yu. V. Dynamics of three and four non-identical Josephson junctions. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 7, no. 1, pp. 105–110. <https://doi.org/10.5890/JAND.2018.03.009>
20. Baesens C., Guckenheimer J., Kim S., MacKay R. S. Three coupled oscillators: Mode locking, global bifurcations and toroidal chaos. *Physica D*, 1991, vol. 49, pp. 387–475. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(91\)90155-3](https://doi.org/10.1016/0167-2789(91)90155-3)
21. Broer H. Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: The Arnol'd resonance web. *Reprint from the Belgian Mathematical Society*, 2008, pp. 769–787. <https://doi.org/10.36045/bbms/1228486406>
22. Inaba N., Kamiyama K., Kousaka T., Endo T. Numerical and experimental observation of Arnol'd resonance webs



- in an electrical circuit. *Physica D*, 2015, vol. 311, pp. 17–24. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2015.08.008>
23. Truong T. Q., Tsubone T., Sekikawa M., Inaba N., Endo T. Arnol'd resonance webs and Chenciner bubbles from a three-dimensional piecewise-constant hysteresis oscillator. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2017, vol. 2017, iss. 5, pp. 053A04 (15 pages). <https://doi.org/10.1093/ptep/ptx058>
24. Kuznetsov A. P., Sedova Y. V. Low-dimensional discrete Kuramoto model: Hierarchy of multifrequency quasiperiodicity regimes. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2014, vol. 24, iss. 07, pp. 1430022 (10 pages). <https://doi.org/10.1142/S0218127414300225>
25. Emelianova Y. P., Kuznetsov A. P., Turukina L. V., Sataev I. R., Chernyshov N. Yu. A structure of the oscillation frequencies parameter space for the system of dissipatively coupled oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, iss. 4, pp. 1203–1212. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.08.004>
26. Emelianova Yu. P., Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V. Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators. *Physica D*, 2013, vol. 244, no. 1, pp. 36–49. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2012.10.012>
27. Broer H., Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2011, vol. 16, no. 1–2, pp. 154–184. <https://doi.org/10.1134/S1560354711010060>
28. Landa P. S. *Avtokolebaniya v sistemakh s konechnym chislom stepeney svobody* [Self-oscillations in systems with finite degrees of freedom]. Moscow, LIBROKOM Publ., 2010. 360 p. (in Russian).
29. Balanov A. G., Janson N. B., Postnov D. E., Sosnovtseva O. *Synchronization: From simple to complex*. Springer, 2009. 425 p.

Поступила в редакцию 10.10.2022; одобрена после рецензирования 22.11.2022; принята к публикации 30.11.2022
The article was submitted 10.10.2022; approved after reviewing 22.11.2022; accepted for publication 30.11.2022