

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2024

Том 24

Выпуск 1



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 1

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2024 Том 24

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издаётся с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Механика

- Бабешко В. А., Уафа С. Б., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Телятников И. С., Евдокимов В. С.** О динамической контактной задаче с двумя деформируемыми штампами 4
- Баженов В. Г., Линник Е. Ю., Нагорных Е. В., Самсонова Д. А.** Численное моделирование процессов деформирования и потери устойчивости многослойных оболочек вращения при комбинированных квазистатических и динамических осесимметричных нагружениях с кручением 14
- Бауэр С. М., Воронкова Е. Б.** О несимметричных формах равновесия кольцевых пластин под действием нормального давления 28
- Волков И. А., Игумнов Л. А., Костюков В. Е., Прилуцкий М. Х.** Методология и особенности вычислительного эксперимента по оценке ресурса ответственных инженерных объектов 35
- Дзедзисашвили Г. Т., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б.** Частоты собственных колебаний призматических тонких оболочек 49
- Каплунов Ю. Д., Зупанчик Б., Никонов А. В.** Асимптотический анализ осесимметричной задачи об обжатии тонкого упругого диска в случае смешанных граничных условий на лицевых поверхностях 57
- Kudish I. I.** Connectivity in rough plane and axially symmetric contacts with a special coating [Кудиш И. И. Соединение в шероховатой плоскости и осесимметричных контактах со специальным покрытием] 63
- Лекомцев С. В., Матвеев В. П.** Собственные колебания композитных эллиптических цилиндрических оболочек с жидкостью 71
- Михасев Г. И., Ле Н. Д.** О влиянии поверхностных напряжений и инерции на собственные низкочастотные колебания упругой ультратонкой полосы-балки 86
- Морозов Н. Ф., Земцова Е. Г., Кудымов В. К., Морозов П. Е., Семенов Б. Н., Юрчук Д. В., Смирнов В. М.** Создание алюмоматричного композита с улучшенными механическими свойствами за счёт направленного регулирования химического состава поверхности армирующей дисперсной фазы 97
- Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.** Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел 109
- Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В.** Вынужденные колебания трехслойной пластины в нестационарном температурном поле 123
- Филиппов С. Б., Козлова А. С.** Асимптотический анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевыми пластинами 138

Приложения

Юбилей

- Радаев Ю. Н., Ватульян А. О.** Леонид Юрьевич Коссович. К 75-летию со дня рождения 150

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Запись о регистрации СМИ ПИ No ФС77-76640 от 26 августа 2019 года

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1).
Журнал индексируется RSCI, Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017.
Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru).
Журнал выходит 4 раза в год.
Цена свободная.
Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Директор издательства
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Агафонов Андрей Петрович

Верстка
Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Корректор
Агафонов Андрей Петрович

Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89
E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 20.02.2024.
Подписано в свет 01.03.2024.
Формат 60 × 84 1/8.
Усл. печ. л. 18,37 (19,75).
Тираж 100 экз. Заказ 11-Т.

Отпечатано в типографии
Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2024



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS

Scientific Part

Mechanics

- Babeshko V. A., Uafa S. B., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Telyatnikov I. C., Evdokimov V. S.** On the dynamic contact problem with two deformable stamps 4
- Bazhenov V. G., Linnik E. Yu., Nagornyykh E. V., Samsonova D. A.** Numerical modeling of the processes of deformation and buckling of multilayer shells of revolution under combined quasi-static and dynamic axisymmetric loading with torsion 14
- Bauer S. M., Voronkova E. B.** On asymmetrical equilibrium states of annular plates under normal pressure 28
- Volkov I. A., Igumnov L. A., Kostyukov V. E., Prilutsky M. Kh.** Methodology and features of a computational experiment to assess the resource of responsible engineering facilities 35
- Dzhebisashvili G. T., Smirnov A. L., Filippov S. B.** Free vibration frequencies of prismatic thin shells 49
- Kaplunov J. D., Zupančič B., Nikonov A. V.** Asymptotic analysis of the axisymmetric problem for the transverse compression of a thin elastic disk in the case of mixed boundary conditions along its faces 57
- Kudish I. I.** Connectivity in rough plane and axially symmetric contacts with a special coating 63
- Lekomtsev S. V., Matveenko V. P.** Natural vibrations of composite elliptical cylindrical shells filled with fluid 71
- Mikhasev G. I., Le N. D.** On the influence of surface stresses and inertia on the natural low-frequency vibrations of an elastic ultrathin strip-beam 86
- Morozov N. F., Zemtsova E. G., Kudymov V. K., Morozov P. E., Semenov B. N., Yurchuk D. V., Smirnov V. M.** Development of aluminum matrix composite with improved mechanical properties by the directional regulation of the chemical composition of the reinforcing dispersed phase surface 97
- Murashkin E. V., Radayev Yu. N.** Two-dimensional Nye figures for hemitropic micropolar elastic solids 109
- Starovoitov E. I., Leonenko D. V.** Forced oscillations of a three-layer plate in an unsteady temperature field 123
- Filippov S. B., Kozlova A. S.** The asymptotic analysis of free vibrations of a cylindrical shell joined with annular plates 138

Appendices

Anniversaries

- Radayev Yu. N., Vatulyan A. O.** Leonid Yu. Kossovich.
To the 75th birthday anniversary 150

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)
Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)
dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)
Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)
Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Пурки, Индия)
Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)
Каплунув Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)
Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)
Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)
Матвеенко Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)
Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, профессор, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)
Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)
Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный, Московская обл., Россия)
Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)
Резчиков Александр Фёдорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)
Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)
Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)
Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)
Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)
Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)
Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)
Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

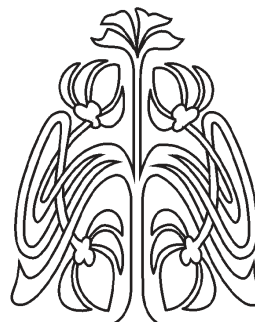
Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

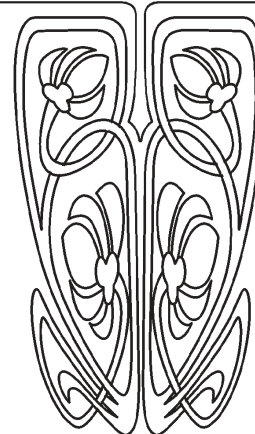
Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)
Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)
Francesco dell'Isola (Rome, Italy)
Shoji Imatani (Kyoto, Japan)
Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)
Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)
Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)
Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)
Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)
Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)
Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)
Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)
Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)
Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny, Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)
Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)
Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)
Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)
Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)
Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)
Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)
Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)
Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)
Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)
Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)
Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)
Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**





МЕХАНИКА

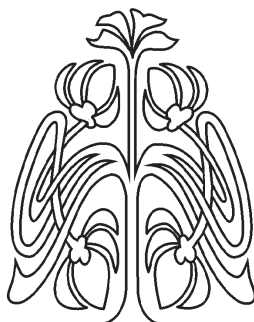
Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 4–13

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 4–13

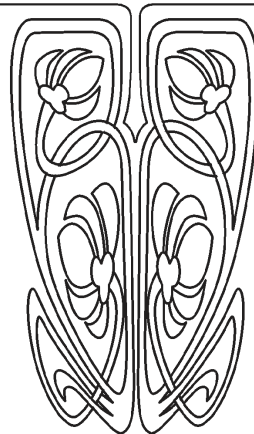
mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13>

EDN: OZQYOM



Научный
отдел



Научная статья

УДК 539.3

О динамической контактной задаче с двумя деформируемыми штампами

**В. А. Бабешко^{1,2✉}, С. Б. Уафа¹, О. В. Евдокимова²,
О. М. Бабешко¹, И. С. Телятников², В. С. Евдокимов¹**

¹Кубанский государственный университет, Россия, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, д. 149

²Южный научный центр РАН, Россия, 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Чехова, д. 41

Бабешко Владимир Андреевич, доктор физико-математических наук, академик, заведующий кафедрой математического моделирования, babeshko41@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6663-6357>, AuthorID: 8243

Уафа Самир Баширович, аспирант кафедры математического моделирования, samir_wafa@rambler.ru, <https://orcid.org/0009-0006-4276-000X>, AuthorID: 982504

Евдокимова Ольга Владимировна, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, evdokimovaolga@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1283-3870>, AuthorID: 18036

Бабешко Ольга Мефодиевна, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, babeshko49@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1869-5413>, AuthorID: 17992

Телятников Илья Сергеевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ilux_t@list.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8500-2133>, AuthorID: 769230

Евдокимов Владимир Сергеевич, магистрант кафедры математического моделирования, evdok_vova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7824-6164>, AuthorID: 1225577

Аннотация. Рассматривается задача о гармоническом во времени поведении двух деформируемых полубесконечных штампов, лежащих на деформируемом основании. Предполагается, что штампы сближаются параллельными торцами таким образом, что формируют трещину, дефект или тектонический разлом в зоне сближения. Деформируемый материал штампов имеет простую реологию, описываемую уравнением Гельмгольца. Для рассмотрения случаев деформируемых штампов сложных реологий можно применять созданный новый универсальный метод моделирования. Он позволяет решения векторных граничных задач для систем дифференциальных уравнений



в частных производных, описывающих материалы сложных реологий, представлять разложенными по решениям отдельных скалярных граничных задач. Строится высокоточное решение граничной задачи, позволяющее получить дисперсионное уравнение, описывающее резонансные частоты. Существование резонансных частот для деформируемых штампов было предсказано в работах И. И. Воровича. Результат остается в силе и для случая абсолютно твердых полубесконечных штампов. Ранее было показано, что резонансы возникают в контактной задаче о колебании двух абсолютно жестких штампов конечных размеров на деформируемом слое. Однако динамическая контактная задача для случая двух полубесконечных штампов, действующих на многослойную среду, ранее не изучалась. Исследование опирается на метод блочного элемента, позволяющего строить точные решения граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Кроме этого, применяются факторизационные методы и используются некоторые тонкие свойства уравнений Винера – Хопфа, в частности, принадлежащие известному математику М. Г. Крейну. Предлагаемые методы позволяют производить исследование для всего диапазона частот и произвольного расстояния между торцами полубесконечных плит. Результаты исследования могут быть использованы для оценки прочностных свойств конструкций, имеющих контактные соединения из разнотипных материалов в динамических режимах.

Ключевые слова: контактная задача, деформируемые штампы, блочные элементы, интегральные уравнения

Благодарности: Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2024 г. Минобрнауки (проект FZEN-2023-0006) и ЮНЦ РАН (тема 01201354241-0).

Для цитирования: Бабешко В. А., Уафа С. Б., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Телятников И. С., Евдокимов В. С. О динамической контактной задаче с двумя деформируемыми штампами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 4–13. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13>, EDN: OZQYOM

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On the dynamic contact problem with two deformable stamps

V. A. Babeshko^{1,2✉}, S. B. Uafa¹, O. V. Evdokimova²,
O. M. Babeshko¹, I. S. Telyatnikov², V. S. Evdokimov¹

¹Kuban State University, 149 Stavropolskaya St., Krasnodar 350040, Russia

²Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 41 Chekhov St., Rostov-on-Don 344006, Russia

Vladimir A. Babeshko, babeshko41@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6663-6357>, AuthorID: 8243

Samir B. Uafa, samir_wafa@rambler.ru, <https://orcid.org/0009-0006-4276-000X>, AuthorID: 982504

Olga V. Evdokimova, evdokimovaolga@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1283-3870>, AuthorID: 18036

Olga M. Babeshko, babeshko49@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1869-5413>, AuthorID: 17992

Ilya S. Telyatnikov, ilux_t@list.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8500-2133>, AuthorID: 769230

Vladimir S. Evdokimov, evdok_vova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7824-6164>, AuthorID: 1225577

Abstract. The problem of the time-harmonic behavior of two deformable semi-infinite stamps lying on a deformable base is considered. It is assumed that the stamps converge with parallel ends in such a way that they form a crack, defect, or tectonic fault in the convergence zone. The deformable die material has a simple rheology described by the Helmholtz equation. To consider the cases of deformable stamps of complex rheologies, a new universal modeling method can be used. It allows solutions of vector boundary value problems for systems of partial differential equations describing materials of complex rheologies to be represented as decomposed by solutions of individual scalar boundary value problems. A high-precision solution to the boundary value problem is constructed, which makes it possible to obtain a dispersion equation describing resonant frequencies. The existence of resonant frequencies for deformable stamps



was predicted in the works of I. I. Vorovich. The result remains valid for the case of absolutely solid semi-infinite stamps. Earlier, it was shown that resonances arise in the contact problem of the oscillation of two absolutely rigid stamps of finite dimensions on a deformable layer. However, the dynamic contact problem for the case of two semi-infinite stamps acting on a multilayer medium has not been studied before. The study is based on the block element method, which makes it possible to construct exact solutions to boundary value problems for partial differential equations. In addition, factorization methods are used and some subtle properties of the Wiener – Hopf equations are used, in particular, those belonging to the famous mathematician M. G. Crane. The proposed methods make it possible to conduct research for the entire frequency range and an arbitrary distance between the ends of semi-infinite plates. The results of the study can be used to evaluate the strength properties of structures with contact joints made of different types of materials in dynamic modes.

Keywords: contact problem, deformable stamps, block elements, integral equations

Acknowledgements: Some fragments of the work were carried out as part of the implementation of the 2024 State Task of the Ministry of Education and Science (project FZEN-2023-0006) and the Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (topic 01201354241-0).

For citation: Babeshko V. A., Uafa S. B., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Telyatnikov I. S., Evdokimov V. S. On the dynamic contact problem with two deformable stamps. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 4–13 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13>, EDN: OZQYOM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Исследованию контактных задач в широком спектре постановок посвящено большое число работ (см. например: [1–13]). Это связано с важностью названного направления исследований в самых различных областях инженерной практики, теории прочности и разрушения, сейсмологии, геофизики, экологии. Нужно отметить и разнообразие подходов исследования, которые включают аналитические, полуаналитические, численные методы.

Каждый из подходов позволяет успешно решать контактные задачи в выбираемых постановках и выявлять ранее не исследованные стороны. Большинство исследований посвящено контактным задачам о воздействии на упругую среду абсолютно жестких штампов. Как правило, выполнялись они для одиночных штампов. Переход к деформируемым штампам и возникающим при этом особенностям, по-видимому, впервые был выполнен И. И. Воровичем [14, 15]. Им было установлено, что наличие деформируемого штампа приводит к возникновению дискретных резонансных частот в динамических контактных задачах, приводящих к резонансам. Впервые вопрос об одновременном динамическом воздействии двух полубесконечных деформируемых штампов со встречно расположенными параллельными торцами рассматривается в настоящей работе. Одна из целей исследования состоит в установлении существования резонансов подобной блочной структуры и возможности построения дисперсионного уравнения для определения резонансных частот.

1. Постановка задачи и определяющие уравнения

Рассматривается многослойная линейно деформируемая среда, содержащая штампы, находящаяся в условиях вибрации, описываемой функцией $e^{-i\omega t}$. Считаем, что внешние воздействия на многослойную среду осуществляются деформируемыми полубесконечными штампами с такой же временной функцией. Исключая ее из уравнений и граничных условий, приходим к стационарной граничной задаче. На ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1 , ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в областях $\Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A, |x_2| \leq \infty)$, $\Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty)$ действуют деформируемые штампы, контактирующие без трения с многослойным основанием. Одной из важных составляющих рассматриваемой задачи



являются модели деформируемых штампов. Рассмотрим случай, когда материал описывается уравнениями Гельмгольца. Решив эту задачу, появляется возможность переходить к материалам иных реологий, что открывает новый универсальный метод моделирования [16].

Считаем, что в контактных областях Ω_{-A} и Ω_A материал штампов описывается дифференциальными уравнениями Гельмгольца

$$\begin{aligned} [\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2] \varphi_{-A1}(x_1, x_2) &= g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\ \Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A, |x_2| \leq \infty), \quad p^2 &= c\omega^2, \quad c > 0, \\ [\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2] \varphi_{A1}(x_1, x_2) &= g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\ \Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty, |x_2| \leq \infty) \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\varphi_{-A1}(x_1, x_2) = \varphi(-A, x_2), \quad x_1 \rightarrow -A; \quad \varphi_{A1}(x_1, x_2) = \varphi(A, x_2), \quad x_1 \rightarrow A.$$

Здесь $q_r(x_1, x_2)$, $r = A, -A$ — воздействие на штамп снизу, а $t_r(x_1, x_2)$ — сверху. Функции $\varphi_r(x_1, x_2)$, $r = A, -A$ описывают перемещения штампов в зоне контактов.

Применив к уравнениям (1) преобразование Фурье по координате x_2

$$\varphi(x_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2,$$

приходим к упрощенной одномерной граничной задаче с параметром α_2 :

$$\begin{aligned} (\partial^2 x_1 + k^2) \varphi_{-A}(x_1, \alpha_2) &= g_{-A}(x_1, \alpha_2), \quad \Omega_{-A}(-\infty \leq x_1 \leq -A), \quad k^2 = p^2 - \alpha_2^2, \\ (\partial^2 x_1 + k^2) \varphi_A(x_1, \alpha_2) &= g_A(x_1, \alpha_2), \quad \Omega_A(A \leq x_1 \leq \infty), \\ g_{-A}(x_1, \alpha_2) &= q_{-A}(x_1, \alpha_2) - t_{-A}(x_1, \alpha_2), \quad g_A(x_1, \alpha_2) = q_A(x_1, \alpha_2) - t_A(x_1, \alpha_2), \\ \varphi(x_1) &= \varphi(x_1, \alpha_2), \quad \varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(\pm A, \alpha_2), \quad x_1 \rightarrow \pm A, \\ \varphi_{-A}(x_1, \alpha_2) &= \varphi(-A, \alpha_2), \quad x_1 \rightarrow -A, \quad \varphi_A(x_1, \alpha_2) = \varphi(A, \alpha_2), \quad x_1 \rightarrow A. \end{aligned} \quad (2)$$

Параметр α_2 в дальнейшем опускается, и возврат к нему произойдет по формулам (2) после решения следующей одномерной граничной задачи:

$$\begin{aligned} (\partial^2 x_1 + k^2) \varphi_r(x_1) &= g_r(x_1), \quad \Omega_r, \quad r = A, -A, \quad k^2 = p^2 - \alpha_2^2, \quad g_r(x_1) = q_r(x_1) - t_r(x_1), \\ \varphi_{-A}(x_1) &= \varphi_{-A}(-A), \quad x_1 \rightarrow -A; \quad \varphi_A(x_1) = \varphi_A(A), \quad x_1 \rightarrow A. \end{aligned} \quad (3)$$

2. Метод исследования

Для исследования построим упакованные блочные элементы, порождаемые граничной задачей (3). Для этого можно применить метод [16].

В результате его применения строятся внешние формы для каждой граничной задачи, которые принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_{-A}(\alpha_1) &= -i(\alpha_1 + k) \varphi_{-A}(-C) e^{-i\alpha_1 A} + Q_{-A}(-k) e^{-i(\alpha_1 + k)A} - Q_{-A}(\alpha_1) - \\ &\quad - T_{-A}(-k) e^{-i(\alpha_1 + k)A} + T_{-A}(\alpha_1), \\ \omega_A(\alpha_1) &= i(\alpha_1 - k) \varphi_A(A) e^{i\alpha_1 A} + Q_A(k) e^{i(\alpha_1 - k)A} - Q_A(\alpha_1) - T_A(k) e^{i(\alpha_1 - k)A} + T_A(\alpha_1). \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения преобразований Фурье заглавными буквами:

$$\Phi(\alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1.$$



С помощью построенных внешних форм поведения штампов можно представить упакованными блочными элементами в виде

$$\varphi_r(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_r(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad \Phi_r(\alpha_1) = \frac{\omega_r(\alpha_1)}{N(\alpha_1)}, \quad r = A, -A, \quad N(\alpha_1) = \alpha^2 - k^2. \quad (4)$$

3. Интегральное уравнение контактной задачи

Сформулированная контактная задача описывается системой интегральных уравнений вида [17]

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_{-A}} h(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_{-A}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\ & + \iint_{\Omega_A} h(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_A(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = u_r(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \Omega_r, \quad r = -A, A \\ & \langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad h(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} H(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2, \\ & H(\alpha_1, \alpha_2) = O(u^{-1}), \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $u_r(x_1, x_2)$ — заданные смещения оснований штампов, $q_r(x_1, x_2)$ — контактные напряжения. Считаем, что функция $H(\alpha_1, \alpha_2)$ — четная по обоим переменным мероморфная функция двух комплексных переменных α_k , $k = 1, 2$, ее примеры приведены в многочисленных публикациях.

Применим к двумерному интегральному уравнению (5) преобразование Фурье по координате x_2 . В результате место координаты x_2 у каждой подвергнутой преобразованию Фурье функции займет свободный параметр преобразования Фурье α_2 . Чтобы упростить формулы, временно скроем параметр α_2 введением обозначений

$$\begin{aligned} h(x_1) &= h(x_1, \alpha_2), \quad q_r(\xi_1) = q_r(\xi_1, \alpha_2), \quad h(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \\ H(\alpha_1) &= H(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_r(x_1) = u_r(x_1, \alpha_2), \quad r = -A, A. \end{aligned}$$

В результате принятых замен получим систему одномерных интегральных уравнений с двумя неизвестными вида

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-A} h(x_1 - \xi_1) q_{-A}(\xi_1) d\xi_1 + \int_A^{\infty} h(x_1 - \xi_1) q_A(\xi_1) d\xi_1 = u_{-A}(x_1), \quad -\infty < x_1 \leq -A, \\ & \int_{-\infty}^{-A} h(x_1 - \xi_1) q_{-A}(\xi_1) d\xi_1 + \int_A^{\infty} h(x_1 - \xi_1) q_A(\xi_1) d\xi_1 = u_A(x_1), \quad A \leq x_1 < \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае многослойной среды функция $H(\alpha_1)$, являясь мероморфной, имеет счетное число нулей z_{mo} и полюсов ξ_{so} . Им свойственно асимптотическое поведение вида

$$\xi_{so} = i\nu(s + 0.5)(1 + o(1)), \quad s \rightarrow \infty, \quad z_{mo} = i\nu m(1 + o(1)), \quad m \rightarrow \infty, \quad \nu = \text{const} > 0.$$

В динамическом случае при достаточно большой частоте ω появляется конечное число вещественных нулей и полюсов. В этом случае представление ядра интегрального уравнения



описывается интегралом, берущимся по контуру и имеющему вид

$$h(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} H(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1.$$

Контур γ совпадает с вещественной осью всюду, кроме зон вещественных полюсов, которые обходятся им по полуокружностям малого радиуса [17].

Составим в преобразованиях Фурье уравнение перемещения всей поверхности многослойной среды с учетом обоих контактных зон. Для этого продолжим систему интегральных уравнений (6) на всю ось, добавив справа на отрезке $[-A, A]$ новую неизвестную функцию $w_0(x_1)$, представляющую перемещение поверхности среды в промежутках между штампами.

4. Функциональное уравнение для реологической среды

Вновь обращаясь к интегральным уравнениям (6), составим балансы перемещений поверхности многослойной среды и мембран, взяв представления в форме

$$u_r(x_1) = \varphi_r(x_1), \quad x_1 \in \Omega_r, \quad r = -A, A.$$

Применим к интегральному уравнению (6) и уравнениям упакованных блочных элементов (4) преобразование Фурье. После этого потребуем в зонах контактов Ω_r , $r = A, -A$ равенств напряжений Q_r и перемещений u_r основания и штампов.

Тогда после несложных операций с преобразованиями Фурье построим функциональное уравнение вида

$$\begin{aligned} K_1(\alpha_1)Q_1^-(\alpha_1) + W_1(\alpha_1) + K_1(\alpha_1)Q_1^+(\alpha_1) &= (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+), \\ K_1(\alpha_1) &= [K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} S_{-A} &= -i(\alpha_1 + k)\varphi_{-A}(-A)e^{-i\alpha_1 A} + Q_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1 + k)A} - T_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1 + k)A} + T_{-A}(\alpha_1), \\ S_A &= i(\alpha_1 - k)\varphi_A(A)e^{i\alpha_1 A} + Q_A(k)e^{i(\alpha_1 - k)A} - T_A(k)e^{i(\alpha_1 - k)A} + T_A(\alpha_1). \end{aligned}$$

Выше $W_1(\alpha_1)$ — преобразование Фурье свободной от напряжений зоны между штампами.

С учетом аналитических свойств функций обозначим

$$Q_1^-(\alpha_1) \equiv Q_A(\alpha_1), \quad S_1^- \equiv S_{-A}(\alpha_1), \quad Q_1^+(\alpha_1) \equiv Q_A(\alpha_1), \quad S_1^+(\alpha_1) \equiv S_A(\alpha_1).$$

Знак плюс означает регулярность аналитической функции комплексного переменного в верхней полуплоскости, а минус — в нижней.

Соотношение (7) представляет обобщенные функциональные уравнения типа Винера – Хопфа относительно неизвестных $Q_1^-(\alpha_1)$, $Q_1^+(\alpha_1)$, $W_1(\alpha_1)$, а также функционалов $Q_1(-k)$, $Q_1(k)$, входящих в правые части уравнений. Для их получения строятся интегральные уравнения.

5. О решении интегральных уравнений контактной задачи

Применим для исследования функционального уравнения (7) аппарат факторизации функций, позволяющий свести его к отдельному интегральному уравнению на отрезке.

С этой целью для четной функции осуществим деление всех членов функционального уравнения (7) на $K(\alpha_1)$. В результате получим соотношение

$$Q_1^-(\alpha_1) + K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1) + Q_1^+(\alpha_1) = K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+).$$



Осуществим переход от функционального к интегральному уравнению, которое с учетом новых обозначений принимает вид

$$\int_{-A}^A k_{11}(x_1 - \xi_1) w_{11}(\xi_1) d\xi_1 = f_{11}(x_1), \quad |x_1| \leq A, \quad w_{11}(\xi_1) = w_{11}(\xi_1, \alpha_2),$$

$$k_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^{-1}(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad K_1^{-1}(\alpha_1) = P_1^{-1}(\alpha_1) R_1(\alpha_1), \quad k_{11}(x_1) = k_{11}(x_1, \alpha_2).$$

Здесь $f_{11}(x_1)$ имеет представление

$$f_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^{-1}(\alpha_1) (\alpha_1^2 - k^2)^{-1} (S_1^- + S_1^+) e^{i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad |x_1| \leq A.$$

В связи со свойствами ядра интегрального уравнения функция $K_1^{-1}(\alpha_1)$ имеет на бесконечности асимптотическое поведение

$$K_1^{-1}(\alpha_1) = O(|\alpha_1|).$$

Это свидетельствует о том, что интегральное уравнение, представленное с помощью классических функций, является интегро-дифференциальным.

Последнее, взяв произвольное положительное число τ , можно записать в виде

$$(-\partial^2 + \tau^2) \int_{-A}^A n_{11}(x_1 - \xi_1) w_{11}(\xi_1) d\xi_1 = f_{11}(x_1),$$

$$n_{11}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1} K_1^{-1}(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad N_{11}(\alpha_1) = (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1} K_1^{-1}(\alpha_1).$$

Решив дифференциальное уравнение, получим его в виде

$$\int_{-A}^A n_{11}(x_1 - \xi_1) w_{11}(\xi_1) d\xi_1 = f_{110}(x_1) + c_{11} e^{\tau x_1} + c_{12} e^{-\tau x_1},$$

$$f_{110}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1^{-1}(\alpha_1) (\alpha_1^2 + \tau^2)^{-1} (\alpha_1^2 - k^2)^{-1} (S_1^- + S_1^+) e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad |x_1| \leq A. \quad (8)$$

Здесь постоянные c_{1m} , $m = 1, 2$, нуждаются в определении после построения решения интегрального уравнения (8). Применим для решения интегрального уравнения метод, разработанный в [18]. Он позволяет построить высокоточное решение этого интегрального уравнения методом фиктивного поглощения.

Не останавливаясь на деталях построения высокоточного приближенного решения интегрального уравнения (8), выпишем окончательное решение в виде

$$w_{11}(x_1) = \frac{m_{11}(x_1) + c_{11} m_{12}(x_1) + c_{12} m_{13}(x_1)}{\pi Q_{-\frac{1}{2}}(chA) \sqrt{2chA - 2chx_1}}.$$

Здесь $m_{rs}(x_1)$ — некоторые непрерывные функции, появляющиеся в процессе решения интегрального уравнения, являются известными; $Q_{-\frac{1}{2}}(chA)$ — функция Лежандра. Функция



$w_{11}(x_1)$ описывает поведение поверхности в зоне между штампами и должна быть непрерывной. Для обеспечения ее непрерывности необходимо, чтобы она обращалась в нули в точках $x_1 = \pm A$, в которых нарушается требование непрерывности. Это приводит к уравнениям для определения неизвестных c_{11} , c_{12} :

$$\begin{aligned} c_{11}m_{12}(A) + c_{12}m_{13}(A) + m_{11}(A) &= 0, \\ c_{11}m_{12}(-A) + c_{12}m_{13}(-A) + m_{11}(-A) &= 0. \end{aligned}$$

Решив их, находим искомые постоянные:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \Delta^{-1}[m_{11}(-A)m_{13}(A) - m_{11}(A)m_{13}(-A)], \\ c_{12} &= \Delta^{-1}[m_{11}(A)m_{12}(-A) - m_{11}(-A)m_{12}(A)], \\ \Delta &= m_{12}(A)m_{13}(-A) - m_{12}(-A)m_{13}(A). \end{aligned}$$

Внеся найденные постоянные в функциональное уравнение (1), получим его в виде

$$Q_1^-(\alpha_1) + Q_1^+(\alpha_1) = K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+) - K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1). \quad (9)$$

Осуществив факторизацию правой части (9) в виде суммы [17], получаем решения $Q_A(\alpha_1)$, $Q_{-A}(\alpha_1)$ интегрального уравнения, зависящие от функционалов $Q_A(k)$, $Q_{-A}(-k)$.

Из него находятся выполненные в преобразованиях Фурье значения контактных напряжений под берегами трещины в виде [17]

$$\begin{aligned} Q_A(\alpha_1) &\equiv Q_1^+(\alpha_1) = \{K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+) - K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1)\}^+, \\ Q_{-A}(\alpha_1) &\equiv Q_1^-(\alpha_1) = \{K_1^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_1^- + S_1^+) - K_1^{-1}(\alpha_1)W_1(\alpha_1)\}^-. \end{aligned} \quad (10)$$

Выделив функционалы $Q_A(k)$, $Q_{-A}(-k)$ в результате разложения правых частей выражений (10), получим соотношения

$$\begin{aligned} Q_A(\alpha_1) &= Q_A(k)R_1^+(\alpha_1) + Q_{-A}(-k)R_2^+(\alpha_1) + R_3^+(\alpha_1), \\ Q_{-A}(\alpha_1) &= Q_A(k)R_1^-(\alpha_1) + Q_{-A}(-k)R_2^-(\alpha_1) + R_3^-(\alpha_1). \end{aligned}$$

Здесь $R_m^\pm(\alpha_1)$ — некоторые аналитические функции, коэффициенты при функционалах в разложении. Внеся в эти соотношения последовательно $\alpha_1 = k$ в первое, затем $\alpha_1 = -k$ во второе и вычислив функционалы из полученной алгебраической системы уравнений, получим их значения в виде

$$\begin{aligned} Q_A(k) &= \Delta_1^{-1}\langle R_3^+(k)[1 - R_2^-(-k)] + R_3^-(-k)R_2^+(k) \rangle, \\ Q_A(-k) &= \Delta_1^{-1}\langle R_3^+(k)R_1^-(-k) - R_3^-(-k)[1 - R_2^+(k)] \rangle, \\ \Delta_1(k) &= [1 - R_1^+(k)][1 - R_2^-(-k)] - R_2^+(k)R_1^-(-k). \end{aligned}$$

Внесем значения функционалов в правые части соотношений (10), получим в преобразованиях Фурье выражения для контактных напряжений под каждым штампом. Уравнение $\Delta_1(k) = 0$ является дисперсионным уравнением для определения резонансных частот, предсказанное в работах И. И. Воровича [14, 15].

Вывод

Построено высокоточное решение контактной задачи для двух деформируемых штампов и получено дисперсионное уравнение для вычисления дискретных резонансов, предсказанных в свое время И. И. Воровичем. Построение выполнено для деформируемых штампов простой реологии, описываемых уравнением Гельмгольца. Для случаев более сложных реологий в рассмотренной задаче применяется универсальный метод моделирования [16]. Результаты



исследования могут быть использованы в проблеме оценки сейсмичности и предвестников землетрясений в горных районах, имеющих ущелья и ложбины, моделируемых зонами между торцами деформируемых штампов.

Список литературы

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва : Наука, 1980. 303 с.
2. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Москва : Гостехиздат, 1949. 272 с.
3. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи трибологии. Москва : Машиностроение, 1988. 256 с.
4. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J. R. Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws // Proceedings of the Royal Society A (London). 2015. Vol. 471, iss. 2180. 20150271. <https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0271>
5. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I — Theory // International Journal of Solids and Structures. 1998. Vol. 35, iss. 18. P. 2349–2362. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00154-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00154-6)
6. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II — Examples // International Journal of Solids and Structures. 1998. Vol. 35, iss. 18. P. 2363–2378. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00155-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00155-8)
7. Zhou S., Gao X. L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2013. Vol. 64. P. 145–166. <https://doi.org/10.1007/s00033-012-0205-0>
8. Guler M. A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // International Journal of Mechanical Sciences. 2007. Vol. 49, iss. 2. P. 161–182. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006>
9. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // European Journal of Mechanics – A/Solids. 2007. Vol. 26, iss. 1. P. 171–188. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007>
10. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // Tribology International. 2007. Vol. 40, iss. 4. P. 574–579. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2005.11.008>
11. Almqvist A. An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem. 2013. 43216. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange> (дата обращения: 01.12.2023). <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3960.7200>
12. Andersson L. E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction // Applied Mathematics and Optimization. 2000. Vol. 42. P. 169–202. <https://doi.org/10.1007/s002450010009>
13. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2015. Vol. 22. P. 508–519. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.08.012>
14. Ворович И. И. Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // Доклады Академии наук СССР. 1979. Т. 245, № 4. С. 817–820.
15. Ворович И. И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // Доклады Академии наук СССР. 1979. Т. 245, № 5. С. 1076–1079.
16. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2021. Т. 499, № 1. С. 30–35. <https://doi.org/10.31857/S2686740021040039>, EDN: LXXMAT
17. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. Москва : Наука, 1979. 320 с.
18. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Евдокимов В. С. О механической концепции самосборки наноматериалов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2023. № 5. С. 111–119. <https://doi.org/10.31857/S057232992360007X>, EDN: GFZOYW

References

1. Galin L. A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vyazkoupругosti* [Contact Problems of the Theory of Elasticity and Viscoelasticity]. Moscow, Nauka, 1980. 303 p. (in Russian).
2. Shtaerman I. Ya. *Kontaktnaya zadacha teorii uprugosti* [Contact Problems of the Theory of Elasticity]. Moscow, Gostekhizdat, 1949. 272 p. (in Russian).



3. Goryacheva I. G., Dobychin M. N. *Kontaknyye zadachi tribologii* [Contact Problems of Tribology]. Moscow, Mashinostroenie Publishers, 1988. 256 p. (in Russian).
4. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J. R. Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proceedings of the Royal Society A* (London), 2015, vol. 471, iss. 2180, 20150271. <https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0271>
5. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I — Theory. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, vol. 35, iss. 18, pp. 2349–2362. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00154-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00154-6)
6. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II — Examples. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, vol. 35, iss. 18, pp. 2363–2378. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00155-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00155-8)
7. Zhou S., Gao X. L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2013, vol. 64, pp. 145–166. <https://doi.org/10.1007/s00033-012-0205-0>
8. Guler M. A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007, vol. 49, iss. 2, pp. 161–182. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006>
9. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *European Journal of Mechanics — A/Solids*, 2007, vol. 26, iss. 1, pp. 171–188. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007>
10. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribology International*, 2007, vol. 40, iss. 4, pp. 574–579. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2005.11.008>
11. Almqvist A. *An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem*. 2013. 43216. Available at: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange> (accessed December 1, 2023). <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3960.7200>
12. Andersson L. E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. *Applied Mathematics and Optimization*, 2000, vol. 42, pp. 169–202. <https://doi.org/10.1007/s002450010009>
13. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2015, vol. 22, pp. 508–519. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.08.012>
14. Vorovich I. I. Spectral properties of a boundary value problem of elasticity theory for a nonuniform band. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1979, vol. 245, iss. 4, pp. 817–820 (in Russian).
15. Vorovich I. I. Resonant properties of an elastic inhomogeneous strip. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1979, vol. 245, iss. 5, pp. 1076–1079 (in Russian).
16. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Physics*, 2021, vol. 66, iss. 8, pp. 218–222. <https://doi.org/10.1134/S1028335821080012>, EDN: VTZIDS
17. Vorovich I. I., Babeshko V. A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Nonclassical Domains]. Moscow, Nauka, 1979. 320 p. (in Russian).
18. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Evdokimov V. S. On the mechanical concept of self-assembly of nanomaterials. *Mechanics of Solids*, 2023, vol. 58, pp. 1528–1535. <https://doi.org/10.3103/S002565442370022X>, EDN: GFZOYW

Поступила в редакцию / Received 07.12.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 14–27

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 14–27
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27>, EDN: DFKLFV

Научная статья
УДК 539.3

Численное моделирование процессов деформирования и потери устойчивости многослойных оболочек вращения при комбинированных квазистатических и динамических осесимметричных нагрузениях с кручением

В. Г. Баженов[✉], Е. Ю. Линник, Е. В. Нагорных, Д. А. Самсонова

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, г. Нижний Новгород, просп. Гагарина, д. 23

Баженов Валентин Георгиевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НИИ механики, bazhenov@mech.unn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0077-7704>, AuthorID: 2734

Линник Елена Юрьевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ механики, elenkalinnik@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-5350-9738>, AuthorID: 666158

Нагорных Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики, ведущий научный сотрудник НИИ механики, pavlyonkova@mech.unn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3330-5954>, AuthorID: 136430

Самсонова Дарья Анатольевна, младший научный сотрудник НИИ механики, ozornikova.dasha@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8413-875X>, AuthorID: 1203952

Аннотация. Разработаны двумерная постановка и метод численного решения задач деформирования и потери устойчивости многослойных упругопластических оболочек вращения при квазистатических и динамических осесимметричных нагрузениях с кручением. Определяющая система уравнений записывается в декартовой или цилиндрической системе координат. Моделирование процесса деформирования слоев оболочки осуществляется на основе гипотез механики сплошных сред или теории оболочек типа Тимошенко с учетом геометрических нелинейностей. Кинематические соотношения записываются в скоростях и формулируются в метрике актуального состояния. Упругопластические свойства оболочки описываются обобщенным законом Гука или теорией пластического течения с нелинейным изотропным упрочнением. Вариационные уравнения движения слоев оболочки выводятся из трехмерного уравнения баланса виртуальных мощностей работы механики сплошных сред с учетом принятых гипотез теории оболочек либо плоского деформированного состояния или обобщенной осесимметричной деформации с кручением. Моделирование контактного взаимодействия слоев оболочки основано на условии жесткой склейки или условии непроникания по нормали и проскальзывания по касательной. Для решения определяющей системы уравнений применяются конечно-разностный метод и явная схема интегрирования по времени типа «крест». Методика апробирована на задаче потери устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с упругопластическими несущими слоями из алюминиевого сплава Д16Т и упругим наполнителем при квазистатическом и динамическом нагружении гидростатическим давлением, линейно возрастающим во времени. Задача решалась в двух вариантах: все три слоя моделировались конечными элементами сплошной среды или несущие слои моделировались оболочечными элементами, а наполнитель — элементами сплошной среды. Результаты расчетов по двум моделям хорошо согласуются друг с другом по предельным давлениям и по формам потери устойчивости.

Ключевые слова: многослойные оболочки вращения, упругопластические оболочки, упругий наполнитель, неосесимметричная потеря устойчивости, кручение, гипотезы Тимошенко, численное моделирование, контактное взаимодействие, осесимметричное нагружение

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00904, <https://rscf.ru/project/22-29-00904/>).



Для цитирования: Баженов В. Г., Линник Е. Ю., Нагорных Е. В., Самсонова Д. А. Численное моделирование процессов деформирования и потери устойчивости многослойных оболочек вращения при комбинированных квазистатических и динамических осесимметричных нагружениях с кручением // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 14–27. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27>, EDN: DFKLFV
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Numerical modeling of the processes of deformation and buckling of multilayer shells of revolution under combined quasi-static and dynamic axisymmetric loading with torsion

V. G. Bazhenov[✉], E. Yu. Linnik, E. V. Nagornyykh, D. A. Samsonova

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue), Nizhny Novgorod 603950, Russia

Valentin G. Bazhenov, bazhenov@mech.unn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0077-7704>, AuthorID: 2734

Elena Yu. Linnik, elenkalinnik@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-5350-9738>, AuthorID: 666158

Elena V. Nagornyykh, pavlyonkova@mech.unn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3330-5954>, AuthorID: 136430

Daria A. Samsonova, ozornikova.dasha@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8413-875X>, AuthorID: 1203952

Abstract. A two-dimensional formulation and method for numerical solution of problems of deformation and loss of stability of multilayer elastoplastic shells of rotation under quasi-static and dynamic axisymmetric loading with torsion have been developed. The defining system of equations is written in a Cartesian or cylindrical coordinate system. Modeling of the process of deformation of shell layers is carried out on the basis of hypotheses of solid mechanics or the theory of Timoshenko-type shells, taking into account geometric nonlinearities. Kinematic relations are written in speeds and formulated in the metric of the current state. The elastic-plastic properties of the shell are described by the generalized Hooke's law or the theory of plastic flow with nonlinear isotropic hardening. The variational equations of motion of the shell layers are derived from the three-dimensional balance equation of the virtual powers of the work of continuum mechanics, taking into account the accepted hypotheses of the theory of shells, either a plane deformed state or a generalized axisymmetric deformation with torsion. Modeling of the contact interaction of shell layers is based on the condition of rigid gluing or the condition of non-penetration along the normal and sliding along the tangential. To solve the governing system of equations, a finite-difference method and an explicit time integration scheme of the "cross" type are used. The method was tested on the problem of buckling of a three-layer cylindrical shell with elastoplastic load-bearing layers of aluminum alloy D16T and an elastic filler under quasi-static and dynamic loading by hydrostatic pressure, linearly increasing with time. The problem was solved in two versions: all three layers were modeled as a finite element of a continuous medium, or the load-bearing layers were modeled as shell elements, and the filler as elements of a continuous medium. The results of calculations using the two models are in good agreement with each other in terms of ultimate pressures and modes of buckling.

Keywords: multilayer shells of revolution, elastoplastic shells, elastic filler, non-axisymmetric loss of stability, torsion, Timoshenko's hypotheses, numerical modeling, contact interaction, axisymmetric loading

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-29-00904, <https://rscf.ru/project/22-29-00904/>).

For citation: Bazhenov V. G., Linnik E. Yu., Nagornyykh E. V., Samsonova D. A. Numerical modeling of the processes of deformation and buckling of multilayer shells of revolution under combined quasi-static and dynamic axisymmetric loading with torsion. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 14–27 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-14-27>, EDN: DFKLFV

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Введение

Многослойные оболочки вращения с упругим наполнителем широко применяются в современных конструкциях. К настоящему времени весьма тщательно проработаны аналитические и численные методы описания процесса выпучивания упругих тонкостенных оболочек вращения [1–7]. В работе [8] представлен анализ моделей упругого деформирования тонких оболочек. Анализ деформирования и потери устойчивости упругих многослойных (трехслойных) оболочек проведен в [9, 10]. Для описания поведения упругопластических оболочек, особенно при динамическом нагружении, целесообразно использовать компьютерное моделирование. При динамическом нагружении потеря устойчивости тонкостенных конструкций происходит по высшим формам [11–15].

В настоящей статье представлены постановка и методика численного решения нелинейных задач осесимметричного (или плоского) деформирования и потери устойчивости многослойных оболочек вращения при комбинированных осесимметричных нагружениях и кручении. Определяющая система уравнений записывается в декартовой или цилиндрической системе эйлеровых координат r, β, z (Oz — ось вращения) в текущей лагранжевой постановке. В силу осевой симметрии или плоской постановки все искомые функции зависят от радиальной и осевой координат и не зависят от окружной. Слои оболочек можно моделировать как элементами сплошной среды, так и оболочечными элементами. Материалы слоев полагаются изотропными, упругими или упругопластическими. Задачи формулируются в динамической постановке, что позволяет моделировать большие формоизменения упругопластических оболочек как в до-, так и за-критической фазе деформирования.

1. Нелинейные геометрические и физические соотношения для элементов сплошной среды

Кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния, что позволяет учитывать большие формоизменения. Компоненты тензоров скоростей деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений $\dot{u}_{ij}$) $\dot{e}_{ij}$ и скоростей вращения $\dot{\omega}_{ij}$ при учете равенства $\dot{u}_\beta = r(\dot{\theta})(\theta$ — угол закручивания по окружной координате β) имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{e}_{rr} &= \dot{u}_{r,r}, & \dot{e}_{\beta\beta} &= \dot{u}_r r^{-1}, & \dot{e}_{zz} &= \dot{u}_{z,z}, \\ \dot{e}_{zr} &= \frac{1}{2}(\dot{u}_{z,r} + \dot{u}_{r,z}), & \dot{e}_{r\beta} &= \frac{1}{2}r\dot{\theta}_{,r}, & \dot{e}_{\beta z} &= \frac{1}{2}r\dot{\theta}_{,z}, \\ \dot{\omega}_{zr} &= \frac{1}{2}(\dot{u}_{z,r} - \dot{u}_{r,z}), & \dot{\omega}_{r\beta} &= -\frac{1}{2}(r\dot{\theta}_{,r} + 2\dot{\theta}), & \dot{\omega}_{\beta z} &= -\frac{1}{2}r\dot{\theta}_{,z}.\end{aligned}\quad (1)$$

Точка над переменной означает частную производную по времени, а символ после запятой — частную производную по соответствующей координате. Упругопластические свойства материалов описываются теорией течения с нелинейным изотропным упрочнением. Связь между компонентами девиатора скоростей напряжений $\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \dot{P}\delta_{ij}$ и упругими составляющими компонент девиатора скоростей деформаций $(\dot{e})^e_{ij} = \dot{e}_{ij} - \dot{e}\delta_{ij}/3 - \dot{e}^p_{ij}$ осуществляется на основе обобщенного закона Гука в метрике текущего состояния:

$$\begin{aligned}D_J \sigma'_{ij} &= 2G(\dot{e}^e_{ij})', & D_J \sigma'_{ij} &= \dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\omega}_{ik}\sigma'_{kj} - \dot{\omega}_{jk}\sigma'_{ik}, \\ \dot{P} &= -K\dot{e}^e, & \dot{P} &= -\dot{\sigma}_{ii}/3, & \dot{e} &= \dot{e}^e_{ii}, & \dot{e}^p_{ii} &= 0,\end{aligned}\quad (2)$$

где D_J — производная Яуманна, описывающая поворот частицы среды как жесткого целого; K, G — модули объемного сжатия и сдвига; P — давление; δ_{ij} — символ Кронекера. Скорости пластических деформаций определяются ассоциированным законом течения:

$$\dot{e}^p_{ij} = \dot{\lambda}\sigma'_{ij}, \quad \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_i^2(\kappa), \quad \sigma_i = \sigma_i(\kappa), \quad \kappa = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{e}^p_{ij}\dot{e}^p_{ij}} dt, \quad (3)$$



где $\sigma_i = \sigma_i(\kappa)$ — зависимость интенсивности напряжений от параметра Одквиста при монотонном нагружении (истинная диаграмма деформирования материала).

2. Нелинейные кинематические и физические соотношения для оболочечных элементов

Для каждого оболочечного элемента вводится местная лагранжева система координат $Os\xi$, связанная с общей соотношениями $ds = \psi_z dr - \psi_r dz$, $d\xi = \psi_r dr + \psi_z dz$, где s — длина дуги меридиана оболочечного элемента; ξ — координатная линия, нормальная к срединной поверхности; β — угловая координата; $\psi_z = r, s$, $\psi_r = -z, s$ — направляющие косинусы нормали к срединной поверхности. Оболочечные элементы полагаются тонкими, изменением метрики по толщине пренебрегаем, деформации поперечного сдвига и изгиба малы по сравнению с деформациями срединной поверхности, кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния. Распределение компонент скоростей перемещений по толщине оболочки записывается в виде

$$\begin{aligned}\tilde{u}_s(s, \xi, \beta, t) &= \dot{u}_s(s, \beta, t) + \xi \dot{\varphi}_s(s, \beta, t), & \tilde{u}_\xi(s, \xi, \beta, t) &= \dot{u}_\xi(s, \beta, t), \\ \tilde{u}_\beta(s, \xi, \beta, t) &= r \dot{u}_\beta(s, \beta, t) + \xi \dot{\varphi}_\beta(s, \beta, t).\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь $\dot{u}_s(s, \beta, t)$ и $\dot{u}_\xi(s, \beta, t)$ — скорости перемещений срединной поверхности в направлении касательной и нормали, $\dot{u}_\beta(s, \beta, t)$ — скорость угла поворота по окружной координате β , $\dot{\varphi}_s(s, \beta, t)$ и $\dot{\varphi}_\beta(s, \beta, t)$ — угловые скорости поворота поперечных сечений в плоскости меридионального сечения и в плоскости $O\xi\beta$.

Распределение компонент скоростей деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений) $\dot{e}_{ij}$ по толщине оболочки представляется в виде суммы скоростей деформаций срединной поверхности $\dot{e}_{ij}$ и изгиба $\dot{\chi}_{ij}$. Компоненты скоростей деформаций $\dot{e}_{ij}$, $\dot{\chi}_{ij}$ и скорость вращения элемента $\dot{\omega}_s\beta$ записываются в местном базисе $s\xi\beta$:

$$\begin{aligned}\dot{e}_{ij} &= \dot{e}_{ij} + \xi \dot{\chi}_{ij}, & \dot{e}_{i\xi} &= \dot{e}_{i\xi} + \dot{\chi}_{i\xi} \quad (i, j = s, \beta), & \dot{e}_{\xi\xi} &= \dot{e}_{\xi\xi}, \\ \dot{e}_{ss} &= \frac{\partial \dot{u}_s}{\partial s} + \frac{1}{R_s} \dot{u}_\xi, & \dot{e}_{\beta\beta} &= \frac{\partial \dot{u}_\beta}{\partial \beta} + \frac{\dot{u}_s}{r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{1}{R_\beta} \dot{u}_\xi, & \dot{e}_{s\beta} &= \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial \dot{u}_\beta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_s}{\partial \beta} - \dot{u}_\beta \frac{\partial r}{\partial s} \right), \\ \dot{e}_{s\xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_\xi}{\partial s} - \frac{1}{R_s} \dot{u}_s \right), & \dot{e}_{\beta\xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_\xi}{\partial \beta} - \frac{1}{R_\beta} \dot{u}_\beta \right), \\ \dot{\chi}_{ss} &= \frac{\partial \dot{\varphi}_s}{\partial s}, & \dot{\chi}_{\beta\beta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}_\beta}{\partial \beta} + \dot{\varphi}_s \frac{\partial r}{\partial s} \right), & \dot{\chi}_{s\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}_\beta}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\varphi}_s}{\partial \beta} - \frac{\dot{\varphi}_\beta}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \right), \\ \dot{\chi}_{s\xi} &= \frac{1}{2} \dot{\varphi}_s, & \dot{\chi}_{\beta\xi} &= \frac{1}{2} \dot{\varphi}_\beta, & \dot{\omega}_{s\beta} &= -\frac{1}{2} r \dot{u}_{\beta,s}.\end{aligned}\quad (5)$$

Выражения для компонент скоростей деформаций через компоненты скоростей перемещений в общем базисе $rz\beta$ получаются из (5) путем подстановки выражений $\dot{u}_s = \dot{u}_r \psi_z - \dot{u}_z \psi_r$, $\dot{u}_\xi = \dot{u}_r \psi_r + \dot{u}_z \psi_z$, они приведены в [16]. Компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{e}_{ij}$ можно представить в виде суммы упругой $\dot{e}_{ij}^e$ и пластической $\dot{e}_{ij}^p$ составляющих. Предполагается, что упругие деформации малы, а пластические деформации могут быть большими. Компонента тензора напряжений Коши, нормальная к срединной поверхности оболочки, принимается равной нулю. Из условия плоского напряженного состояния и обобщенного закона Гука определяется компонента $\dot{e}_{\xi\xi}$:

$$\begin{aligned}\dot{e}_{ij} &= \dot{e}_{ij}^e + \dot{e}_{ij}^p, & \dot{e}_{ii}^p &= 0 \quad (i, j = s, \beta, \xi), \\ \dot{\sigma}_{\xi\xi} &= 0, & \dot{e}_{\xi\xi}^e &= \frac{\mu}{\mu - 1} (\dot{e}_{ss}^e + \dot{e}_{\beta\beta}^e).\end{aligned}\quad (6)$$

Компоненты тензоров скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и напряжений Коши σ_{ij} в местном базисе



$s\xi\beta$ записываются в виде

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ss} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\dot{\epsilon}_{ss}^e + \mu\dot{\epsilon}_{\beta\beta}^e), \quad \dot{\sigma}_{\beta\beta} = \frac{E}{1-\mu^2}(\dot{\epsilon}_{\beta\beta}^e + \mu\dot{\epsilon}_{ss}^e), \quad \dot{\sigma}_{s\beta} = \frac{E}{1+\mu}\dot{\epsilon}_{s\beta}^e, \\ \dot{\sigma}_{s\xi} &= \frac{E}{1+\mu}\dot{\epsilon}_{s\xi}^e, \quad \dot{\sigma}_{\xi\xi} = \dot{\sigma}_{\beta\xi} = 0, \\ D_J\sigma_{ij} &= \sigma_{jk}\dot{\omega}_{ki} + \sigma_{ik}\dot{\omega}_{kj} \quad (i, j, k = s, \beta), \\ \sigma_{ij} &= \int_0^t D_J\sigma_{ij}dt \quad (i, j = s, \beta), \quad \sigma_{s\xi} = \int_0^t \dot{\sigma}_{s\xi}dt.\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь D_J — производная Яуманна, которая учитывает поворот элемента оболочки за счет сдвиговой деформации как квазижесткого целого относительно нормали к ее срединной поверхности при кручении. Местная сопутствующая система координат $Os\xi$ определяется формоизменениями оболочки без учета сдвиговых деформаций кручения, т. е. она является лагранжевой только для осесимметричной деформации. Заметим, что деформации сдвига при кручении тонких оболочек ограничены из соображений устойчивости осесимметричного процесса деформирования. Поэтому введение производной Яуманна для учета квазижесткого вращения при кручении вполне обосновано при использовании явной схемы интегрирования с малыми шагами по времени [16]. В итоге существенно упрощается запись основных уравнений обобщенной осесимметричной задачи с кручением, так как за базовую берется лагранжева система координат осесимметричной задачи.

Учет упругопластических свойств материала оболочки осуществляется в рамках теории течения с нелинейным изотропным упрочнением:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda}n_{ij}, \quad n_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{\sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}}, \quad \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \sigma_T^2(\kappa), \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \\ \sigma &= (\sigma_{ss} + \sigma_{\beta\beta})/3, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^p\dot{\epsilon}_{ij}^p}dt.\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь $\sigma_T(\kappa)$ — радиус поверхности текучести; κ — параметр Одквиста, δ_{ij} — символ Кронекера; параметр λ определяется из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки.

Усилия N_{ij} , моменты M_{ij} , масса N_ρ и момент инерции M_ρ определяются по формулам:

$$\begin{aligned}N_{ij}(\beta) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(\beta)d\xi, \quad M_{ij}(\beta) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(\beta)\xi d\xi \quad (i, j = s, \beta, \xi), \\ N_\rho(\beta) &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho d\xi, \quad M_\rho = \int_{-h/2}^{h/2} \rho\xi^2 d\xi.\end{aligned}\quad (9)$$

3. Уравнения движения многослойной оболочки вращения с учетом контактного взаимодействия между слоями

Вариационные уравнения движения записываются для каждого слоя оболочки на основе трехмерного уравнения баланса виртуальных мощностей работы механики сплошных сред

$$\sum_{k=1}^K \left(\iiint_{V_k} \sigma_{ij}\delta\dot{\epsilon}_{ij}dV + \iiint_{V_k} \rho\ddot{u}_i\delta\dot{u}_i dV - \iint_{S_{pk}} p_i\delta\dot{u}_i dS - \iint_{S_{qk}} q_i\delta\dot{u}_i dS \right) = 0. \quad (10)$$



Здесь V_k — объем, занимаемый k -ым слоем оболочки; K — количество слоев оболочки; S_{pk} — зона действия внешнего давления; S_{qk} — поверхность контакта; $\dot{u}_i, \ddot{u}_i$ — компоненты векторов скорости перемещения и ускорения в общей системе координат; σ_{ij} и $\dot{\epsilon}_{ij}$ — компоненты тензоров напряжений Коши и скорости деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений); ρ — плотность; q_i — контактное давление; p_i — распределенная нагрузка; $\delta\dot{\epsilon}_{ij}, \delta\dot{u}_i$ — вариации $\dot{\epsilon}_{ij}, \dot{u}_i$ (на поверхности с заданными кинематическими граничными условиями $\delta\dot{u}_i = 0$); $i, j = r, \beta, z$, точка над символом означает частную производную по времени t ; по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Для тонкого слоя вариационные уравнения движения выводятся из общего уравнения динамики (10) с учетом принятых гипотез теории оболочек (4)–(9)

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left\{ (N_{s\xi}\xi\psi_r + N_{ss}\psi_z)\delta\dot{u}_{r,s} + (N_{s\xi}\psi_z - N_{ss}\psi_r)\delta\dot{u}_{z,s} + \nu r N_{s\beta}\delta\dot{u}_{\beta,s} + M_{ss}\delta\dot{u}_{\varphi,s} + \right. \\ & + [\nu r^{-1}N_{\beta\beta} + N_\rho(\ddot{u}_r - \nu r\dot{u}_\beta^2) - p_r - q_r]\delta\dot{u}_r + (N_\rho\ddot{u}_z - p_z - q_z)\delta\dot{u}_z + \\ & + \nu(r^2N_\rho\ddot{u}_\beta - p_\beta - q_\beta)\delta\dot{u}_\beta + (N_{s\xi} + \nu r^{-1}M_{\beta\beta}\psi_z + M_\rho\ddot{u}_\varphi)\delta\dot{u}_\varphi + \\ & \left. + \nu(N_{\beta\xi} - M_{s\beta}\psi_z + M_\rho\ddot{u}_\beta)\delta\dot{u}_\beta \right\} r ds - \\ & - [r(P_r\delta\dot{u}_r + P_z\delta\dot{u}_z) + \nu P_\beta\delta\dot{u}_\beta + T_s\delta\dot{u}_\varphi]_{s=0,L} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь ν — параметр симметрии ($\nu = 0$ — плоская деформация, $\nu = 1$ — обобщенная осесимметричная деформация с кручением).

Для массивного слоя вариационные уравнения движения выводятся из общего уравнения динамики (10) с учетом соотношений Коши и условий плоского деформированного состояния или обобщенной осесимметричной деформации с кручением (1)–(3):

$$\begin{aligned} & \iint_\Omega \left\{ \sigma_{rr} \frac{\partial \delta\dot{v}_r}{\partial r} + \sigma_{rz} \left(\frac{\partial \delta\dot{v}_r}{\partial z} + \frac{\partial \delta\dot{v}_z}{\partial r} \right) - \nu \left(\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{r} \delta\dot{v}_r + \frac{\sigma_{rz}}{r} \delta\dot{v}_z \right) \sigma_{zz} \frac{\partial \delta\dot{v}_z}{\partial z} + \right. \\ & \left. + \nu \left(\sigma_{r\beta} \frac{\partial \delta\dot{\theta}}{\partial r} + \sigma_{\beta z} \frac{\partial \delta\dot{\theta}}{\partial z} \right) + \rho(w_r\delta\dot{v}_r + \nu w_\beta r^2\delta\dot{\theta} + w_z\delta\dot{v}_z) \right\} d\Omega - \\ & - \int_{S_p} (p_r\delta\dot{v}_r + \nu p_\beta r^2\delta\dot{\theta} + p_z\delta\dot{v}_z) dS - \int_{S_q} (q_r\delta\dot{v}_r + \nu q_\beta r^2\delta\dot{\theta} + q_z\delta\dot{v}_z) dS = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь Ω — площадь, занимаемая меридиональным сечением слоя; S_p — зона действия внешнего давления; S_q — зона контактного взаимодействия; функции $\dot{v}_\alpha = r^\nu \dot{u}_\alpha$ ($\alpha = r, z$), и $\dot{\theta} = \nu r^{-1} \dot{u}_\beta$ введены в задаче с осевой симметрией для устранения особенности численного решения на оси вращения.

Определяющая система уравнений (1)–(12) дополняется начальными и кинематическими граничными условиями. Для ее решения применяются конечно-разностный метод и явная схема интегрирования по времени типа «крест».

Скорости перемещений и перемещения узлов разностной сетки массивного тела и срединной поверхности оболочки определяются по рекуррентным соотношениям

$$\dot{u}_\alpha^{k+1/2} = \dot{u}_\alpha^{k-1/2} + (\Phi_\alpha^k + q_\alpha^k + p_\alpha^k) \frac{\Delta t^{k+1/2}}{\Phi_\zeta^k}, \quad u_\alpha^{k+1} = u_\alpha^k + \dot{u}_\alpha^{k+1/2} \Delta t^{k+1}, \quad (13)$$

где для оболочки $\alpha = r, z, \varphi, \beta$, для массивного тела $\alpha = r, z, \varphi, \beta$, Φ_α, Φ_ζ — обобщенные узловые силы и масса или момент инерции.

Взаимодействие слоев оболочки обеспечивается дополнительными условиями на контактных поверхностях. У массивных слоев контактными поверхностями являются части контура,



у тонких оболочек — части внешних поверхностей, т.е. учитывается актуальная толщина оболочки. Зоны контакта и компоненты контактного давления $q_\alpha (\alpha = r, z, \beta)$ определяются в ходе решения задачи на основе условий жесткой склейки или условий непроникания по нормали и проскальзывания по касательной [17]. На участке контакта вводится местный базис (s, ξ, β) , где s — направление касательной, ξ — нормали к поверхности, β — окружная координата (совпадает с окружной координатой общего базиса в цилиндрической системе координат). Усилие по нормали определяется из условия непроникания

$$\begin{cases} \dot{u}'_\xi = u''_\xi, \\ q'_\xi = -q''_\xi; \end{cases} \quad q_\xi = q'_\xi = \begin{cases} 0, & q_\xi \geq 0, \\ q_\xi, & q_\xi < 0. \end{cases} \quad (14)$$

Условие жесткой склейки предполагает равенство касательных скоростей

$$\dot{u}'_\alpha = \dot{u}''_\alpha, \quad \alpha = s, \beta, \quad (15)$$

а условие свободного проскальзывания — равенство нулю касательных усилий

$$\dot{u}'_\alpha \neq \dot{u}''_\alpha, \quad q'_\alpha = q''_\alpha = 0, \quad \alpha = s, \beta. \quad (16)$$

Функции с одним и двумя штрихами относятся к первой либо второй контактирующей поверхности соответственно. Для контакта с отрывом условия непроникания (14) выполняются только в активной фазе контактного взаимодействия. При нарушении контакта они заменяются условиями на свободной поверхности.

Для вычисления контактных давлений вариационное уравнение движения контактных границ записывается в местном базисе (s, ξ, β) . Сначала по известному на момент времени $t = t^k$ распределению параметров напряженно-деформированного состояния для узлов разностной сетки обеих контактных границ находятся скорости перемещений $\dot{u}^{k+1/2}_\xi$ и перемещения u^{k+1}_ξ по нормали по рекуррентным соотношениям (13) ($\alpha = \xi$) без учета контактного взаимодействия ($q_\xi = 0$). Для контакта типа жесткой склейки (15) контактные давления вычисляются по формуле

$$q^{k+1}_\xi = \frac{\frac{(\dot{u}^{k+1/2}_\xi - \dot{u}^{k+1/2}_\xi)}{\Delta t^{k+1/2}} + \frac{(\Phi''_\xi)^k}{(\Phi''_M)^k} - \frac{(\Phi'_\xi)^k}{(\Phi'_M)^k}}{\left[\frac{1}{\Phi'_M} + \frac{1}{\Phi''_M} \right]^k}. \quad (17)$$

В случае контакта с отрывом сначала по перехлесту сеток определяется зона контакта. Если перехлест сеток для узлов отсутствует, то контактное давление равно нулю, в противном случае оно определяется по формуле (17). Нормальные контактные давления, вычисленные в местном базисе по формуле (17), перепроецируются из местного базиса в общий. Затем осуществляется расчет скоростей перемещений $\dot{u}^{k+1/2}_\alpha$ и перемещений u^{k+1}_α оболочки ($\alpha = r, z, \varphi, \beta$) и заполнителя ($\alpha = r, z, \beta$) по стандартной вычислительной схеме (13) с учетом контактных давлений. Разработанный подход позволяет моделировать нелинейное докритическое деформирование многослойных оболочек вращения, определять предельные нагрузки в широком диапазоне скоростей нагружения с учетом геометрических несовершенств формы, исследовать процессы потери устойчивости по осесимметричным и неосесимметричным формам при динамических и квазистатических комбинированных нагружениях в условиях плоской и осесимметричной деформации.

4. Результаты численного моделирования

Исследована задача деформирования и потери устойчивости трехслойных цилиндрических оболочек с упругим заполнителем при гидростатическом давлении. Несущие слои оболочки выполнены из алюминиевого сплава Д16Т, заполнитель — из пенопласта. Начальная толщина несущих слоев оболочки $h_0 = 1$ мм, радиусы $R_{01} = 19.5$ мм и $R_{02} = 15.5$ мм. Модуль упругости алюминиевого сплава Д16Т $E = 7.29 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, плотность



$\rho = 2.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, предел текучести $\sigma_T = 290 \text{ МПа}$, истинная диаграмма деформирования материала получена на основе данных, представленных в [18], и приведена в табл. 1 и на рис. 1.

Таблица 1 / Table 1

Истинная диаграмма деформирования материала D16T
True strain diagram of material D16T

ε	σ_i	ε	σ_i	ε	σ_i
0	2.900	$3.510E-03$	3.539	$1.500E-02$	3.898
$1.550E-04$	3.054	$4.010E-03$	3.567	$1.750E-02$	3.952
$3.110E-04$	3.144	$5.010E-03$	3.614	$2.010E-02$	4.003
$5.910E-04$	3.226	$6.000E-03$	3.652	$2.250E-02$	4.050
$1.030E-03$	3.309	$7.030E-03$	3.693	$2.510E-02$	4.098
$1.520E-03$	3.386	$8.020E-03$	3.726	$2.750E-02$	4.137
$2.044E-03$	3.431	$9.020E-03$	3.756	$3.000E-02$	4.169
$2.488E-03$	3.474	$1.000E-02$	3.783	$1.000E-01$	4.625
$3.020E-03$	3.509	$1.250E-02$	3.840	$3.500E-01$	4.800

Начальная толщина заполнителя $H_0 = 3 \text{ мм}$. В расчетах варьировались механические характеристики заполнителя с целью исследования влияния его жесткости на предельную нагрузку и формы потери устойчивости. Механические свойства заполнителя приведены в табл. 2. В качестве самого «мягкого» заполнителя рассматривался пенополистирол Пеноплэкс [19] (строка $m = 1$ в табл. 2), самого «жесткого» — пенопласт ПХВ-1 [20] (строка $m = 5$ в табл. 2). Параметры для материалов $m = 2...4$ вычислялись линейной интерполяцией между значениями для $m = 1$ и $m = 5$.

Коэффициент постели заполнителя вычислялся по формуле $\gamma = \frac{E}{H_0(1-2\nu^2)}$ МПа/м [21],

цилиндрическая жесткость оболочек [1] — $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

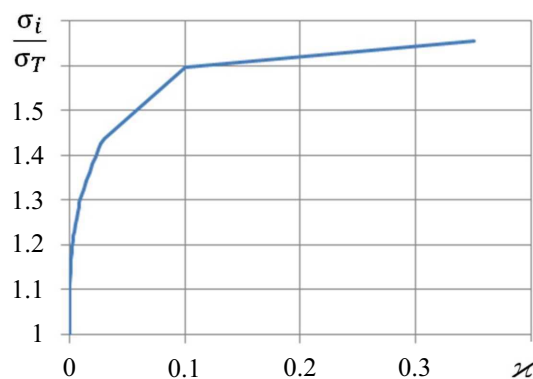


Рис. 1. Истинная диаграмма деформирования материала D16T

Fig. 1. True strain diagram of material D16T

Таблица 2 / Table 2

Упругие свойства заполнителя
Elastic properties of the filler

m	Плотность ρ , кг/м ³	Модуль Юнга E , МПа	Коэффициент Пуассона μ	Коэффициент постели γ , МПа/м	Цилиндрическая жесткость оболочек $D \cdot 10^8$, МПа·м ³
1	25	15.0	0.10	5 102	3.41
2	100	18.6	0.16	6 537	4.30
3	200	23.4	0.24	8 822	5.59
4	300	28.2	0.32	11 831	7.08
5	400	33.0	0.40	16 190	8.85

Полагалось, что оболочка является весьма длинной, так что она находится в условиях плоского деформированного состояния. Имеется плоскость симметрии, проходящая через ось вращения. В связи с этим расчетная область представляет собой половину поперечного сечения трехслойной оболочки. Внешнее давление монотонно возрастает по линейному закону от времени: $p = p_0 t$. В расчетах задавалось четыре варианта параметра скорости нагружения p_0 : 10, 200, 10^3 и 10^5 МПа/с. Внутренняя поверхность трехслойной оболочки свободна

от нагрузки. Численное исследование выполнялось с применением двух расчетных моделей трехслойной оболочки. Модель 1: все слои оболочки моделировались на основе уравнений (1)–(3), (12) конечными элементами сплошной среды [22]. Модель 2: несущие алюминиевые слои моделировались согласно теории оболочек (4)–(9), (11) оболочечными конечными элементами, а пенопластовый наполнитель — конечными элементами сплошной среды (1)–(3), (12).

По результатам расчетов строились зависимости относительного среднего прогиба $\hat{w}$ и безразмерного окружного усилия $\hat{N}$ от внешнего давления p для внешнего слоя оболочки. Относительный средний прогиб внешнего слоя оболочки определялся по формуле

$$w = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^L (u_{\xi})_i, \hat{w} = -\frac{w}{h_0},$$

где w — средний прогиб, L — количество узлов разностной сетки в окружном направлении, $(u_{\xi})_i$ — прогиб (перемещение по нормали) i -го узла расчетной сетки, покрывающей срединную линию внешнего слоя оболочки. Безразмерное окружное усилие вычислялось по формуле

$$N_s = \int_0^h \sigma_{ss} d\xi, \hat{N} = -\frac{N_s}{\sigma_T h_0},$$

где σ_T — предел текучести.

Начальный этап деформирования цилиндрической оболочки характеризуется ее равномерным обжатием и линейным ростом среднего прогиба и окружного усилия в зависимости от давления. Накопление вычислительных ошибок в некоторый момент времени приводит к отклонению геометрии оболочки от круговой формы, резкому росту среднего прогиба и резкому падению окружного усилия. Этот процесс соответствует физической потере устойчивости в эксперименте. В качестве критерия потери устойчивости оболочки примем резкий рост относительного среднего прогиба $\hat{w}$. Величину внешнего давления p^* , при котором происходит потеря устойчивости, будем называть предельным давлением. Критическое давление, которое определяется как собственное значение, и предельное давление p^* могут различаться при динамическом нагружении.

Для контроля этого процесса в численное решение вводится малая погрешность — отклонение поперечного сечения слоев оболочки от круглой формы с малой амплитудой, т. е. начальное несовершенство геометрии. Начальный прогиб срединной поверхности либо поверхности массивного слоя вычисляется по формуле $\Delta R_0 = A h_0 \cos n\beta$, $n = 2, 3, \dots$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$, где $A = 1 \cdot 10^{-3}$ — относительная амплитуда, n — предполагаемый номер формы потери устойчивости. Поскольку номер формы заранее неизвестен, то проводится серия расчетов с $n = 2, 3, 4, \dots$. Выбирается расчет, в котором потеря устойчивости происходит при меньшей величине внешнего давления.

При квазистатическом нагружении пустотелой цилиндрической оболочки потеря устойчивости происходит по второй форме ($n = 2$). При большой жесткости наполнителя и/или большой скорости нагружения реализуются более высокие номера форм потери устойчивости [11–15].

На рис. 2, а приведены зависимости безразмерного окружного усилия $\hat{N}$ от внешнего давления p пустотелой цилиндрической оболочки при скорости нагружения $p_0 = 10^5$ МПа/с, рассчитанные по модели 1. В расчетах задавалась начальная погибь с $n = (2, \overline{13})$. Номера форм, задаваемых в расчете, подписаны рядом с соответствующей кривой. Наименьшее предельное давление соответствует $n = 11$ (см. пунктирную линию на нижней врезке). В верхней врезке приведена форма потери устойчивости при $n = 11$. Величина относительной амплитуды ввиду ее малости не влияет на докритическое деформирование [23]. На рис. 2, б приведены аналогичные результаты для трехслойной оболочки, материал наполнителя $m = 5$. Потеря устойчивости произошла при $n = 10$.

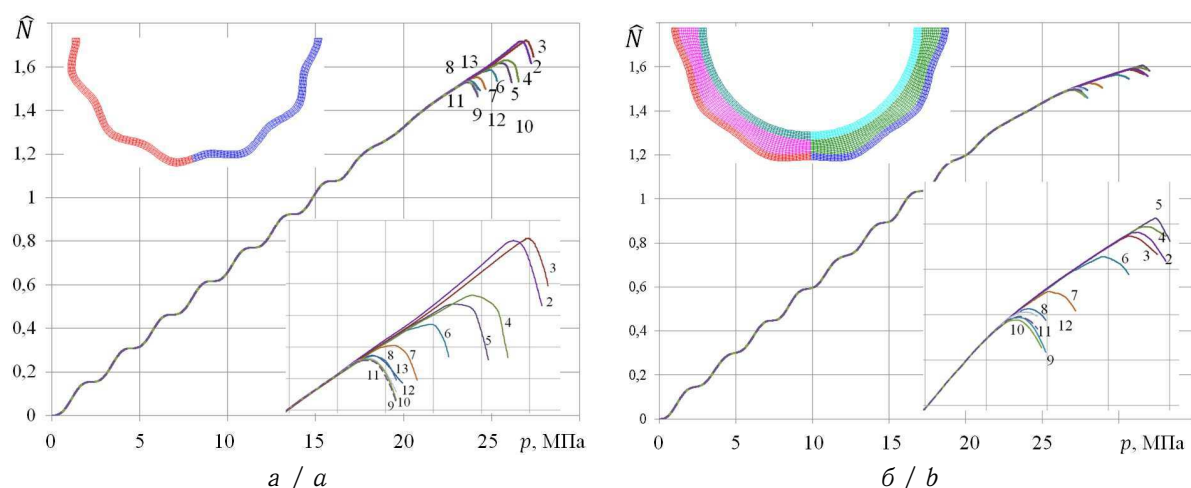


Рис. 2. Зависимости безразмерного окружного усилия $\hat{N}$ от внешнего давления: *a* — пустотелой цилиндрической оболочки, форма потери устойчивости при $n = 11$; *b* — трехслойной цилиндрической оболочки, форма потери устойчивости при $n = 10$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Dependence of the dimensionless circumferential force $\hat{N}$ on external pressure: *a* — of a hollow cylindrical shell, buckling shape at $n = 11$; *b* — of a three-layer cylindrical shell, buckling shape at $n = 10$ (color online)

На рис. 3 приведены расчетные зависимости безразмерного окружного усилия $\hat{N}$ и относительного среднего прогиба $\hat{w}$ от внешнего давления p для внешнего слоя оболочки соответственно, рассчитанные по модели 1.

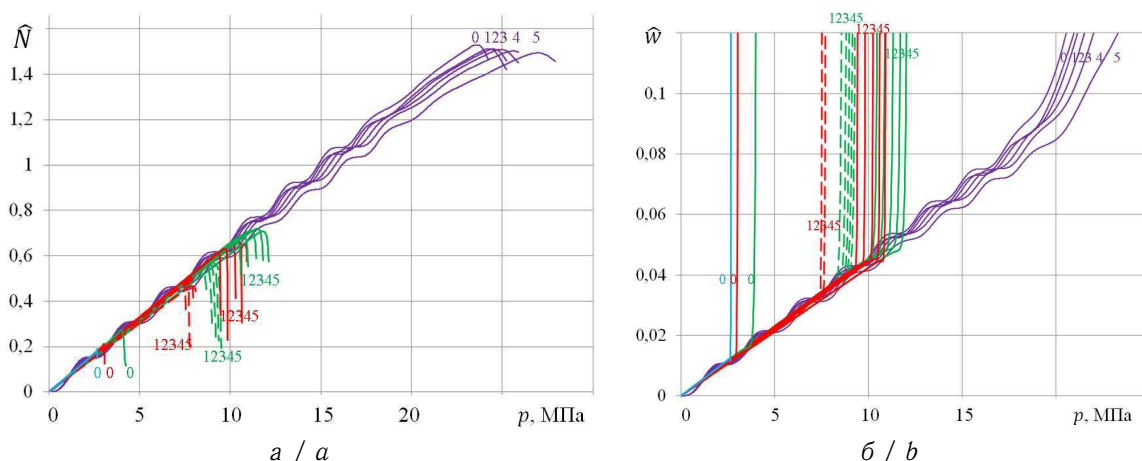


Рис. 3. Зависимости безразмерного окружного усилия (*a*) и относительного среднего прогиба (*b*) от давления: контакт жесткой склейки — сплошные кривые; контакт с отрывом и свободным проскальзыванием вдоль касательной — пунктирные кривые; параметр скорости нагружения p_0 , МПа/с: 10 (синяя кривая); 200 (красные кривые), 10^3 (зеленые кривые) и 10^5 (фиолетовые кривые) (цвет онлайн)

Fig. 3. Dependences of the dimensionless circumferential force (*a*) and the relative average deflection (*b*) on pressure: rigid bonding contact — solid curves, contact with separation and free sliding along the tangent — dotted curves; loading speed parameter p_0 , МПа/с: 10 (blue curve); 200 (red curves), 10^3 (green curves) and 10^5 (purple curves) (color online)

Синими линиями обозначены результаты расчетов при квазистатическом нагружении $p_0 = 10$ МПа/с, красными, зелеными и фиолетовыми — $p_0 = 200, 10^3, 10^5$ МПа/с соответственно. Представлены результаты расчетов с контактным взаимодействием, моделируемым условиями жесткой склейки (сплошные линии) и условиями контакта с отрывом по нормали и проскальзыванием по касательной (пунктирные линии). В расчетах с максимальной скоростью нагружения $p_0 = 10^5$ МПа/с не отмечалось значительного расхождения результатов в

зависимости от алгоритма контакта, поэтому приведены данные только для контакта типа жесткой склейки. Рядом с кривыми приведены цифры, соответствующие номеру материала заполнителя m в табл. 2.

На рис. 4 приведено сравнение результатов расчетов по моделям 1 и 2 для оболочек с $m = 0$ и 5. Наблюдается хорошее соответствие кривых. Расхождение по предельным давлениям не превосходит 10%. В проведенных расчетах номера форм потери устойчивости по обеим методикам совпадают. На рис. 5 приведены зависимости предельного давления от жесткости заполнителя при различных скоростях нагружения, рассчитанные с применением модели 1.

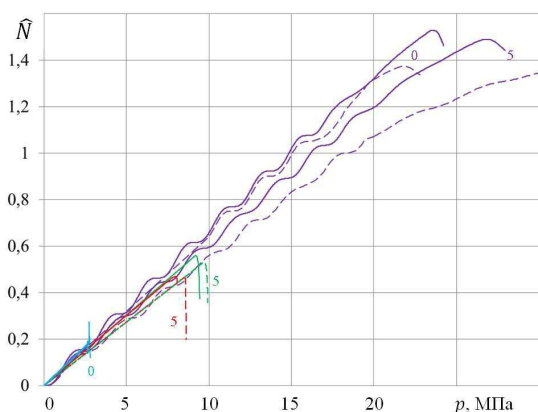


Рис. 4. Зависимости безразмерного окружного усилия от давления: модель 1 — сплошные кривые; модель 2 — пунктирные кривые; параметр скорости нагружения p_0 , МПа/с: 10 (синяя кривая); 200 (красные кривые), 10^3 (зеленые кривые) и 10^5 (фиолетовые кривые) (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of dimensionless circumferential force on pressure: model 1 is solid curves; model 2 is dotted curves; loading speed parameter p_0 , MPa/s: 10 (blue curve); 200 (red curves), 10^3 (green curves) and 10^5 (purple curves) (color online)

Сплошными линиями обозначены зависимости, построенные в расчетах с контактом типа жесткой склейки, пунктирными — контакта с отрывом. Звездочками обозначены результаты расчетов по модели 2 с алгоритмом контакта с отрывом. Обозначения такие же, как на рис. 3. Наблюдается хорошее соответствие по моделям 1 и 2 во всех вариантах расчетов, кроме скорости нагружения $p_0 = 10^5$ МПа/с и $m = 5$. С увеличением жесткости заполнителя и скорости нагружения наблюдается увеличение предельного давления.

Потеря устойчивости в расчетах по обеим моделям со скоростью нагружения $10 \leq p_0 \leq 10^3$ МПа/с происходила по второй форме ($n = 2$). При квазистатическом нагружении ($p_0 = 10$ МПа/с) пустотелой оболочки в расчетах предельное давление $p^* = 2.66$ МПа, что практически совпадает с верхним критическим давлением для весьма длинной цилиндрической упругой оболочки, вычисленным по формуле $q_n = (n^2 - 1)D/R^3 = 2.25$ МПа при $n = 2$ [11].

На рис. 6 приведены формы потери устойчивости оболочки, полученные в расчетах по модели 1, материал $m = 3$.

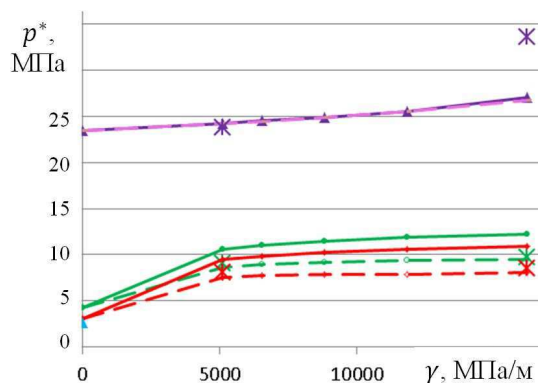


Рис. 5. Зависимости предельного давления от коэффициента постели: контакт типа жесткой склейки — пунктирные линии, контакт с отрывом и свободным проскальзыванием вдоль касательной — точки; параметр скорости нагружения p_0 , МПа/с: 10 (синяя кривая); 200 (красные кривые), 10^3 (зеленые кривые) и 10^5 (фиолетовые кривые) (цвет онлайн)

Fig. 5. Dependence of the limiting pressure on the bed coefficient: contact with rigid gluing — dotted lines, contact with separation and free sliding along the tangent — points; loading speed parameter p_0 , MPa/s: 10 (blue curve); 200 (red curves), 10^3 (green curves) and 10^5 (purple curves) (color online)

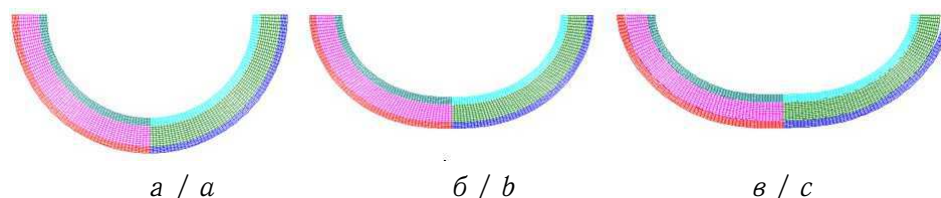


Рис. 6. Формы потери устойчивости оболочек с наполнителем (материал 3):
 a — начальная геометрия; b — контакт жесткой склейки; $в$ — контакт с отрывом;
 параметр скорости нагружения $p_0 = 10^3$ МПа/с (цвет онлайн)
 Fig. 6. Forms of buckling of shells with filler (material 3): a — initial geometry;
 b — contact rigid gluing; c — contact with separation; loading rate parameter
 $p_0 = 10^3$ МПа/с (color online)

Заключение

Рассмотрены две модели, описывающие контактное взаимодействие слоев многослойных оболочек вращения с упругими и упругопластическими слоями при статических и динамических осесимметричных нагружениях с кручением. Апробация моделей проведена на задаче о нагружении внешним гидростатическим давлением упругопластических трехслойных оболочек с упругим наполнителем. Результаты расчетов хорошо согласуются друг с другом. Увеличение жесткости наполнителя, так же как и увеличение скорости нагружения, приводят к увеличению предельного давления, поскольку и наполнитель, и силы инерции оказывают поддерживающий эффект. При этом наблюдается рост номеров преобладающих форм потери устойчивости, имеющих наибольшую скорость роста. Применение оболочечного элемента целесообразно для сокращения времени расчета.

Список литературы

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Москва : Наука, 1967. 984 с.
2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Ленинград : Судпромгиз, 1962. 432 с.
3. Голованов А. И., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. Москва : Физматлит, 2006. 391 с. EDN: QJPXPV
4. Паймушин В. Н. О формах потери устойчивости цилиндрической оболочки при внешнем боковом давлении // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80, № 1. С. 91–102. EDN: VXXUCH
5. Паймушин В. Н. Соотношения теории тонких оболочек типа теории Тимошенко при произвольных перемещениях и деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 5 (327). С. 135–149. EDN: SUKBTV
6. Dash A. P., Velmurugan R., Prasad M. S. R., Sikarwar R. S. Stability improvement of thin isotropic cylindrical shells with partially filled soft elastic core subjected to external pressure // Thin-Walled Structures, B. 2016. Vol. 98. P. 301–311. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.09.028>
7. Karam G. N., Gibson L. J. Elastic buckling of cylindrical shells with elastic cores—I. Analysis // International Journal of Solids and Structures. 1995. Vol. 32, iss. 8–9. P. 1259–1263. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00147-O](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00147-O)
8. Карпов В. В., Бакусов П. А., Масленников А. М., Семенов А. А. Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования. Часть I. Модели деформирования оболочечных конструкций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 370–410. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410>
9. Бакулин В. Н. Послойный анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с вырезами // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 2. С. 111–125. <https://doi.org/10.1134/S0572329919020028>, EDN: JTXHAI
10. Иванов В. А., Паймушин В. Н., Полякова Т. В. Исследование форм потери устойчивости ортотропной трехслойной цилиндрической оболочки при кручении // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия: Механика. 2000. № 2 (2). С. 136–146. EDN: HYICZX
11. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Доклады Академии наук. 1949. Т. 64, № 6. С. 776–782.
12. Farhat C., Wang K. G., Main A., Kyriakides S., Lee L.-H., Ravi-Chandar K., Belytschko T. Dynamic implosion of underwater cylindrical shells: Experiments and Computations // International



- Journal of Solids and Structures. 2013. Vol. 50, iss. 19. P. 2943–2961. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.05.006>
13. Giezen J. J., Babcock C. D., Singer J. Plastic buckling of cylindrical shells under biaxial loading // *Experimental Mechanics*. 1990. Vol. 33. P. 337–343. <https://doi.org/10.1007/BF02325990>
 14. Carvelli V., Panzeri N., Poggi C. Buckling strength of GFRP under-water vehicles // *Composites: Part B*. 2001. Vol. 32. P. 89–101. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(00\)00063-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(00)00063-9)
 15. Ghazijahani T. G., Showkati H. Experiments on conical shell reducers under uniform external pressure // *Journal of Constructional Steel Research*. 2011. Vol. 67. P. 1506–1515. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2011.03.024>
 16. Артемьева А. А., Баженов В. Г., Казаков Д. А., Кибец А. И., Нагорных Е. В. О больших деформациях и предельных состояниях упругопластических оболочек вращения при комбинированных сложных нагружениях // *Прикладная математика и механика*. 2015. Т. 79, вып. 4. С. 558–570. EDN: UXGMOT
 17. Баженов В. Г., Зефилов С. В., Цветкова И. Н. Численное моделирование задач нестационарного контактного взаимодействия деформируемых конструкций // *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов : межвуз. сб. Вып. 52. Москва : Товарищество научных изданий КМК, 1995. С. 154–160.*
 18. Ломунов В. К. Упруго-пластическое выпучивание гладких, составных и подкрепленных оболочек вращения при осевом ударе : дис. ... канд. техн. наук. Горький, 1979.
 19. Ярцев В. П., Андрианов К. А., Иванов Д. В. Физико-механические и технологические основы применения пенополистирола при дополнительном утеплении зданий и сооружений. Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. 120 с. EDN: QNPCOT
 20. Плескачевский Ю. М., Леоненко Д. В. Анализ собственных частот трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде // *Актуальные вопросы машиноведения*. 2012. Т. 1. С. 244–246. EDN: YMDHKKR
 21. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. Москва : Госстройиздат, 1954. 56 с.
 22. Баженов В. Г., Жегалов Д. В., Павленкова Е. В. Численное и экспериментальное исследование упругопластических процессов растяжения-кручения осесимметричных тел при больших деформациях // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2011. № 2. С. 57–66. EDN: NHLAKX
 23. Баженов В. Г., Нагорных Е. В., Самсонова Д. А. Исследование применимости модели основания Винклера для описания контактного взаимодействия упругопластических оболочек с заполнителем при внешнем давлении // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2020. № 4. С. 36–48. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.04>

References

1. Vol'mir A. S. *Ustoychivost' deformiruyemykh sistem* [Stability of Deformable Systems]. Moscow, Nauka, 1967. 984 p. (in Russian).
2. Novozhilov V. V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of Thin Shells]. Leningrad, Sudpromgiz, 1962. 432 p. (in Russian).
3. Golovanov A. I., Tyuleneva O. N., Shigabutdinov A. F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy* [Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 391 p. (in Russian). EDN: QJPXPV
4. Paimushin V. N. On the forms of loss of stability of a cylindrical shell under an external side pressure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, vol. 80, iss. 1, pp. 65–72. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.05.010>, EDN: YUZRSF
5. Paimushin V. N. Relationships of the Timoshenko-type theory of thin shells with arbitrary displacements and strains. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, iss. 5, pp. 843–856. <https://doi.org/10.1134/S0021894414050149>, EDN: SEVBYD
6. Dash A. P., Velmurugan R., Prasad M. S. R., Sikarwar R. S. Stability improvement of thin isotropic cylindrical shells with partially filled soft elastic core subjected to external pressure. *Thin-Walled Structures*, B, 2016, vol. 98, pp. 301–311. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.09.028>
7. Karam G. N., Gibson L. J. Elastic buckling of cylindrical shells with elastic cores—I. Analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, vol. 32, iss. 8–9, pp. 1259–1263. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00147-O](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00147-O)
8. Karpov V. V., Bakusov P. A., Maslennikov A. M., Semenov A. A. Simulation models and research



- algorithms of thin shell structures deformation Part I. Shell deformation models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 370–410 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410>
9. Bakulin V. N. Layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer shells with cutouts. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, iss. 3, pp. 448–460. <https://doi.org/10.3103/S002565441906013X>, EDN: GJAUZR
 10. Ivanov V. A., Paymushin V. N., Polyakova T. V. Investigation of stability loss forms of orthotropic three-layered cylindrical shell under torsion. *Bulletin of Nizhny Novgorod University named after N. I. Lobachevsky. Mechanics*, 2000, iss. 2 (2), pp. 136–146 (in Russian). EDN: HYICZX
 11. Lavrent'yev M. A., Ishlinskiy A. Yu. Dynamic forms of loss of stability of elastic systems. *Doklady Akademii nauk*, 1949, vol. 64, iss. 6, pp. 779–782 (in Russian).
 12. Farhat C., Wang K. G., Main A., Kyriakides S., Lee L.-H., Ravi-Chandar K., Belytschko T. Dynamic implosion of underwater cylindrical shells: Experiments and Computations. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, iss. 19, pp. 2943–2961. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.05.006>
 13. Giezen J. J., Babcock C. D., Singer J. Plastic buckling of cylindrical shells under biaxial loading. *Experimental Mechanics*, 1990, vol. 33, pp. 337–343. <https://doi.org/10.1007/BF02325990>
 14. Carvelli V., Panzeri N., Poggi C. Buckling strength of GFRP under-water vehicles. *Composites: Part B*, 2001, vol. 32, pp. 89–101. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(00\)00063-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(00)00063-9)
 15. Ghazijahani T. G., Showkati H. Experiments on conical shell reducers under uniform external pressure. *Journal of Constructional Steel Research*, 2011, vol. 67, pp. 1506–1515. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2011.03.024>
 16. Artem'eva A. A., Bazhenov V. G., Kazakov D. A., Kibets A. I., Nagornyykh E. V. Large deformations and limiting states of elastoplastic shells of revolution under combined complex loadings. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 79, iss. 4, pp. 394–402. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.01.010>, EDN: XXBCDJ
 17. Bazhenov V. G., Zefirov S. V., Tsvetkova I. N. Numerical modeling of problems of non-stationary contact interaction of deformable structures. *Prikladnyye problemy prochnosti i plastichnosti. Chislennoye modelirovaniye fiziko-mekhanicheskikh protsessov* [Applied Problems of Strength and Plasticity. Numerical Modeling of Physical and Mechanical Processes. Interuniversity Collection]. Vol. 52. Moscow, Tovarishestvo nauchnykh izdaniy KMK, 1995, pp. 154–160 (in Russian).
 18. Lomunov V. K. *Elastic-plastic Buckling of Smooth, Composite and Reinforced Shells of Rotation Under Axial Impact*. Diss. Cand. Sci. (Tech.). Gor'kiy, 1979 (in Russian).
 19. Yartsev V. P., Andrianov K. A., Ivanov D. V. *Fiziko-mekhanicheskiye i tekhnologicheskkiye osnovy primeneniya penopolistirola pri dopolnitel'nom uteplenii zdaniy i sooruzheniy* [Physico-mechanical and Technological Basis for the Use of Polystyrene Foam for Additional Insulation of Buildings and Structures]. Tambov, Tambov State Technical University Publ., 2010. 120 p. (in Russian). EDN: QNPCOT
 20. Pleskachevskiy Yu. M., Leonenko D. V. Analysis of threeply round cylindrical shells natural frequency in elastic medium (environment). *Topical Issues of Mechanical Engineering*, 2012, vol. 1, pp. 244–246 (in Russian). EDN: YMDHKKR
 21. Pasternak P. L. *Osnovy novogo metoda rascheta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshchi dvukh koeffitsiyentov posteli* [Fundamentals of a new method for calculating foundations on an elastic foundation using two bed coefficients]. Moscow, Gosstroyizdat, 1954. 56 p. (in Russian).
 22. Bazhenov V. G., Zhegalov D. V., Pavlenkova Ye. V. Numerical and experimental study of elastoplastic tension-torsion processes in axisymmetric bodies under large deformations. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, iss. 2, pp. 204–212. <https://doi.org/10.3103/S0025654411020087>, EDN: OHUGKR
 23. Bazhenov V. G., Nagornyykh E. V., Samsonova D. A. Investigation of the Winkler foundation model applicability for describing the contact interaction of elastoplastic shells with a core under external pressure. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, iss. 4, pp. 36–48 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.04>

Поступила в редакцию / Received 01.12.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 28–34

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 28–34
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-28-34>, EDN: MEUNCA

Научная статья

УДК 539.3

О несимметричных формах равновесия кольцевых пластин под действием нормального давления

С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова[✉]

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, s.bauer@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3732-2110>, AuthorID: 6610

Воронкова Ева Боруховна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования энергетических систем, e.voronkova@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3065-4473>, AuthorID: 111797

Аннотация. Рассматривается потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия кольцевых пластин, нагруженных нормальным давлением, с упруго закрепленным краем. Значения нагрузки, при которой происходит переход в несимметричное состояние, определяется численным методом в предположении, что несимметричная составляющая решения носит периодический характер. Исследовано влияние размеров внутреннего радиуса пластины и условий закрепления края на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости. Показано, что при увеличении внутреннего радиуса пластина теряет устойчивость при больших значениях нагрузки, но с образованием меньшего числа волн по краю. С увеличением жесткости пружины, препятствующей свободному смещению края пластины в радиальном направлении, бифуркация в несимметричное состояние может происходить при существенно больших нагрузках и с образованием большего числа волн в окружном направлении.

Ключевые слова: кольцевая пластина, нормальное давление, упругая заделка

Для цитирования: Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. О несимметричных формах равновесия кольцевых пластин под действием нормального давления // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 28–34. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-28-34>, EDN: MEUNCA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On asymmetrical equilibrium states of annular plates under normal pressure

S. M. Bauer, E. B. Voronkova[✉]

St. Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia

Svetlana M. Bauer, s.bauer@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3732-2110>, AuthorID: 6610

Eva B. Voronkova, e.voronkova@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3065-4473>, AuthorID: 111797

Abstract. The unsymmetrical buckling of annular plates with an elastically restrained edge which are subjected to normal pressure is studied in this paper. The unsymmetric part of the solution is sought in terms of multiples of the harmonics of the angular coordinate. A numerical method is employed to obtain the lowest load value, which leads to the appearance of waves in the circumferential direction. The effect of plate geometry (ratio of inner to outer radii) and boundary on the buckling load is examined. It is



shown, that for an annulus the buckling pressure and the buckling mode number decreases as the inner radius increases. It is shown that as the internal radius increases, the plate loses stability as the buckling pressure decreases, which also leads to the buckling mode number decrease.

Keywords: annular plate, normal pressure, elastic restraint

For citation: Bauer S. M., Voronkova E. B. On asymmetrical equilibrium states of annular plates under normal pressure. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 28–34 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-28-34>, EDN: MEUNCA This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Вопросы устойчивости оболочек вращения и пластин при различных нагрузках и условиях закрепления являются предметом постоянного обсуждения в научной литературе. Исследуя вопрос о равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах, Д. Ю. Панов и В. И. Феодосьев первыми получили решение, соответствующее несимметричным формам равновесия у пластины, нагруженной нормальным давлением [1]. Используя метод Галеркина, авторы нашли минимальное значение нагрузки и волновое число n , соответствующие появлению вмятин по краю пластины. Однако позже эти результаты подверглись критике, так как принятая однопараметрическая аппроксимация недостаточно точно описывала большие прогибы в докритическом состоянии и, как следствие, привела к ошибочным вычислениям значений критической нагрузки и формы потери устойчивости [2, 3].

Строгие доказательства существования и единственности несимметричного решения у симметрично нагруженной пластины были проведены Н. Ф. Морозовым [4] и W. O. Piechocki [5]. С. D. Somap опубликовал серию работ, посвященных асимптотическим методам решения задачи о потере осесимметричных форм равновесия круглых пластин и сферических оболочек, нагруженных нормальным давлением [6, 7]. Полученные асимптотические решения согласуются с численными расчетами разных авторов [3, 8–10]. При этом Somap отмечает, что появление несимметричных форм равновесия у полой оболочки возможно не при всех типах закрепления края оболочки.

Задача о бифуркации в несимметричное состояние неоднородных в радиальном направлении круглых или кольцевых пластин рассматривалась в работах [8–10]. Получены зависимости критической нагрузки и формы потери устойчивости от скорости изменения жесткости пластины от центра к краю. В настоящей работе обсуждается влияние условий закрепления на появление несимметричных форм равновесия у однородной кольцевой пластины.

1. Постановка задачи

Разрешающая безразмерная система уравнений деформации кольцевой изотропной пластины, нагруженной равномерно распределенным нормальным давлением, относительно функций нормального прогиба $w(r, \theta)$ и усилий $F(r, \theta)$ имеет вид

$$\Delta \Delta w = p + L(w, F), \quad \Delta \Delta F = -L(w, w)/2. \quad (1)$$

Здесь r, θ — полярные координаты срединной поверхности пластины, p — нормальное внешнее давление, Δ — оператор Лапласа, записанный в цилиндрических координатах, L — дифференциальный оператор:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \\ L(x, y) &= x'' \left(y' / r + \ddot{y} / r^2 \right) + y'' \left(x' / r + \ddot{x} / r^2 \right) - 2 \left(\dot{x} / r \right)' \left(\dot{y} / r \right)', \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)' &= \partial \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) / \partial r, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)' = \partial \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) / \partial \theta. \end{aligned}$$

Безразмерные величины в (1) связаны с размерными соотношениями

$$r = \frac{\tilde{r}}{R}, \quad w = \beta \frac{\tilde{w}}{h}, \quad p = \beta^3 \frac{\tilde{p} R^4}{E h^4}, \quad F = \beta^2 \frac{\tilde{F}}{E h^3}, \quad \beta^2 = 12(1 - \nu^2),$$



где R, h — радиус и толщина пластины, E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины.

На краю пластины можно задать один из 16 вариантов стандартных граничных условий, полагая равной нулю одну из величин в каждой из пар: u или T_r ; v или S ; w' или M_r ; w' или Q_1^* , где u, v, w — компоненты вектора перемещений, T_r, S, M_r, Q_1^* — тангенциальные усилия, изгибающий момент и обобщенная перерезывающая сила соответственно. Для моделирования жестко заделанного края необходимо задать условия $u = v = w = w' = 0$. Свободный край описывается условиями $T_r = S = Q_1^* = M_r = 0$.

Будем считать, что внутренний край пластины ($r = \delta = R_{in}/R$) может смещаться в направлении ее оси, но при этом не поворачивается. В этом случае на внутреннем контуре должны выполняться условия

$$u = w' = Q_1^* = S = 0. \quad (2)$$

Предположим, что точки внешнего края закреплены от смещения в направлении нормали к срединной поверхности и от поворотов, т. е. $w = w' = 0$. При этом свободному смещению точек края в радиальном направлении препятствует упругая связь. Тогда граничные условия можно записать в виде

$$w = w' = k_u u + T_r = S = 0, \quad (3)$$

где k_u — коэффициент упругости заделки. Случаю $k_u = 0$ соответствует скользящая заделка, т. е. защемление точек края без закрепления в радиальном направлении.

Граничные условия (2), (3) можно записать через искомые функции w, F , используя представления для усилий T_r, T_θ, S , а также представление компонент деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \omega$ через компоненты вектора перемещений u, v, w , с одной стороны, и усилий T_r, T_θ, S , с другой:

$$\begin{aligned} T_r &= F'/r + \ddot{F}/r^2, \quad T_\theta = F'', \quad S = -(\dot{F}/r), \\ \varepsilon'_\theta - \varepsilon/r - \dot{\omega}/r &= (T_\theta - \nu T_r)' - (T_r - \nu T_\theta)/r - 2(1 + \nu)\dot{S}/r = \\ &= -u/r^2 - \ddot{u}/r^2 - (w')^2/2r - \ddot{w}w'/r - (\dot{w})^2/r^3. \end{aligned} \quad (4)$$

При выводе (4) использована связь безразмерной переменной $u(r, \theta)$ с размерной $u = \beta^2 \frac{R}{h^2} \tilde{u}$.

Обобщенная сила Q_1^* выражается через изгибающие и скручивающие моменты M_r, M_θ, H как

$$Q_1^* = Q_r + \dot{H}/r = M_r' + (M_r - M_\theta)/r + 2\dot{H}/r.$$

Докритическое состояние пластины при малых значениях нагрузки описывается системой

$$\begin{aligned} \Theta_0'' + \frac{\Theta_0'}{r} - \frac{\Theta_0}{r^2} &= \frac{pr}{2} \left(1 - \frac{R_{in}}{r^2} \right) + \frac{\Theta_0 \Phi_0}{r}, \\ \Phi_0'' + \frac{\Phi_0'}{r} - \frac{\Phi_0}{r^2} &= -\frac{\Theta_0^2}{2r}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Theta_0 = \Theta_0(r) = w_0'(r)$ и $\Phi_0 = \Phi_0(r) = F_0'(r)$, и $w_0(r), F_0(r)$ определяют докритическое симметричное решение.

Граничные условия (2), (3) с учетом (4) примут вид

$$\begin{aligned} \Phi_0' - \nu \Phi_0/r &= \Theta_0 = 0 \quad \text{при } r = \delta, \\ \Theta_0 &= k_u(\Phi_0' - \nu \Phi_0) + \Phi_0 = 0 \quad \text{при } r = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения несимметричной формы потери устойчивости представим решение в виде $w(r, \theta) = w_0(r) + w_n(r) \cos(n\theta)$, $F(r, \theta) = F_0(r) + F_n(r) \cos(n\theta)$, где функции $w_{ns}(r, \theta) = w_n(r) \cos(n\theta)$, $F_{ns}(r, \theta) = F_n(r) \cos(n\theta)$ описывают поведение пластины сразу после ее перехода в неосесимметричное состояние, n — число волн в окружном направлении, образовавшихся в результате бифуркации.



Разрешающую систему для несимметричных составляющих функций прогиба w_n и усилий F_n можно получить после подстановки выражений для $w(r, \theta)$, $F(r, \theta)$ в систему (6) и ее линеаризации относительно малых функций $w_n(r)$, $F_n(r)$:

$$\begin{aligned}\Delta_n \Delta_n w_n &= \Theta'_0 \left(\frac{F'_n}{r} - \frac{n^2}{r^2} F_n \right) - \Phi'_0 \left(\frac{w'_n}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) + \frac{w''_n}{r} \Phi_0 + \frac{F''_n}{r} \Theta_0, \\ \Delta_n \Delta_n F_n &= -\frac{w''_n}{r} \Theta_0 - \Theta'_0 \left(\frac{w'_n}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right),\end{aligned}\quad (7)$$

где $\Delta_n = d^2/dr^2 + r^{-1}d/dr - n^2/r^2$.

Граничные условия (2) примут вид

$$\begin{aligned}w'_n &= F'_n - F_n/r = (\Delta_n w_n)' - \frac{n^2}{r}(1-\nu)(w_n/r)' = 0, \\ (\Delta_n F_n)' - \frac{\Delta_n F_n}{r} - \frac{n^2-1}{r^2}(1+\nu)F'_n &\text{ при } r = \delta,\end{aligned}\quad (8)$$

а условия (3) перейдут в

$$\begin{aligned}w_n &= w'_n = k_u u_n + F'_n - n^2 F_n = 0 \quad \text{при } r = 1, \\ u_n &= (F'''_n - (1-\nu + n^2(2+\nu))F'_n + 3n^2 F_n).\end{aligned}\quad (9)$$

Метод решения задачи изложен в работах [3, 9]. Сначала для заданных значений нагрузки p решается симметричная задача, далее методом прогонки проверяется существование решения несимметричной задачи при выбранном значении волнового числа n . Обозначим за p_n нагрузку, при которой для заданного числа волн в окружном направлении существуют отличные от нуля функции w_n , F_n . Тогда критическая нагрузка $p_{cr} = \min_n p_n$, т. е. наименьшее значение нагрузки p_n , при которой появляются волны в окружном направлении.

2. Осесимметричное напряженно-деформированное состояние и появление асимметричных форм равновесия

Сжимающие напряжения в окрестности края пластины создают условия для появления несимметричных форм равновесия у симметрично загруженной пластины [3]. На рис. 1 показано, как меняется интенсивность сжимающих окружных напряжений $T_{\theta\theta}(r)$ при изменении жесткости заделки k_u . Значение $k_u = 0$ соответствует скользящей заделке, при которой точки края могут свободно смещаться в радиальном направлении. Видно, что ограничение радиальных смещений приводит к сужению зоны сжимающих напряжений и уменьшению их интенсивности ($k_u = 0.1$ и $k_u = 1$). При больших значениях жесткости пружины окружные усилия принимают только положительные значения, и в этом случае бифуркация в асимметричное состояние невозможна. Аналогичные результаты получены в [9] для круглых пластин. Отметим, что полному отсутствию смещения в направлении радиуса пластины ($u = 0$) соответствует значение $k_u = \infty$. При увеличении внутреннего радиуса пластины окружные усилия в окрестности края становятся менее интенсивными (рис. 2). Следует отметить, что для узких кольцевых пластин ($\delta > 0.5$) зона, в которой окружные напряжения принимают отрицательные значения, занимает более 60% ширины пластины.

В работах [3, 8] рассматривалась устойчивость осесимметричного состояния равновесия однородной круглой пластины при условии скользящей заделки края. Показано, что такая пластина переходит в неосесимметричное состояние при безразмерной критической нагрузке, равной $p_{cr}^* = 64956$, с образованием 14 волн по краю пластины. Для кольцевых пластин при скользящей заделке внешнего края бифуркация в неосесимметричное состояние происходит при больших значениях критической нагрузки и меньшем числе волн в сравнении с круглой пластиной (рис. 3).

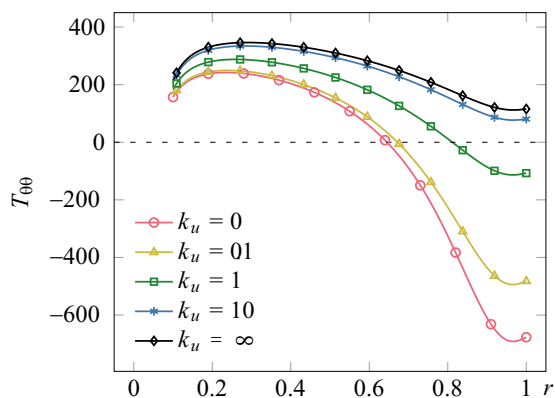


Рис. 1. Безразмерное окружное усилие $T_\theta(r)$ для различных значений жесткости заделки внешнего края k_u и внутреннем радиусе $\delta = 0.1$ (цвет онлайн)

Fig. 1. Dimensionless circumferential stress resultant $T_\theta(r)$ for different values of spring stiffness k_u . Here $\delta = 0.1$ (color online)

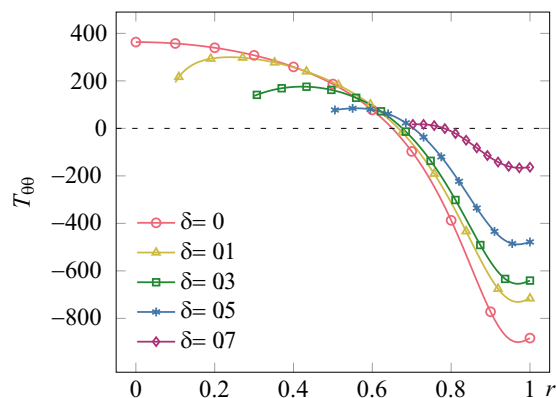


Рис. 2. Влияние внутреннего радиуса на распределение окружных усилий ($k_u = 0.05$). Расчеты проводились для $p = 40000$, $\nu = 0.4$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Dependence of geometry of an annular plate (inner-to-outer ratio δ) on the distribution of circumferential stress resultant T_θ . Here $k_u = 0.05$. Load value and Poisson's coefficient are taken as $p = 40000$, $\nu = 0.4$ (color online)

Так, для пластины с внутренним радиусом $\delta = 0.1$ критическая нагрузка возрастает в 1.08 раза, а число волн в форме потери устойчивости равно $n = 13$ (таблица). Для значений $\delta = 0.5$ нагрузка отличается более чем в 3 раза от критической нагрузки круглой пластины, а число волн уменьшается с 14 для круглой пластины до 9. Аналогичные зависимости были получены для круглых пластин и сферических панелей в [10].

Зависимость нагрузки от p_n/p_{cr}^* от волнового числа n в форме потери устойчивости для различных условий закрепления края представлена на рис. 4.

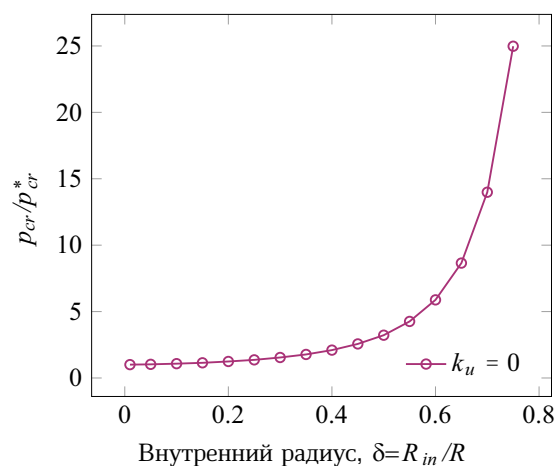


Рис. 3. Зависимость нагрузки p_{cr}/p_{cr}^* от размеров внутреннего радиуса при скользящей заделке внешнего края (цвет онлайн)

Fig. 3. Dependence of the normalized critical load p_{cr}/p_{cr}^* on inner radius δ (color online)

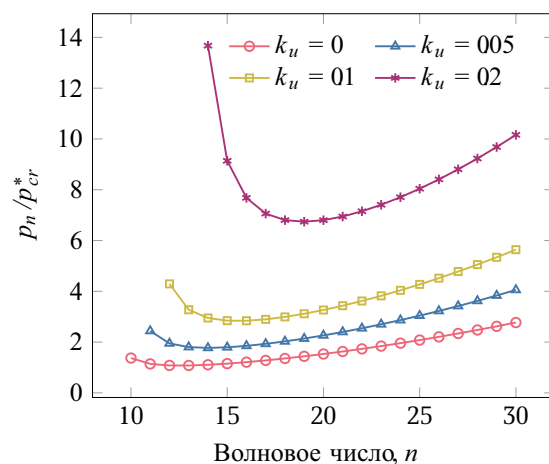


Рис. 4. Зависимость нагрузки p_n/p_{cr}^* от волнового числа n в форме потери устойчивости для различных условий закрепления внешнего края. Здесь $\delta = 0.1$, p_{cr}^* соответствует критической нагрузке для круглой пластины при $k_u = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of the normalized critical load p_n/p_{cr}^* on the mode number n for different values of the restraint coefficient k_u . p_{cr}^* denotes the buckling pressure for a circular plate with a movable edge (color online)



Увеличение жесткости пружины k_u , ограничивающей перемещение точек внешнего края в плоскости пластины, также приводит к резкому росту значений критической нагрузки. При этом пластина переходит в несимметричное состояние с образованием большего числа волн по краю пластины. Так, для кольцевой пластины с внутренним радиусом $\delta = 0.1$ критическая нагрузка отличается от нагрузки p_{cr}^* , при которой круглая пластина теряет устойчивость, в 1.77 раза при $k_u = 0.05$. Если жесткость пружины принять равной $k_u = 0.2$, то критическая нагрузка p_{cr} будет отличаться от нагрузки p_{cr}^* почти в 7 раз, а число волн увеличится до 18. Отношение критической нагрузки при наличии упругой заделки p_{cr} к аналогичным значениям при условии свободного перемещения точек края в радиальном направлении ($k_u = 0$) $p_{cr}^{k_u=0}$ меняется на 6% при $k_u = 0.1$ и на 20% при $k_u = 0.2$ при увеличении внутреннего радиуса с $\delta = 0.1$ до $\delta = 0.25$ соответственно (см. таблицу).

Критическая нагрузка и волновое число для кольцевых пластин при различных значениях жесткости пружины и внутреннего радиуса

Table. Normalized critical buckling load and corresponding wave numbers for the annular plate for different values of the restrained coefficient of the outer edge and inner radius

k_u	0	0.05	0.1	0.2
$\delta = 0.1$				
Критическая нагрузка, p_{cr}/p_{cr}^* ($p_{cr}/p_{cr}^{k_u=0}$)	1.08 (1)	1.77 (1.64)	2.84 (2.63)	6.8 (6.3)
Волновое число, n	13	14	15	18
$\delta = 0.25$				
Критическая нагрузка, p_{cr}/p_{cr}^* ($p_{cr}/p_{cr}^{k_u=0}$)	1.36 (1)	2.33 (1.7)	3.87 (2.85)	9.46 (6.96)
Волновое число, n	11	12	14	17
$\delta = 0.5$				
Критическая нагрузка, p_{cr}/p_{cr}^* ($p_{cr}/p_{cr}^{k_u=0}$)	3.22 (1)	–	–	–
Волновое число, n	9			
$\delta = 0.75$				
Критическая нагрузка, p_{cr}/p_{cr}^* ($p_{cr}/p_{cr}^{k_u=0}$)	24.9 (1)	–	–	–
Волновое число, n	7			

Заключение

Приведены результаты численных расчетов потери устойчивости симметричных форм равновесия кольцевых пластин с упруго заделанным внешним краем. Показано, что увеличение внутреннего радиуса пластины приводит к увеличению значений критической нагрузки в сравнении с круглой пластиной, но образованию меньшего числа волн в окружном направлении. Ограничения перемещений точек края пластины в окружном направлении сопровождается ростом критической нагрузки и увеличением числа волн в форме потери устойчивости. Полученные результаты согласуются с результатами для круглых пластин и пологих сферических панелей.

Список литературы

1. Панов Д. Ю., Феодосьев В. И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12, вып. 4. С. 389–406.
2. Феодосьев В. И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 2. С. 265–274.
3. Cheo L. S., Reiss E. L. Unsymmetric wrinkling of circular plates // Quarterly of Applied Mathematics. 1973. Vol. 31, iss. 1. P. 75–91. <https://doi.org/10.1090/qam/99710>
4. Морозов Н. Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, нагруженной симметричной нагрузкой // Известия высших учебных заведений. Математика. 1961. № 2. С. 126–129.
5. Piechocki W. On the nonlinear theory of thin elastic spherical shells: Nonlinear partial differential equations solutions in theory of thin elastic spherical shells subjected to temperature fields and external loading // Archiwum Mechaniki Stosowanej. 1969. Vol. 21, iss. 1. P. 81–102.



6. Coman C. D., Bassom A. P. Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2016. Vol. 81. P. 8–18. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.12.004>
7. Coman C. D. On the asymptotic reduction of a bifurcation equation for edge-buckling instabilities // *Acta Mechanica*. 2018. Vol. 229. P. 1099–1109. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2036-8>
8. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. О несимметричной форме потери устойчивости неоднородных круглых пластин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8, № 2. С. 204–211. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.201>, EDN: HDOOGN
9. Bauer S. M., Voronkova E. B. On buckling behavior of inhomogeneous shallow spherical caps with elastically restrained edge // *Analysis of Shells, Plates, and Beams in Advanced Structured Materials* / eds.: H. Altenbach, N. Chinchaladze, R. Kienzler, W. H. Müller. Cham : Springer, 2020. P. 65–74. (Advanced Structured Materials, vol. 134). https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_4
10. Bauer S. M., Voronkova E. B. Asymmetric buckling of heterogeneous annular plates // *Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures in Advanced Structured Materials* / eds.: S. Bauer, V. A. Eremeyev, G. I. Mikhasev, N. F. Morozov, H. Altenbach. Cham : Springer, 2022. P. 17–26. (Advanced Structured Materials, vol. 151). https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_2

References

1. Panov D. Yu., Feodosiev V. I. On the equilibrium and loss of stability of shallow shells in the case of large displacement. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1948, vol. 12, iss. 4, pp. 389–406 (in Russian).
2. Feodos'ev V. I. On a method of solution of the nonlinear problems of stability of deformable systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1963, vol. 27, iss. 2, pp. 392–404. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90008-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90008-X)
3. Cheo L. S., Reiss E. L. Unsymmetric wrinkling of circular plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1973, vol. 31, iss. 1, pp. 75–91. <https://doi.org/10.1090/qam/99710>
4. Morozov N. F. On the existence of a non-symmetric solution in the problem of large deflections of a circular plate with a symmetric load. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 1961, iss. 2, pp. 126–129 (in Russian).
5. Piechocki W. On the nonlinear theory of thin elastic spherical shells: Nonlinear partial differential equations solutions in theory of thin elastic spherical shells subjected to temperature fields and external loading. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 1969, vol. 21, iss. 1, pp. 81–102.
6. Coman C. D., Bassom A. P. Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2016, vol. 81, pp. 8–18. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.12.004>
7. Coman C. D. On the asymptotic reduction of a bifurcation equation for edge-buckling instabilities. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, pp. 1099–1109. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2036-8>
8. Bauer S. M., Voronkova E. B. On non-axisymmetric buckling modes of inhomogeneous circular plates. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2021, vol. 54, iss. 2, pp. 113–118. <https://doi.org/10.1134/S1063454121020023>
9. Bauer S. M., Voronkova E. B. On buckling behavior of inhomogeneous shallow spherical caps with elastically restrained edge. In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Müller W. H. (eds.) *Analysis of Shells, Plates, and Beams*. Advanced Structured Materials, vol. 134. Cham, Springer, 2020, pp. 65–74. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_4
10. Bauer S. M., Voronkova E. B. Asymmetric buckling of heterogeneous annular plates. In: Bauer S., Eremeyev V. A., Mikhasev G. I., Morozov N. F., Altenbach H. (eds.) *Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures*. Advanced Structured Materials, vol. 151. Cham, Springer, 2022, pp. 17–26. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_2

Поступила в редакцию / Received 07.12.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 35–48

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 35–48
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-35-48>, EDN: AVPFBT

Научная статья

УДК 539.3

Методология и особенности вычислительного эксперимента по оценке ресурса ответственных инженерных объектов

И. А. Волков, Л. А. Игумнов[✉], В. Е. Костюков, М. Х. Прилуцкий

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, г. Нижний Новгород, просп. Гагарина, д. 23

Волков Иван Андреевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории моделирования физико-механических процессов Центра суперкомпьютерного моделирования Научно-исследовательского института механики, pmptmvgavt@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1176-4906>, AuthorID: 812910

Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории моделирования физико-механических процессов Центра суперкомпьютерного моделирования Научно-исследовательского института механики, igumnov@mech.unn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3035-0119>, AuthorID: 6317

Костюков Валентин Ефимович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информатики и автоматизации научных исследований Института информационных технологий, математики и механики, staff@vniief.ru, AuthorID: 507003

Прилуцкий Михаил Хаимович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и автоматизации научных исследований Института информационных технологий, математики и механики, pril@iani.unn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7694-3916>, AuthorID: 6877

Аннотация. Рассматривается проблема получения оценок прочностных и ресурсных характеристик объектов критической инженерной инфраструктуры при эксплуатационных многопараметрических нестационарных термомеханических воздействиях. Выделены базовые деградационные механизмы в конструкционных материалах (металлах, сплавах) при данных воздействиях. Обосновывается методология оценки ресурса ответственных инженерных объектов на основе сквозного моделирования всего жизненного цикла объекта. Сквозное моделирование образует набор вычислительных экспериментов разного уровня сложности, каждый из которых имеет свои характерные признаки и семантику. С позиции механики деградируемого континуума развита математическая модель поврежденной среды, в которой процессы термопластичности и накопления повреждений порождаются термической усталостью. Модель описывает эффекты циклического термопластического деформирования, кинетику накопления повреждений, условия макроскопического разрушения материала. В модели постулируется представление поверхности текучести и принцип градиентальности вектора скорости пластических деформаций в точке нагружения. Вариант уравнений термопластичности описывает основные эффекты при пропорциональных и непропорциональных режимах. Модель термопластичности построена как система «вложенных» моделей и содержит формы уравнений теории пластического течения при малых деформациях: различные варианты изотропного упрочнения (идеально пластический материал с постоянной поверхностью текучести, линейное изотропное упрочнение, вариант изотропного нелинейного упрочнения), различные случаи кинематического упрочнения (линейное кинематическое упрочнение, случай чисто нелинейного кинематического упрочнения) и общий случай трансляционно-изотропного упрочнения. Кинетика накопления усталостных повреждений описывается путем введения скалярного параметра поврежденности и на базе энергетических принципов учета основных эффектов процесса накопления повреждений для произвольных сложных режимов нагружения. Условие достижения критического значения поврежденности используется в качестве критерия макроскопического разрушения.



Взаимосвязь составных частей модели осуществляется за счет введения эффективных напряжений. В работе представлен численный анализ термической усталостной долговечности компактного образца с концентраторами напряжений, имитирующего работу деталей в сопловой коробке паровой турбины атомной электростанции. В ходе анализа изучены характерные особенности термической усталости в деталях энергооборудования. Показано, что технология сквозного моделирования может эффективно применяться для оценки ресурсных характеристик деталей энергооборудования при эксплуатационных режимах нагружения.

Ключевые слова: численное моделирование, вычислительный эксперимент, модель поврежденной среды, напряженно-деформированное состояние, термоциклическая усталость, поврежденность, разрушение, ресурс

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-19-00138).

Для цитирования: Волков И. А., Игумнов Л. А., Костюков В. Е., Прилуцкий М. Х. Методология и особенности вычислительного эксперимента по оценке ресурса ответственных инженерных объектов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 35–48. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-35-48>, EDN: AVPFBT
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Methodology and features of a computational experiment to assess the resource of responsible engineering facilities

I. A. Volkov, L. A. Igumnov[✉], V. E. Kostyukov, M. Kh. Prilutsky

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue), Nizhny Novgorod 603950, Russia

Ivan A. Volkov, pmptmvgavt@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1176-4906>, AuthorID: 812910

Leonid A. Igumnov, igumnov@mech.unn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3035-0119>, AuthorID: 6317

Valentin E. Kostyukov, staff@vniief.ru, AuthorID: 507003

Mikhail Kh. Prilutsky, pril@iani.unn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7694-3916>, AuthorID: 6877

Abstract. The problem of obtaining estimates of the strength and resource characteristics of critical engineering infrastructure facilities under operational multiparametric nonstationary thermomechanical impacts is considered. The basic degradation mechanisms in structural materials (metals, alloys) under these influences are identified. The methodology of resource assessment of responsible engineering facilities based on end-to-end modeling of the entire life cycle of the object is substantiated. End-to-end modeling forms a set of computational experiments of different levels of complexity, each of which has its own characteristic features and semantics. From the perspective of the mechanics of the degraded continuum, a mathematical model of the damaged medium has been developed, in which the processes of thermoplasticity and damage accumulation are generated by thermal fatigue. The model describes the effects of cyclic thermoplastic deformation; kinetics of damage accumulation; conditions of macroscopic destruction of the material. The model postulates the representation of the yield surface and the principle of gradiency of the velocity vector of plastic deformations at the loading point. A variant of the thermoplasticity equations describes the main effects in proportional and disproportionate modes. The thermoplasticity model is constructed as a system of “nested” models and contains the forms of equations of the theory of plastic flow under small deformations: various variants of isotropic hardening (ideally plastic material with a constant flow surface, linear isotropic hardening, variant of isotropic nonlinear hardening), various cases of kinematic hardening (linear kinematic hardening, the case of purely nonlinear kinematic hardening) and the general case of translational isotropic hardening. The kinetics of fatigue damage accumulation is described by introducing a scalar damage parameter and based on the energy principles of taking into account the



main effects of the damage accumulation process for arbitrary complex loading modes. The condition of reaching the critical damage value is used as a criterion for macroscopic destruction. The relationship between the components of the model is carried out by introducing effective stresses. The paper presents a numerical analysis of the thermal fatigue life of a compact sample with stress concentrators simulating the operation of parts in the nozzle box of a steam turbine of a nuclear power plant. During the analysis, the characteristic features of thermal fatigue in the details of power equipment were studied. It is shown that the end-to-end modeling technology can be effectively used to assess the resource characteristics of power equipment parts under operational loading conditions.

Keywords: numerical modeling, computational experiment, model of damaged medium, stress-strain state, thermocyclic fatigue, damage, destruction, resource

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-19-00138).

For citation: Volkov I. A., Igumnov L. A., Kostyukov V. E., Prilutsky M. Kh. Methodology and features of a computational experiment to assess the resource of responsible engineering facilities. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 35–48 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-35-48>, EDN: AVPFBT

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Рассматриваются объекты критической инфраструктуры при длительных сроках эксплуатации, такие как ядерные энергетические установки, нефтехимическое оборудование, резервуары газообразных и сжиженных химических продуктов, авиационные газотурбинные двигатели и установки нового поколения и др. Предполагается, что время работы объекта измеряется несколькими десятками лет. Условия эксплуатации объекта характеризуются нестационарными термомеханическими воздействиями. Длительная эксплуатация ответственных инженерных объектов (ОИО) приводит к накоплению повреждений, падению исходных прочностных свойств материала и образованию, развитию трещин. Безопасная эксплуатация ОИО и обоснование сроков их службы обеспечивается контрольно-надзорными мероприятиями за процессом накопления повреждений в опасных зонах, оценкой выработанного ресурса материала таких зон, а также прогнозом работы материала до предельных состояний (остаточный ресурс) [1–6]. Истощение ресурса определяется во многих случаях такими деградационными механизмами, как много- или малоцикловая усталость, нестационарная ползучесть, коррозионные повреждения, фреттинг-износ и фреттинг-усталость, радиационное повреждение и др. Необратимые структурные изменения определяют процесс образования макроскопической трещины и долговечность материала.

Общие формулировки количественной связи повреждения с изменением измеряемых физически параметров — магнитная проницаемость, электросопротивление, твердость, модули упругости и т. д. — для проведения ресурсных расчетов в настоящее время практически не используются (в предпринятых попытках в настоящее время количественно связать изменение физического параметра с повреждением отсутствуют результаты, которые могли бы использоваться в практических расчетах). Невозможность их применения актуализирует создание моделей поврежденной среды. Мера поврежденности материала как внутренняя переменная состояния определяется возможностями натурного эксперимента и берется в виде скалярного параметра ω [2–4, 7–14], изменяющегося от начального состояния ω_0 , соответствующего неповрежденному материалу, до предельной величины ω_f , соответствующей макроразрушению. Предполагается, что процесс накопления повреждений зависит от истории напряженно-деформированного состояния (НДС).

Содержание методологии компьютерного моделирования составляют: определение зависящих от времени граничных и начальных условий; определение квазистатического НДС на основе дифференциальной теории термопластичности при учете истории и эффектов



сложного нагружения; описание процесса накопления усталостных повреждений и расчет долговечности; формулировка предельных состояний.

Расширенная задача расчета ресурса формулируется за счет вариабельности постановок задач и применяемых численных методов. Это формирует пространство вариабельности задачи и требует разработки новых архитектур многофункциональных прикладных пакетов программ [15–17]. Совокупность программ расчетного ядра опирается на методическое обеспечение конечной или граничной элементной схем.

При решении задач модельной и параметрической идентификации в описании процессов термоциклического разрушения применяется экспериментально-расчетный подход, в рамках которого требуются оригинальные программно-аппаратные разработки, чьи возможности не достижимы такими многофункциональными инженерными пакетами программ, как «Логос», «ANSYS», «Abaqus» и др.

Для оценки остаточного ресурса ОИО требуются: гарантированная точность расчета НДС с учетом нелинейности поведения материала (пластичность, поврежденность, ползучесть и т. д.); анализ цифрового двойника узла на всем временном интервале стационарирования параметров термоциклического деформирования, а в отдельных случаях получение расчетных состояний для всего жизненного цикла выделенного узла. Численный анализ, как правило, необходим для потенциально опасных зон ОИО. К таким зонам традиционно относятся сварные швы, места смены типа граничных условий и т. п. В таких местах возникают концентраторы напряжений, и построение соответствующих оценок требует высокой точности расчета. Заданная точность прочностных оценок исследователями достигается за счет сквозного моделирования, когда исходный анализируемый процесс представляется в виде связанных процессов меньшего уровня сложности: трехмерный упругий расчет, двумерное упругопластическое моделирование отдельных конструктивных элементов, определение ресурсных характеристик материала опасных зон (расчет в «точке») и т. п. Каждый такой подпроцесс имеет свое целеполагание. Данные, полученные по упругому НДС, в трехмерной постановке дадут общее представление о деформировании исследуемого объекта. По результатам такого расчета даются оценки важных расчетных показателей создаваемых конечномерных моделей, таких как выявление критических мест для их построения и выбор локальных аппроксимаций, с точки зрения оценки долговечности. Расчет НДС в двумерной постановке (плоской или осесимметричной) при нелинейном характере поведения материала позволяет численно детализировать процесс деформирования и накопления повреждений в выделенных зонах. Подход не требует построения цифрового двойника всей конструкции. Локация конструкционного узла определяется граничными условиями, степенями свободы и т. п. Такой расчет достаточен для получения ресурсных характеристик материала в условиях эксплуатационного нагружения.

Ресурсные характеристики конструкции определяются, как правило, с помощью расчета ресурса опасных зон конструктивных элементов в эксплуатационных условиях нагружения (расчет ресурсных характеристик в «точке»).

Развитие рассматриваемой в работе модели поврежденной среды (МПС) можно найти в [3, 4, 12–14].

В работе представленный подход используется для численного анализа термической усталости детали с концентраторами, имитирующими работу деталей сопловой коробки паровой турбины атомной электростанции (АЭС) с использованием технологии сквозного моделирования с применением развитого программного средства «EXPMODEL» [3, 4], созданного для расчетного моделирования неизотермического вязкопластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных сплавах при нерегулярном нестационарном термомеханическом нагружении.

1. Модель поврежденной среды для оценки усталостной долговечности при термоциклическом нагружении

Модель поврежденной среды, предложенная в [1, 3] и развитая в [1, 4].



1. Определяющие соотношения термопластичности.

Основные уравнения модели термопластичности имеют вид [18, 19]:

– уравнение поверхности текучести Мизеса

$$F_{(p)} = S_{ij}S_{ij} - C_{(p)}^2 = 0, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}^{(p)}, \quad (1)$$

где $C_{(p)}$ — текущий радиус поверхности текучести, а $\rho_{ij}^{(p)}$ — координаты ее центра;

– уравнение поверхности циклической «памяти»

$$F_{(\rho)} = \rho_{ij}^{(p)} \rho_{ij}^{(p)} - \rho_{\max}^{(p)2} = 0, \quad (2)$$

где $\rho_{\max}^{(p)}$ — максимальный за историю нагружения модуль $\rho_{ij}^{(p)}$,

$$\dot{\rho}_{\max}^{(p)} = (\rho_{ij}^{(p)} \dot{\rho}_{ij}^{(p)}) H(F_{(\rho)}) / \sqrt{\rho_{mn}^{(p)} \rho_{mn}^{(p)}} - g_2 \rho_{\max}^{(p)} \dot{\chi}_{(p)} - g_3 \rho_{\max}^{(p)} \langle \dot{T} \rangle. \quad (3)$$

Здесь для величины $\dot{T}$, заключенной в $\langle \rangle$, выполняется условие

$$\langle \dot{T} \rangle = \begin{cases} \dot{T}, & \dot{T} > 0, \\ 0, & \dot{T} \leq 0. \end{cases}$$

Для эволюции радиуса поверхности текучести постулируем уравнение [18, 19]

$$\dot{C}_{(p)} = [qH(F_{(\rho)}) + a(Q - C_{(p)})\Gamma(F_{(\rho)})] \dot{\chi}_{(p)} + q_3 \langle \dot{T} \rangle; \quad (4)$$

$$C_{(p)} = C_{(p)}^0 + \int_0^t \dot{C}_{(p)} dt, \quad \dot{\chi}_{(p)} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}}, \quad \chi_{(p)} = \int_0^t \dot{\chi}_{(p)} dt; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} q &= q_2 A \psi_1 + (1 - A) q_1 / (A \psi_1 + (1 - A)), \\ Q &= Q_2 A \psi_2 + (1 - A) Q_1 / (A \psi_2 + (1 - A)), \\ 0 &\leq \psi_i \leq 1, \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (6)$$

$$A = 1 - \cos^2 \theta, \quad \cos \Theta = n_{ij}^{(e)} n_{ij}^{(s)}, \quad n_{ij}^e = \dot{\epsilon}'_{ij} / \sqrt{\dot{\epsilon}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij}}, \quad n_{ij}^{(s)} = S_{ij} / \sqrt{S_{ij} S_{ij}}; \quad (7)$$

$$H(F_{(\rho)}) = \begin{cases} 1, & F_{(\rho)} = 0 \text{ и } \rho_{ij}^{(p)} \dot{\rho}_{ij}^{(p)} > 0 \\ 0, & F_{(\rho)} < 0 \text{ или } \rho_{ij}^{(p)} \dot{\rho}_{ij}^{(p)} \leq 0 \end{cases}, \quad \Gamma(F_{(\rho)}) = 1 - H(F_{(\rho)}), \quad (8)$$

где a — постоянная, которая определяет скорость стабилизации формы петли пластического гистерезиса при циклическом деформировании материала; Q — значение радиуса поверхности текучести (стабилизированное) при соответствующих значениях $\rho_{\max}^{(p)}$ и T ; $\chi_{(p)}$ — длина пути пластического деформирования материала; $C_{(p)}^0$ — начальный радиус поверхности текучести, q_1, q_2, q_3 — материальные параметры (модули) изотропного упрочнения (q_1 — лучевых путей нагружения, q_2 — излома траектории деформирования на 90° , q_3 — температурного изменения радиуса поверхности) [18, 19];

– уравнение для эволюции внутренней переменной ρ_{ij}^p

$$\dot{\rho}_{ij}^{(p)} = f(\chi_{(p)}^m) [g_1 \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} - g_2 \rho_{ij}^{(p)} \dot{\chi}_{(p)}] + g_3 \rho_{ij}^{(p)} \langle \dot{T} \rangle, \quad \rho_{ij}^{(p)} = \int_0^t \dot{\rho}_{ij}^{(p)} dt, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} f(\chi_{(p)}^m) &= 1 + k_1 (1 - e^{-k_2 \chi_{(p)}^m}), \quad g_3 = \left(\partial g_1 / \partial T - \frac{g_1}{g_2} \partial g_2 / \partial T \right) / g_1, \\ \chi_{(p)}^m &= \int_0^t \dot{\chi}_{(p)} H(F_{(\rho)}) dt, \end{aligned} \quad (10)$$



где $\chi_{(p)}^m$ — длина траектории пластического деформирования на монотонных участках, g_1, g_2, g_3 — модули анизотропного упрочнения (параметры материала), k_1, k_2 — экспериментально определяемые материальные параметры.

Представленный вариант уравнений включает в себя известную модель J. L. Chaboche, описывающую нелинейное кинематическое изотропное упрочнение без учета циклического упрочнения. Это особенно важно, так как позволяет поэтапное применение расчетного «кода» «ANSYS», в котором заложена модель J. L. Chaboche, и программного средства «EXPMODEL», в котором используется развитый вариант модели термопластичности.

2. Эволюционные уравнения накопления усталостных повреждений [3, 4, 20–22].

Постулируем, что уравнения накопления усталостных повреждений могут быть представлены в виде

$$\dot{\omega} = f_1(\beta)f_2(\omega)f_3(W_{(p)})f_4(\dot{W}_{(p)}), \quad \dot{W}_{(p)} = \rho_{ij}^{(p)}\dot{e}_{ij}^{(p)}, \quad W_{(p)} = \int_0^{W_f} \rho_{ij}^{(p)} d\dot{e}_{ij}^{(p)}, \quad (11)$$

где функции $f_j, j = 1...4$ учитывают: объемность напряженного состояния ($f_1(\beta)$); уровень накопленной поврежденности ($f_2(\omega)$); накопленную относительную энергию повреждения, затраченную на образование дефектов ($f_3(W_{(p)})$), и скорость изменения энергии повреждения ($f_4(\dot{W}_{(p)})$).

В уравнении (11)

$$f_1(\beta) = \exp(\beta), \quad f_2(\omega) = \begin{cases} 0, & W_{(p)} \leq W_a, \\ \omega^{1/3}(1-\omega)^{2/3}, & W_{(p)} > W_a \wedge \omega \leq 1/3, \\ \frac{\sqrt[3]{16}}{9}\omega^{-1/3}(1-\omega)^{-2/3}, & W_{(p)} > W_a \wedge \omega > 1/3, \end{cases} \quad (12)$$

$$f_3(W_{(p)}) = \frac{W_{(p)} - W_a}{W_f - W_a}, \quad f_4(\dot{W}_{(p)}) = \frac{\dot{W}_{(p)}}{W_f - W_a}, \quad (13)$$

где W_a — значение $W_{(p)}$ в конце стадии зарождения усталостных повреждений, а W_f — значение $W_{(p)}$ в момент образования макротрещины.

3. Критерий прочности поврежденного материала: $\omega = \omega_f \leq 1$.

2. Численные результаты

Паровые турбины современных ТЭС и АЭС [23] являются двигателями, в которых потенциальная энергия пара превращается в кинетическую энергию, а затем и в механическую энергию вращения валопровода. Статор турбины состоит из корпуса, в который вварены сопловые коробки.

В процессе эксплуатации сопловая коробка паровой турбины испытывает термоциклическое нагружение при следующем режиме работы: быстрый пуск, рабочий режим, останов. В процессе эксплуатации перепад температур в конструктивных элементах сопловой коробки составляет от 400 до 20°C в местах концентрации напряжений с теоретическим коэффициентом концентрации, равным 2.2 [23, 24].

В работе [24] представлены результаты экспериментального исследования особенностей термической усталости образцов с концентраторами, имитирующих работу концентраторов напряжений в сопловой коробке паровой турбины АЭС.

Испытаниям подвергались толстостенные образцы из титанового сплава 5В, прошедшие предварительную термическую обработку, аналогичную штатному изделию. Образцы имели форму диска диаметром 200 мм и толщиной 10 мм с десятью вырезами — концентраторами напряжений.

На рис. 1 показаны пронумерованные вырезы А, Б, В, Г, Д соответственно с шириной $B_k = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0$ мм, радиусом в вершине выреза $R_k = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ мм и

коэффициентом концентрации напряжений $\alpha_\sigma = 2.5, 2.0, 1.5, 1.25, 1.1$. Термоциклическое нагружение образцов осуществлялось периодическим индуктивным нагревом их торцевой поверхности с последующим воздушным охлаждением. Для контроля скорости изменения температуры торцевой и наружных поверхностей использовались термопары, места установки которых на рис. 1 обозначены точками с номерами 1–10.

На рис. 2 представлены результаты испытания образцов для двух режимов термоциклического нагружения при нагреве лицевой поверхности детали (до 450°C на первом режиме и до 373°C на втором) с последующим охлаждением до 100°C при времени цикла 450 с для первого режима и 350 с — для второго.

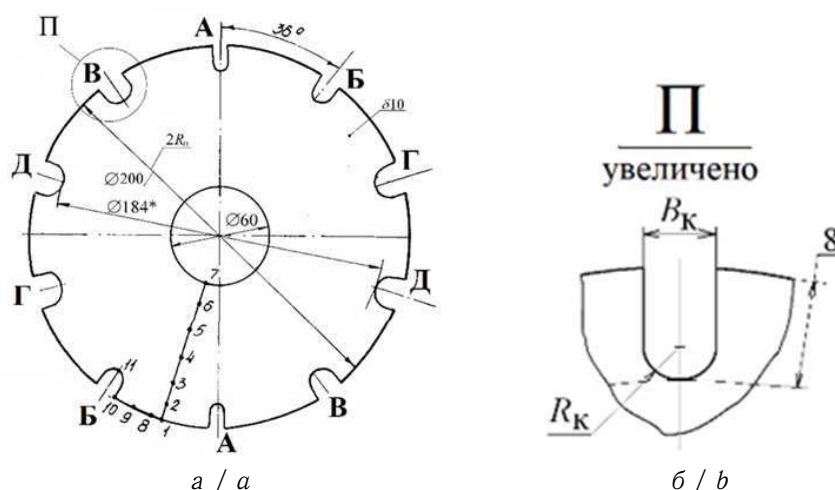


Рис. 1. Геометрия образцов с концентраторами: а — общий вид образцов; б — геометрия концентраторов напряжений (фрагмент образца)

Fig. 1. Geometry of samples with concentrators: а is general view of samples; b is geometry of stress concentrators (sample fragment)

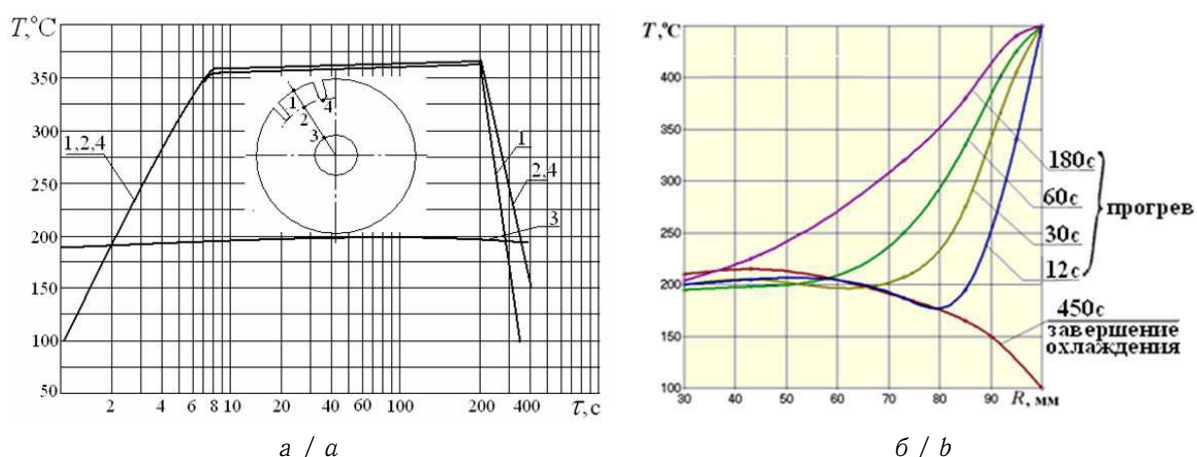


Рис. 2. Два режима термоциклического нагружения: а — зависимость температуры от времени в различных точках образца для режима нагружения 2; б — распределение температуры вдоль радиуса в различные моменты времени для режима нагружения 1

Fig. 2. Two modes of thermocyclic loading: а is temperature dependence on time at different points of the sample for loading mode 2; б is temperature distribution along the radius at different times for loading mode 1

В работе использована методология поэтапного численного моделирования. На первом этапе рассматривался индукционный разогрев детали с последующим охлаждением как нестационарная задача теплопроводности с расчетом кинетики поля температур при термоциклическом нагружении в инженерном пакете «ANSYS» (лицензия Customer 244793).

Для трех циклов нагружения (рис. 3) представлено распределение поля температур в образцах в различные моменты времени в процессе термоциклирования для режима нагружения. Анализ результатов показывает, что поле температуры по объему образца сильно неоднородно. В области концентраторов напряжений за цикл нагружения температура изменяется $\sim 250^{\circ}\text{C}$. Видно, что процесс изменения температурного поля стабилизируется на третьем цикле.

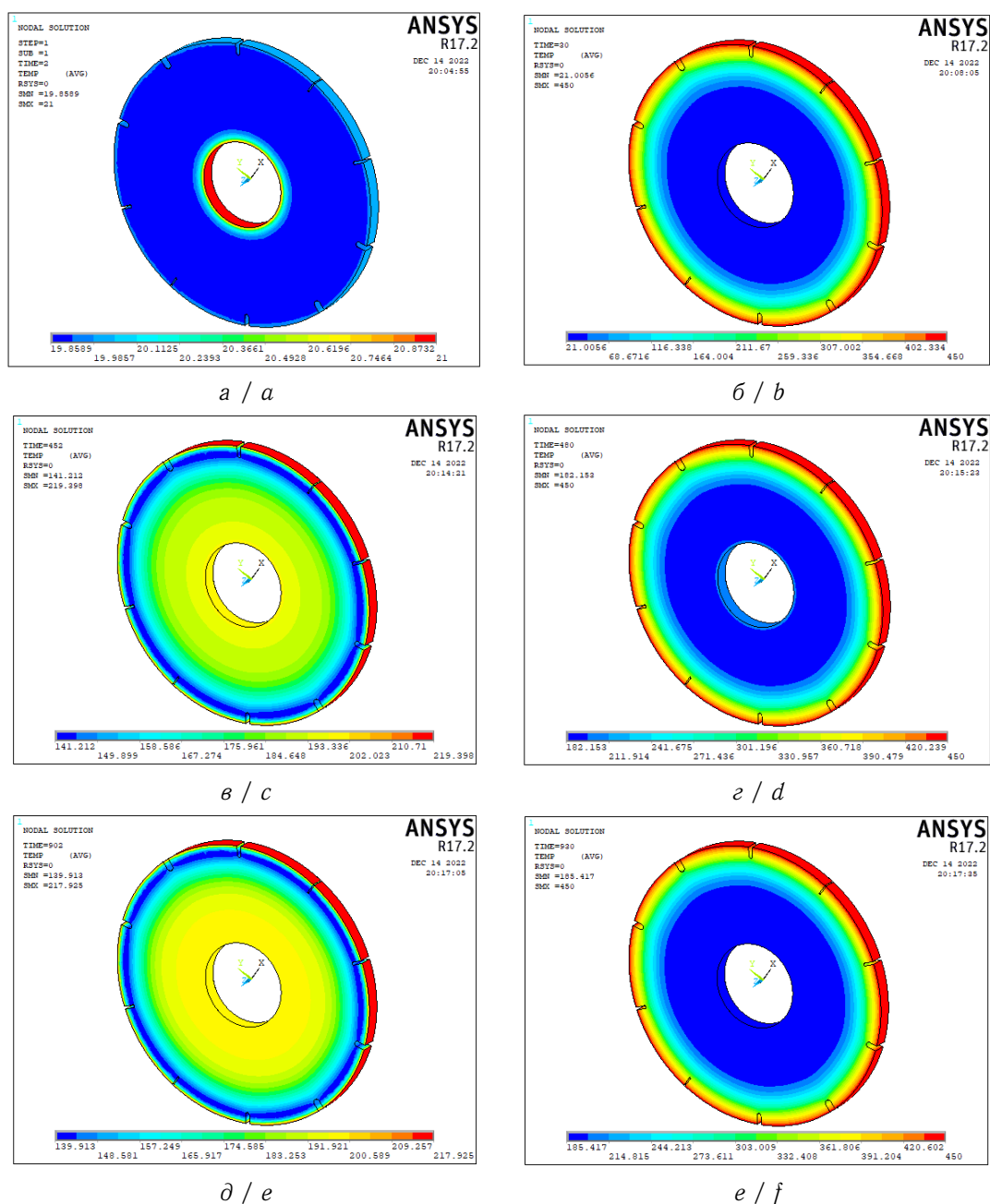
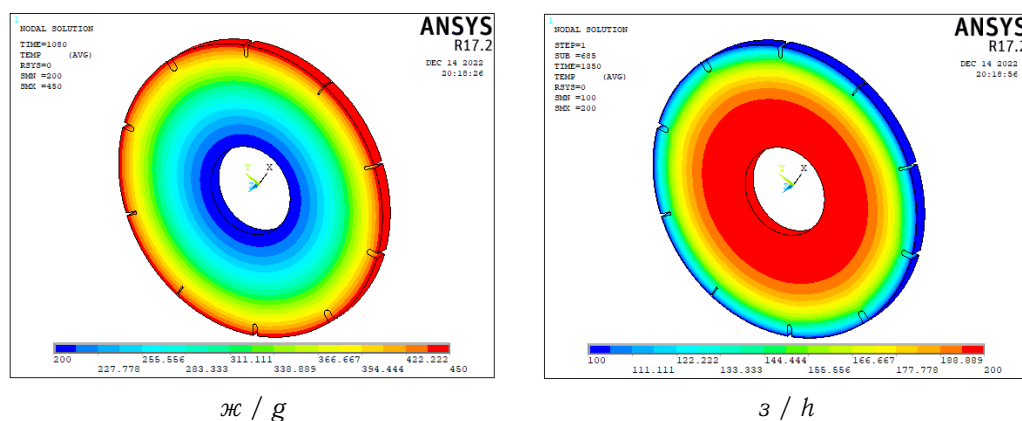


Рис. 3. Распределение поля температур в образце в различные моменты времени для режима нагружения 1 (цвет онлайн)

Fig. 3. Distribution of the temperature field in the sample at different time points for the loading mode 1 (color online)



Окончание рис. 3 / Continuation of Fig. 3

На втором этапе проводился расчет кинетики НДС в упругопластической постановке в инженерном пакете «ANSYS». При решении задачи прочностного анализа в качестве условий нагружения образца использовались тепловые поля, полученные на этапе расчета нагрева и охлаждения образца. Анализ результатов расчета показал, что максимальные значения интенсивности напряжений и интенсивности пластических деформаций наблюдаются в вершинах концентраторов напряжений (вырезах). Эти данные позволили на третьем этапе провести оценку термоциклической усталостной долговечности образца с концентратором с помощью разработанного программного средства «EXPMODEL» [3, 4].

На рис. 4 показана история изменения температуры и компонент тензора деформаций от числа циклов нагружения в зоне концентратора для режима термоциклического нагружения 1, полученного с использованием инженерного пакета «ANSYS».

Основные прочностные свойства и параметры модели МПС для титанового сплава 5В при температурах 20, 100, 350 и 450°C соответственно следующие: $K = 94\,167$, $83\,333$, $80\,000$ МПа, $G = 43\,462$, $38\,462$, $36\,923$ МПа, $C_{(p)}^0 = 450$, 382 , 252 , 225 МПа, $g_1 = 205\,000$, $188\,000$, $129\,000$, $115\,000$ МПа, $g_2 = 1050$, 1120 , 1190 , 1140 , $a = 20$, $W_a = 0$, $W_f = 694$, 688 , 641 , 611 МДж/м³.

На рис. 5 для первого режима термоциклического нагружения приведены зависимости петель термопластического гистерезиса $\sigma_{11} \sim e_{11}$, $\sigma_{22} \sim e_{22}$ в зоне концентратора напряжений для вершин выреза А, Б, В и Г и коэффициента концентрации 2.5, 2.0, 1.5 и 1.25 соответственно.

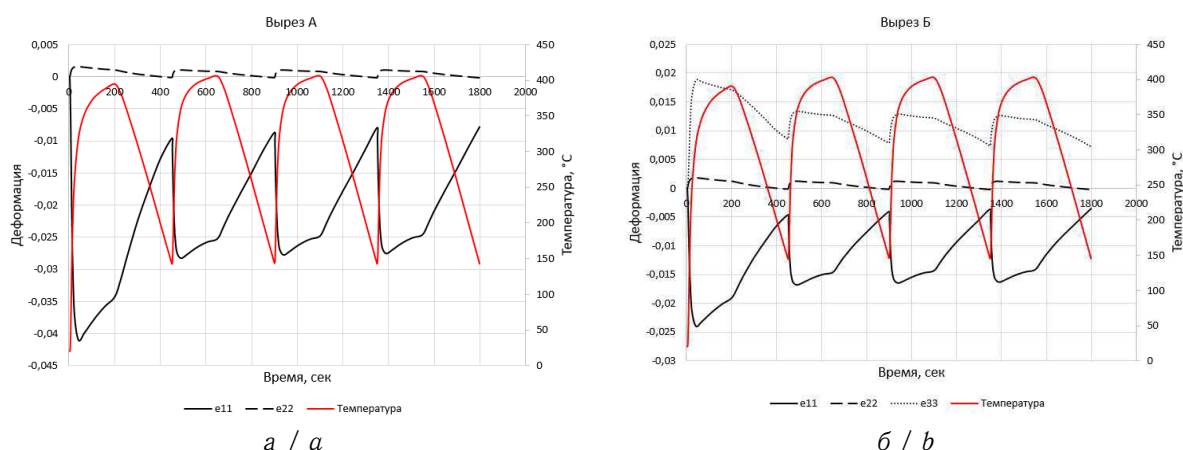
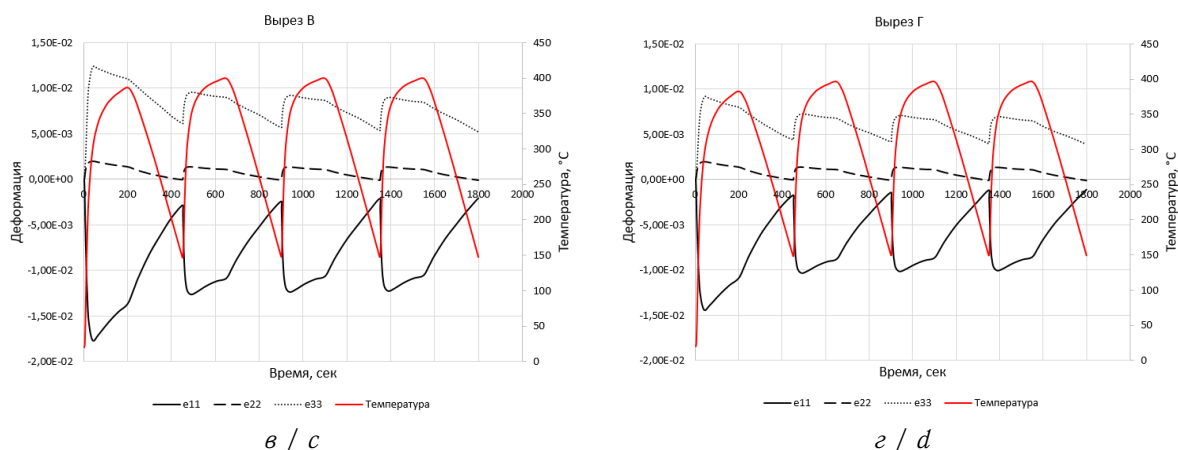


Рис. 4. История термомеханического нагружения в вершине концентратора напряжений для режима нагружения 1: а — вырез А с коэффициентом концентрации 2.5; б — вырез Б с коэффициентом концентрации 2.0 (цвет онлайн)

Fig. 4. The history of thermomechanical loading at the top of the stress concentrator for loading mode 1: а is cutout А with a concentration coefficient of 2.5; б is cutout Б with a concentration coefficient of 2.0 (color online)



Окончание рис. 4. β — вырез В с коэффициентом концентрации 1.5; γ — вырез Г с коэффициентом концентрации 1.25

Continuation of Fig. 4. c is cutout B with a concentration coefficient of 1.5; d is cutout Г with a concentration coefficient of 1.25

На рис. 6 приведены траектории нагружения в координатах $\epsilon_{11} \sim \epsilon_{22}$ для вершин выреза А, Б, В и Г и коэффициента концентрации 2.5, 2.0, 1.5 и 1.25 соответственно. Черным цветом маркированы результаты моделирования по созданной модели поврежденной среды, полученные с помощью программного средства «EXPMODEL» [3, 4], а красным цветом — результаты с использованием модели J. L. Chaboche, заложенной в программном комплексе «ANSYS». Видно качественное и количественное совпадение результатов (модель термopластичности, заложенная в «EXPMODEL» как частный случай, включает в себя и модель из пакета «ANSYS» [3, 4]).

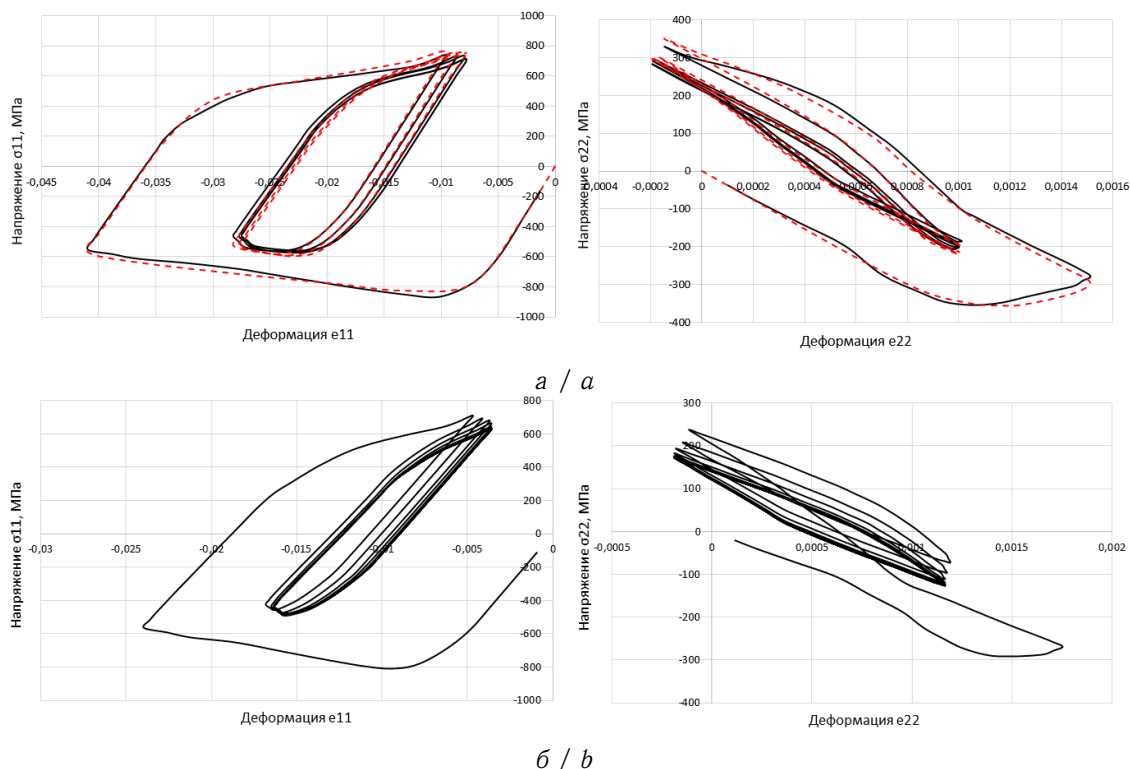
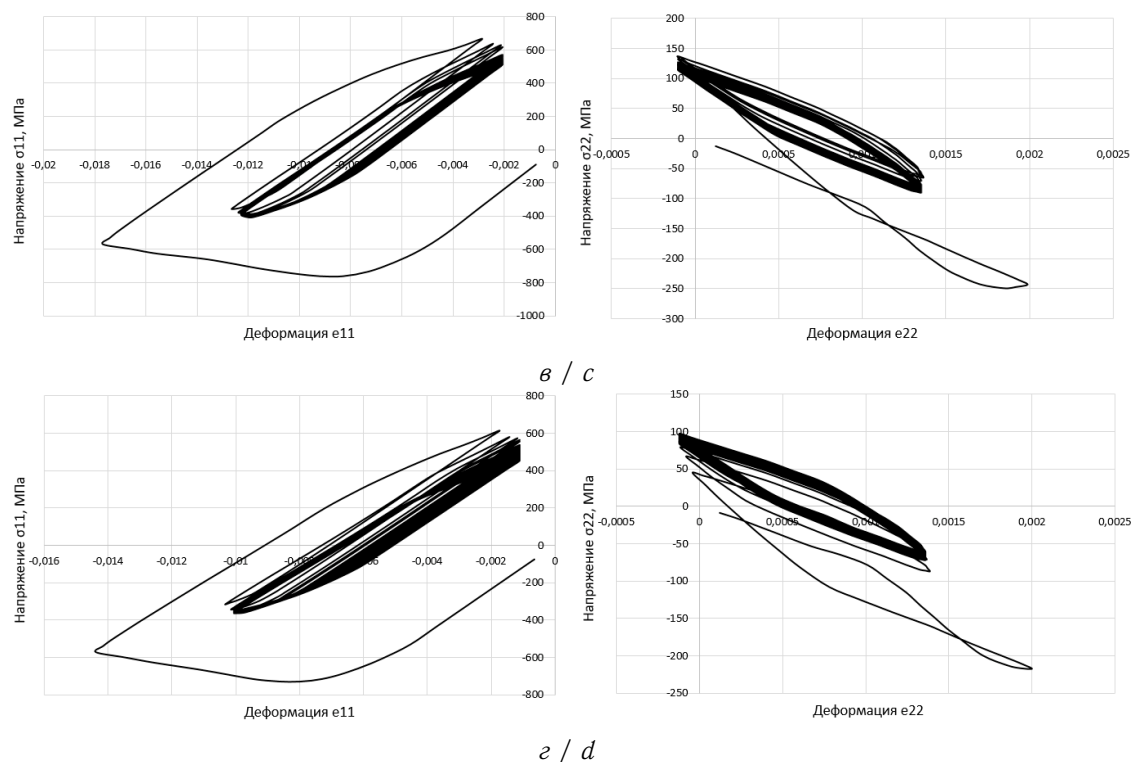


Рис. 5. Диаграммы деформирования $\sigma_{11} \sim \epsilon_{11}$, $\sigma_{22} \sim \epsilon_{22}$ в вершине концентратора напряжений: a — вырез А; b — вырез Б; β — вырез В (красный цвет — результаты с использованием пакета «ANSYS», черный цвет — результаты с использованием программного средства «EXPMODEL») (цвет онлайн)

Fig. 5. Deformation diagrams $\sigma_{11} \sim \epsilon_{11}$, $\sigma_{22} \sim \epsilon_{22}$ at the vertex of the stress concentrator: a is cutout A; b is cutout B (red color is results using the package “ANSYS”, black color is results using the software tool “EXPMODEL”) (color online)



Окончание рис. 5. *в* — вырез В; *г* — вырез Г
Continuation of Fig. 5. *c* is cutout C; *d* is cutout D

В таблице приведены результаты экспериментальных и расчетных данных по усталостной долговечности образцов.

Анализ результатов численного моделирования показывает качественное и необходимое для практических расчетов соответствие расчетных и экспериментальных данных [24]. С использованием программного средства «EXPMODEL» и методологии, обеспечивающей сквозное моделирование поэтапного расчета теплового состояния трехмерной упругопластической задачи прочности и дальнейшего использования полученных результатов в качестве условий неизотермического циклического нагружения при решении задачи оценки ресурса, выполнена оценка усталостной долговечности образцов, имитирующих работу концентраторов в сопловой коробке паровой турбины АЭС.

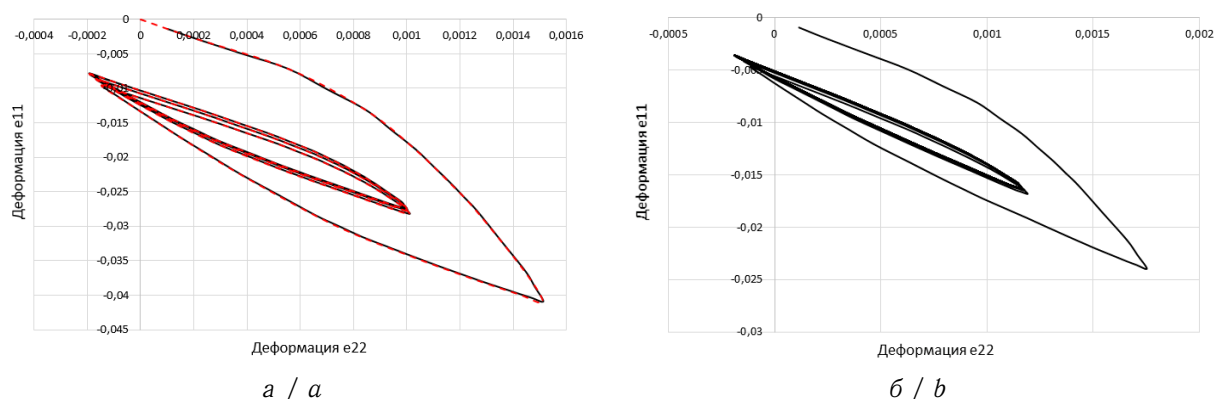
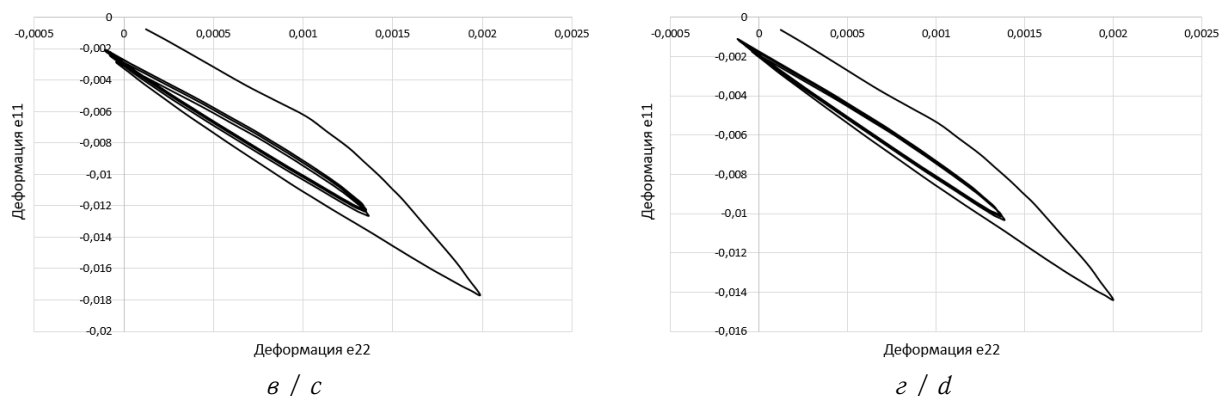


Рис. 6. Траектории нагружений $e_{11} \sim e_{22}$ в вершине концентратора напряжений: *а* — вырез А; *б* — вырез Б (красный цвет — результаты с использованием пакета «ANSYS», черный цвет — результаты с использованием программного средства «EXPMODEL») (цвет онлайн)

Fig. 6. Loading trajectories $e_{11} \sim e_{22}$ at the top of the stress concentrator: *a* is cutout A; *b* is cutout B (red is results using the package “ANSYS”, black is results with using the “EXPMODEL” software) (color online)



Окончание рис. 6. v — вырез В; z — вырез Г
Continuation of Fig. 6. c is cutout В; d is cutout D

Усталостная долговечность образцов при термоциклическом нагружении

Table. Fatigue life of samples under thermal cyclic loading

Вырез	Число циклов до разрушения (опыт)	Среднее число циклов	Число циклов до разрушения (расчет)	Относительное отклонение (%)
А	164 ÷ 477	320	215	32.8
Б	552 ÷ 956	739	778	5.3
В	1415 ÷ 1670	1543	1422	7.8
Г	2050 ÷ 2500	2275	2175	4.4
Д	>5000	—	>5000	—

Заклучение

С современных позиций механики деградируемого континуума развита математическая модель для инженерных расчетов ресурсных характеристик материалов и конструкций при термоциклическом нагружении. Возможности применения математической модели поведения материала в инженерном компьютерном анализе продемонстрированы на примере расчета состояния объекта атомной энергетики. Методом численного моделирования и сопоставления полученных результатов с опытными данными проанализирована возможность применимости предложенной методологии оценки ресурса ответственных инженерных объектов при термической усталости.

Список литературы

1. Методы обоснования ресурса ядерных энергетических установок / под общ. ред. Ф. М. Митенкова. Москва : Машиностроение, 2007. 445 с. EDN: [QMJWTB](#)
2. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях: Анализ, предсказание, предотвращение. Москва : Мир, 1984. 624 с.
3. Волков И. А., Коротких Ю. Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. Москва : Физматлит, 2008. 424 с. EDN: [RYRTNT](#)
4. Волков И. А., Игумнов Л. А. Введение в континуальную механику поврежденной среды. Москва : Физматлит, 2017. 304 с.
5. Корум С. Оценка современной методологии проектирования высокотемпературных элементов конструкций на основе экспериментов по их разрушению // Теоретические основы инженерных расчетов. 1988. № 1. С. 104–118.
6. Гаенко В. П., Костюков В. Е., Фомченко В. Н. Безопасность технических систем. Методологические аспекты теории, методы анализа и управления безопасностью. Саратов : РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2020. 329 с. <https://doi.org/10.53403/9785951504524>, EDN: [OPPFHW](#)
7. Lemaître J. Damage modelling for prediction of plastic or creep fatigue failure in structures // 1979–SMiRT 5–Berlin, Germany. Paper no. L5/1b. <http://www.lib.ncsu.edu/resolver/1840.20/26896>
8. Murakami S., Imaizumi T. Mechanical description of creep damage state and its experimental verification // Journal de Mecanique Theorique et Appliquee. 1982. № 1. P. 743–761.



9. Леметр Ж. Континуальная модель повреждения, используемая для расчета разрушения пластичных материалов // Теоретические основы инженерных расчетов. 1985. Т. 107, № 1. С. 90–98.
10. Chaboche J. L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity // International Journal of Plasticity. 1989. Vol. 5, iss. 3. P. 247–302.
11. Казаков Д. А., Капустин С. А., Коротких Ю. Г. Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций. Нижний Новгород : Изд-во ННГУ. 1994. 225 с.
12. Volkov I. A., Igumnov L. A., Shishulin D. N., Boev E. V. Numerical modeling of the fatigue life of structural steels under single-frequency and dual-frequency loading // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, iss. 1. P. 86–101. <https://doi.org/10.3103/S0025654422010162>
13. Volkov I. A., Igumnov L. A., delly Izola F., Litvinchuk S. Yu., Ereemeev V. A. A continual model of a damaged medium used for analyzing fatigue life of polycrystalline structural alloys under thermal-mechanical loading // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2020. Vol. 32, iss. 1. P. 229–245. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00795-x>, EDN: WOFFAL
14. Volkov I. A., Igumnov L. A., Shishulin D. N. Modeling plastic deformation and damage accumulation processes in structural steels under block non-symmetric low-cycle loading // Materials Physics and Mechanics. 2019. Vol. 42, iss. 3. P. 359–366. https://doi.org/10.18720/MPM.4232019_11
15. Прилуцкий М. Х., Костюков В. Е. Поточные модели для предприятий с непрерывным циклом изготовления продукции // Информационные технологии. 2007. № 10. С. 47–51. EDN: IJQBOB
16. Prilutskii M. Kh., Kostyukov V. E. Optimization models of gas recovery and gas condensate processing // Automation and Remote Control. 2012. Vol. 73, iss. 5. P. 905–909. <https://doi.org/10.1134/S0005117912050153>
17. Прилуцкий М. Х., Костюков В. Е. Оптимизационные задачи планирования транспортировки газа // Информационные технологии и вычислительные системы. 2007. № 2. С. 67–73. EDN: KUVAWB
18. Митенков Ф. М., Волков И. А., Игумнов Л. А., Каплиенко А. В., Коротких Ю. Г., Панов В. А. Прикладная теория пластичности. Москва : Физматлит, 2015. 282 с. EDN: ZBOSEH
19. Волков И. А., Игумнов Л. А., Коротких Ю. Г. Прикладная теория вязкопластичности. Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 2015. 318 с.
20. Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И., Рыбакина О. Г. Разрыхление и критерий разрушения в условиях ползучести // Доклады Академии наук СССР. 1983. Т. 270, № 4. С. 831–835.
21. Гаруд. Новый подход к расчету усталости при многоосных нагружениях // Теоретические основы инженерных расчетов. 1981. Т. 103, № 2. С. 41–51.
22. Боднер С. Р., Линдхолм У. С. Критерий приращения повреждения для зависящего от времени разрушения материалов // Теоретические основы инженерных расчетов. 1976. Т. 100, № 2. С. 51–58.
23. Нарезько А. В., Пантелей Н. В. Паровые турбины. Тепловые и атомные электрические станции. Минск : БНТУ, 2015. 71 с.
24. Травин В. В., Зможный А. И., Шевелев Г. А., Денисенко Ю. А. Термоциклическая прочность титанового сплава в деталях энергооборудования // Титан. 2022. № 1 (74). С. 30–39. EDN: GDJTYE

References

1. Mitenkov F. M. (ed.) *Metody obosnovaniya resursa yadernykh energeticheskikh ustanovok* [Methods for Justifying the Service Life of Nuclear Power Plants]. Moscow, Mashinostroenie Publishers, 2007. 445 p. (in Russian). EDN: QMJWTB
2. Kollinz Dzh. *Povrezhdenie materialov v konstruktsiyakh: Analiz, predskazanie, predotvrashchenie* [Damage to Materials in Structures: Analysis, Prediction, Prevention]. Moscow, Mir, 1984. 624 p. (in Russian).
3. Volkov I. A., Korotkikh Yu. G. *Uravneniya sostoyaniya vyazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniyami* [Equations of State of Viscoelastoplastic Media with Damage]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 424 p. (in Russian). EDN: RYRTNT
4. Volkov I. A., Igumnov L. A. *Vvedenie v kontinual'nuyu mekhaniku povrezhdennoy sredy* [Introduction to Continuum Mechanics of Damaged Media]. Moscow, Fizmatlit, 2017. 304 p. (in Russian).
5. Korum S. Evaluation of modern methodology for designing high temperature elements structures based on experiments on their destruction. *Journal of Engineering for Industry*, 1988, iss. 1, pp. 104–118 (in Russian).
6. Gaenko V. P., Kostyukov V. E., Fomchenko V. N. *Bezopasnost' tekhnicheskikh sistem. Metod-*



- logicheskie aspekty teorii, metody analiza i upravleniya bezopasnost'yu* [Safety of Technical Systems. Methodological Aspects of the Theory, Methods of Analysis and Safety Management]. Sarov, RFYaTs-VNIIEF, 2020. 329 p. (in Russian). <https://doi.org/10.53403/9785951504524>, EDN: [OPPFHW](#)
7. Lemaitre J. Damage modelling for prediction of plastic or creep fatigue failure in structures. 1979–SMiRT 5–Berlin, Germany. Paper no. L5/1b. <http://www.lib.ncsu.edu/resolver/1840.20/26896>
 8. Murakami S., Imaizumi T. Mechanical description of creep damage state and its experimental verification. *Journal de Mecanique Theorique et Appliquee*, 1982, iss. 1, pp. 743–761.
 9. Lemetr Zh. Continuum damage model used to calculate the failure of ductile materials. *Journal of Engineering for Industry*, 1985, vol. 107, iss. 1, pp. 90–98 (in Russian).
 10. Chaboche J. L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 1989, vol. 5, iss. 3, pp. 247–302.
 11. Kazakov D. A., Kapustin S. A., Korotkikh Yu. G. *Modelirovanie protsessov deformirovaniya i razrusheniya materialov i konstruktsiy* [Modeling of Deformation Processes and Destruction of Materials and Structures]. Nizhny Novgorod, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 1994. 225 p. (in Russian).
 12. Volkov I. A., Igumnov L. A., Shishulin D. N., Boev E. V. Numerical modeling of the fatigue life of structural steels under single-frequency and dual-frequency loading. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 1, pp. 86–101. <https://doi.org/10.3103/S0025654422010162>
 13. Volkov I. A., Igumnov L. A., delly Izola F., Litvinchuk S. Yu., Ereemeev V. A. A continual model of a damaged medium used for analyzing fatigue life of polycrystalline structural alloys under thermal-mechanical loading. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2020, vol. 32, iss. 1, pp. 229–245. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00795-x>, EDN: [WOFFAL](#)
 14. Volkov I. A., Igumnov L. A., Shishulin D. N. Modeling plastic deformation and damage accumulation processes in structural steels under block non-symmetric low-cycle loading. *Materials Physics and Mechanics*, 2019, vol. 42, iss. 3, pp. 359–366. https://doi.org/10.18720/MPM.4232019_11
 15. Prilutskii M. Kh., Kostukov V. E. Network flow models for enterprises with continuous production manufacturing cycle. *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technology], 2007, iss. 10, pp. 47–51 (in Russian). EDN: [IJQBOB](#)
 16. Prilutskii M. Kh., Kostyukov V. E. Optimization models of gas recovery and gas condensate processing. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, iss. 5, pp. 905–909. <https://doi.org/10.1134/S0005117912050153>
 17. Prilutskiy M. Kh., Kostyukov V. E. Optimization problems of transportation planning gas. *Journal of Information Technologies and Computing Systems*, 2007, iss. 2, pp. 67–73 (in Russian). EDN: [KUVAWB](#)
 18. Mitenkov F. M., Volkov I. A., Igumnov L. A., Kapliencko A. V., Korotkikh Yu. G. *Prikladnaya teoriya plastichnosti* [Applied Plasticity Theory]. Moscow, Fizmatlit, 2015. 284 p. (in Russian). EDN: [ZBOSEH](#)
 19. Volkov I. A., Igumnov L. A., Korotkikh Yu. G. *Prikladnaya teoriya vyazkoplastichnosti* [Applied Theory of Viscoplasticity]. Nizhny Novgorod, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 2015. 318 p. (in Russian).
 20. Novozhilov V. V., Kadashevich Yu. I., Rybakina O. G. Plastic dilatation and a fracture criterion under conditions of creep. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1983, vol. 270, iss. 4, pp. 831–835 (in Russian).
 21. Garud. A new approach to calculating fatigue under multiaxial loading. *Journal of Engineering for Industry*, 1981, vol. 103, iss. 2, pp. 41–51 (in Russian).
 22. Bodner S. R., Lindholm U. S. Damage increment criterion for time-dependent destruction of materials. *Journal of Engineering for Industry*, 1976, vol. 100, iss. 2, pp. 51–58 (in Russian).
 23. Narez'ko A. V., Panteley N. V. *Parovye turbiny. Teplovye i atomnye elektricheskie stantsii* [Steam Turbines. Thermal and Nuclear Power Plants]. Minsk, Belarusian National University of Technology Publ., 2015. 71 p. (in Russian).
 24. Travin V. V., Zmoznnyy A. I., Shevelev G. A., Denisenko Yu. A. Thermocyclic strength of titanium alloy in the details of power equipment. *Titan*, 2022, iss. 1 (74), pp. 30–39 (in Russian). EDN: [GDJTYE](#)

Поступила в редакцию / Received 30.11.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 49–56

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 49–56
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56>, EDN: BFHZFQ

Научная статья

УДК 534.1:539.3

Частоты собственных колебаний призматических тонких оболочек

Г. Т. Дзедбисашвили[✉], А. Л. Смирнов, С. Б. Филиппов

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9

Дзедбисашвили Георгий Тамазович, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, d-g-t@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8342-3065>, AuthorID: 1030504

Смирнов Андрей Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики, a.l.smirnov@spbu.ru, <http://orcid.org/0000-0002-1526-2869>, AuthorID: 7703

Филиппов Сергей Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, s_b_filippov@mail.ru <https://orcid.org/0000-0002-1312-5705>, AuthorID: 7704

Аннотация. В статье рассмотрены собственные частоты призматических тонких оболочек, поперечное сечение которых представляет собой правильный многоугольник. Проанализированы спектры частот свободных колебаний таких оболочек при увеличении числа сторон сечения при условии сохранения периметра. Сопоставляются фундаментальные частоты призматической оболочки правильного многоугольного сечения и круглой цилиндрической оболочки. Для малого и большого числа сторон многоугольника аналитические и асимптотические решения сравниваются с численными решениями с помощью метода конечных элементов (COMSOL). Сходимость численного метода исследована для призматической оболочки с большим числом граней.

Ключевые слова: свободные колебания тонких оболочек, призматические оболочки, метод конечных элементов

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>).

Для цитирования: Дзедбисашвили Г. Т., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б. Частоты собственных колебаний призматических тонких оболочек // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 49–56. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56>, EDN: BFHZFQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Free vibration frequencies of prismatic thin shells

G. T. Dzebisashvili[✉], A. L. Smirnov, S. B. Filippov

St. Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia

Georgii T. Dzebisashvili, d-g-t@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8342-3065>, AuthorID: 1030504

Andrei L. Smirnov, a.l.smirnov@spbu.ru, <http://orcid.org/0000-0002-1526-2869>, AuthorID: 7703

Sergei B. Filippov, s_b_filippov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1312-5705>, AuthorID: 7704

Abstract. The paper examines the natural frequencies of prismatic thin shells, the cross-section of which is the regular polygon. Spectra of free vibration frequencies of such shells are analyzed as the number of

cross-section sides increases, provided that the perimeter is preserved. The relation between fundamental frequencies of the prismatic shells with the regular polygonal cross-section and a circular cylindrical shell is discussed. For a small and large number of polygon sides analytical and asymptotic solutions are compared with numerical solutions obtained by the finite element method (COMSOL). The convergence of the numerical method is studied for the prismatic shell with a large number of facets.

Keywords: free vibrations of thin shells, prismatic shells, finite element method

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>).

For citation: Dzebisashvili G. T., Smirnov A. L., Filippov S. B. Free vibration frequencies of prismatic thin shells. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 49–56 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-49-56>, EDN: BFHZFQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Рассматриваются колебания призматической тонкой оболочки с сечением в виде правильного многоугольника.

В предшествующих исследованиях методы решения различались в зависимости от вида сечения и граничных условий. Так, для шарнирно опертой квадратной оболочки в [1] получено аналитическое решение, в то время как для других граничных условий [2] частоты и формы колебаний ищутся из приближенного решения трансцендентных уравнений. Частоты прямоугольной оболочки, если она мало отличается от квадратной, могут быть найдены в виде асимптотических разложений [3], в других же случаях может быть целесообразно использование метода Рэлея – Ритца [4, 5]. Полученные аналитические и численные результаты сравниваются с численными, полученными, как правило, с помощью метода конечных элементов.

В работе [6] для изучения колебаний оболочек многоугольного сечения использовались решения на основе обобщенной теории балок, преимущественное внимание было уделено изучению форм колебаний, а также влиянию относительной длины оболочки на частоты и формы колебаний. Для длинной оболочки с сечением в виде шестиугольника в [7] было получено приближенное решение, основанное на уравнениях полубезмоментной теории. В [8] описан метод конечных полос для нелинейного статического анализа призматических оболочек.

В данном исследовании будут проанализированы закономерности поведения фундаментальных частот малых изгибных колебаний при изменении числа сторон многоугольного сечения для оболочек разной толщины.

1. Постановка задачи

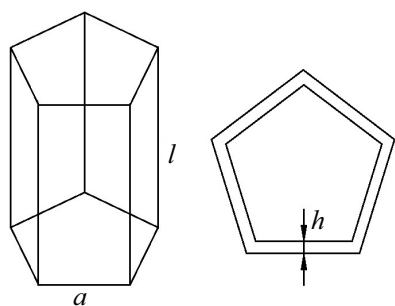


Рис. 1. Призматическая оболочка с сечением в виде правильного n -угольника

Fig. 1. A prismatic shell with cross-section in the form of a regular n -sided polygon

Рассматриваются собственные поперечные колебания призматической изотропной тонкой оболочки длиной l и толщиной h с поперечным сечением в виде правильного n -угольника с длиной стороны a (рис. 1). Материал оболочки имеет модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν и плотность ρ .

Грани призматической оболочки состоят из тонких пластин. В плоскости i -й пластины введем локальные прямоугольные координаты (x, y) (рис. 2).

Используем линейные уравнения Лагранжа – Жермен для описания малого поперечного прогиба $w^{(i)}(x, y)$ i -й пластины

$$D\Delta\Delta w^{(i)} - \rho h w^{(i)} \omega^2 = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$



где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, ω — угловая частота собственных колебаний пластины. Далее используется безразмерный параметр собственной частоты $\lambda = \omega^2 R^2 \frac{\rho}{E}$ и длины $L = \frac{l}{R}$, где R — характерный размер оболочки.

Пусть α — угол между смежными стенками оболочки, β — смежный с ним угол (рис. 3).

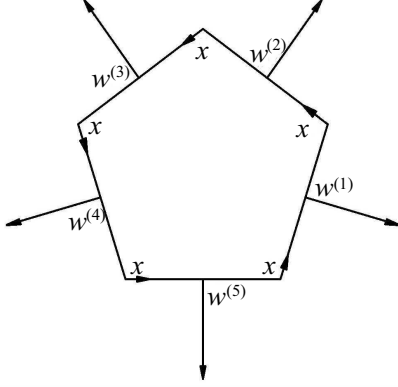


Рис. 2. Локальные координаты в сечении оболочки
Fig. 2. Local coordinates in the shell cross-section

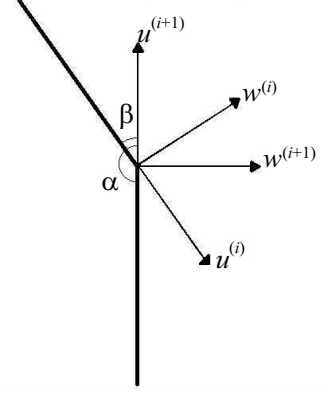


Рис. 3. Сопряжение двух смежных стенок оболочки
Fig. 3. Conjugation of two adjacent shell walls

Будем предполагать, что деформации в плоскости каждой пластины пренебрежимо малы, перемещения и изгибающие моменты в местах сопряжения пластин равны, а углы между смежными пластинами остаются равными $\frac{2\pi}{n}$ при изгибах. Тогда на линиях сопряжения пластин

$$\begin{aligned} u^{(i+1)}(0, y) &= w^{(i)}(a, y) \sin \beta - u^{(i)}(a, y) \cos \beta, \\ w^{(i+1)}(0, y) &= w^{(i)}(a, y) \cos \beta + u^{(i)}(a, y) \sin \beta, \\ w_x^{(i)}(a, y) &= w_x^{(i+1)}(0, y), \quad w_{xx}^{(i)}(a, y) = w_{xx}^{(i+1)}(0, y), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u^{(i)}$, $u^{(i+1)}$ — перемещения в плоскости i и $i+1$ пластины соответственно. Здесь и далее подразумевается циклическое индексирование, т. е. $(n+1) = (1)$.

Если β не является малой величиной, т. е. n не слишком большое, то в (2) можно отбросить перемещения $u^{(i)}$, $u^{(i+1)}$ в плоскости пластины, которые значительно меньше нормальных перемещений $w^{(i)}$, $w^{(i+1)}$.

Наконец, следует задать условия на торцах оболочки. В частности, для условий шарнирного опирания они имеют вид

$$w^{(i)}(x, 0) = w^{(i)}(x, l) = 0, \quad w_{yy}^{(i)}(x, 0) = w_{yy}^{(i)}(x, l) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Здесь и далее будем предполагать, что оболочка имеет среднюю длину. Предельные варианты оболочки (короткая и длинная) были рассмотрены в [9].

2. Призматические оболочки с квадратным поперечным сечением

Вначале рассмотрим тонкую призматическую оболочку с квадратным поперечным сечением. В этом случае условия на линии сопряжения пластин (2) с учетом малости перемещений $u^{(i)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} w^{(i)}(a, y) &= w^{(i+1)}(0, y) = 0, \\ w_x^{(i)}(a, y) &= w_x^{(i+1)}(0, y), \quad w_{xx}^{(i)}(a, y) = w_{xx}^{(i+1)}(0, y), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Ограничимся рассмотрением граничных условий шарнирного опирания на торцах оболочки (3). Задачи о собственных колебаниях призматических оболочек с квадратным поперечным сечением для других граничных условий на торцах рассмотрены в [1] и [2].

Решение в виде $w^{(i)}(x, y) = (-1)^i \sin \frac{m_1 \pi x}{a} \sin \frac{m_2 \pi y}{l}$, где $m_1 = 1, 2, \dots$ и $m_2 = 1, 2, \dots$ — волновые числа волн по ширине и длине пластины соответственно, удовлетворяет граничным условиям (4) и (3). Подставив решение в исходное уравнение (1), получим известную формулу для собственной частоты шарнирно опертой пластины [10]

$$\omega^2 = \pi^4 \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{l^2} \right)^2 \frac{D}{\rho h}.$$

В качестве характерного размера используем ширину пластины a , тогда параметр собственной частоты λ находится по формуле

$$\lambda = \pi^4 \left(m_1^2 + \frac{m_2^2}{L^2} \right)^2 \frac{H^2}{12(1 - \nu^2)},$$

где $H = h/a$ — безразмерная толщина пластин, а $L = l/a$ — безразмерная длина пластин. В частности, для фундаментальной частоты ($m_1 = m_2 = 1$)

$$\lambda_0^p = \pi^4 \left(1 + \frac{1}{L^2} \right)^2 \frac{H^2}{12(1 - \nu^2)}. \quad (5)$$

Численный анализ призматической оболочки при $L = 3$ проводился в конечно-элементном пакете COMSOL для оболочки, выполненной из стали ($\nu = 0.3$). Формы, соответствующие

двум нижшим частотам колебаний, приведены на рис. 4.

В силу симметрии конструкции некоторые собственные частоты являются кратными. Заметим, что предположение о сохранении угла между смежными пластинами в процессе деформации выполняется с высокой точностью как для первой, так и для второй формы колебаний.

Частотный параметр имеет порядок $O(H^2)$ и быстро убывает с уменьшением толщины. В таблице приведены значения частотного параметра для фундаментальной частоты колебаний оболочки при разных значениях безразмерной толщины, полученные

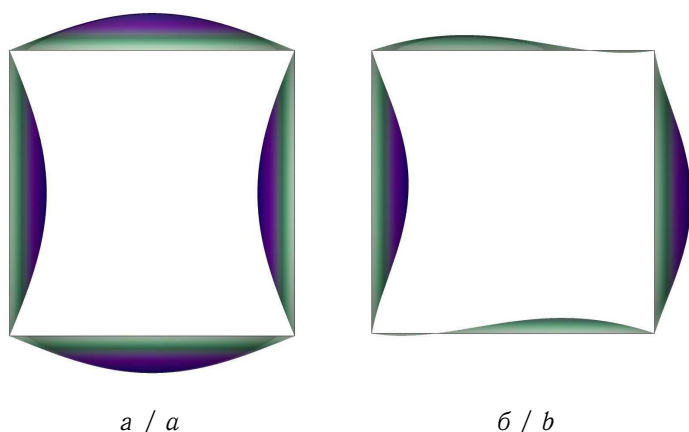


Рис. 4. Первая (а) и вторая (б) собственные формы колебаний призматической оболочки с квадратным поперечным сечением (цвет онлайн)

Fig. 4. First (a) and second (b) natural vibration modes of a prismatic shell with a square cross-section (color online)

ные по формуле (5) и в пакете COMSOL, и относительная погрешность аналитической формулы, убывающая с уменьшением толщины пластин.

Значения частотного параметра для фундаментальной частоты колебаний оболочки
Table. Frequency parameter values of the fundamental frequency of shell vibrations

H	(5)	COMSOL	Отн. погрешность, %
0.01	$1.10053 \cdot 10^{-3}$	$1.09912 \cdot 10^{-3}$	0.1947
0.005	$2.75134 \cdot 10^{-4}$	$2.75044 \cdot 10^{-4}$	0.0987
0.002	$4.40214 \cdot 10^{-5}$	$4.40202 \cdot 10^{-5}$	0.0691
0.001	$1.10053 \cdot 10^{-5}$	$1.10050 \cdot 10^{-5}$	0.0687



3. Призматические оболочки с поперечным сечением в виде правильного многоугольника

Рассмотрим теперь призматическую оболочку, поперечным сечением которой является правильный n -угольник (рис. 5).

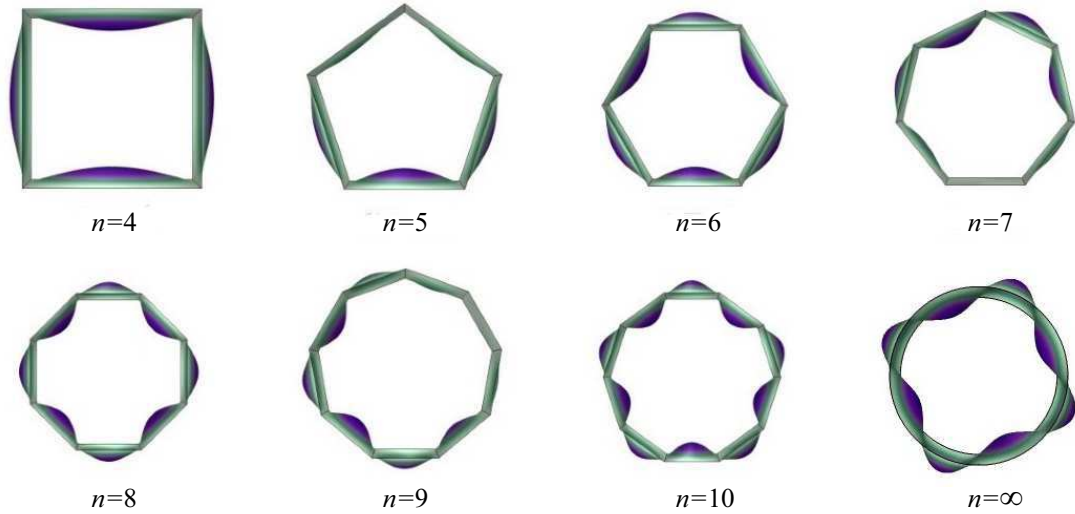


Рис. 5. Фундаментальная форма колебаний призматической оболочки при разных n (цвет онлайн)

Fig. 5. Fundamental mode of vibrations of a prismatic shell for different n (color online)

Заметим, что при увеличении числа n призматическая оболочка с сечением в виде правильного многоугольника становится близкой к круговой цилиндрической оболочке радиуса R . Рассмотрим призматическую и круговую цилиндрическую оболочки с равными периметрами сечений. Тогда длина стороны n -угольной призматической оболочки $a = 2\pi R/n$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда оболочка имеет четное число сторон. Случай нечетного числа сторон был изучен в [9].

Угол β между смежными сторонами определяется формулой $\beta = \pi(1 - 2/n)$. Если число сторон оболочки четное, то можно предположить, что форма собственных колебаний, соответствующая фундаментальной частоте призматической оболочки с небольшим числом сторон, будет похожа на форму колебаний оболочки с квадратным сечением, когда две смежные пластины испытывают равные прогибы соответственно вовнутрь и вовне. Действительно, при небольших значениях $n \sin \beta \approx 1$, а $\cos \beta \ll 1$, и для оценки частотного параметра вместо точных условий сопряжения пластин (2) мы можем использовать условия (4). Используя R в качестве характерного размера, запишем формулу для параметра фундаментальной частоты колебаний в виде

$$\lambda_0^p = \pi^4 \left(\frac{n^2}{4\pi^2} + \frac{1}{L^2} \right)^2 \frac{H^2}{12(1 - \nu^2)}, \quad (6)$$

где $L = l/R$, $H = h/R$. Условия (2) более жесткие, чем условия (4), поэтому формула (6) задает верхнюю границу для параметра фундаментальной частоты колебаний при малых n . Точность этой оценки быстро падает с ростом n .

При больших значениях n первая форма колебаний начинает напоминать первую форму колебаний круговой цилиндрической оболочки. В работе [11] получена асимптотическая формула для низших частот колебаний круговой тонкостенной цилиндрической оболочки. В наших обозначениях для шарнирно опертой оболочки она имеет вид

$$\lambda(m) = \frac{\pi^4}{m^4 L^4} + \frac{m^4 H^2}{12(1 - \nu^2)}, \quad (7)$$

где m — число волн в окружном направлении.

Минимизируя значение $\lambda(m)$ по m , получаем оценку для волнового числа, соответствующего низшей собственной частоте, и значение параметра частоты

$$\lambda_0^s = \frac{\pi^2 H}{L^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad m_0^4 = \frac{2\sqrt{3(1-\nu^2)}\pi^2}{L^2 H}.$$

Поскольку значение m_0 ($m^l \leq m_0 \leq m^r$) должно быть целым, следует положить $\lambda_0^s = \min(\lambda(m^l), \lambda(m^r))$. Это значение является верхней границей для частотного параметра призматической оболочки с большим числом сторон, причем при больших значениях числа сторон n частоты призматической оболочки мало отличаются от частот круговой оболочки.

4. Численный анализ

В качестве примера рассмотрим шарнирно опертую на торцах стальную призматическую оболочку длины $L = 3$ с сечением в виде правильного n -угольника. Для численного анализа используем конечноэлементный пакет COMSOL.

Зависимость фундаментальной частоты призматической оболочки толщины $H = 0.01$ и $H = 0.001$ от числа граней изображена на рис. 6.

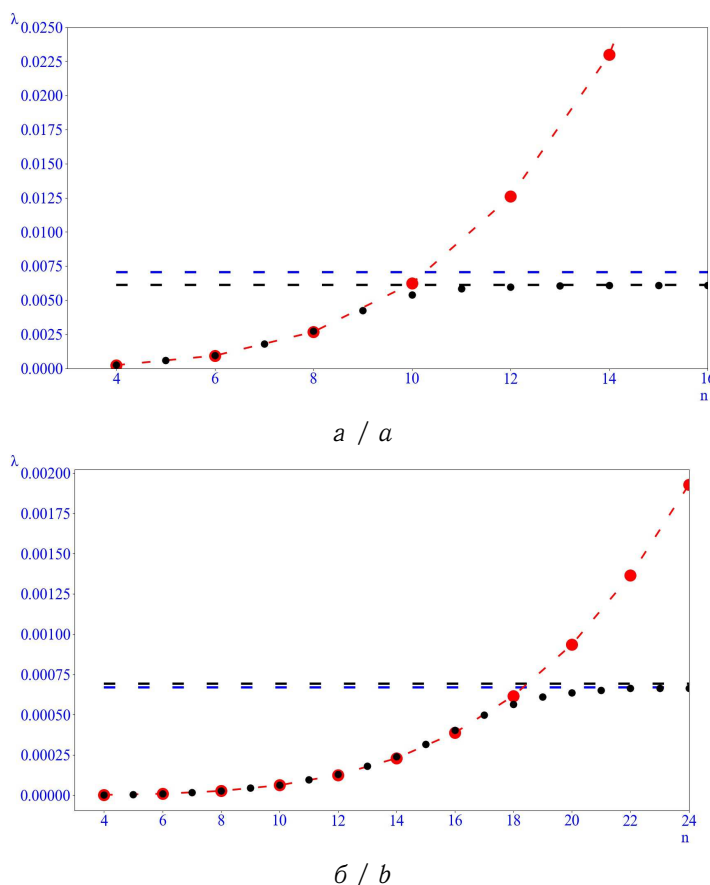


Рис. 6. Параметр фундаментальной частоты призматической оболочки с n -угольным сечением: a — при $H = 0.01$; b — при $H = 0.001$. Красные точки — формула (6), синяя штриховая линия — формула (7), черные точки — частота n -угольной оболочки (COMSOL), черная штриховая линия — частота круговой оболочки (COMSOL) (цвет онлайн)

Fig. 6. Fundamental frequency parameter of a prismatic shell with a regular n -sided cross-section: a — for $H = 0.01$; b — for $H = 0.001$. Red dots — formula (6), blue dashed line — formula (7), black dots — n -sided shell frequency (COMSOL), black dashed line — circular shell frequency (COMSOL) (color online)



Кривая зависимости фундаментальной частоты от числа граней оболочки имеет S -образный вид. При малых значениях n первая форма колебаний близка к форме колебаний шарнирно опертой пластины, при больших значениях n — к форме колебаний круговой оболочки. Для промежуточных значений n обе формулы дают завышенные оценки.

Параметр частоты цилиндрической оболочки имеет порядок H , а для пластины — H^2 . Это связано с тем, что в потенциальную энергию оболочки входят деформации растяжения-сжатия и изгиба, а в потенциальную энергию пластины — только деформации изгиба. При уменьшении толщины частота многоугольной оболочки убывает гораздо быстрее, чем частота цилиндрической оболочки. Поэтому чем меньше толщина призматической оболочки, тем больше должно быть число граней, чтобы фундаментальная частота приблизилась к частоте круговой оболочки. Кроме того, число волн в окружном направлении m_0 , соответствующее фундаментальной частоте круговой оболочки, имеет порядок $H^{-1/4}$ и увеличивается с уменьшением H , в частности, $m_0 = 4$ при $H = 0.01$ и $m_0 = 8$ при $H = 0.001$. При малом числе граней реализация формы с большим волновым числом m затруднена.

Заключение

Фундаментальные частоты оболочек с многоугольным поперечным сечением при большом числе сторон мало отличаются от частот круговой цилиндрической оболочки с тем же периметром сечения. С ростом числа сторон форма колебаний призматической оболочки приближается к форме колебаний круговой цилиндрической оболочки.

При малом (четном) числе сторон форма колебаний, соответствующая фундаментальной частоте, состоит из первых форм колебаний пластин, образующих оболочку. Соответствующее аналитическое решение имеет малую, уменьшающуюся с толщиной оболочки погрешность по сравнению с конечно-элементным решением.

В статье исследованы только фундаментальные частоты оболочек, однако представляет интерес исследование нижней части спектра частот призматических оболочек при малом числе граней.

Список литературы

1. *Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L.* Free vibrations of square elastic tubes with a free end // *Mechanics Research Communications*. 2000. Vol. 27, iss. 4. P. 457–464. [https://doi.org/10.1016/S0093-6413\(00\)00118-X](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(00)00118-X), EDN: LGGAGP
2. Дзедзисашвили Г. Т. Колебания цилиндрических оболочек с квадратным поперечным сечением // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2017–2018 г. Санкт-Петербург : Изд-во Санкт-Петербургского гос. ун-та, 2019. С. 13–29. EDN: VMRBFC
3. Амосов А. С. Колебания тонкой цилиндрической оболочки с прямоугольным сечением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2004. Вып. 1. С. 67–72. EDN: RTSPCN
4. *Chen Y., Jin G., Liu Z.* Free vibration of a thin shell structure of rectangular cross-section // *Key Engineering Materials*. 2011. Vol. 486. P. 107–110. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.486.107>
5. *Dzebisashvili G. T., Filippov S. B.* Vibrations of cylindrical shells with rectangular cross-section // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. Vol. 1479. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1479/1/012129/pdf> (дата обращения: 26.02.2021).
6. *Gonçalves R., Camotim D.* The vibration behaviour of thin-walled regular polygonal tubes // *Thin-Walled Structures*. 2014. Vol. 84. P. 177–188. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.06.011>
7. *Krajcinovic D.* Vibrations of prismatic shells with hexagonal cross section // *Nuclear Engineering and Design*. 1972. Vol. 22, iss. 1. P. 51–62. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(72\)90061-1](https://doi.org/10.1016/0029-5493(72)90061-1)
8. *Borković A., Kovačević S., Milašinović D. D., Radenković G., Mijatović O., Golubović-Bugarški V.* Geometric nonlinear analysis of prismatic shells using the semi-analytical finite strip method // *Thin-Walled Structures*. 2017. Vol. 117. P. 63–88. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.03.033>
9. *Liang S., Chen H. L., Liang T. X.* An analytical investigation of free vibration for a thin-walled regular polygonal prismatic shell with simply supported odd/even number of sides // *Journal of Sound and Vibration*. 2005. Vol. 284, iss. 1–2. P. 520–530. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.08.011>
10. *Leissa A. W.* *Vibration of Plates*. Washington : US Government Printing Office, 1969. 353 p.



11. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. Москва : Наука, 1979. 384 с.

References

1. Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L. Free vibrations of square elastic tubes with a free end. *Mechanics Research Communications*, 2000, vol. 27, iss. 4, pp. 457–464. [https://doi.org/10.1016/S0093-6413\(00\)00118-X](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(00)00118-X), EDN: LGGAGP
2. Dzebisashvili G. T. Free vibrations of cylindrical shells with the square cross-section. *Trudy seminara "Komp'yuternye metody v mekhanike sploshnoy sredy" 2017–2018* [Proceedings of the seminar "Computer methods in continuum mechanics" 2017–2018]. St. Petersburg, St. Petersburg State University Publ., 2019, pp. 13–29 (in Russian). EDN: VMRBFC
3. Amosov A. S. Free vibrations of a thin rectangular elastic tube. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya* [Bulletin of St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy], 2004, iss. 1, pp. 67–72 (in Russian). EDN: RTSPCN
4. Chen Y., Jin G., Liu Z. Free vibration of a thin shell structure of rectangular cross-section. *Key Engineering Materials*, 2011, vol. 486, pp. 107–110. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.486.107>
5. Dzebisashvili G. T., Filippov S. B. Vibrations of cylindrical shells with rectangular cross-section. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1479. Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1479/1/012129/pdf> (accessed February 26, 2021).
6. Gonçalves R., Camotim D. The vibration behaviour of thin-walled regular polygonal tubes. *Thin-Walled Structures*, 2014, vol. 84, pp. 177–188. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.06.011>
7. Krajcinovic D. Vibrations of prismatic shells with hexagonal cross section. *Nuclear Engineering and Design*, 1972, vol. 22, iss. 1, pp. 51–62. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(72\)90061-1](https://doi.org/10.1016/0029-5493(72)90061-1)
8. Borković A., Kovačević S., Milašinović D. D., Radenković G., Mijatović O., Golubović-Bugarški V. Geometric nonlinear analysis of prismatic shells using the semi-analytical finite strip method. *Thin-Walled Structures*, 2017, vol. 117, pp. 63–88. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.03.033>
9. Liang S., Chen H. L., Liang T. X. An analytical investigation of free vibration for a thin-walled regular polygonal prismatic shell with simply supported odd/even number of sides. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, vol. 284, iss. 1–2, pp. 520–530. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.08.011>
10. Leissa A. W. *Vibration of Plates*. Washington, US Government Printing Office, 1969. 353 p.
11. Goldenweiser A. L., Lidsky V. B., Tovstik P. E. *Svobodnye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* [Free Vibrations of Thin Elastic Shells]. Moscow, Nauka, 1979. 384 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 28.11.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 57–62

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 57–62
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-57-62>, EDN: LNJVVN

Научная статья

УДК 539.3

Асимптотический анализ осесимметричной задачи об обжатии тонкого упругого диска в случае смешанных граничных условий на лицевых поверхностях

Ю. Д. Каплунов^{1✉}, Б. Зупанчич², А. В. Никонов³

¹ Университет г. Киль, Великобритания, ST5 5BG, графство Стаффордшир, г. Киль

² Национальный институт химии, Словения, 1000, г. Любляна, Хайдрихова ул., д. 19

³ Люблянский университет, Словения, 1000, г. Любляна, Конгресни трг, д. 12

Каплунов Юлий Давидович, доктор физико-математических наук, профессор Школы компьютерных наук и математики, j.kaplunov@keele.ac.uk, <https://orcid.org/0000-0001-7505-4546>, AuthorID: 6305

Зупанчич Барбара, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела теоретических исследований, barbara.zupancic@ki.si, <https://orcid.org/0000-0001-7296-8086>

Никонов Анатолий Викторович, доктор физико-математических наук, профессор факультета машиностроения, anatolij.nikonov@fs.uni-lj.si, <https://orcid.org/0000-0003-3586-1401>, AuthorID: 396401

Аннотация. Рассматривается осесимметричная задача о поперечном обжатии тонкого упругого диска при отсутствии проскальзывания. Построено асимптотическое решение для внутреннего напряженно-деформированного состояния. Намечен подход к определению плоского погранслоя, локализованного около внешнего контура диска.

Ключевые слова: асимптотические методы, асимптотическое решение, осесимметричная задача, задача обжатия, смешанные граничные условия, напряженно-деформированное состояние, плоский погранслой

Для цитирования: Каплунов Ю. Д., Зупанчич Б., Никонов А. В. Асимптотический анализ осесимметричной задачи об обжатии тонкого упругого диска в случае смешанных граничных условий на лицевых поверхностях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 57–62. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-57-62>, EDN: LNJVVN

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Asymptotic analysis of the axisymmetric problem for the transverse compression of a thin elastic disk in the case of mixed boundary conditions along its faces

J. D. Kaplunov^{1✉}, B. Zupančič², A. V. Nikonov³

¹ Keele University, Keele, Staffordshire ST5 5BG, UK

² National Institute of Chemistry, 19 Hajdrihova, Ljubljana 1000, Slovenia

³ University of Ljubljana, 12 Kongresni trg, Ljubljana 1000, Slovenia

Julius D. Kaplunov, j.kaplunov@keele.ac.uk, <https://orcid.org/0000-0001-7505-4546>, AuthorID: 6305

Barbara Zupančič, barbara.zupancic@ki.si, <https://orcid.org/0000-0001-7296-8086>

Anatolij V. Nikonov, anatolij.nikonov@fs.uni-lj.si, <https://orcid.org/0000-0003-3586-1401>, AuthorID: 396401

Abstract. The axisymmetric problem for the transverse compression of a thin elastic disk is considered in slip absence. An asymptotic solution for the interior stress-strain state is constructed. An approach to determining a plane boundary layer localized near the outer contour of the disk is outlined.

Keywords: asymptotic methods, asymptotic solution, axisymmetric problem, compression problem, mixed boundary conditions, stress-strain state, flat boundary layer

For citation: Kaplunov J. D., Zupančič B., Nikonov A. V. Asymptotic analysis of the axisymmetric problem for the transverse compression of a thin elastic disk in the case of mixed boundary conditions along its faces. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 57–62 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-57-62>, EDN: LNJVVN

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В основе общей математической теории тонких пластин и оболочек лежит универсальный асимптотический подход, позволяющий сводить исходные трехмерные уравнения теории упругости к двумерным [1–3]. Этот подход, в частности, позволяет учесть поперечное обжатие в рамках двумерной постановки [1–4]. При этом в подавляющем большинстве работ рассматриваются тонкие упругие тела с заданными напряжениями на лицевых поверхностях. Более общие граничные условия, включая смешанные, исследовались гораздо реже (см. например: [5–7]).

В данной статье смешанные граничные условия на лицевых поверхностях рассматриваются применительно к задачам обжатия. В качестве примера изучается осесимметричная деформация диска, сжимаемого нормальными напряжениями при пренебрежении проскальзывания. Таким образом, предполагается отсутствие касательных перемещений на лицевых поверхностях. Толщина диска считается малой по сравнению с его радиусом. Для определенности контур диска полагается свободным от напряжений.

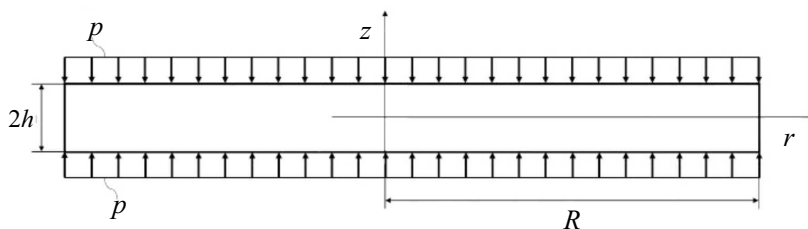
Сформулированная задача исследуется с помощью метода асимптотического интегрирования [1, 5]. Найдена асимптотика внутреннего напряженного состояния, которая кардинально отличается от аналогичной асимптотики для обжатия с проскальзыванием, т. е. при равенстве нулю касательных напряжений, а не перемещений [3]. В главном приближении получены простые алгебраические формулы, выражающие параметры напряженно-деформированного состояния через заданную обжимающую поперечную нагрузку. При этом формируется невязка в однородных граничных условиях на внешнем свободном контуре диска.

Показывается, что для снятия такой невязки следует построить так называемый плоский погранслои, локализующийся около внешнего контура [1]. Существенно, что изучаемые смешанные граничные условия на лицевых поверхностях как обеспечивают затухание погранслоя, так и позволяют представить погранслои в виде ряда Фурье, аналогично тому, как это было сделано при решении близких задач в [8, 9].

Ввиду ограниченности объема статьи за ее рамками остается вычисление погранслоя, так же как и построение асимптотических поправок к полученному внутреннему решению. Соответствующий анализ может быть легко осуществлен с помощью разработанной в статье методологии, которая также может быть распространена на диск с произвольным контуром.

1. Постановка задачи

Рассмотрим круглый диск постоянной толщины $2h$ и радиуса R , под воздействием обжимающих напряжений амплитуды p , заданных на его лицевых поверхностях (рисунок).



Поперечное сечение диска / Figure. The cross section of the disc



Предположим, что материал диска изотропный и линейный упругий. Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с началом координат в центре срединной плоскости диска, так что ось z направлена вдоль перпендикуляра к этой плоскости. Для определенности положим, что боковая поверхность диска свободна от нагрузок.

В осесимметричном случае, когда напряжения не зависят от полярного угла φ , уравнения равновесия записываются в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} &= 0,\end{aligned}$$

где $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}$ являются компонентами тензора напряжений.

Определяющие соотношения для линейного изотропного упругого тела в цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \\ \sigma_\varphi &= (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\ \sigma_z &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), & \tau_{\varphi z} &= \mu \frac{\partial v}{\partial z},\end{aligned}$$

где λ и μ — постоянные Ламе, а u, v, w — компоненты вектора перемещений, которые также не зависят от угла φ . Ограничимся случаем, когда окружные перемещения равны нулю, т. е. $v = 0$.

Смешанные граничные условия на лицевых поверхностях диска $z = \pm h$, моделирующие поперечное обжатие при отсутствии проскальзывания, примем в виде

$$\sigma_z = -p, \quad u = 0. \quad (1)$$

Очевидно, что ввиду симметрии выписанных граничных условий относительно плоскости $z = 0$ перемещения u и w соответственно будут четными и нечетными функциями поперечной координаты z .

На свободном внешнем контуре диска $r = R$ имеем однородные граничные условия в напряжениях

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0. \quad (2)$$

2. Внутреннее решение

Введем малый геометрический параметр $\varepsilon = h/R \ll 1$ и масштабируем исходные переменные как

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \eta = \frac{z}{h}.$$

Определим также безразмерные величины

$$\begin{aligned}u^* &= \frac{u}{h}, & w^* &= \frac{w}{R}, \\ \sigma_r^* &= \frac{\varepsilon}{\mu} \sigma_r, & \sigma_\varphi^* &= \frac{\varepsilon}{\mu} \sigma_\varphi, & \sigma_z^* &= \frac{\varepsilon}{\mu} \sigma_z, & \tau_{rz}^* &= \frac{1}{\mu} \tau_{rz}, & p^* &= \frac{\varepsilon}{\mu} p.\end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее считается, что все величины со звездочкой имеют одинаковый асимптотический порядок.



Асимптотика напряженно-деформированного состояния диска, задаваемая этими формулами, отличается от аналогичной асимптотики в случае обжатия с проскальзыванием, когда однородное граничное условие принимает вид $\tau_{rz} = 0$.

Уравнения равновесия и определяющие соотношения в безразмерной форме теперь можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{rz}^*}{\partial \eta} + \frac{\sigma_r^* - \sigma_\varphi^*}{\xi} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \tau_{rz}^*}{\partial \xi} + \frac{\tau_{rz}^*}{\xi} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \alpha \frac{\partial w^*}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \left[(\alpha + 2) \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \alpha \frac{u^*}{\xi} \right], \\ \sigma_\varphi^* &= \alpha \frac{\partial w^*}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \left[(\alpha + 2) \frac{u^*}{\xi} + \alpha \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right], \\ \sigma_z^* &= (\alpha + 2) \frac{\partial w^*}{\partial \eta} + \alpha \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{u^*}{\xi} \right), \\ \tau_{rz}^* &= \frac{\partial u^*}{\partial \eta} + \frac{\partial w^*}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\alpha = \lambda/\mu$.

Граничные условия принимают вид

$$\sigma_z^* = -p^*, \quad u^* = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \pm 1 \quad (6)$$

и

$$\sigma_r^* = 0, \quad \tau_{rz}^* = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1.$$

Теперь разложим перемещения и напряжения в асимптотические ряды по малому параметру ε :

$$\begin{pmatrix} u^* \\ w^* \\ \sigma_r^* \\ \sigma_\varphi^* \\ \sigma_z^* \\ \tau_{rz}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(0)} \\ w^{(0)} \\ \sigma_r^{(0)} \\ \sigma_\varphi^{(0)} \\ \sigma_z^{(0)} \\ \tau_{rz}^{(0)} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ w^{(1)} \\ \sigma_r^{(1)} \\ \sigma_\varphi^{(1)} \\ \sigma_z^{(1)} \\ \tau_{rz}^{(1)} \end{pmatrix} + \dots$$

Подставив эти разложения в уравнения (4) и (5) и граничные условия (6), получим в главном приближении

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{rz}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\sigma_r^{(0)} - \sigma_\varphi^{(0)}}{\xi} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z^{(0)}}{\partial \eta} &= 0, \quad \sigma_r^{(0)} = \alpha \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta}, \quad \sigma_\varphi^{(0)} = \alpha \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_z^{(0)} &= (\alpha + 2) \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta}, \quad \tau_{rz}^{(0)} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (7)$$

и

$$\sigma_z^{(0)} = -p^*(\xi), \quad u^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \pm 1. \quad (8)$$

Интегрируя уравнения (7) с граничными условиями (8) по η , имеем

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= \frac{\alpha + 1}{2(\alpha + 2)} \frac{\partial p^*(\xi)}{\partial \xi} (\eta^2 - 1), \quad w^{(0)} = -\frac{\eta}{\alpha + 2} p^*(\xi), \\ \sigma_r^{(0)} = \sigma_\varphi^{(0)} &= -\frac{\alpha}{\alpha + 2} p^*(\xi), \quad \sigma_z^{(0)} = -p^*(\xi), \quad \tau_{rz}^{(0)} = \frac{\alpha}{\alpha + 2} \frac{\partial p^*(\xi)}{\partial \xi} \eta. \end{aligned} \quad (9)$$



3. Обсуждение

В размерных величинах асимптотическое решение (9) принимает вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}(z^2 - h^2) \frac{\partial p(r)}{\partial r}, \quad w = -\frac{z}{(\lambda + 2\mu)} p(r), \\ \sigma_r = \sigma_\varphi &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} p(r), \quad \sigma_z = -p(r), \quad \tau_{rz} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} z \frac{\partial p(r)}{\partial r}. \end{aligned} \quad (10)$$

Приведенные соотношения отражают специфику изучаемых смешанных граничных условий на лицевых поверхностях, задаваемых формулой (1). В частности, касательное перемещение u непостоянно по толщине диска, как в случае граничных условий в напряжениях [3]. Это обусловлено тем, что принятая неклассическая асимптотика (3) соответствует именно упомянутым смешанным граничным условиям.

Нетрудно заметить, что полученное решение (10) не удовлетворяет граничным условиям (2). При этом там образуется невязка

$$\sigma_r = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} p(R), \quad \tau_{rz} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} z \frac{\partial p(r)}{\partial r} \Big|_{r=R}.$$

Для ее компенсации следует ввести в рассмотрение так называемый плоский погранслой [1], локализованный в малой окрестности (порядка толщины) контура диска. Он описывается уравнениями плоской задачи теории упругости в полуполосе толщиной $2h$ (см. рисунок), в декартовых координатах ($x = R - r, z$). В этом случае ставятся однородные условия на лицевых поверхностях и следующие условия при $x = 0$:

$$\sigma_x = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} p(0), \quad \tau_{xz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} z \frac{\partial p(x)}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Ввиду присутствия малого множителя $O(\varepsilon)$ ($z = h\eta, x = R(1 - \xi)$) во втором из этих условий его в главном приближении можно считать однородным.

Отметим также, что при выбранных смешанных граничных условиях на лицевых поверхностях автоматически гарантируется экспоненциальное затухание погранслоя. Эти условия позволяют также разделение переменных в уравнениях плоской задачи теории упругости аналогично [8, 9].

Список литературы

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва : Наука, 1976. 512 с.
2. Коссович Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 176 с.
3. Kaplunov J. D., Kossovich L. Ju., Nolde E. V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San-Diego : Academic Press, 1998. 226 p. <https://doi.org/10.1016/c2009-0-20923-8>
4. Kaplunov J. D., Kossovich L. Ju., Moukhomodiarov R. R. Impact normal compression of an elastic plate: analysis utilising an advanced asymptotic 2D model // Mechanics Research Communications. 2000. Vol. 27, iss. 1. P. 117–122. [https://doi.org/10.1016/S0093-6413\(00\)00070-7](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(00)00070-7)
5. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. Москва : Наука, 1997. 414 с.
6. Гольденвейзер А. Л. Общая теория тонких упругих тел (оболочки, покрытия, прокладки) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1992. № 3. С. 5–17.
7. Kaplunov J., Prikazchikov D., Sultanova L. Justification and refinement of Winkler – Fuss hypothesis // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2018. Vol. 69. Art. 80. <https://doi.org/10.1007/s00033-018-0974-1>
8. Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. Москва : Физматлит, 2010. 280 с.
9. Kaplunov J. D., Kossovich L. Ju., Wilde M. V. Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // The Journal of the Acoustical Society of America. 2000. Vol. 107, iss. 3. P. 1383–1393. <https://doi.org/10.1121/1.428426>



References

1. Goldenweiser A. L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of Elastic Thin Shells]. Moscow, Nauka, 1976. 512 p. (in Russian).
2. Kossovich L. Yu. *Nestatsionarnye zadachi teorii uprugikh tonkikh obolochek* [Nonstationary Problems in the Theory of Elastic Thin Shells]. Saratov, Saratov State University Publ., 1986. 176 p. (in Russian).
3. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. San-Diego, Academic Press, 1998. 226 p. <https://doi.org/10.1016/c2009-0-20923-8>
4. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Moukhomodiarov R. R. Impact normal compression of an elastic plate: analysis utilising an advanced asymptotic 2D model. *Mechanics Research Communications*, 2000, vol. 27, iss. 1, pp. 117–122. [https://doi.org/10.1016/S0093-6413\(00\)00070-7](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(00)00070-7)
5. Agalovyan L. A. *Asimptoticheskaya teoriya anizotropnykh plastin i obolochek* [The Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1997. 414 p. (in Russian).
6. Goldenweiser A. L. General theory of thin elastic bodies (shells, coatings, and gaskets). *Mechanics of Solids*, 1992, vol. 3, pp. 5–17 (in Russian).
7. Kaplunov J., Prikazchikov D., Sultanova L. Justification and refinement of Winkler – Fuss hypothesis. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2018, vol. 69, art. 80. <https://doi.org/10.1007/s00033-018-0974-1>
8. Wilde M. V., Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu. *Kraevye i interfeysnye rezonansnye yavleniya v uprugikh telakh* [Edge and Interfacial Resonance Phenomena in Elastic Bodies]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 280 p. (in Russian).
9. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V. Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2000, vol. 107, iss. 3, pp. 1383–1393. <https://doi.org/10.1121/1.428426>

Поступила в редакцию / Received 05.12.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 63–70

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 63–70
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-63-70>, EDN: QACBVA

Article

Connectivity in a rough plane and axially symmetric contacts with a special coating

I. I. Kudish

ILRIMA Consulting, Inc., Millersburg, MI 49759, USA

Ilya I. Kudish, ilyakudish@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-8308-235X>

Abstract. There is some evidence that in certain cases a contact of rough elastic solids is multiply connected, i.e. have regions in it where contact surfaces are apart from each other and the contact pressure is zero. The issue of the connectivity in rough elastic contacts has both theoretical and practical interest, especially for seals. In this paper, we extend the earlier conducted analysis of rough contacts without coatings in plane and axially symmetric formulations on the cases of plane and axially symmetric rough elastic contacts with special coatings and compare our findings. The main goal of the paper is to obtain the exact analytical solutions of plane and axially symmetric rough elastic contacts with a special coating and analyze their properties such as contact connectivity and contact pressure smoothness compared to the smoothness of the surface roughness profile. This goal is achieved by using solution expansions in Chebyshev and Legendre orthogonal polynomials. A range of contact parameters has been determined for which the contacts are connected individually.

Keywords: plane and axially symmetric rough coated contacts, Chebyshev and Legendre orthogonal polynomials, series convergence and solution, singly connected rough contacts

For citation: Kudish I. I. Connectivity in a rough plane and axially symmetric contacts with a special coating. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 63–70. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-63-70>, EDN: QACBVA

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 539.3

Соединение в шероховатой плоскости и осесимметричных контактах со специальным покрытием

И. И. Кудиш

ILRIMA Consulting, Inc., США, 49759 Мичиган, г. Миллерсберг

Кудиш Илья Исидорович, научный сотрудник ASME, ilyakudish@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-8308-235X>

Аннотация. Имеются некоторые свидетельства того, что в определенных случаях контакт шероховатых упругих тел является многосвязным, т. е. в нем имеются области, где контактные поверхности находятся на расстоянии друг от друга, а контактное давление равно нулю. Вопрос о соединении в шероховатых упругих контактах представляет как теоретический, так и практический интерес, особенно для уплотнений. В этой статье мы расширяем ранее проведенный анализ шероховатых контактов без покрытий в плоских и осесимметричных композициях на случаи плоских и осесимметричных шероховатых упругих контактов со специальными покрытиями и сравниваем наши результаты. Основная цель работы — получить точные аналитические решения для плоских и осесимметричных



шероховатых упругих контактов со специальным покрытием и проанализировать их свойства, такие как контактная связность и гладкость контактного давления, по сравнению с гладостью профиля шероховатости поверхности. Эта цель достигается за счет использования разложений решения в ортогональные многочлены Чебышева и Лежандра. Был определен диапазон контактных параметров, для которых контакты односвязны.

Ключевые слова: плоские и осесимметричные контакты с шероховатым покрытием, ортогональные многочлены Чебышева и Лежандра, сходимости рядов и решение, односвязные контакты с шероховатым покрытием

Для цитирования: Kudish I. I. Connectivity in a rough plane and axially symmetric contacts with a special coating [Кудиш И. И. Соединение в шероховатой плоскости и осесимметричных контактах со специальным покрытием] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 63–70. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-63-70>, EDN: QACBVA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

The studies of elastic rough contacts have a long history. A number of analytical and semi-analytical models using various assumptions (such as wavy surfaces, partial contact, periodic and random surface profiles) have been proposed [1–6], including models with adhesion [7–9] and numerical studies [10]. In [11], the authors analyzed analytically rough contacts with roughness described by the Weierstrass function, which is continuous everywhere but not differentiable anywhere. This analysis led to the conclusion that, under such an assumption, a rough contact is always multi-connected, i.e. it has a series of places where contact pressure is positive (actual contact takes place) and a series of areas where contact surfaces are apart from each other, i.e. pressure is zero. In all these studies, the elastic solids were assumed to be made of a homogeneous elastic material, and no coatings of any kind were considered.

That brought to the forefront two interconnected questions about solids made of homogeneous elastic material and elastic solids with coatings: (a) What would be a reasonable assumption about the smoothness of rough surfaces? and (b) Is it possible to get singly connected rough contacts? In [12–14], we see the first attempts to answer both of these questions for contacts without coatings and show how they are interconnected. In [12], besides theoretical analysis, some experimental studies of real ground surfaces using optical and electron force microscopes were performed. The connectivity of real rough surfaces has certain serious practical consequences such as leakage through the gaps between surface asperities in contact sealing lubricated spaces. Therefore, besides a purely theoretical interest in the issue of rough contact connectivity, there is also a practical one.

The main goal of this paper is to extend the findings of [12–14] on the cases of plane and axially symmetric rough contacts with special coatings. In other words, it is to analyze the connectivity in a contact of rough surface and to analyze the dependence on the smoothness of the roughness profile and connectivity. In the process, the exact solutions of the plane and axially symmetric problems for rough elastic contact with special coatings with the help of Chebyshev and Legendre orthogonal polynomials.

1. Formulation of the problem for rough plane contacts with a coating

Let us assume that a rigid infinite in the y direction punch with the bottom half-width a is indented in a coated half-plane made of a homogeneous elastic material with elastic modulus E and Poisson's ratio ν (see Figure).

Let us assume that the coating is thin and its vertical displacement is represented by the Winkler – Fuss relationship with the coefficient proportionality dependent on the distance from the



contact center, i.e. $w_c(x) = \lambda\sqrt{1 - x^2/a^2}p(x)$, where $w_c(x)$ is the vertical displacement of the thin coating subjected to pressure $p(x)$, x is the coordinate of the point in the contact, λ is a constant nonnegative coefficient proportionality. The coordinate system is introduced in such a way that the z -axis is directed upward, the y -axis is directed along the punch length, and the x -axis is directed along the punch contact with the half-plane. The punch bottom texture is described by a continuous function $z = f(x)$. It is assumed that the contact is frictionless. The load applied to the punch is directed along the negative z -axis and is equal to P . In this classical formulation for singly connected contacts the problem equations are as follows [15]

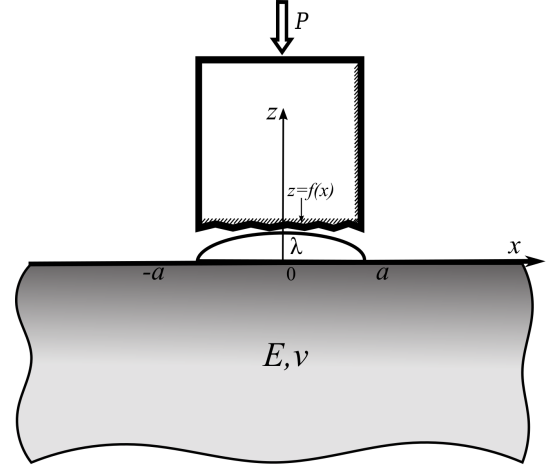


Figure. The general view of a rigid punch indented in an elastic half-plane with a special coating

$$\lambda\sqrt{1 - x^2/a^2}p(x) + \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a p(t) \ln \left| \frac{a}{x - t} \right| dt = \delta - f(x), \quad \int_{-a}^a p(x) dx = P, \quad (1)$$

where the contact pressure $p(x)$ and the rigid vertical displacement of the punch δ caused by the applied load P are unknown and need to be determined.

2. Analysis of the plane problem

Let us use for solution of the formulated problem expansions in series with respect to the Chebyshev orthogonal polynomials $T_n(x)$ of the first kind [16]. Specifically, let us assume that

$$f(x) = \omega f_0(x), \quad f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T_n\left(\frac{x}{a}\right), \quad (2)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_0(ax) dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_0(ax) T_n(x) dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

where coefficients α_n are known. Here ω is a dimensionless constant characterizing the overall height of the asperity profile described by function $f(x)$ while $f_0(x)$ describes the nominal roughness profile.

We will need to use the following relationships [17]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x - y|} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \ln 2, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x - y|} \frac{T_n(y) dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{n} T_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

The solution to Problem (1) will be searched in the form of series, i.e.

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{T_n\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - x^2/a^2}}, \quad (4)$$

where coefficients β_n , $n = 0, 1, \dots$, are unknown and need to be determined. Substituting (4) into equations (1) and taking into account the orthogonality of $T_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, on interval $-1 < x < 1$ one obtains

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n T_n\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{2(1 - \nu^2)}{E} a \left\{ \beta_0 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n} T_n\left(\frac{x}{a}\right) \right\} =$$



$$= \delta - \omega \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T_n \left(\frac{x}{a} \right), \quad |x| < a, \quad \beta_0 = \frac{P}{\pi a}. \quad (5)$$

From these equations, it is easy to find that

$$\delta = \omega \alpha_0 + \frac{P}{\pi a} \left[\lambda + 2 \ln 2 \frac{1 - \nu^2}{E} a \right], \quad \alpha_{n0} = \left[\lambda + \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \frac{a}{n} \right]^{-1}, \quad (6)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2/a^2}} \left\{ \frac{P}{\pi a} - \omega \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \alpha_{n0} T_n \left(\frac{x}{a} \right) \right\}, \quad |x| < a.$$

Due to the fact that for $\lambda > 0$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \alpha_{n0}$ converges absolutely while the series $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \alpha_{n0} T_n \left(\frac{x}{a} \right)$ converges absolutely and uniformly (remember that $|T_n \left(\frac{x}{a} \right)| \leq 1$ for $|x| \leq a$) if the series $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converges absolutely. For the latter to take place it is sufficient to assume that

$$\alpha_n = O \left(\frac{1}{n^\gamma} \right), \quad \gamma > 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Moreover, the higher the value of γ the more differentiable are functions $f(x)$ and $p(x)$ (see [12]).

For the pressure function $p(x)$ from (6) to be nonnegative in the entire contact region it is sufficient for the following inequality

$$\frac{P}{\pi a} - \omega \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \alpha_{n0} T_n \left(\frac{x}{a} \right) \geq 0, \quad |x| < a, \quad (8)$$

to be valid. Due to the fact that $|T_n(x)| \leq 1$, $n = 0, 1, \dots$, for $|x| \leq a$ for this inequality to be true it is sufficient that

$$\frac{P}{\pi a} - \omega \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \alpha_{n0} \geq 0. \quad (9)$$

Therefore, due to the convergence of the series in (9) there exists a finite positive number ω_0 that for any ω from the interval

$$0 \leq \omega \leq \omega_0 = \frac{P}{\pi a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \alpha_{n0} \right\}^{-1}, \quad (10)$$

the distribution of contact pressure $p(x)$ is nonnegative in the entire contact region. For the strict positivity of $p(x)$ it is sufficient to require that $0 \leq \omega < \omega_0$.

Using the exact solutions (6) and (10) it is easy to calculate contact pressure $p(x)$ and the range of the parameter ω for which the contact pressure is nonnegative in the contact region. As it was shown in [12–14] by a series of measurements of real ground (rough) steel surfaces on an optical profiler profiler and an electronic force microscope, theoretically, the real rough surfaces are described by not just continuous but smooth distribution functions. The differentiability of pressure $p(x)$ from (6) for $\lambda > 0$, $0 \leq \omega \leq \omega_0$, and $|x| < a$ is the same as the differentiability of the roughness distribution $f(x)$ for $|x| < a$ as the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \alpha_{n0}$ and

the series $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ for $f(x)$ are the same. The case of $\lambda = 0$ is analyzed in [12].

It is interesting to note that the behavior of $p(x)$ near the contact boundaries $x = \pm a$ in the present problem is very different from the behavior of $p(x)$ in the plane contact problem



with a coating which normal displacement $w_c(x)$ subjected to pressure $p(x)$ is described by the relationship $w_c(x) = \lambda p(x)$, where λ is a constant nonnegative coefficient proportionality [15]. Specifically, in the present problem $p(x) \rightarrow +\infty$ as $r \rightarrow \pm a$ while in [15] $p(x) \rightarrow \text{constant}$ as $r \rightarrow \pm a$. This behavior of $p(x)$ in our problem becomes obvious from the asymptotically valid solution $p(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{\delta - f(x)}{\sqrt{1 - x^2/a^2}} + \dots$ for $\lambda \gg 1$.

3. Formulation of the problem for rough axially symmetric contacts with a coating

Let us consider an axially symmetric rigid punch of radius a which is indented in a coated half-space made of a homogeneous elastic material with elastic modulus E and Poisson's ratio ν . Let us assume that the coating is thin and its vertical displacement is represented by the Winkler-Fuss relationship with the coefficient proportionality dependent on the distance from the contact center, i.e. $w_c(r) = \lambda \sqrt{1 - r^2/a^2} p(r)$, where $w_c(r)$ is the vertical displacement of the thin coating subjected to pressure $p(r)$, r is the radial distance from the contact center, λ is a constant nonnegative coefficient proportionality. The coordinate system is introduced in such a way that the z -axis is directed upward along the punch axis while in the xy -plane a polar coordinate system with radial variable $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ is introduced. The contact arrangement is similar to the one shown in Figure. The punch bottom texture is described by a continuous function $z = f(r)$. It is assumed that the contact is frictionless. The load applied to the punch is directed along the negative z -axis and is equal to P . In this classical formulation for singly connected contacts the problem equations are as follows [15]

$$\lambda \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} p(r) + \frac{8(1 - \nu^2)}{\pi E} \int_0^a \frac{\rho}{r + \rho} K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r + \rho}\right) p(\rho) d\rho = \delta - f(r), \quad \int_0^a r p(r) dr = \frac{P}{2\pi}, \quad (11)$$

where $K(\cdot)$ is the full elliptic integral of the second kind [16], $p(r)$ and δ are the unknown pressure and punch rigid displacement which need to be determined.

4. Analysis of the axially symmetric problem

First, let us notice that the set of all Legendre orthogonal polynomials $P_{2n}\left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\right)$, $n = 0, 1, \dots$, is complete in the functional space $L_2(0, 1)$ of all quadratically integrable functions on the interval $(0, 1)$. The same set of functions represents the basis in the functional space $C(0, 1)$ of all continuous functions on $(0, 1)$. Therefore, any continuous function $f(r)$ describing the texture of the punch bottom can be represented in the form [16]

$$f(r) = \omega f_0(r), \quad f_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_{2n}\left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\right), \quad (12)$$

$$\alpha_n = (4n + 1) \int_0^1 f_0(ar) P_{2n}\left(\sqrt{1 - r^2}\right) \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}},$$

where coefficients α_n are known. Here ω is a dimensionless constant characterizing the overall height of the asperity profile described by function $f(r)$ while $f_0(r)$ describes the nominal roughness profile.

Due to the convergence of this series in $L_2(0, 1)$ it also converges to our continuous function $f(r)$ almost everywhere (possibly, except for a set of points from $(0, 1)$ of measure zero). On the other hand, the series for $f_0(r)$ in (12) is a power series and, therefore, within any closed region $[b, c] \subset (0, 1)$ it converges absolutely and uniformly. It means that this series not only converges to a continuous function $f_0(r)$ in $(0, 1)$ but it is also a differentiable function.



We are ready to find the solution to our problem (11) using the following relationship [17]

$$\int_0^1 \frac{\rho P_{2n}(\sqrt{1-\rho^2})}{(r+\rho)\sqrt{1-\rho^2}} K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) d\rho = \left\{ \frac{\pi (2n-1)!!}{2 (2n)!!} \right\}^2 P_{2n}(\sqrt{1-r^2}). \quad (13)$$

Let us search for the solution of problem (11) in the form

$$p(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{P_{2n}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}}, \quad (14)$$

where constants β_n are unknown and have to be determined from the solution.

Substituting (12) and (14) into (11) and using (13) we obtain

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n P_{2n}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right) + \frac{8(1-\nu^2)}{\pi E} a \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left\{ \frac{\pi (2n-1)!!}{2 (2n)!!} \right\}^2 P_{2n}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right) = \\ = \delta - \omega \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_{2n}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^a r \frac{P_{2n}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} dr = \frac{P}{2\pi}. \end{aligned} \quad (15)$$

Here, we interchanged the order of integration and summation which is legitimate for the series in (12) being convergent uniformly in any closed interval $[b, c] \subset (0, a)$.

Using the orthogonality of polynomials P_{2n} from (14) we find

$$\begin{aligned} \delta = \omega \alpha_0 + \frac{P}{2\pi a^2} \left(\lambda + 2\pi a \frac{1-\nu^2}{E} \right), \\ \beta_0 = \frac{P}{2\pi a^2}, \quad \beta_n = - \frac{\omega \alpha_n}{\lambda + 2\pi a \frac{1-\nu^2}{E} \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right\}^2}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Therefore, based on (14) and (16) the solution to our problem (11) has the form

$$\begin{aligned} \delta = \omega \alpha_0 + \frac{P}{2\pi a^2} \left(\lambda + 2\pi a \frac{1-\nu^2}{E} \right), \quad \beta_{n0} = \left\{ \lambda + 2\pi a \frac{1-\nu^2}{E} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \right\}^{-1}, \\ p(r) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} \left\{ \frac{P}{2\pi a^2} - \omega \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_{n0} P_{2n}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Obviously, for $\lambda > 0$ one has

$$|\beta_n| < \frac{\omega}{\lambda} |\alpha_n|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Therefore, if the series $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ converges then for $\lambda > 0$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_{n0}$ converges absolutely and series $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_{n0} P_{2n}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right)$ converges absolutely and uniformly for $0 \leq r \leq a$ because $|P_{2n}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right)| \leq 1$ for $0 \leq r \leq a$.

Solution (17) indicates that pressure $p(r)$ is nonnegative if

$$\frac{P}{2\pi a^2} - \omega \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_{n0} P_{2n}\left(\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\right) \geq 0, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (19)$$



Taking into account the fact that $|P_{2n}(x)| \leq 1$ for all $0 \leq x \leq 1$ [16] it becomes clear that it is sufficient for parameter ω to be small enough for the inequality

$$\frac{P}{2\pi a^2} - \omega \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \beta_{n0} \geq 0. \quad (20)$$

to be valid. The latter always takes place if the series $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ is convergent. Therefore, if (20) is satisfied then the function of pressure $p(r)$ is nonnegative in $[0, a)$, and the contact is singly connected. If in (20) we have a strict inequality then $p(r)$ is positive in $[0, a)$.

For $\lambda > 0$ the above conclusions are certainly true if α_n satisfy (7). By the way, inequality (7) guarantees that the series in (12) converges uniformly for $0 \leq r \leq a$ and, therefore converges everywhere in this interval to a continuous function $f(r)$. In other words, if α_n satisfy (7) then there exists such a finite positive number ω_0 that for

$$0 \leq \omega < \omega_0 = \frac{P}{2\pi a^2} / \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \beta_{n0}, \quad \beta_{n0} = \left\{ \lambda + 2\pi a \frac{1 - \nu^2}{E} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \right\}^{-1}, \quad (21)$$

the function of pressure $p(r)$ is positive in the entire contact region $0 \leq r < a$.

Using the exact solution (17) and (21) it is easy to calculate contact pressure $p(r)$ and the range of the parameter ω for which the contact pressure is nonnegative in the contact region. The differentiability of pressure $p(r)$ from (17) for $\lambda > 0$, $0 \leq \omega < \omega_0$, and $0 \leq r < a$ is the same as the differentiability of the roughness distribution $f(r)$ due to the fact that the series $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \beta_{n0}$ converges exactly the same way as the series $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ of the absolute values of the coefficients α_n of the series for $f(r)$. With respect to the differentiability of real ground surfaces, please see [12]. The case of $\lambda = 0$ is analyzed in [14].

It is interesting to note that the behavior of $p(r)$ near the contact boundary in the present problem is very different from the behavior of $p(r)$ in the axially symmetric contact problem with a coating which normal displacement $w_c(r)$ subjected to pressure $p(r)$ is described by the relationship $w_c(r) = \lambda p(r)$, where λ is a constant nonnegative coefficient proportionality [15]. Specifically, in the present problem $p(r) \rightarrow +\infty$ as $r \rightarrow a$ while in [15] $p(r) \rightarrow \text{constant}$ as $r \rightarrow a$. This behavior of $p(r)$ in our problem becomes obvious from the asymptotically valid solution $p(r) = \frac{1}{\lambda} \frac{\delta - f(r)}{\sqrt{1 - r^2/a^2}} + \dots$ for $\lambda \gg 1$.

Closure

A quantitative and qualitative analysis of plane and axially symmetric frictionless contacts with special coatings has been proposed. The exact solutions of the problems in series are obtained. In both plane and axially symmetric cases of rough elastic contacts with coatings the ranges of contact parameters for which contacts are singly connected have been determined. The limit of the overall roughness height ω_0 below which it is guaranteed that the pressure distribution is positive within the entire contact depends on the material elastic parameters, coating property, applied load, contact size, and the nominal roughness distribution. It is clear that as the elastic modulus E and applied load P increase while the coating coefficient λ and contact size a decrease the range of the surface roughness $[0, \omega_0]$ for which a singly connected contact is possible increases.

The solutions obtained above for the cases of the plane and axially symmetric problem formulations with fixed contact boundaries can be used for the solution of contact problems with unknown contact boundaries (see [13]).



References

1. Greenwood J. A., Williamson J. B. P. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1966, vol. 295 (1442), pp. 300–319. <https://doi.org/10.1098/rspa.1966.0242>
2. Ciavarella M., Delfine V., Demelio G. A “re-vitalized” Greenwood and Williamson model of elastic contact between fractal surfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2006, vol. 54, iss. 12, pp. 2569–2591. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2006.05.006>
3. Dundurs J., Tsai K. C., Keer L. M. Contact between elastic bodies with wavy surfaces. *Journal of Elasticity*, 1973, vol. 3, iss. 2, pp. 109–115. <https://doi.org/10.1007/BF00045817>
4. Manners W. Partial contact between elastic surfaces with periodic profiles. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1998, vol. 454 (1980), pp. 3203–3221. <https://doi.org/10.1098/rspa.1998.0298>
5. Manners W. Pressure required to flatten an elastic random rough profile. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2000, vol. 42, iss. 12, pp. 2321–2336. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00098-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00098-3)
6. Block J. M., Keer L. M. Periodic contact problems in plane elasticity. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2008, vol. 3, iss. 7, pp. 1207–1237. <http://dx.doi.org/10.2140/jomms.2008.3.1207>
7. Waters J. F., Lee S., Guduru P. R. Mechanics of axisymmetric wavy surface adhesion: JKR–DMT transition solution. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, vol. 46, iss. 5, pp. 1033–1042. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.10.013>
8. Johnson K. L., Kendall K., Roberts A. D. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1971, vol. 324 (1558), pp. 301–313. <https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0141>
9. Derjaguin B. V., Muller V. M., Toporov Yu. P. Effects of contact deformations on the adhesion of particles. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1975, vol. 53, iss. 2, pp. 314–326. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(75\)90018-1](https://doi.org/10.1016/0021-9797(75)90018-1), EDN: ZYQZQX
10. Kalker J. J. *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 2. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1990. 314 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-7889-9>
11. Ciavarella M., Demelio G., Barber J. R., Jang Y. H. Linear elastic contact of the Weierstrass profile. *Proceedings of the Royal Society of London. A*, 2000, vol. 456, pp. 387–405. <https://doi.org/10.1098/rspa.2000.0522>
12. Kudish I. I., Cohen D. K., Vyletel B. Perfect mechanical sealing in rough elastic contacts: Is it possible? *Journal of Applied Mechanics*, 2013, vol. 80, iss. 1, art. 014504. <https://doi.org/10.1115/1.4007085>
13. Kudish I. I., Cohen D. K., Vyletel B. Surface roughness and contact connectivity. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2014, vol. 228, iss. 7, pp. 735–744. <https://doi.org/10.1177/1350650114528169>
14. Kudish I. I. Connectivity of rough contacts in plane and axially symmetric cases. *Mechanics Research Communications*, 2022, vol. 124, art. 103941. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.103941>
15. Kudish I. I., Covitch M. J. *Modeling and Analytical Methods in Tribology*. Chapman & Hall/CRC, 2010. 928 p. <https://doi.org/10.1201/9781420087024>
16. Abramowitz M., Stegun I. (eds.) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied Mathematics Series, vol. 55 (Ninth reprint with additional corrections of tenth original printing with corrections (December 1972); first ed.). Washington D.C., New York, US Dept. of Commerce, Nat. Bur. of Stand.; Dover Publications, 1983. 1059 p.
17. Popov G. Ya. *Elastic Stress Concentration Near Indentors Cuts, Thin Inclusions and Stringers*. Moscow, Nauka, 1982. 344 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 7.12.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



Научная статья

УДК 534.131.2

Собственные колебания композитных эллиптических цилиндрических оболочек с жидкостью

С. В. Лекомцев[✉], В. П. Матвеевко

Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, Россия, 614068, г. Пермь, ул. Академика Королева, д. 1

Лекомцев Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией, lekomtsev@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8331-2979>, AuthorID: 671355

Матвеевко Валерий Павлович, доктор технических наук, академик РАН, заведующий отделом, mvp@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2787-6558>, AuthorID: 14481

Аннотация. В аэрокосмической промышленности часто применяются цилиндрические оболочки с эллиптическим профилем, которые изготавливаются из композиционного материала методом намотки. В процессе производства или эксплуатации конструкции существует вероятность возникновения несовершенства формы в виде отклонения от кругового поперечного сечения. Анализ колебаний таких изделий, содержащих внутри себя жидкость, требует тщательного изучения с целью определения эксплуатационных характеристик, влияющих на их жизненный цикл. В статье сформулирована математическая постановка и представлен соответствующий ей конечно-элементный алгоритм, предназначенные для определения собственных частот колебаний слоистых композитных эллиптических цилиндрических оболочек, наполненных жидкостью. Решение задачи осуществляется в трехмерной постановке методом конечных элементов. Криволинейная поверхность оболочки представляется в виде совокупности плоских четырехугольных сегментов, в каждом из которых выполняются соотношения классической теории слоистых пластин. Мембранные перемещения описываются с использованием билинейных функций формы Лагранжа. Прогиб в направлении нормали к боковой поверхности и углы поворота аппроксимируются несовместными кубическими полиномами Эрмита. Малые колебания идеальной сжимаемой жидкости описываются в рамках акустического приближения волновым уравнением относительно гидродинамического давления, которое вместе с граничными условиями и условием непроницаемости на смоченной поверхности преобразуется к слабой форме. Верификация разработанного численного алгоритма осуществлена путем сравнения полученных собственных частот колебаний с известными данными, представленными в литературе для круговых цилиндрических оболочек с разными схемами укладки слоистого композиционного материала. В примерах оценено влияние геометрических размеров конструкции, граничных условий на ее краях и отношения полуосей эллипса. Получены новые количественные и качественные закономерности, показана возможность управления собственными частотами колебаний за счет подбора параметров композиционного материала.

Ключевые слова: собственные колебания, эллиптические цилиндрические оболочки, гидроупругость, идеальная жидкость, слоистый композиционный материал

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания.

Для цитирования: Лекомцев С. В., Матвеевко В. П. Собственные колебания композитных эллиптических цилиндрических оболочек с жидкостью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 71–85. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-71-85>, EDN: QFMMAH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Natural vibration of composite elliptical cylindrical shells filled with fluid

S. V. Lekomtsev[✉], V. P. Matveenko

Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 1 Academician Korolev St., Perm 614068, Russian Federation

Sergey V. Lekomtsev, lekomtshev@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8331-2979>, AuthorID: 671355

Valerii P. Matveenko, mvp@icmm.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2787-6558>, AuthorID: 14481

Abstract. The aerospace industry often uses cylindrical shells with elliptical cross-section, which are manufactured from composite material using a filament winding method. During the fabrication process or operation of the structure, there is a probability of shape imperfection in the form of deviation from a circular cross-section. The vibration analysis of such structures containing fluid requires an in-depth study to determine the performance characteristics affecting their life cycle. In this article we develop a mathematical formulation and present the corresponding finite element algorithm for determining the natural frequencies of vibrations of layered composite elliptical cylindrical shells filled with fluid. The problem is solved in a three-dimensional formulation by the finite element method. The curvilinear surface of the shell is represented as a set of flat rectangular segments, in which the relations of the classical laminated plate theory are fulfilled. The membrane displacements are described using bilinear Lagrange shape functions. The deflection in the direction normal to the lateral surface and the rotation angles are approximated by incompatible cubic Hermite polynomials. Small vibrations of an ideal compressible fluid are described in the framework of the acoustic approximation by a wave equation for hydrodynamic pressure, which, together with the boundary conditions and the impermeability condition on the wetted surface, is transformed to a weak form. The verification of the developed numerical algorithm is carried out by comparing the obtained natural frequencies of vibration with the known data presented in the literature for layered composite circular cylindrical shells. A number of examples are considered to evaluate the influence of geometrical dimensions of the structure, boundary conditions at the shell edges and the ratio of ellipse semi-axes. New quantitative and qualitative dependencies have been established, and the possibility of the natural frequency control through the selection of parameters of composite material has been shown.

Keywords: natural vibration, elliptical cylindrical shells, hydroelasticity, ideal fluid, layered composite material

Acknowledgements: The research was carried out in the framework of the government order.

For citation: Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of composite elliptical cylindrical shells filled with fluid. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 71–85 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-71-85>, EDN: QFMMAH
This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Цилиндрические оболочки с жидкостью нередко являются важными элементами сложных изделий, используемых в авиационной промышленности. Широкие возможности в области формирования требуемых динамических характеристик такого рода конструкций открываются за счет использования слоистых композиционных материалов. Подбирая схему армирования и укладки, можно добиться безопасного функционирования изделия в необходимом спектре частот при ограниченных габаритах и массе. Однако отклонение поперечного сечения оболочки от идеального кругового профиля, возникающее в процессе ее изготовления или эксплуатации, приводит к изменению заложенных при проектировании механических и динамических параметров. Самым простым способом учета такой неправильности формы



является использование в геометрической модели овального или эллиптического сечения вместо круглого.

Некоторые особенности в поведении эллиптических цилиндрических оболочек без жидкости были продемонстрированы экспериментально [1–3] и теоретически [1, 2, 4–7] еще в XX вв. Исчерпывающий обзор исследований по данному направлению приведен в статье [8]. В ней систематизированы публикации, посвященные различным задачам статики и динамики тонкостенных конструкций с некруговым поперечным сечением, их линейному и нелинейному анализу, устойчивости, а также учету пластических деформаций.

Исследованию круговых оболочек вращения, выполненных из слоистых композиционных материалов, посвящено значительное количество публикаций [9–11]. В меньшей степени изучены многослойные конструкции с некруговым поперечным сечением. Первоначально для этой цели во многих работах использовались классические теории оболочек [12–15], но в последующие годы широкое распространение получили более сложные модели и подходы [16–23]. В статье [16] для решения задачи о колебаниях овальных тонкостенных цилиндров использована теория композитных оболочек, учитывающая эффекты поперечной деформации сдвига и инерции вращения. Перемещения в окружном и продольном направлениях описываются с помощью комбинации функций Безье и балочных функций. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются с представленными в литературе данными. В работе [17] решение уравнений движения осуществлено путем разложения перемещений и углов поворота в ряд по степеням. Проанализировано влияние параметра эллиптичности, числа слоев, схемы укладки и модуля упругости на собственные частоты колебаний свободно опертых на обоих краях эллиптических цилиндрических оболочек. В статье [18] рассмотрены различные варианты граничных условий, задаваемых на краях конструкции, и их комбинации: свободный край, сдвиговая диафрагма, шарнирное опирание, жесткая заделка и три вида упругого опирания разной жесткости. Решение осуществлено методом Рэлея – Ритца с помощью модифицированного вариационного принципа и техники многоуровневого разбиения. Перемещения и углы поворота каждого сегмента оболочки в меридиональном и окружном направлениях аппроксимируются полиномами Якоби. В примерах оценено влияние количества слоев, схемы их укладки, длины конструкции и отношения модулей упругости слоистого композиционного материала на собственные частоты колебаний эллиптических цилиндрических оболочек.

В [16–18] применяются теории первого порядка по толщине, учитывающие поперечные деформации сдвига (first order shear deformation theory — FSDT). Более высокий порядок аппроксимации перемещений использован в работах [19–23]. Анализ динамических характеристик эллиптических и овальных композитных цилиндрических оболочек выполнен с помощью метода конечных элементов в статьях [19, 20] соответственно. Оценено влияние геометрических параметров (толщина, длина, размеры поперечного сечения), угла намотки и количества слоев на собственные частоты колебаний рассматриваемых конструкций. В [20] дополнительно решена нестационарная задача динамики, в которой учтено действие давления и температурной нагрузки. В работах [19, 20] использована модель, в которой изгибные перемещения оболочки имеют второй порядок по координате в направлении толщины. При описании мембранных перемещений учитываются слагаемые вплоть до третьей степени и применяются кусочно-однородные «зиг-заг» функции. Полученные результаты сравнены с расчетами на основе модели первого порядка (FSDT). Показано, что она позволяет получить качественно похожие зависимости, но количественное различие является довольно существенным и зависит от ряда параметров (эксцентриситет, угол намотки). Собственные частоты и формы колебаний эллиптических цилиндрических оболочек, выполненных из функционально-градиентного материала, исследованы в [21]. Решение осуществлено методом конечных элементов с использованием теории, приведенной в статьях [19, 20], но без учета «зиг-заг» функций. Представлены численные результаты, демонстрирующие влияние параметра эллиптичности, показателя объемной доли функционально-градиентного материала и толщины оболочки. Семимодальная теория, допускающая независимое движение верхней и



нижней поверхностей конструкции, использована в [22] для анализа собственных колебаний свободно опертых на обоих краях эллиптических цилиндрических оболочек. Численное решение осуществлено методом Рунге. Исследовано влияние параметра эллиптичности, длины и толщины оболочки. Показано, что частоты, соответствующие симметричным и антисимметричным модам высоких окружных гармоник, совпадают. Собственные колебания ортотропных эллиптических и овальных цилиндрических оболочек рассмотрены в работе [23]. Решение осуществлено обобщенным методом дифференциальных квадратур с использованием различных теорий оболочек. Проанализировано влияние угла намотки и геометрических параметров поперечного сечения. Показано, что применение оболочечных теорий высокого порядка позволяет получить более достоверные значения частот без использования поправочного коэффициента для поперечных деформаций сдвига.

Отметим, что исследование статического и динамического поведения некруговых цилиндрических оболочек может быть осуществлено с помощью обобщенного подхода, предназначенного для анализа трехмерных конструкций двойной кривизны [24–30], выполненных из композитного, функционально-градиентного [26, 29] и пьезоэлектрического [30] материалов. Используемые в [28–30] конечные элементы позволяют сохранить компромисс между временем вычислений и точностью получаемых результатов. Они обладают хорошей сходимостью на грубой сетке, не подвержены проблеме сдвигового запираения и способны конкурировать со своими аналогами в коммерческих комплексах программ.

В литературе представлено незначительное количество работ, посвященных собственным колебаниям некруговых цилиндрических оболочек с жидкостью. Исследования по данному направлению ограничены, традиционно, конструкциями с круглым поперечным сечением. За исключением статей самих авторов [31–33] можно указать публикации [34–38]. В работах [34, 35] аналитически проанализированы изгибные колебания эллиптической колонны, частично погруженной в воду. В [36] представлен полуаналитический метод для исследования акустического излучения от бесконечной некруговой цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами жесткости и погруженной в воду. Выражение для акустического давления получено из уравнения Гельмгольца с помощью спектрального метода виртуальной границы. В [37] для оболочек с произвольной геометрией предложен смешанный подход, основанный на использовании метода граничных элементов для моделирования динамики потенциальной жидкости и метода конечных элементов для упругой конструкции. В примерах рассмотрены задачи гидроупругой устойчивости оболочек. Анализ собственных и вынужденных установившихся гармонических колебаний эллиптической цилиндрической оболочки, погруженной в идеальную жидкость, выполнен в [38]. Математическая постановка задач основана на теории оболочек Флюгге и уравнении Гельмгольца, применяемого для описания поведения идеальной акустической среды. Решение выполнено путем разложения перемещений и звукового давления в ряды Фурье. В работе исследовано влияние параметра эллиптичности, толщины и длины оболочки, положения возбуждающей гармонической силы на динамические характеристики конструкции.

Большинство из перечисленных выше моделей, предназначенных для описания динамического поведения некруговых композитных цилиндрических оболочек, пригодно для использования в задачах гидроупругости. Однако публикации по данной тематике не представлены в доступной литературе. Между тем при проектировании таких тонкостенных конструкций необходима не только предварительная оценка спектра их собственных частот колебаний, но и оптимизация параметров пакета композиционного материала. Это позволит повысить эксплуатационные характеристики изделия за счет незначительного изменения исходной геометрии.

С целью получения новых качественных и количественных закономерностей о собственных частотах колебаний композитных эллиптических цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, в данной статье сформулирована математическая постановка задачи и представлен соответствующий ей конечно-элементный алгоритм.



1. Математическая постановка и численная реализация

При моделировании пространственной тонкостенной оболочки ее криволинейная поверхность аппроксимируется совокупностью плоских сегментов [39]. В каждом из них выполняются соотношения классической теории слоистых пластин [40], согласно которой малые деформации представляются в виде

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}\}^T &= \left\{ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)} \right\}^T + \bar{z} \left\{ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(1)}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(1)}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(1)} \right\}^T, \\ \bar{\varepsilon}^{(0)} &= \left\{ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)} \right\}^T = \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right\}^T, \\ \bar{\varepsilon}^{(1)} &= \left\{ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(1)}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(1)}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(1)} \right\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}, -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}, -2\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}\bar{y}} \right\}^T, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{u}$, $\bar{v}$ и $\bar{w}$ — перемещения точек срединной поверхности сегмента в направлении осей $O\bar{x}$, $O\bar{y}$, $O\bar{z}$ декартовой системы координат $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ (рис. 1, а).

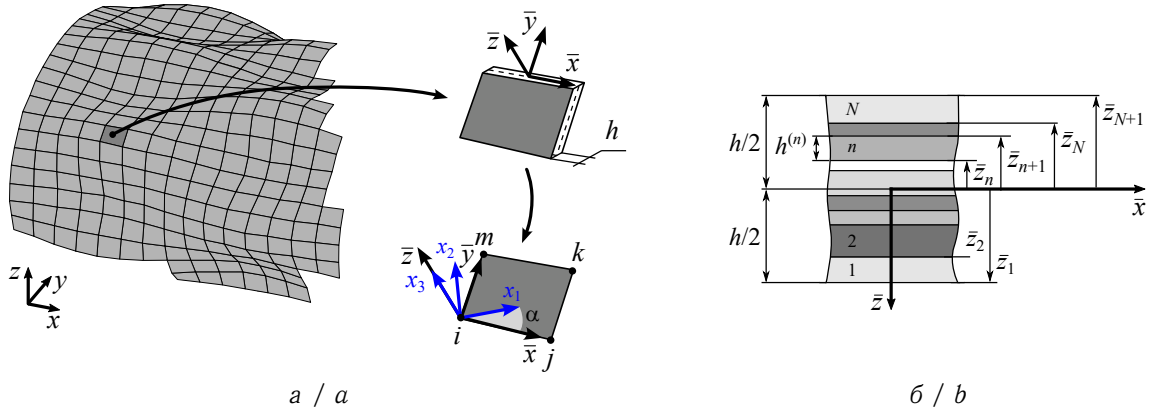


Рис. 1. Оболочка в виде совокупности плоских сегментов (а) и схема расположения слоев (б)
Fig. 1. Shell as an assembly of flat segments (a) and layers layout (b)

Вектор $\bar{\varepsilon}$, содержащий деформации срединной поверхности $\bar{\varepsilon}^{(0)}$ и кривизны $\bar{\varepsilon}^{(1)}$, записывается следующим образом:

$$\bar{\varepsilon} = \left\{ \bar{\varepsilon}^{(0)}, \bar{\varepsilon}^{(1)} \right\}^T = \left\{ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)}, \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(1)}, \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(1)}, \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(1)} \right\}^T. \quad (2)$$

Соотношения упругости, связывающие вектор усилий и моментов $\bar{\mathbf{m}}$ с вектором обобщенных деформаций $\bar{\varepsilon}$, представляются в виде [40, 41]:

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{Bmatrix} N_{\bar{x}\bar{x}} \\ N_{\bar{y}\bar{y}} \\ N_{\bar{x}\bar{y}} \\ M_{\bar{x}\bar{x}} \\ M_{\bar{y}\bar{y}} \\ M_{\bar{x}\bar{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(0)} \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(0)} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(0)} \\ \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}^{(1)} \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}^{(1)} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^{(1)} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \bar{\varepsilon}, \quad (3)$$

где элементы матрицы $\mathbf{S}$ вычисляются с помощью выражений

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(n)} (\bar{z}_n - \bar{z}_{n+1}), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(n)} (\bar{z}_n^2 - \bar{z}_{n+1}^2), \quad (4)$$



$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(n)} (\bar{z}_n^3 - \bar{z}_{n+1}^3), \quad i, j = 1, 2, 6.$$

Коэффициенты матрицы упругих констант $\bar{Q}_{ij}^{(n)}$ ортотропного материала n -го слоя определяются через характеристики материала $Q_{ij}^{(n)}$ в системе координат волокна $Ox_1x_2x_3$ и преобразуются с помощью матрицы поворота $\mathbf{T}$:

$$\bar{\mathbf{Q}}^{(n)} = \mathbf{T}^{(n)} \mathbf{Q}^{(n)} (\mathbf{T}^{(n)})^T, \quad (5)$$

$$\mathbf{Q}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)}, \quad \mathbf{T}^{(n)} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}^{(n)}.$$

Коэффициенты $Q_{ij}^{(n)}$ записываются для каждого n -го слоя материала в терминах инженерных констант [40]:

$$Q_{11}^{(n)} = \frac{E_{11}^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)} \nu_{21}^{(n)}}, \quad Q_{12}^{(n)} = \frac{\nu_{12}^{(n)} E_{22}^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)} \nu_{21}^{(n)}}, \quad Q_{22}^{(n)} = \frac{E_{22}^{(n)}}{1 - \nu_{12}^{(n)} \nu_{21}^{(n)}}, \quad Q_{66}^{(n)} = G_{12}^{(n)}, \quad (6)$$

где $E_{11}^{(n)}$ и $E_{22}^{(n)}$ — модули упругости материала в направлении осей координат Ox_1 и Ox_2 , $\nu_{ij}^{(n)}$ — коэффициенты Пуассона, $G_{12}^{(n)}$ — модуль сдвига в плоскости Ox_1x_2 (см. рис. 1, а).

Математическая постановка задачи о собственных колебаниях пространственной оболочки с жидкостью основана на вариационном принципе возможных перемещений, который записывается в матричном виде с учетом работы сил инерции:

$$\int_{S_s} \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{S} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dS + \int_{S_s} \delta \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{J} \ddot{\bar{\mathbf{d}}} dS - \int_{S_\sigma} \delta \bar{w} p dS = 0. \quad (7)$$

Здесь S_s — поверхность оболочки объема V_s ; $\bar{\mathbf{d}} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \theta_{\bar{x}}, \theta_{\bar{y}}, \theta_{\bar{z}}\}^T$ — вектор обобщенных перемещений, включающий углы поворота $\theta_{\bar{x}}, \theta_{\bar{y}}, \theta_{\bar{z}}$ относительно соответствующих осей системы координат $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$; S_σ — часть поверхности оболочки, которая взаимодействует с жидкостью; p — гидродинамическое давление жидкости; $\mathbf{J}$ — матрица инерции вида

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & 0 & -J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_0 & 0 & 0 & -J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_0 & 0 & 0 & -J_1 \\ -J_1 & 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & -J_1 & 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & -J_1 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix},$$

$$J_0 = \sum_{n=1}^N \rho_s^{(n)} (\bar{z}_n - \bar{z}_{n+1}), \quad J_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \rho_s^{(n)} (\bar{z}_n^2 - \bar{z}_{n+1}^2), \quad J_2 = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \rho_s^{(n)} (\bar{z}_n^3 - \bar{z}_{n+1}^3),$$

где $\rho_s^{(n)}$ — плотность n -го слоя материала оболочки.

Динамика идеальной жидкости в случае малых возмущений описывается в рамках акустического приближения. Соответствующее волновое уравнение формулируется относительно гидродинамического давления p и преобразуется к слабой форме вместе с граничными условиями и условием непроницаемости на смоченной поверхности S_σ [42]:

$$\int_{V_f} \delta p \left(\frac{1}{c^2} \ddot{p} + \nabla^T \nabla p \right) dV + \rho_f \int_{S_\sigma} \delta p \ddot{w} dS = 0, \quad (8)$$



где V_f — объем, занимаемый жидкостью; c — скорость звука в жидкости; ρ_f — плотность жидкости.

При решении уравнения (8) используются следующие граничные условия:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{z=0} = 0, \quad p|_{z=L} = 0, \quad (9)$$

где L — длина оболочки.

Применяя известные процедуры метода конечных элементов и представляя движение конструкции и жидкости в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{\mathbf{d}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t)\}^T = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad (10)$$

где $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \{\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{x}), \tilde{p}(\mathbf{x})\}^T$ — функция, зависящая только от координат $\mathbf{x}$, i — мнимая единица, ω — собственная частота колебаний, t — время, получим обобщенную задачу на собственные значения:

$$(-\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 \\ \rho_f \mathbf{Q}^T & \mathbf{M}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & -\mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{K}_f \end{bmatrix}.$$

Типовые матрицы масс $\mathbf{M}$, жесткости $\mathbf{K}$ и гидроупругого взаимодействия $\mathbf{Q}$ для каждого конечного элемента определяются следующим образом:

$$\bar{\mathbf{M}}_s^e = \int_{S_s^e} \mathbf{N}^T \mathbf{J} \mathbf{N} dS, \quad \bar{\mathbf{K}}_s^e = \int_{S_s^e} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B} dS, \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_f^e = \int_{V_f^e} \frac{1}{c^2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV, \quad \mathbf{K}_f^e = \int_{V_f^e} (\nabla \mathbf{F})^T \nabla \mathbf{F} dV, \quad \bar{\mathbf{Q}}^e = \int_{S_\sigma^e} \mathbf{N}_w^T \mathbf{F} dS,$$

где $\mathbf{F}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_w$ — матрица функций формы для давления жидкости p , вектора обобщенных перемещений оболочки $\bar{\mathbf{d}}$ и его нормальной составляющей $\bar{w}$; $\mathbf{B}$ — матрица, связывающая вектор обобщенных деформаций $\bar{\epsilon}$ с узловыми значениями вектора обобщенных перемещений.

Матрицы $\bar{\mathbf{M}}_s^e$, $\bar{\mathbf{K}}_s^e$ и $\bar{\mathbf{Q}}^e$ формируются в системе координат $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, связанной с боковой поверхностью конструкции. Их преобразование к глобальным декартовым координатам $Oxyz$ осуществляется для каждого конечного элемента с помощью матрицы, содержащей направляющие косинусы, известным образом [42]. Оболочка представляется в виде совокупности прямоугольных сегментов, в которых мембранные перемещения $\bar{u}$ и $\bar{v}$ описываются с использованием билинейных функций формы Лагранжа. Изгибные перемещения $\bar{w}$, углы поворота $\theta_{\bar{x}}$ и $\theta_{\bar{y}}$ аппроксимируются несовместными кубическими полиномами Эрмита [42]. Дискретизация области жидкости осуществляется с использованием 8-узловых конечных элементов в форме призмы с билинейной аппроксимацией гидродинамического давления p .

Численная реализация приведенной выше постановки выполнена в среде MATLAB с привлечением возможностей пакета ANSYS для создания конечно-элементной сетки. Задача на собственные значения (11) решается с использованием неявно перезапускаемого метода Арнольди [43]. Более подробно особенности конечно-элементного алгоритма изложены в статьях авторов, посвященных изотропным оболочкам [32, 33, 44].

2. Верификация численного алгоритма

Достоверность получаемых численных результатов подтверждена асимптотическим поведением решения при увеличении числа узловых неизвестных и сравнением с работами других авторов, посвященными конструкциям из слоистого композиционного материала.



Пример 1. Рассмотрена задача о собственных колебаниях трехслойной круговой цилиндрической оболочки без жидкости. Характеристики пакета с углами намотки $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ и геометрические параметры конструкции принимались аналогично работе [45]: $E_{11} = 25E_{22}$, $E_{22} = 2$ ГПа, $G_{12} = 0.5E_{22}$, $\nu_{12} = 0.25$, $\rho_s = 1500$ кг/м³, радиус $R = 1$ м, длина $L = 5R$, толщина $h = R/20$. Результаты, полученные для разных вариантов закрепления, приведены в табл. 1. Они согласуются с данными из публикаций [45–47] в пределах относительной погрешности 1%. При обозначении граничных условий на краях оболочки используются следующие сокращения: F — свободный край, C — жесткая заделка ($u = v = w = 0$, $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$), SD — ($v = w = 0$, $\theta_x = 0$). Безразмерные собственные частоты колебаний Ω вычислялись по выражению

$$\Omega = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_s}{E_{22}}}. \quad (13)$$

Таблица 1 / Table 1

Безразмерные собственные частоты колебаний круговых цилиндрических оболочек, выполненных из трехслойного композиционного материала $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Dimensionless natural frequencies of vibration of circular cylindrical shells made of three-layer composite material $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

j	C–C				SD–C			SD–F	
	МКЭ	[45]	[46]	[47]	МКЭ	[46]	[47]	МКЭ	[47]
1	159.19	159.45	159.44	159.31	153.72	153.83	153.77	211.18	211.13
2	107.56	107.90	107.89	107.71	98.61	98.78	98.70	26.89	27.04
3	107.87	108.12	108.11	108.05	100.77	100.91	100.95	75.25	75.31
4	156.77	156.96	156.95	157.23	152.90	153.03	153.40	143.02	143.07
5	236.57	236.77	236.76	237.70	234.42	234.58	235.59	229.17	229.27

Пример 2. В расчетах используется пакет из четырех слоев $[\alpha/-\alpha/-\alpha/\alpha]$ с разными углами намотки α : $R = 1$ м, $L/R = 4$, $R/h = 100$, $E_{11} = 20E_{22}$, $E_{22} = 10$ ГПа, $G_{12} = 0.65E_{22}$, $\nu_{12} = 0.25$, $\rho_s = 1500$ кг/м³. В табл. 2 представлены данные, полученные для третьей гармоники в окружном направлении ($j = 3$), где m — число полуволн по длине оболочки. Относительное различие полученных результатов от значений из работ [46] и [48] составляет менее 1%. Безразмерные собственные частоты колебаний Ω вычислялись следующим образом:

$$\Omega = \omega R \sqrt{\rho_s/E_{22}}. \quad (14)$$

Таблица 2 / Table 2

Безразмерные собственные частоты колебаний круговых цилиндрических оболочек из композиционного материала с разными углами намотки $[\alpha/-\alpha/-\alpha/\alpha]$

Dimensionless natural frequencies of vibration of circular cylindrical shells made of composite material with various angles of ply $[\alpha/-\alpha/-\alpha/\alpha]$

$\alpha,^\circ$	m	C–C			SD–SD		
		МКЭ	[46]	[48]	МКЭ	[46]	[48]
15	1	0.28939	0.28949	0.28948	0.21233	0.21239	0.21237
	4	0.86355	0.86438	0.86382	0.85596	0.85660	0.85610
30	1	0.32880	0.32932	0.32939	0.17523	0.17540	0.17534
	4	1.20162	1.20840	1.20290	1.20042	1.20380	1.20060
45	1	0.23738	0.23843	0.23808	0.11915	0.11953	0.11938
	4	1.66625	1.66810	1.66720	1.64987	1.65050	1.65010
65	1	0.17681	0.17776	0.17749	0.11032	0.11078	0.11049
	4	1.18182	1.18570	1.18390	1.04918	1.04940	1.04930



3. Численные результаты

В ходе серии расчетов проанализировано влияние профиля поперечного сечения на собственные частоты колебаний цилиндрической оболочки, содержащей жидкость и изготовленной из слоистого композиционного материала. Использованы параметры, аналогичные примеру 2. Поперечное сечение представляет собой эллипс с отношением полуосей $\beta = R_{\max}/R_{\min}$. При изменении величины β значения $R_{\max}$ и $R_{\min}$ выбираются таким образом, чтобы площадь поперечного сечения оставалась неизменной и была равной площади круга радиуса R .

По результатам вычислений построены зависимости относительного изменения низшей собственной частоты колебаний $\Delta\omega$ как функции от угла намотки α и отношения полуосей эллипса β . Параметры α и β изменялись с шагами 1.8° и 0.01 соответственно. Полученные для отношений $L/R = 4$ и $L/R = 10$ изоповерхности приведены на рис. 2 и 3 при разных условиях закрепления оболочки.

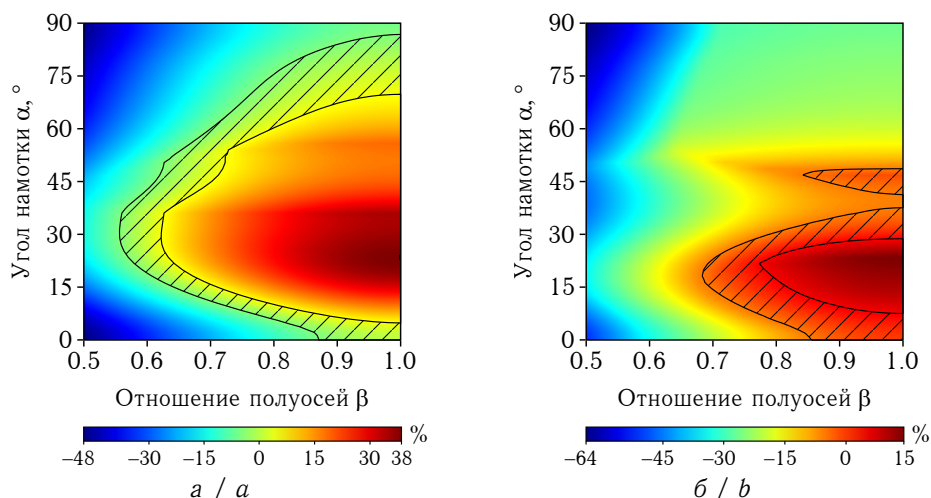


Рис. 2. Изменение низшей собственной частоты колебаний композитной эллиптической цилиндрической оболочки с жидкостью (C-C): $a - L/R = 4$, $b - L/R = 10$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Changing of the lowest natural vibration frequency of composite elliptical cylindrical shell (C-C): $a - L/R = 4$, $b - L/R = 10$ (color online)

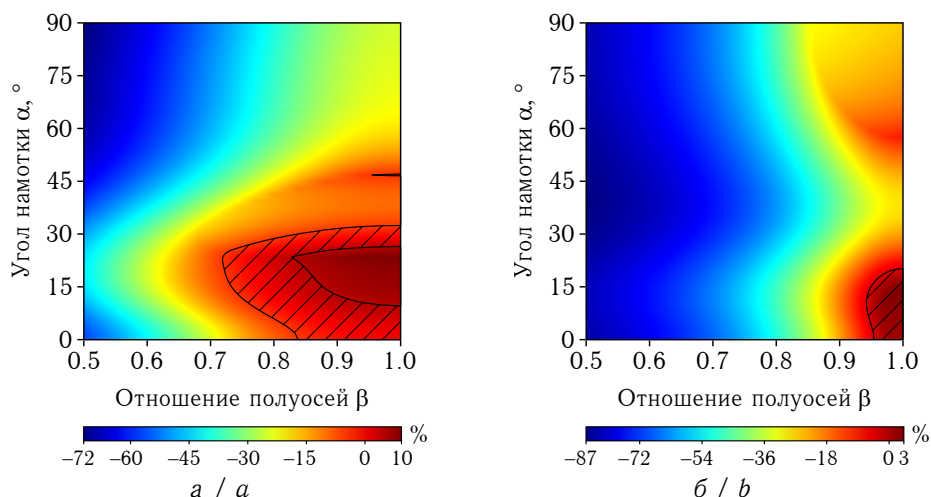


Рис. 3. Изменение низшей собственной частоты колебаний композитной эллиптической цилиндрической оболочки с жидкостью (C-F): $a - L/R = 4$, $b - L/R = 10$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Changing of the lowest natural vibration frequency of composite elliptical cylindrical shell (C-F): $a - L/R = 4$, $b - L/R = 10$ (color online)

Величина $\Delta\omega(\alpha, \beta)$ определялась выражением

$$\Delta\omega_i = (\omega_i - \omega_i^*)/\omega_i^*, \quad (15)$$

где ω_i^* — i -я собственная частота колебаний, полученная при $\alpha = 0^\circ$ и $\beta = 1$.

С уменьшением параметра эллиптичности β собственные частоты колебаний оболочек снижаются. Сохранить их значение на прежнем уровне можно, подбирая угол намотки слоев композиционного материала. Это хорошо удается для коротких жестко закрепленных на обоих краях оболочек, где зона положительных значений $\Delta\omega$ достаточно обширна (см. рис. 2, а).

В демонстрационных целях на рис. 2 и 3 заштрихована область, которая соответствует значениям параметров α и β , обеспечивающих изменение частоты $\Delta\omega$ в пределах $\pm 5\%$. Видно, что эффективность такого способа управления частотой снижается с увеличением длины конструкции, особенно если она консольно закреплена (см. рис. 3, б).

На рис. 4 представлены срезы изоповерхностей $\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_3$, $\Delta\omega_5$, полученные при $\beta = 1$ и $\beta = 0.75$. Кривые демонстрируют сильно выраженное немонотонное поведение, которое обусловлено изменением формы колебаний, соответствующей i -й частоте. Данная особенность также наблюдается при других вариантах закрепления и геометрических размерах. Более того, она сохраняется и при отсутствии жидкости внутри оболочки. О подобном поведении собственных частот упоминалось ранее в работе [33], где рассматривались изотропные конструкции.

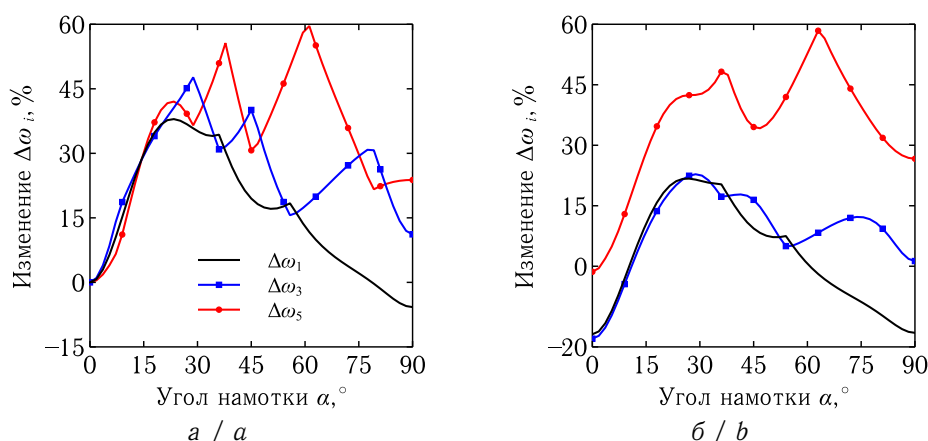


Рис. 4. Изменение собственных частот колебаний эллиптической цилиндрической оболочки с жидкостью (C-C, $L/R = 4$): а — $\beta = 1$, б — $\beta = 0.75$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Changing of natural vibration frequencies of composite elliptical cylindrical shell (C-C, $L/R = 4$): а — $\beta = 1$, б — $\beta = 0.75$ (color online)

Уменьшение параметра эллиптичности приводит к снижению собственных частот колебаний. Это объясняется тем, что часть конструкции с большим радиусом кривизны имеет меньшую жесткость. Она работает на изгиб подобно полой оболочке или пластине, шарнирно закрепленной вдоль двух сторон. Полученные зависимости носят немонотонный характер, поэтому необходимо использовать методы глобальной оптимизации при подборе параметров и схемы укладки композиционного материала, обеспечивающих требуемые динамические характеристики.

Заключение

С использованием разработанного конечно-элементного алгоритма проанализировано влияние параметра эллиптичности поперечного сечения на собственные частоты колебаний цилиндрической оболочки, содержащей жидкость и изготовленной из слоистого композиционного материала. Показано, что с уменьшением отношения полуосей эллипса собственные



частоты колебаний оболочки падают. По результатам вычислений построены зависимости относительного изменения собственных частот колебаний как функции от угла намотки и отношения полуосей эллипса. Оценено влияние кинематических граничных условий, задаваемых на краях оболочки. Продемонстрирована возможность управления спектром собственных частот колебаний конструкции путем подбора угла намотки слоев композиционного материала. Показано, что эффективность данного механизма управления снижается с увеличением длины оболочки.

Список литературы

1. Yao J. C., Jenkins W. C. Buckling of elliptic cylinders under normal pressure // AIAA Journal. 1970. Vol. 8, iss. 1. P. 22–27. <https://doi.org/10.2514/3.5600>
2. Sewall J. L., Pusey C. G. Vibration study of clamped-free elliptical cylindrical shells // AIAA Journal. 1971. Vol. 9, iss. 6. P. 1004–1011. <https://doi.org/10.2514/3.6324>
3. Andreev L. V., Antsiferov A. V., Kucherenko V. M., Pavlenko I. D. Regions of stability of elliptical cylinders under loading by static and impulsive external pressure // Strength of Materials. 1985. Vol. 17. P. 1606–1609. <https://doi.org/10.1007/BF01529952>
4. Heck O. S. The Stability of Orthotropic Elliptic Cylinders in Pure Bending. NACA-TM-834, 1937. 33 p.
5. Marguerre K. Stability of the Cylindrical Shell of Variable Curvature. NACA-TM-1302, 1951. 64 p.
6. Culberson L. D., Boyd D. E. Free vibrations of freely supported oval cylinders // AIAA Journal. 1971. Vol. 9, iss. 8. P. 1474–1480. <https://doi.org/10.2514/3.6388>
7. Shirakawa K., Morita M. Vibration and buckling of cylinders with elliptical cross section // Journal of Sound and Vibration. 1982. Vol. 84, iss. 1. P. 121–131. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(82\)90436-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(82)90436-9)
8. Soldatos K. P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: A survey // Applied Mechanics Reviews. 1999. Vol. 52. P. 237–274. <https://doi.org/10.1115/1.3098937>
9. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Composite Structures. 2010. Vol. 93, iss. 1. P. 14–31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>
10. Qatu M., Asadi E., Wang W. Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000–2010 // Open Journal of Composite Materials. 2012. Vol. 2, iss. 3. P. 61–86. <https://doi.org/10.4236/ojcm.2012.23009>
11. Sutar P., Mujawar A., Chougule R. Vibrational analysis of composite laminated shell: A review // AIP Conference Proceedings. 2023. Vol. 2716, iss. 1. Art. 040008. <https://doi.org/10.1063/5.0141337>
12. Soldatos K. P. A Flugge-type theory for the analysis of anisotropic laminated non-circular cylindrical shells // International Journal of Solids and Structures. 1984. Vol. 20, iss. 2. P. 107–120. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(84\)90002-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90002-7)
13. Hui D., Du H. Y. Effects of axial imperfections on vibrations of anti-symmetric cross-ply, oval cylindrical shells // Journal of Applied Mechanics. 1986. Vol. 53, iss. 3. P. 675–680. <https://doi.org/10.1115/1.3171830>
14. Kumar V., Singh A. V. Vibration Analysis of non-circular cylindrical shells using Bezier functions // Journal of Sound and Vibration. 1993. Vol. 161, iss. 2. P. 333–354. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1075>
15. Suzuki K., Shikanai G., Leissa A. W. Free vibrations of laminated composite thin non-circular cylindrical shell // Journal of Applied Mechanics. 1994. Vol. 61, iss. 4. P. 861–871. <https://doi.org/10.1115/1.2901569>
16. Kumar V., Singh A. V. Vibrations of composite noncircular cylindrical shells // Journal of Vibration and Acoustics. 1995. Vol. 117, iss. 4. P. 471–476. <https://doi.org/10.1115/1.2874485>
17. Suzuki K., Shikanai G., Leissa A. W. Free vibrations of laminated composite thick non-circular cylindrical shell // International Journal of Solids and Structures. 1996. Vol. 33, iss. 27. P. 4079–4100. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00227-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00227-8)
18. Zhao J., Choe K., Shuai C., Wang A., Wang Q. Free vibration analysis of laminated composite elliptic cylinders with general boundary conditions // Composites Part B: Engineering. 2019. Vol. 158. P. 55–66. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.009>
19. Ganapathi M., Haboussi M. Free vibrations of thick laminated anisotropic non-circular cylindrical shells // Composite Structures. 2003. Vol. 60, iss. 2. P. 125–133. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00339-2](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00339-2)



20. Ganapathi M., Patel B. P., Patel H. G., Pawargi D. S. Vibration analysis of laminated cross-ply oval cylindrical shells // *Journal of Sound and Vibration*. 2003. Vol. 262, iss. 1. P. 65–86. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01025-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01025-8)
21. Patel B. P., Gupta S. S., Loknath M. S., Kadu C. P. Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory // *Composite Structures*. 2005. Vol. 69, iss. 3. P. 259–270. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.07.002>
22. Hayek S. I., Boisvert J. E. Vibration of elliptic cylindrical shells: Higher order shell theory // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2010. Vol. 128. P. 1063–1072. <https://doi.org/10.1121/1.3466873>
23. Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M., Dimitri R. Free vibrations of composite oval and elliptic cylinders by the generalized differential quadrature method // *Thin-Walled Structures*. 2015. Vol. 97. P. 114–129. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.08.023>
24. Вильде М. В., Коссович Л. Ю., Шевцова Ю. В. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 56–64. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64>
25. Viola E., Tornabene F., Fantuzzi N. General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels // *Composite Structures*. 2013. Vol. 95. P. 639–666. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.005>
26. Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M. Free vibrations of free-form doubly-curved shells made of functionally graded materials using higher-order equivalent single layer theories // *Composites Part B: Engineering*. 2014. Vol. 67. P. 490–509. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.08.012>
27. Tornabene F. General higher-order layer-wise theory for free vibrations of doubly-curved laminated composite shells and panels // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016. Vol. 23, iss. 9. P. 1046–1067. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1121522>
28. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Finite rotation exact geometry solid-shell element for laminated composite structures through extended SaS formulation and 3D analytical integration // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2019. Vol. 119, iss. 9. P. 948–964. <https://doi.org/10.1002/nme.6075>
29. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Exact geometry four-node solid-shell element for stress analysis of functionally graded shell structures via advanced SaS formulation // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2020. Vol. 27, iss. 12. P. 1046–1067. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1502380>
30. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Exact geometry SaS-based solid-shell element for coupled thermoelectroelastic analysis of smart structures with temperature-dependent material properties // *Acta Mechanica*. 2023. Vol. 234. P. 163–189. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-03086-2>
31. Лекомцев С. В., Бочкарев С. А. Собственные колебания частично заполненных жидкостью некруговых цилиндрических оболочек с учетом плескания свободной поверхности // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2014. Т. 7, вып. 4. С. 471–480. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.45>
32. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid // *Thin-Walled Structures*. 2015. Vol. 90. P. 12–22. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.01.001>
33. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations and stability of elliptical cylindrical shells containing fluid // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2016. Vol. 16, iss. 10. Art. 1550076. <https://doi.org/10.1142/S0219455415500765>
34. Zhang X., Zhang W. Free bending vibration of elliptical column partially submerged in water // *Applied Mathematics and Mechanics*. 1986. Vol. 7, iss. 9. P. 869–876. <https://doi.org/10.1007/BF01898128>
35. Zhu Y., Weng Z.-Y. Vibration analysis of elliptical column partially submerged in water // *Applied Mathematics and Mechanics*. 1988. Vol. 9, iss. 4. P. 335–346. <https://doi.org/10.1007/BF02456114>
36. Xiang Y., Huang Y. A novel semi-analytical method for solving acoustic radiation from longitudinally stiffened infinite non-circular cylindrical shells in water // *Acta Mechanica Sinica*. 2005. Vol. 18, iss. 1. P. 1–12. <http://dx.doi.org/10.1007/s10338-005-0501-8>
37. Firouz-Abadi R. D., Noorian M. A., Haddadpour H. A fluid-structure interaction model for stability analysis of shells conveying fluid // *Journal of Fluids and Structures*. 2010. Vol. 26. P. 747–763. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2010.04.003>



38. Zhang G. J., Li T. Y., Zhu X., Yang J., Miao Y. Y. Free and forced vibration characteristics of submerged finite elliptic cylindrical shell // *Ocean Engineering*. 2017. Vol. 129. P. 92–106. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.11.014>
39. Zienkiewicz O. C. *Finite Element Method in Engineering Science*. London : McGraw-Hill, 1971. 521 p.
40. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd ed. Boca Raton : CRC Press, 2004. 858 p. <https://doi.org/10.1201/b12409>
41. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1984. 264 с.
42. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. *The Finite Element Method* : in 3 vols. Vol. 2: *Solid Mechanics*. 5th ed. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2000. 459 p.
43. Lehoucq R. B., Sorensen D. C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 1996. Vol. 17, iss. 4. P. 789–821. <https://doi.org/10.1137/S0895479895281484>
44. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells // *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230, iss. 11. P. 3845–3860. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02453-4>
45. Xie X., Jin G., Li W., Liu Z. A numerical solution for vibration analysis of composite laminated conical, cylindrical shell and annular plate structures // *Composite Structures*. 2014. Vol. 111. P. 20–30. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.12.019>
46. Qu Y. G., Long X. H., Wu S. H., Meng G. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia // *Composite Structures*. 2013. Vol. 98. P. 169–191. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.001>
47. Messina A., Soldatos K. P. Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions // *Journal of Sound and Vibration*. 1999. Vol. 27, iss. 4. P. 749–768. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2347>
48. Soldatos K. P., Messina A. The influence of boundary conditions and transverse shear on the vibration of angle-ply laminated plates, circular cylinders and cylindrical panels // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2001. Vol. 190, iss. 18–19. P. 2385–2409. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00242-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00242-5)

References

1. Yao J. C., Jenkins W. C. Buckling of elliptic cylinders under normal pressure. *AIAA Journal*, 1970, vol. 8, iss. 1, pp. 22–27. <https://doi.org/10.2514/3.5600>
2. Sewall J. L., Pusey C. G. Vibration study of clamped-free elliptical cylindrical shells. *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, iss. 6, pp. 1004–1011. <https://doi.org/10.2514/3.6324>
3. Andreev L. V., Antsiferov A. V., Kucherenko V. M., Pavlenko I. D. Regions of stability of elliptical cylinders under loading by static and impulsive external pressure. *Strength of Materials*, 1985, vol. 17, pp. 1606–1609. <https://doi.org/10.1007/BF01529952>
4. Heck O. S. *The Stability of Orthotropic Elliptic Cylinders in Pure Bending*. NACA-TM-834, 1937. 33 p.
5. Marguerre K. *Stability of the Cylindrical Shell of Variable Curvature*. NACA-TM-1302, 1951. 64 p.
6. Culberson L. D., Boyd D. E. Free vibrations of freely supported oval cylinders. *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, iss. 8, pp. 1474–1480. <https://doi.org/10.2514/3.6388>
7. Shirakawa K., Morita M. Vibration and buckling of cylinders with elliptical cross section. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, vol. 84, iss. 1, pp. 121–131. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(82\)90436-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(82)90436-9)
8. Soldatos K. P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: A survey. *Applied Mechanics Reviews*, 1999, vol. 52, pp. 237–274. <https://doi.org/10.1115/1.3098937>
9. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009. *Composite Structures*, 2010, vol. 93, iss. 1, pp. 14–31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>
10. Qatu M., Asadi E., Wang W. Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000–2010. *Open Journal of Composite Materials*, 2012, vol. 2, iss. 3, pp. 61–86. <https://doi.org/10.4236/ojcm.2012.23009>
11. Sutar P., Mujawar A., Chougule R. Vibrational analysis of composite laminated shell: A review. *AIP Conference Proceedings*, 2023, vol. 2716, iss. 1, art. 040008. <https://doi.org/10.1063/5.0141337>



12. Soldatos K. P. A Flugge-type theory for the analysis of anisotropic laminated non-circular cylindrical shells. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, vol. 20, iss. 2, pp. 107–120. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(84\)90002-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(84)90002-7)
13. Hui D., Du H. Y. Effects of axial imperfections on vibrations of anti-symmetric cross-ply, oval cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics*, 1986, vol. 53, iss. 3, pp. 675–680. <https://doi.org/10.1115/1.3171830>
14. Kumar V., Singh A. V. Vibration Analysis of non-circular cylindrical shells using Bezier functions. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, vol. 161, iss. 2, pp. 333–354. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1075>
15. Suzuki K., Shikanai G., Leissa A. W. Free vibrations of laminated composite thin non-circular cylindrical shell. *Journal of Applied Mechanics*, 1994, vol. 61, iss. 4, pp. 861–871. <https://doi.org/10.1115/1.2901569>
16. Kumar V., Singh A. V. Vibrations of composite noncircular cylindrical shells. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1995, vol. 117, iss. 4, pp. 471–476. <https://doi.org/10.1115/1.2874485>
17. Suzuki K., Shikanai G., Leissa A. W. Free vibrations of laminated composite thick non-circular cylindrical shell. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, vol. 33, iss. 27, pp. 4079–4100. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00227-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00227-8)
18. Zhao J., Choe K., Shuai C., Wang A., Wang Q. Free vibration analysis of laminated composite elliptic cylinders with general boundary conditions. *Composites Part B: Engineering*, 2019, vol. 158, pp. 55–66. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.009>
19. Ganapathi M., Haboussi M. Free vibrations of thick laminated anisotropic non-circular cylindrical shells. *Composite Structures*, 2003, vol. 60, iss. 2, pp. 125–133. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00339-2](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00339-2)
20. Ganapathi M., Patel B. P., Patel H. G., Pawargi D. S. Vibration analysis of laminated cross-ply oval cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, vol. 262, iss. 1, pp. 65–86. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01025-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01025-8)
21. Patel B. P., Gupta S. S., Loknath M. S., Kadu C. P. Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory. *Composite Structures*, 2005, vol. 69, iss. 3, pp. 259–270. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.07.002>
22. Hayek S. I., Boisvert J. E. Vibration of elliptic cylindrical shells: Higher order shell theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2010, vol. 128, pp. 1063–1072. <https://doi.org/10.1121/1.3466873>
23. Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M., Dimitri R. Free vibrations of composite oval and elliptic cylinders by the generalized differential quadrature method. *Thin-Walled Structures*, 2015, vol. 97, pp. 114–129. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.08.023>
24. Wilde M. V., Kossovich L. Yu., Shevtsova Y. V. Asymptotic integration of dynamic elasticity theory equations in the case of multilayered thin shell. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 56–64 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64>
25. Viola E., Tornabene F., Fantuzzi N. General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels. *Composite Structures*, 2013, vol. 95, pp. 639–666. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.005>
26. Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M. Free vibrations of free-form doubly-curved shells made of functionally graded materials using higher-order equivalent single layer theories. *Composites Part B: Engineering*, 2014, vol. 67, pp. 490–509. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.08.012>
27. Tornabene F. General higher-order layer-wise theory for free vibrations of doubly-curved laminated composite shells and panels. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2016, vol. 23, iss. 9, pp. 1046–1067. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1121522>
28. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Finite rotation exact geometry solid-shell element for laminated composite structures through extended SaS formulation and 3D analytical integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2019, vol. 119, iss. 9, pp. 948–964. <https://doi.org/10.1002/nme.6075>
29. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Exact geometry four-node solid-shell element for stress analysis of functionally graded shell structures via advanced SaS formulation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2020, vol. 27, iss. 12, pp. 1046–1067. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1502380>
30. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Exact geometry SaS-based solid-shell element for coupled thermoelectroelastic analysis of smart structures with temperature-dependent material properties.



- Acta Mechanica*, 2023, vol. 234, pp. 163–189. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-03086-2>
31. Lekomtsev S. V., Bochkarev S. A. Natural vibrations of non-circular cylindrical shells partially filled with fluid with sloshing of free surface. *Computational Continuum Mechanics*, 2014. vol. 7, iss. 4, pp. 471–480 (in Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.45>
 32. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid. *Thin-Walled Structures*, 2015, vol. 90, pp. 12–22. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.01.001>
 33. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations and stability of elliptical cylindrical shells containing fluid. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2016, vol. 16, iss. 10, art. 1550076. <https://doi.org/10.1142/S0219455415500765>
 34. Zhang X., Zhang W. Free bending vibration of elliptical column partially submerged in water. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1986, vol. 7, iss. 9, pp. 869–876. <https://doi.org/10.1007/BF01898128>
 35. Zhu Y., Weng Z.-Y. Vibration analysis of elliptical column partially submerged in water. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, vol. 9, iss. 4, pp. 335–346. <https://doi.org/10.1007/BF02456114>
 36. Xiang Y., Huang Y. A novel semi-analytical method for solving acoustic radiation from longitudinally stiffened infinite non-circular cylindrical shells in water. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2005, vol. 18, iss. 1, pp. 1–12. <http://dx.doi.org/10.1007/s10338-005-0501-8>
 37. Firouz-Abadi R. D., Noorian M. A., Haddadpour H. A fluid–structure interaction model for stability analysis of shells conveying fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 2010, vol. 26, pp. 747–763. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2010.04.003>
 38. Zhang G. J., Li T. Y., Zhu X., Yang J., Miao Y. Y. Free and forced vibration characteristics of submerged finite elliptic cylindrical shell. *Ocean Engineering*, 2017, vol. 129, pp. 92–106. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.11.014>
 39. Zienkiewicz O. C. *Finite Element Method in Engineering Science*. London, McGraw-Hill, 1971. 521 p.
 40. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2004. 858 p. <https://doi.org/10.1201/b12409>
 41. Alfutov N. A., Zinov'ev P. A., Popov B. G. *Raschet mnogosloynnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of Layered Plates and Shells Made of Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie Publishers, 1984. 264 p. (in Russian).
 42. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. *The Finite Element Method. Vol. 2: Solid Mechanics*. 5th ed. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000. 459 p.
 43. Lehoucq R. B., Sorensen D. C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1996, vol. 17, iss. 4, pp. 789–821. <https://doi.org/10.1137/S0895479895281484>
 44. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells. *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, iss. 11, pp. 3845–3860. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02453-4>
 45. Xie X., Jin G., Li W., Liu Z. A numerical solution for vibration analysis of composite laminated conical, cylindrical shell and annular plate structures. *Composite Structures*, 2014, vol. 111, pp. 20–30. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.12.019>
 46. Qu Y. G., Long X. H., Wu S. H., Meng G. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia. *Composite Structures*, 2013, vol. 98, pp. 169–191. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.001>
 47. Messina A., Soldatos K. P. Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol. 27, iss. 4, pp. 749–768. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2347>
 48. Soldatos K. P., Messina A. The influence of boundary conditions and transverse shear on the vibration of angle-ply laminated plates, circular cylinders and cylindrical panels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, vol. 190, iss. 18–19, pp. 2385–2409. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00242-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00242-5)

Поступила в редакцию / Received 30.11.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 86–96

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 86–96
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-86-96>, EDN: RKHCCU

Научная статья

УДК 534/539

О влиянии поверхностных напряжений и инерции на собственные низкочастотные колебания упругой ультратонкой полосы-балки

Г. И. Михасев^{1✉}, Н. Д. Ле²

¹Харбинский политехнический университет, Китай, 150001, г. Харбин, ул. Вест Дажу, д. 92

²Белорусский государственный университет, Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, д. 4

Михасев Геннадий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор Международного центра прикладной механики, Школа астронавтики, mikhasev@hit.edu.cn, <https://orcid.org/0000-0002-9409-9210>, AuthorID: 385995

Ле Нгуен Динь, аспирант кафедры био- и наномеханики, dinhnguyen081017@gmail.com

Аннотация. Выведено дифференциальное уравнение, описывающее свободные длинноволновые колебания низкоразмерной упругой изотропной полосы-балки с учетом эффектов на свободных поверхностях. Граничные условия на внешних поверхностях формулируются в рамках теории упругости Гуртина – Мурдоха, которая учитывает поверхностные инерцию и касательные напряжения, включая остаточные. Вводятся дополнительные геометрические размеры, ассоциированные с лицевыми поверхностями, которые предполагаются малыми по сравнению с основным геометрическим размером — длиной волны. В качестве основного малого параметра рассматривается отношение толщины ультратонкой полосы к длине волны изгибных колебаний. Методом асимптотического интегрирования двумерных уравнений теории упругости по толщине полосы-балки в явном виде получены соотношения для перемещений и напряжений в объеме полосы. Основным результатом работы является дифференциальное уравнение низкочастотных колебаний балки, которое учитывает поверхностные эффекты и обобщает хорошо известные уравнения теории балок. Показано, что наличие поверхностных напряжений приводит к увеличению собственных частот из нижнего спектра, в то время как учет поверхностной инерции, равно как и поперечных сдвигов в объеме, влечет снижение частот.

Ключевые слова: ультратонкая полоса-балка, поверхностная упругость, длинноволновая асимптотика, собственные частоты

Для цитирования: Михасев Г. И., Ле Н. Д. О влиянии поверхностных напряжений и инерции на собственные низкочастотные колебания упругой ультратонкой полосы-балки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 86–96. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-86-96>, EDN: RKHCCU

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On the influence of surface stresses and inertia on the natural low-frequency vibrations of an elastic ultrathin strip-beam

G. I. Mikhasev^{1✉}, N. D. Le²

¹Harbin Institute of Technology, 92 West Dazhi St., Harbin 150001, China

²Belarusian State University, 4 Nezavisimosti Ave., Minsk 220030, Belarus

Gennadi I. Mikhasev, mikhasev@hit.edu.cn, <https://orcid.org/0000-0002-9409-9210>, AuthorID: 385995

Nguyen D. Le, dinhnguyen081017@gmail.com



Abstract. A differential equation is derived that describes free long-wave vibrations of a low-dimensional elastic isotropic strip-beam, taking into account effects on free surfaces. Boundary conditions on external surfaces are formulated within the framework of the Gurtin – Murdoch surface theory of elasticity, which takes into account surface inertia and shear stresses, including residual ones. Additional geometric dimensions are introduced, associated with the face surfaces, which are assumed to be small compared to the main geometric dimension — the wavelength. The ratio of the thickness of the ultrathin strip to the wavelength of bending vibrations is considered as the main small parameter. Using the method of asymptotic integration of two-dimensional equations of the theory of elasticity over the thickness of the strip-beam, relations for displacements and stresses in the volume of the strip were obtained in explicit form. The main result of the paper is a differential equation for low-frequency vibrations of a beam, which takes into account surface effects and generalizes the well-known equations of beam theory. It is shown that the presence of surface stresses leads to an increase in natural frequencies from the lower spectrum, while taking into account surface inertia, as well as transverse shears in volume, leads to a decrease in frequencies.

Keywords: ultrathin strip-beam, surface elasticity, long-wave asymptotics, natural frequencies

For citation: Mikhasev G. I., Le N. D. On the influence of surface stresses and inertia on the natural low-frequency vibrations of an elastic ultrathin strip-beam. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 86–96 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-86-96>, EDN: RKHCCU

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Миниатюризация упругих балок и пластин как сенсорных элементов всевозможных МЭМС и НЭМС [1–3] делает актуальной задачу корректного моделирования механического поведения ультратонких упругих тел с учетом размерных эффектов. Экспериментальные исследования [4], а также теоретические работы, использующие законы термодинамики и методы атомистического моделирования [5–7], показали, что эффективные упругие свойства нанобалок и нанопластин сильно зависят от их размеров, что требует существенной модификации классической механики. Среди всевозможных подходов, учитывающих внутренний масштаб упругих микро- и нанообъектов, заметное место занимает модель поверхностной упругости Гуртина – Мурдоха [8]. Их использование при решении различных задач механики позволило получить ряд принципиально новых результатов (см. обзорную статью [9]). В частности, учет поверхностной энергии выявил существование антиплоских поверхностных волн с экспоненциальным [10–12] и гармоническим законами [13, 14] изменения амплитуды волн по толщине наноразмерного упругого слоя. Поверхностная теория упругости оказалась также очень эффективной для анализа наноструктурированных материалов. Так, в работах [9, 15] было показано, что эффективные свойства таких материалов существенно зависят от поверхностных модулей упругости. Также учет поверхностных напряжений выявил значительные изменения в распределении полей напряжений и перемещений в окрестности геометрических сингулярностей, таких как трещины [16].

Модели ультратонких балок и пластин на основе поверхностной теории упругости Гуртина – Мурдоха [8] предлагались разными авторами [17–21]. В первую очередь, отметим работы Лима и Хе [17], а также Лу и Хе [18], которые, по-видимому, первыми вывели модифицированные уравнения для пластин, соответствующие как классической теории Кирхгофа, так и теории первого порядка типа Миндлина. В основу своих моделей они положили гипотезы о линейном распределении нормальных напряжений по толщине пластины с учетом наличия касательных поверхностных напряжений и ненулевых проекций остаточных напряжений на нормаль к срединной поверхности. Вводя гипотезы о нелинейном распределении касательных напряжений, но основываясь на градиентной теории упругости, авторы статей [19, 21] предложили модели для нанопластин и нанобалок. Уравнения третьего порядка, предполагающие



кубический закон распределения напряжений сдвига по толщине пластины и учитывающие наличие касательных напряжений на поверхности, получены в [20]. Отмечая существенный вклад упомянутых исследований в построение моделей низкоразмерных балок и пластин с учетом поверхностных эффектов, все же отметим, что подходы, основанные на введении кинематических гипотез, сужают рамки применимости этих моделей, ибо не отражают реального распределения напряжений по толщине ультратонкого упругого тела.

Значительный вклад в развитие теории тонкостенных оболочек с учетом поверхностной энергии сделан авторами работ [22, 23]. В частности, Альтенбахом и Еремеевым [22] предложена модель нанооболочки, основанная на теории Коссера и учитывающая наличие поверхностных напряжений. Уравнения физического состояния, обобщающие уравнения Гуртина – Мурдоха, получены в работе [23], а также изучено влияние поверхностной вязкоупругости на эффективные свойства наноразмерных тонкостенных структур.

Не претендуя на полноту анализа работ по теме статьи, заметим, что во всех исследованиях отмечается, что учет поверхностных напряжений приводит к существенному перераспределению, в первую очередь, касательных напряжений по толщине ультратонкого объекта. Однако данные качественно правильные выводы делаются в основном в результате реализации моделей, которые априори строятся на основе принимаемых гипотез о распределении нормальных напряжений и тангенциальных перемещений. Укажем также на отсутствие детального анализа влияния на динамику ультратонких тел таких характеристик, как отношение поверхностных модулей Ламе λ_0, μ_0 и плотности ρ_0 к соответствующим упругим константам и плотности материала в объеме тела.

Цель данной работы: 1) исходя из двумерных уравнений теории упругости, построить асимптотически корректную модель, описывающую распределение полей перемещения и напряжений в ультратонкой полосе-балке при свободных длинноволновых колебаниях с учетом поверхностных эффектов; 2) вывести дифференциальное уравнение, предсказывающее свободные низкочастотные колебания ультратонкой полосы-балки, и выполнить асимптотический анализ влияния относительных характеристик поверхностных упругих констант и плотности на нижний спектр собственных частот.

1. Постановка задачи

Рассмотрим ультратонкую пластинку толщиной h , занимающую область $\mathcal{D} = \{0 \leq x_1 \leq l, 0 \leq x_2 \leq h, |x_3| \leq \infty\}$ и изготовленную из упругого изотропного материала, характеризующегося параметрами Ламе λ, μ и плотностью ρ . В объеме пластинки реализуется плоское деформированное состояние с вектором перемещения $\mathbf{U} = \{U_1, U_2, 0\}$, где компоненты $U_1 = U_1(x_1, x_2, t)$ и $U_2 = U_2(x_1, x_2, t)$ суть функции координат x_1, x_2 и времени t . Лицевые поверхности пластинки покрыты нанопленкой, механические свойства которой в рамках поверхностной теории Гуртина – Мурдоха определяются поверхностными параметрами Ламе $\mu_0^\pm, \lambda_0^\pm$ и поверхностной плотностью $\rho_0^\pm$. Здесь и ниже знаки $+$ и $-$ указывают на принадлежность параметра (либо поверхностных напряжений) верхней и нижней поверхностям соответственно. Далее область $\mathcal{D}$ заменяем ультратонкой полосой-балкой длиной l .

Пусть Ξ_{ij}, E_{ij} — компоненты тензора напряжений и тензора малых деформаций в объеме соответственно, где $i, j = 1, 2$, а $S_{11}^\pm, S_{12}^\pm$ — поверхностные напряжения. С целью исследовать собственные колебания с частотой ω введем разделение переменных

$$\{\Xi_{ij}, E_{ij}, U_i, S_{11}^\pm, S_{12}^\pm\} = \{\sigma_{ij}(x_1, x_2), e_{ij}(x_1, x_2), u_i(x_1, x_2), s_{11}^\pm(x_1), s_{12}^\pm(x_1)\} \cdot e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Уравнения малых колебаний полосы-балки в плоскости x_1x_2 принимают вид

$$\sigma_{ij,j} + \omega^2 \rho u_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (2)$$

где $\sigma_{ij} = \lambda e_{ii} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$, а $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$. Здесь и ниже запятая означает дифференцирование по соответствующей координате, следующей после запятой.



На лицевых поверхностях рассмотрим граничные условия, учитывающие наличие поверхностных напряжений и инерции [8]:

$$\begin{aligned} s_{11,1}^+ - \sigma_{12} + \omega^2 \rho_0^+ u_1 &= 0, & s_{12,1}^+ - \sigma_{22} + \omega^2 \rho_0^+ u_2 &= 0, & \text{при } x_2 = h, \\ s_{11,1}^- + \sigma_{12} + \omega^2 \rho_0^- u_1 &= 0, & s_{12,1}^- + \sigma_{22} + \omega^2 \rho_0^- u_2 &= 0, & \text{при } x_2 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $s_0^\pm$ — остаточные поверхностные напряжения на лицевых поверхностях (при недеформированном состоянии полосы), которые считаем постоянными, не зависящими от x_1 и времени. Тогда в соответствии с законом физического состояния теории упругости Гуртина – Мурдоха поверхностные напряжения в результате деформирования полосы-балки находятся по формулам [8]

$$s_{11}^\pm = s_0^\pm + (\lambda_0^\pm + 2\mu_0^\pm)u_{1,1}^\pm, \quad s_{12}^\pm = s_0^\pm u_{2,1}^\pm, \quad (4)$$

где знаки $\pm$ при производных компонент перемещения означают, что эти производные вычисляются на поверхностях.

Введем дополнительные геометрические размеры, ассоциированные со свободными поверхностями (либо с нанопокрывтием):

$$L_1^\pm = (\lambda_0^\pm + 2\mu_0^\pm)/E, \quad L_2^\pm = s_0^\pm/E, \quad L_3^\pm = \rho_0^\pm/\rho, \quad (5)$$

где через E обозначен модуль Юнга полосы-балки в объеме. В работах [13, 14] показано, что влияние поверхностных напряжений и инерции на скорость антиплоских поверхностных волн сильно зависит от порядка величин (5). Например, для свободной поверхности железа [8, 11] имеют место оценки $L_1 \sim 10^{-11}$ м и $L_3 \sim 10^{-9}$ м, а для железной нанопленки 10^3 Å на стеклянной подложке [11] — $L_1 \sim L_3 \sim 10^{-7}$ м.

Введем следующие асимптотические оценки:

$$L_n^\pm/l = \varepsilon^{\alpha_n} \kappa_n^\pm, \quad n = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где $\varepsilon = h/l$ — малый параметр, $0 < \kappa_n^\pm \sim 1$, а положительные параметры α_n показывают степень малости внутренних геометрических характеристик свободных поверхностей по сравнению с внешним характерным размером (длиной волны/балки). Очевидно, что показатели α_n сильно зависят от материала свободной поверхности, толщины нанопокрывтия и остаточных напряжений. Выбор данных параметров, соответствующих реальной физической задаче, влияет на порядок поверхностных эффектов, которые проявляются в том или ином приближении предлагаемой ниже асимптотической конструкции решения задачи. В нашем случае примем $\alpha_1 = \alpha_3 = 3$ и $\alpha_2 = 5$, что, например, соответствует железной нанопленке 10^3 Å на стеклянной подложке при соответствующем выборе геометрических параметров h, l и остаточных поверхностных напряжений $s_0^\pm$. При этом вторая оценка в (6) при $\alpha_2 = 5$ означает малость остаточного поверхностного напряжения по сравнению с поверхностными параметрами Ламе нанопленки. Другие варианты физически допустимых показателей α_n будут кратко рассмотрены ниже.

Введем безразмерные величины

$$\{x_1, x_2\} = \{lx, hy\}, \quad \{u_1, u_2\} = h \{\varepsilon^{-3}u, \varepsilon^{-4}w\}, \quad \{\sigma_{12}, \sigma_{22}\} = E \{\varepsilon^{-1}\tau, \sigma\}. \quad (7)$$

Выбранные в (7) порядки компонент вектора перемещения и тензора напряжений соответствуют случаю длинноволновых колебаний полосы-балки [24, 25].

С учетом выполненного масштабирования уравнения движения полосы совместно с уравнениями физического состояния переписутся в виде

$$\begin{aligned} w_{,y} &= -\varepsilon^2 c_v u_{,x} + \varepsilon^4 c_3 \sigma, & u_{,y} &= -w_{,x} + \varepsilon^2 c_g \tau, \\ \tau_{,y} &= -c_0 u_{,xx} - \varepsilon^2 c_v \sigma_{,x} - \varepsilon^2 \omega^2 \omega_*^{-2} u, & \sigma_{,y} &= -\tau_{,x} - \omega^2 \omega_*^{-2} w, \end{aligned} \quad (8)$$



где

$$c_0 = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{E(\lambda + 2\mu)}, \quad c_v = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad c_g = \frac{E}{\mu}, \quad c_3 = \frac{E}{\lambda + 2\mu}, \quad \omega_*^2 = \frac{\varepsilon^4 E}{h^2 \rho}, \quad (9)$$

а граничные условия на свободных поверхностях принимают вид

$$\begin{aligned} \tau &= \pm \varepsilon^2 \left(\kappa_1^\pm u_{,xx} + \varepsilon^2 \frac{\omega^2}{\omega_*^2} \kappa_3^\pm u \right) \quad \text{при } y = 1, 0, \\ \sigma &= \pm \varepsilon^2 \left(\kappa_2^\pm w_{,xx} + \frac{\omega^2}{\omega_*^2} \kappa_3^\pm w \right) \quad \text{при } y = 1, 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, мы пришли к краевой задаче (8), (10).

2. Асимптотическое интегрирование краевой задачи

Поставим задачу о выводе соотношений, описывающих динамическое НДС низкоразмерной полосы-балки при изгибных длинноволновых колебаниях вне зависимости от вида граничных условий на ее краях. Решение ищем в виде формальных асимптотических рядов

$$\begin{aligned} w &= w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \dots, \quad u = u_0 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \\ \tau &= \tau_0 + \varepsilon^2 \tau_2 + \dots, \quad \sigma = \sigma_0 + \varepsilon^2 \sigma_2 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Подстановка (11) в (8) и (10) приводит к ряду краевых задач, которые могут быть рассмотрены последовательно. Задача главного (нулевого) приближения является однородной, и ее решение представимо функциями

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{1}{2}(2y - 1)w_{0,x} + a_1 x + a_0, \quad \tau_0 = \frac{1}{2}c_0(y^2 - y)w_{0,xx}, \\ \sigma_0 &= -\frac{1}{12}c_0(2y^3 - 3y^2)w_{0,xxx} - (\omega/\omega_*)^2 y w_0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $w_0(x)$ — решение дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}w_0 \equiv \frac{1}{12}c_0 w_{0,xxxx} - (\omega/\omega_*)^2 w_0 = 0, \quad (13)$$

описывающее свободные изгибные колебания балки в рамках классической теории, основанной на гипотезах Бернулли – Эйлера. Константы a_0, a_1 , фигурирующие в (12), зависят от выбора граничных условий на торцах полосы-балки. Однако если полоса бесконечна либо граничные условия для u и σ_{11} однородны, то $a_0 = a_1 = 0$. Далее константы a_0, a_1 опускаем.

Рассмотрим следующее приближение, порождающее неоднородные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} w_{2,y} &= -c_v u_{0,x}, \quad u_{2,y} = -w_{2,x} + c_g \tau_0, \\ \tau_{2,y} &= -c_0 u_{2,xx} - c_v \sigma_{0,x} - (\omega/\omega_*)^2 u_0, \quad \sigma_{2,y} = -\tau_{2,x} - (\omega/\omega_*)^2 w_2, \end{aligned} \quad (14)$$

а также соответствующие неоднородные граничные условия

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \pm \kappa_1^\pm u_{0,xx} \quad \text{при } y = 1, 0, \\ \sigma_2 &= \pm [\kappa_2^\pm w_{0,xx} + (\omega/\omega_*)^2 \kappa_3^\pm w_0] \quad \text{при } y = 1, 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Интегрируя сначала первое, а затем второе из уравнений (14), находим

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{1}{2}c_v(y^2 - y)w_{0,xx} + w_{20}(x), \\ u_2 &= \frac{1}{12}c_4(2y^3 - 3y^2)w_{0,xxx} - w_{20,x}y + u_{20}(x), \end{aligned} \quad (16)$$

где $c_4 = (3\lambda + 4\mu)/(\lambda + 2\mu)$, а $w_{20}(x), u_{20}(x)$ — новые неизвестные функции.



Интегрируя третье уравнение системы (14) по y и удовлетворяя граничным условиям (15)₁ при $y = 0, 1$, получаем поправку к касательному напряжению

$$\tau_2 = -\frac{c_0}{12}(y^4 - 2y^3 + y)w_0^V - \frac{1}{2}[(\kappa_1^+ - \kappa_1^-)y + \kappa_1^-]w_0''' + \frac{\omega^2 c_0 c_g}{4\omega_*^2}(y^2 - y)w_0' + \frac{c_0}{2}(y^2 - y)w_{20}''', \quad (17)$$

а также неоднородное дифференциальное уравнение относительно u_{20}

$$c_0 u_{20}'' = \frac{c_0}{12}w_0^V + \frac{1}{2}(\kappa_1^+ - \kappa_1^-)w_0''' - \frac{\omega^2}{4\omega_*^2}(2 - c_0 c_g)w_0' + \frac{1}{2}c_0 w_{20}'''. \quad (18)$$

Наконец рассмотрим последнее уравнение системы (14). Подставляя в правую часть найденные выше функции w_2 и τ_2 и затем интегрируя по толщине полосы с учетом граничных условий (15)₂ на лицевых поверхностях, приходим к дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции w_{20}

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{12}w_{20}^{IV} - \frac{\omega^2}{\omega_*^2}w_{20} = -\frac{c_0}{60}w_0^{VI} - \frac{1}{4}(\kappa_1^+ + \kappa_1^-)w_0^{IV} + \\ + \left(\kappa_2^+ + \kappa_2^- - \frac{\omega^2 c_6}{12\omega_*^2} \right) w_0'' + \frac{\omega^2}{\omega_*^2}(\kappa_3^+ + \kappa_3^-)w_0, \end{aligned} \quad (19)$$

а также к поправке для нормального напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \frac{c_0}{120}(2y^5 - 5y^4 + 5y^2)w_0^{VI} + \frac{1}{4}[(\kappa_1^+ - \kappa_1^-)y^2 + 2\kappa_1^- y]w_0^{IV} - \\ - \left[\frac{\omega^2 c_6}{12\omega_*^2}(2y^3 - 3y^2) + \kappa_2^- \right] w_0''' - \frac{\omega^2 \kappa_3^-}{\omega_*^2}w_0 - \frac{c_0}{12}(2y^3 - 3y^2)w_{20}^{IV} - \frac{\omega^2}{\omega_*^2}y w_{20}. \end{aligned} \quad (20)$$

Формально процесс нахождения неизвестных, входящих в разложения (11), можно продолжить неограниченно, получая при этом поправки для перемещений и напряжений как функций координат x, y . Если ограничиться двумя приближениями, то получаем, что перемещения w и u — полиномы второго и третьего порядков поперечной координаты y , а напряжения τ и σ — полиномы четвертого и пятого порядков соответственно. Таким образом, найденные здесь поля перемещений и напряжений существенно отличаются от аналогичных полей в работах, основанных на введении кинематических гипотез [17–19].

3. Уравнение изгибных колебаний полосы-балки

Обозначим через $W = w_0(x) + \varepsilon^2 w_2(x, 1/2)$ амплитуду перемещений срединной линии полосы-балки. Принимая во внимание (16)₁, находим

$$W(x, t) = w_0 + \varepsilon^2 \left(w_{20} - \frac{1}{8}c_v w_0'' \right). \quad (21)$$

Применим к обеим частям равенства (21) оператор $\mathcal{L}$ (см. (13)) и учтем (19). В результате приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{c_0}{12} + \frac{\varepsilon^2 \kappa_1}{4} \right) W^{IV} + \varepsilon^2 \left[\eta \left(\frac{1}{5} + \frac{c_6}{12} \right) - \kappa_2 \right] W'' - \eta(1 + \varepsilon^2 \kappa_3)W + O(\varepsilon^4) = 0, \quad (22)$$

где $\eta = \omega^2/\omega_*^2$ — искомое собственное значение, зависящее от выбора граничных условий на торцах балки, а $\kappa_1 = \kappa_1^+ + \kappa_1^-$, $\kappa_2 = \kappa_2^+ + \kappa_2^-$, $\kappa_3 = \kappa_3^+ + \kappa_3^-$. Слагаемые в (22), содержащие искомый частотный параметр η , в совокупности представляют собой безразмерный аналог модифицированного оператора инерции [26].



Уравнение (22) обобщает известные уравнения изгибных колебаний балки. При $\varepsilon = 0$ получаем уравнение, основанное на гипотезах Бернулли – Эйлера. Если игнорировать поверхностные эффекты, полагая $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$, то приходим к уравнению типа Тимошенко [27], учитывающему поперечные сдвиги.

Заметим, что уравнение (22) справедливо для бесконечной полосы. Однако оно может быть использовано и для конечной длины полосы-балки в случае, если перемещения u_1 либо напряжения σ_{11} на торцах принимаются равными нулю. В последнем случае граничные условия на торцах формулируются в терминах нормального перемещения W , которые совпадают с классическими граничными условиями для балки Бернулли – Эйлера.

Далее для оценки влияния поверхностных напряжений и инерции на нижний спектр собственных частот рассмотрим шарнирно опертую полосу-балку длиной l . Принимая собственную форму колебаний в виде $W = \sin \pi n x$, где n – число полуволн, и подставляя в (22), приходим к простой формуле для серии собственных значений

$$\eta_n = \frac{\left(\frac{c_0}{12} + \frac{\varepsilon^2 \kappa_1}{4}\right) (\pi n)^4 + \varepsilon^2 (\pi n)^2 \kappa_2}{1 + \varepsilon^2 \left[(\pi n)^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{c_6}{12}\right) + \kappa_3\right]} + O(\varepsilon^4), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

Последняя показывает, что учет поверхностных напряжений (как вызванных деформацией полосы в объеме, так и остаточного, с параметрами κ_1 и κ_2 соответственно) приводит к росту собственных частот из нижнего спектра по сравнению с частотами балки Бернулли – Эйлера. И наоборот, наличие параметра κ_3 , учитывающего поверхностную инерцию, а также слагаемого $(\pi n)^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{c_6}{12}\right)$, учитывающего поперечные сдвиги, снижает частоты.

4. Допустимые случаи сильных поверхностных эффектов

Напомним, что уравнение (22) выведено для случая, когда $\alpha_1 = \alpha_3 = 3$ и $\alpha_2 = 5$, что, в частности, соответствует стеклянной полосе-балке с предварительно напряженным покрытием из железа 10^3 Å. Формально можно принять значения α_n меньшими вышерассмотренных, чтобы влияние поверхностных эффектов проявлялось уже в главном приближении. Однако это не всегда соответствует физически допустимым значениям толщины h ультратонкой полосы.

Рассмотрим кратко два допустимых варианта: а) $\alpha_n = 3$ для $n = 1, 2, 3$; б) $\alpha_1 = 3$, $\alpha_3 = 1$, $s_0^\pm = 0$. Случай а) соответствует наличию сильных остаточных напряжений на лицевых поверхностях (например, в железной нанопленке на стекле), а вариант б) имеет место для железной нанопроволоки со свободной поверхностью без остаточных напряжений. Здесь граничное условие $(10)_2$ для σ_0 становится неоднородным, что в главном приближении приводит к модифицированным уравнениям

$$\frac{1}{12} c_0 w_0^{IV} - \kappa_2 w_0'' - \eta w_0 = 0, \quad (24)$$

$$\frac{1}{12} c_0 w_0^{IV} - \eta (1 + \kappa_3) w_0 = 0 \quad (25)$$

с сериями собственных значений (при шарнирном опирании торцов) $\eta_n = c_0(\pi n^4)/12 + (\pi n)^2 \kappa_2 + O(\varepsilon^2)$ и $\eta_n = c_0(\pi n^4)/[12(1 + \kappa_3)] + O(\varepsilon^2)$ для случаев а) и б) соответственно. Поправки к собственным значениям η_n пропорциональные $\varepsilon^2 \kappa_1$, которые учитывают поверхностные напряжения, вызванные деформированием балки в объеме, находятся из рассмотрения первого приближения подобно тому, как это было сделано выше. Опуская детали построения данного приближения, заметим лишь, что структура формулы для собственных частот остается подобной (23). При этом влияние сильных остаточных напряжений и поверхностной инерции на нижний спектр собственных частот ультратонкой полосы-балки качественно остается таким же, как и в случае, рассмотренном в предыдущем разделе.



Заключение

Методом асимптотического интегрирования двумерных уравнений теории упругости с малым параметром, характеризующим тонкостенность полосы-балки по сравнению с длиной волны, в явном виде выведены соотношения для перемещений и напряжений в объеме с учетом поверхностных эффектов. Данные поля перемещений и напряжений существенно отличаются от аналогичных полей, полученных в литературе на основе введения кинематических гипотез. Выведено дифференциальное уравнение, которое учитывает наличие поперечных сдвигов в объеме, а также поверхностных напряжений и инерционных эффектов. Показано, что влияние поверхностных напряжений и инерции на нижний спектр колебаний сильно зависит от соотношения поверхностных характеристик и соответствующих параметров в объеме полосы. В качестве примера рассмотрены ультратонкая полоса-балка, изготовленная из стекла с нанопленкой железа 10^3 Å, а также ультратонкая железная полоса-балка (нанопроволока) свободная от остаточных напряжений. Установлено, что учет поверхностных напряжений, как остаточных, так и вызванных деформированием в объеме, приводит к увеличению собственных частот по сравнению с частотами, найденными по модели Тимошенко, и, наоборот, наличие поверхностных инерционных эффектов влечет снижение частот из нижнего спектра.

Предложенная процедура асимптотического интегрирования уравнений движения полосы-балки может быть обобщена на случай ультратонких трехмерных тел с целью моделирования длинноволновых изгибных колебаний наноразмерных пластин и оболочек с учетом поверхностных эффектов.

Список литературы

1. Lavrik N. V., Sepaniak M. J., Datskos P. G. Cantilever transducers as a platform for chemical and biological sensors // Review of Scientific Instruments. 2004. Vol. 75. P. 2229–2253. <https://doi.org/10.1063/1.1763252>
2. Zhang Y., Khan M., Huang Y., Ryou J., Deotare P., Dupuis R., Lončar M. Photonic crystal nanobeam lasers // Applied Physics Letters. 2010. Vol. 97, iss. 5. Art. 051104. <https://doi.org/10.1063/1.3475397>
3. Qiao Q., Xia J., Lee C., Zhou G. Applications of photonic crystal nanobeam cavities for sensing // Micromachines. 2018. Vol. 9, iss. 11. Art. 541. <https://doi.org/10.3390/mi9110541>
4. Cuenot S., Fretigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy // Physical Review. B. 2004. Vol. 69, iss. 16. P. 165410–165415. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.165410>
5. Sun C. T., Zhang H. Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials // Journal of Applied Physics. 2003. Vol. 93. P. 1212–1218. <https://doi.org/10.1063/1.1530365>
6. Zhang H., Sun C. T. Nanoplate model for platelike nanomaterials // AIAA Journal. 2004. Vol. 42, iss. 10. P. 2002–2009. <https://doi.org/10.2514/1.5282>
7. Zhou L. G., Huang H. Are surfaces elastically softer or stiffer? // Applied Physics Letters. 2004. Vol. 84, iss. 11. P. 1940–1942. <https://doi.org/10.1063/1.1682698>
8. Gurtin M. E., Murdoch A. I. Surface stress in solids // International Journal of Solids and Structures. 1978. Vol. 14, iss. 6. P. 431–440. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(78\)90008-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(78)90008-2)
9. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials // Acta Mechanica Sinica. 2011. Vol. 24, iss. 1. P. 52–82. [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(11\)60009-8](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(11)60009-8)
10. Achenbach J. Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam, The Netherlands : North Holland, 1973. 440 p.
11. Eremeyev V. A., Rosi G., Naili S. Surface/interfacial anti-plane waves in solids with surface energy // Mechanics Research Communications. 2016. Vol. 74. P. 8–13. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.02.018>
12. Zhu F., Pan E., Qian Z., Wang Y. Dispersion curves, mode shapes, stresses and energies of SH and Lamb waves in layered elastic nanoplates with surface/interface effect // International Journal of Engineering Science. 2019. Vol. 142. P. 170–184. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.003>
13. Mikhasev G. I., Botogova M. G., Eremeyev V. A. Anti-plane waves in an elastic thin strip with



- surface energy // *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2022. Vol. 380, iss. 2231. Art. 20210373. <https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0373>
14. Mikhasev G. I., Erbas B., Eremeyev V. A. Anti-plane shear waves in an elastic strip rigidly attached to an elastic half-space // *International Journal of Engineering Science*. 2023. Vol. 184. Art. 103809. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103809>
 15. Mogilevskaya S. G., Zemlyanova A. Y., Kushch V. I. Fiber- and particle-reinforced composite materials with the Gurtin – Murdoch and Steigmann – Ogden surface energy endowed interfaces // *Applied Mechanics Reviews*. 2021. Vol. 73. P. 1–18. <https://doi.org/10.1115/1.4051880>
 16. Gorbushin N., Eremeyev V. A., Mishuris G. On stress singularity near the tip of a crack with surface stresses // *International Journal of Engineering Science*. 2020. Vol. 146. Art. 103183. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103183>
 17. Lim C. W., He L. H. Size-dependent nonlinear response of thin elastic films with nano-scale thickness // *International Journal of Mechanical Science*. 2004. Vol. 46. P. 1715–1726. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2004.09.003>
 18. Lu P., He L. H., Lee H. P., Lu C. Thin plate theory including surface effects // *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. P. 4631–4647. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.07.036>
 19. Lu L., Guoa X., Zhao J. On the mechanics of Kirchhoff and Mindlin plates incorporating surface energy // *International Journal of Engineering Science*. 2018. Vol. 124. P. 24–40. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.11.020>
 20. Zhou J., Lu P., Xue Y., Lu C. A third-order plate model with surface effect based on the Gurtin – Murdoch surface elasticity // *Thin-Walled Structures*. 2023. Vol. 185. Art. 110606. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110606>
 21. Yang W., Wang S., Kang W., Yu T., Li Y. A unified high-order model for size-dependent vibration of nanobeam based on nonlocal strain/stress gradient elasticity with surface effect // *International Journal of Engineering Science*. 2023. Vol. 182. Art. 103785. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103785>
 22. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the shell theory on the nanoscale with surface stresses // *International Journal of Engineering Science*. 2011. Vol. 49, iss. 12. P. 1294–1301. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.03.011>
 23. Altenbach H., Eremeyev V. A., Morozov N. F. Surface viscoelasticity and effective properties of thin-walled structures at the nanoscale // *International Journal of Engineering Science*. 2012. Vol. 59. P. 83–89. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.03.004>
 24. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko – Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2017. Vol. 97, iss. 3. P. 296–308. <https://doi.org/10.1002/zamm.201600052>
 25. Mikhasev G., Botogova M., Le N. Flexural deformations and vibrations of a three-layer beam-strip with a stiff core and soft skins // *Progress in Continuum Mechanics* / eds.: H. Altenbach, H. Irschik, A. Porubov. Cham : Springer, 2023. P. 265–282. (Advanced Structural Materials, vol. 196). https://doi.org/10.1007/978-3-031-43736-6_16
 26. Kaplunov J., Kossovitch L., Nolde E. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. San Diego : Academic Press, 1998. 226 p.
 27. Timoshenko S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bar // *Philosophical Magazine Series*. 1921. Vol. 6, iss. 245. P. 744–746. <https://doi.org/10.1080/14786442108636264>

References

1. Lavrik N. V., Sepaniak M. J., Datskos P. G. Cantilever transducers as a platform for chemical and biological sensors. *Review of Scientific Instruments*, 2004, vol. 75, pp. 2229–2253. <https://doi.org/10.1063/1.1763252>
2. Zhang Y., Khan M., Huang Y., Ryou J., Deotare P., Dupuis R., Lončar, M. Photonic crystal nanobeam lasers. *Applied Physics Letters*, 2010, vol. 97, iss. 5, art. 051104. <https://doi.org/10.1063/1.3475397>
3. Qiao Q., Xia J., Lee C., Zhou G. Applications of photonic crystal nanobeam cavities for sensing.



- Micromachines*, 2018, vol. 9, iss. 11, art. 541. <https://doi.org/10.3390/mi9110541>
4. Cuenot S., Fretigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Physical Review. B*, 2004, vol. 69, iss. 16, pp. 165410–165415. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.165410>
 5. Sun C. T., Zhang H. Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials. *Journal of Applied Physics*, 2003, vol. 93, pp. 1212–1218. <https://doi.org/10.1063/1.1530365>
 6. Zhang H., Sun C. T. Nanoplate model for platelike nanomaterials. *AIAA Journal*, 2004, vol. 42, iss. 10, pp. 2002–2009. <https://doi.org/10.2514/1.5282>
 7. Zhou L. G., Huang H. Are surfaces elastically softer or stiffer? *Applied Physics Letters*, 2004, vol. 84, iss. 11, pp. 1940–1942. <https://doi.org/10.1063/1.1682698>
 8. Gurtin M. E., Murdoch A. I. Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 1978, vol. 14, iss. 6, pp. 431–440. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(78\)90008-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(78)90008-2)
 9. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Sinica*, 2011, vol. 24, iss. 1, pp. 52–82. [https://doi.org/10.1016/S0894-9166\(11\)60009-8](https://doi.org/10.1016/S0894-9166(11)60009-8)
 10. Achenbach J. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam, The Netherlands, North Holland, 1973. 440 p.
 11. Eremeyev V. A., Rosi G., Naili S. Surface/interfacial anti-plane waves in solids with surface energy. *Mechanics Research Communications*, 2016, vol. 74, iss. 11, pp. 8–13. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.02.018>
 12. Zhu F., Pan E., Qian Z., Wang Y. Dispersion curves, mode shapes, stresses and energies of SH and Lamb waves in layered elastic nanoplates with surface/interface effect. *International Journal of Engineering Science*, 2019, vol. 142, pp. 170–184. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.003>
 13. Mikhasev G. I., Botogova M. G., Eremeyev V. A. Anti-plane waves in an elastic thin strip with surface energy. *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2022, vol. 380, iss. 2231, art. 20210373. <https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0373>
 14. Mikhasev G. I., Erbas B., Eremeyev V. A. Anti-plane shear waves in an elastic strip rigidly attached to an elastic half-space. *International Journal of Engineering Science*, 2023, vol. 184, art. 103809. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103809>
 15. Mogilevskaya S. G., Zemlyanova A. Y., Kushch V. I. Fiber- and particle-reinforced composite materials with the Gurtin–Murdoch and Steigmann–Ogden surface energy endowed interfaces. *Applied Mechanics Reviews*, 2021, vol. 73, pp. 1–18. <https://doi.org/10.1115/1.4051880>
 16. Gorbushin N., Eremeyev V. A., Mishuris G. On stress singularity near the tip of a crack with surface stresses. *International Journal of Engineering Science*, 2020, vol. 146, art. 103183. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103183>
 17. Lim C. W., He L. H. Size-dependent nonlinear response of thin elastic films with nano-scale thickness. *International Journal of Mechanical Science*, 2004, vol. 46, pp. 1715–1726. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2004.09.003>
 18. Lu P., He L. H., Lee H. P., Lu C. Thin plate theory including surface effects. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, pp. 4631–4647. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.07.036>
 19. Lu L., Guoa X., Zhao J. On the mechanics of Kirchhoff and Mindlin plates incorporating surface energy. *International Journal of Engineering Science*, 2018, vol. 124, pp. 24–40. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.11.020>
 20. Zhou J., Lu P., Xue Y., Lu C. A third-order plate model with surface effect based on the Gurtin–Murdoch surface elasticity. *Thin-Walled Structures*, 2023, vol. 185, art. 110606. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110606>
 21. Yang W., Wang S., Kang W., Yu T., Li Y. A unified high-order model for size-dependent vibration of nanobeam based on nonlocal strain/stress gradient elasticity with surface effect. *International Journal of Engineering Science*, 2023, vol. 182, art. 103785. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103785>
 22. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the shell theory on the nanoscale with surface stresses. *International Journal of Engineering Science*, 2011, vol. 49, iss. 12, pp. 1294–1301. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.03.011>



23. Altenbach H., Eremeyev V. A., Morozov N. F. Surface viscoelasticity and effective properties of thin-walled structures at the nanoscale. *International Journal of Engineering Science*, 2012, vol. 59, pp. 83–89. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.03.004>
24. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko – Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, vol. 97, iss. 3, pp. 296–308. <https://doi.org/10.1002/zamm.201600052>
25. Mikhasev G., Botogova M., Le N. Flexural deformations and vibrations of a three-layer beam-strip with a stiff core and soft skins. In: Altenbach H., Irschik H., Porubov A. (eds.) *Progress in Continuum Mechanics*. Advanced Structural Materials, vol. 196. Cham, Springer, 2023, pp. 265–282. https://doi.org/10.1007/978-3-031-43736-6_16
26. Kaplunov J., Kossovitch L., Nolde E. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. San Diego, Academic Press, 1998. 226 p.
27. Timoshenko S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bar. *Philosophical Magazine Series*, 1921, vol. 6, iss. 245, pp. 744–746. <https://doi.org/10.1080/14786442108636264>

Поступила в редакцию / Received 06.12.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



Научная статья

УДК 539.3:544.723.54:54.057

Создание алюмоматричного композита с улучшенными механическими свойствами за счёт направленного регулирования химического состава поверхности армирующей дисперсной фазы

Н. Ф. Морозов, Е. Г. Земцова, В. К. Кудымов, П. Е. Морозов,
Б. Н. Семенов[✉], Д. В. Юрчук, В. М. Смирнов

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб, д. 7–9

Морозов Никита Фёдорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости, n.morozov@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3890-522X>, AuthorID: 786020

Земцова Елена Георгиевна, кандидат химических наук, доцент кафедры химии твердого тела, ezimtsova@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2603-2812>, AuthorID: 131003

Кудымов Владимир Константинович, инженер-исследователь кафедры химии твердого тела, v.k.kudymov@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0002-4044-6990>

Морозов Павел Евгеньевич, кандидат химических наук, ведущий инженер кафедры химии твердого тела, comitcont@yandex.ru <https://orcid.org/0009-0000-3526-3810>, AuthorID: 167465

Семенов Борис Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории упругости, b.semenov@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8870-6520>, AuthorID: 137378

Юрчук Денис Владимирович, инженер-исследователь кафедры химии твердого тела, 667-766-d@mail.ru, AuthorID: 787200

Смирнов Владимир Михайлович, доктор химических наук, профессор кафедры химии твердого тела, vms11@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7358-1884>, AuthorID: 45404

Аннотация. Основными направлениями получения новых металломатричных композитов являются разработка подходов к выбору упрочняющих добавок, выявление взаимосвязей свойств получаемого материала с составом, концентрацией и морфологией вводимых добавок, создание и поиск новых доступных и дешёвых добавок. Авторы предлагают в качестве одного из решений рассматриваемой задачи получать алюмоматричные композиционные материалы на основе структурирования металлической матрицы наноструктурами карбида титана (≤ 5 нм) методом Atomic layer deposition. Важной особенностью получаемого материала является отсутствие явных границ раздела между алюминиевой матрицей и армирующей карбидной фазой, что обеспечивает связывание компонентов в единое целое. Композиты, для упрочнения которых используется армирующая фаза с поверхностными карбидными наноструктурами, помимо повышенного предела прочности демонстрируют более пластичную схему разрушения, характерную для дисперсного упрочнения материалов. Исследованы механические свойства синтезированных предложенным методом металлокомпозитов. Наблюдается более чем двукратное упрочнение и трехкратный рост предела текучести при незначительном сокращении пластической деформации до разрушения.

Ключевые слова: механические свойства, разрушение, пластичность, металломатричные композиты, наноструктуры, карбид титана

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20083).

Для цитирования: Морозов Н. Ф., Земцова Е. Г., Кудымов В. К., Морозов П. Е., Семенов Б. Н., Юрчук Д. В., Смирнов В. М. Создание алюмоматричного композита с улучшенными механическими свойствами за счёт направленного регулирования химического состава поверхности армирующей



дисперсной фазы // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 97–108. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-97-108>, EDN: TLUZZI

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Development of aluminum matrix composite with improved mechanical properties by the directional regulation of the chemical composition of the reinforcing dispersed phase surface

N. F. Morozov, E. G. Zemtsova, V. K. Kudymov, P. E. Morozov,
B. N. Semenov[✉], D. V. Yurchuk, V. M. Smirnov

St. Petersburg University, 7–9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia

Nikita F. Morozov, n.morozov@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3890-522X>, AuthorID: 786020

Elena G. Zemtsova, ezimtsova@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2603-2812>, AuthorID: 131003

Vladimir K. Kudymov, v.k.kudymov@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0002-4044-6990>

Pavel E. Morozov, comitcont@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0000-3526-3810>, AuthorID: 167465

Boris N. Semenov, b.semenov@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8870-6520>, AuthorID: 137378

Denis V. Yurchuk, 667-766-d@mail.ru, AuthorID: 787200

Vladimir M. Smirnov, vms11@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7358-1884>, AuthorID: 45404

Abstract. For obtaining new metal matrix composites, one needs to develop approaches to the selection of reinforcing additives, the identification of the relationship of the properties of the resulting material with the composition, concentration and morphology of the additives introduced, the creation and search for new affordable and cheap additives. As one of the solutions to this problem, the authors propose to obtain aluminum matrix composites based on the structuring of an Al matrix with titanium carbide nanostructures (≤ 5 nm) by atomic layer deposition (ALD). The resulting material has an important feature — the absence of obvious interface boundaries between the Al matrix and the reinforcing carbide phase, that ensures the components binding into a single whole. Composites, for the hardening of which a reinforcing phase with surface carbide nanostructures is used, in addition to a higher tensile strength, demonstrate a more plastic fracture pattern characteristic of dispersed hardening of materials. With an increase in the amount of the composite reinforcement from 1 to 5%, embrittlement of the material does not occur, as is observed when carbide particles are introduced into the Al matrix by other methods.

Keywords: mechanical properties, fracture, plasticity, metal matrix composites, nanostructures, titanium carbide

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 20-11-20083).

For citation: Morozov N. F., Zemtsova E. G., Kudymov V. K., Morozov P. E., Semenov B. N., Yurchuk D. V., Smirnov V. M. Development of aluminum matrix composite with improved mechanical properties by the directional regulation of the chemical composition of the reinforcing dispersed phase surface. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 97–108 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-97-108>, EDN: TLUZZI

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Задачи современного машиностроения требуют создания новых, более прочных, лёгких и дешёвых материалов. Хорошим примером данному положению может служить возрастающий интерес со стороны машиностроения к производству материалов на основе алюминиевой матрицы с высоким соотношением прочность – удельный вес в свете тенденции на создание



всё более экономичных и эффективных двигателей. Классические объёмные материалы, в отличие от металломатричных композитов (ММК), не могут удовлетворить комплекс требований, таких как высокая прочность, низкий коэффициент термического расширения, устойчивость к абразивному износу, коррозионная стойкость, способность выдерживать длительные циклические нагружения с сохранением жёсткости конструкции и т. п. [1].

Металломатричные композиты по своим механическим свойствам зачастую значительно превосходят чистые металлы и сплавы [2–4], однако их широкое применение сдерживается рядом нерешенных проблем, связанных как с методологией синтеза, так и с отсутствием полноценного описания межфазных процессов в ходе компактирования, особенно состояния пограничного слоя. Для систем металл/керамика малая изученность переходного слоя связана как со скудным набором экспериментальных данных по смачиванию металлами и сплавами керамических материалов, так и со сложностью описания химического состояния элементов в данном слое.

Алюминий и различные стали остаются самыми широко распространёнными матрицами для ММК по целому ряду причин: низкая стоимость при массовости производства, высокая удельная жёсткость, теплопроводность, простота обработки [5, 6]. Основным направлением получения новых ММК является разработка подходов к выбору упрочняющих добавок, выявление взаимосвязей свойств получаемого материала с составом, концентрацией и морфологией вводимых добавок, создание и поиск новых доступных и дешёвых добавок, а также установление алгоритмов для моделирования физико-механических свойств ММК. Одним из способов упрочнения металлической матрицы является её армирование, т. е. введение в матрицу наноструктур, обладающих высокой твёрдостью и прочностью.

В качестве армирующей фазы могут использоваться оксиды металлов, карбиды или нитриды, углеродные нанотрубки. Однако введение дисперсной армирующей фазы в матрицу приводит к охрупчиванию материала, что ведёт к трудностям его обработки [7–9].

Процессы, протекающие при упрочнении материалов, хорошо согласуются с механизмами Холла – Петча, Орована и Нардана – Прево. Известно, что даже при условии равномерного распределения армирующей фазы по объёму охрупчивание материала повышается с ростом объёма армирования. Это связано с недостаточным взаимодействием зёрен матрицы, когда механизмы упрочнения по Оровану перестают работать в связи с недостаточным объёмом материала матрицы для формирования петель. И этот процесс не может быть скомпенсирован процессами, описываемыми законом Холла – Петча, поскольку минимально возможный размер зерна в материале уже достигнут.

Авторы предлагают в качестве одного из решений рассматриваемой задачи получать композиционные алюмоматричные материалы нового поколения на основе структурирования металлической матрицы на наноуровне (≤ 5 нм) методом Atomic layer deposition (ALD), а также равномерного распределения наноструктур карбид титана по объёму матрицы в результате изменения поверхности частиц алюминия. О перспективности применения карбида титана в качестве армирующей фазы в составе алюмоматричных композитов говорят многие исследователи [10, 11].

Важной особенностью получаемого материала является отсутствие явных границ раздела между алюминиевой матрицей и армирующим элементом, что обеспечивает связывание компонентов в единое целое. Это достигается за счёт того, что наноструктуры армирующего элемента карбида титана соединены с алюминиевой матрицей химической связью. Атомы армирующего материала и материала матрицы, связанные друг с другом химически через условную плоскость раздела, принадлежат одновременно двум согласованным структурам, в результате чего образовавшаяся условная граница раздела характеризуется низкой энергией и, следовательно, высокой прочностью.

Такой подход позволяет заметно улучшить трещиностойкость, прочность материала без потери пластичности в широком диапазоне армирования, что положительно сказывается на эксплуатационных характеристиках и пригодности к обработке.

1. Материалы. Методики синтеза и исследования

1.1. Дисперсная подложка алюминия

Подложкой выступал алюминиевый порошок марки АСП-50. Это сферический порошок (рис. 1), содержащий 99.7% алюминия и не более 0.3% примесей, представляющий собой сыпучее вещество светло-серого цвета с легким металлическим отблеском (ТУ 1791-002-49421776-2014).

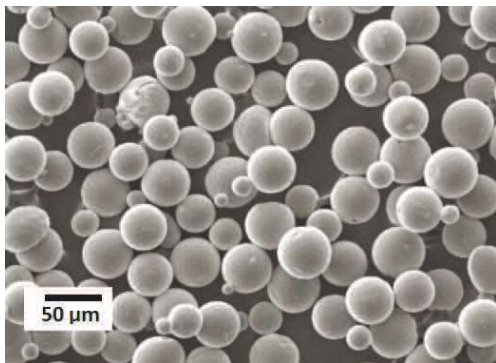


Рис. 1. Микрофотография частиц алюминия АСП-50

Fig. 1. Micrography of aluminum particles ASP-50

С целью стандартизации размера частиц алюминий АСП-50 предварительно просеивали на виборассеивателе ВП-30Т с использованием сит с размером ячейки 50 и 80 мкм. В ходе просева была выбрана фракция с размером частиц от 50 до 80 мкм. Для удаления замасливателя и других загрязнений алюминий промывался изопропиловым спиртом. В колбу на 1 литр помещали 100 г фракции просеянного Al и 500 мл изопропилового спирта, после чего содержимое колбы энергично перемешивали в течение 15 мин. Алюминий отфильтровывали, высушивали под вакуумом при комнатной температуре и аналогичным образом промывали ортоксидолом или толуолом. Очищенный и стандартизированный таким образом дис-

персный алюминий использовали для формования и изготовления образцов, как содержащих армирующие фазы, так и без них. Выбор для работы фракции с размером частиц 50–80 мкм обусловлен особенностями работы установки ALD-синтеза. Более мелкие частицы, использование которых выглядит приоритетнее, не отбиваются сеткой-фильтром в синтетическую камеру и уносятся потоком газа в ловушку, что существенно снижает выход продукта при синтезе — потери для частиц менее 80 мкм могут достигать 90%.

1.2. Синтез наноструктур TiC на частицах алюминия (Al@TiC)

Синтез частиц типа Al@TiC осуществлялся методом ALD, также известным как метод химической сборки, в специально сконструированной установке, работающей по принципу реактора идеального вытеснения. В установке ALD была реализована проточная вакуумная схема.

Метод заключается в последовательном нанесении на подложку монослоев заданного состава путём химической адсорбции к подложке поочерёдно подаваемых в реактор реагентов. При этом реагенты, применяемые в методе молекулярного наслаивания, должны вступать в химическую реакцию не только с активными группами подложки, но и с химически сорбированными на поверхность подложки продуктами реакции друг друга. Важной особенностью является то, что реагенты не должны взаимодействовать сами с собой и продуктами своей реакции с активными группами подложки. Особенностью технологии ALD, отличающей ее от других тонкопленочных технологий, является то, что два реагирующих друг с другом на подложке прекурсора взаимодействуют только на поверхности подложки.

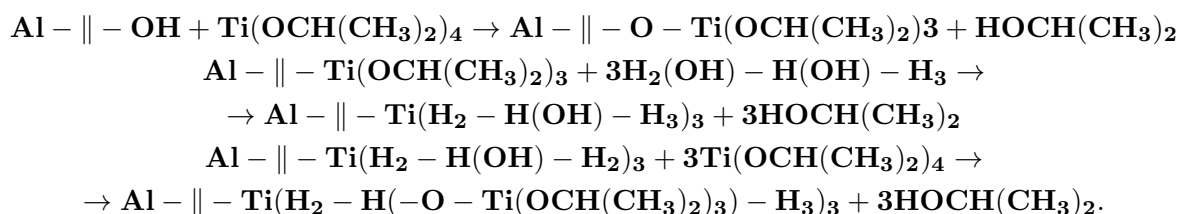
Подложку частиц алюминия помещали в реактор и приступали к химической обработке поверхности монослоями карбида титана в соответствии с принципами ALD. Синтез одного монослоя карбидных структур можно разделить на 4 этапа. Первым этапом является химическая адсорбция первого реагента на подложку. При этом реагенты подаются в большом избытке для достижения сплошности покрытия. Далее происходит продувка системы инертным газом для удаления продуктов реакции и избытка реагента. Третьим этапом является подача второго реагента, после чего также следует продувка системы. Для создания нескольких монослоев данный цикл повторяют необходимое количество раз. За счёт последовательного



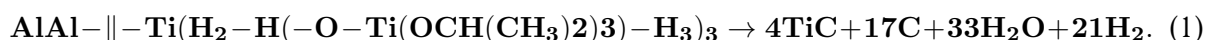
синтеза монослоёв при помощи метода молекулярного наслаивания возможно прецизионное регулирование толщины синтезированной плёнки.

В системе постоянно создавалось разряжение при помощи роторно-пластинчатого насоса, при этом в систему бесперебойно подавался инертный газ-носитель (гелий). Инертный газ необходим для переноса реагентов, удаления продуктов реакции, а также для предотвращения гидролиза, т. е. в установке был реализован принцип «динамического вакуума», используя который, работает большинство установок, применяющих принципы ALD. Важной особенностью установки является возможность работы с дисперсными подложками.

В качестве реагентов, размещённых в специальных резервуарах, использовались изопропоксид титана $\text{Ti}(\text{OCH}(\text{CH}_3)_2)_4$ и пропиленгликоль $\text{CH}_2(\text{OH}) - \text{CH}(\text{OH}) - \text{CH}_3$. Подача реагентов в систему осуществлялась пошагово при помощи системы клапанов. Сначала в систему подавался изопропоксид титана, затем следовала продувка системы для удаления продуктов реакции. Далее в систему подавался пропиленгликоль, затем осуществлялась продувка системы. Были синтезированы частицы с разным количеством циклов химической обработки поверхности алюминия: с одним, двумя и тремя. Следующим этапом синтеза частиц армирующей фазы является карбонизация в инертной атмосфере гелия при 600°C в течение 1 ч. Данный процесс можно описать с помощью следующих реакций:



Схематично их можно представить следующим образом:



В результате нами были получены образцы армирующих фаз, содержащих разное количество титан-углеродного материала. Для простоты идентификации мы говорим об одном, двух или трёх циклах химической сборки, подразумевая увеличение объёма титан-углеродного материала в зависимости от проведённых циклов химической сборки. Синтез армирующих фаз проводился в течение 1 ч при температуре 150°C , прокаливание при температуре 600°C .

1.3. Получение объёмного композиционного материала на основе алюминия с армирующей фазой Al@TiC

Первым этапом получения алюмоматричного материала является введение частиц типа Al@TiC в исходную алюминиевую матрицу в соотношении 1:99, 3:97 и 5:95 вес.%. Смешение двух порошков (алюминия и армирующей фазы Al@TiC) осуществлялось в планетарной шаровой мельнице РМ 100 СМ. Затем полученная смесь подвергалась прессованию. Для этого навеску смеси массой 2.2 г помещали в разборную пресс-форму с размером пуансона 20×20 мм. Прессование осуществлялось при помощи пневмогидравлического пресса Сорокина 7.75.

Прессование проводилось в три этапа. На первом этапе величина нагрузки составляла 15 т, на втором — 35 т, на третьем этапе образец материала нагружался до 50 т. На каждом этапе прессования образец выдерживали под нагрузкой в течение 10 мин. Температура прессования комнатная. После каждого этапа прессования происходило спекание материала в защитной атмосфере при температуре 600°C [12].

Полученные таким образом образцы композиционного металломатричного материала представляли собой металлические пластины серого цвета, обладающие металлическим блеском. Размер пластин $20 \times 20 \times 2$ мм. Перед проведением механических испытаний была проведена дополнительная подготовка образцов. Для этого полученные ранее заготовки



подвергались дополнительному прессованию кручением под высоким давлением. Прессование происходило при комнатной температуре на прессе Walter Klement GmbH HPT-07 следующим образом: были установлены бойки с глубиной выборки 0.6 мм и диаметром 20 мм, заготовка укладывалась в выборку нижнего бойка, затем бойки были сведены. Компактирование было осуществлено под давлением 1.5 ГПа при скорости вращения бойка 10 об/мин. Время обработки — 15 мин.

1.4. Исследование состава и структуры

Морфология и элементный анализ композитного материала и частиц Al@TiC был выполнен с помощью сканирующего электронного микроскопа Zeiss Merlin с дополнительными приставками для рентгеновского микроанализа Oxford Instruments INCAx-act и системой регистрации дифракции обратнорассеянных электронов (EBSD) Oxford Instruments CHANNEL5. Элементный анализ дисперсных образцов проводили для сухих частиц. Измерения проводились на сканирующем электронном микроскопе Zeiss Merlin с диапазоном токов пучка 10–300 нА при ускоряющем напряжении 15 кВ. Для подтверждения наличия в исследуемых образцах карбида титана была проведена рентгеновская фотоэлектронная спектроскопия образца композиционного материала. Для регистрации рентгеновских фотоэлектронных спектров используются сверхвысоковакуумные камеры и излучение с энергией 1486.6 эВ (AlK α) или 1253.6 эВ (MgK α). Измерения проводились с применением спектрометра ESCALAB 250 Xi в соответствии со стандартами базы данных рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии NIST¹.

1.5. Механические испытания

Методом одноосного растяжения были определены предел прочности, относительное удлинение и предел текучести. Одноосное растяжение проводилось на испытательной машине Shimadzu AG-50kNX при комнатной температуре, скорость деформации составляла $5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. Деформация образцов контролировалась видеоэкстензометром TRViewX 55S. Из пластин-заготовок композиционного материала размером $20 \times 20 \times 2$ мм на электроэрозионном станке АРТА 123 ПРО ООО «НПК «Дельта-Тест»» изготавливали двусторонние лопатки с размером рабочей части 6×2 мм. Всего было исследовано три серии образцов: с одним, двумя и тремя циклами ALD-обработки. В каждой серии были сделаны образцы с содержанием 1, 3, 5% дисперсной армирующей фазы Al@TiC. В качестве образца сравнения был использован чистый алюминий.

2. Результаты исследования и обсуждение

2.1. Исследование композита на основе матрицы алюминия и армирующей фазой Al@TiC

В ходе данной работы были синтезированы карбидные наноструктуры на поверхности дисперсных частиц алюминия со структурой Al@TiC с разным количеством циклов ALD-наслаивания на поверхности армирующей фазы. Перечень синтезированных образцов представлен в табл. 1. Размеры композиционных образцов составляли $20 \times 20 \times 2$ мм. При плотности алюминия 2.7 г/см^3 средняя масса образца составляла 2.16 г.

Были получены микрофотографии скомпактированного образца на основе матрицы алюминия и дисперсной армирующей фазы Al@TiC. Для подтверждения наличия титана и углерода на поверхности частиц алюминия в синтезированных образцах при помощи EDS-приставки был проведён элементный анализ (рис. 2).

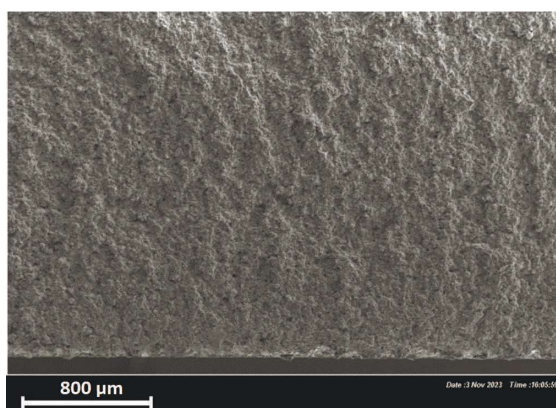
¹NIST X-ray Photoelectron Spectroscopy Database NIST. Standard Reference Database Number 20, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg MD, 2000, 20899.



Таблица 1 / Table 1

Образцы композиционного материала на основе матрицы алюминия, армированной частицами Al@TiC
 Samples of composite material based on an aluminum matrix reinforced with Al@TiC particles

№ образца	Армирующая фаза Al@TiC, циклы ALD-наслаивания	Содержание армирующей фазы, мас. %	Содержание TiC, масс. %
1	1	1	0.0004
2	1	3	0.0012
3	1	5	0.002
4	2	1	0.0008
5	2	3	0.0024
6	2	5	0.004
7	3	1	0.0012
8	3	3	0.0036
9	3	5	0.006



Element	Weight %	Atomic %
O K	3.30	5.50
AL K	95.02	93.76
Ti K	1.68	0.76
Total	100	

Рис. 2. Микрофотография и элементный анализ скола скомпактированного образца на основе матрицы алюминия и армирующей фазы из частиц Al@TiC

Fig. 2. Micrography and elemental analysis of the chip of a compacted sample based on an aluminum matrix and a reinforcing phase of Al@TiC particles

Исходя из результатов, можно сделать вывод о наличии в синтезированных образцах алюминия, титана, углерода и кислорода. Алюминий соответствует материалу дисперсной подложки — алюминию марки АСП-50. Повышенное содержание углерода может быть объяснено тем, что в качестве подложки для образцов использовался углеродный скотч. Наличие большого количества кислорода может говорить об оксидной плёнке, которая присутствует на поверхности алюминия. Однако совместно присутствие углерода и титана в образце не позволяет сделать однозначный вывод о наличии карбида титана в образце. Для подтверждения наличия в образцах карбида титана был зарегистрирован рентгеновский фотоэлектронный спектр. Для однозначного установления присутствия связи Ti-C были проанализированы результаты исследований, а именно проведена расшифровка данных с C1s и Ti2p подуровней. Полученные спектры были зарегистрированы для скомпактированного образца. Калибровка энергий проводилась по пику основного уровня Au 4f_{7/2}. Пики при энергиях 455 эВ (Ti2p) и 282 эВ (C1s) соответствуют связи C-Ti², что позволяет сделать вывод о наличии TiC в синтезированных образцах.

²NIST X-ray Photoelectron Spectroscopy Database. NIST Standard Reference Database Number 20, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg MD, 2000, 20899.

2.2. Результаты механических испытаний композитов на основе матрицы алюминия и армирующей фазы Al@TiC

Механические испытания проводились при комнатной температуре, скорость деформации составляла $5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Всего было исследовано три серии образцов: с одним (рис. 3, а), двумя (рис. 3, б) и тремя (рис. 3, в) циклами Atomic layer deposition. В каждой серии были сделаны образцы с содержанием 1, 3, 5% дисперсной армирующей фазы. В качестве образца сравнения был использован чистый алюминий. На рис. 3 приведены кривые деформирования исследованных образцов.

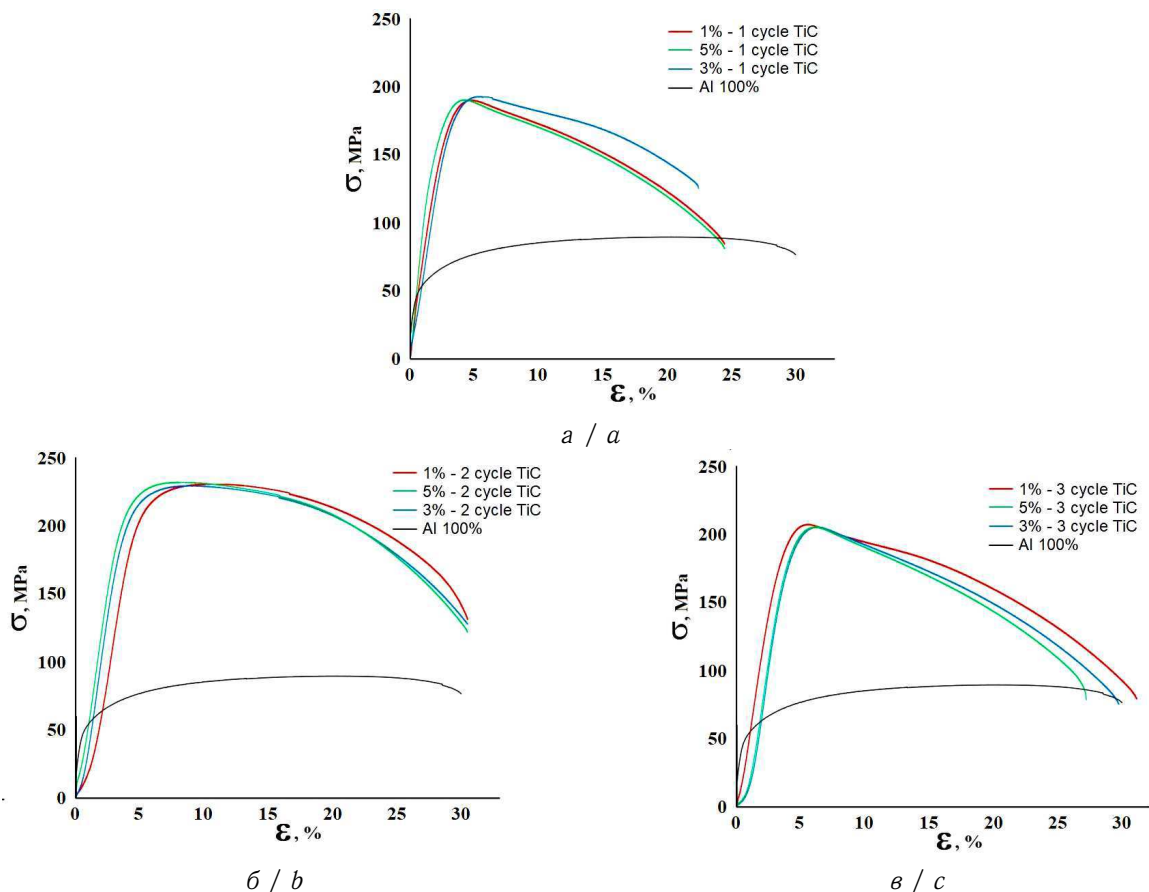


Рис. 3. Кривые деформирования композита, содержащего армирующую фазу Al@TiC: а — TiC 1 цикл ALD наслаивания; б — 2 цикла ALD наслаивания; в — 3 цикла ALD наслаивания

Fig. 3. The deformation curves of a composite containing the reinforcing phase Al@TiC: a is TiC 1 cycle of ALD layering; b is 2 cycles of ALD layering; c is 3 cycles of ALD layering

Таблица 2 / Table 2

Предел прочности исследуемых композитов
The ultimate strength of the studied composites

Содержание Al, %	1	3	5	100
Чистый Al	—	—	—	90
TiC (1 цикл)	191	193	190	—
TiC (2 цикла)	230	229	232	—
TiC (3 цикла)	205	207	205	—

Самые высокие прочностные свойства демонстрирует композиционный материал, в котором дисперсной армирующей фазой являются наночастицы TiC, полученные в ходе двух циклов ALD-наслаивания.

Из полученных кривых деформирования можно определить ряд важных характеристик для материала: предел прочности (табл. 2), относительное удлинение (табл. 3) и условный предел текучести (табл. 4).

При анализе данных, сведенных в табл. 2, видно, что полученные материалы демонстрируют повышенные прочностные свойства относительно образца чистого алюминия.



Относительное удлинение в табл. 3 определено как соответствующее значение при разрушении материала. Данные в табл. 3 показывают, что образцы материалов демонстрируют высокую пластичность, сравнимую с чистым алюминием. Это свойство важно для ряда методов механической обработки материала — прокат, ковка, штамповка и другие, которые являются ключевыми в современной промышленности. Как видно из приведенных в табл. 3 данных, пластичность не зависит от доли армирования и существенно не снижается на фоне чистого алюминия, что позволяет применять к полученным алюмоматричным композитам те же методы механической обработки, что и для чистого алюминия.

Таблица 3 / Table 3

Относительное удлинение исследуемых композитов

Relative elongation of the studied composites

Содержание Al, %	1	3	5	100
Чистый Al	–	–	–	30.5
TiC (1 цикл)	28.0	22.3	24.3	–
TiC (2 цикла)	30.4	31.0	30.4	–
TiC (3 цикла)	30.3	30.0	27	–

Условный предел текучести определялся как значение напряжения, при котором значение остаточной деформации составляло 0.2% (см. табл. 4). Как видно из приведённых данных, условный предел текучести для образцов, армированных наноструктурами карбида титана, превышает соответствующий показатель для чистого алюминия от трёх раз (для образца, армированного 1% TiC (1 цикл)) до 4.3 раз (для образца, армированного 1% TiC (2 цикла)).

Таблица 4 / Table 4

Условный предел текучести композитов

Conditional yield strength of composites

Содержание Al, %	1	3	5	100
Чистый Al	–	–	–	50
TiC (1 цикл)	157	159	136	–
TiC (2 цикла)	215	190	196	–
TiC (3 цикла)	168	182	182	–

В среднем для всех серий образцов условный предел текучести достигает 80–90% от предела прочности испытанных композитов. Такие значения предела условной текучести на фоне наблюдаемой пластичности позволяют применять исследованные материалы в высоконагруженных узлах из алюминия, гарантируя высокую усталостную прочность изделий. Результаты механических испытаний композитов на основе матрицы алюминия и армирующей фазы Al@TiC показали, что образцы, полученные с 5% армирования Al@TiC и после двух циклов ALD наслаивания TiC на частицах алюминия в армирующей фазе, обладают механическими свойствами, превышающими свойства чистого алюминия в два раза. С ростом объёма армирования композита от 1 до 5% не происходит охрупчивание материала, как это наблюдается при введении карбидных частиц в алюминиевую матрицу другими способами. Это связано с равномерным распределением карбидных наноструктур армирующей фазы в объёме матрицы в результате химического связывания карбидных наноструктур с частицами алюминия, а также высокой смачиваемости наноструктур армирующей фазы материалом матрицы. Также необходимо учитывать, что в процессе получения композитов применялось прессование кручением под высоким давлением.

В результате такого подхода к получению объёмных образцов с наноразмерной фракцией (до 5 нм) была решена проблема агрегации дисперсной карбидной фазы в объёме композита. Такой подход в прессовании образцов внёс свой вклад и в упрочнение композита за счёт измельчения зёрен самой матрицы.

Для проведения сравнительных исследований влияния микронной и нанометровой армирующей фазы на механические свойства алюмоматричного композита были получены образцы алюмоматричного композита с содержанием армирующей фазой 5 масс.%, состоящей из микронных частиц карбида титана (50 мкм) и карбидных наноструктур после двух циклов ALD-наслаивания. Образец с микронной армирующей фазой был получен по методике синтеза, описанной в статье [1].

Сравнение механических свойств алюмоматричных композитов с карбидной армирующей фазой представлено на рис. 4 и в табл. 5.

Как видно из данных рис. 4 и приведённых в табл. 4 для образца № 2, содержащего 5% микронных частиц карбида титана, наблюдается увеличение предела прочности, однако это

увеличение незначительно относительно чистого алюминия, а также снижается пластичность. Увеличение предела прочности объясняется влиянием дисперсной армирующей фазы на границу зёрен матрицы алюминия. Частицы карбида титана препятствуют рекристаллизации матрицы и способствуют уменьшению размера зерна.

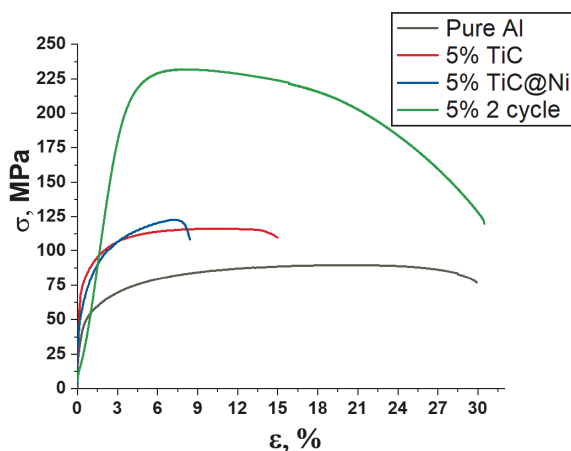


Рис. 4. Кривые деформирования образцов Al, 5% TiC, 5% TiC@Ni и 5% ALD (2 цикла) (цвет онлайн)

Fig. 4. Deformation curves of samples Al, 5% TiC, 5% TiC@Ni and 5% ALD (2 cycles) (color online)

Кроме того, частицы, взаимодействуя с границами зёрен матрицы, препятствуют перемещению этих границ и скольжению дислокаций [13]. Однако у данной армирующей фазы есть существенный минус. При концентрациях микронных армирующих частиц более 1 об.% существует проблема равномерного их распределения в объёме матрицы, а также проблема низкой смачиваемости частиц армирующей фазы материалом матрицы. Это ведёт к существенной агрегации дисперсной карбидной фазы в объёме композита. Данные агрегаты провоцируют появление в матрице металла дефектов и пор, что существенно снижает пластичность таких композиционных материалов и не даёт существенного прироста прочностных характеристик.

Таблица 5 / Table 5

Сравнение механических свойств Al, 5% TiC и 5% ALD (2 цикла)
Comparison of mechanical properties of Al, 5% TiC and 5% ALD (2 cycles)

№ образца	Материал	σ_b , МПа	S, %	$\sigma_{0.2}$, МПа
1	Чистый Al	90	30.5	55
2	5% TiC	106	14.0	45
3	5% Al@TiC (2 цикла)	232	30.4	196

Изготовленный нами образец № 3 с армирующей фазой карбида титана на поверхности алюминия, полученной методом ALD, показал прочностные характеристики, значительно превосходящие образцы с микронными армирующими фазами. Как видно из представленных данных, предел прочности для данного образца составил 232 МПа, при этом пластичность сохранилась на уровне чистого алюминия. Это связано с равномерным распределением карбидных наноструктур армирующей фазы в объёме матрицы в результате химического связывания карбидных наноструктур с частицами алюминия, а также высокой смачиваемостью наноструктур армирующей фазы материалом матрицы. Применение при прессовании кручения при высоком давлении не только решает проблему агрегации дисперсной карбидной фазы с наноразмерной фракцией (до 5 нм) в объёме композита, но и вносит вклад в упрочнение композита за счёт измельчения зёрен самой матрицы.

Наблюдаемый эффект увеличения механических свойств идёт согласно механизму Холла – Петча, который заключается в увеличении предела текучести и прочностных свойств с уменьшением размера зерна матрицы, размера дефектов (микропор, выделений вторичных фаз по границам зёрен). Также наноразмерная армирующая фаза вызывает затруднение движения дислокаций на границах зёрен и вносит вклад в упрочнение композита. Наличие твёрдых непорезаемых частиц позволяет реализовать механизм Орована, который заключается во взаимодействии частиц с дислокациями. При огибании вокруг частицы дислокации искривляются и образуют дислокационные кольца (петли Орована), упрочняющие плоскость скольжения. Упрочнение по Оровану происходит за счёт внедрения наночастиц в матрицу (наличие химической связи между матрицей и карбидными наноструктурами). Дополнительно материал упрочняется при переносе нагрузки от мягкой матрицы к твёрдым и жёстким части-



цам карбида под воздействием внешней нагрузки. Как показывают исследования в области композиционных металломатричных материалов, армированных дисперсными армирующими фазами, все эти процессы протекают в армированных наноразмерными фазами композиционных материалах одновременно. И только их совместное влияние объясняет рост механических свойств при сохранении пластичности композита. Таким образом, подтверждается теория, что введение в композиционные материалы керамических наночастиц является одним из перспективных методов дисперсного упрочнения материала.

Заключение

В ходе выполнения исследования были разработаны метод синтеза армирующей фазы на основе наноразмерного карбида титана и метод введения наноразмерной армирующей фазы в алюминиевую матрицу. Исследования механической прочности композитов показали рост предела прочности полученных композитов в два раза по сравнению с чистым алюминием и сохранением пластичности для всех полученных образцов композиционных материалов, в которых дисперсной армирующей фазой являются наночастицы TiC (менее 5 нм), полученные в ходе химической сборки на поверхности частиц алюминия. Была показана взаимосвязь между размером армирующей фазы и механическими свойствами композита на основе алюминия. Композиты, для упрочнения которых используется армирующая фаза с поверхностными карбидными наноструктурами, помимо более высокого предела прочности демонстрируют более пластичную схему разрушения, характерную для дисперсного упрочнения материалов. С ростом объёма армирования композита от 1 до 5% не происходит охрупчивания материала, как это наблюдается при введении карбидных частиц в алюминиевую матрицу другими способами. Полученные композиты с наноразмерной армирующей фазой карбида титана (Al@TiC) от 1 до 5% по массе в образце являются перспективными материалами для использования в машиностроении.

Список литературы

1. *Rino J. J., Chandramohan D., Sucitharan K. S., Jebin V. D.* An overview on development of aluminium metal matrix composites with hybrid reinforcement // *International Journal of Science and Research*. 2012. Vol. 1, iss. 3. P. 196–203.
2. *Tjong S. C.* Novel nanoparticle reinforced metal matrix composites with enhanced mechanical properties // *Advanced Engineering Materials*. 2007. Vol. 9, iss. 8. P. 639–652. <https://doi.org/10.1002/adem.200700106>
3. *Wang J., Li Z., Fan G., Pan H., Chen Z., Zhang D.* Reinforcement with graphene nanosheets in aluminum matrix composites // *Scripta Materialia*. 2012. Vol. 66, iss. 8. P. 594–597. <https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.01.012>
4. *Saravanan C., Subramanian K., Ananda Krishnan V., Narayanan R. S.* Effect of particulate reinforced aluminium metal matrix composite — A review // *Mechanics and Mechanical Engineering*. 2015. Vol. 19, iss. 1. P. 23–30.
5. *Das D. K., Mishra P. C., Singh S., Pattanaik S.* Fabrication and heat treatment of ceramic-reinforced aluminium matrix composites — A review // *International Journal of Mechanical and Materials Engineering*. 2014. Vol. 9, iss. 1. P. 1–15. <https://doi.org/10.1186/s40712-014-0006-7>
6. *Alaneme K. K., Aluko A. O.* Fracture toughness (K_{IC}) and tensile properties of as-cast and age-hardened aluminium (6063)-silicon carbide particulate composites // *Scientia Iranica*. 2012. Vol. 19, iss. 4. P. 992–996. <https://doi.org/10.1016/j.scient.2012.06.001>
7. *Tjong Sie-Chin.* 8 — Processing and deformation characteristics of metals reinforced with ceramic nanoparticles // *Nanocrystalline Materials* / ed. by Sie-Chin Tjong. 2nd ed. Oxford : Elsevier, 2014. P. 269–304. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-407796-6.00008-7>
8. *Casati R., Vedani M.* Metal matrix composites reinforced by nano-particles — A review // *Metals*. 2014. Vol. 4, iss. 1. P. 65–83. <https://doi.org/10.3390/met4010065>
9. *Mobasherpour I., Tofigh A. A., Ebrahimi M.* Effect of nano-size Al₂O₃ reinforcement on the mechanical behavior of synthesis 7075 aluminum alloy composites by mechanical alloying // *Materials Chemistry and Physics*. 2013. Vol. 138, iss. 2–3. P. 535–541. <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2012.12.015>



10. Rana R. S., Purohit R., Das S. Review of recent studies in Al matrix composites // *International Journal of Scientific and Engineering Research*. 2012. Vol. 3, iss. 6. P. 1–16.
11. Pramod S. L. Aluminum – based cast in-situ composites: A review // *Journal of Materials Engineering and Performance*. 2015. Vol. 24, iss. 6. P. 2185–2207. <https://doi.org/10.1007/s11665-015-1424-2>
12. Zemtsova E. G., Yurchuk D. V., Morozov P. E., Kudymov V. K., Smirnov V. M. Features of the synthesis of the dispersed tic phase with nickel nanostructures on the surface to create an aluminum-based metal composite // *Nanomaterials*. 2021. Vol. 11, iss. 10. Art. 2499. <https://doi.org/10.3390/nano11102499>
13. Bauri R., Yadav D., Suhas G. Effect of friction stir processing (FSP) on microstructure and properties of Al-TiC in situ composite // *Materials Science and Engineering A*. 2011. Vol. 528, iss. 13. P. 4732–4739. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2011.02.085>

References

1. Rino J. J., Chandramohan D., Sucitharan K. S., Jebin V. D. An overview on development of aluminium metal matrix composites with hybrid reinforcement. *International Journal of Science and Research*, 2012, vol. 1, iss. 3, pp. 196–203.
2. Tjong S. C. Novel nanoparticle reinforced metal matrix composites with enhanced mechanical properties. *Advanced Engineering Materials*, 2007, vol. 9, iss. 8, pp. 639–652. <https://doi.org/10.1002/adem.200700106>
3. Wang J., Li Z., Fan G., Pan H., Chen Z., Zhang D. Reinforcement with graphene nanosheets in aluminum matrix composites. *Scripta Materialia*, 2012, vol. 66, iss. 8, pp. 594–597. <https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.01.012>
4. Saravanan C., Subramanian K., Krishnan V. A., Narayanan R. S. Effect of particulate reinforced aluminium metal matrix composite – A review. *Mechanics and Mechanical Engineering*, 2015, vol. 19, iss. 1, pp. 23–30.
5. Das D. K., Mishra P. C., Singh S., Pattanaik S. Fabrication and heat treatment of ceramic-reinforced aluminium matrix composites – A review. *International Journal of Mechanical and Materials Engineering*, 2014, vol. 9, iss. 1, pp. 1–15. <https://doi.org/10.1186/s40712-014-0006-7>
6. Alaneme K. K., Aluko A. O. Fracture toughness (K_{IC}) and tensile properties of as-cast and age-hardened aluminium (6063)-silicon carbide particulate composites. *Scientia Iranica*, 2012, vol. 19, iss. 4, pp. 992–996. <https://doi.org/10.1016/j.scient.2012.06.001>
7. Tjong Sie-Chin. 8 – Processing and deformation characteristics of metals reinforced with ceramic nanoparticles. In: Sie-Chin Tjong (ed.) *Nanocrystalline Materials*. 2nd ed. Oxford, Elsevier, 2014, pp. 269–304. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-407796-6.00008-7>
8. Casati R., Vedani M. Metal matrix composites reinforced by nano-particles – A review. *Metals*, 2014, vol. 4, iss. 1, pp. 65–83. <https://doi.org/10.3390/met4010065>
9. Mobasherpour I., Tofigh A. A., Ebrahimi M. Effect of nano-size Al_2O_3 reinforcement on the mechanical behavior of synthesis 7075 aluminum alloy composites by mechanical alloying. *Materials Chemistry and Physics*, 2013, vol. 138, iss. 2–3, pp. 535–541. <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2012.12.015>
10. Rana R. S., Purohit R., Das S. Review of recent studies in Al matrix composites. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, 2012, vol. 3, iss. 6, pp. 1–16.
11. Pramod S. L. Aluminum – based cast in-situ composites: A review. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 2015, vol. 24, iss. 6. P. 2185–2207. <https://doi.org/10.1007/s11665-015-1424-2>
12. Zemtsova E. G., Yurchuk D. V., Morozov P. E., Kudymov V. K., Smirnov V. M. Features of the synthesis of the dispersed tic phase with nickel nanostructures on the surface to create an aluminum-based metal composite. *Nanomaterials*, 2021, vol. 11, iss. 10, art. 2499. <https://doi.org/10.3390/nano11102499>
13. Bauri R., Yadav D., Suhas G. Effect of friction stir processing (FSP) on microstructure and properties of Al-TiC in situ composite. *Materials Science and Engineering A*, 2011, vol. 528, iss. 13, pp. 4732–4739. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2011.02.085>

Поступила в редакцию / Received 02.12.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 109–122

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 109–122
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>, EDN: FKFRHA

Научная статья

УДК 539.3

Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел

Е. В. Мурашкин[✉], Ю. Н. Радаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, Россия, 119526, г. Москва, просп. Вернадского, д. 101, корп. 1

Мурашкин Евгений Валерьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, murashkin@ipmnet.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>, AuthorID: 129570

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, radayev@ipmnet.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>, AuthorID: 103116

Аннотация. В работе рассматривается круг вопросов, связанных с построением двумерных фигур Ная для микрополярных континуумов. Метод двумерного матричного представления тензоров четвертого ранга хорошо известен из монографий по кристаллографии. Такие представления используются для упрощения тензорной записи уравнений анизотропных тел. Указанный метод позволяет представить определяющие тензоры и псевдотензоры четвертого, третьего и второго рангов в виде своеобразных двумерных фигур. В настоящей работе выполнено построение фигур Ная для определяющих гемитропных тензоров четвертого и второго рангов. Получена матричная форма определяющих уравнений гемитропного микрополярного тела в атермическом случае. С помощью свойств псевдоскалярных единиц и их целых степеней выполнена процедура преобразования псевдотензорных основных уравнений микрополярной теории к формулировке в терминах абсолютных тензоров. Основное изложение статьи проводится в терминах абсолютных тензоров в декартовой прямоугольной системе координат.

Ключевые слова: упругий потенциал, определяющий тензор, псевдотензорная единица, гемитропный микрополярный континуум, фигура Ная, матричное представление

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 «Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред»).

Для цитирования: Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 109–122. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>, EDN: FKFRHA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Two-dimensional Nye figures for hemitropic micropolar elastic solids

E. V. Murashkin[✉], Yu. N. Radayev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 101-1 Prospekt Vernadskogo, Moscow 119526 Russia

Evgenii V. Murashkin, murashkin@ipmnet.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>, AuthorID: 129570

Yuri N. Radayev, radayev@ipmnet.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>, AuthorID: 103116

Abstract. The paper is devoted to a wide range of problems related to the two-dimensional Nye figures for micropolar continua. The method of two-dimensional matrix representation of fourth-rank tensors is well



known from monographs on crystallography. Such representations are used to simplify tensor notation of the equations of anisotropic solids. This method allows us to represent the asymmetric constitutive tensors and pseudotensors of the fourth, third and second ranks in the form of specific two-dimensional figures. The Nye figures for the constitutive hemitropic tensors of the fourth and second ranks are given. The matrix form of the constitutive equations of a hemitropic micropolar solid in the athermal case is obtained. The transformation of the pseudotensor governing equations of the micropolar theory to a formulation in terms of absolute tensors is carried out via the pseudoscalar units and their integer powers. The study is carried out in terms of absolute tensors in a Cartesian rectangular coordinate system.

Keywords: elastic energy potential, constitutive tensor, pseudotensor unit, hemitropic micropolar continuum, Nye figure, matrix notation

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00262 “Coupled thermomechanics of micropolar semi-isotropic media”).

For citation: Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Two-dimensional Nye figures for hemitropic micropolar elastic solids. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 109–122 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>, EDN: FKFRHA

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Основные уравнения механики упругого поведения гемитропных (полуизотропных) микрополярных упругих тел основываются на квадратичных формах микрополярных упругих энергетических потенциалов силовых и моментных напряжений [1–10]. Представление таких потенциалов в общем случае требует привлечения формализма псевдотензорной алгебры и анализа [11–20]. Особенно актуально использование такого аппарата при моделировании процессов деформирования материалов, проявляющих полуизотропные (изотропные нецентрально-симметричные (ацентричные), гемитропные, демитропные, хиральные) свойства. Компоненты определяющих тензоров и псевдотензоров гемитропных потенциалов силовых и моментных напряжений проявляют чувствительность к зеркальным отражениям трехмерного пространства. Предполагается, что сам упругий потенциал является абсолютным инвариантом по отношению к произвольным преобразованиям пространства, в том числе к его зеркальным отражениям. В общем анизотропном случае упругий потенциал задается суммой произведений, которые являются абсолютными скалярами, а псевдотензорные веса сомножителей сбалансированы и в сумме равны нулю.

Аккуратное применение специальных представлений определяющих тензоров и псевдотензоров [6, 7, 21] позволяет редуцировать линейное анизотропное микрополярное тело (171 определяющая постоянная) к гемитропному, характеризующемуся девятью определяющими псевдоскалярами. В конвенциональном случае такими псевдоскалярами будут: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная микродлина и 6 псевдоскаляров, не имеющих физической размерности. Характерная микродлина оказывается псевдоскаляром отрицательного веса -1 и проявляет чувствительность к отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

Существуют различные варианты представлений энергетических форм потенциалов асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных микрополярных сред [9, 10]. Существуют способы упрощения тензорной записи уравнений гемитропного континуума, например, известный из кристаллографии метод матричного представления определяющих уравнений [22–26], подробно изложенный в классической монографии Дж. Ф. Ная [22]. Указанный метод позволяет представить определяющие тензоры и псевдотензоры четвертого, третьего и второго рангов в виде своеобразных фигур (симметричных матриц).

В настоящей работе метод матричного представления Ная модифицируется и применяется к упрощению записи энергетической квадратичной формы упругого потенциала напряжений. В отличие от метода Ная, симметричные по построению матрицы компонент определяющих



тензоров представляются их верхнетреугольными аналогами. Построены фигуры Ная для полуизотропного микрополярного тела. Получена матричная форма определяющих уравнений гемитропного микрополярного тела в атермическом случае.

1. Основные понятия ориентируемых трехмерных пространств

Рассмотрим основные понятия ориентируемого евклидова трехмерного пространства [27]. Ориентировать пространство можно различными способами, разделив их на право- и лево-ориентированные. В частности, задание ориентации плоского пространства может быть выполнено путем ренумерации трех линейно независимых направлений координатного репера.

Одним из фундаментальных объектов геометрии являются символы перестановок (альтернирующие символы):

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{в случае } i, j, k = 123, 231, 312; \\ -1, & \text{в случае } i, j, k = 132, 213, 321; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Как известно, символы перестановок являются одновременно ковариантным псевдотензором третьего ранга веса -1 и контравариантным псевдотензором третьего ранга веса $+1$, т.е. на основании их определения справедливо следующее равенство:

$${}^{[-1]}_{\epsilon}_{lsk} = {}^{[+1]}_{\epsilon}{}^{lsk},$$

которое нарушает принятые в псевдотензорной алгебре соглашения о балансе индексов и равенстве весов равных друг другу псевдотензоров. Приведенное равенство является проявлением особого статуса символов перестановок.

Координатные направления в плоском трехмерном пространстве зададим с помощью трех базисных ковариантных векторов $\mathbf{z}_s$ ($s = 1, 2, 3$). Локальный контравариантный базис $\mathbf{z}^s$ ($s = 1, 2, 3$) однозначно определяется следующими соотношениями:

$$\mathbf{z}_s \cdot \mathbf{z}^k = \delta_s^k \quad (k = 1, 2, 3; s = 1, 2, 3),$$

где δ_s^k — символы Кронекера.

Предполагая далее заданными скалярное и векторное произведение двух векторов, введем фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр (веса $+1$)

$$e = \mathbf{z}_1 \cdot (\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}_3)$$

и две псевдоскалярные единицы [28]

$${}^{[+1]}_1 = e, \quad {}^{[-1]}_1 = e^{-1}. \quad (1)$$

В силу (1) ориентации координатных реперов определяются знаком псевдоскалярной единицы положительного веса, т.е. для правоориентированных реперов ${}^{[+1]}_1 > 0$, для левоориентированных ${}^{[+1]}_1 < 0$.

Введем также целые степени g псевдоскалярных единиц, полагая

$${}^{[g]}_1 = \left({}^{[+1]}_1 \right)^g, \quad {}^{[-g]}_1 = \left({}^{[-1]}_1 \right)^g.$$



Заметим, что целые степени псевдоскалярных единиц ковариантно постоянны, т.е.

$$\nabla_k \overset{[\pm g]}{1} = \overset{[\pm g]}{0},$$

где ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования в метрике g_{js} .

Пользуясь псевдоскалярными единицами, определим абсолютные e -тензоры (тензоры перестановок, дискриминантные тензоры) следующими равенствами:

$$e_{ijk} = \overset{[+1]}{1} \epsilon_{ijk}, \quad e^{ijk} = \overset{[-1]}{1} \epsilon^{ijk}.$$

2. Деформации и напряжения в микрополярном континууме

Введем в трехмерном пространстве криволинейную систему координат x^k . Псевдотензорные формулировки уравнений микрополярного континуума существенным образом зависят от способа определения псевдовектора микроповорота $\overset{[g]}{\phi}^s$ (спинорного перемещения) и его веса g [29]. Наиболее распространены формулировки с использованием спинорного перемещения веса $g = +1$, либо $g = -1$. Например, в работе [28] рассматривалась формулировка микрополярного упругого континуума с контравариантным вектором трансляционных перемещений u^k и контравариантным псевдовектором спинорных перемещений $\overset{[+1]}{\phi}^s$ положительного веса $g = +1$. В настоящей работе рассмотрим псевдотензорную формулировку основных уравнений микрополярной теории упругости [18].

В качестве вектора трансляционных перемещений примем ковариантный абсолютный вектор u_k , а спинорные перемещения свяжем с контравариантным псевдовектором $\overset{[+1]}{\phi}^s$ веса $g = +1$.

Ковариантное поле трансляционных перемещений порождает псевдовектор вихря, вычисляемый согласно

$$\overset{[+1]}{\omega}^s = \frac{1}{2} \epsilon^{skl} \nabla_k u_l. \quad (2)$$

Вслед за полным микроповоротом и вихрем поля трансляционных перемещений можно вести речь об относительном псевдовекторе микроповорота

$$\overset{[+1]}{\varphi}^s = \overset{[+1]}{\phi}^s - \overset{[+1]}{\omega}^s = \overset{[+1]}{\phi}^s - \frac{1}{2} \epsilon^{skl} \nabla_k u_l. \quad (3)$$

Этот псевдовектор, наряду с вектором трансляционного перемещения, считается в линейных микрополярных теориях малым и используется при конструировании асимметричного тензора деформации.

Асимметричный тензор деформации геометрически линейных микрополярных теорий

$$\epsilon_{kl} = \epsilon_{(kl)} + \epsilon_{[kl]} \quad (4)$$

складывается из симметричной (определяемой полностью полем перемещений)

$$\epsilon_{(kl)} = \nabla_{(k} u_{l)} = \frac{1}{2} (\nabla_k u_l + \nabla_l u_k)$$

и антисимметричной части (определяемой полностью полем относительных микроповоротов (3))

$$\epsilon_{[kl]} = -\epsilon_{kls} \overset{[+1]}{\varphi}^s.$$

Его можно также определить через полный псевдовектор микроповорота (спина) согласно

$$\epsilon_{kl} = \nabla_k u_l - \overset{[-1]}{\epsilon}_{kls} \overset{[+1]}{\phi}^s. \quad (5)$$



Помимо асимметричного тензора деформации, необходим еще тензор изгиба-кручения

$${}^{[+1]}_{\kappa_{k\cdot}}{}^s = \nabla_k {}^{[+1]}_{\phi^s}, \quad (6)$$

который представляет собой пространственный градиент полного псевдовектора микроповорота.

Определим наконец следующие ассоциированные с тензором ϵ_{is} и псевдотензором ${}^{[+1]}_{\kappa_{k\cdot}}{}^s$ псевдовектор и вектор соответственно:

$${}^{[+1]}_{\varphi^s} = -\frac{1}{2}\epsilon^{skl}\epsilon_{[kl]}, \quad \kappa_s = \frac{1}{2}\epsilon_{skl}{}^{[+1]}_{\kappa}{}^{[kl]}. \quad (7)$$

Псевдотензорная формулировка уравнений статического равновесия может быть получена из принципа виртуальных перемещений псевдотензоров [18] при использовании обобщенной на случай псевдотензоров теоремы Стокса [30–32]:

$$\begin{aligned} \nabla_k t^{kl} &= -X^l, \\ \nabla_k {}^{[-1]}_{\mu}{}^{k\cdot}{}_l - 2 {}^{[-1]}_{\tau_l} &= -Y_l, \end{aligned} \quad (8)$$

где t^{kl} — асимметричный тензор силовых напряжений; ${}^{[-1]}_{\mu}{}^{k\cdot}{}_l$ — псевдотензор моментных напряжений; X^l — вектор объемных сил; Y_l — псевдовектор объемных моментов; ${}^{[-1]}_{\tau_j}$ — ассоциированный (сопутствующий) псевдовектор силовых напряжений

$$2 {}^{[-1]}_{\tau_j} = -\epsilon_{jik} t^{[ik]}, \quad t^{[ik]} = -\epsilon^{ikj} {}^{[-1]}_{\tau_j}. \quad (9)$$

Ассоциированный (сопутствующий) абсолютный вектор моментных напряжений определяется по аналогии с (9)

$$2\mu^i = \epsilon^{iks} {}^{[-1]}_{\mu}{}^{[ks]}, \quad {}^{[-1]}_{\mu}{}^{[is]} = e_{isj} \mu^j. \quad (10)$$

Псевдотензорная формулировка микрополярной теории (2)–(10) может быть преобразована к ковариантной, представленной в работе [8], согласно правилу балансировки весов [33, 34]:

$$\begin{aligned} \phi^s &= 1 \quad \phi^s, & \tau_s &= 1 \quad \tau_s, & \mu_{\cdot l}^{k\cdot} &= 1 \quad \mu_{\cdot l}^{k\cdot}, \\ \varphi^s &= 1 \quad \varphi^s, & \omega^s &= 1 \quad \omega^s, & \kappa_{k\cdot}^s &= 1 \quad \kappa_{k\cdot}^s. \end{aligned}$$

Для замыкания системы (2)–(10) необходимо задать упругий потенциал силовых и моментных напряжений. В дальнейшем изложении для упрощения тензорных представлений ограничимся формулировками в абсолютных тензорах в декартовой прямоугольной системе координат.

3. Первая основная форма потенциала силовых и моментных напряжений

Микрополярное тело называется гемитропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются при поворотах координатного репера, т. е. полуизотропны, но, вообще говоря, изменяются при зеркальных отражениях и инверсиях трехмерного евклидова пространства. Введем микрополярный упругий потенциал $\mathcal{U}$ [8, 35], рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема,

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)}, \kappa_{(ij)}, \varphi_i, \kappa_i).$$

Упругий потенциал $\mathcal{U}$ напряжений по физическому смыслу является объективной величиной и, значит, абсолютным инвариантом по отношению к произвольным преобразованиям



пространства, в том числе к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Поэтому он (так же как и его первая вариация $\delta\mathcal{U}$) является абсолютным скаляром. Первая вариация упругого потенциала представляется суммой абсолютных скаляров

$$\delta\mathcal{U} = t_{(ij)}\delta\epsilon_{(ij)} + \mu_{(ij)}\delta\kappa_{(ij)} + 2\tau_i\delta\varphi_i + 2\mu_i\delta\kappa_i.$$

В итоге определяющие уравнения примут вид

$$t_{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\epsilon_{(ij)}}, \quad \mu_{(ij)} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\kappa_{(ij)}}, \quad 2\tau_i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\varphi_i}, \quad 2\mu_i = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\kappa_i}. \quad (11)$$

Первую основную энергетическую форму анизотропного микрополярного континуума в декартовой системе координат в терминах абсолютных тензоров можно принять в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \mathcal{H}_1^{(is)(lm)}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + \mathcal{H}_2^{(is)(lm)}\kappa_{(is)}\kappa_{(lm)} + \mathcal{H}_3^{(is)(lm)}\epsilon_{(is)}\kappa_{(lm)} + \\ & + \mathcal{H}_4^{(is)}\varphi_i\varphi_s + \mathcal{H}_5^{(is)}\kappa_i\kappa_s + \mathcal{H}_6^{is}\varphi_i\kappa_s. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что определяющие тензоры, участвующие в представлении $\mathcal{U}$, $\mathcal{H}_1^{(is)(lm)}$ и $\mathcal{H}_2^{(is)(lm)}$, — симметричны по парам индексов is, lm и по индексам внутри этих пар; $\mathcal{H}_3^{(is)(lm)}$ — не симметричен по парам индексов is, lm , но симметричен по индексам внутри этих пар; $\mathcal{H}_4^{is}$ и $\mathcal{H}_5^{is}$ — симметричны; $\mathcal{H}_6^{is}$ — асимметричен.

В случае гемитропного тела первая основная энергетическая форма записывается в декартовой системе координат следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & A_1\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + A_2\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(is)}\kappa_{(lm)} + A_3\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(sm)} + \\ & + A_4\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(il)}\kappa_{(sm)} + A_5\delta_{is}\varphi_i\varphi_s + A_6\delta_{is}\kappa_i\kappa_s + A_7\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(is)}\kappa_{(lm)} + A_8\epsilon_{(is)}\kappa_{(is)} + A_9\kappa_i\varphi_i, \end{aligned} \quad (13)$$

где δ_{is} — дельта Кронекера, A_a ($a = 1, \dots, 9$) — определяющие постоянные (коэффициенты жесткости). Определяющие постоянные легко преобразуются к псевдоинвариантам $\overset{[g]}{A}_a$ ($a = 1, \dots, 9$; $g = 0, \pm 1, \pm 2$) согласно правилу

$$\overset{[g]}{A}_a = \overset{[g]}{1}_a \overset{[g]}{A}_a.$$

Только три из них, а именно $\overset{[-1]}{A}_7$, $\overset{[-1]}{A}_8$, $\overset{[-1]}{A}_9$, оказываются чувствительными к зеркальным отражениям трехмерного пространства, что определяет гемитропность микрополярного тела, задаваемого потенциалом силовых и моментных напряжений (13).

В декартовой системе координат определяющие постоянные в выражении (13) связаны с определяющими тензорами анизотропного потенциала (12) следующими соотношениями [21, р. 66–70]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{islm} &= A_1\delta_{is}\delta_{lm} + A_3\delta_{il}\delta_{sm}, & \mathcal{H}_4^{is} &= A_5\delta_{is}, \\ \mathcal{H}_2^{islm} &= A_2\delta_{is}\delta_{lm} + A_4\delta_{il}\delta_{sm}, & \mathcal{H}_5^{is} &= A_6\delta_{is}, \\ \mathcal{H}_3^{islm} &= A_7\delta_{is}\delta_{lm} + A_8\delta_{il}\delta_{sm}, & \mathcal{H}_6^{is} &= A_9\delta_{is}. \end{aligned} \quad (14)$$

Определяющие уравнения (11) для гемитропного микрополярного континуума, определяемого потенциалом (13), получаются в виде

$$t_{(is)} = 2A_1\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(lm)} + 2A_3\delta_{il}\delta_{sm}\epsilon_{(lm)} + A_7\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(lm)} + A_8\kappa_{(is)},$$



$$\begin{aligned}\mu_{(is)} &= 2A_2\delta_{is}\delta_{lm}\kappa_{(lm)} + 2A_4\delta_{il}\delta_{sm}\kappa_{(lm)} + A_7\delta_{is}\delta_{lm}\epsilon_{(lm)} + A_8\epsilon_{(is)}, \\ 2\tau_i &= 2A_5\varphi_i + A_9\kappa_i, \quad 2\mu^i = 2A_6\kappa_i + A_9\varphi_i.\end{aligned}$$

Вместо девяти коэффициентов жесткости A_a удобнее ввести другие определяющие постоянные:

$$\begin{aligned}A_1 &= G\nu(1-2\nu)^{-1}, \quad A_2 = GL^2c_3, \quad A_3 = G, \\ A_4 &= GL^2, \quad A_5 = 2Gc_1, \quad A_6 = GL^2c_2, \\ A_7 &= GLc_4, \quad A_8 = GLc_5, \quad A_9 = GLc_6,\end{aligned}$$

с тем чтобы в итоге пришлось иметь дело с двумя размерными и семью безразмерными постоянными: G — модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений); ν — коэффициент Пуассона (не имеет физической размерности); L — характерная длина микрополярной теории; c_k ($k = \overline{1,6}$) — физически безразмерные микрополярные упругие модули.

4. Матричные обозначения определяющих соотношений гемитропного континуума

Для компактности записи тензорных уравнений иногда выгодно использовать матричные обозначения [22, р. 113–115], которые позволяют представить компоненты тензора четвертого ранга элементами матрицы, уменьшив количество индексов с 4 до 2, а тензоры второго ранга — векторами. Однако необходимо помнить, что двухиндексные экстенсивы, соответствующие тензорам четвертого ранга, не преобразуются по тензорным правилам.

Заменим компоненты симметричной части асимметричного тензора деформаций согласно следующей схеме:

$$\epsilon_{(is)} \rightarrow \epsilon_K = \begin{bmatrix} \epsilon_{(11)} & \epsilon_{(12)} & \epsilon_{(13)} \\ \epsilon_{(21)} & \epsilon_{(22)} & \epsilon_{(23)} \\ \epsilon_{(31)} & \epsilon_{(32)} & \epsilon_{(33)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \frac{1}{2}\epsilon_6 & \frac{1}{2}\epsilon_5 \\ \frac{1}{2}\epsilon_6 & \epsilon_2 & \frac{1}{2}\epsilon_4 \\ \frac{1}{2}\epsilon_5 & \frac{1}{2}\epsilon_4 & \epsilon_3 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом заменим симметричную часть тензора изгиба-кручения

$$\kappa_{(is)} \rightarrow \kappa_K = \begin{bmatrix} \kappa_{(11)} & \kappa_{(12)} & \kappa_{(13)} \\ \kappa_{(21)} & \kappa_{(22)} & \kappa_{(23)} \\ \kappa_{(31)} & \kappa_{(32)} & \kappa_{(33)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \kappa_1 & \frac{1}{2}\kappa_6 & \frac{1}{2}\kappa_5 \\ \frac{1}{2}\kappa_6 & \kappa_2 & \frac{1}{2}\kappa_4 \\ \frac{1}{2}\kappa_5 & \frac{1}{2}\kappa_4 & \kappa_3 \end{bmatrix}.$$

Для симметричных частей тензоров силовых и моментных напряжений введем следующую замену:

$$\begin{aligned}t_{(is)} &\rightarrow t_K = \begin{bmatrix} t_{(11)} & t_{(12)} & t_{(13)} \\ t_{(21)} & t_{(22)} & t_{(23)} \\ t_{(31)} & t_{(32)} & t_{(33)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} t_1 & t_6 & t_5 \\ t_6 & t_2 & t_4 \\ t_5 & t_4 & t_3 \end{bmatrix}, \\ \mu_{(is)} &\rightarrow \mu_K = \begin{bmatrix} \mu_{(11)} & \mu_{(12)} & \mu_{(13)} \\ \mu_{(21)} & \mu_{(22)} & \mu_{(23)} \\ \mu_{(31)} & \mu_{(32)} & \mu_{(33)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_6 & \mu_5 \\ \mu_6 & \mu_2 & \mu_4 \\ \mu_5 & \mu_4 & \mu_3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Матричная форма определяющих уравнений гемитропного микрополярного упругого тела принимает вид

$$\begin{cases} t_K = 2\mathcal{H}_1 \kappa_N \epsilon_N + \mathcal{H}_3 \kappa_N \kappa_N, \\ \mu_K = 2\mathcal{H}_2 \kappa_N \kappa_N + \mathcal{H}_3 \kappa_N \epsilon_N, \\ 2\tau_i = 2\mathcal{H}_4 \varphi_s + \mathcal{H}_6 \kappa_s, \\ 2\mu_i = 2\mathcal{H}_5 \kappa_s + \mathcal{H}_6 \varphi_s. \end{cases} \quad (15)$$



Преобразование определяющих тензоров $\mathcal{H}_{isl m}^a$ и $\mathcal{H}_{is}^c$ ($a = 1, 2, 3$; $c = 4, 5, 6$) в (15) к виду двумерных матриц произведено при помощи соответствующей замены индексов из таблицы. Метаиндексы a и c не являются тензорными индексами и нумеруют определяющие тензоры.

Соответствие пар тензорных и матричных индексов
Table. Correspondence of pairs of tensor and matrix indices

Пары тензорных индексов (is, lm)	11	22	33	23, 32	31, 13	12, 21
Матричные индексы (K, N)	1	2	3	4	5	6

Рассмотрим матрицу $\mathcal{H}_{1 KN}$ из первого слагаемого в квадратичной форме упругого потенциала напряжений (12). Компоненты определяющей матрицы $\mathcal{H}_{1 KN}$ связаны с определяющими постоянными A при учете (14) следующим образом:

$$\mathcal{H}_{1 KN} = \begin{bmatrix} A + \frac{A}{3} & \frac{A}{3} & \frac{A}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{3} & A + \frac{A}{3} & \frac{A}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{3} & \frac{A}{3} & A + \frac{A}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{3} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Заметим, что матрица $\mathcal{H}_{1 KN}$ симметрична относительно главной диагонали, поэтому при построении двумерной фигуры Ная можно опустить ее нижнюю треугольную часть (рис. 1, а).

Аналогичные рассуждения проведем для оставшихся слагаемых упругого потенциала напряжений (12). Компоненты матрицы $\mathcal{H}_{2 KN}$ из второго слагаемого в форме упругого потенциала напряжений (12) определяются следующим образом:

$$\mathcal{H}_{2 KN} = \begin{bmatrix} A + \frac{A}{4} & \frac{A}{4} & \frac{A}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{4} & A + \frac{A}{4} & \frac{A}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{4} & \frac{A}{4} & A + \frac{A}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{4} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Двумерная фигура Ная матрицы $\mathcal{H}_{2 KN}$ при отбрасывании ее треугольной части ниже главной диагонали принимает вид, представленный на рис. 1, б.

В записи третьего слагаемого квадратичной формы потенциала напряжений (12) участвует определяющий тензор $\mathcal{H}_{3 KN}$. Компоненты его определяющей матрицы $\mathcal{H}_{3 KN}$ выписываются следующим образом:

$$\mathcal{H}_{3 KN} = \begin{bmatrix} A + \frac{A}{8} & \frac{A}{8} & \frac{A}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{8} & A + \frac{A}{8} & \frac{A}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A}{8} & \frac{A}{8} & A + \frac{A}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{8} \end{bmatrix}. \quad (18)$$



Двумерная фигура Ная матрицы $\mathcal{H}_{KN}$, если учесть свойства симметрии и отбросить ее нижнюю треугольную часть, принимает вид, представленный на рис. 1, в.

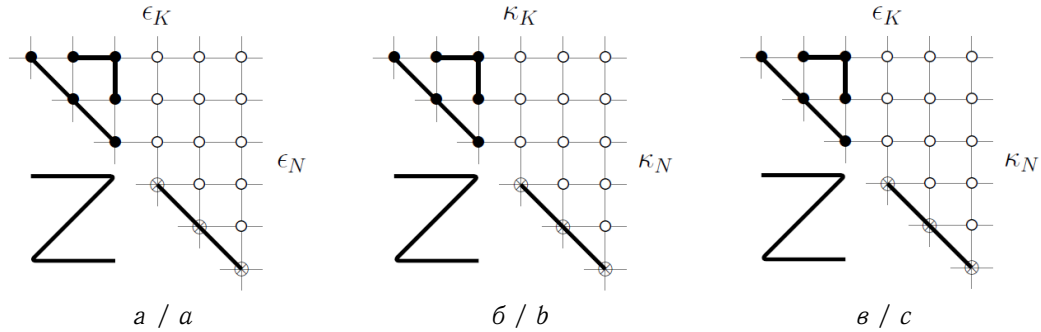


Рис. 1. Двумерные фигуры Ная гемитропных определяющих тензоров: а — $\mathcal{H}_{1 islm}$; б — $\mathcal{H}_{2 islm}$; в — $\mathcal{H}_{3 islm}$. $\circ$ — нулевые компоненты, $\bullet$ — компоненты, отличные от нуля, $\otimes = (\mathcal{H}_{11} - \mathcal{H}_{12})$, жирными отрезками соединены равные компоненты, Z означает, что ниже главной диагонали симметрично расположены идентичные (в плане числового равенства) элементы

Fig. 1. Two-dimensional Nye figures of hemitropic constitutive tensors: a is $\mathcal{H}_{1 islm}$; b is $\mathcal{H}_{2 islm}$; c is $\mathcal{H}_{3 islm}$. $\circ$ denotes zero component, $\bullet$ denotes nonzero component, $\otimes = (\mathcal{H}_{11} - \mathcal{H}_{12})$, equal components are connected by bold segments, Z means identical (in terms of numerical equality) elements symmetrically located below the main diagonal

Последние три слагаемых в записи квадратичной формы упругого потенциала напряжений (12) являются аналогами скалярного произведения векторов. В случае гемитропного тела определяющие тензоры $\mathcal{H}_{is}$ ($c = 4, 5, 6$) — шаровые (14). Фигуры Ная определяющих матриц $\mathcal{H}_{is}$ ($c = 4, 5, 6$) представлены на рис. 2.

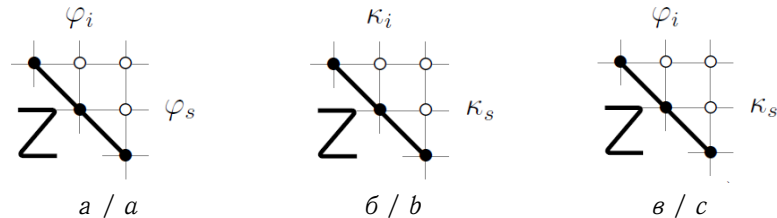


Рис. 2. Двумерные фигуры Ная гемитропных определяющих тензоров: а — $\mathcal{H}_{4 is}$; б — $\mathcal{H}_{5 is}$; в — $\mathcal{H}_{6 is}$. $\circ$ — нулевые компоненты, $\bullet$ — компоненты, отличные от нуля, жирными отрезками соединены равные компоненты, Z означает, что ниже главной диагонали симметрично расположены идентичные (в плане числового равенства) элементы

Fig. 2. Two-dimensional Nye figures of hemitropic constitutive tensors: a is $\mathcal{H}_{4 is}$; b is $\mathcal{H}_{5 is}$; c is $\mathcal{H}_{6 is}$. $\circ$ denotes zero component, $\bullet$ denotes nonzero component, equal components are connected by bold segments, Z means identical (in terms of numerical equality) elements symmetrically located below the main diagonal.

Двумерная фигура Ная для гемитропного микрополярного упругого тела может быть получена путем объединения элементарных фигур для определяющих матриц, изображенных на рис. 1, 2. В результате несложных геометрических преобразований получим фигуру Ная (рис. 3, а).

На рис. 3, б представлена фигура Ная для определяющих уравнений гемитропного микрополярного упругого тела. Пересечение жирных линий на рис. 3, б не говорит о связи соответствующих компонент определяющих матриц.

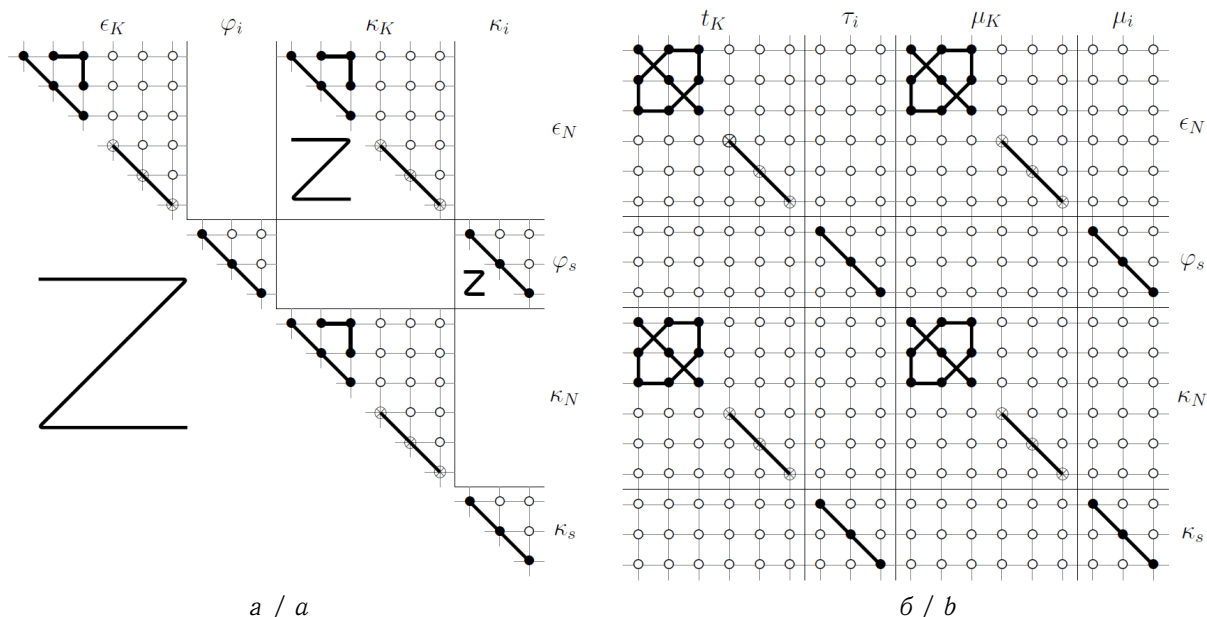


Рис. 3. Двумерные фигуры Ная гемитропного микрополярного упругого тела (а) и его определяющих уравнений (б). $\circ$ — нулевые компоненты, $\bullet$ — компоненты, отличные от нуля, $\otimes = (\mathcal{H}_{11}^a - \mathcal{H}_{12}^a)$, жирными отрезками соединены равные компоненты, Z означает, что ниже главной диагонали расположены идентичные (в плане числового равенства) элементы

Fig. 3. Two-dimensional Nye figures of hemitropic micropolar elastic solid (a) and its constitutive equations (b). $\circ$ denotes zero component, $\bullet$ denotes nonzero component, $\otimes = (\mathcal{H}_{11}^a - \mathcal{H}_{12}^a)$, equal components are connected by bold segments, Z means identical (in terms of numerical equality) elements symmetrically located below the main diagonal

Заключение

В работе рассмотрены вопросы, связанные с построением двумерных фигур Ная для гемитропных микрополярных упругих континуумов.

1. Выполнена процедура преобразования псевдотензорной формулировки основных уравнений микрополярной теории к формулировке в терминах абсолютных тензоров.

2. Общая анизотропная форма микрополярного упругого потенциала напряжений редуцирована к гемитропной форме.

3. Получена матричная форма определяющих уравнений гемитропного микрополярного тела.

4. Построены двумерные фигуры Ная для определяющих тензоров гемитропного упругого микрополярного тела. В отличие от метода Ная симметричные по построению матрицы компонент определяющих тензоров представляются их верхнетреугольными аналогами.

5. Произведена сборка блоков Ная в фигуру, графически представляющую тензорные определяющие уравнения гемитропного тела.

Список литературы

1. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat – Körper // Acta Mechanica. 1966. Vol. 2. P. 48–69. <https://doi.org/10.1007/BF01176729>
2. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua // Applied Mechanics / ed. by H. Görtler. Berlin, Heidelberg : Springer, 1966. P. 153–158. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16



3. Nowacki W. Theory of Micropolar Elasticity. Berlin : Springer, 1972. 285 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>
4. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford : Pergamon Press, 1986. 383 p.
5. Dyszlewicz J. Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg : Springer, 2004. 345 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>
6. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2 (52). С. 106–117. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>, EDN: FQVGRK
7. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 2 (52). С. 118–127. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>, EDN: ESTJSA
8. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>, EDN: YOYJQD
9. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 3 (53). С. 86–100. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>, EDN: YOENQV
10. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4 (54). С. 108–115. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>, EDN: DTZTJY
11. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. Москва : Наука, 1965. 456 с.
12. Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. Москва : Наука, 1971. 376 с.
13. Synge J. L., Schild A. Tensor Calculus. New York : Dover Publication Inc., 1978. 324 p.
14. Das A. J. Tensors: The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics. New York : Springer, 2007. 290 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>
15. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. Москва ; Ленинград : ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с.
16. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. Vol. 26, iss. 3. P. 373–377. <https://doi.org/10.2307/1989146>
17. Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1948. 140 с.
18. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>, EDN: TODIFV
19. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 3. С. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>, EDN: TYGBER
20. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 4. С. 752–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>, EDN: IVEASC
21. Jeffreys H. Cartesian Tensors. Cambridge : Cambridge University Press. 1931. 101 p.
22. Nye J. F. Physical Properties of Crystals, Their Representation by Tensors and Matrices. Oxford : Clarendon Press, 1957. 322 p.
23. Wooster W. A. Experimental Crystal Physics. Oxford : Clarendon Press, 1957. 116 p.
24. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristalloptik). Fachmedien, Wiesbaden : Springer, 1966. 979 p.



25. Standards on Piezoelectric Crystals. Proceedings of the I.R.E. New York : IRE, 1949. 18 p.
26. Zheng Q. S., Spencer A. J. M. On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // International Journal of Engineering Science. 1993. Vol. 31, iss. 4. P. 617–435. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(93\)90054-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90054-X)
27. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. Москва : Наука, 1966. 648 с.
28. Радаев Ю. Н. Тензоры с постоянными компонентами в определяющих уравнениях гемитропного микрополярного тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2023. № 5. С. 98–110. EDN: PHNOCG <https://doi.org/10.31857/S057232992370006X>, EDN: PHNOCG
29. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, iss. 6. P. 2440–2449. <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>, EDN: PINYDI
30. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 205–215. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>, EDN: VURXND
31. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>, EDN: ZKIAAJ
32. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории ориентированных тензорных элементов площади микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 2. С. 3–13. <https://doi.org/10.31857/S0572329922020155>, EDN: KRUCOL
33. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 1 (51). С. 17–26. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>, EDN: ZJWFGT
34. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. An algebraic algorithm of pseudotensors weights eliminating and recovering // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, iss. 6. P. 1416–1423. <https://doi.org/10.3103/s0025654422060085>, EDN: CSZGEL
35. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>, EDN: XYERLC

References

1. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat – Körper. *Acta Mechanica*, 1966, vol. 2, pp. 48–69. <https://doi.org/10.1007/BF01176729>
2. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua. In: Görtler H. (ed.) *Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1966, pp. 153–158. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16
3. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*. Berlin, Springer, 1972. 285 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>
4. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986. 383 p.
5. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2004. 345 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>
6. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclid spaces. Elements of the theory. *Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a Limit State*, 2022, iss. 2 (52), pp. 106–117 (in Russian). <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>, EDN: FQVGRK
7. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclid spaces. Applications to continuum mechanics. *Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a Limit State*, 2022, iss. 2 (52), pp. 118–127 (in Russian). <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>, EDN: ESTJSA



8. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2018, vol. 22, iss. 3, pp. 504–517 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>, EDN: YOYJQD
9. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On two base natural forms of asymmetric force and couple stress tensors of potential in mechanics of hemitropic solids. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a Limit State*, 2022, iss. 3 (53), pp. 86–100 (in Russian). <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>, EDN: YOEHQV
10. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a Limit State*, 2022, iss. 4 (54), pp. 108–115. (in Russian). <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>, EDN: DTZTJY
11. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1951. 434 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1965. 456 p.).
12. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York, John Wiley & Sons Inc., 1964. 361 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1971. 376 p.).
13. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York, Dover Publication Inc., 1978. 324 p.
14. Das A. J. *Tensors: The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. New York, Springer, 2007. 290 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>
15. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 p. (Russ. ed.: Moscow, Leningrad, OGIZ, GITTL, 1948. 408 p.).
16. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1924, vol. 26, iss. 3, pp. 373–377. <https://doi.org/10.2307/1989146>
17. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*. Cambridge, Cambridge University Press, 1927. 114 p. (Russ. ed.: Moscow, IIL, 1948. 140 p.).
18. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media. *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, iss. 4, pp. 399–412 (in Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>, EDN: TODIFV
19. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, iss. 3, pp. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>, EDN: TYGBER
20. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, iss. 4, pp. 752–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>, EDN: IVEASC
21. Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge, Cambridge University Press, 1931. 101 p.
22. Nye J. F. *Physical Properties of Crystals, Their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford, Clarendon Press, 1957. 322 p.
23. Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford, Clarendon Press, 1957. 116 p.
24. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristalloptik)*. Fachmedien, Wiesbaden, Springer, 1966. 979 p.
25. *Standards on Piezoelectric Crystals. Proceedings of the I.R.E.* New York, IRE, 1949. 18 p.
26. Zheng Q. S., Spencer A. J. M. On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems. *International Journal of Engineering Science*, 1993, vol. 31, iss. 4, pp. 617–435. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(93\)90054-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90054-X)
27. Rosenfeld B. A. *Mnogomernye prostranstva [Multidimensional Spaces]*. Moscow, Nauka, 1966. 648 p. (in Russian).
28. Radayev Yu. N. Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids. *Mechanics of Solids*, 2023, vol. 58, iss. 5, pp. 1517–1527. <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>
29. Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, iss. 6, pp. 2440–2449. <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>, EDN: PINYDI
30. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral



- theorem. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 205–215. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>, EDN: VURXND
31. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2021, vol. 25, iss. 4, pp. 776–786 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>, EDN: ZKIAAJ
32. Murashkin E. V., Radaev Y. N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 2, pp. 205–213. <https://doi.org/10.3103/s0025654422020108>, EDN: SNKUNC
33. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors to absolute tensors. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a Limit State*, 2022, iss. 1 (51), pp. 17–26 (in Russian). <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>, EDN: ZJWFGT
34. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. An algebraic algorithm of pseudotensors weights eliminating and recovering. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 6, pp. 1416–1423. <https://doi.org/10.3103/s0025654422060085>, EDN: CSZGEL
35. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2021, vol. 25, iss. 3, pp. 457–474 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>, EDN: XYERLC

Поступила в редакцию / Received 18.08.2023

Принята к публикации / Accepted 11.09.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 123–137

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 123–137
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-123-137>, EDN: TMUGDP

Научная статья

УДК 539.374

Вынужденные колебания трехслойной пластины в нестационарном температурном поле

Э. И. Старовойтов[✉], Д. В. Леоненко

Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь, 246653, г. Гомель, ул. Кирова, д. 34

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительной механики, геотехники и строительных конструкций, edstar0@yandex.by, <https://orcid.org/0000-0002-2550-5377>, AuthorID: 152968

Леоненко Денис Владимирович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой строительной механики, геотехники и строительных конструкций, leoden@tut.by, <https://orcid.org/0000-0001-8003-9279>, AuthorID: 518257

Аннотация. Исследовано влияние теплового потока постоянной интенсивности на вынужденные колебания круговой трехслойной несимметричной по толщине пластины, теплоизолированной по контуру и нижней плоскости. Использовано приближенное решение задачи теплопроводности, полученное с помощью усреднения теплофизических характеристик материалов слоев по толщине пакета. Нестационарное температурное поле неоднородно по толщине пластины. Согласно гипотезе Неймана, свободные колебания пластины, вызванные мгновенным падением теплового потока, суммируются с вынужденными колебаниями от силовой нагрузки. Деформирование пакета пластины соответствует гипотезе ломаной линии. В относительно тонких внешних несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В несжимаемом по толщине, достаточно толстом заполнителе деформированная нормаль сохраняет прямолинейность и длину, но поворачивается на дополнительный угол. Постановка соответствующей начально-краевой задачи включает уравнения движения, полученные при помощи принципа Даламбера и вариационного метода Лагранжа. Начальные условия приняты однородными, контур пластины шарнирно оперт. Аналитическое решение неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных получено с помощью метода разложения в ряд по системе собственных ортонормированных функций. В результате выписаны аналитические выражения для трех искомых функций — прогиба пластины, сдвига и радиального перемещения в заполнителе. Рассмотрен пример колебаний под действием мгновенно приложенной, равномерно распределенной нагрузки. Приведен числовой параметрический анализ частот собственных колебаний и полученного решения в зависимости от интенсивности теплового потока для пластины со слоями: титановый сплав, фторопласт-4, дюралюминий.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, вынужденные колебания, нестационарное температурное поле

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T22УЗБ-015).

Для цитирования: Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Вынужденные колебания трехслойной пластины в нестационарном температурном поле // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 123–137. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-123-137>, EDN: TMUGDP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Forced oscillations of a three-layer plate in an unsteady temperature field

E. I. Starovoitov[✉], D. V. Leonenko

Belarusian State University of Transport, 34 Kirova St., Gomel 246653, Belarus

Eduard I. Starovoitov, edstar0@yandex.by, <https://orcid.org/0000-0002-2550-5377>, AuthorID: 152968

Denis V. Leonenko, leoden@tut.by, <https://orcid.org/0000-0001-8003-9279>, AuthorID: 518257

Abstract. The effect of a constant intensity heat flux on forced oscillations of a circular three-layer plate with an asymmetric thickness is investigated. The plate is thermally insulated along the contour and the lower plane. An approximate solution of the thermal conductivity problem was used, obtained by averaging the thermophysical parameters of the materials of the layers over the thickness of the package. According to the Neumann hypothesis, free plate oscillations caused by an instantaneous drop in heat flow are summed up with forced oscillations from the power load. The deformation of the plate package corresponds to the polyline hypothesis. In relatively thin outer bearing layers, Kirchhoff's hypotheses are valid. In sufficiently thick incompressible filler, the deformed normal retains straightness and length, but rotates by an additional angle. The formulation of the corresponding initial boundary value problem includes the equations of motion obtained using the d'Alembert principle and the variational Lagrange method. The initial conditions are assumed to be homogeneous, the contour of the plate is pivotally supported. The analytical solution of an inhomogeneous system of partial differential equations is obtained using the method of expansion into a series according to a system of proper orthonormal functions. As a result, analytical expressions are written out for three desired functions – plate deflection, shear and radial displacement in the filler. An example of oscillations under the action of an instantaneously applied uniformly distributed load is considered. A numerical parametric analysis of the natural oscillation frequencies and the resulting solution depending on the intensity of the heat flux for a plate with layers of titanium alloy, fluoroplast-4, and duralumin is given.

Keywords: three-layer circular plate, forced oscillations, unstable temperature field

Acknowledgements: The was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project No. T22UZB-015).

For citation: Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Forced oscillations of a three-layer plate in an unsteady temperature field. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 123–137 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-123-137>, EDN: TMUGDP
This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Трехслойные конструкции, в частности пластины, находят широкое применение в различных областях современной техники: космической, авиационной, кораблестроительной; промышленном, гражданском и транспортном строительстве. Современные требования машиностроения к прочности конструкций, работающих в условиях воздействия физико-механических полей, обуславливают необходимость применения композиционных материалов и создания соответствующих расчетных моделей. Одним из основных внешних факторов является тепловое воздействие. Проблема исследования напряженно-деформированного состояния композитных элементов конструкций при комплексных квазистатических и динамических термосиловых нагрузках относится к числу наиболее актуальных в настоящее время. Созданию соответствующих механико-математических моделей деформирования посвящен ряд публикаций.

В монографиях [1–4] предлагаются подходы к разработке различных математических моделей как статического, так и динамического нагружения композитных элементов конструкций при комплексных термосиловых нагрузках. В них изложены постановки и методы



решения соответствующих краевых задач, анализируются возникающие температурные напряжения, приводятся результаты экспериментальных исследований зависимости упругих свойств материалов от температуры. Статьи [5–9] посвящены исследованию колебаний и волн в неоднородных цилиндрических оболочках. Нестационарное динамическое воздействие на сферические оболочки рассмотрено в работах [10, 11].

В публикациях [12–15] исследуется отклик пластин с нерегулярной структурой на действие быстропеременных по времени силовых и температурных нагружений, на косой удар, акустическое воздействие. Частоты собственных колебаний круглой тонкой пластины с нелинейно возмущенными параметрами описаны в [16]. Резонансные колебания трехслойных пластин рассмотрены в работах [17–19]. Статьи [20–23] посвящены колебаниям трехслойных пластин, связанных с жидкостью. Воздействие нестационарной нагрузки на балку Тимошенко и влияние функционально-градиентных материалов на динамические и изгибные характеристики многослойных балок рассмотрено в [24–26]. Тепловой и радиационный удары по трехслойной пластине изучены в статье [27], флаттер — в [28].

Изгиб трехслойных физически нелинейных пластин в терморadiационном поле исследован в статьях [29, 30]. Теория многослойных оболочек, имеющих поперечно мягкую сердцевину и усиленных по их контуру, и трехслойных пластин при конечных прогибах разрабатывается в [31–33]. Отдельные задачи деформирования трехслойных стержней, пластин и панелей решены в работах [34–38].

Здесь рассмотрена задача о вынужденных упругих осесимметричных колебаниях шарнирно опертой трехслойной круговой пластины, возбужденных падающим тепловым потоком и мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузкой.

1. Температурное поле в трехслойной пластине

Начально-краевая задача решается в цилиндрической системе координат. Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось z направлена перпендикулярно вверх, к первому слою (рис. 1). Толщины тонких несущих слоев $h_1 \neq h_2$, в заполнителе $h_3 = 2c$. Предполагается, что на наружную поверхность верхнего несущего слоя ($z = c + h_1$) падает тепловой поток интенсивности q_t . Нижняя поверхность пластины и ее контур ($z = -c - h_2, r = r_1$) принимаются теплоизолированными.

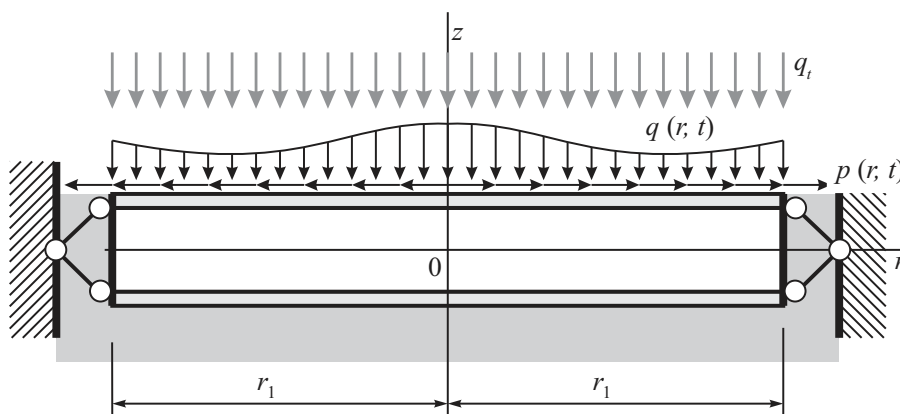


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной круговой пластины, шарнирно опертой по контуру

Fig. 1. Design scheme of a three-layer circular plate pivotally supported along the contour

При указанных условиях теплообмена нестационарное температурное поле $T(z, t)$, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0 , будет определяться следующим соотношением,



полученным с помощью усреднения теплофизических характеристик по толщине пластины [39]:

$$T = \frac{q_t H}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

где $a = \lambda/C$, $\lambda = \sum_{k=1}^3 \lambda_k h_k / H$, $C = \sum_{k=1}^3 C_k h_k / H$, $H = \sum_{k=1}^3 h_k$, $s = z/H$, $\tau = ta/H^2$; a_k — усредненная температуропроводность; λ_k , C_k — коэффициенты теплопроводности и теплоемкости материала k -го слоя; t — время.

2. Постановка начально-краевой задачи

Для пластины принимаются следующие гипотезы деформирования: в несущих слоях — Кирхгофа; в легком заполнителе — прямолинейность и несжимаемость деформированной нормали. Деформации связаны с напряжениями термоупругими соотношениями закона Гука:

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k e_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T) \quad (k = 1, 2, 3), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_k e_{rz}^{(3)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $s_{\alpha}^{(k)}$, $e_{\alpha}^{(k)}$ — девиаторные и $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций в k -ом слое; G_k , K_k — модули сдвигового и объемного деформирования; α_{0k} — коэффициент линейного температурного расширения.

Рассматриваются вынужденные колебания в тепловом потоке трехслойной круговой пластины с легким заполнителем, шарнирно опертой по контуру. Общие уравнения движения пластины при изотермическом нагружении получены с помощью принципа Даламбера и вариационного метода Лагранжа и приведены в [18]. Поскольку температура не зависит от радиуса пластины, система дифференциальных уравнений в нестационарном температурном поле (1) имеет подобный вид:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w, r) &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w, r) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w, r) - M_0 \ddot{w} &= q, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u(r, t)$ — радиальное перемещение координатной плоскости; $w(r, t)$ — прогиб пластины; $\psi(r, t)$ — относительный сдвиг в заполнителе; $M_0 \ddot{w}$ — поперечные инерционные силы; $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_1^2$; ρ_k — плотность материала; $q(r, t)$ — внешняя осесимметричная поверхностная нагрузка; запятая в нижнем индексе обозначает производную по следующей за ней координате, точкой вверху обозначена производная по времени; L_2 , L_3 — линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg) \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+,$$

$$a_4 = c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right),$$

$$a_5 = c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right],$$

$$a_6 = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+,$$



$$K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k.$$

На шарнирно опертом контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев, следовательно, при $r = r_1$ должны выполняться кинематические условия

$$u = \psi = w = 0, \quad M_r = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z dz = 0, \quad (4)$$

где $\sigma_r^{(k)}$ — радиальное напряжение, M_r — изгибающий момент

$$M_r = a_3 u_{,r} + a_5 \psi_{,r} - a_6 w_{,rr} - a_{60} \frac{w_{,r}}{r_1} - M_t, \quad M_t = \sum_{k=1}^3 M_{kt} = 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_k K_k \int_{h_k} T z dz,$$

$$a_{60} = h_1 K_1^- (c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2) + h_2 K_2^- (c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-,$$

M_t — температурный момент, обусловленный объемной тепловой деформацией (2).

Начальные условия движения принимаются однородными

$$w(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = 0, \quad T(z, 0) = 0. \quad (5)$$

После некоторых очевидных преобразований и двукратного интегрирования первых двух уравнений система (3) приводится к виду

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \quad L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = q, \quad (6)$$

где

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad M^4 = M_0 D, \quad D = \frac{a_4}{a_6 a_4 - a_5^2}.$$

Перемещения ограничены в центре пластины, поэтому при отсутствии отверстий необходимо в (6) положить константы интегрирования $C_2 = C_4 = 0$. Выражение для температурного момента M_t в (4) получим с помощью (1):

$$M_t = \sum_{k=1}^3 M_{kt} = 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} K_k \int_{h_k} T z dz, \quad (7)$$

где

$$M_{1t} = \frac{3q_t H \alpha_{01} K_1}{\lambda} \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) \left(\tau - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2H^2} \left(\frac{(h_1 + c)^4 - c^4}{4} + \right. \right.$$

$$\left. + 2h_1(c + h_2)(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2) + h_1(c + \frac{1}{2}h_1)(c + h_2)^2 \right) -$$

$$- \frac{2H}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \tau)}{n^3} \left(\frac{H}{\pi n} \left((-1)^n - \cos \frac{\pi n(2c + h_2)}{H} \right) - c \sin \frac{\pi n(2c + h_2)}{H} \right) \right];$$

$$M_{2t} = \frac{3q_t H \alpha_{02} K_2}{\lambda} \left[-h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \left(\tau - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2H^2} \left(\frac{c^4 - (h_2 + c)^4}{4} + \right. \right.$$

$$\left. + 2h_2(c + h_2)(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2) - h_2(c + \frac{1}{2}h_2)(c + h_2)^2 \right) -$$



$$-\frac{2H}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \tau)}{n^3} \left(\frac{H}{\pi n} \left(\cos \frac{\pi n h_2}{H} - 1 \right) - c \sin \frac{\pi n h_2}{H} \right) \Bigg];$$

$$M_{3t} = \frac{3q_t H \alpha_{03} K_3}{\lambda} \left[\frac{2c^3(c+h_2)}{3H^2} - \frac{2H}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \tau)}{n^3} \times \right.$$

$$\times \left. \left(\frac{H}{\pi n} \left(\cos \frac{\pi n(2c+h_2)}{H} - \cos \frac{\pi n h_2}{H} \right) + c \left(\sin \frac{\pi n(2c+h_2)}{H} + \sin \frac{\pi n h_2}{H} \right) \right) \right].$$

Из граничных условий (4) для радиального перемещения и относительного сдвига следует

$$C_1 = -\frac{b_1}{r_1} w_{,r}(r_1, t), \quad C_3 = -\frac{b_2}{r_1} w_{,r}(r_1, t).$$

Эти соотношения позволяют получить два граничных условия для прогиба при $r = r_1$:

$$w = 0, \quad a_7 w_{,rr} + \frac{a_8}{r_1} w_{,r} = -M_t, \quad (8)$$

где $a_7 = a_6 - a_3 b_1 - a_5 b_2$, $a_8 = a_{60} + a_3 b_1 + a_5 b_2$.

Таким образом, для определения динамического прогиба рассматриваемой пластины, вызванного распределенной нагрузкой $q(r, t)$ и тепловым потоком q_t , имеем начально-краевую задачу, состоящую из неоднородного дифференциального уравнения в частных производных (6), однородных начальных условий (5) и неоднородных граничных условий на контуре (8). В силу принципа суперпозиции эту задачу можно разложить на две: вынужденные колебания под действием силовой нагрузки $q(r, t)$ и свободные колебания в нестационарном температурном поле. Сумму решений этих задач дадут искомые перемещения.

3. Свободные колебания, вызванные тепловым потоком

В случае свободных колебаний нагрузка отсутствует и уравнения движения (6) принимают вид

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \quad L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = 0, \quad (9)$$

где $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ — искомые перемещения при свободных колебаниях рассматриваемой пластины.

Для решения третьего уравнения в (9) искомый прогиб представляется суммой квазистатической w_s и динамической w_d частей составляющих:

$$w = w_s + w_d, \quad (10)$$

где квазистатический прогиб удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$L_3(w_{,r}) \equiv w_{s,rrrr} + \frac{2w_{s,rrr}}{r} - \frac{w_{s,rr}}{r^2} + \frac{w_{s,r}}{r^3} = 0$$

при условиях на границе $r = r_1$:

$$w_s = 0, \quad a_7 w_{s,rr} + \frac{a_8}{r_1} w_{s,r} = -M_t.$$

Для сплошной рассматриваемой пластины квазистатический прогиб будет

$$w_s = \frac{r_1^2 M_t}{2(a_7 + a_8)} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right]. \quad (11)$$



После подстановки решения (10) в третье уравнение системы (9), в начальные (5) и граничные (8) условия при учете выражения (11) получим замкнутую начально-краевую задачу для определения оставшейся части прогиба w_d . Соответствующее дифференциальное уравнение в частных производных будет неоднородным:

$$L_3(w_{d,r}) + M^4 \ddot{w}_d = -\frac{r_1^2 M^4 \ddot{M}_t}{2(a_7 + a_8)} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right], \quad (12)$$

где $\ddot{M}_t$ — вторая производная по времени от температурного момента (7).

Начальные условия движения (5) становятся неоднородными, в них появляется ненулевая «исходная» скорость $\dot{w}_d(t=0)$:

$$w_d = 0, \quad \dot{w}_d = -\frac{r_1^2 \dot{M}_t(0)}{2(a_7 + a_8)} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right], \quad (13)$$

где $\dot{M}_t(0)$ — значение первой производной от температурного момента (7) в начальный момент времени.

Граничные условия для динамической части w_d становятся однородными, так как неоднородность забрала на себя квазистатическая часть прогиба w_s :

$$w_d = 0, \quad a_7 w_{d,rr} + \frac{a_8}{r_1} w_{d,r} = 0. \quad (14)$$

Решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (12), представим в виде

$$w_d^0 = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (15)$$

где $v(r)$ — искомая координатная функция.

После подстановки (15) в однородное уравнение

$$L_3(w_{d,r}) + M^4 \ddot{w}_d = 0$$

получим для определения функции $v(r)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L_3(v,r) - \beta^4 v = 0, \quad (16)$$

где $\beta = \omega^2 M^4$ — собственное число оператора L_3 , ω — частота собственных колебаний.

Решение уравнения (16) известно [19]:

$$v(\beta r) = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r) + C_7 Y_0(\beta r) + C_8 K_0(\beta r), \quad (17)$$

где J_0, Y_0 — функции Бесселя; I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя; $C_5, \dots, C_8$ — константы интегрирования.

Функции $Y_0(\beta r)$ и $K_0(\beta r)$ имеют особенность типа логарифма в начале координат, поэтому необходимо в (17) положить $C_7 = C_8 = 0$. В результате получим

$$v(\beta r) = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r) w(r, t). \quad (18)$$

Подставив выражения (15), (18) в граничные условия (14), получим однородную систему из двух алгебраических уравнений относительно неизвестных констант интегрирования C_5, C_6 , из которой, потребовав ее нетривиальности решения, получим трансцендентное уравнение для определения собственных чисел β_n :

$$\begin{aligned} & J_0(\beta r_1) \left[a_7 \left(\beta I_0(\beta r_1) - \frac{I_1(\beta r_1)}{r_1} \right) + \frac{a_8}{r_1} I_1(\beta r_1) \right] + \\ & + I_0(\beta r_1) \left[a_7 \left(\beta J_0(\beta r_1) - \frac{J_1(\beta r_1)}{r_1} \right) + \frac{a_8}{r_1} J_1(\beta r_1) \right] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$



Первые 16 собственных чисел приведены в таблице. Термомеханические характеристики принятых материалов (титановый сплав, фторопласт-4, дюралюминий) заимствованы в [40].

Собственные числа для пластины VT-20–фторопласт-4–D16-T
Table. Eigenvalues for the VT-20–fluoroplast-4–D16-T plate

n	Собственное число β_n	n	Собственное число β_n
0	3.192	8	28.244
1	6.298	9	31.382
2	9.428	10	34.519
3	12.561	11	37.657
4	15.697	12	40.795
5	18.833	13	43.932
6	21.970	14	47.070
7	25.107	15	50.208

При увеличении модуля упругости верхнего несущего слоя частоты возрастают, но незначительно. Если принять и верхний слой из дюралюминия, то изменения начинаются только с частоты ω_2 в четвертой значащей цифре.

После решения уравнения (19) частоты собственных колебаний будут

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}. \quad (20)$$

Таким образом, динамическая часть прогиба при свободных колебаниях описывается с помощью фундаментальной ортонормированной системы собственных функций

$$v_n(\beta_n r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\beta_n) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_0(\beta_n r) \right], \quad (21)$$

где d_n — нормировочный коэффициент.

Искомый прогиб w_d раскладывается в ряд по системе функций (21):

$$w_d = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t). \quad (22)$$

Подставив (22) в уравнение (12), начальные (13) и краевые условия (14), умножив члены уравнения на величину $r v_n dr$ и интегрируя по радиусу пластины, в силу ортонормированности системы (21) получим для искомой функции времени $T_n(t)$ дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = -\frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \ddot{M}_t, \quad (23)$$

при начальных условиях

$$T_n(0) = 0, \quad \dot{T}_n(0) = -\frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \dot{M}_t(0),$$

где

$$I(\beta_n) = \int_0^{r_1} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right] r v_n dr = \frac{2}{d_n \beta_n^2} \left(J_2(\beta_n r_1) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_2(\beta_n r_1) \right).$$

Решением уравнения (23) будет

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8) \omega_n} \int_0^t \ddot{M}_t(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau. \quad (24)$$



Удовлетворяя начальным условиям в (23), имеем

$$A_n = 0, \quad B_n = -\frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)\omega_n} \dot{M}_t(0).$$

Для компактности суммарного решения квазистатический прогиб (11) также разложим в ряд по собственным функциям v_n :

$$w_s = \frac{r_1^2 M_t}{2(a_7 + a_8)} \sum_{n=0}^{\infty} I(\beta_n) v_n. \quad (25)$$

Полный динамический прогиб рассматриваемой пластины при свободных колебаниях получим, просуммировав составляющие (22) и (25). В результате из соотношений (9) получаем

$$\begin{aligned} u &= b_1 \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,r} \left(T_n + \frac{r_1^2 M_t I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \right) + C_1 r, \quad \psi = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,r} \left(T_n + \frac{r_1^2 M_t I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \right) + C_3 r, \\ w &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n \left(T_n + \frac{M_t I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где C_1, C_3 — константы интегрирования

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{b_1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{d_n} \left[J_1(\beta_n r_1) + \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n r_1) \right] \left[T_n + \frac{r_1^2 M_t I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \right], \\ C_3 &= \frac{b_2}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{d_n} \left[J_1(\beta_n r_1) + \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n r_1) \right] \left[T_n + \frac{r_1^2 M_t I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, перемещения, описывающие собственные поперечные колебания трехслойной круговой шарнирно опертой пластины, вызванные нестационарным температурным полем, определены выражениями (26).

4. Вынужденные колебания

Искомые перемещения $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ при вынужденных колебаниях пластины по-прежнему удовлетворяют системе уравнений в частных производных (6). Они представляются разложениями в ряды (26) по системе собственных функций (21).

Дифференциальное уравнение для определения искомой функции времени (23) в этом случае будет дополнительно учитывать коэффициенты $q_n(t)$ разложения нагрузки в ряд по собственным функциям при тех же начальных условиях, учитывающих начальную скорость:

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \ddot{M}_t. \quad (27)$$

Здесь

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n r dr. \quad (28)$$

Решение уравнения (27) в общем виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \int_0^t \left(q_n(\tau) - \frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)\omega_n} \ddot{M}_t(\tau) \right) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau. \quad (29)$$

Следовательно, прогиб $w(r, t)$, относительный сдвиг $\psi(r, t)$ и радиальное перемещение $u(r, t)$ в круговой трехслойной пластине, находящейся под воздействием осесимметричной динамической нагрузки в нестационарном температурном поле, определяются соотношениями (26) с учетом собственных функций (21) и функций времени (29).

5. Колебания под действием внезапно приложенной нагрузки

Пусть на рассматриваемую круговую трехслойную пластину в начальный момент времени кроме теплового потока q_t воздействует мгновенно приложенная, равномерно распределенная по поверхности внешнего слоя динамическая нагрузка, изменяющаяся по времени как функция Хевисайда:

$$q(r, t) = q_0(t)H_0(t), \quad (30)$$

где $H_0(t)$ — функция Хевисайда.

Подставив (30) в формулу (28), получим следующие коэффициенты разложения нагрузки в ряд по собственным функциям:

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)r_1}{M_0 d_n \beta_n} \left(J_1(\beta_n r_1) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n r_1) \right). \quad (31)$$

Функция времени $T_n(t)$ вычисляется по формуле (29) с учетом коэффициентов (31). В результате

$$T_n(t) = -\frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)\omega_n} \dot{M}_t(0) \sin(\omega_n t) + \frac{q_0 r_1 (1 - \cos(\omega_n t))}{M_0 d_n \beta_n \omega_n^2} \left(J_1(\beta_n r_1) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n r_1) \right) - \int_0^t \left(\frac{r_1^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)\omega_n} \ddot{M}_t(\tau) \right) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau. \quad (32)$$

Таким образом, вынужденные колебания при мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузке (30) в нестационарном температурном поле описываются перемещениями (26) с функцией времени (32).

Численные результаты представлены для круговых трехслойных пластин единичного радиуса, слои которых набраны из различных материалов. Для вычисления собственных частот ω_n использовались формула (20) и собственные числа из таблицы. Толщины слоев $h_1 = h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,05$ м, интенсивность распределенной нагрузки $q_0 = 700$ Па.

На рис. 2, а показано изменение полного термосилового прогиба w во времени t пластины Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т: 1 — $q_t = 0$; 2 — $q_t = 2 \cdot 10^5$ Дж/(м²с). За счет квазистатической составляющей прогиба от теплового потока происходит отклонение осевой линии колебаний вверх. Аналогичный термосиловой процесс колебаний пластины ВТ-20-фторопласт-4-Д16-Т показан на рис. 2, б: 1 — $q_t = 0$; 2 — $q_t = 2 \cdot 10^5$ Дж/(м²с).

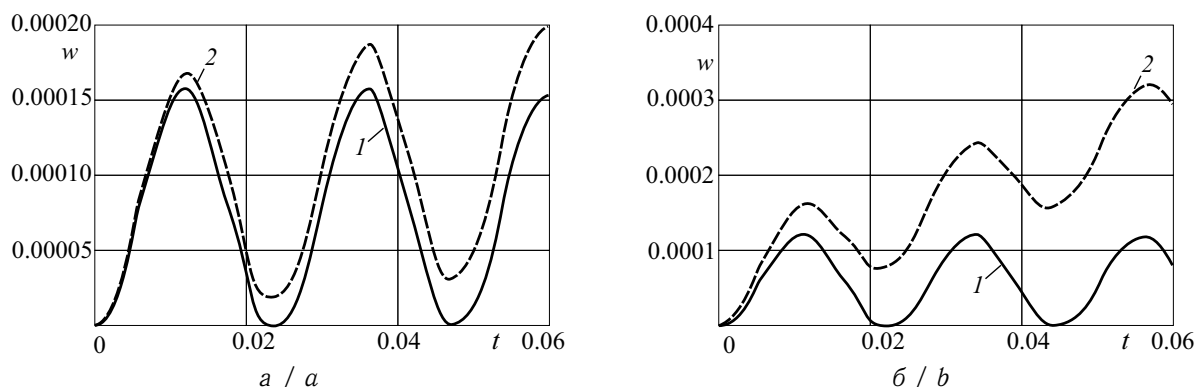


Рис. 2. Изменение полного прогиба w , м во времени t : а — Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т; б — ВТ-20-фторопласт-4-Д16-Т

Fig. 2. The change in the total deflection w , m in time t : а is D16-T-fluoroplast-4-D16-T; б is W-20-fluoroplast-4-D16-T



Замена верхнего дюралюминиевого несущего слоя на титановый сплав приводит к уменьшению силовой составляющей прогиба w . За счет большей теплоемкости титанового сплава увеличивается квазистатическая составляющая от теплового потока. Это вызывает значительное отклонение оси колебаний вверх по сравнению с предыдущим случаем.

Амплитуда колебаний в обоих случаях за счет воздействия теплового потока изменяется незначительно. Цикл колебаний без теплового воздействия является отнулевым.

Заключение

Предложенная механико-математическая модель позволяет учитывать влияние нестационарного температурного поля на динамические характеристики вынужденных колебаний трехслойных упругих круговых пластин. Воздействие теплового потока в случае шарнирного опирания контура пластины приводит к возникновению свободных колебаний, которые накладываются на вынужденные колебания. Нестационарное температурное поле отклоняет ось, относительно которой происходят колебания, навстречу тепловому потоку. При увеличении жесткости материалов несущих слоев происходят увеличение собственных частот колебаний и уменьшение квазистатической части прогиба.

Список литературы

1. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. Москва : Машиностроение, 1980. 375 с.
2. Aghalovyan L., Prikazchikov D. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore : World Scientific Publishing Co., 2015. 360 p. <https://doi.org/10.1142/9789814579032>, EDN: YXUYTY
3. Carrera E., Fazzolari F. A., Cinefra M. Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications. Academic Press, 2016. 440 p.
4. Mikhasev G. I., Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells // Thin-walled Laminated Structures. Cham : Springer, 2019. P. 157–198. (Advanced Structured Materials, vol. 106). https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4
5. Bakulin V. N., Boitsova D. A., Nedbai A. Ya. Parametric resonance of a three layered cylindrical composite rib-stiffened shell // Mechanics of Composite Materials. 2021. Vol. 57, iss. 3. P. 623–634. <https://doi.org/10.1007/s11029-021-09984-9>
6. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell // International Applied Mechanics. 2001. Vol. 37, iss. 7. P. 1196–1203. <https://doi.org/10.1023/A:1013290600951>
7. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Динамическая устойчивость геометрически нерегулярной нагретой пологой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 4. С. 750–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1653>
8. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Ratushny A. V., Chernenko A. V. Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal waves in cylindrical shells // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 196–204. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204>
9. Блинков Ю. А., Месянжин А. В., Могилевич Л. И. Математическое моделирование волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 184–197. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197>
10. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2015. Т. 50, № 2. С. 118–128. EDN: TPPBRR
11. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2014. Vol. 43, iss. 2. P. 145–152. <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>
12. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Геометрически нерегулярные пластинки под действием быстропеременных по временной координате силовых и температурных воздействий // Известия



- Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 442–451. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451>
13. *Ivañez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S.* The oblique impact response of composite sandwich plates // *Composite Structures*. 2015. Vol. 133. P. 1127–1136. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035>
 14. *Suvorov Ye. M., Tarlakovsky D. V., Fedotenkov G. V.* The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 76, iss. 5. P. 511–518. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015>
 15. *Paimushin V. N., Gazizullin R. K.* Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. Vol. 53, iss. 6. P. 283–304. <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9662-z>
 16. *Смирнов А. Л., Васильев Г. П.* Частоты собственных колебаний круглой тонкой пластины с нелинейно возмущенными параметрами // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 227–237. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237>
 17. *Paimushin V. N., Firsov V. A., Shishkin V. M.* Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. Vol. 53, iss. 4. P. 609–630. <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9673-9>
 18. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Yarovaya A. V.* Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads // *International Applied Mechanics*. 2003. Vol. 39, iss. 12. P. 1458–1463. <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000020831.16802.4a>
 19. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovsky D. V.* Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation // *Mechanics of Composite Materials*. 2015. Vol. 51, iss. 5. P. 561–570. <https://doi.org/10.1007/s11029-015-9527-2>
 20. *Kondratov D. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A.* Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation // *Journal of Physics: Conference Series* 2018. Vol. 944. Art. 012057. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057>
 21. *Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Christoforova A. V.* Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of the stamp and the plate, resting on Pasternak foundation // *Journal of Physics: Conference Series* 2018. Vol. 944. Art. 012081. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012081>
 22. *Быкова Т. В., Грушенкова Е. Д., Попов В. С., Попова А. А.* Гидроупругая реакция трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 351–366. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366>
 23. *Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С.* Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2014. № 1. С. 3–11. EDN: [RXRDZJ](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366)
 24. *Fedotenkov G. V., Tarlakovsky D. V., Vahterova Y. A.* Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. Vol. 40, iss. 4. P. 439–447. <https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>
 25. *Rabboh S., Bondok N., Mahmoud T., El Kholi H.* The effect of functionally graded materials into the sandwich beam dynamic performance // *Materials Sciences and Applications*. 2013. Vol. 4, iss. 11. P. 751–760. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.411095>
 26. *Zenkour A. M., Alghamdi N. A.* Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2010. Vol. 17, iss. 6. P. 419–432. <https://doi.org/10.1080/15376494.2010.483323>
 27. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V.* Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation // *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 47, iss. 5. P. 580–589. <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0481-y>
 28. *Grover N., Singh B. N., Maiti D. K.* An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates // *Aerospace Science and Technology*. 2016. Vol. 52. P. 41–51. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017>
 29. *Yarovaya A. V.* Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation // *International Applied Mechanics*. 2006. Vol. 42, iss. 2. P. 206–213. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0078-z>



30. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины в нейтронном потоке локальной нагрузкой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 360–375. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-360-375>
31. Paimushin V. N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour // *Mechanics of Composite Materials*. 2017. Vol. 53, iss. 1. P. 3–26. <https://dx.doi.org/10.1007/s11029-017-9636-1>
32. Wang Zh., Lu G., Zhu F., Zhao L. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection // *Journal of Engineering Mechanics*. 2017. Vol. 143, iss. 9. Art. 04017057. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001243](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243)
33. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // *Acta Mechanica*. 2014. Vol. 225, iss. 2. P. 523–541. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0972-5>
34. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Yarovaya A. V. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation // *International Applied Mechanics*. 2007. Vol. 43, iss. 4. P. 451–459. <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0042-6>
35. Pradhan M., Dash P. R., Pradhan P. K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient // *Meccanica*. 2016. Vol. 51, iss. 3. P. 725–739. <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>
36. Zadeh H. V., Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load // *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*. 2017. Vol. 6, iss. 1. <https://doi.org/10.14810/ijmech.2017.6101>
37. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A. Comparison of bending properties for cellular core sandwich panels // *Materials Sciences and Applications*. 2013. Vol. 4, iss. 8. P. 471–477. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.48057>
38. Kudin A., Al-Omari M. A. V., Al-Athamneh B. G. M., Al-Athamneh H. K. M. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material // *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*. 2015. Vol. 3, iss. 08. P. 1487–1493. <https://doi.org/10.18535/ijmeit/v2i8.02>
39. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Повторное знакопеременное нагружение упругопластической трехслойной пластины в температурном поле // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 60–75. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75>
40. Starovoitov É. I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials // *Strength of Materials*. 1988. Vol. 20, iss. 4. P. 426–431. <https://doi.org/10.1007/BF01530849>

References

1. Bolotin V. V., Novichkov Iu. N. *Mekhanika mnogosloynnykh konstruksii* [Mechanics of Multilayer Structures]. Moscow, Mashinostroenie Publishers, 1980. 375 p. (in Russian).
2. Aghalovyan L., Prikazchikov D. *Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells*. Singapore, World Scientific Publishing Co., 2015. 360 p. <https://doi.org/10.1142/9789814579032>, EDN: YXUYTT
3. Carrera E., Fazzolari F. A., Cinefra M. *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. Academic Press, 2016. 440 p.
4. Mikhasev G. I., Altenbach H. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells. In: *Thin-walled Laminated Structures*. Advanced Structured Materials, vol. 106. Cham, Springer, 2019, pp. 157–198. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12761-9_4
5. Bakulin V. N., Boitsova D. A., Nedbai A. Ya. Parametric resonance of a three layered cylindrical composite rib-stiffened shell. *Mechanics of Composite Materials*, 2021, vol. 57, iss. 3, pp. 623–634. <https://doi.org/10.1007/s11029-021-09984-9>
6. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell. *International Applied Mechanics*, 2001, vol. 37, iss. 7, pp. 1196–1203. <https://doi.org/10.1023/A:1013290600951>
7. Belostochnyi G. N., Myltcina O. A. Dynamic stability of heated geometrically irregular cylindrical shell in supersonic gas flow. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2018, vol. 22, iss. 4, pp. 750–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1653>



8. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Ratushny A. V., Chernenko A. V. Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal waves in cylindrical shells. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 196–204. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204>
9. Blinkov Yu. A., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Wave occurrences mathematical modeling in two geometrically nonlinear elastic coaxial cylindrical shells, containing viscous incompressible liquid. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 184–197 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197>
10. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, iss. 2, pp. 208–217. <https://doi.org/10.3103/S0025654415020107>
11. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-Dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, iss. 2, pp. 145–152. <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>
12. Belostochny G. N., Myltcina O. A. The geometrical irregular plates under the influence of the quick changed on the time coordinate forces and temperature effects. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 442–451 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451>
13. Ivañez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*, 2015, iss. 133, pp. 1127–1136. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035>
14. Suvorov Ye. M., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, iss. 5, pp. 511–518. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015>
15. Paimushin V. N., Gazizullin R. K. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials*, 2017, vol. 53, iss. 6, pp. 283–304. <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9662-z>
16. Smirnov A. L., Vasiliev G. P. Free vibration frequencies of a circular thin plate with nonlinearly perturbed parameters. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 227–237 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237>
17. Paimushin V. N., Firsov V. A., Shishkin V. M. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials*, 2017, vol. 53, iss. 4, pp. 609–630. <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9673-9>
18. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Yarovaya A. V. Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads. *International Applied Mechanics*, 2003, vol. 39, iss. 12, pp. 1458–1463. <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000020831.16802.4a>
19. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovsky D. V. Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation. *Mechanics of Composite Materials*, 2015, vol. 51, iss. 5, pp. 561–570. <https://doi.org/10.1007/s11029-015-9527-2>
20. Kondratov D. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 944, art. 012057. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012057>
21. Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Christoforova A. V. Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of the stamp and the plate, resting on Pasternak foundation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 944, art. 012081. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012081>
22. Bykova T. V., Grushenkova E. D., Popov V. S., Popova A. A. Hydroelastic response of a sandwich plate possessing a compressible core and interacting with a rigid die via a viscous fluid layer. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 351–366 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-351-366>
23. Ageev R. V., Mogilevich L. I., Popov V. S. Vibrations of the walls of a slot channel with a viscous fluid formed by three-layer and solid disks. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, iss. 1, pp. 1–8. <https://doi.org/10.3103/S1052618814010026>, EDN: WQYYKN
24. Fedotenkov G. V., Tarlakovsky D. V., Vahterova Y. A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, iss. 4, pp. 439–447. <https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>
25. Rabboh S., Bondok N., Mahmoud T., El Kholy H. The effect of functionally graded materials into



- the sandwich beam dynamic performance. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, iss. 11, pp. 751–760. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.411095>
26. Zenkour A. M., Alghamdi N. A. Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2010, vol. 17, iss. 6, pp. 419–432. <https://doi.org/10.1080/15376494.2010.483323>
27. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*, 2011, vol. 47, iss. 5, pp. 580–589. <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0481-y>
28. Grover N., Singh B. N., Maiti D. K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*, 2016, iss. 52, pp. 41–51. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017>
29. Yarovaya A. V. Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation. *International Applied Mechanics*, 2006, vol. 42, iss. 2, pp. 206–213. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0078-z>
30. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of an elastic circular three-layer plate in a neutron flux by a local load. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 360–375 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-360-375>
31. Paimushin V. N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour. *Mechanics of Composite Materials*, 2017, vol. 53, iss. 1, pp. 3–26. <https://dx.doi.org/10.1007/s11029-017-9636-1>
32. Wang Zh., Lu G., Zhu F., Zhao L. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017, vol. 143, iss. 9, art. 04017057. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001243](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001243)
33. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*, 2014, vol. 225, iss. 2, pp. 523–541. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0972-5>
34. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Yarovaya A. V. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*, 2007, vol. 43, iss. 4, pp. 451–459. <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0042-6>
35. Pradhan M., Dash P. R., Pradhan P. K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient. *Meccanica*, 2016, vol. 51, iss. 3, pp. 725–739. <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0229-6>
36. Zadeh H. V., Tahani M. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load. *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*, 2017, vol. 6, iss. 1. <https://doi.org/10.14810/ijmech.2017.6101>
37. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A. Comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, iss. 8, pp. 471–477. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.48057>
38. Kudin A., Al-Omari M. A. V., Al-Athamneh B. G. M., Al-Athamneh H. K. M. Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material. *International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*, 2015, vol. 3, iss. 08, pp. 1487–1493. <https://doi.org/10.18535/ijmeit/v2i8.02>
39. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Repeated alternating loading of an elastoplastic three-layer plate in a temperature field. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 60–75 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75>
40. Starovoitov É. I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials. *Strength of Materials*, 1988, vol. 20, iss. 4, pp. 426–431. <https://doi.org/10.1007/BF01530849>

Поступила в редакцию / Received 28.11.2022

Принята к публикации / Accepted 16.01.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 138–149

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 138–149
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-138-149>, EDN: [HACAYF](https://nauka.edu.ru/eng/edn/HACAYF)

Научная статья
УДК 534.1:539.3

Асимптотический анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевыми пластинами

С. Б. Филиппов[✉], А. С. Козлова

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9

Филиппов Сергей Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, s_b_filippov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1312-5705>, AuthorID: 7704

Козлова Анастасия Сергеевна, студент математико-механического факультета, st076954@student.spbu.ru

Аннотация. Низшие частоты и формы колебаний замкнутой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми пластинами, найдены с помощью асимптотических методов. Проанализированы два основных типа колебаний, соответствующих узким и широким пластинам. Если ширина кольца является достаточно малой, то формы колебаний подкрепленной оболочки подобны формам колебаний гладкой оболочки. Для широких пластин формы колебаний локализованы на поверхности пластин, в то время как оболочка почти не деформируется. В обоих случаях решение краевой задачи ищется в виде суммы основного состояния и краевых эффектов. Для узких пластин в первом приближении получается задача о колебаниях балки, подкрепленной пружинами. Для широких пластин краевая задача сводится к задаче о колебаниях кольцевой пластины.

Ключевые слова: свободные колебания, цилиндрическая оболочка, сопряженная с пластинами, асимптотические методы

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>).

Для цитирования: Филиппов С. Б., Козлова А. С. Асимптотический анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевыми пластинами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 138–149. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-138-149>, EDN: [HACAYF](https://nauka.edu.ru/eng/edn/HACAYF)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

The asymptotic analysis of free vibrations of a cylindrical shell joined with annular plates

S. B. Filippov[✉], A. S. Kozlova

St. Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia

Sergei B. Filippov, s_b_filippov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1312-5705>, AuthorID: 7704

Anastasiya S. Kozlova, st076954@student.spbu.ru

Abstract. Low frequencies and vibration modes of a closed circular cylindrical shell joined with annular plates are obtained by means of asymptotic methods. Two types of vibrations, corresponding to narrow and wide plates, are analyzed. If the width of the ring is sufficiently small, then the vibration mode of the



stiffened shell is similar to the mode of the shell without rings. For wide plates joined with a cylindrical shell the vibration mode is localized on the surface of the ring, and the cylindrical shell itself does not actually deform. In both cases the solution of a boundary value problem is searched in the form of the sum of slowly varying functions and edge effect integrals. For narrow plates as a first approximation we obtain a problem about vibrations of the beam supported by springs. For wide plates the problem is reduced to a problem about vibrations of a ring plate.

Keywords: free vibrations, cylindrical shell, joined with annular plates, asymptotic methods

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00111, <https://rscf.ru/project/23-21-00111/>).

For citation: Filippov S. B., Kozlova A. S. The asymptotic analysis of free vibrations of a cylindrical shell joined with annular plates. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 138–149 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-138-149>, EDN: HACAUF

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Подкрепленные шпангоутами (кольцами) оболочки широко используются в различных отраслях современной техники. Почти во всех многочисленных работах, в том числе в монографии [1], посвященных колебаниям подкрепленных оболочек, шпангоуты рассматриваются как круговые стержни. Однако для широких колец целесообразно использовать более сложную, но и более точную модель кольцевой пластины.

Во-первых, при большой ширине b кругового стержня жесткость на изгиб c в его плоскости значительно превосходит соответствующую жесткость на изгиб кольцевой пластины. Это связано с локализацией напряженно-деформируемого состояния пластины вблизи ее края, сопряженного с оболочкой. Жесткость c оказывает существенное влияние на частоты колебаний, поэтому стержневая модель шпангоута дает завышенные их значения [2].

Во-вторых, при увеличении b может произойти смена типа низкочастотных колебаний подкрепленной оболочки. Колебания первого типа, формы которых аналогичны формам колебаний гладких оболочек, переходят в колебания второго типа, при которых в основном деформируются кольца. Колебания первого типа можно описать при помощи стержневой модели, в то время как для моделирования колебаний второго типа необходимо рассматривать шпангоуты как кольцевые пластины.

Уравнения, описывающие колебания тонкой оболочки, содержат ее безразмерную толщину, которая является малым параметром. Следовательно, для решения этих уравнений можно использовать асимптотические методы [3]. Одним из таких методов является представление решения краевой задачи в виде суммы основного состояния и краевого эффекта [4]. Первое приближение к решению дает краевая задача для основного состояния. При асимптотическом анализе колебаний подкрепленной оболочки одной из главных проблем выступает определение граничных условий для этой краевой задачи. При колебаниях первого типа основное состояние является полубезмоментным, а при колебаниях второго типа — безмоментным.

Асимптотический анализ низкочастотных колебаний цилиндрической оболочки, подкрепленной снаружи кольцевыми пластинами, описан в работе [2]. В данной статье рассмотрен тот случай, когда пластины находятся внутри оболочки.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим малые свободные низкочастотные колебания тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной n одинаковыми кольцевыми пластинами. Пластины расположены на параллелях $s = s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, где s — безразмерная продольная координата на срединной поверхности оболочки. За единицу длины выбран радиус R цилиндрической оболочки. Одна из пластин показана на рис. 1. Предположим, что пластины расположены внутри оболочки.

После разделения переменных безразмерные дифференциальные уравнения, описывающие малые свободные колебания цилиндрической оболочки, принимают вид [5]

$$\begin{aligned} T_1' + mS + \lambda u &= 0, \quad S' - mT_2 + Q_2 + 2H' + \lambda v = 0, \\ Q_1' + mQ_2 - T_2 + \lambda w &= 0, \quad Q_1 = M_1' + 2mH, \quad Q_2 = -mM_2, \\ M_1 &= \mu^4(\vartheta_1' + \nu m\vartheta_2), \quad M_2 = \mu^4(m\vartheta_2 + \nu\vartheta_1'), \quad H = \mu^4(1 - \nu)\vartheta_2', \\ T_1 &= u' + \nu(w + mv), \quad T_2 = w + mv + \nu u', \quad 2S = (1 - \nu)(v' - mu), \\ \vartheta_1 &= -w', \quad \vartheta_2 = mw + v, \end{aligned} \quad (1)$$

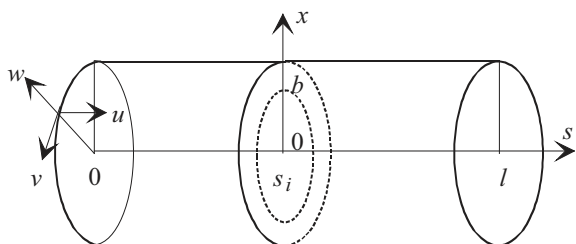


Рис. 1. Оболочка, подкреплённая пластиной
Fig. 1. Shell reinforced with a plate

где штрихом обозначена производная по безразмерной длине дуги меридиана $s \in [0, l]$, l — безразмерная длина оболочки, m — число волн по параллели, Q_1, Q_2, T_1, T_2, S — усилия, M_1, M_2, H — моменты, ϑ_1, ϑ_2 — углы поворота, u, v, w — проекции перемещений точек срединной поверхности, $\lambda = 4\pi^2\sigma\rho f^2 R^2 E^{-1}$ — искомый параметр частоты, $\sigma = 1 - \nu^2$, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, ρ — плотность, f — частота колебаний, $\mu^4 = h^2/12$ — малый параметр, h — безразмерная толщина оболочки.

Уравнения изгибных колебаний пластины [5] имеют вид

$$\begin{aligned} (xQ_{1p})' + mQ_{2p} + \lambda xw_p &= 0, \\ xQ_{1p} &= (xM_{1p})' - M_{2p} + 2mH_p, \quad xQ_{2p} = -mM_{2p} + 2H_p, \\ xM_{1p} &= \mu_p^4[x\vartheta_{1p}' + \nu(m\vartheta_{2p} + \vartheta_{1p})], \quad xM_{2p} = \mu_p^4(m\vartheta_{2p} + \vartheta_{1p} + \nu x\vartheta_{1p}'), \\ H_p &= \mu_p^4 x(1 - \nu)\vartheta_{2p}', \quad \vartheta_{1p} = -w_p', \quad x\vartheta_{2p} = mw_p. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $(')$ означает производную по радиальной координате $x \in [1 - b, 1]$, b — безразмерная толщина пластины, w_p — прогиб, $Q_{1p}, Q_{2p}, M_{1p}, M_{2p}, H_p$ — безразмерные усилия и моменты, ϑ_{1p} и ϑ_{2p} — углы поворота нормали, $\mu_p^4 = a^2/12$ — малый параметр, a — безразмерная толщина пластины.

Для описания колебаний пластины в ее плоскости будем использовать уравнения [5]

$$\begin{aligned} (xT_{1p})' - T_{2p} + mS_p + \lambda xu_p &= 0, \quad xS_p' + 2S_p - mT_{2p} + \lambda v_p = 0, \\ xT_{1p} &= xu_p' + \nu(mv_p + u_p), \quad xT_{2p} = u_p + mv_p + \nu xu_p', \\ 2xS_p &= (1 - \nu)(xv_p' - mu_p - v_p), \end{aligned} \quad (3)$$

где u_p и v_p — тангенциальные компоненты перемещения, T_{1p}, T_{2p}, S_p — безразмерные усилия.

Обозначим $u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}, \dots$ решения уравнений (1) в интервалах $s \in [s_{k-1}, s_k]$, $k = 1, 2, \dots, n+1$, $s_0 = 0$, $s_{n+1} = l$. Если оболочка и пластина изготовлены из одного материала, то на параллели сопряжения выполняются 12 условий сопряжения:

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= u^{(i+1)} = -w_p(1), \quad \vartheta_1^{(i)} = \vartheta_1^{(i+1)} = \vartheta_{1p}(1), \\ w^{(i)} &= w^{(i+1)} = u_p(1), \quad v^{(i)} = v^{(i+1)} = v_p(1), \\ h(T_1^{(i)} - T_1^{(i+1)}) &= aQ_{1p}(1), \quad h(Q_1^{(i)} - Q_1^{(i+1)}) = -aT_{1p}(1), \\ h(M_1^{(i)} - M_1^{(i+1)}) &= -aM_{1p}(1), \quad h(S^{(i)} - S^{(i+1)}) = -aS_p(1), \\ s &= s_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$



На внутренних краях пластин зададим условия свободного края, что соответствует подкреплению оболочки шпангоутами

$$T_{1p} = S_p = M_{1p} = Q_{1p} = 0, \quad x = 1 - b. \quad (5)$$

На краях оболочки $s = 0$ и $s = l$ могут быть введены любые однородные граничные условия. В качестве примера рассмотрим условия шарнирного опирания

$$v = w = T_1 = M_1 = 0, \quad s = 0, \quad s = l. \quad (6)$$

Если для $\lambda = \lambda_k$ уравнения (1)–(3) имеют нетривиальное решение, удовлетворяющее граничным условиям (4)–(6), то λ_k является собственным значением краевой задачи (1)–(6). Наименьшее положительное собственное значение λ_1 соответствует первой частоте колебаний.

2. Граничные условия для уравнений оболочки

Если ширина пластин не слишком велика, то низкочастотные колебания совершает цилиндрическая оболочка, а пластины играют роль подкрепляющих ее элементов. Пренебрежем жесткостью пластин на изгиб, учитывая, что она значительно меньше их тангенциальной жесткости. Условия сопряжения (4) в этом случае примут вид

$$v^{(i)} = v^{(i+1)}, \quad u^{(i)} = u^{(i+1)}, \quad T_1^{(i)} = T_1^{(i+1)}, \quad (7)$$

$$w^{(i)} = w^{(i+1)}, \quad \vartheta_1^{(i)} = \vartheta_1^{(i+1)}, \quad M_1^{(i)} = M_1^{(i+1)}, \quad (8)$$

$$w^{(i)} = u_p(1), \quad v^{(i)} = v_p(1), \quad (9)$$

$$h(Q_1^{(i)} - Q_1^{(i+1)}) = -aT_{1p}(1), \quad h(S^{(i)} - S^{(i+1)}) = -aS_p(1), \quad s = s_i. \quad (10)$$

Условия (7) и (8) являются граничными условиями для системы уравнений (1). Чтобы получить еще $2n$ граничных условий, исключим $u_p(1)$, $v_p(1)$, $T_{1p}(1)$ и $S_p(1)$ из условий сопряжения (9) и (10). Для этого найдем решение системы (3).

При низкочастотных колебаниях параметр λ является малым. Пренебрегая инерционными членами $\lambda x u_p$ и λv_p в уравнениях (3), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (xT_{1p})' - T_{2p} + mS_p &= 0, & xS_p' + 2S_p - mT_{2p} &= 0, \\ xT_{1p} &= xu_p' + \nu(mv_p + u_p), & xT_{2p} &= u_p + mv_p + \nu xu_p', \\ 2xS_p &= (1 - \nu)(xv_p' - mu_p - v_p). \end{aligned} \quad (11)$$

Замена переменной $x = e^t$ превращает (11) в систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_p}{dt^2} - u_p - \gamma m^2 u_p + \delta m \frac{dv_p}{dt} - (1 + \gamma)mv_p &= 0, \\ \gamma \frac{d^2 v_p}{dt^2} - \gamma v_p - m^2 v_p - \delta m \frac{du_p}{dt} - (1 + \gamma)mu_p &= 0, \\ \gamma &= \frac{1 - \nu}{2}, \quad \delta = \frac{1 + \nu}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Общее решение системы (12) имеет вид

$$\begin{aligned} u_p &= C_1 x^{m-1} + a_1 C_2 x^{m+1} + C_3 x^{-m-1} + a_2 C_4 x^{-m+1}, \\ v_p &= -C_1 x^{m-1} + b_1 C_2 x^{m+1} + C_3 x^{-m-1} + b_2 C_4 x^{-m+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

где C_i — произвольные постоянные, $i = 1, 2, 3, 4$,

$$a_1 = \frac{2\gamma}{\delta m} - 1, \quad a_2 = \frac{2\gamma}{\delta m} + 1, \quad b_1 = 1 + \frac{2}{\delta m}, \quad b_2 = 1 - \frac{2}{\delta m}.$$



Из уравнений (11) и (13) следуют формулы

$$\begin{aligned} T_{1p} &= 2C_1\gamma(m-1)x^{m-2} - 2C_2\gamma(m+1)(m-2)m^{-1}x^m - \\ &\quad - 2\gamma(m+1)C_3x^{-m-2} - 2C_4\gamma(m-1)(m+2)m^{-1}x^{-m}, \\ S_p &= -2C_1\gamma(m-1)x^{m-2} + 2C_2\gamma(m+1)x^m - 2\gamma(m+1)C_3x^{-m-2} - 2C_4\gamma(m-1)x^{-m}. \end{aligned} \quad (14)$$

На свободном крае пластины $x = 1 - b$

$$T_{1p} = S_p = 0. \quad (15)$$

Подстановка решений (13) и (14) в условия (9) и (15) дает уравнения

$$\begin{aligned} C_1 + a_1C_2 + C_3 + a_2C_4 &= w^{(i)}(s_i), \quad -C_1 + b_1C_2 + C_3 + b_2C_4 = v^{(i)}(s_i), \\ (m-1)[m\beta^mC_1 - (m+2)\beta C_4] - (m+1)[(m-2)\beta^{m+1}C_2 + mC_3] &= 0, \\ (m-1)(\beta^mC_1 + \beta C_4) - (m+1)(\beta^{m+1}C_2 - C_3) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\beta = (1 - b)^2$.

Подставив в формулы (14) найденные из системы (16) выражения C_i через $w^{(k)}(s_k)$ и $v^{(k)}(s_k)$, получим

$$\begin{aligned} cS_p(1) &= -2\gamma\delta[(B_1 + mB_2)w^{(i)}(s_i) + (D_1 + mD_2)v^{(i)}(s_i)]/D, \\ T_{1p}(1) &= -2\gamma\delta[(mB_1 + B_2)w^{(i)}(s_i) + (mD_1 + D_2)v^{(i)}(s_i)]/D. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} cB_1 &= \beta(\beta^{2m} - 1) + 2mb(2 - b)\beta^m, \\ B_2 &= \beta(\beta^m + 1)^2 - 4\beta^m - \delta\beta(\beta^m - 1)^2 + \delta m^2 b^2 (2 - b)^2 \beta^m, \\ D_1 &= \gamma\beta(\beta^m - 1)^2 + \delta m^2 b^2 (2 - b)^2 \beta^m, \quad D_2 = \beta(\beta^{2m} - 1) - 2mb(2 - b)\beta^m, \\ D &= \gamma[4\beta^m + \delta\beta(\beta^m - 1)^2] + \delta[\beta(\beta^m + 1)^2 + \delta m^2 b^2 (2 - b)^2 \beta^m]. \end{aligned} \quad (18)$$

Подстановка соотношений (17) в (10) дает следующие $2n$ условия сопряжения для решений системы уравнений (1):

$$\begin{aligned} cS^{(i)} - S^{(i+1)} &= 2a\gamma\delta[(B_1 + mB_2)w^{(i)} + (D_1 + mD_2)v^{(i)}]/(hD), \\ Q_1^{(i)} - Q_1^{(i+1)} &= 2a\gamma\delta[(mB_1 + B_2)w^{(i)} + (mD_1 + D_2)v^{(i)}]/(hD), \quad s = s_i. \end{aligned} \quad (19)$$

Собственные числа краевой задачи (1), (6)–(8), (19) являются приближенными значениями параметра частоты.

3. Колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной пластинами малой ширины

Низкочастотные колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной пластинами малой ширины, которые мы будем называть колебаниями первого типа, аналогичны колебаниям неподкрепленной оболочки. В обоих случаях число волн m по параллели оболочки является большим параметром. Будем искать приближенное решение краевой задачи (1), (6)–(8) и (19) в виде суммы основного полубезмоментного состояния и краевых эффектов [1]:

$$y^{(k)} = m^{I_0(y)} y_0^{(k)} + m^{I_1(y)} (y_1^{(k)} + y_2^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots, n + 1. \quad (20)$$

Здесь y обозначает любую неизвестную функцию из системы уравнений (1), $I(y)$ и $I_1(y)$ — коэффициенты интенсивности, приведенные в табл. 1.



Таблица 1 / Table 1

Показатели интенсивности для решения (20)
Intensity indicators for the solution (20)

Показатель	$u^{(k)}$	$v^{(k)}$	$w^{(k)}$	$\vartheta^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$S^{(k)}$	$M_1^{(k)}$	Q_1
I_0	-2	-1	0	0	-2	-3	-6	-6
I_1	-4	-5	-2	0	-4	-3	-6	-4

Функции $v_0^{(k)}$ удовлетворяют полубезмоментному уравнению

$$\frac{d^4 v_0^{(k)}}{ds^4} - \alpha^4 v_0^{(k)} = 0, \quad (21)$$

где

$$\alpha^4 = \frac{\lambda m^4 - \mu^4 m^8}{\sigma}, \quad (22)$$

и

$$w_0^{(k)} = -v_0^{(k)}, \quad u_0^{(k)} = \frac{dv_0^{(k)}}{ds}, \quad T_{10}^{(k)} = \frac{d^2 v_0^{(k)}}{ds^2}, \quad S_0^{(k)} = -\sigma \frac{d^3 v_0^{(k)}}{ds^3}. \quad (23)$$

Функции краевого эффекта имеют вид

$$y_1^{(k)} = \sum_{j=1}^2 \hat{D}_j^{(k)} \hat{y}_j \exp[r_j(s - s_{k-1})/\mu], \quad y_2^{(k)} = \sum_{j=3}^4 \hat{D}_j^{(k)} \hat{y}_j \exp[r_j(s - s_k)/\mu]. \quad (24)$$

Здесь $\hat{D}_j \sim 1$ — произвольные постоянные, $r_{1,2} = g(-1 \pm i)$, $r_{3,4} = g(1 \pm i)$, $g = \sigma^{1/4}/\sqrt{2}$, $i^2 = -1$. В частности, $\hat{w}_j = 1$, $j = 1, 2, 3, 4$. Функции $y_1^{(k)}$ и $y_2^{(k)}$ быстро убывают при увеличении s от s_{k-1} до s_k и при уменьшении s от s_k до s_{k-1} соответственно. Предположим, что $s_k - s_{k-1} \gg \mu$ для $k = 1, 2, \dots, n+1$. Тогда $y_1^{(k)}(s_k) \ll 1$, $y_2^{(k+1)}(s_k) \ll 1$ и в первом приближении

$$y^{(k)} = m^{I_0(y)} y_0^{(k)} + m^{I_1(y)} y_2^{(k)}, \quad y^{(k+1)} = m^{I_0(y)} y_0^{(k+1)} + m^{I_1(y)} y_1^{(k+1)}, \quad s = s_k.$$

Граничные условия для уравнения (21) могут быть получены после разделения граничных условий на основные и дополнительные [3]. После отбрасывания малых членов основные условия превращаются в граничные условия для полубезмоментного уравнения.

Пусть Δ — разность между максимальным коэффициентом интенсивности полубезмоментного решения и крайевыми эффектами в граничном условии. Тогда:

1) для главного граничного условия величина Δ должна быть строго больше, чем для дополнительного условия;

2) полубезмоментные решения, входящие в главные граничные условия и крайевые эффекты, содержащиеся в дополнительных условиях, должны быть независимыми.

Как правило, для удовлетворения условиям 1 и 2 необходимо составлять линейные комбинации граничных условий.

На краю $s = 0$

$$v = m^{-1}v_0 + m^{-5}v_2 = 0, \quad w = w_0 + m^{-2}w_2 = 0, \quad (25)$$

$$T_1 = m^{-2}T_{10} + m^{-4}T_{12} = 0, \quad M_1 = m^{-6}(M_{10} + M_{12}) = 0$$

и

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = 2, \quad \Delta_3 = 2, \quad \Delta_4 = 0,$$

где Δ_k соответствует k -му условию (25). Очевидно, что невозможно разделить граничные условия (25) на основные и дополнительные так, чтобы было выполнено условие 1. Однако



для линейной комбинации первого и второго условий $mv + w = 0$, принимая во внимание равенство $v_0 + w_0 = 0$, мы имеем $\Delta = 0$. Поэтому главными условиями являются $v = T_1 = 0$, а дополнительными — $w + mv = M_1 = 0$. Таким образом, граничными условиями для уравнения (21) на краях оболочки $s = 0$ и $s = l$ будут $v_0 = T_{10} = 0$. Следовательно,

$$v_0(0) = \frac{d^2 v_0}{ds^2}(0) = 0, \quad v_0(l) = \frac{d^2 v_0}{ds^2}(l) = 0. \quad (26)$$

На параллели $s = s_k$ главными являются граничные условия (7), а дополнительными — условия (8). Из условий (7) вытекают следующие $3n$ условий для уравнений (21):

$$v_0^{(k)} = v_0^{(k+1)}, \quad v_0^{(k)'} = v_0^{(k+1)'}, \quad v_0^{(k)''} = v_0^{(k+1)''}, \quad s = s_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

Для того чтобы получить еще одно главное условие на параллели $s = s_k$, исключим функции краевого эффекта

$$\begin{aligned} w_2^{(k)} &= \hat{D}_3^{(k)} + \hat{D}_4^{(k)}, \quad w_1^{(k+1)} = \hat{D}_1^{(k+1)} + \hat{D}_2^{(k+1)}, \\ \vartheta_2^{(k)} &= -gK^{-1} \left(r_3 \hat{D}_3^{(k)} + r_4 \hat{D}_4^{(k)} \right), \quad \vartheta_1^{(k+1)} = -gK^{-1} \left(r_1 \hat{D}_1^{(k+1)} + r_2 \hat{D}_2^{(k+1)} \right), \\ M_{12}^{(k)} &= -g^2 K^2 \left(r_3^2 \hat{D}_3^{(k)} + r_4^2 \hat{D}_4^{(k)} \right), \quad M_{11}^{(k+1)} = -g^2 K^2 \left(r_1^2 \hat{D}_1^{(k+1)} + r_2^2 \hat{D}_2^{(k+1)} \right), \\ S_2^{(k)} &= Q_{12}^{(k)} = -g^3 K \left(r_3^3 \hat{D}_3^{(k)} + r_4^3 \hat{D}_4^{(k)} \right), \\ S_1^{(k+1)} &= Q_{11}^{(k+1)} = -g^3 K \left(r_1^3 \hat{D}_1^{(k+1)} + r_2^3 \hat{D}_2^{(k+1)} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

из граничных условий (19). Здесь $K = \mu m^2$.

Подставив решение (20) в условия (8), с учетом формул

$$w_0^{(k)} = w_0^{(k+1)}, \quad \vartheta_0^{(k)'} = \vartheta_0^{(k+1)'}, \quad M_{10}^{(k)} = M_{10}^{(k+1)}, \quad s = s_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

и соотношения (28) получим

$$\hat{D}_1^{(k+1)} = \hat{D}_3^{(k)}, \quad \hat{D}_2^{(k+1)} = \hat{D}_4^{(k)}, \quad r_1 \hat{D}_1^{(k+1)} + r_2 \hat{D}_2^{(k+1)} = r_3 \hat{D}_3^{(k)} + r_4 \hat{D}_4^{(k)}.$$

Последнюю формулу можно записать в виде

$$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 0,$$

где $\hat{C}_1 = \hat{D}_1^{(k+1)} + \hat{D}_2^{(k+1)}$, $\hat{C}_2 = \hat{D}_1^{(k)} - i\hat{D}_2^{(k)}$.

Подставим теперь решение (20) в условия (19) и отбросим в них малые члены. С учетом равенств

$$S_2^{(k)} - S_1^{(k+1)} = Q_{12}^{(k)} - Q_{11}^{(k+1)} = 2g^3 K(r_1^3 \hat{D}_1 + r_2^3 \hat{D}_2) = 4g^3 K(\hat{C}_1 - \hat{C}_2) = 8g^3 K\hat{C}_1$$

получим следующие приближенные условия сопряжения:

$$\begin{aligned} A \left(8g^3 K\hat{C}_1 + S_0^{(k)} - S_0^{(k+1)} \right) &= m(mB_2 - D_2)v_0^{(k)} - B_2\hat{C}_1, \\ A \left(S_0^{(k)} - S_0^{(k+1)} \right) &= m^2(D_1 - mB_1)v_0^{(k)} + mB_1\hat{C}_1, \quad A = -\frac{hD}{2am^2\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (30)$$

Линейная комбинация условий (30), не содержащая постоянной $\hat{C}_1$, является четвертым условием на параллели $s = s_k$ для уравнения (21). Его можно представить в виде

$$S_0^{(k)} - S_0^{(k+1)} + cv_0^{(k)} = 0, \quad s = s_k, \quad (31)$$



где

$$c = \frac{8m^2 g^3 AK(mB_1 - D_1) + m^2(B_1 D_2 - B_2 D_1)}{A(8g^3 AK + mB_1 + B_2)}. \quad (32)$$

Параметр c является приближенным значением жесткости пластины в ее плоскости.

Сравним значения жесткости c для пластины, находящейся внутри оболочки, с жесткостью пластины такой же ширины b , расположенной снаружи оболочки [2], в случае $a = h = 0.01$, $m = 4$, $\nu = 0.3$. На рис. 2 кривые 1 и 2 представляют зависимости жесткостей c для пластин, находящихся внутри и вне оболочки, от их ширины b .

Ввиду того что жесткость пластины, прикрепленной к оболочке изнутри, больше жесткости пластины, находящейся снаружи, частоты колебаний оболочки при внутреннем ее подкреплении будут выше частот оболочки при ее внешнем подкреплении пластинами одинаковой ширины.

Из формулы (22) следует, что параметры частоты для колебаний подкрепленной оболочки определяются по формуле

$$\lambda^{(1)}(m, n) = \frac{\sigma \alpha_n^4(m)}{m^4} + \mu^4 m^4, \quad (33)$$

где $\alpha_n(m)$, $n = 1, 2, \dots$ являются собственными числами краевой задачи для уравнения (21) с граничными условиями (26), (27) и (32). Эта краевая задача описывает также колебания шарнирно опертой балки, подкрепленной пружинами жесткостью c в точках $s = s_k$. К аналогичной краевой задаче сводится исследование низкочастотных колебаний цилиндрической оболочки, подкрепленной круговыми стержнями. Различные способы ее решения рассмотрены в [1].

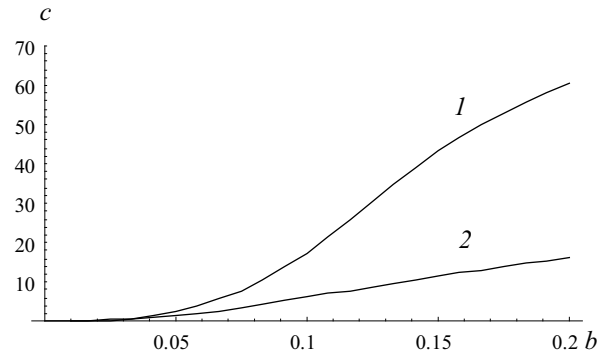


Рис. 2. Жесткости пластин, расположенных внутри (кривая 1) и вне оболочки (кривая 2), в зависимости от ширины пластины b

Fig. 2. The stiffness of the plates located inside (curve 1) and outside the shell (curve 2) depending on the width of plate b

4. Колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной широкими пластинами

Если ширина пластины, подкрепляющей цилиндрическую оболочку, достаточно велика, то низшим частотам соответствуют формы колебаний, локализованные на поверхности пластины. Такие колебания мы будем называть колебаниями второго типа. Решение системы (1) будем искать в виде суммы безмоментного состояния и функций краевого эффекта:

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= \mu^{I_0(y)} y_0^{(k)} + \mu^{I_1(y)} (y_1^{(k)} + y_2^{(k)}), \quad k = 2, 3, \dots, n, \\ y^{(1)} &= \mu^{I_0(y)} y_0^{(1)} + \mu^{I_1(y)+1} y_1^{(1)} + \mu^{I_1(y)} y_2^{(1)}, \\ y^{(n+1)} &= \mu^{I_0(y)} y_0^{(n+1)} + \mu^{I_1(y)} y_1^{(n+1)} + \mu^{I_1(y)+1} y_2^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Функции u_0 , v_0 , T_{10} и S_0 удовлетворяют безмоментным уравнениям

$$T'_{10} + mS_0 = 0, \quad S'_0 = 0, \quad 2S_0 = (1 - \nu)(v'_0 - mu_0), \quad T_{10} = \sigma u'_0. \quad (35)$$

Безмоментные уравнения (35) получаются из уравнений (1), если положить в них $\mu = 0$ и отбросить малые члены λu , λv и λw . Функции краевого эффекта y_1 и y_2 имеют вид (24). Показатели интенсивности приведены в табл. 2.

Предположим, что

$$w_p \sim \vartheta_{1p} \sim 1, \quad M_{1p} \sim Q_{1p} \sim \mu^4, \quad u_p \sim v_p \sim T_{1p} \sim S_p \sim \mu^3. \quad (36)$$



Таблица 2 / Table 2

Показатели интенсивности для решения (35)
Intensity indicators for the solution (35)

Показатель	$u^{(k)}$	$v^{(k)}$	$w^{(k)}$	$\vartheta^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$S^{(k)}$	$M_1^{(k)}$	Q_1
I_0	3	3	3	3	3	3	7	7
I_1	3	4	2	1	4	3	4	3

После подстановки решений (34) и (36) в уравнения (1)–(3), условия сопряжения (4) и граничные условия (5), (6) краевая задача (1)–(6) в первом приближении распадается на пять следующих задач.

1. Краевая задача на собственные значения для системы уравнений (2), описывающая изгибные колебания пластины с граничными условиями

$$w_p = \vartheta_{1p} = 0, \quad x = 1, \quad M_{1p} = Q_{1p} = 0, \quad x = 1 - b. \quad (37)$$

2. Системы линейных алгебраических уравнений

$$w_2^{(k)}(s_k) = w_1^{(k+1)}(s_k), \quad h[M_{12}^{(k)}(s_k) - M_{11}^{(k+1)}(s_k)] = -aM_{1p}(1), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

для определения произвольных постоянных $\hat{D}_3^{(k)}$, $\hat{D}_4^{(k)}$, $\hat{D}_1^{(k+1)}$ и $\hat{D}_2^{(k+1)}$, которые входят в выражения для краевых эффектов вблизи параллели $s = s_k$.

3. Неоднородная краевая задача для безмоментной системы уравнений (41) с граничными условиями

$$u_0(0) = v_0(0) = u_0(l) = v_0(l) = 0, \quad T_{10}^{(k)}(s_k) = T_{10}^{(k+1)}(s_k), \\ h[S_0^{(k)}(s_k) + S_2^{(k)}(s_k) - S_0^{(k+1)}(s_k) + S_1^{(k+1)}(s_k)] = -aS_p(1), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

4. Системы линейных алгебраических уравнений

$$w_1^{(1)}(0) = w_0^{(1)}(0), \quad \vartheta_{11}^{(1)}(0) = 0, \quad w_2^{(n+1)}(l) = w_0^{(n+1)}(l), \quad \vartheta_{12}^{(n+1)}(l) = 0$$

для определения произвольных постоянных $\hat{D}_1^{(1)}$, $\hat{D}_2^{(1)}$ и $\hat{D}_3^{(n+1)}$, $\hat{D}_4^{(n+1)}$ в функциях краевого эффекта у краев оболочки.

5. Неоднородная краевая задача для системы уравнений (3) с граничными условиями

$$v_p(1) = v_0^{(k)}(s_k) - v_0^{(k+1)}(s_k), \quad aT_{1p}(1) = h[Q_{12}^{(k)}(s_k) - Q_{11}^{(k)}(s_k)], \quad T_{1p} = S_p = 0, \quad x = 1 - b.$$

Задачи 1–5 можно последовательно решить, начиная с первой. Рассмотрим только решение задачи 1, которое позволяет определить первое приближение для частоты и главную часть формы колебаний. Решения остальных задач дают только незначительные поправки для формы колебаний.

Система уравнения (2) сводится к следующему уравнению для определения прогиба пластины w :

$$\Delta^2 w - \beta^4 w = 0, \quad \beta^4 = \frac{\lambda}{\mu_p^4}, \quad \Delta = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) - \frac{m^2}{x^2}. \quad (38)$$

Точное общее решение уравнения (38) имеет вид [6]

$$w = C_1 J_m(\beta s) + C_2 Y_m(\beta s) + C_3 I_m(\beta s) + C_4 K_m(\beta s), \quad (39)$$

где C_j , $j = 1, 2, 3, 4$ — произвольные постоянные, J_m , Y_m — функции Бесселя, I_m , K_m — модифицированные функции Бесселя. Подстановка решения (39) в граничные условия (37) дает систему шести линейных алгебраических уравнений с неизвестными C_j . Равенство нулю



определителя этой системы $D(\beta, m)$, где m — число волн по параллели, является условием существования ее нетривиального решения. Параметры частоты находятся по формуле

$$\lambda_k^{(2)}(m) = \mu_p^4 \beta_k^4(m), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где β_k — положительные корни уравнения $D(\beta, m) = 0$. Первый параметр частот определяется по формуле

$$\lambda_1^{(2)} = \mu_p^4 \beta_1^4(0),$$

где β_1 — наименьший положительный корень уравнения $D(\beta, 0) = 0$.

Уравнение $D(\beta, m) = 0$ является довольно громоздким. В случае $b \ll 1$ можно получить простое приближенное уравнение для определения β . Предположим, что m не является большим числом. В этом случае замена переменной $x = 1 - b\xi$ в уравнении (38) и граничных условиях (37) и отбрасывание в них малых слагаемых приводит к приближенной краевой задаче на собственные значения

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} - \gamma^4 w = 0, \quad (40)$$

$$w(0) = w'(0) = w''(1) = w'''(1) = 0, \quad (41)$$

где $\gamma = b\beta$, $w' = dw/d\xi$.

Решение уравнения (40), совпадающего с уравнением (21), ищем в виде [7]

$$w = C_1 S(\gamma\xi) + C_2 T(\gamma\xi) + C_3 U(\gamma\xi) + C_4 V(\gamma\xi), \quad (42)$$

где C_j — произвольные постоянные, $S(z) = \cosh z + \cos z$, $T(z) = \sinh z + \sin z$, $U(x) = \cosh x - \cos x$, $V(x) = \sinh x - \sin x$.

Подставив решение (42) в граничные условия (41), получим систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными C_j . Равенство нулю определителя этой системы дает следующее уравнение для определения γ :

$$\cosh \gamma \cos \gamma = 1. \quad (43)$$

Положительные корни γ_k уравнения (43) являются собственными числами краевой задачи (40), (41). Наименьшим собственным значением будет $\gamma_1 = 1.875$.

Приближенное значение параметра частоты определяется по формуле

$$\lambda_k^{(2)} = \frac{\mu_p^4 \gamma_k^4}{b^4} = \frac{a^2 \gamma_k^4}{12b^4}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (44)$$

Формула (44) показывает, что параметр частоты $\lambda^{(2)}$ при колебаниях второго типа быстро убывает при увеличении ширины пластины b .

5. Пример расчета

Рассмотрим шарнирно опертую цилиндрическую оболочку длиной l , подкрепленную кольцевой пластиной по параллели $s_1 = l/2$. Решение уравнений (21) можно представить в виде

$$v_0^{(k)} = A_k S(z_k) + B_k V(z_k) + C_k U(z_k) + D_k T(z_k), \quad z_k = \alpha(s - s_{k-1}), \\ s_{k-1} < s < s_k, \quad k = 1, 2, \quad s_0 = 0, \quad s_2 = l,$$

где A_k , B_k , C_k and D_k — произвольные постоянные. Подставив решения (46) в граничные условия (26), (27) и (31), получим систему из восьми линейных алгебраических уравнений с неизвестными A_k , B_k , C_k и D_k , $k = 1, 2$. Эта система имеет нетривиальное решение,



если ее определитель $G(\alpha)$ равен нулю. Равенство $G(\alpha) = 0$ представляет собой уравнение для определения параметра α . Это уравнение распадется на два следующих независимых уравнения:

$$\tanh x - \tan x = 32x^3/c, \quad \sin x = 0, \quad x = \alpha l/2. \quad (45)$$

Корни второго уравнения (45) не зависят от жесткости c . Обозначим x_1 и x_2 минимальные положительные корни первого и второго уравнений (45). Тогда

$$\pi/2 < x_1 < 3.927, \quad x_2 = \pi.$$

Пусть безразмерные параметры оболочки и пластины имеют значения $l = 4$, $h = a = 0.01$, $\nu = 0.3$. Из равенства (33) следует, что первый параметр частоты $\lambda_1^{(1)}$ для колебаний первого типа можно найти по приближенной формуле

$$\lambda_1^{(1)} = \min_m \left(\frac{16\sigma x_*^4(m)}{l^4 m^4} + \mu^4 m^4 \right), \quad (46)$$

где $x_* = \min(x_1, x_2)$. Минимум достигается при $m = 4$, причем $x_* = x_1$. Зависимость $\lambda_1^{(1)}$ от

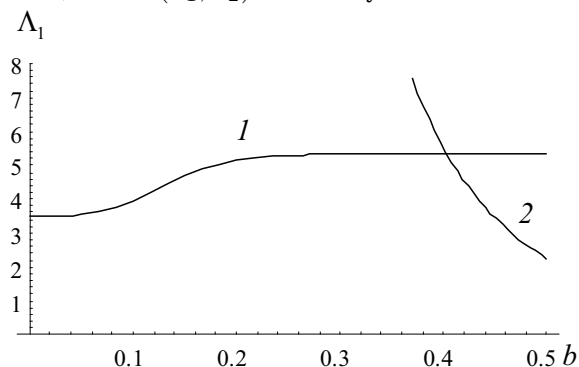


Рис. 3. Зависимость параметров частоты $\lambda_1^{(1)}$ (кривая 1) и $\lambda_1^{(2)}$ (кривая 2) от ширины пластины b

Fig. 3. Dependence of the frequency parameters $\lambda_1^{(1)}$ (curve 1) and $\lambda_1^{(2)}$ (curve 2) on the width of plate b

безразмерной ширины пластины b представлена кривой 1 на рис. 3. Первый параметр частоты $\lambda_1^{(2)}$ для колебаний второго типа вычислен по формуле (44) при $k = 1$. Его зависимость от b изображена кривой 2 на рис. 3.

Параметр частоты $\lambda_1^{(1)}$ возрастает при увеличении b , в то время как $\lambda_1^{(2)}$ при этом быстро убывает. Значение b , при котором $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)}$, соответствует максимальному значению первой частоты колебаний. Учитывая приближенный характер полученных результатов, можно утверждать, что для рассматриваемого примера оптимальная безразмерная ширина пластины, соответствующая максимальному значению первой частоты, мало отличается от $b = 0.4$.

Заключение

Использование асимптотических методов для решения задачи о свободных низкочастотных колебаниях цилиндрической оболочки, подкрепленной изнутри кольцевыми пластинами, позволило получить простые приближенные формулы для вычисления частот и форм колебаний. Разные подходы применены для исследования колебаний первого типа (узкие пластины) и второго типа (широкие пластины). В случае узких пластин число волн по параллели оболочки m велико, а частоты возрастают с увеличением ширины пластины b . Для широких пластин нижней частоте соответствует $m = 0$, и она быстро убывает при увеличении b .

В качестве примера рассмотрены колебания оболочки, подкрепленной одной пластиной. Если все пластины одинаковы, то частоты колебаний второго типа будут такими же, как в случае одной пластины. Если пластины имеют разную ширину, то наименьшими будут частоты, соответствующие колебаниям пластины наибольшей ширины. Частоты колебаний первого типа при наличии нескольких пластин могут быть найдены с помощью метода осреднения [1].

Список литературы

1. Филиппов С. Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. Санкт-Петербург : Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 1999. 196 с.



2. Filippov S. B. Asymptotic approximations for frequencies and vibration modes of cylindrical shell stiffened by annular plates // *Analysis of Shells, Plates, and Beams – A State of the Art Report*. 2020. P. 123–140. (Springer's Series Advanced Structured Materials, vol. 123). https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_7
3. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. Москва : Наука, 1979. 384 с.
4. Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Vaillancourt R. Asymptotic methods in mechanics of solids. Springer International Publishing, Switzerland, 2015. 325 p. (International Series of Numerical Mathematics, vol. 167).
5. Filippov S. B. Optimal design of stiffened cylindrical shells based on an asymptotic approach // *Technische Mechanik*. 2004. Bd. 24, Heft 3–4. S. 221–230. <https://journals.ub.ovgu.de/index.php/techmech/article/view/927>
6. Вибрации в технике / под ред. В. В. Болотина : в 6 т. Т. 1. Москва : Машиностроение, 1978. 352 с.
7. Тимошенко С. П., Донovan Х. Я., Уивер У. Колебания в инженерном деле. Москва : Машиностроение, 1985. 472 с.

References

1. Filippov S. B. *Teoriya sopryazhennykh i podkreplennykh obolochek* [Theory of Joint and Stiffened Shells]. St. Petersburg, St. Petersburg State University Press, 1999. 196 p. (in Russian).
2. Filippov S. B. Asymptotic approximations for frequencies and vibration modes of cylindrical shell stiffened by annular plates. *Analysis of Shells, Plates, and Beams – A State of the Art Report*. Springer's Series Advanced Structured Materials, vol. 123. 2020, pp. 123–140. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_7
3. Gol'denveizer A. L., Lidskii V. B., Tovstik P. E. *Svobodnye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* [Free Vibrations of Thin Elastic Shells]. Moscow, Nauka, 1979. 384 p. (in Russian).
4. Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Vaillancourt R. *Asymptotic Methods in Mechanics of Solids*. International Series of Numerical Mathematics, vol. 167. Springer International Publishing, Switzerland, 2015. 325 p.
5. Filippov S. B. Optimal design of stiffened cylindrical shells based on an asymptotic approach. *Technische Mechanik*, 2004, vol. 24, iss. 3–4, pp. 221–230. <https://journals.ub.ovgu.de/index.php/techmech/article/view/927>
6. Bolotin V. V. (ed.) *Vibratsii v tekhnike* [Vibrations in Technique]. Vol. 1. Moscow, Mashinostroenie Publishers, 1978. 352 p. (in Russian).
7. Timoshenko S. P., Donovan H. Y., Uiver U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Vibration Problems in Engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publishers, 1985. 472 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 04.12.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



Юбилей

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 150–157

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 150–157

mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-150-157>

EDN: HJEYJR

Персоналия

УДК 539.3

Леонид Юрьевич Коссович. К 75-летию со дня рождения

Ю. Н. Радаев^{1✉}, А. О. Ватульян²

¹Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, Россия, 119526, г. Москва, просп. Вернадского, д. 101, корп. 1

²Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8-А

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, radayev@ipmnet.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>, AuthorID: 103116

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, aovatulyan@sfsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

Аннотация. Статья посвящена юбилею главного редактора журнала Леонида Юрьевича Коссовича. В работе представлены основные научные направления и публикации юбиляра за последние пять лет.

Ключевые слова: юбилей, ведущий ученый, теория упругости, биомеханика

Для цитирования: Радаев Ю. Н., Ватульян А. О. Леонид Юрьевич Коссович. К 75-летию со дня рождения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 150–157. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-150-157>, EDN: HJEYJR

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

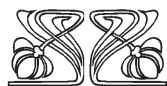
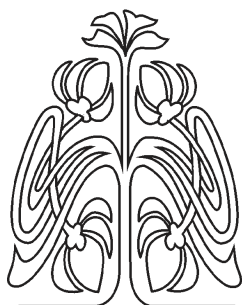
Personalia

Leonid Yu. Kossovich. To the 75th birthday anniversary

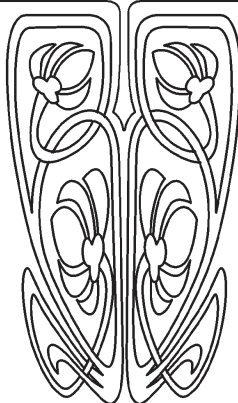
Yu. N. Radayev^{1✉}, A. O. Vatulyan²

¹Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 101-1 Prospekt Vernadskogo, Moscow 119526, Russia

²Southern Federal University, 8-A Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia



Приложения





Yuri N. Radayev, radayev@ipmnet.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>, AuthorID: 103116

Alexander O. Vatulyan, aovatulyan@sfedu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

Abstract. The article is dedicated to the anniversary of the editor-in-chief of this journal Leonid Yu. Kossovich. The paper presents an overview of the scientific areas in which our anniversary celebrant worked and his publications over the past five years

Ключевые слова: jubilee, leading scientist, elasticity theory, biomechanics

For citation: Radayev Yu. N., Vatulyan A. O. Leonid Yu. Kossovich. To the 75th birthday anniversary. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 150–157 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-150-157>, EDN: HJEYJR

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

15 октября 2023 г. исполнилось 75 лет Леониду Юрьевичу Коссовичу — известному российскому ученому-механику, доктору физико-математических наук, профессору, лауреату Государственной премии РФ в области науки и техники, кавалеру Ордена дружбы, заведующему кафедрой математической теории упругости и биомеханики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (СГУ).

Леонид Юрьевич родился 15 октября 1948 г. в г. Саратове. В 1966 г. закончил физико-математическую школу № 13 г. Саратова с серебряной медалью. В 1971 г. — окончил Саратовский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет имени Н. Г. Чернышевского по специальности механика. В 1977 г. Л. Ю. Коссович успешно защитил диссертацию «Некоторые задачи динамической теории упругих оболочек переменной толщины» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а в 1989 г. в Институте проблем механики АН СССР — диссертационную работу «Нестационарные задачи упругих тонких оболочек вращения» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 — механика деформируемого твердого тела. В 1989 г. Леонид Юрьевич был избран заведующим кафедрой теории упругости СГУ, в 1991 г. ему было присвоено ученое звание профессора. В 1993 г. он был избран деканом механико-математического факультета СГУ. С 2003 по 2013 г. Леонид Юрьевич возглавлял университет в должности ректора, а с 2013 по 2023 г. работал в должности президента университета.

В сферу научных интересов Л. Ю. Коссовича входят не только механика, биомеханика и программная инженерия. Более двадцати лет научный коллектив под руководством Леонида Юрьевича занимается разработкой композиционных материалов специального назначения.

В 1998 г. указом Президента Российской Федерации в составе коллектива ученых под руководством профессора А. Л. Гольденвейзера Леониду Юрьевичу Коссовичу была присуждена Государственная премия Российской Федерации в области науки и техники за цикл работ «Фундаментальные проблемы теории тонкостенных конструкций».

Ему принадлежат более 200 научных и учебно-методических работ (в том числе три монографии). В монографиях «Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек» (1986 г.), «Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies» (1998 г.) и последующих работах Леонидом Юрьевичем были изложены основы асимптотической теории построения нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных упругих оболочек. В предложенной им теории были модифицированы принципы построения асимптотической теории оболочек в задачах статики, разработанные его учителем А. Л. Гольденвейзером¹. При этом использованы понятия изменяемости НДС по пространственным координатам и динамичности по времени, разработаны процедуры асимптотического интегрирования трехмерных динамических уравнений теории упругости с учетом изменяемости и динамичности. Принцип наложения составляющих с различными значениями показателей изменяемости и динамичности был заменен в соответствии со свойствами нестационарных задач теории упругости для

¹Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва : Наука, 1976. 512 с.



оболочек на выделение различных областей фазовой плоскости, где НДС обладает различными значениями показателей изменяемости и динамичности, причем полнота описания НДС такими составляющими доказывается наличием областей согласования между ними.

В соответствии с классификацией У. К. Нигула² рассматривались три типа ударных торцевых воздействий (продольное, тангенциального типа; продольное, изгибающего типа; нормальное), приводящих к принципиально различным асимптотическим схемам построения полного решения. Согласно этим схемам выделены двумерные составляющие теории Кирхгофа – Лява: безмоментная и изгибающая; коротковолновая высокочастотная составляющая; пять типов погранслоя: квазистатический погранслоем в окрестности двумерного фронта волны растяжения – сжатия, эллиптический погранслоем в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея и два типа гиперболического погранслоя в окрестностях фронтов расширения и сдвига по трехмерной теории. Разработаны методы вывода асимптотически оптимальных уравнений для всех этих составляющих.

Проведенные исследования показали, что никакая двумерная теория не может полностью описать нестационарное НДС тонких оболочек во всех участках фазовой плоскости. Так, теория Кирхгофа – Лява дает ложный фронт волны растяжения – сжатия и не описывает трехмерный фронт волн расширения; построенные параболический и гиперболический погранслои позволяют исправить ложную картину. А теории типа Тимошенко не только описывают ложные фронты волн растяжения – сжатия (исправляются параболическим погранслоем) и волны сдвига (исправляются эллиптическим погранслоем), но и не описывают фронт волны расширения (исправляются гиперболическим погранслоем).

Таким образом, построенная асимптотическая теория полностью свободна от недостатков, присущих классическим двумерным теориям и позволяет с помощью простых уравнений для выделенных составляющих разрабатывать асимптотические методы их решения. Предложенные Л. Ю. Коссовичем методы универсальны, они показали успешность применения в задачах для оболочек, выполненных из сложных материалов (вязкоупругие оболочки) и в задачах для оболочных конструкций.

В настоящее время значительное внимание он уделяет исследованиям в области биомеханики: проблемам эластичности стенок кровеносных сосудов, гидродинамике кровотока в патологически измененных сосудах, реологическому моделированию биоматериалов, задачам деформирования костной ткани, изучению конструкций имплант – кость и их приложениям.

Значительное внимание Леонид Юрьевич уделяет формированию и воспитанию молодых научных кадров. Под его руководством выполнены и защищены двенадцать кандидатских и три докторские диссертации. В 2023 г. Л. Ю. Коссович возглавил диссертационный совет 24.2.392.09 (по физико-математическим наукам) по специальности 1.1.10. — биомеханика и биоинженерия.

Под руководством Леонида Юрьевича успешно реализованы аванпроекты и проекты Фонда перспективных исследований, имеющие важное народнохозяйственное и оборонное значение: «Разработка комплекса перспективных защитных и маскирующих материалов экипировки военнослужащего» (2014–2017 гг.), «Разработка прототипа системы поддержки принятия врачебных решений в реконструктивной хирургии позвоночно-тазового комплекса» (2018–2021 гг.), «Обоснование исходных данных для разработки программно-аналитической системы обеспечения эффективного хирургического лечения патологий позвоночно-тазового комплекса» (2016 г.), «Обоснование возможности создания “умных терморегулирующих материалов экипировки”» (2018 г.), «Обоснование возможности применения нановолокон для создания мембранных теплоизоляционных материалов и материалов для сверхлегких средств защиты органов дыхания» (2019–2020 гг.).

Л. Ю. Коссович обладает уникальным талантом организатора, конструктивным мыш-

²Nigul U. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // International Journal of Solids and Structures. 1969. Vol. 5, iss. 6. P. 607–627. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)



лением, редким даром быстро находить решение сложных проблем. Свидетельством тому является его многогранная научная, организаторская и общественная деятельность. В научной и общественной деятельности профессора Л. Ю. Коссовича прослеживается ярко выраженная гражданская позиция, суть которой — в отстаивании национальных и государственных интересов России.

Со дня основания журнала «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика» Леонид Юрьевич является его бессменным главным редактором. Под его руководством журнал достиг широкой известности и международного признания: журнал индексируется Web of Science, Scopus (Q3), MatSciNet и zbMath, входит в категорию K1 Перечня ВАК и 1-й квартиль RSCI. Учитывая заслуги Л. Ю. Коссовича как ученого и руководителя, редколлегия журнала приняла решение посвятить юбиляру выпуски 1 и 2 за 2024 г., в которых представлены публикации ведущих ученых-механиков.

Мы искренне поздравляем Леонида Юрьевича с 75-летием, желаем ему здоровья и творческих успехов в научной и педагогической деятельности, толковых учеников!

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

1976–2019

См. Радаев Ю. Н. Профессор Леонид Юрьевич Коссович (к 70-летию со дня рождения) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 4. С. 507–521. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-507-521>, EDN: YSUCYP

2019

Коссович Л. Ю., Сальковский Ю. Е., Запис К. В., Музалев П. А., Николайчук А. Н., Савонин А. А., Цепцура А. А., Пичхидзе С. Я. Композиция для получения паропроницаемой пористой мембраны. Патент на изобретение RU 2688625 C1, 21.05.2019 ; Заявка № 2018110834 от 27.03.2018. EDN: TQYFVN

Антипов М. В., Болотин М. Г., Запис К. В., Коссович Л. Ю. Текстильный нетканый электропрядный материал с многокомпонентными активными модифицирующими добавками и способ его получения. Патент на изобретение RU 2697772 C1, 19.08.2019 ; Заявка № 2018134978 от 04.10.2018. EDN: JPIRZO

Коссович Л. Ю., Сальковский Ю. Е., Запис К. В., Музалев П. А., Николайчук А. Н., Савонин А. А., Цепцура А. А., Махов С. В., Пичхидзе С. Я. Огнезащитный текстильный материал. Патент на изобретение RU 2689600 C1, 28.05.2019 ; Заявка № 2018110836 от 27.03.2018. EDN: BJPGDG

Коссович Л. Ю., Сальковский Ю. Е., Савонин С. А., Сердобинцев А. А., Стародубов А. В., Павлов А. М., Галушка В. В., Митин Д. М., Рябухо П. В. Полиэфирный нетканый материал, поглощающий в СВЧ-диапазоне. Патент на изобретение RU 2689624 C1, 28.05.2019 ; Заявка № 2018110837 от 27.03.2018. EDN: TNUAQY

Антипов М. В., Болотин М. Г., Запис К. В., Коссович Л. Ю., Савонин А. А. Текстильный нетканый многослойный электропрядный материал с повышенными износостойкостью и стойкостью к воздействию моющих средств и способ его получения. Патент на изобретение RU 2693832 C1, 05.07.2019 ; Заявка № 2018134980 от 04.10.2018. EDN: WHFHBO

Бессонов Л. В., Золотов В. С., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Колесникова А. С., Коссович Л. Ю., Лихачев С. В., Сидоренко Д. А., Фалькович А. С., Шульга А. Е. Справочник-переходник по классификациям переломов АО/ASIF и AOSPINE. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019665103, 19.11.2019 ; Заявка № 2019664401. EDN: TFPDRC

Бескровный А. С., Бессонов Л. В., Доль А. В., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Фалькович А. С. Мобильное приложение для измерения и расчета параметров сагиттального баланса позвоночно-тазового комплекса «СПИНОМЕТР». Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019665169, 20.11.2019 ; Заявка № 2019664415. EDN: CMSXOY

Коссович Л. Ю., Кириллова И. В. Теория эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных воздействиях нормального типа // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики : сб. ст. : в 4 т. Уфа : Изд-во Башкирского гос. ун-та, 2019. Т. 3. С. 484–486. EDN: VNYTKG



- Kossovich L. Yu., Kharlamov A. V., Lysunkina Yu. V., Shulga A. E. Mathematical modeling and prediction of the effectiveness of surgical treatment in surgery of the spine and pelvic complex // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2019. Т. 23, № 4. С. 744–755. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1702>, EDN: OYMKWQ
- Kolesnikova A. S., Fedonnikov A. S., Kirillova I. V., Ulianov V. Iu., Levchenko K. K., Kireev S. I., Kossovich L. Iu., Norkin I. A. The possibilities with decision support systems in surgery of spine-pelvic complex (analytical review) // Orthopaedic Genius. 2019. Vol. 25, № 2. P. 243–253. <https://doi.org/10.18019/1028-4427-2019-25-2-243-253>, EDN: VTAVVT
- Скрипаченко К. К., Голядкина А. А., Морозов К. М., Челнокова Н. О., Островский Н. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Биомеханический пациенто-ориентированный анализ влияния аневризмы на гемодинамику грудного отдела аорты // Российский журнал биомеханики. 2019. Т. 23, № 4. С. 526–536. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2019.4.03>, EDN: UFWXVK
- Доль А. В., Иванов Д. В., Кажанов И. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Микитюк С. И., Петров А. В. Биомеханическое моделирование вариантов хирургического реконструктивного лечения односторонних переломов крестца // Российский журнал биомеханики. 2019. Т. 23, № 4. С. 537–548. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2019.4.04>, EDN: KDQYUN
- Донник А. М., Иванов Д. В., Коссович Л. Ю., Левченко К. К., Киреев С. И., Морозов К. М., Островский Н. В., Зарецков В. В., Лихачев С. В. Создание трехмерных твердотельных моделей позвоночника с транспедикулярной фиксацией с использованием специализированного программного обеспечения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 424–438. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-424-438>, EDN: OUPPGG
- Донник А. М., Иванов Д. В., Киреев С. И., Коссович Л. Ю., Островский Н. В., Норкин И. А., Левченко К. К., Лихачев С. В. Извлечение клинически значимых данных из биомеханического моделирования вариантов хирургического лечения травмы позвоночника при повреждении позвонков Th10, Th11 // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 439–453. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-439-453>, EDN: WWAPOI
- Федонников А. С., Колесникова А. С., Рожкова Ю. Ю., Коссович Л. Ю. Система поддержки принятия врачебных решений в хирургии позвоночно-тазового комплекса как инструмент автоматизации управления в отрасли // Саратовский научно-медицинский журнал. 2019. Т. 15, № 3. С. 677–682. EDN: SXFLSG

2020

- Хрустицкий В. В., Хрустицкий К. В., Коссович Л. Ю. Фильтрующий материал на основе слоя полимерных нановолокон и прядильный раствор для его получения. Патент на изобретение RU 2718786 C1, 14.04.2020 ; Заявка № 2019130716 от 30.09.2019. EDN: OJUDXG
- Коссович Л. Ю., Сальковский Ю. Е., Савонин С. А., Абрамов А. Ю. Фильтрующий материал для защиты от воздушных взвесей. Патент на изобретение RU 2720784 C1, 13.05.2020 ; Заявка № 2019133168 от 18.10.2019. EDN: LOPXOI
- Майстренко Д. Н., Коссович Л. Ю., Иванов Д. В., Доль А. В., Скрипаченко К. К., Станжевский А. А., Соловьев А. В., Чегемов А. А., Тлостанова М. С., Генералов М. И., Олещук А. Н., Винокуров А. Ю., Кокорин Д. М., Гудзь А. А., Попов С. А., Майстренко А. Д., Боровик В. В., Чечулов П. В. Способ прогнозирования опасности эмбологенного разрыва нестабильной каротидной атеросклеротической бляшки. Патент на изобретение RU 2723741 C1, 17.06.2020 ; Заявка № 2019139711 от 04.12.2019. EDN: LQZNSR
- Майстренко Д. Н., Коссович Л. Ю., Иванов Д. В., Доль А. В., Кириллова И. В., Станжевский А. А., Соловьев А. В., Чегемов А. А., Тлостанова М. С., Генералов М. И., Олещук А. Н., Винокуров А. Ю., Кокорин Д. М., Гудзь А. А., Попов С. А., Майстренко А. Д., Боровик В. В., Чечулов П. В. Способ прогнозирования опасности эмбологенного разрыва каротидной атеросклеротической бляшки. Патент на изобретение RU 2729733 C1, 11.08.2020 ; Заявка № 2019143025 от 18.12.2019. EDN: WAYWKX
- Коссович Л. Ю., Кириллова И. В., Фалькович А. С., Бессонов Л. В., Иванов Д. В., Голядкина А. А., Золотов В. С., Левченко К. К., Колесов С. В., Сидоренко Д. А. Справочник по сколиотическим деформациям, классификация АО (LENKE). Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2020662173, 09.10.2020 ; Заявка № 2020661496 от 02.10.2020. EDN: BTMRNZ



Коссович Л. Ю., Кириллова И. В., Фалькович А. С., Бессонов Л. В., Иванов Д. В., Харламов А. В., Велиев В. М., Доль А. В., Матершев И. В., Варюхин А. А., Федонников А. С., Ульянов В. Ю., Левченко К. К., Рожкова Ю. Ю., Шульга А. Е., Горякин М. В. Веб-сервис определения минеральной плотности тканей по данным компьютерной томографии для прототипа системы поддержки принятия врачебных решений, режим персональной виртуальной операционной. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2020662251, 09.10.2020 ; Заявка № 2020661476 от 02.10.2020. EDN: PQHZBY
Коссович Л. Ю., Кириллова И. В., Фалькович А. С., Коссович С. Л., Бессонов Л. В., Иванов Д. В., Велиев В. М., Доль А. В., Бескровный А. С. Мобильное приложение «Опросник ОСВЕСТРИ с визуально-аналоговой шкалой оценки боли». Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2020662810, 19.10.2020 ; Заявка № 2020661376 от 01.10.2020. EDN: FSHSHE

Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотические методы исследования эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях нормального типа // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2020. № 5. С. 131–137. <https://doi.org/10.31857/S0572329920050104>, EDN: GFIOQL

Кажанов И. В., Микитюк С. И., Доль А. В., Иванов Д. В., Харламов А. В., Петров А. В., Коссович Л. Ю., Мануковский В. А. Биомеханическое моделирование вариантов внутренней фиксации односторонних переломов крестца // Травматология и ортопедия России. 2020. Т. 26, № 2. С. 79–90. <https://doi.org/10.21823/2311-2905-2020-26-2-79-90>, EDN: KOVMRE

Петрайкин А. В., Иванов Д. В., Ахмад Е. С., Сергунова К. А., Низовцова Л. А., Петрайкин Ф. А., Рыжов С. А., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Бессонов Л. В., Доль А. В., Владимирский А. В., Харламов А. В. Фантомное моделирование для выбора оптимальных фильтров реконструкции в количественной компьютерной томографии // Медицинская физика. 2020. № 2 (86). С. 33–43. EDN: TLLBVQ

Иванов Д. В., Доль А. В., Коссович Л. Ю. Aspect ratio как фактор, предсказывающий разрыв аневризм сосудов головного мозга // Российский журнал биомеханики. 2020. Т. 24, № 1. С. 8–18. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2020.1.01>, EDN: NBGXDO

Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Bessonov L. V., Petraikin A. V., Dol A. V., Ahmad E. S., Morozov S. P., Vladzimirskiy A. V., Sergunova K. A., Kharlamov A. V. Influence of convolution kernel and beam-hardening effect on the assessment of trabecular bone mineral density using quantitative computed tomography // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 205–219. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-205-219>, EDN: BFUICL

Бескровный А. С., Бессонов Л. В., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Использование сверточной нейронной сети для автоматизации построения двумерных твердотельных моделей позвонков // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 502–516. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-502-516>, EDN: JWTDAN

Aulova A., Bek M., Emri I., Kossovich L. Needleless electrospinning of PA6 fibers: the effect of solution concentration and electrospinning voltage on fiber diameter // Strojnicki Vestnik/Journal of Mechanical Engineering. 2020. Т. 66, № 7–8. С. 421–430. <https://doi.org/10.5545/sv-jme.2020.6713>, EDN: RZOQGU

Майстренко Д. Н., Станжевский А. А., Коссович Л. Ю., Иванов Д. В., Соловьев А. В., Генералов М. И., Мус В. Ф., Гудзь А. А., Красильникова Л. А. Влияние гемодинамического фактора на уровень касательного напряжения стенки артерии в зоне каротидной бифуркации // Вестник Национального медико-хирургического центра им. Н. И. Пирогова. 2020. Т. 15, № 3–2. С. 36–41. <https://doi.org/10.25881/BPNMSC.2020.22.28.008>, EDN: ZOTTTT

Хоминец В. В., Кудяшев А. Л., Теремшонов А. В., Нагорный Е. Б., Надулич К. А., Стадниченко С. Ю., Доль А. В., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Особенности позвоночно-тазовых взаимоотношений, характеризующих баланс туловища, у пациентов с истинным спондилолистезом до и после корригирующих операций на позвоночнике // Профилактическая и клиническая медицина 2020. № 3 (76). С. 47–58. EDN: HMYGAS

2021

Коссович Л. Ю., Кириллова И. В., Фалькович А. С., Бессонов Л. В., Иванов Д. В., Хоминец В. В., Кудяшев А. Л., Курчаткин А. А., Велиев В. М., Коссович С. Л., Колесникова А. С., Матершев И. В., Бескровный А. С., Золотов В. С., Сидоренко Д. А., Крылова Е. Ю., Федонников А. С., Ульянов В. Ю.,



Левченко К. К., Шульга А. Е. и др. Модуль трёхмерного геометрического планирования для прототипа системы поддержки принятия врачебных решений, режим персональной виртуальной операционной 3D. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2021661926, 19.07.2021 ; Заявка № 2021661058 от 13.07.2021. EDN: [LRVAWO](#)

Коссович Л. Ю., Кириллова И. В., Фалькович А. С., Бессонов Л. В., Иванов Д. В., Велиев В. М., Голядкина А. А., Доль А. В., Бескровный А. С. Мобильное приложение «Опросник SF-36». Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2021662019, 20.07.2021 ; Заявка № 2021660937 от 09.07.2021. EDN: [FGPCAT](#)

Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Elliptic Boundary Layer in Shells of Revolution Under Normal Edge Shock Loading // Multiscale solid mechanics strength, durability, and dynamics. Switzerland, 2021. P. 249–260. (Advanced Structured Materials (STRUCTMAT), vol. 141). https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_19, EDN: [SHCZQL](#)

Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Лихачев С. В., Полиенко А. В., Харламов А. В., Шульга А. Е. Сравнительный анализ мобильного приложения для измерения параметров сагиттального баланса «СПИНОМЕТР» с системой SURGIMAP: апробация межэкспертной надежности // Гений ортопедии. 2021. Т. 27, № 1. С. 74–79. <https://doi.org/10.18019/1028-4427-2021-27-1-74-79>, EDN: [MXWDWV](#)

Бескровный А. С., Бессонов Л. В., Голядкина А. А., Доль А. В., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Сидоренко Д. А. Разработка системы поддержки принятия врачебных решений в травматологии и ортопедии. Биомеханика как инструмент предоперационного планирования // Российский журнал биомеханики. 2021. Т. 25, № 2. С. 118–133. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2021.2.01>, EDN: [IEGOHC](#)

Bessonov L. V., Golyadkina A. A., Dmitriev P. O., Dol A. V., Zolotov V. S., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Y., Titova Yu. I., Ulyanov V. Yu., Kharlamov A. V. Constructing the dependence between the young's modulus value and the hounsfield units of spongy tissue of human femoral heads // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 182–193. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-182-193>, EDN: [SNBJNB](#)

Бескровный А. С., Бессонов Л. В., Иванов Д. В., Золотов В. С., Сидоренко Д. А., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Построение трехмерных твердотельных моделей позвонков с использованием сверточных нейронных сетей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 368–378. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-368-378>, EDN: [XOVJRW](#)

2022

Кудяшев А. Л., Хоминец В. В., Иванов Д. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Метленко П. А., Чернышев В. В. Величина шейно-диафизарного угла ножки эндопротеза тазобедренного сустава как биомеханическая предпосылка развития асептической нестабильности вертлужного компонента (Экспериментальное исследование) // Гений ортопедии. 2022. Т. 28, № 6. С. 811–816. <https://doi.org/10.18019/1028-4427-2022-28-6-811-816>, EDN: [SZLRQY](#)

Иванов Д. В., Бессонов Л. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Киреев С. И. Концепция систем поддержки принятия врачебных решений в хирургии позвоночно-тазового комплекса // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 517–535. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-517-535>, EDN: [IJEHPA](#)

Белосточный Г. Н., Григорьев С. А., Коссович Л. Ю., Мыльцина О. А. Динамическая термостойчивость геометрически нерегулярной пологой оболочки постоянного кручения под действием переодической, по временной координате, нагрузки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 468–478. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-468-478>, EDN: [RMHUQN](#)

Донник А. М., Коссович Л. Ю., Оленко Е. С. Поведение сегмента грудного отдела позвоночника при оскольчатом переломе позвонка до и после хирургического лечения. Биомеханический эксперимент // Российский журнал биомеханики. 2022. Т. 26, № 1. С. 25–39. <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2022.1.02>, EDN: [WTVAlF](#)

Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическая теория волновых процессов в оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нормальных воздействиях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 2. С. 35–49. <https://doi.org/10.31857/S057232992202012X>, EDN: [HHWAXC](#)



Дмитриев П. О., Харламов А. В., Кажанов И. В., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Фалькович А. С., Микитюк С. И., Петров А. В. Спецификация прогностических моделей и программная реализация калькулятора для прогноза летального исхода при сочетанной травме таза // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 376–392. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-376-392>, EDN: CQUHLI

Kirillova I. V., Kossovich L. Y. Analysis of solutions for elliptic boundary layer in cylindrical shells at edge shock loading // Advanced Structured Materials. 2022. Vol. 151. P. 131–140. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_11, EDN: UITKXL

Suetenkov D., Ivanov D., Dol A., Kossovich L., Diachkova E., Vasil'ev Y. Construction of customized palatal orthodontic devices on skeletal anchorage using biomechanical modeling // Bioengineering. 2022. Vol. 9, № 1. <https://doi.org/10.3390/bioengineering9010012>, EDN: ONMUFE

2023

Коссович Л. Ю., Кириллова И. В., Фалькович А. С., Бессонов Л. В., Иванов Д. В., Голядкина А. А., Доль А. В., Хоминец В. В., Кудяшев А. Л. Система осуществления планирования и моделирования вариантов установки и прогнозирования успешности установки систем фиксации и эндопротезов элементов позвоночно-тазового комплекса. Патент на изобретение RU 2802670 С2, 30.08.2023 ; Заявка № 2021136955 от 14.12.2021. EDN: BXXJTB

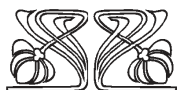
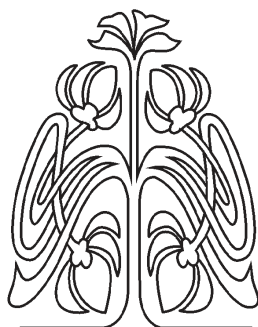
Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическая теория нестационарных упругих волн в оболочках вращения при ударных тангенциальных торцевых воздействиях // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. тр. Междунар. науч. конф. Воронеж : ООО «Вэлборн», 2023. С. 1056–1060. EDN: RGAZXG

Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическая теория нестационарных упругих волн в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях изгибающего типа // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике : сб. тез. докл. : в 4 т. Санкт-Петербург : Политех-Пресс, 2023. Т. 3. С. 376–378. EDN: QFTDNK

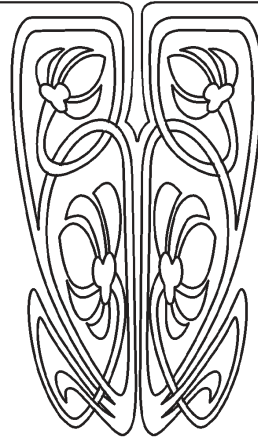
Поступила в редакцию / Received 07.12.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024



ПОДПИСКА



Подписка на печатную версию

Подписной индекс издания 36017.
Оформить подписку на печатную версию
можно в интернет-каталоге
ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru).
Журнал выходит 4 раза в год.
Цена свободная

Электронная версия журнала находится
в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Адрес издательства (редакции):

410012, Саратов, Астраханская, 83

Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89

Факс: +7(845-2) 27-85-29

E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,

СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru>



ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)
Известия Саратовского университета. Новая серия.
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Том 24, выпуск 1

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития
Серия: История. Международные отношения

Серия: Математика. Механика. Информатика

Серия: Науки о Земле
Серия: Социология. Политология

Серия: Физика
Серия: Филология. Журналистика
Серия: Философия. Психология. Педагогика

Серия: Химия. Биология. Экология
Серия: Экономика. Управление. Право

