

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2024

Том 24

Выпуск 4



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ

САРАТОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 4

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2024 Том 24

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издаётся с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Иванов Д. Ю. Полуаналитическая аппроксимация нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области 476

Kuznetsova M. A. On recovering non-local perturbation of non-self-adjoint Sturm – Liouville operator [Кузнецова М. А. Восстановление нелокального возмущения несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля] 488

Петросян А. С., Андриян С. М., Хачатрян Х. А. Вопросы существования и единственности решения одного класса бесконечной системы нелинейных двумерных уравнений 498

Sevastianov I. A., Lovetskiy K. P., Kulyabov D. S., Sergeev S. V. Numerical solution of first-order exact differential equations by the integrating factor method [Севастьянов Л. А., Ловецкий К. П., Кулябов Д. С., Сергеев С. В. Численное решение дифференциальных уравнений первого порядка в полных дифференциалах методом интегрирующего множителя] 512

Сорокина М. М., Новикова Д. Г. О $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторах и $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающих подгруппах конечных групп 526

Механика

Бурьян С. Н. «Парадоксальный» механизм П. Л. Чебышёва 536

Ватульян А. О., Явруян О. В. Оптимизация механических свойств вязкоупругих конструкций 552

Вельмисов П. А., Анкилов А. В., Покладова Ю. В. Исследование математической модели системы измерения давления в авиационных двигателях 567

Zemlyanukhin A. I., Bochkaev A. V., Artamonov N. A. Shear waves in a nonlinear elastic cylindrical shell [Землянухин А. И., Бочкаев А. В., Артамонов Н. А. Сдвиговые волны в нелинейно-упругой цилиндрической оболочке] 578

Крысько А. В., Кречин А. Н., Жигалов М. В., Крысько В. А. Нелинейная статика и динамика пористых функционально-градиентных нанобалок с учетом поперечных сдвигов 587

Смирнов А. С., Булов С. А., Дегилевич Е. А. Построение и анализ нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника асимптотическими методами 598

Шевченко С. А., Мельников Б. Е. Несовершенства кварцевого стекла и их влияние на динамику резонатора ВТГ 611

Информатика

Воробьев И. А. Методы машинного обучения в задаче оценки риска мошенничества в автостраховании 619

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-76640 от 26 августа 2019 г. Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1). Журнал индексируется RSCI, Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017. Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Журнал выходит 4 раза в год. Цена свободная. Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Директор издательства

Бучко Ирина Юрьевна

Редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Редактор-стилист

Агафонов Андрей Петрович

Верстка

Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Корректор

Агафонов Андрей Петрович

В оформлении издания использованы работы художника Соколова Дмитрия Валерьевича (13.11.1940–20.11.2023)

Адрес учредителя, издателя

и издательства (редакции):

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49,
52-26-89

E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 22.11.2024.

Подписано в свет 29.11.2024.

Выход в свет 29.11.2024.

Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 18,13 (19,5).

Тираж 100 экз. Заказ 142-Т

Отпечатано в типографии
Саратовского университета.

Адрес типографии:

410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2024



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

Ivanov D. Yu. Semi-analytical approximation of the normal derivative of the heat simple layer potential near the boundary of a two-dimensional domain 476

Kuznetsova M. A. On recovering non-local perturbation of non-self-adjoint Sturm – Liouville operator 488

Petrosyan H. S., Andriyan S. M., Khachatryan Kh. A. Questions of existence and uniqueness of the solution of one class of an infinite system of nonlinear two-dimensional equations 498

Sevastianov L. A., Lovetskiy K. P., Kulyabov D. S., Sergeev S. V. Numerical solution of first-order exact differential equations by the integrating factor method 512

Sorokina M. M., Novikova D. G. On $\mathfrak{F}^\omega$ -projectors and $\mathfrak{F}^\omega$ -covering subgroups of finite groups 526

Mechanics

Burian S. N. The “paradoxical” mechanism of P. L. Chebyshev 536

Vatulyan A. O., Yavruyan O. V. Optimisation of mechanical properties of viscoelastic structures 552

Velmisov P. A., Ankilov A. V., Pokladova Yu. V. Investigation of mathematical model of pressure measurement system in aircraft engines 567

Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Artamonov N. A. Shear waves in a nonlinear elastic cylindrical shell 578

Krysko A. V., Krechin A. N., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Nonlinear statics and dynamics of porous functional-gradient nanobeam taking into account transverse shifts 587

Smirnov A. S., Bulov S. A., Degilevich E. A. Construction and analysis of nonlinear oscillation modes of a three-link pendulum by asymptotic methods 598

Shevchenko S. A., Melnikov B. E. Fused quartz imperfections and their influence on the CVG resonator dynamics 611

Computer Sciences

Vorobyev I. A. ML methods for assessing the risk of fraud in auto insurance 619

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный, Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Шалыто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

August P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

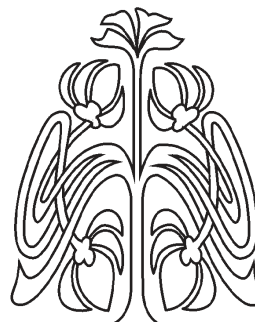
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

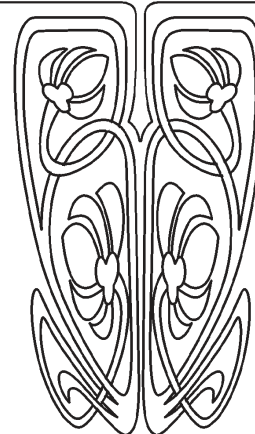
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**





МАТЕМАТИКА

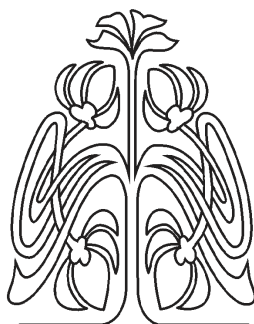
Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 476–487

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 476–487

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-476-487>

EDN: [GMVNDF](#)



Научная статья
УДК 519.644.5

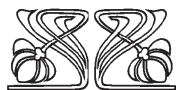
Полуаналитическая аппроксимация нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области

Д. Ю. Иванов

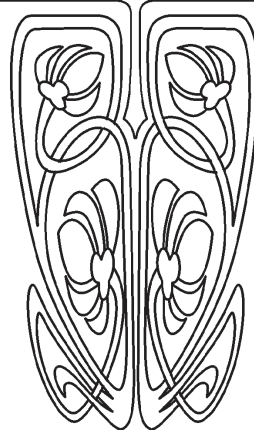
Российский университет транспорта, Россия, 127994, г. Москва, ГСП-4, ул. Образцова, д. 9

Иванов Дмитрий Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ivanovdyu@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4551-469X>, AuthorID: [9829](#)

Аннотация. Предлагается полуаналитическая аппроксимация нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области с гладкостью C^5 . Вычисление интегралов, возникающих после кусочно-квадратичной интерполяции функции плотности по переменной длины дуги s , осуществляется с помощью аналитического интегрирования по переменной $\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$, где r и d — расстояния от точки наблюдения до точки интегрирования и до границы области соответственно. Для этого подынтегральная функция представляется в виде суммы двух произведений, каждое из которых состоит из двух множителей, а именно: гладкой в приграничной области функции, содержащей якобиан перехода от переменной интегрирования s к переменной ρ , и весовой функции, содержащей особенность при $r = 0$ и равномерно абсолютно интегрируемой в приграничной области. Гладкие функции аппроксимируются с помощью кусочно-квадратичной интерполяции по переменной ρ , и тогда аналитическое интегрирование становится возможным. Аналитическое интегрирование по ρ осуществляется на фиксированном по ширине участке границы, содержащем проекцию точки наблюдения, а на остальной части границы интегралы по s вычисляются с помощью формул Гаусса. Интегрирование по параметру C_0 -полугруппы, образованной операторами сдвига по времени, также осуществляется аналитически. Для этого C_0 -полугруппа аппроксимируется с помощью кусочно-квадратичной интерполяции по ее параметру. Доказано, что предлагаемые аппроксимации обладают устойчивой кубической сходимостью в банаховом пространстве непрерывных функций с равномерной нормой, причем такая сходимость равномерна в замкнутой приграничной области. Приведены результаты вычислительных экспериментов по нахождению нормальной производной решений второй начально-краевой задачи теплопроводности в единичном круге



Научный
отдел





с нулевым начальным условием, подтверждающие равномерную кубическую сходимость предлагаемых аппроксимаций нормальной производной теплового потенциала простого слоя.

Ключевые слова: граничный элемент, потенциал, почти сингулярный интеграл, эффект пограничного слоя, равномерная сходимость

Для цитирования: Иванов Д. Ю. Полуаналитическая аппроксимация нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 476–487. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-476-487>, EDN: GMVNDF

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Semi-analytical approximation of the normal derivative of the heat simple layer potential near the boundary of a two-dimensional domain

D. Yu. Ivanov

Russian University of Transport, 9 Obraztsova St., GSP-4, Moscow 127994, Russia

Dmitrii Yu. Ivanov, ivanovdyu@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4551-469X>, AuthorID: 9829

Abstract. A semi-analytical approximation of the normal derivative of the simple layer heat potential near the boundary of a two-dimensional domain with C^5 smoothness is proposed. The calculation of the integrals that arise after piecewise quadratic interpolation of the density function with respect to the variable of arc length s , is carried out using analytical integration over the variable $\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$, where r and d are the distances from the observation point to the integration point and to the boundary of the domain, respectively. To do this, the integrand is represented as the sum of two products, each of which consists of two factors, namely: a function smooth in a near-boundary domain containing the Jacobian of the transition from the integration variable s to the variable ρ , and a weight function containing a singularity at $r = 0$ and uniformly absolutely integrable in the near-boundary region. Smooth functions are approximated with the help of the piecewise quadratic interpolation over the variable ρ , and then analytical integration becomes possible. Analytical integration over ρ is carried out on a section of the boundary fixed in width, containing the projection of the observation point, and on the rest of the boundary, the integrals over s are calculated using the Gauss formulas. Integration over the parameter of C_0 -semigroup formed by time shift operators is also carried out analytically. To do this, the C_0 -semigroup is approximated using the piecewise quadratic interpolation over its parameter. It is proved that the proposed approximations have stable cubic convergence in the Banach space of continuous functions with the uniform norm, and such convergence is uniform in the closed near-boundary region. The results of computational experiments on finding of the normal derivative of solutions of the second initial-boundary problem of heat conduction in a unit circle with a zero initial condition are presented, confirming the uniform cubic convergence of the proposed approximations of the normal derivative of the simple layer heat potential.

Keywords: boundary element, potential, near singular integral, boundary layer effect, uniform convergence

For citation: Ivanov D. Yu. Semi-analytical approximation of the normal derivative of the heat simple layer potential near the boundary of a two-dimensional domain. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 476–487 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-476-487>, EDN: GMVNDF

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В рамках метода граничных элементов для аппроксимации потенциалов простого и двойного слоя в двумерной области, а также их производных граница области разбивается на дуги, называемые граничными элементами (ГЭ), на каждой из которых осуществляется



полиномиальная интерполяция функции плотности [1, п. 2.5]. Возникающие после этого интегралы не могут быть в общем случае вычислены аналитически. Традиционно для их вычисления используются простые квадратурные формулы Гаусса (ПКФГ) [1, п. 2.6]. Если точка наблюдения, в которой вычисляются потенциалы, находится достаточно далеко от границы области, то их вычисление с помощью ПКФГ происходит с удовлетворительной точностью. Если точка наблюдения приближается к границе, то точность вычисления потенциалов с помощью ПКФГ уменьшается. Это явление называется эффектом пограничного слоя. Действительно, при приближении точки наблюдения к узлу ПКФГ погрешность возрастает катастрофически благодаря сингулярности подынтегральной функции. Но погрешность возрастает и в тех случаях, когда точка наблюдения проходит между узлами ПКФГ. При вычислении потенциала двойного слоя (ПДС) и нормальной производной (НП) потенциала простого слоя (ППС) это явление можно объяснить тем, что точные функции имеют конечные разрывы на границе [2, пп. 95, 97], а аппроксимации на основе ПКФГ непрерывны во всех точках, отличных от узлов ПКФГ. Так как при достаточной гладкости границы аппроксимации ПДС и НП ППС сходятся во всех точках плоскости, то такая сходимость не может быть равномерной.

Для достижения удовлетворительной точности применяются, в частности, полуаналитические методы, использующие в той или иной степени аналитическое интегрирование по длине дуги. Для того чтобы аналитическое интегрирование стало возможным, в большинстве методов осуществляется линейная, параболическая или более высокого порядка аппроксимация ГЭ, координатных функций или функции расстояния, причем переход к более точной аппроксимации сопряжен, как правило, с усложнением интегралов. Линейная аппроксимация ГЭ считается неудовлетворительной для вычисления потенциалов вблизи границы [3, 4], поэтому некоторые полуаналитические методы, реализованные вначале для линейных ГЭ [5], были осуществлены затем для квадратичных ГЭ [6]. В связи с этим представляет интерес полуаналитический метод, впервые описанный в работах [3, 4]. Хотя в этих работах он использовался для квадратичных ГЭ, его можно применить для любой аналитически заданной достаточно гладкой границы двумерной области. Аппроксимация границы для осуществления метода не требуется, и сложность интегралов не зависит от вида границы, что позволяет использовать метод при высокоточной аппроксимации границы с помощью сплайнов. В основе метода лежит аналитическое интегрирование по переменной $\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$, где r и d — расстояния от точки наблюдения до точки интегрирования и до границы области соответственно. Для того чтобы аналитическое интегрирование стало возможным, подынтегральная функция представляется в виде произведения двух функций: весовой, содержащей особенность при $r = 0$, и гладкой функции, содержащей якобиан перехода к новой переменной интегрирования ρ . Гладкая функция интерполируется с помощью полиномов по переменной ρ , и тогда аналитическое интегрирование становится возможным.

На основе такого подхода в работе [4] получены аппроксимации производных двумерных ППС для уравнения Лапласа. Но интегралы от весовых функций при этом не являются равномерно сходящимися вблизи границы области, что снижает скорость равномерной сходимости таких аппроксимаций (см. [4, формула (28b)]). В настоящей работе для аппроксимации НП двумерных тепловых ППС (ТППС) подынтегральная функция представляется в виде суммы двух произведений указанного вида, причем таким образом, что весовые функции в каждом из произведений равномерно абсолютно интегрируемы по переменной ρ вблизи границы области (см. [4, формула (1)]). Аналогичное представление в рамках данного метода использовалось для аппроксимации двумерных тепловых ПДС [7].

1. Предварительные замечания

Пусть Ω_+ — двумерная открытая ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$. В декартовых координатах (x_1, x_2) зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \tilde{x}_1(s)$, $x_2 = \tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксирован-



ной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{x}(s) \equiv (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$, и увеличивается, когда область Ω_+ при обходе границы $\partial\Omega$ остается слева. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$ ($s \in \mathbb{R}$), периодические с периодом $2S$ (S — половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимно однозначное отображение множества $I_S \equiv [-S, S]$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^m$, если существуют непрерывные на замкнутом множестве $\overline{I_S}$ производные $\tilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($l = \overline{0, n}$, $i = 1, 2$), причем $\tilde{x}_i^{(l)}(-S) = \tilde{x}_i^{(l)}(S)$. Будем считать, что $\partial\Omega \in C^2$, если не оговорено особо.

Обозначим через $\vec{e}(s)$ единичный вектор, направленный по касательной к кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}(s)$ в сторону увеличения параметра s , а через $\vec{n}(s)$ — единичную нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящую через точку $\tilde{x}(s)$ и направленную внутрь области Ω_+ . Векторы $\vec{e}(s)$, $\vec{n}(s)$ образуют правую систему, и их координаты (x_1, x_2) вычисляются с помощью формул $\vec{e}(s) \equiv (\tilde{x}'_1(s), \tilde{x}'_2(s))$, $\vec{n}(s) = (-\tilde{x}'_2(s), \tilde{x}'_1(s))$.

Пусть $I_T \equiv [0, T]$, $T > 0$. Обозначим через C_0^0 банахово пространство непрерывных на множестве I_T вещественных функций $f(t)$ с условием $f(0) = 0$ и нормой $\|f\|_{C_0^0} \equiv \sup_{t \in I_T} |f(t)|$.

Через C_n^0 ($n \in \mathbb{Z}_+$) обозначим банаховы пространства функций $f \in C_0^0$, имеющих производные $f^{(j)} \in C_0^0$ ($j = \overline{1, n}$), с нормой $\|f\|_{C_n^0} \equiv \sum_{j=0}^n \sup_{t \in I_T} |f^{(j)}(t)|$. В пространстве C_0^0 зададим оператор

дифференцирования $\mathbf{D}$: $(\mathbf{D}f)(t) \equiv f'(t)$ ($f \in C_1^0$, $f' \in C_0^0$). Оператор $\mathbf{D}$ является генератором C_0 -полугруппы [8, гл. VIII, п. 1] операторов правого сдвига $\mathbf{U}(\tau)$: $(\mathbf{U}(\tau)f)(t) \equiv f(t - \tau)$ при $\tau \leq t$, $(\mathbf{U}(\tau)f)(t) \equiv 0$ при $\tau > t$ ($f \in C_0^0$), $\mathbf{D}f = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau^{-1}(f - \mathbf{U}(\tau)f)$ ($f \in C_1^0$). Заметим, что $\|\mathbf{U}(\tau)\| = 1$ при $\tau < T$, $\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{O}$ при $\tau \geq T$ ($\mathbf{O}$ — нулевой оператор).

Через $C_{0,0}^0$ обозначим банахово пространство непрерывных на множестве $\mathbb{R} \times I_T$ вещественных функций $f(s, t)$ таких, что $f(s + 2S, t) = f(s, t)$ при $(s, t) \in \mathbb{R} \times I_T$ и $f(s, 0) = 0$ при $s \in \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C_{0,0}^0} \equiv \sup_{s \in I_S, t \in I_T} |f(s, t)|$. Через $C_{k,0}^0$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) обозначим банаховы

пространства функций $f \in C_{0,0}^0$, имеющих частные производные $\partial_s^l f \in C_{0,0}^0$ ($l = \overline{1, k}$),

с нормой $\|f\|_{C_{k,0}^0} \equiv \sum_{l=0}^k \sup_{s \in I_S, t \in I_T} |\partial_s^l f(s, t)|$. Через $C_{0,n}^0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) обозначим банаховы про-

странства функций $f \in C_{0,0}^0$, имеющих частные производные $\partial_t^j f \in C_{0,0}^0$ ($j = \overline{1, n}$), с нор-

мой $\|f\|_{C_{0,n}^0} \equiv \sum_{j=0}^n \sup_{s \in I_S, t \in I_T} |\partial_t^j f(s, t)|$. Введем также в рассмотрение банаховы пространства

$C_{k,n}^0 \equiv C_{k,0}^0 \cap C_{0,n}^0$ ($k, n \in \mathbb{Z}_+$) с нормой $\|f\|_{C_{k,n}^0} \equiv \|f\|_{C_{k,0}^0} + \|f\|_{C_{0,n}^0}$.

Обозначим через D треть радиуса круга Ляпунова [2, п. 94]. Введем в рассмотрение местные системы декартовых координат (ξ_s, η_s) с началами в точках $\tilde{x}(s)$ и осями ординат, сонаправленными с соответствующими векторами $\vec{e}(s)$, $\vec{n}(s)$. Точки $\tilde{x}_d(s)$ ($s \in I_S$) с местными координатами $(\xi_s, \eta_s) = (0, d)$ при фиксированном $d \in I_D \equiv [-D, 0) \cup (0, D]$ образуют замкнутую линию $\partial\Omega_d \in C^1$, при этом соответствие между точками $\tilde{x}_d(s)$ и $\tilde{x}(s)$ взаимно однозначное ($\tilde{x}_0(s) \equiv \tilde{x}(s)$), а нормали $\vec{\tilde{x}}(s)\vec{\tilde{x}}_d(s)$ к кривой $\partial\Omega$ являются и нормальными к кривой $\partial\Omega_d$ [2, п. 102].

Обозначим через Ω_D множество, образованное точками $\tilde{x}_d(s)$ ($d \in I_D$, $s \in I_S$). На множестве $\overline{\Omega_D} \times I_T$ зададим функцию $u(x)$ со значениями в пространстве C_0^0 : $u(x) \equiv \mathbf{G}(x)v$ ($v \in C_{0,0}^0$), где $\mathbf{G}(x)$ при каждом фиксированном $x \equiv (x_1, x_2) \in \overline{\Omega_D}$ — линейный оператор, отображающий пространство $C_{0,0}^0$ в пространство C_0^0 :

$$\mathbf{G}(x)v \equiv \int_{I_T} \mathbf{U}(\tau) \mathbf{A}(x, \tau) v d\tau, \quad \mathbf{A}(x, \tau)v \equiv \int_{I_S} g(x, s', \tau) v(s') ds',$$

$$g(x, s', \tau) \equiv \partial_{\vec{n}(s)} a_0(r^2, \tau) = a(r^2, \tau) 2^{-1} \partial_{\vec{n}(s)} r^2 = a(r^2, \tau) (-\vec{n}(s), \vec{r})_{\mathbb{R}^2}.$$

Здесь $a_0(r^2, \tau) \equiv (4\pi\tau)^{-1} \exp[-r^2/(4\tau)]$, $a(r^2, \tau) \equiv r^{-1} \partial_r a_0$, $r(x, s') \equiv |\vec{r}|$, $\vec{r}(x, s') \equiv \overrightarrow{x\tilde{x}(s')}$, $x \neq \tilde{x}(s')$ (условимся, что мы можем иногда для краткости не писать аргументы функции,



если они такие же, какие используются при определении функции); дифференцирование $\partial_{\vec{n}(s)}$ осуществляется по переменной $x = \tilde{x}_d(s)$ в направлении $\vec{n}(s)$; $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^2}$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$; $v(s')$ — функция со значениями в C_0^0 . Функция $u(x)$ при $x \in \Omega_D$ — НП двумерного ТППС с плотностью v , при $x \in \partial\Omega$ — прямое значение НП ТППС [2, п. 153].

Пусть $\vec{r}_0(s, s') \equiv \overrightarrow{\tilde{x}(s)\tilde{x}(s')}$, $r_0(s, s') \equiv |\vec{r}_0|$. Зададим на множестве $\Theta \equiv \{(s, s') : s \in \overline{I_S}, s' - s \in \overline{I_S}\}$ функции $\psi_i(s, s')$ ($i = 0, 1$): при $s' \neq s$ равенствами $\psi_i \equiv \varphi_i / (s' - s)^2$, где

$$\varphi_0(s, s') \equiv [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)]^2 + [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)]^2 = r_0^2,$$

$$\varphi_1(s, s') \equiv -\tilde{x}_2'(s) [\tilde{x}_1(s) - \tilde{x}_1(s')] + \tilde{x}_1'(s) [\tilde{x}_2(s) - \tilde{x}_2(s')] = 2^{-1} \partial_{\vec{n}(s)} r^2|_{x \in \partial\Omega} = -(\vec{n}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2},$$

а при $s' = s$ равенствами $\psi_0 \equiv 1$, $\psi_1 \equiv 2^{-1} [\tilde{x}_2'(s) \tilde{x}_1''(s) - \tilde{x}_1'(s) \tilde{x}_2''(s)]$. В силу [9, лемма] при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Θ производные $\partial_{s'}^j \psi_i$ ($j = \overline{0, n}$, $i = 0, 1$).

Местные координаты (ξ_s, η_s) точек $\tilde{x}(s')$ и $\tilde{x}_d(s)$ равны $((\vec{e}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2}, (\vec{n}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2})$ и $(0, d)$ соответственно, поэтому $r^2 = |\overrightarrow{\tilde{x}_d(s)\tilde{x}(s')}|^2 = r_0^2 - 2d(\vec{n}(s), \vec{r}_0)_{\mathbb{R}^2} + d^2$. На множестве $\Upsilon \equiv \overline{I_D} \times \Theta$ зададим функцию $\varphi(d, s, s') \equiv r^2 - d^2 = \varphi_0 + 2d\varphi_1$. Так как кривая $\partial\Omega$ и окружность радиуса $d \in I_D$ с центром $\tilde{x}_d(s)$ имеют только одну общую точку $\tilde{x}(s)$ (иначе нарушается взаимно однозначное соответствие между точками $\tilde{x}(s)$ и $\tilde{x}_d(s)$), то $2d \cos \alpha < r_0$, где α — угол между лучами $\tilde{x}(s)\tilde{x}(s')$ и $\tilde{x}(s)\tilde{x}_d(s)$. Следовательно, $\varphi \geq 0$ при $(d, s, s') \in \Upsilon$ ($\varphi > 0$ при $s \neq s'$, $\varphi = 0$ при $s = s'$). На множестве Υ зададим непрерывные функции $\rho(d, s, s')$, $\psi(d, s, s')$: $\rho = \sqrt{\varphi}$, если $s' \geq s$; $\rho = -\sqrt{\varphi}$, если $s' < s$; $\psi \equiv \psi_0 + 2d\psi_1$.

Так как контур $\partial\Omega$ не имеет точек самопересечения, то $c_r \equiv \inf_{(s, s') \in \Theta} \psi_0 > 0$ ($c_r \leq 1$).

Справедлива оценка: $\vartheta \leq c_K |s' - s| \leq c_K c_r^{-1/2} r_0$, где ϑ — острый угол между нормальными, проходящими через точки $\tilde{x}(s)$ и $\tilde{x}(s')$; $c_K \equiv \sup_{s \in \overline{I_S}} K(s, s)$ ($K(s, s) = 2|\psi_1(s, s)|$ — кривизна

кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}(s)$). Поэтому величина $3D$, где $D \equiv c_r^{1/2} (3c_K)^{-1}$, может быть взята в качестве радиуса круга Ляпунова (см. [2, п. 94, оценки (3), (5)]). Так как $\psi_0(s, s) = 1$, $|\psi_1(s, s)| = 2^{-1} K(s, s)$ и $D \leq (3c_K)^{-1}$, то при $(d, s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$ имеем оценки: $\psi(d, s, s) \geq 2/3$. Кроме того, $\psi = \varphi / (s' - s)^2 > 0$ при $(d, s, s') \in \Upsilon$, $s' \neq s$, поэтому $\psi > 0$ на множестве Υ .

Так как $r^2 = \varphi_0 + 2d\varphi_1 + d^2$, то $2^{-1} \partial_{\vec{n}(s)} r^2 = 2^{-1} \partial_d r^2 = \varphi_1 + d$, и $g(\tilde{x}_d(s), s', \tau) = a(\varphi + d^2, \tau) (\varphi_1 + d)$. Поэтому функция g при $x = \tilde{x}_d(s)$, $(d, s, s') \in \Upsilon$ (кроме $s' - s = d = 0$), $\tau > 0$ может быть записана в следующем виде:

$$g(\tilde{x}_d(s), s', \tau) = a_1(d, \rho, \tau) \delta_1(d, s, s') + a_2(d, \rho, \tau) \delta_2(d, s, s'), \quad (1)$$

где $a_1(d, \rho, \tau) \equiv \rho^2 a(\rho^2 + d^2, \tau)$, $a_2(d, \rho, \tau) \equiv d a(\rho^2 + d^2, \tau)$, $\delta_1(d, s, s') \equiv \psi_1 / \psi$, $\delta_2(d, s, s') \equiv 1$. Так как $\psi > 0$ на множестве Υ , то при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Υ производные $\partial_{s'}^j \delta_1$ ($j = \overline{0, n}$).

При фиксированном $s \in \overline{I_S}$ обозначим через E_s замкнутую дугу кривой $\partial\Omega$, ограниченную двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии D от прямой $\tilde{x}(s)\tilde{x}_d(s)$, причем $\tilde{x}(s) \in E_s$. Значения $s' - s$, соответствующие границам дуги E_s , обозначим через Σ'_s , Σ''_s ($\Sigma'_s < 0 < \Sigma''_s$), и тогда $s' - s \in \Xi_s \equiv [\Sigma'_s, \Sigma''_s]$, $\xi_s \in \overline{I_D}$, если $\tilde{x}(s') \in E_s$.

Теорема 1 (см. [9, теорема 5]). Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Тогда на множестве $\Upsilon' \equiv \{(d, s, s') : d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_S}, s' - s \in \Xi_s\}$ существуют положительная, ограниченная сверху функция $\delta_0(d, s, s') \equiv (\partial_{s'} \rho)^{-1}$ и непрерывные производные $\partial_{s'}^j \delta_0$ ($j = \overline{0, n}$).

Следствие 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Тогда функции $\rho_{d,s}(\sigma) \equiv \rho(d, s, s + \sigma)$ при любых фиксированных $s \in I_S$, $d \in \overline{I_D}$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображают множества Ξ_s на соответствующие множества $\rho_{d,s}(\Xi_s)$. Функции $\tilde{\delta}_0(d, s, \rho) \equiv \delta_0(d, s, s + \sigma_{d,s}(\rho))$,



$\tilde{\delta}_i(d, s, \rho) \equiv \delta_i(d, s, s + \sigma_{d,s}(\rho)) \tilde{\delta}_0$ ($i = 1, 2$), где $\sigma_{d,s}(\rho)$ — функция, обратная к функции $\rho_{d,s}(\sigma)$, имеют непрерывные на множестве $\tilde{\Upsilon}' \equiv \{(d, s, \rho) : d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_S}, \rho \in \rho_{d,s}(\Xi_s)\}$ производные $\partial_\rho^j \tilde{\delta}_i$ ($j = \overline{0, n}, i = \overline{0, 2}$).

Обозначим через $\Lambda_m(z, \varsigma_1, \varsigma_2)$ ($z \in [\varsigma_1, \varsigma_2]$, $m = \overline{0, 2}$) квадратичные интерполяционные многочлены Лагранжа:

$$\Lambda_m(z, \varsigma_1, \varsigma_2) \equiv \prod_{j=0, j \neq m}^2 \frac{z - z_j}{z_m - z_j}, \quad z_j \equiv \bar{\varsigma} + q_j h_z \quad (j = \overline{0, 2}).$$

Здесь $h_z \equiv 2^{-1}(\varsigma_2 - \varsigma_1)$, $\bar{\varsigma} \equiv 2^{-1}(\varsigma_1 + \varsigma_2)$; $q_0 \equiv -1$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$ [10, гл. 2, § 3, п. 2]. Пусть $C_j[\varsigma_1, \varsigma_2]$ ($j \in \mathbb{Z}_+$) — банаховы пространства, образованные j раз непрерывно дифференцируемыми на промежутке $[\varsigma_1, \varsigma_2]$ функциями $f(z)$ со значениями в банаховом пространстве E . Тогда для функций $\tilde{f}(z) \equiv \sum_{m=0}^2 f(z_m) \Lambda_m(z, \varsigma_1, \varsigma_2)$, а также для их первых и вторых производных при $z \in [\varsigma_1, \varsigma_2]$ имеют место оценки:

$$\|\tilde{f}(z) - f(z)\|_E \leq c_\omega \sup_{z \in [\varsigma_1, \varsigma_2]} \|f^{(3)}(z)\|_E h_z^3 \quad (f \in C_3[\varsigma_1, \varsigma_2]), \quad (2)$$

$$\|\tilde{f}(z)\|_E \leq c_{\Lambda,0} \max_{m=0,2} \|f(z_m)\|_E \quad (f \in C_0[\varsigma_1, \varsigma_2]), \quad (3)$$

$$\|\tilde{f}^{(j)}(z)\|_E \leq c_{\Lambda,j} \sup_{z \in [\varsigma_1, \varsigma_2]} \|f^{(j)}(z)\|_E \quad (f \in C_j[\varsigma_1, \varsigma_2], \quad j = 1, 2). \quad (4)$$

Здесь $c_\omega \equiv 2\sqrt{3}/9$, $c_{\Lambda,0} = c_{\Lambda,1} \equiv 3$, $c_{\Lambda,2} = 2^{-1}$.

2. Полуаналитические аппроксимации нормальной производной теплового потенциала простого слоя

В силу равенства (1) операторы $\mathbf{A}(x, \tau)$ ($x \in \overline{\Omega_D}$, $\tau > 0$) могут быть представлены в виде суммы: $\mathbf{A}(x, \tau) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{A}_i(x, \tau)$, где $\mathbf{A}_i(x, \tau)v \equiv \int_{\rho_{d,s}(\Xi_s)} a_i(d, \rho, \tau) \mathbf{B}_i(d, s, \rho) v d\rho$ ($i = 1, 2$), $\mathbf{A}_3(x, \tau)v \equiv \int_{I_S \setminus \Xi_s} \mathbf{B}_3(d, s, s + \sigma, \tau) v d\sigma$, а операторы $\mathbf{G}(x)$, в свою очередь, в виде суммы $\mathbf{G}(x) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{G}_i(x)$, где $\mathbf{G}_i(x)v \equiv \int_{I_T} \mathbf{U}(\tau) \mathbf{A}_i(x, \tau) v d\tau$. Здесь $v \in C_{0,0}^0$, $x = \tilde{x}_d(s)$, $d \in \overline{I_D}$, $s \in I_S$, $\mathbf{B}_i(d, s, \rho)v \equiv \tilde{\delta}_i v(s + \sigma_{d,s}(\rho))$ ($i = 1, 2$), $\mathbf{B}_3(d, s, s', \tau)v \equiv g v(s')$.

Условимся линейный оператор $\mathbf{F}$, отображающий банахово пространство X в банахово пространство Y , обозначать как $\mathbf{F}[X \rightarrow Y]$, а если $X = Y$, то $\mathbf{F}[X]$. Так как любая прямая, параллельная прямой $\tilde{x}(s)\tilde{x}_D(s)$, пересекает границу $\partial\Omega$ внутри круга Ляпунова с центром в $\tilde{x}(s)$ не более чем в одной точке, то $r \geq D$, если $(d, s, s') \in \tilde{\Upsilon} \setminus \tilde{\Upsilon}'$. Учитывая следствие 1, получаем оценки норм операторов $\mathbf{A}_i(x, \tau)$ [$C_{0,0}^0 \rightarrow C_0^0$]:

$$\|\mathbf{A}_i(x, \tau)\| \leq \tilde{c}_i \check{c}_{i,0} y_i(d, \tau) \quad (x \in \overline{\Omega_D}, \quad \tau > 0, \quad i = \overline{1, 3}),$$

где $\tilde{c}_1 \equiv (8\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2 \exp(-\gamma^2/4) d\gamma = (2\sqrt{\pi})^{-1}$, $\tilde{c}_2 \equiv (8\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\gamma^2/4) d\gamma = (4\sqrt{\pi})^{-1}$, $\tilde{c}_3 \equiv 2S$, $\check{c}_{i,0} \equiv \sup_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Upsilon}'} |\tilde{\delta}_i|$ ($i = 1, 2$), $\check{c}_{3,0} \equiv \sup_{(d,s,s') \in \tilde{\Upsilon} \setminus \tilde{\Upsilon}', \tau > 0} |g(\tilde{x}_d(s), s', \tau)|$, $y_1(d, \tau) \equiv \tau^{-1/2}$, $y_2(d, \tau) \equiv d \tau^{-3/2} \exp[-d^2/(4\tau)]$, $y_3(d, \tau) \equiv 1$. Отсюда вытекают оценки для норм операторов $\mathbf{G}_i(x)$ [$C_{0,0}^0 \rightarrow C_0^0$]:

$$\|\mathbf{G}_i(x)\| \leq c_i \tilde{c}_i \check{c}_{i,0} \quad (x \in \overline{\Omega_D}, \quad i = \overline{1, 3}), \quad (5)$$



где $c_1 \equiv 2T^{1/2}$, $c_2 \equiv \int_0^\infty y_2(d, \tau) d\tau = 2\sqrt{\pi}$, $c_3 \equiv T$. Поэтому операторы $\mathbf{G}(x)$ $[C_{0,0}^0 \rightarrow C_0^0]$ равномерно ограничены на множестве $\overline{\Omega_D}$. Заметим, что оператор прямого значения НПТПС на границе $\partial\Omega$ имеет вид $\mathbf{G}(\tilde{x}(s)) = \mathbf{G}_1(\tilde{x}(s)) + \mathbf{G}_3(\tilde{x}(s))$, так как $\mathbf{G}_2(\tilde{x}(s)) \equiv \mathbf{O}$.

Пусть $N/2 \in \mathbb{N}$, $\tau_n \equiv nh_\tau$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), $h_\tau \equiv T/N$. Зададим операторную функцию $\tilde{\mathbf{U}}(\tau)$ $[C_0^0]$ ($\tau \geq 0$):

$$\tilde{\mathbf{U}}(\tau) \equiv \sum_{m=0}^2 \mathbf{U}(\tau_{2n+1} + q_m h_\tau) \Lambda_m(\tau, \tau_{2n}, \tau_{2n+2}) \quad (\tau \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}], \quad n = \overline{0, N/2 - 1}).$$

В силу оценок (2), (3) и $\|\mathbf{U}(\tau)\| \leq 1$ имеют место оценки $\|\tilde{\mathbf{U}}(\tau)\| \leq c_{\Lambda,0}$ и

$$\|\tilde{\mathbf{U}}(\tau)f - \mathbf{U}(\tau)f\|_{C_0^0} \leq c_\omega \|\mathbf{D}^3 f\|_{C_0^0} h_\tau^3 \quad (f \in C_3^0). \quad (6)$$

Пусть $L/2 \in \mathbb{N}$, $s_l \equiv lh_s$, $l \in \mathbb{Z}$, $h_s \equiv S/(L+1)$. Введем в рассмотрение пространства H_L сеточных функций f со значениями $f_l \in C_0^0$, заданными в точках коллокации s_l ($f_{l+2L+2} = f_l$), с нормой $\|f\|_{H_L} \equiv \max_{-L-1 \leq l \leq L} \|f_l\|_{C_0^0}$. Зададим проецирующие операторы $\mathbf{P}_L$ $[C_{0,0}^0 \rightarrow H_L]$: $(\mathbf{P}_L f)_l(t) \equiv f(s_l, t)$ ($f \in C_{0,0}^0$, $t \in I_T$), и интерполирующие операторы $\tilde{\mathbf{P}}_L$ $[H_L \rightarrow C_{0,0}^0]$:

$$(\tilde{\mathbf{P}}_L f)(s, t) \equiv \sum_{m=0}^2 f_{2l-1+m}(t) \Lambda_m(s, s_{2l-1}, s_{2l+1}) \quad (f \in H_L, s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], l = \overline{-L/2, L/2}).$$

Очевидно, $\|\mathbf{P}_L\| \leq 1$. В силу оценок (2), (3) имеем также оценки $\|\tilde{\mathbf{P}}_L\| \leq c_{\Lambda,0}$ и

$$\|\tilde{\mathbf{P}}_L \mathbf{P}_L f - f\|_{C_{0,0}^0} \leq c_\omega \|\partial_s^3 f\|_{C_{0,0}^0} h_s^3 \quad (f \in C_{3,0}^0). \quad (7)$$

Зададим операторы $\ddot{\mathbf{G}}_i(x)$ $[H_L \rightarrow C_0^0]$: $\ddot{\mathbf{G}}_i(x)f \equiv \int_{I_T} \tilde{\mathbf{U}}(\tau) \mathbf{A}_i(x, \tau) \tilde{\mathbf{P}}_L f d\tau$ ($f \in H_L$, $x \in \overline{\Omega_D}$, $i = \overline{1, 3}$). С учетом оценок $\|\tilde{\mathbf{U}}(\tau)\| \leq c_{\Lambda,0}$, $\|\tilde{\mathbf{P}}_L\| \leq c_{\Lambda,0}$ и (6), (7) получаем при $f \in C_{3,3}^0$, $x \in \overline{\Omega_D}$, $i = \overline{1, 3}$ неравенства $\|\ddot{\mathbf{G}}_i(x)\| \leq c_i \tilde{c}_i \check{c}_{i,0} c_{\Lambda,0}^2$ и

$$\|\ddot{\mathbf{G}}_i(x) \mathbf{P}_L f - \mathbf{G}_i(x)f\|_{C_0^0} \leq c_i \tilde{c}_i \check{c}_{i,0} c_\omega \left[\|\partial_t^3 f\|_{C_{0,0}^0} h_\tau^3 + c_{\Lambda,0} \|\partial_s^3 f\|_{C_{0,0}^0} h_s^3 \right]. \quad (8)$$

Введем в рассмотрение операторы $\tilde{\mathbf{A}}_i(x, \tau)$, аппроксимирующие операторы $\mathbf{A}_i(x, \tau) \tilde{\mathbf{P}}_L$ $[H_L \rightarrow C_0^0]$ ($x \in \overline{\Omega_D}$, $\tau > 0$, $i = \overline{1, 3}$). Для этого заменим функции $\mathbf{B}_i(d, s, \rho) \tilde{\mathbf{P}}_L f$ ($f \in H_L$, $(d, s, \rho) \in \tilde{\Upsilon}'$, $i = \overline{1, 2}$) их кусочно-квадратичными интерполянтами $\tilde{\mathbf{B}}_i(d, s, \rho)f$ по переменной ρ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_i(\tilde{x}_d(s), \tau) f &\equiv \int_{\rho_{d,s}(\Xi_s)} a_i(d, \rho, \tau) \tilde{\mathbf{B}}_i(d, s, \rho) f d\rho \quad (i = \overline{1, 2}), \\ \tilde{\mathbf{B}}_i(d, s, \rho) f &\equiv \tilde{\mathbf{B}}_{i,l}(d, s, \rho) f \quad (\rho \in [\rho_{d,s,l}, \rho_{d,s,l+1}], \quad l = \overline{-L-2, L}), \\ \tilde{\mathbf{B}}_{i,l}(d, s, \rho) f &\equiv \begin{cases} \sum_{m=0}^2 \mathbf{B}_i(d, s, \rho_{d,s,l,m}) \tilde{\mathbf{P}}_L f \Lambda_m(\rho, \rho_{d,s,l}, \rho_{d,s,l+1}) & (\rho_{d,s,l} < \rho_{d,s,l+1}) \\ \mathbf{B}_i(d, s, \rho_{d,s,l}) \tilde{\mathbf{P}}_L f & (\rho_{d,s,l} = \rho_{d,s,l+1}) \end{cases}, \\ \rho_{d,s,l,m} &\equiv 2^{-1}(\rho_{d,s,l} + \rho_{d,s,l+1}) + q_m h'_{d,s,l}, \quad h'_{d,s,l} \equiv 2^{-1}(\rho_{d,s,l+1} - \rho_{d,s,l}). \end{aligned}$$



Здесь $\rho_{d,s,l} \equiv \rho_{d,s}(\alpha_{s,l})$; $\alpha_{s,0} \equiv 0$; $\alpha_{s,l} \equiv \min \{s_{l+k} - s, \Sigma_s''\}$, если $s_{l+k} \geq s \in (s_k, s_{k+1}]$ и $l > 0$, и $\alpha_{s,l} \equiv \max \{s_{l+k+1} - s, \Sigma_s'\}$, если $s_{l+k+1} < s$ и $l < 0$. По определению $\bigcup_{l=-L-2}^L [\alpha_{s,l}, \alpha_{s,l+1}] = \Xi_s$ ($s \in \overline{I_S}$).

Интегралы $\mathbf{A}_3(x, \tau) \tilde{\mathbf{P}}_L f$ ($f \in H_L$) аппроксимируем с помощью ПКФГ с γ узлами:

$$\tilde{\mathbf{A}}_3(\tilde{x}_d(s), \tau) f \equiv \sum_{l=-L-1}^L h_{s,l}'' \tilde{\mathbf{B}}_{3,l}(d, s, \tau) f, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{3,l}(d, s, \tau) f \equiv \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j \mathbf{B}_3(d, s, s + \beta_{s,l,j}, \tau) \tilde{\mathbf{P}}_L f,$$

$$\beta_{s,l,j} \equiv 2^{-1}(\beta_{s,l} + \beta_{s,l+1}) + h_{s,l}'' z_j, \quad h_{s,l}'' \equiv 2^{-1}(\beta_{s,l+1} - \beta_{s,l}),$$

где $\beta_{s,l} \equiv \max \{s_l, s + \Sigma_s''\}$, если $s_l \geq s$, и $\beta_{s,l} \equiv \min \{s_l, s + \Sigma_s'\}$, если $s_l < s$; z_j — корни многочлена $(d^\gamma/dz^\gamma)(z^2 - 1)^\gamma$ на интервале $(-1, 1)$ [10, гл. 3, § 5, п. 2]; для весовых коэффициентов ω_j выполняются условия $\sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j = 2$, $\omega_j > 0$ [10, гл. 3, § 5, п. 1]. По определению

$$\bigcup_{l=-L-2}^L [\beta_{s,l}, \beta_{s,l+1}] = \overline{I_S} \setminus \Xi_s \quad (s \in \overline{I_S}).$$

Введем в рассмотрение операторы $\tilde{\mathbf{G}}_i(x)$ [$H_L \rightarrow C_0^0$]: $\tilde{\mathbf{G}}_i(x) f \equiv \int_{I_T} \tilde{\mathbf{U}}(\tau) \tilde{\mathbf{A}}_i(x, \tau) f d\tau$ ($x \in \overline{\Omega_D}$, $f \in H_L$, $i = \overline{1, 3}$) и $\tilde{\mathbf{G}}(x) \equiv \sum_{i=1}^3 \tilde{\mathbf{G}}_i(x)$. В силу оценки (3) операторы $\tilde{\mathbf{B}}_i(d, s, \rho)$ [$H_L \rightarrow C_0^0$] ($i = 1, 2$) ограничены равномерно по $(d, s, \rho) \in \tilde{\Upsilon}'$: $\|\tilde{\mathbf{B}}_i(d, s, \rho)\| \leq c_{\Lambda,0}^2 \check{c}_{i,0}$, а операторы $\tilde{\mathbf{B}}_{3,l}(d, s, \tau)$ [$H_L \rightarrow C_0^0$] ограничены равномерно по $(d, s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$, $\tau > 0$, $l = \overline{-L-1, L}$: $\|\tilde{\mathbf{B}}_{3,l}(d, s, \tau)\| \leq 2c_{\Lambda,0} \check{c}_{3,0}$. Поэтому по аналогии с оценками (5) имеем при $x = \tilde{x}_d(s)$, $d \in \overline{I_D}$, $s \in I_S$ оценки для норм операторов $\tilde{\mathbf{G}}_i(x)$ [$H_L \rightarrow C_0^0$]:

$$\|\tilde{\mathbf{G}}_i(x)\| \leq c_i \check{c}_i \check{c}_{i,0} c_{\Lambda,0}^3 \quad (i = 1, 2), \quad \|\tilde{\mathbf{G}}_3(x)\|_{L_2} \leq c_3 \check{c}_3 \check{c}_{3,0} c_{\Lambda,0}^2. \quad (9)$$

Из оценок (9) следует утверждение.

Теорема 2. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $\gamma \in \mathbb{N}$. Тогда операторы $\tilde{\mathbf{G}}(x)$ [$H_L \rightarrow C_0^0$] ограничены равномерно по $x \in \overline{\Omega_D}$, $N/2, L/2 \in \mathbb{N}$.

В силу следствия 1 и неравенства $r \geq D$, имеющего место, если $(d, s, s') \in \overline{\Upsilon \setminus \Upsilon'}$, при указанных гладкостях кривой $\partial\Omega$ и $j = \overline{0, n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ могут быть определены константы:

$$\check{c}_{i,j} \equiv \sup_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Upsilon}'} \left| \partial_\rho^j \tilde{\delta}_i \right| \quad (i = \overline{0, 2}, \quad \partial\Omega \in C^{n+2}),$$

$$\check{c}_{3,j} \equiv \sup_{(d,s,s') \in \overline{\Upsilon \setminus \Upsilon'}, \tau > 0} \left| \partial_{s'}^j g(\tilde{x}_d(s), s', \tau) \right| \quad (\partial\Omega \in C^{n+1}).$$

Используя неравенства (2)–(4) и $h'_{d,s,l} \leq 2^{-1} c_\rho h_s$ ($c_\rho \equiv \sup_{(d,s,s') \in \tilde{\Upsilon}'} \partial_{s'} \rho$), $\|\tilde{\mathbf{U}}(\tau)\| \leq c_{\Lambda,0}$, получаем при $f \in C_{2,0}^0$, $\tilde{f} \equiv \tilde{\mathbf{P}}_L \mathbf{P}_L f$, $x = \tilde{x}_d(s)$, $(d, s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$ и указанных гладкостях кривой $\partial\Omega$ следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{G}}_i(x) \mathbf{P}_L f - \check{\mathbf{G}}_i(x) \mathbf{P}_L f\|_{C_0^0} &\leq 8^{-1} c_i c_{\Lambda,0} \check{c}_i c_\omega c_\rho^3 \operatorname{ess\,sup}_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Upsilon}'} \left\| \partial_\rho^3 \mathbf{B}_i(d, s, \rho) \tilde{f} \right\|_{C_0^0} h_s^3 \leq \\ &\leq 8^{-1} c_i c_{\Lambda,0} \check{c}_i c_\omega c_\rho^3 \hat{c}_i \|f\|_{C_{2,0}^0} h_s^3 \quad (\partial\Omega \in C^5), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\hat{c}_i \equiv \check{c}_{i,3} c_{\Lambda,0} + (3\check{c}_{i,2} \check{c}_{0,0} + 3\check{c}_{i,1} \check{c}_{0,1} + \check{c}_{i,0} \check{c}_{0,2}) c_{\Lambda,1} + 3(\check{c}_{i,1} \check{c}_{0,0}^2 + \check{c}_{i,0} \check{c}_{0,1} \check{c}_{0,0}) c_{\Lambda,2} \quad (i = 1, 2);$$



$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathbf{G}}_3(x) \mathbf{P}_L f - \ddot{\mathbf{G}}_3(x) \mathbf{P}_L f \right\|_{C_0^0} &\leq c_3 c_{\Lambda,0} \tilde{c}_3 \operatorname{ess\,sup}_{(d,s,s') \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{Y}', \tau > 0} \left\| \partial_{s'}^{2\gamma} \mathbf{B}_3(d, s, s', \tau) \tilde{f} \right\|_{C_0^0} h_s^{2\gamma} \leq \\ &\leq c_3 c_{\Lambda,0} \tilde{c}_3 \hat{c}_3 \|f\|_{C_{2,0}^0} h_s^{2\gamma} \quad (\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\hat{c}_3 \equiv [(2\gamma)!]^{-3} (2\gamma + 1)^{-1} (\gamma!)^4 [\check{c}_{3,2\gamma} c_{\Lambda,0} + 2\gamma \check{c}_{3,2\gamma-1} c_{\Lambda,1} + \gamma (2\gamma - 1) \check{c}_{3,2\gamma-2} c_{\Lambda,2}].$$

Здесь $\operatorname{ess\,sup}$ — существенный супремум [8, гл. III, п. 1, подп. 11]. При получении оценки (11) используется оценка остаточного члена ПКФГ [10, гл. 3, § 5, п. 2].

Введем в рассмотрение банаховы пространства H'_N сеточных функций f с вещественными значениями f_n , заданными в точках коллокации τ_n ($n = \overline{0, N}$), с условием $f_0 = 0$ и нормой $\|f\|_{H'_N} \equiv \max_{0 \leq n \leq N} |f_n|$. Зададим проецирующий оператор $\mathbf{P}'_N [C_0^0 \rightarrow H'_N]$: $(\mathbf{P}'_N f)_n \equiv f(\tau_n)$ ($n = \overline{0, N}$, $f \in C_0^0$), и интерполирующий оператор $\tilde{\mathbf{P}}'_N [H'_N \rightarrow C_0^0]$:

$$(\tilde{\mathbf{P}}'_N f)(t) \equiv \sum_{m=0}^2 f_{2n+m} \Lambda_m(t, \tau_{2n}, \tau_{2n+2}) \quad (f \in H'_N, \quad t \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}], \quad n = \overline{0, N/2 - 1}).$$

В силу неравенств $\|\mathbf{P}'_N\| \leq 1$ и (2), (3) справедливы оценки

$$\left\| \tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N \right\| \leq c_{\Lambda,0}, \quad \left\| \tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N f - f \right\|_{C_0^0} \leq c_\omega \|\mathbf{B}^3 f\|_{C_0^0} h_\tau^3 \quad (f \in C_3^0). \quad (12)$$

В силу замкнутости оператора $\mathbf{B}$ и равенств $\mathbf{U}(\tau)\mathbf{B}f = \mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)f$ ($f \in C_1^0$, $\tau \geq 0$) имеем $\mathbf{G}(x)f \in C_1^0$ при $f \in C_{0,1}^0$, $x \in \overline{\Omega_D}$. На основании оценок (8), (10)–(12) получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$; $\gamma, N/2, L/2 \in \mathbb{N}$. Тогда операторы $\tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N \tilde{\mathbf{G}}(x) \mathbf{P}_L [C_{3,3}^0 \rightarrow C_0^0]$ сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\mathbf{G}(x) [C_{3,3}^0 \rightarrow C_0^0]$ равномерно по $x \in \overline{\Omega_D}$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Согласно теореме 3 функции $\tilde{u}(x) \equiv \tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N \tilde{\mathbf{G}}(x) \mathbf{P}_L v$ являются аппроксимациями функции $u(x)$. В силу теоремы 2 и неравенств $\|\mathbf{P}_L\| \leq 1$, $\|\tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N\| \leq c_{\Lambda,0}$ операторы $\tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N \tilde{\mathbf{G}}(x) \mathbf{P}_L [C_{0,0}^0 \rightarrow C_0^0]$ ограничены в совокупности, поэтому аппроксимации $\tilde{u}(x)$ устойчивы к возмущениям функции v в норме $C_{0,0}^0$. Сформулируем основной результат настоящей работы.

Следствие 2. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$; $\gamma, N/2, L/2 \in \mathbb{N}$; $R > 0$. Тогда функции $\tilde{u}(x, t)$ сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ с кубической скоростью к функции $u(x, t)$ равномерно относительно $(x, t) \in \overline{\Omega_D} \times I_T$ и функций $v \in C_{3,3}^0$, удовлетворяющих неравенству $\|v\|_{C_{3,3}^0} \leq R$. Кроме того, функции $\tilde{u}_\delta(x, t)$: $\tilde{u}_\delta(x) \equiv \tilde{\mathbf{P}}'_N \mathbf{P}'_N \tilde{\mathbf{G}}(x) \mathbf{P}_L v_\delta$, сходятся к функции $u(x, t)$ при $L, N \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow +0$ равномерно относительно $(x, t) \in \overline{\Omega_D} \times I_T$ и функций $v \in C_{3,3}^0$, $v_\delta \in C_{0,0}^0$, удовлетворяющих условиям $\|v\|_{C_{3,3}^0} \leq R$, $\|v_\delta - v\|_{C_{0,0}^0} \leq \delta$.

Заметим, что для вычисления функции $\tilde{u}(x, t)$ необходимы лишь значения $v(s_l, \tau_n)$ ($l = \overline{-L-1, L}$, $n = \overline{0, N}$) функции v , т.е. оператор $\mathbf{P}'_N \tilde{\mathbf{G}}(x) \mathbf{P}_L$ является, по существу, сеточным. При вычислении операторов $\tilde{\mathbf{G}}(x)$ интегрирование по τ осуществляется аналитически. Затем в операторах $\tilde{\mathbf{G}}_i(x)$ ($i = 1, 2$) вычисляются интегралы по ρ , но не все они могут быть вычислены аналитически. В таких случаях функции $\exp(-z_n)$ и $\operatorname{Ei}(-z_n)$ ($z_n \equiv (\rho^2 + d^2) / (4\tau_n)$, $n = \overline{1, N}$) заменяются многочленами, образованными первыми членами разложения этих функций в ряды Маклорена, а именно $K_M + 1$ членами со степенями $(z_n)^k$ ($k = \overline{0, K_M}$), а также логарифмическим членом $\ln(z_n)$ в случае $\operatorname{Ei}(-z_n)$.



3. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим вторую начально-краевую задачу теплопроводности:

$$\begin{aligned} \partial_t \theta(x, t) + \partial_{xx}^2 \theta(x, t) &= 0 \quad (x \in \Omega_+, \quad t \in (0, T]), \\ \partial_{\tilde{n}(s)} \theta(\tilde{x}(s), t) &= w(s, t) \quad (s \in I_S, \quad t \in I_T), \quad \theta(x, 0) = 0 \quad (x \in \overline{\Omega_+}). \end{aligned} \quad (13)$$

НП решения $\theta(x, t)$: $u_+(x, t) \equiv \partial_{\tilde{n}(s)} \theta(x, t)$ ($x = \tilde{x}_d(s)$, $d \in (0, D]$), имеет вид НП ТППС: $u_+(x) \equiv \mathbf{G}(x)v_+$, где $v_+ = (\mathbf{G}_+)^{-1}w$, $\mathbf{G}_+$ — оператор граничного интегрального уравнения второго рода: $\mathbf{G}_+(\tilde{x}(s)) \equiv -2^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{G}(\tilde{x}(s))$, $\mathbf{I}$ — тождественный оператор [2, п. 153]. Задача (13) рассматривается при условиях, что $T = 1$, Ω_+ — единичный круг, $w(\varphi, t) = t^4 \cos \varphi$ ($R = 1 - d$, $\varphi = s$ — полярные радиус и угол соответственно с полюсом в центре круга), поэтому точная функция $u_+(R, \varphi, t)$ имеет вид

$$u_+ = 2 \cos \varphi \left\{ -2^{-1}f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1'(\mu_k R)}{J_1(\mu_k) (\mu_k^2 - 1)} \sum_{l=1}^4 \frac{(-1)^{l+1} [f^{(l)}(t) - f^{(l)}(0)e^{-\mu_k^2 t}]}{\mu_k^{2l-1}} \right\},$$

где $f(t) \equiv t^4$, $J_1(z)$ — функция Бесселя, μ_k — положительные корни уравнения $J_1'(z) = 0$. Для данной геометрии имеем $D = 2/(3\pi)$, $\Sigma_s'' = -\Sigma_s' = \arcsin(2/(3\pi))$ ($s \in I_S$). Вычисляем аппроксимации функции u_+ : $\tilde{u}_+(x) \equiv \tilde{\mathbf{P}}_N' \mathbf{P}_N' \tilde{\mathbf{G}}(x) (\tilde{\mathbf{G}}_+)^{-1} \mathbf{P}_L w$, $\hat{u}_i^+(x) \equiv \tilde{\mathbf{P}}_N' \mathbf{P}_N' \hat{\mathbf{G}}_i(x) (\tilde{\mathbf{G}}_+)^{-1} \mathbf{P}_L w$ ($i = 12, 24, 48$). Здесь $\tilde{\mathbf{G}}_+$ — сеточная аппроксимация оператора $\mathbf{G}_+$: $\tilde{\mathbf{G}}_+(\tilde{x}(s_l)) \equiv -2^{-1}\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{G}}(\tilde{x}(s_l))$ ($l = -L - 1, L$). Операторы $\tilde{\mathbf{G}}(\tilde{x}_d(s))$ ($d \in [0, D]$) вычисляются с $\gamma = 2$ узлами ПКФГ, $K_M = 10$ членами разложения в ряды Маклорена. Операторы $\hat{\mathbf{G}}_i(x)$ отличаются от операторов $\tilde{\mathbf{G}}(x)$ только тем, что интегралы $\int_{\alpha_{s,l}}^{\alpha_{s,l+1}} g(x, s', \tau) (\tilde{\mathbf{P}}_L f)(s') ds'$ ($f \in H_L$) вычисляются не с помощью аналитического интегрирования по переменной ρ , а с помощью ПКФГ с i узлами. Заметим, что точка $\tilde{x}(s)$ не совпадает ни с одним из узлов ПКФГ, так как $\alpha_{s,0} \equiv 0$ и ПКФГ — открытые формулы. Поэтому функции $\hat{u}_i^+(x, t)$ непрерывны на множестве $\overline{\Omega_D} \times I_T$.

Максимумы модулей абсолютных погрешностей
Table. Maximum modules of absolute errors

d	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-15}
$h_\tau = 1/8$ $h_s = \pi/3$	$5.46 \cdot 10^{-2}$	$5.59 \cdot 10^{-2}$	$5.60 \cdot 10^{-2}$	$5.60 \cdot 10^{-2}$	$5.60 \cdot 10^{-2}$
	$5.45 \cdot 10^{-2}$	$2.25 \cdot 10^{-1}$	$7.31 \cdot 10^{-1}$	$7.97 \cdot 10^{-1}$	$8.05 \cdot 10^{-1}$
	$5.46 \cdot 10^{-2}$	$5.79 \cdot 10^{-2}$	$5.39 \cdot 10^{-1}$	$7.76 \cdot 10^{-1}$	$8.05 \cdot 10^{-1}$
	$5.46 \cdot 10^{-2}$	$5.59 \cdot 10^{-2}$	$8.88 \cdot 10^{-2}$	$6.95 \cdot 10^{-1}$	$8.05 \cdot 10^{-1}$
$h_\tau = 1/16$ $h_s = \pi/7$	$5.48 \cdot 10^{-3}$	$5.78 \cdot 10^{-3}$	$5.81 \cdot 10^{-3}$	$5.81 \cdot 10^{-3}$	$5.81 \cdot 10^{-3}$
	$5.97 \cdot 10^{-3}$	$2.47 \cdot 10^{-1}$	$9.38 \cdot 10^{-1}$	$1.02 \cdot 10^0$	$1.03 \cdot 10^0$
	$5.48 \cdot 10^{-3}$	$3.52 \cdot 10^{-2}$	$6.77 \cdot 10^{-1}$	$9.97 \cdot 10^{-1}$	$1.03 \cdot 10^0$
	$5.48 \cdot 10^{-3}$	$5.78 \cdot 10^{-3}$	$6.11 \cdot 10^{-2}$	$8.90 \cdot 10^{-1}$	$1.03 \cdot 10^0$
$h_\tau = 1/32$ $h_s = \pi/15$	$5.65 \cdot 10^{-4}$	$6.37 \cdot 10^{-4}$	$6.45 \cdot 10^{-4}$	$6.46 \cdot 10^{-4}$	$6.46 \cdot 10^{-4}$
	$5.65 \cdot 10^{-4}$	$2.72 \cdot 10^{-2}$	$9.13 \cdot 10^{-1}$	$1.10 \cdot 10^0$	$1.13 \cdot 10^0$
	$5.65 \cdot 10^{-4}$	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$4.03 \cdot 10^{-1}$	$1.04 \cdot 10^0$	$1.13 \cdot 10^0$
	$5.65 \cdot 10^{-4}$	$6.37 \cdot 10^{-4}$	$5.33 \cdot 10^{-2}$	$8.10 \cdot 10^{-1}$	$1.13 \cdot 10^0$
$h_\tau = 1/64$ $h_s = \pi/31$	$5.70 \cdot 10^{-5}$	$7.38 \cdot 10^{-5}$	$7.57 \cdot 10^{-5}$	$7.59 \cdot 10^{-5}$	$7.59 \cdot 10^{-5}$
	$5.69 \cdot 10^{-5}$	$3.01 \cdot 10^{-2}$	$7.26 \cdot 10^{-1}$	$1.12 \cdot 10^0$	$1.17 \cdot 10^0$
	$5.70 \cdot 10^{-5}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$	$3.76 \cdot 10^{-2}$	$9.92 \cdot 10^{-1}$	$1.17 \cdot 10^0$
	$5.70 \cdot 10^{-5}$	$7.38 \cdot 10^{-5}$	$2.32 \cdot 10^{-3}$	$5.35 \cdot 10^{-1}$	$1.17 \cdot 10^0$
$h_\tau = 1/128$ $h_s = \pi/63$	$5.09 \cdot 10^{-6}$	$8.69 \cdot 10^{-6}$	$9.16 \cdot 10^{-6}$	$9.21 \cdot 10^{-6}$	$9.21 \cdot 10^{-6}$
	$5.09 \cdot 10^{-6}$	$2.41 \cdot 10^{-3}$	$3.72 \cdot 10^{-1}$	$1.09 \cdot 10^0$	$1.19 \cdot 10^0$
	$5.09 \cdot 10^{-6}$	$9.51 \cdot 10^{-6}$	$5.21 \cdot 10^{-2}$	$8.32 \cdot 10^{-1}$	$1.19 \cdot 10^0$
	$5.09 \cdot 10^{-6}$	$8.69 \cdot 10^{-6}$	$5.39 \cdot 10^{-4}$	$1.41 \cdot 10^{-1}$	$1.19 \cdot 10^0$



Функции u_+ , $\tilde{u}_+$, $\hat{u}_i^+$ вычисляются с двойной точностью при фиксированных $d \in (0, D]$ в точках $(\tilde{x}_d(s_{l+1/2}), \tau_{n+1/2})$ ($s_{l+1/2} \equiv (l + 2^{-1})h_s$, $l = \overline{-L-1, L}$; $\tau_{n+1/2} \equiv (n + 2^{-1})h_\tau$, $n = \overline{0, N-1}$). При фиксированных d находим максимумы модулей абсолютных погрешностей приближенных решений: $\Delta\tilde{u}_+ \equiv \max_{l,n} |\tilde{u}_+ - u_+|$, $\Delta\hat{u}_i^+ \equiv \max_{l,n} |\hat{u}_i^+ - u_+|$. В таблице в каждой основной ячейке представлены значения $\Delta\tilde{u}_+$, $\Delta\hat{u}_{12}^+$, $\Delta\hat{u}_{24}^+$, $\Delta\hat{u}_{48}^+$ в соответствующем порядке сверху вниз.

Можно заметить, что даже при очень малых расстояниях до границы $\partial\Omega$ сохраняется кубическая скорость сходимости аппроксимаций $\tilde{u}_+$, что хорошо согласуется со следствием 2. Скорость сходимости аппроксимаций $\hat{u}_i^+$ снижается от кубической до нулевой по мере приближения к границе $\partial\Omega$ при фиксированных шагах дискретизации h_τ , h_s и восстанавливается до кубической при $h_\tau, h_s \rightarrow +0$ и фиксированных d . Так как аппроксимации $\hat{u}_i^+$ и $\tilde{u}_+$ отличаются только способом вычисления НП ТППС в области Ω_D , это свидетельствует о том, что равномерная сходимость в Ω_D у традиционных аппроксимаций НП ППС отсутствует, хотя они и сходятся равномерно с кубической скоростью в любой замкнутой подобласти области Ω_D .

Заключение

На основе кусочно-квадратичной интерполяции получены полуаналитические аппроксимации НП ТППС, сходящиеся с кубической скоростью равномерно вблизи границы двумерной области. Такие аппроксимации практически и теоретически осуществимы для любой аналитически заданной границы класса C^5 .

Список литературы

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. Москва : Мир, 1987. 524 с.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики : в 5 т. Т. 4, ч. 2. Москва : Наука, 1981. 550 с.
3. Zhang Y.-M., Gu Y., Chen J.-T. Stress analysis for multilayered coating systems using semianalytical BEM with geometric non-linearities // Computational Mechanics. 2011. Vol. 47, iss. 5. P. 493–504. <https://doi.org/10.1007/s00466-010-0559-0>
4. Gu Y., Chen W., Zhang B., Qu W. Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method // Computational Mechanics. 2014. Vol. 53, iss. 6. P. 1223–1234. <https://doi.org/10.1007/s00466-013-0965-1>
5. Niu Z., Cheng Ch., Zhou H., Hu Z. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2007. Vol. 31, iss. 12. P. 949–964. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.001>
6. Niu Z., Hu Z., Cheng Ch., Zhou H. A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2015. Vol. 61. P. 42–51. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.06.007>
7. Иванов Д. Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы двумерной области с помощью полуаналитической аппроксимации теплового потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 30–52. <https://doi.org/10.17223/19988621/65/3>
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы : в 3 т. Т. 1: Общая теория. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1962. 896 с.
9. Иванов Д. Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 5–25. <https://doi.org/10.17223/19988621/57/1>
10. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений : в 2 т. Т. 1. Москва : Физматгиз, 1962. 464 с.

References

1. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary element techniques: Theory and applications in engineering*. Berlin, Springer-Verlag, 1984. 464 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-48860-3> (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1987. 524 p.).
2. Smirnov V. I. *Kurs vysshey matematiki* [A course of higher mathematics]. Vol. 4, pt. 2. Moscow, Nauka, 1981. 550 p. (in Russian).



3. Zhang Y.-M., Gu Y., Chen J.-T. Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities. *Computational Mechanics*, 2011, vol. 47, iss. 5, pp. 493–504. <https://doi.org/10.1007/s00466-010-0559-0>
4. Gu Y., Chen W., Zhang B., Qu W. Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method. *Computational Mechanics*, 2014, vol. 53, iss. 6, pp. 1223–1234. <https://doi.org/10.1007/s00466-013-0965-1>
5. Niu Z., Cheng C., Zhou H., Hu Z. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2007, vol. 31, iss. 12, pp. 949–964. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2007.05.001>
6. Niu Z., Hu Z., Cheng C., Zhou H. A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015, vol. 61, pp. 42–51. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.06.007>
7. Ivanov D. Yu. A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of a two-dimensional domain using semianalytic approximation of the double layer heat potential. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2020, iss. 65, pp. 30–52 (in Russian). <https://doi.org/10.17223/19988621/65/3>
8. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part 1: General theory*. Hoboken, John Wiley and Sons, 1988. 858 p. (Russ. ed.: Moscow, IL, 1962. 896 p.).
9. Ivanov D. Yu. A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of domain in the case of two-dimensional problems of non-stationary heat conduction with boundary conditions of the second and third kind. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2019, iss. 57, pp. 5–25 (in Russian). <https://doi.org/10.17223/19988621/57/1>
10. Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Metody vychisleniy* [Computing Methods]. Vol. 1. Moscow, Fizmatgiz, 1962. 464 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 12.04.2023

Принята к публикации / Accepted 03.05.2023

Опубликована / Published 29.11.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 488–497
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 488–497
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-488-497>, EDN: GRSGAI

Article

On recovering non-local perturbation of non-self-adjoint Sturm – Liouville operator

M. A. Kuznetsova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Maria A. Kuznetsova, kuznetsovama@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1083-0799>, AuthorID: 1062829

Abstract. Recently, there appeared a significant interest in inverse spectral problems for non-local operators arising in numerous applications. In the present work, we consider the operator with frozen argument $ly = -y''(x) + p(x)y(x) + q(x)y(a)$, which is a non-local perturbation of the non-self-adjoint Sturm – Liouville operator. We study the inverse problem of recovering the potential $q \in L_2(0, \pi)$ by the spectrum when the coefficient $p \in L_2(0, \pi)$ is known. While the previous works were focused only on the case $p = 0$, here we investigate the more difficult non-self-adjoint case, which requires consideration of eigenvalues multiplicities. We develop an approach based on the relation between the characteristic function and the coefficients $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ of the potential q by a certain basis. We obtain necessary and sufficient conditions on the spectrum being asymptotic formulae of a special form. They yield that a part of the spectrum does not depend on q , i.e. it is uninformative. For the unique solvability of the inverse problem, one should supplement the spectrum with a part of the coefficients ξ_n , being the minimal additional data. For the inverse problem by the spectrum and the additional data, we obtain a uniqueness theorem and an algorithm.

Keywords: inverse spectral problems, frozen argument, Sturm – Liouville operators, non-local operators, necessary and sufficient conditions

Acknowledgements: This research was financially supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00509, <https://rscf.ru/project/22-21-00509/>).

For citation: Kuznetsova M. A. On recovering non-local perturbation of non-self-adjoint Sturm – Liouville operator. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 488–497. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-488-497>, EDN: GRSGAI

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья
УДК 517.984

Восстановление нелокального возмущения несамосопряженного оператора Штурма – Лиувилля

М. А. Кузнецова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Кузнецова Мария Андреевна, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры математической физики и вычислительной математики, kuznetsovama@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1083-0799>, AuthorID: 1062829



Аннотация. В последнее время возник значительный интерес к обратным спектральным задачам для нелокальных операторов, возникающих во многих приложениях. В настоящей работе рассматривается оператор с замороженным аргументом $ly = -y''(x) + p(x)y(x) + q(x)y(a)$, который является нелокальным возмущением несамосопряженного оператора Штурма – Лиувилля. Исследуется обратная задача восстановления потенциала $q \in L_2(0, \pi)$ по спектру при известном коэффициенте $p \in L_2(0, \pi)$. В то время как предыдущие работы были сосредоточены только на случае $p = 0$, здесь исследуется более сложный несамосопряженный случай, требующий учета кратностей собственных значений. Мы развиваем подход, основанный на связи между характеристической функцией и коэффициентами $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ потенциала q по некоторому базису. Получены необходимые и достаточные условия для спектра, которые являются асимптотическими формулами особого вида. Из них следует, что часть спектра не зависит от q , т. е. является неинформативной. Для однозначной разрешимости обратной задачи кроме спектра необходимо задать часть коэффициентов ξ_n , которые являются минимальными дополнительными данными. Для обратной задачи по спектру и дополнительным данным получены теорема единственности и алгоритм.

Ключевые слова: обратные спектральные задачи, замороженный аргумент, операторы Штурма – Лиувилля, нелокальные операторы, необходимые и достаточные условия

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00509, <https://rscf.ru/project/22-21-00509/>).

Для цитирования: Kuznetsova M. A. On recovering non-local perturbation of non-self-adjoint Sturm – Liouville operator [Кузнецова М. А. Восстановление нелокального возмущения несамосопряженного оператора Штурма – Лиувилля] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 488–497. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-488-497>, EDN: GRSgai

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

Inverse spectral problems consist of recovering operators from their spectral characteristics. The classical results in this field were obtained for the differential operators [1–5], which are local. Recently, in connection with numerous applications, there appeared a considerable interest in inverse problems for non-local operators [6–12], and, in particular, for the operators with a frozen argument [13–25]. Their studying is complicated by the fact that non-local operators require the development of non-standard methods.

In this paper, we study the recovery of a complex-valued potential $q \in L_2(0, \pi)$ by the spectrum $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ of the boundary value problem

$$ly := -y''(x) + p(x)y(x) + y(a)q(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

$$y^{(\alpha)}(0) = y^{(\beta)}(\pi) = 0, \quad \alpha, \beta \in \{0, 1\}, \quad (2)$$

where $a \in [0, \pi]$ and $p \in L_2(0, \pi)$ is complex-valued. Operators ly are usually called Sturm – Liouville operators with *frozen argument*. They have a close relation to the operators with integral boundary conditions [8, 12, 26–28], which arise in studying diffusion and heating processes and in the theory of elasticity, see [29–32]. In connection with this, in [33], some spectral properties of the operator ly were established in the case of periodic boundary conditions. However, the mentioned work does not address an inverse spectral problem.

The previous studies of inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators with frozen argument [13–25] were focused only on the case $p = 0$. In this particular case, a comprehensive study of recovering q by the spectrum required a series of works [15–18, 20, 22, 25]. The most general approach to the operator with frozen argument was developed in [22], which allowed us to obtain necessary and sufficient conditions on the spectrum and, afterward, a uniform stability of the inverse problem [25].

In [23], there was suggested another approach to the operator with frozen argument within the framework of perturbation theory. According to it, operator ly could be treated as a one-dimensional perturbation of the Sturm – Liouville operator $Ay := -y'' + p(x)y$. However, for studying the spectral properties of ly , this approach needs the selfadjointness of the operator A . For this reason, it is inapplicable to the case of complex-valued p considered here, since the unperturbed operator A is non-self-adjoint.

Here, we develop an approach to the general situation of arbitrary $p \in L_2(0, \pi)$, relying on some ideas of [22]. We significantly extend the mentioned ideas to take into account the non-self-adjointness of the unperturbed operator, which requires consideration of eigenvalues multiplicities.

The main results of the paper consist in necessary and sufficient conditions on the spectrum, a uniqueness theorem, and an algorithm. As in the previous work [22], the necessary and sufficient conditions are asymptotic formulae of a special form. They give the so-called degeneration condition that some part of the eigenvalues is uninformative, i.e. it does not depend on q . However, compared to [22], the non-self-adjointness of the unperturbed operator leads to a new effect that the degeneration condition includes a restriction on the minimal possible multiplicity of each uninformative eigenvalue.

The paper is organized as follows. In Section 1, we introduce necessary objects and provide auxiliary statements. As well we obtain a characteristic function of boundary value problems (1), (2), and a main equation of the inverse problem. In Section 2, by necessity, we establish the conditions on the spectrum. The main results and their proofs are given in Section 3.

1. Preliminaries. The main equation of the inverse problem

First, we consider the unperturbed boundary value problem for the classical Sturm – Liouville equation

$$-y''(x) + p(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (3)$$

with boundary conditions (2). Denote by $S_a(x, \lambda)$ and $C_a(x, \lambda)$ the solutions of equation (3) under the initial conditions

$$C_a(a, \lambda) = 1, \quad C'_a(a, \lambda) = 0, \quad S_a(a, \lambda) = 0, \quad S'_a(a, \lambda) = 1;$$

here and below the prime symbol stands for the derivative with respect to the *first* argument. Let us agree that $\int_a^b f(t) dt$ is understood as $-\int_b^a f(t) dt$ when $b < a$. For $x \in [0, \pi]$, using transformation operators (see, e.g. [4]), we obtain the following representations:

$$\left. \begin{aligned} S_a(x, \lambda) &= \frac{\sin \rho(x-a)}{\rho} - \frac{\cos \rho(x-a)}{\rho^2} \omega_a(x) + \int_a^x K_{a,1}(x, t) \frac{\cos \rho(t-a)}{\rho^2} dt, \\ S'_a(x, \lambda) &= \cos \rho(x-a) + \frac{\sin \rho(x-a)}{\rho} \omega_a(x) + \int_a^x K_{a,2}(x, t) \frac{\sin \rho(t-a)}{\rho} dt, \\ C_a(x, \lambda) &= \cos \rho(x-a) + \frac{\sin \rho(x-a)}{\rho} \omega_a(x) + \int_a^x K_{a,3}(x, t) \frac{\sin \rho(t-a)}{\rho} dt, \\ C'_a(x, \lambda) &= -\rho \sin \rho(x-a) + \cos \rho(x-a) \omega_a(x) + \int_a^x K_{a,4}(x, t) \cos \rho(t-a) dt, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

where $\rho^2 = \lambda$ and $\omega_a(x) = \frac{1}{2} \int_a^x p(t) dt$. In (4), for each fixed x , there determined $K_{a,j}(x, \cdot) \in L_2(0, \pi)$, and $K_{a,j} \in L_2[0, \pi]^2$, $j = \overline{1, 4}$.

Consider the entire function $\Delta_0(\lambda) = C_a^{(\alpha)}(0, \lambda) S_a^{(\beta)}(\pi, \lambda) - S_a^{(\alpha)}(0, \lambda) C_a^{(\beta)}(\pi, \lambda)$, wherein $y^{(0)} := y$ and $y^{(1)} := y'$. It is easy to see that Δ_0 is a characteristic function of unperturbed boundary value problem (2), (3), i.e. a number μ_n is its eigenvalue if and only if $\Delta_0(\mu_n) = 0$. By $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ we denote the spectrum of (2), (3), being the sequence of the eigenvalues taken with



the account of algebraic multiplicities. The following asymptotics are known (see [4]):

$$\mu_n = \theta_n^2, \quad \theta_n = n - \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \quad n \geq 1, \quad \omega := \frac{1}{2} \int_0^\pi p(t) dt, \quad \{\kappa_n\}_{n \geq 1} \in \ell_2. \quad (5)$$

By m_n we denote multiplicity of the eigenvalue μ_n . By asymptotics (5), for a sufficiently large n , we have $m_n = 1$. Without loss of generality, we assume that equal values in the spectrum follow each other. Then, we have

$$\mu_n = \mu_{n+1} = \dots = \mu_{n+m_n-1}, \quad n \in \mathcal{S}, \quad \mathcal{S} := \{n \geq 2: \mu_n \neq \mu_{n-1}\} \cup \{1\}.$$

The index $n \in \mathcal{S}$ corresponds to the unique elements in $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$, while for $n \in \mathcal{S}$ and $\nu \in \overline{0, m_n - 1}$, the index $k = n + \nu$ runs through $\mathbb{N}$.

Now, we are ready to study boundary value problems (1) and (2). Introduce the solutions $S(x, \lambda)$ and $C(x, \lambda)$ of equation (1) under the initial conditions

$$S(a, \lambda) = 0, \quad S'(a, \lambda) = 1, \quad C(a, \lambda) = 1, \quad C'(a, \lambda) = 0.$$

Any other solution of (1) is a linear combination of $S(x, \lambda)$ and $C(x, \lambda)$. It is easy to see that

$$S(x, \lambda) = S_a(x, \lambda), \quad C(x, \lambda) = C_a(x, \lambda) + \int_a^x W(x, t, \lambda) q(t) dt, \quad (6)$$

where $W(x, t, \lambda) := C_a(t, \lambda) S_a(x, \lambda) - C_a(x, \lambda) S_a(t, \lambda)$. We introduce the entire function

$$\Delta(\lambda) = C^{(\alpha)}(0, \lambda) S^{(\beta)}(\pi, \lambda) - S^{(\alpha)}(0, \lambda) C^{(\beta)}(\pi, \lambda). \quad (7)$$

Then, $\Delta(\lambda)$ is a characteristic function of boundary value problem (1), (2), while $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ is a sequence of its zeroes taken with the account of multiplicities.

Substituting (6) into (7), we obtain

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) - S_a^{(\beta)}(\pi, \lambda) \int_0^a W^{(\alpha)}(0, t, \lambda) q(t) dt - S_a^{(\alpha)}(0, \lambda) \int_a^\pi W^{(\beta)}(\pi, t, \lambda) q(t) dt. \quad (8)$$

Following the approach in [22], we should substitute into (8) the values $\lambda = \mu_n$, being the zeroes of the main part $\Delta_0(\lambda)$. In the paper [22] corresponding to the case $p = 0$, we had $\mu_n = (n - \frac{\alpha + \beta}{2})^2$, being simple eigenvalues. Here, we have to take into account that μ_n may be multiple. For each $n \in \mathcal{S}$, we differentiate both parts of formula (8) $\nu = \overline{0, m_n - 1}$ times and put $\lambda = \mu_n$. Since

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \lambda^\nu} [C_a^{(\alpha)}(0, \lambda) S_a^{(\beta)}(\pi, \lambda)] = \frac{\partial^\nu}{\partial \lambda^\nu} [S_a^{(\alpha)}(0, \lambda) C_a^{(\beta)}(\pi, \lambda)], \quad n \in \mathcal{S}, \quad \nu = \overline{0, m_n - 1}, \quad (9)$$

in $\lambda = \mu_n$, we obtain

$$\Delta^{(\nu)}(\lambda) = \left[S_a^{(\beta)}(\pi, \lambda) \int_0^\pi g(t, \lambda) q(t) dt \right]^{(\nu)}, \quad \lambda = \mu_n, \quad n \in \mathcal{S}, \quad \nu = \overline{0, m_n - 1}, \quad (10)$$

where $g(t, \lambda) := -W^{(\alpha)}(0, t, \lambda)$. One can see that $g(t, \lambda) = S_0(x, \lambda)$ if $\alpha = 0$, and $g(t, \lambda) = -C_0(x, \lambda)$ if $\alpha = 1$. Moreover, $g^{(\beta)}(\pi, \lambda) = \Delta_0(\lambda)$.

For $n \in \mathcal{S}$ and $\nu = \overline{0, m_n - 1}$, we introduce

$$a_{n+\nu} = \frac{n^{1-\beta}}{\nu!} \frac{\partial^\nu S_a^{(\beta)}(\pi, \lambda)}{\partial \lambda^\nu} \Big|_{\lambda=\mu_n}, \quad g_{n+\nu}(t) = \frac{n^{1-\alpha}}{(m_n - \nu - 1)!} \frac{\partial^{m_n - \nu - 1} g(t, \lambda)}{\partial \lambda^{m_n - \nu - 1}} \Big|_{\lambda=\mu_n}.$$

Note that a_k and g_k are the objects constructed by unperturbed boundary value problems (2), (3), and they are known. Formulae (4) and (5) yield that $a_k = O(1)$ and $\{g_k(t)\}_{k \geq 1}$ is an almost normalized system. At the same time, $\{g_k(t)\}_{k \geq 1}$ is constructed from eigen- and associated functions of the operator $Ay = -y'' + p(x)y$ considered under strongly regular conditions (2). For the mentioned reasons, the following proposition holds (see, e.g., [34, 35]).



Proposition 1. The functional sequence $\{g_n(t)\}_{n \geq 1}$ is a Riesz basis in $L_2(0, \pi)$.

Applying the general Leibniz rule in (10), we get

$$n^{2-\alpha-\beta} \frac{\Delta^{(\nu)}(\mu_n)}{\nu!} = \sum_{\eta=0}^{\nu} a_{n+\nu-\eta} \xi_{n+m_n-1-\eta}, \quad n \in \mathcal{S}, \quad \nu = \overline{0, m_n - 1}, \quad (11)$$

where $\xi_k := \int_0^\pi g_k(t)q(t)dt$. Further, we consider (11) as an equation with respect to the coefficients $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$. From Proposition 1 it follows that $\{\xi_n\}_{n \geq 1} \in \ell_2$ and its knowledge allows one to recover q uniquely. Formula (11) is called the *main equation* of the inverse problem.

2. Necessary conditions

In this section, we obtain necessary conditions on the spectrum $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$, which consists of asymptotic formulae (21). In the next section, we prove that they are sufficient conditions as well.

Remind that $\lambda_n = \rho_n^2$ and $\mu_n = \theta_n^2$. Without loss of generality, we assume that $\arg \rho_n, \arg \theta_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. We start by obtaining the weakest asymptotics for ρ_n .

Lemma 1. The following asymptotics holds: $\rho_n = \theta_n + o(1)$, $n \geq 1$.

Proof. For definiteness, we provide computations in the case $\alpha = 1$ and $\beta = 0$ (the other cases are proceeded analogously). By asymptotics (5), it is sufficient to prove that $\rho_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$. For $\lambda = \rho^2$, we consider $\Delta(\lambda)$ as an entire function of ρ . Then, $\{\rho_n\}_{n \geq 1} \cup \{-\rho_n\}_{n \geq 1}$ is the set of all its zeroes.

Denote $\tau = |\operatorname{Im} \rho|$. Using the corresponding formulae in (4), for $\rho \rightarrow \infty$, we obtain

$$\begin{aligned} W'(0, t, \lambda) &= -C_0(t, \lambda) = O(e^{\tau t}), \quad W(\pi, t, \lambda) = -S_\pi(t, \lambda) = O\left(\frac{e^{\tau(\pi-t)}}{\rho}\right), \\ S_a(\pi, \lambda) &= O\left(\frac{e^{\tau(\pi-a)}}{\rho}\right), \quad S'_a(0, \lambda) = O(e^{\tau a}), \quad \Delta_0(\lambda) = -C_0(\pi, \lambda) = -\cos \rho\pi + O\left(\frac{e^{\tau\pi}}{\rho}\right). \end{aligned}$$

Substituting these relations into (8), we get

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + O\left(\frac{e^{\tau\pi}}{\rho}\right) = \cos \rho\pi + O\left(\frac{e^{\tau\pi}}{\rho}\right). \quad (12)$$

For any $\delta \in (0, \frac{1}{4})$, we have the following estimate with $C_\delta > 0$ (see [4]):

$$|\cos \rho\pi| > C_\delta e^{\tau\pi}, \quad \rho \in G_\delta := \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - n + \frac{1}{2}\right| \geq \delta, n \in \mathbb{Z}\right\}. \quad (13)$$

Then, by (12), there exists $N_\delta \in \mathbb{N}$ such that $|\cos \rho\pi| \geq |\cos \rho\pi - \Delta(\rho^2)|$ as soon as $\rho \in G_\delta$ and $|\rho| \geq N_\delta$. Applying Rouché's theorem, we arrive at that in the circle $|\rho| < N_\delta$, the functions $\cos \rho\pi$ and $\Delta(\rho^2)$ have the same number of zeroes. Analogously, in each circle $|\rho - n + \frac{1}{2}| < \delta$, where $n \in \mathbb{Z}$ is such that $|n - \frac{1}{2}| > N_\delta$, there is exactly one zero of $\Delta(\rho^2)$. Taking into account that $\Delta(\rho^2)$ and $\cos \rho\pi$ are even functions of ρ , and that δ can be arbitrarily small, we arrive at the needed asymptotics. $\square$

Further, we clarify the obtained in Lemma 1 necessary conditions on the spectrum.

Theorem 1. I. Let $K \in \mathbb{N}$ be such that for $n \geq K$, all $m_n = 1$. Then, the following asymptotics holds:

$$\lambda_n = \mu_n + a_n \varkappa_n, \quad n \geq K, \quad \{\varkappa_n\}_{n \geq K} \in \ell_2. \quad (14)$$

II. For $n \in \mathcal{S}$, denote $k_n = \min(m_n, r_n)$, where r_n is a multiplicity of $\lambda = \mu_n$ as a zero of the entire function $S_a^{(\beta)}(\pi, \lambda)$. Then, there exists such numeration of $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ that

$$\lambda_n = \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+k_n-1} = \mu_n, \quad n \in \mathcal{S}. \quad (15)$$



Proof. I. By Lemma 1, we have $\rho_n = \theta_n + \eta_n$, where $\eta_n = o(1)$. To prove (14), we substitute $\lambda = \rho_n^2$ into (8) and, using the Taylor series, obtain asymptotics for η_n , where $n \geq K$.

For definiteness, consider the case $\alpha = 1$ and $\beta = 0$ (the other cases are proceeded analogously). Since $\Delta_0(\lambda) = -C_0(\pi, \lambda)$, substituting $\lambda = \rho_n^2$ into the corresponding formula in (4), applying trigonometric formulae along with asymptotics (5) and $\eta_n = o(1)$, we get

$$\Delta_0(\lambda_n) = -\cos \theta_n \pi - \frac{\omega}{\theta_n} \sin \theta_n \pi - \int_0^\pi K_{0,3}(\pi, t) \frac{\sin \theta_n t}{\theta_n} dt + (-1)^{n+1} \eta_n \pi + o(\eta_n).$$

In this formula, the first three summands compose $\Delta_0(\mu_n) = 0$, and we arrive at

$$\Delta_0(\lambda_n) = \eta_n \pi ((-1)^{n+1} + o(1)). \quad (16)$$

Proceeding analogously, based on (4), we also obtain the following asymptotics:

$$\left. \begin{aligned} S_a(t, \lambda_n) &= S_a(t, \mu_n) + O(n^{-1} \eta_n), & S'_a(t, \lambda_n) &= S'_a(t, \mu_n) + O(\eta_n), \\ C_a(t, \lambda_n) &= C_a(t, \mu_n) + O(\eta_n), & C'_a(t, \lambda_n) &= C'_a(t, \mu_n) + O(n \eta_n) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

uniformly on $t \in [0, \pi]$. Using (17), we have

$$\begin{aligned} A_n &:= S_a(\pi, \lambda_n) \int_0^a W'(0, t, \lambda_n) q(t) dt = \\ &= \left(S_a(\pi, \mu_n) + O\left(\frac{\eta_n}{n}\right) \right) \left(- \int_0^a g_n(t) q(t) dt + O(\eta_n) \right). \end{aligned}$$

Since $g_n(t) = -\cos \theta_n t + O(n^{-1})$, by the Riemann – Lebesgue lemma, $\int_0^a g_n(t) q(t) dt = o(1)$. Using also that $S_a(\pi, \mu_n) = O(n^{-1})$, we obtain

$$A_n = -S_a(\pi, \mu_n) \int_0^a g_n(t) q(t) dt + o(\eta_n). \quad (18)$$

Analogously, we have

$$B_n := S'_a(0, \lambda_n) \int_a^\pi W(\pi, t, \lambda_n) q(t) dt = S'_a(0, \mu_n) \int_a^\pi W(\pi, t, \mu_n) q(t) dt + o(\eta_n).$$

Relation (9) yields that $S'_a(0, \mu_n) W(\pi, t, \mu_n) = -S_a(\pi, \mu_n) g_n(t)$, and

$$B_n = -S_a(\pi, \mu_n) \int_a^\pi g_n(t) q(t) dt + o(\eta_n). \quad (19)$$

Combining (16), (18), and (19) with (8) in $\lambda = \rho_n^2$, we obtain

$$0 = ((-1)^n \pi + o(1)) \eta_n + S(\pi, \mu_n) \xi_n, \quad \{\xi_n\}_{n \geq 1} \in \ell_2.$$

For $n \geq K$, the value η_n is the unique solution of this equation, which leads to $\eta_n = a_n \nu_n n^{-1}$ with $\{\nu_n\}_{n \geq K} \in \ell_2$, and to (14).

II. From the definition, it follows that

$$a_n = a_{n+1} = \dots = a_{n+k_n-1} = 0.$$

Then, by formula (11), μ_n is a zero of $\Delta(\lambda)$ of multiplicity not less than k_n . This means that μ_n occurs in the spectrum $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ at least k_n times, and (15) holds up to a numeration. $\square$

In what follows, we can assume that the numeration of $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ satisfies (15). Denote

$$\Omega = \{n + \nu : n \in \mathcal{S}, \quad \nu = \overline{0, k_n - 1}\}, \quad \overline{\Omega} = \mathbb{N} \setminus \Omega. \quad (20)$$



Formula (15) yields that the part of the spectrum $\{\lambda_n\}_{n \in \Omega}$ does not depend on q , i.e. we have the degeneration condition. Each unique eigenvalue $\lambda_n = \mu_n$ in this part occurs k_n times, which restricts its multiplicity to be not less than k_n . Note that (15) follows from (14) when $n \geq K$ since $k_n \leq 1$. In [22], condition (15) was not required because, for $p = 0$, we can take $K = 1$.

Now, we unify conditions (14) and (15) into one formula. Introduce the values

$$b_{n+\nu} = \begin{cases} a_{n+\nu}, & \nu = \overline{0, p_n - 1}, \\ 1, & \nu = \overline{p_n, m_n - 1}, \end{cases} \quad p_n := \max(1, k_n), \quad n \in \mathcal{S}.$$

Then, formulae (14) and (15) are particular cases of the following relation:

$$\lambda_n = \mu_n + b_n \varkappa_n, \quad n \geq 1, \quad \{\varkappa_n\}_{n \geq 1} \in \ell_2. \quad (21)$$

It differs from (14) and (15) only by a finite number of formulae for $n = k + \nu < K$, $k \in \mathcal{S}$, $\nu \in \overline{k_n, m_n - 1}$ with $b_n \neq 0$, being non-restrictive. For this reason, (21) is equivalent to (14) unified with (15). In particular, $n \in \Omega$ if and only if $b_n = 0$.

Note that $b_n = O(1)$, then the following asymptotics is weaker than (21):

$$\lambda_n = \rho_n^2, \quad \rho_n = n - \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\nu_n}{n}, \quad \{\nu_n\}_{n \geq 1} \in \ell_2. \quad (22)$$

By the standard approach involving Hadamard's factorization theorem (see, e.g., [4]), one can prove that

$$\Delta(\lambda) = (-1)^{\alpha} \pi^{\delta_{\alpha, \beta}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{c_k}, \quad c_k := \begin{cases} \left(k - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2, & k \geq 1 \text{ or } \alpha + \beta < 2, \\ 1, & k = 1, \alpha = \beta = 1. \end{cases} \quad (23)$$

Thus, by the spectrum we can uniquely reconstruct the characteristic function $\Delta(\lambda)$.

3. Main results

First, we obtain the necessary and sufficient conditions on the spectrum.

Theorem 2. *For an arbitrary sequence $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ of complex numbers to be the spectrum of boundary value problem (1), (2) with some $q \in L_2(0, \pi)$, it is necessary and sufficient to satisfy (21).*

For the proof, we need the following lemma.

Lemma 2. *Let $\Delta(\lambda)$ be constructed via (23), where arbitrary values $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ satisfy asymptotics (22). Then, the following representation holds:*

$$\Delta(\lambda) = \begin{cases} \rho^{2\alpha} \left(\frac{\sin \rho \pi}{\rho} - \frac{\cos \rho \pi}{\rho^2} \omega + \int_0^\pi \frac{\cos \rho t}{\rho^2} W(t) dt \right), & \alpha = \beta, \\ (-1)^\alpha \left(\cos \rho \pi + \frac{\sin \rho \pi}{\rho} \omega + \int_0^\pi \frac{\sin \rho t}{\rho} W(t) dt \right), & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (24)$$

where $W \in L_2(0, \pi)$.

For $\alpha = \beta = 0$, the statement of the lemma easily follows from Lemma 3.3 in [6] after integration in parts. For the other combinations of α and β , the needed statements are proved by analogous computations.

Proof of Theorem 2. The necessity part was proved in the previous section. Let us prove the sufficiency part. Construct the function $\Delta(\lambda)$ via formula (23) using the given numbers $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$. Condition (21) yields asymptotics (22), and, by Lemma 2, $\Delta(\lambda)$ has the form (24).



Now, we should find a function q such that its coefficients $\xi_k = \int_0^\pi q(t)g_k(t) dt$ satisfy (11). For every $n \in \mathcal{S}$, relation (11) can be considered as a system of m_n linear equations with respect to the vector $[\xi_{n+\nu}]_{\nu=0}^{m_n-1}$:

$$\begin{cases} a_n \xi_{n+m_n-1} = n^{2-\alpha-\beta} \Delta(\mu_n), \\ a_n \xi_{n+m_n-2} + a_{n+1} \xi_{n+m_n-1} = n^{2-\alpha-\beta} \frac{\Delta'(\mu_n)}{1!}, \\ \dots \\ a_n \xi_n + a_{n+1} \xi_{n+1} + \dots + a_{n+m_n-1} \xi_{n+m_n-1} = n^{2-\alpha-\beta} \frac{\Delta^{(m_n-1)}(\mu_n)}{(m_n-1)!}. \end{cases} \quad (25)$$

By (21), we have $\Delta(\mu_n) = \Delta'(\mu_n) = \dots = \Delta^{(k_n-1)}(\mu_n) = 0$. This along with (15) yields that the first k_n rows in the system (25) turn trivial identities and that arbitrary values of $\xi_{n+\nu}$, $\nu = 0, k_n - 1$, satisfy this system. If $k_n < m_n$, then $a_{n+k_n} \neq 0$, and the rest $\xi_{n+\nu}$ are uniquely determined by subsequent application of the following formulae:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{n+m_n-1} &= n^{2-\alpha-\beta} \frac{\Delta^{(k_n)}(\mu_n)}{a_{n+k_n} k_n!}, \\ \xi_{n+m_n-\nu} &= \frac{1}{a_{n+k_n}} \left(n^{2-\alpha-\beta} \frac{\Delta^{(k_n+\nu-1)}(\mu_n)}{(k_n+\nu-1)!} - \sum_{\eta=0}^{\nu-1} a_{n+k_n+\eta} \xi_{n+m_n-\nu+\eta} \right), \quad \nu = \overline{2, m_n - k_n}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Remind that for a sufficiently large $n \geq K$, we have $m_n = 1$, and ξ_n either can be arbitrary ($k_n = 1$) or it is computed via the first formula in (26) (if $k_n = 0$).

Thus, we arrive at that the part of the coefficients $\{\xi_k\}_{k \in \overline{\Omega}}$ is uniquely determined by $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$, while $\{\xi_k\}_{k \in \Omega}$ can be arbitrary (for the definition of Ω and $\overline{\Omega}$, see (20)). Applying the scheme from the proof of Theorem 1 in [22], using representation (24), we obtain that $\{n^{2-\alpha-\beta} \Delta(\mu_n) a_n^{-1}\}_{n \in \overline{\Omega} \cap \mathcal{S}} \in \ell_2$, and $\{\xi_k\}_{k \in \overline{\Omega}} \in \ell_2$. Choose arbitrary coefficients $\{\xi_k\}_{k \in \Omega} \in \ell_2$. Then, there exists $q \in L_2(0, \pi)$ such that its coefficients with respect to the basis $\{g_k(t)\}_{k \geq 1}$ are $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$.

Consider boundary value problems (1) and (2) with such potential q . Let $\Delta_*(\lambda)$ be the characteristic function of this boundary value problem. Then, by construction,

$$F(\lambda) = \frac{\Delta_*(\lambda) - \Delta(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}$$

is an entire function. Representations (8) and (24) along with (4) yield asymptotics

$$\Delta_*(\lambda) - \Delta(\lambda) = O\left(\rho^{\alpha+\beta-2} e^{\tau\pi}\right), \quad \rho^2 = \lambda, \quad \tau = |\operatorname{Im} \rho|. \quad (27)$$

Using (4), we also arrive at

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{cases} (-1)^\alpha \left(\cos \rho\pi + O\left(\frac{e^{\tau\pi}}{\rho}\right) \right), & \alpha \neq \beta, \\ \rho^{2\alpha-1} \left(\sin \rho\pi + O\left(\frac{e^{\tau\pi}}{\rho}\right) \right), & \alpha = \beta. \end{cases}$$

Consider arbitrary $\delta \in (0, \frac{1}{4})$. For a sufficiently large $|\lambda| \geq N_\delta$, analogously to (13), one can prove that

$$|\Delta_0(\lambda)| \geq C_\delta |\rho|^{\alpha+\beta-1} e^{\tau\pi}, \quad \rho \in G_\delta = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - n + \frac{\alpha+\beta}{2} \right| \geq \delta, \quad n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (28)$$

where $C_\delta > 0$. Using (27) and (28), we arrive at $F(\lambda) = o(1)$ in G_δ . By the maximum modulus principle and Liouville's theorem, $F(\lambda) = 0$. Thus, the function $\Delta(\lambda)$ is the characteristic function



of the boundary value problem (1), (2) with the considered potential q , and $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ is its spectrum. $\square$

From the proof of Theorem 2, it follows that the potentials q corresponding to the same spectrum have the same coefficients $\{\xi_n\}_{n \in \bar{\Omega}}$, while for $n \in \Omega$, the coefficients ξ_n may differ. At the same time, by Proposition 1, the mapping $q \mapsto \{\xi_n\}_{n \geq 1}$ is a one-to-one correspondence between $L_2(0, \pi)$ and ℓ_2 . Thus, for a fixed spectrum $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$, one can construct the set of all iso-spectral potentials q varying $\{\xi_n\}_{n \in \Omega} \in \ell_2$ or find a unique q setting additionally $\{\xi_n\}_{n \in \Omega} \in \ell_2$. In the latter case, we obtain a uniqueness theorem.

Theorem 3. Let $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 1}$ be the spectrum of boundary value problem (1), (2) with a potential $\tilde{q} \in L_2(0, \pi)$, while $\xi_n = \int_0^\pi \tilde{q}(t)g_n(t)dt$, $n \in \Omega$. If $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} = \{\tilde{\lambda}_n\}_{n \geq 1}$ and $\xi_n = \tilde{\xi}_n$ for $n \in \Omega$, then $q = \tilde{q}$.

Since the proof of Theorem 2 is constructive, we have the following algorithm for recovering q given $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ and $\{\xi_n\}_{n \in \Omega}$.

Algorithm 1. To recover the potential q , one should:

1. Construct $\Delta(\lambda)$ via formula (23).
2. For $n \in \mathcal{S}$, by formula (26), compute the unknown coefficients $\xi_{n+k_n}, \dots, \xi_{n+m_n-1}$.
3. Find $q = \sum_{n=1}^\infty \xi_n f_n$, where $\{f_n\}_{n \geq 1}$ is the basis biorthonormal to $\{\bar{g}_n\}_{n \geq 1}$ in $L_2(0, \pi)$.

References

1. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm – Liouvilleschen eigenwertaufgabe: Bestimmung der differentialgleichung durch die eigenwerte. *Acta Mathematica*, 1946, vol. 78, pp. 1–96. <https://doi.org/10.1007/BF02421600>
2. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville operators and their applications*. Basel, Birkhauser, 1986. 367 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-5485-6> (Russ. ed.: Kiev, Naukova dumka, 1977. 329 p.).
3. Levitan B. M. *Inverse Sturm – Liouville problems*. Berlin, Boston, De Gruyter, 1987. 240 p. <https://doi.org/10.1515/9783110941937> (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1984. 240 p.).
4. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm – Liouville problems and their applications*. New York, NOVA Science Publ., 2001. 305 p. EDN: ZVITUV
5. Yurko V. A. *Method of spectral mappings in the inverse problem theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2002. 304 p. <https://doi.org/10.1515/9783110940961>, EDN: ZVIUEB
6. Buterin S. A. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator. *Results in Mathematics*, 2007, vol. 50, pp. 173–181. <https://doi.org/10.1007/s00025-007-0244-6>
7. Yurko V. Inverse spectral problems for first order integro-differential operators. *Boundary Value Problems*, 2017, vol. 2017, art. 98. <https://doi.org/10.1186/s13661-017-0831-8>
8. Yang C.-F., Yurko V. On the determination of differential pencils with nonlocal conditions. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2017, vol. 26, iss. 5, pp. 577–588. <https://doi.org/10.1515/jiip-2017-0076>
9. Pikula M., Vladičić V., Vojvodić B. Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators with a constant delay less than half the length of the interval and Robin boundary conditions. *Results in Mathematics*, 2019, vol. 74, art. 45. <https://doi.org/10.1007/s00025-019-0972-4>
10. Djurić N., Buterin S. On an open question in recovering Sturm – Liouville-type operators with delay. *Applied Mathematics Letters*, 2021, vol. 113, art. 106862. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106862>
11. Buterin S. A. Uniform full stability of recovering convolutional perturbation of the Sturm – Liouville operator from the spectrum. *Journal of Differential Equations*, 2021, vol. 282, pp. 67–103. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.02.022>
12. Bondarenko N. P. Inverse problem for a differential operator on a star-shaped graph with nonlocal matching condition. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 2023, vol. 29, art. 2. <https://doi.org/10.1007/s40590-022-00476-x>
13. Albeverio S., Hryniv R. O., Nizhnik L. P. Inverse spectral problems for non-local Sturm – Liouville operators. *Inverse Problems*, 2007, vol. 23, iss. 2, art. 523. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/23/2/005>
14. Nizhnik L. P. Inverse nonlocal Sturm – Liouville problem. *Inverse Problems*, 2010, vol. 26, iss. 12, art. 125006. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/26/12/125006>
15. Bondarenko N. P., Buterin S. A., Vasiliev S. V. An inverse spectral problem for Sturm – Liouville operators with frozen argument. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, vol. 472, iss. 1, pp. 1028–1041. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.11.062>



16. Buterin S. A., Vasiliev S. V. On recovering a Sturm – Liouville-type operator with the frozen argument rationally proportioned to the interval length. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2019, vol. 27, iss. 3, pp. 429–438. <https://doi.org/10.1515/jiip-2018-0047>
17. Buterin S., Kuznetsova M. On the inverse problem for Sturm – Liouville-type operators with frozen argument: Rational case. *Computational and Applied Mathematics*, 2020, vol. 39, art. 5. <https://doi.org/10.1007/s40314-019-0972-8>
18. Wang Y.-P., Zhang M., Zhao W., Wei X. Reconstruction for Sturm – Liouville operators with frozen argument for irrational cases. *Applied Mathematics Letters*, 2021, vol. 111, art. 106590. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106590>
19. Buterin S., Hu Y.-T. Inverse spectral problems for Hill-type operators with frozen argument. *Analysis and Mathematical Physics*, 2021, vol. 11, art. 75. <https://doi.org/10.1007/s13324-021-00500-9>
20. Tsai T.-M., Liu H.-F., Buterin S., Chen L.-H., Shieh C.-T. Sturm – Liouville-type operators with frozen argument and Chebyshev polynomials. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2022, vol. 45, iss. 16, pp. 9635–9652. <https://doi.org/10.1002/mma.8327>
21. Kuznetsova M. A. Inverse problem for the Sturm – Liouville operator with a frozen argument on the time scale. *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory* [Progress in Science and Technology. Contemporary Mathematics and Its Applications. Thematic Surveys], 2022, vol. 208, pp. 49–62 (in Russian). <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-208-49-62>, EDN: JVRUQD
22. Kuznetsova M. Necessary and sufficient conditions for the spectra of the Sturm – Liouville operators with frozen argument. *Applied Mathematics Letters*, 2022, vol. 131, art. 108035. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108035>
23. Doboševych O., Hryniv R. Reconstruction of differential operators with frozen argument. *Axioms*, 2022, vol. 11, iss. 1, art. 24. <https://doi.org/10.3390/axioms11010024>
24. Bondarenko N. P. Finite-difference approximation of the inverse Sturm – Liouville problem with frozen argument. *Applied Mathematics and Computation*, 2022, vol. 413, art. 126653. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126653>
25. Kuznetsova M. Uniform stability of recovering the Sturm – Liouville operators with frozen argument. *Results in Mathematics*, 2023, vol. 78, iss. 5, pp. 169. <https://doi.org/10.1007/s00025-023-01945-z>
26. Kraal A. M. The development of general differential and general differential-boundary systems. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1975, vol. 5, iss. 4, pp. 493–542. <https://doi.org/10.1216/RMJ-1975-5-4-493>
27. Lomov I. S. Loaded differential operators: Convergence of spectral expansions. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, pp. 1070–1079. <https://doi.org/10.1134/S0012266114080060>
28. Lomov I. S. *Spectral method of V. A. Ilyin. Non-self-adjoint operators. I. The operator of the second order. Basis and uniform convergence of spectral decompositions*. Moscow, MAKSPress, 2019. 132 p. (in Russian). EDN: AVUERZ
29. Feller W. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations. *Annals of Mathematics*, 1952, vol. 55, iss. 3, pp. 468–519. <https://doi.org/10.2307/1969644>
30. Feller W. Diffusion processes in one dimension. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1954, vol. 77, pp. 1–31. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1954-0063607-6>
31. Gordeziani N. On some non-local problems of the theory of elasticity. *Bulletin of TICMI*, 2000, vol. 4, pp. 43–46. Available at: <https://emis.univie.ac.at/journals/TICMI/vol4/natogtic.ps> (accessed April 28, 2023).
32. Szymańska-Debowska K. On the existence of solutions for nonlocal boundary value problems. *Georgian Mathematical Journal*, 2015, vol. 22, iss. 2, pp. 273–279. <https://doi.org/10.1515/gmj-2015-0005>
33. Polyakov D. M. Nonlocal perturbation of a periodic problem for a second-order differential operator. *Ordinary Differential Equations*, 2021, vol. 57, iss. 1, pp. 11–18. <https://doi.org/10.1134/S001226612101002X>
34. Shkalikov A. A. The completeness of eigenfunctions and associated functions of an ordinary differential operator with irregular-separated boundary conditions. *Functional Analysis and Its Applications*, 1976, vol. 10, iss. 4, pp. 305–316. <https://doi.org/10.1007/BF01076030>
35. Naimark M. A. *Linear differential operators*. Moscow, Fizmatlit, 2010. 528 p. (in Russian). EDN: RYRSP

Поступила в редакцию / Received 16.05.2023

Принята к публикации / Accepted 29.05.2023

Опубликована / Published 29.11.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 498–511

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 498–511
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-498-511>, EDN: HKTFQO

Научная статья
УДК 517.988.63

Вопросы существования и единственности решения одного класса бесконечной системы нелинейных двумерных уравнений

А. С. Петросян^{1✉}, С. М. Андриян¹, Х. А. Хачатрян²

¹Национальный аграрный университет Армении, Армения, 0009, г. Ереван, ул. Теряна, д. 74

²Ереванский государственный университет, Армения, 0025, г. Ереван, ул. А. Манукяна, д. 1

Петросян Айкануш Самвеловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, физики и прикладной механики, Haykuhi25@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7172-4730>

Андриян Сильва Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, физики и прикладной механики, smandriyan@hotmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-6854-1127>

Хачатрян Хачатур Агавардович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории функций и дифференциальных уравнений, khachatur.khachatryan@ysu.am, <https://orcid.org/0000-0002-4835-943X>, AuthorID: 589262

Аннотация. Работа посвящена исследованию одного класса бесконечных систем нелинейных двумерных уравнений с выпуклой и монотонной нелинейностью. Данный класс нелинейных систем уравнений имеет как теоретическую, так и практическую значимость, в частности, при изучении дискретных аналогов задач динамической теории p -адических открыто-замкнутых струн, кинетической теории газов, математической биологии при исследовании пространственно-временного распределения эпидемии. Доказаны теоремы существования и единственности положительного решения в определённом классе неотрицательных и ограниченных матриц. Выявлены некоторые качественные свойства решения. Доказанные результаты дополняют и обобщают некоторые ранее полученные авторами утверждения. Приведены наглядные примеры соответствующих матриц и нелинейностей (в том числе и прикладного характера), удовлетворяющих всем условиям сформулированных теорем.

Ключевые слова: бесконечная матрица, нелинейность, выпуклость, последовательные приближения, монотонность, единственность

Благодарности: Работа третьего автора выполнена при финансовой поддержке Комитета по науке Республики Армения (проект № 23RL-1A027).

Для цитирования: Петросян А. С., Андриян С. М., Хачатрян Х. А. Вопросы существования и единственности решения одного класса бесконечной системы нелинейных двумерных уравнений // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 498–511. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-498-511>, EDN: HKTFQO
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Questions of existence and uniqueness of the solution of one class of an infinite system of nonlinear two-dimensional equations

H. S. Petrosyan^{1✉}, S. M. Andriyan¹, Kh. A. Khachatryan²

¹Armenian National Agrarian University, 74 Teryan St., Yerevan 0009, Armenia

²Yerevan State University, 1 A. Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia



Haykanush S. Petrosyan, Haykuhi25@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7172-4730>

Silva M. Andriyan, smandriyan@hotmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-6854-1127>

Khachatur A. Khachatryan, khachatur.khachatryan@ysu.am, <https://orcid.org/0000-0002-4835-943X>, AuthorID: 589262

Abstract. The paper is devoted to the study of one class of infinite systems of nonlinear two-dimensional equations with convex and monotone nonlinearity. The studied class of nonlinear systems of algebraic equations has both theoretical and practical significance, in particular, in the study of discrete analogs of problems in dynamic theory of p -adic open-closed strings, in the kinetic theory of gases, in mathematical biology in the study of space-time distribution of epidemics. Existence and uniqueness theorems for a positive solution in a certain class of non-negative and bounded matrices are proved. Some qualitative properties of the solution are revealed. The obtained results supplement and generalize some of the previously obtained ones. Illustrative examples of the corresponding matrices and nonlinearities (including those of an applied nature) that satisfy all the conditions of the formulated theorems are given.

Keywords: infinite matrix, nonlinearity, convexity, successive approximations, monotonicity, uniqueness

Acknowledgements: The work of the third author was supported by the Science Committee of the Republic of Armenian (project No. 23RL-1A027).

For citation: Petrosyan H. S., Andriyan S. M., Khachatryan Kh. A. Questions of existence and uniqueness of the solution of one class of an infinite system of nonlinear two-dimensional equations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 498–511 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-498-511>, EDN: HKTFOQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Рассматривается следующая бесконечная система нелинейных двумерных уравнений:

$$Q(x_{mn}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} P_{ij} x_{ij}, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2 := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad (1)$$

относительно элементов бесконечной матрицы $X = (x_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ в предположении, что

$$a_{\ell t} > 0, \quad (\ell, t) \in \mathbb{Z}^2, \quad \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_{\ell t} = 1, \quad (2)$$

$$a_{\ell t} = a_{t\ell}, \quad (\ell, t) \in \mathbb{Z}^2, \quad a_{-pt} = a_{pt}, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

$$P_{ij} > 1, \quad P_{ij} = P_{ji}, \quad (i, j) \in \mathbb{Z}^2, \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1) < \infty, \quad (4)$$

$$Q(0) = 0, \quad Q \in C(\mathbb{R}^+), \quad \mathbb{R}^+ := [0, \infty), \quad (5)$$

$$Q \text{ — функция, строго выпуклая вниз и монотонно возрастающая на } \mathbb{R}^+, \quad (6)$$

$$\text{существует число } \eta > 0 \text{ такое, что } Q(\eta) = \eta. \quad (7)$$

Рассматриваемый класс систем уравнений (1) находит применение в различных областях математической физики и математической биологии. В приложениях этот класс наиболее часто встречается в дискретных аналогах задач динамической теории p -адических открыто-замкнутых струн, кинетической теории газов, теории пространственно-временного моделирования эпидемии (см., например, [1–15] и ссылки в них). Изучению решения указанных задач в непрерывных случаях посвящены, например, работы [1, 4, 13, 16–18], в которых при определённых условиях доказаны теоремы существования и единственности положительного и ограниченного решения, а также изучены их асимптотические свойства.



Следует отметить, что решению систем бесконечных нелинейных алгебраических уравнений для отмеченных выше задач посвящены, например, работы [19–21].

Так, в работе [19] изучен один класс бесконечных систем алгебраических уравнений с монотонной и выпуклой вверх на $\mathbb{R}^+$ нелинейностью G и матрицами $A = (\tilde{a}_{n-j})_{n,j \in \mathbb{Z}}$ типа Теплица:

$$x_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_{n-j}(G(x_j) + h_j(x_j)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

относительно искомого бесконечного вектора $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)^T$ (T — знак транспонирования), где последовательность монотонных непрерывных на $\mathbb{R}^+$ вещественных функций $(h_j(u))_{j \in \mathbb{Z}}$ удовлетворяет определённым условиям (см. [19]).

Ранее система уравнений (8) на $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ была исследована в [20], а в работе [21] при $h_j \equiv 0$ ($j \in \mathbb{Z}$) был изучен её двумерный аналог.

Отметим, что в [21], в отличие от настоящей работы, подробно исследован один класс системы вида (1) при

$$Q(X) = cX_{cube} + (1 - c)X, \quad a_{m-i}n-j = \tilde{a}_{m-i} \cdot \tilde{b}_{n-j}, \quad P_{ij} \equiv 1, \quad m, n, i, j \in \mathbb{Z},$$

где $X_{cube} = (x_{mn}^3)_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ — матрица с соответствующими элементами искомой матрицы $X = (x_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$, возведёнными в куб, числовые последовательности $\{\tilde{a}_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ и $\{\tilde{b}_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}$, удовлетворяют определённым условиям, $c \in (0, 1]$ — числовой параметр.

Следует также отметить, что в линейном и одномерном случае система (1) достаточно подробно исследована в работах [22–25].

В настоящей работе исследуемый класс систем уравнений (1) рассматривается на всей плоскости целочисленной решётки $\mathbb{Z}^2$ с общей монотонной и выпуклой вниз нелинейностью Q и с общими матрицами $A = (a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ и $P = (P_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$, удовлетворяющими условиям (5)–(7) и (2)–(4) соответственно. Исследуются вопросы существования и единственности нетривиального решения нелинейной системы (1) в классе неотрицательных и ограниченных бесконечных матриц. Выявляются некоторые качественные свойства построенного решения. Применяя и развивая ранее предложенные методы, доказываются конструктивная теорема существования положительного решения, а также теорема единственности в указанном классе матриц. Результаты, полученные в этой статье, дополняют и обобщают некоторые ранее полученные факты авторов (см. [21]). В конце работы для иллюстрации важности полученных результатов приводятся конкретные примеры соответствующих матриц и нелинейностей, удовлетворяющих всем условиям сформулированных теорем и имеющих как прикладной, так и теоретический интерес.

1. Вспомогательные факты

Решение нелинейной системы уравнений (1) будем искать в следующем классе бесконечных матриц:

$$\mathcal{T} = \left\{ (x_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} : x_{mn} \geq 0, (m, n) \in \mathbb{Z}^2; \sup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} x_{mn} < \infty \text{ и } \exists r \in \mathbb{N} \text{ s.t. } c_r > 0 \right\}, \quad (9)$$

где

$$c_r := \inf_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus B_r} x_{mn}; \quad B_r := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : |m| \leq r, |n| \leq r\}.$$

Прежде чем переходить к решению системы (1), установим два вспомогательных результата, которые мы будем использовать в дальнейшем.



Лемма 1. При условиях (2)–(7) для любого решения $X = (x_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \in \mathcal{T}$ нелинейной системы вида (1) имеет место следующая оценка снизу:

$$\chi := \inf_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} x_{mn} > Q^{-1}(\alpha_r), \quad \alpha_r := c_r \sum_{\ell=r+1}^{\infty} \sum_{t=r+1}^{\infty} a_{\ell t} > 0, \quad (10)$$

где Q^{-1} — обратная функция к функции Q .

Доказательство. По условиям леммы 1

$$\begin{aligned} Q(x_{mn}) &\geq \sum_{i=-\infty}^{-(r+1)} \sum_{j=-\infty}^{-(r+1)} a_{m-i, n-j} x_{ij} + \sum_{i=-\infty}^{-(r+1)} \sum_{j=r+1}^{\infty} a_{m-i, n-j} x_{ij} + \sum_{i=r+1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{-(r+1)} a_{m-i, n-j} x_{ij} + \\ &+ \sum_{i=r+1}^{\infty} \sum_{j=r+1}^{\infty} a_{m-i, n-j} x_{ij} \geq c_r \left(\sum_{\ell=-\infty}^{-(m+r+1)} \sum_{t=-\infty}^{-(n+r+1)} a_{\ell t} + \sum_{\ell=-\infty}^{-(m+r+1)} \sum_{t=r+1-n}^{\infty} a_{\ell t} + \right. \\ &\left. + \sum_{\ell=r+1-m}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{-(n+r+1)} a_{\ell t} + \sum_{\ell=r+1-m}^{\infty} \sum_{t=r+1-n}^{\infty} a_{\ell t} \right) := \sigma_{mn}, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

Плоскость целочисленной решётки $\mathbb{Z}^2$ разобьём на четыре части:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m \geq 0, n \geq 0\}, \quad \Pi_2 = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m < 0, n > 0\}, \\ \Pi_3 &= \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m \leq 0, n \leq 0\}, \quad \Pi_4 = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : m > 0, n < 0\}. \end{aligned}$$

На каждом из множеств Π_i ($i = 1, 2, 3, 4$) оценим снизу вышеопределённые элементы бесконечной матрицы $(\sigma_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$:

- если $(m, n) \in \Pi_1$, то $\sigma_{mn} \geq c_r \sum_{\ell=r+1}^{\infty} \sum_{t=r+1}^{\infty} a_{\ell t} = \alpha_r > 0$;
- если $(m, n) \in \Pi_2$, то $\sigma_{mn} \geq c_r \sum_{\ell=-\infty}^{-(r+1)} \sum_{t=r+1}^{\infty} a_{\ell t} = c_r \sum_{\ell=r+1}^{\infty} \sum_{t=r+1}^{\infty} a_{\ell t} = \alpha_r$;
- если $(m, n) \in \Pi_3$, то $\sigma_{mn} \geq c_r \sum_{\ell=-\infty}^{-(r+1)} \sum_{t=-\infty}^{-(r+1)} a_{\ell t} = \alpha_r$;
- если $(m, n) \in \Pi_4$, то $\sigma_{mn} \geq c_r \sum_{\ell=r+1}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{-(r+1)} a_{\ell t} = \alpha_r$.

Так как $\bigcup_{i=1}^4 \Pi_i = \mathbb{Z}^2$, то для всех пар $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ имеем $\sigma_{mn} \geq \alpha_r > 0$. Принимая во внимание свойства (5) и (6) функции Q , описывающей нелинейность системы уравнений (1), получим $x_{mn} \geq Q^{-1}(\alpha_r) > 0 \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Следовательно, по определению инфимума приходим к неравенству (10). Лемма доказана. $\square$

Используя этот факт, мы докажем, что на самом деле для элементов матрицы $X = (x_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ имеет место более точное неравенство.

Лемма 2. При выполнении условий леммы 1 для любого решения $X = (x_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \in \mathcal{T}$ нелинейной системы (1) имеет место следующая оценка:

$$\chi \geq \eta.$$

Доказательство. Действительно, согласно определению χ и условий (2), (4) из (1) получим

$$Q(x_{mn}) \geq \chi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} = \chi, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2,$$



откуда следует, что $x_{mn} \geq Q^{-1}(\chi)$ ($m, n \in \mathbb{Z}^2$). Тогда по определению инфимума получим $\chi \geq Q^{-1}(\chi)$ или

$$Q(\chi) \geq \chi. \quad (11)$$

Заметим, что из последнего неравенства следует, что $\chi \geq \eta$. Действительно, в противном случае с учётом монотонности функции $\frac{Q(u)}{u}$ на $(0, +\infty)$ будем иметь

$$\frac{Q(\chi)}{\chi} < \frac{Q(\eta)}{\eta} = 1,$$

что невозможно ввиду (11). Таким образом, лемма доказана. $\square$

2. Существование решения систем уравнений вида (1)

Перейдём к построению решения и выявлению основных его свойств. Рассмотрим следующие итерации:

$$Q(x_{mn}^{(k+1)}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} P_{ij} x_{ij}^{(k)}, \quad (12)$$

$$x_{mn}^{(0)} \equiv \eta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2. \quad (13)$$

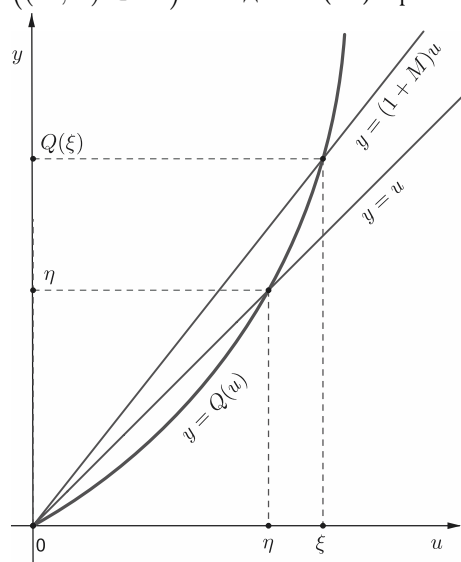
Установим несколько важных свойств, характеризующих итерационные матрицы. Сначала докажем *монотонность итераций* по k :

$$x_{mn}^{(k)} \uparrow \text{ по } k, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2. \quad (14)$$

С учётом (13), (4), (2) и (7) из (12) при $k = 0$ будем иметь

$$Q(x_{mn}^{(1)}) = \eta \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} P_{ij} \geq \eta = Q(x_{mn}^{(0)}), \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Предположим, что при некотором натуральном $k = s$ имеют место неравенства $x_{mn}^{(s)} \geq x_{mn}^{(s-1)}$ ($(m, n) \in \mathbb{Z}^2$). Тогда из (12) при $k = s + 1$ получим



$$Q(x_{mn}^{(s+1)}) \geq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} P_{ij} x_{ij}^{(s-1)} = Q(x_{mn}^{(s)}), \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Откуда ввиду условий (5) и (6) приходим к неравенствам $x_{mn}^{(s+1)} \geq x_{mn}^{(s)}$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Следовательно, монотонность итераций по k доказана.

Теперь докажем *ограниченность итераций* по k . С учётом (2) и (4) положим

$$M := \left(\sup_{i, j \in \mathbb{Z}} a_{ij} \right) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1). \quad (15)$$

Пусть ξ — абсцисса точки пересечения прямой $y = (1 + M)u$ и кривой $y = Q(u)$, существование которой вытекает непосредственно из (5)–(7) (рис. 1):

$$Q(\xi) = (1 + M)\xi. \quad (16)$$

Рис. 1. Эскизы графиков функций $y = (1 + M)u$ и $y = Q(u)$ на $\mathbb{R}^+$
Fig. 1. Sketches of function graphs $y = (1 + M)u$ and $y = Q(u)$ on $\mathbb{R}^+$



Учитывая условия (5)–(7), несложно проверить, что $\xi > \eta$.
Применением индукции по k покажем, что

$$x_{mn}^{(k)} < \xi, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

При $k = 0$ неравенства (17) выполняются автоматически. Пусть (17) имеет место при некотором $s \in \mathbb{N}$. Тогда, имея в виду индукционное предположение и (2), (4), (15), (16), из (12) будем иметь

$$\begin{aligned} Q(x_{mn}^{(s+1)}) &< \xi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} P_{ij} = \\ &= \xi \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} (P_{ij} - 1) + \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_{\ell t} \right) \leq \xi(M+1) = Q(\xi), \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

Применением обратной функции Q^{-1} приходим к утверждению (17) при $k = s + 1$, откуда вытекает ограниченность итераций по k .

Следовательно, построенные посредством итераций (12) и (13) элементы матриц ограничены как снизу, так и сверху:

$$\eta \leq x_{mn}^{(k)} < \xi, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Таким образом, последовательность матриц $\left\{ (x_{mn}^{(k)})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \right\}_{k=0}^{\infty}$ при каждой фиксированной паре $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ имеет предел, когда $k \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{mn}^{(k)} = x_{mn}, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Так как $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} P_{ij} x_{ij}^{(k)} \leq \xi(M+1) \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2$ и $Q \in C(\mathbb{R}^+)$, то предельная матрица $X = (x_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ удовлетворяет нелинейной системе уравнений (1). Более того, в силу (18) имеют место двойные оценки:

$$\eta \leq x_{mn} \leq \xi, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2. \quad (19)$$

Замечание 1. На самом деле в левой части (19) имеют место строгие неравенства

$$x_{mn} > \eta, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2. \quad (20)$$

Действительно,

$$Q(x_{mn}) \geq \eta \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} P_{ij} > \eta, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2,$$

откуда имеем

$$x_{mn} > Q^{-1}(\eta) = \eta, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Таким образом, согласно (19) и (20) имеем

$$\eta < x_{mn} \leq \xi, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2. \quad (21)$$

Замечание 2. Отметим также, что для элементов последовательности матриц

$$\left\{ (x_{mn}^{(k)})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \right\}_{k=0}^{\infty},$$



начиная с номера $k = 1$, имеют место строгие неравенства

$$x_{mn}^{(k)} > \eta, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Действительно, ввиду монотонности $x_{mn}^{(k)}$ по k (см. (14)), (2), (4) и (5)–(7) имеем

$$x_{mn}^{(k)} \geq Q^{-1} \left(\eta \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} P_{ij} \right) > \eta, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Далее, покажем существование такого числа $C > 0$, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn}^{(k)} - \eta) \leq C, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Сначала индукцией по k докажем сходимость ряда

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn}^{(k)} - \eta) < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

При $k = 0$ утверждение (23) вытекает непосредственно из определения нулевого приближения (13). Пусть (23) имеет место при некотором $k \in \mathbb{N}$. Тогда, имея в виду (2), (4), (17) и индукционное предположение, из (12) при $k + 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} 0 < Q(x_{mn}^{(k+1)}) - \eta &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} (P_{ij} - 1) x_{ij}^{(k)} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} (x_{ij}^{(k)} - \eta) \leq \\ &\leq \xi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} (P_{ij} - 1) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} (x_{ij}^{(k)} - \eta), \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned} \quad (24)$$

(неравенства $Q(x_{mn}^{(k)}) > \eta$ имеют место ввиду (21) и монотонности функции Q). Так как правая часть неравенства (24) является элементом сходящегося ряда, то по признаку сравнения сходящихся рядов с учётом (2), (4) и индукционного предположения получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (Q(x_{mn}^{(k+1)}) - \eta) \leq \xi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (x_{ij}^{(k)} - \eta) < \infty. \quad (25)$$

С другой стороны, на основании замечания 2 и (5)–(7) для всякого $\varepsilon \in (0, 1)$ имеют место оценки (рис. 2):

$$\frac{Q(x_{mn}^{(k+1)}) - \eta}{x_{mn}^{(k+1)} - \eta} \geq \frac{\eta - Q(\varepsilon\eta)}{\eta - \varepsilon\eta} > 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2. \quad (26)$$

В результате использования оценки (26) неравенство (25) примет вид

$$\frac{\eta - Q(\varepsilon\eta)}{(1 - \varepsilon)\eta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn}^{(k+1)} - \eta) \leq \xi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (x_{ij}^{(k)} - \eta), \quad (27)$$

из которого следует сходимость ряда (23) при $k + 1$, а следовательно, справедливость (23).

Учитывая монотонность по k последовательности $\left\{ (x_{mn}^{(k)})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \right\}_{k=0}^{\infty}$, из (27) получим

$$\frac{\varepsilon\eta - Q(\varepsilon\eta)}{(1 - \varepsilon)\eta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn}^{(k+1)} - \eta) \leq \xi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1),$$

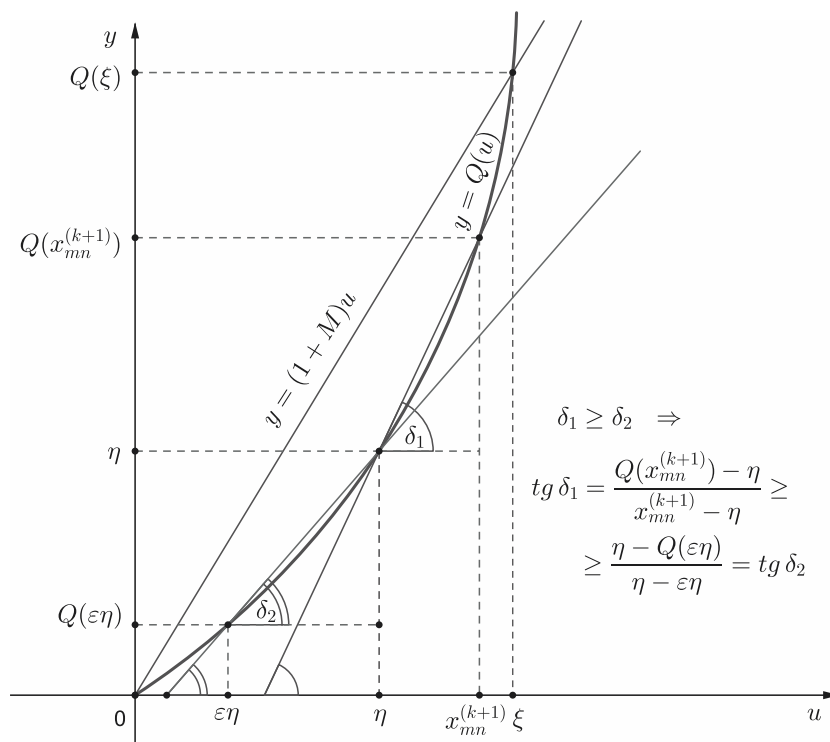


Рис. 2. Эскиз графика функции $y = Q(u)$ на $[0, \xi]$

Fig. 2. Sketch of function graph $y = Q(u)$ on $[0, \xi]$

откуда вытекает справедливость утверждения (22):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn}^{(k+1)} - \eta) \leq \frac{(1-\varepsilon)\eta\xi}{\varepsilon\eta - Q(\varepsilon\eta)} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1) := C < +\infty.$$

Устремляя $k \rightarrow \infty$, получаем главный вывод из вышеприведённых рассуждений: двойной ряд, составленный из разности элементов предельной матрицы $X = (x_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ и числа η , удовлетворяет следующей оценке:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) \leq \frac{(1-\varepsilon)\eta\xi}{\varepsilon\eta - Q(\varepsilon\eta)} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1), \quad (28)$$

и, следовательно, ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) < \infty \quad (29)$$

сходится.

Предварительно отметим, что основываясь на этом факте, ниже мы докажем теорему единственности решения.

Итак, на основании изложенного выше и утверждения леммы 2 справедлива следующая теорема.

Теорема 1. В условиях леммы 2 нелинейная система уравнений вида (1) имеет положительное решение $X = (x_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$. Более того, элементы матрицы X обладают свойствами (21) и (28).

3. Единственность решения системы уравнений (1)

Перейдём к изучению вопроса единственности решения системы уравнений (1) в классе Т. Справедлива следующая теорема.



Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда в классе T нелинейная система уравнений вида (1) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим обратное: пусть в классе T система (1) имеет два различных решения $X = (x_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ и $\tilde{X} = (\tilde{x}_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$: $X, \tilde{X} \in T$ и $X \neq \tilde{X}$. Следовательно, для рассматриваемых матриц имеем следующее подмножество пар целых индексов:

$$\mathcal{E} := \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : X = (x_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}, \tilde{X} = (\tilde{x}_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \in T \text{ и } x_{mn} \neq \tilde{x}_{mn}\} \neq \emptyset. \quad (30)$$

Согласно (1) имеем

$$|Q(x_{mn}) - Q(\tilde{x}_{mn})| \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} P_{ij} |x_{ij} - \tilde{x}_{ij}|. \quad (31)$$

Покажем равномерную сходимость ряда правой части неравенства (31). Имея в виду (9), (2) и (15), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} P_{ij} |x_{ij} - \tilde{x}_{ij}| &\leq \left(\sup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} x_{ij} + \sup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \tilde{x}_{ij} \right) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} P_{ij} \leq \\ &\leq \left(\sup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} x_{ij} + \sup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \tilde{x}_{ij} \right) \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} (P_{ij} - 1) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} \right) \leq \\ &\leq \left(\sup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} x_{ij} + \sup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \tilde{x}_{ij} \right) (M + 1) := C_0 < \infty. \end{aligned} \quad (32)$$

Далее, покажем сходимость ряда $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) P_{mn}$. Действительно, на основании (19), (4) и (29) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) P_{mn} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) (P_{mn} - 1) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) \leq \\ &\leq (\xi - \eta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (P_{mn} - 1) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) < \infty, \end{aligned}$$

откуда ввиду (32) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) P_{mn} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} P_{ij} |x_{ij} - \tilde{x}_{ij}| < +\infty. \quad (33)$$

Умножим обе части неравенства (31) на $(x_{mn} - \eta) P_{mn} > 0$ (или на $(\tilde{x}_{mn} - \eta) P_{mn} > 0$) и на основании (33) просуммируем по всем индексам m и n от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда с учётом (3), (1) и (2) получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) P_{mn} |Q(x_{mn}) - Q(\tilde{x}_{mn})| \leq \\ &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) P_{mn} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i, n-j} P_{ij} |x_{ij} - \tilde{x}_{ij}| = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_{ij} |x_{ij} - \tilde{x}_{ij}| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{i-m, j-n} P_{mn} (x_{mn} - \eta) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_{ij} |x_{ij} - \tilde{x}_{ij}| \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{i-m} j_{-n} P_{mn} x_{mn} - \eta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{i-m} j_{-n} \right) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_{ij} |x_{ij} - \tilde{x}_{ij}| (Q(x_{ij}) - \eta). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{mn} \left((x_{mn} - \eta) |Q(x_{mn}) - Q(\tilde{x}_{mn})| - (Q(x_{mn}) - \eta) |x_{mn} - \tilde{x}_{mn}| \right) \leq 0. \quad (34)$$

Следовательно, в силу определения множества $\mathcal{E}$ (см. (30)) и с учётом (20) можно (34) записать в виде

$$\sum_{(m,n) \in \mathcal{E}} P_{mn} (x_{mn} - \eta) |x_{mn} - \tilde{x}_{mn}| \left(\left| \frac{Q(x_{mn}) - Q(\tilde{x}_{mn})}{x_{mn} - \tilde{x}_{mn}} \right| - \frac{Q(x_{mn}) - \eta}{x_{mn} - \eta} \right) \leq 0. \quad (35)$$

Опираясь на свойства функции Q , несложно убедиться (рис. 3), что

$$\left| \frac{Q(x_{mn}) - Q(\tilde{x}_{mn})}{x_{mn} - \tilde{x}_{mn}} \right| - \frac{Q(x_{mn}) - \eta}{x_{mn} - \eta} > 0.$$

С учётом последнего неравенства в (35) приходим к противоречию. Следовательно, $X \equiv \tilde{X}$. $\square$

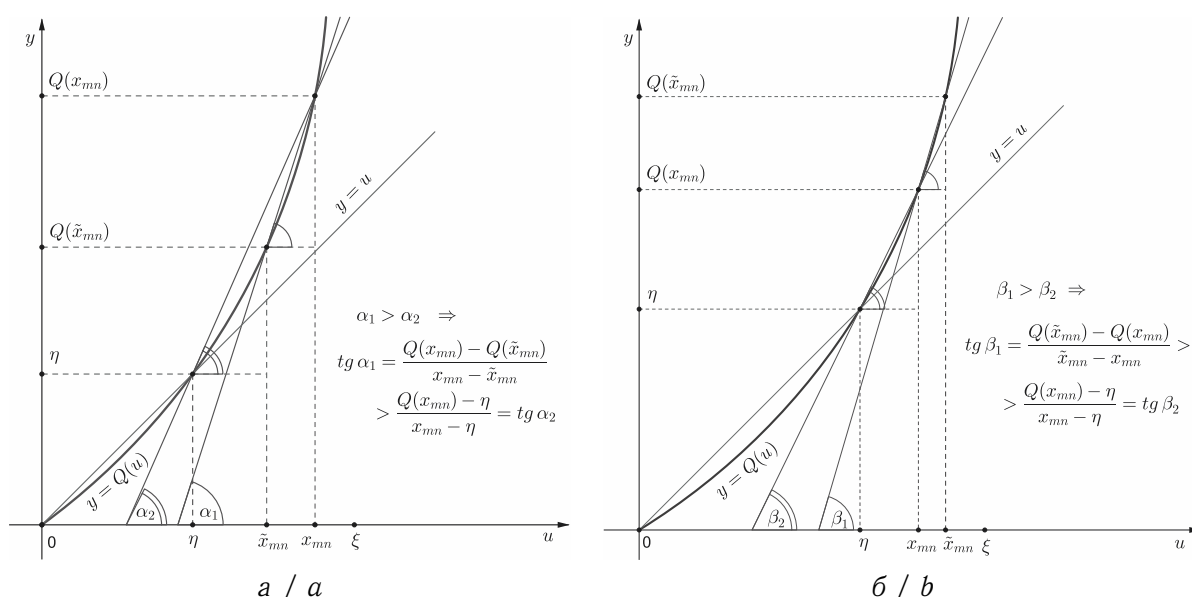


Рис. 3. Пересечение графика функции $y = Q(u)$ с прямыми, проходящими через точки $(x_{mn}, Q(x_{mn}))$, (η, η) , $(\tilde{x}_{mn}, Q(\tilde{x}_{mn}))$: а — $x_{mn} > \tilde{x}_{mn}$; б — $x_{mn} < \tilde{x}_{mn}$

Fig. 3. The intersection of the graph of the function $y = Q(u)$ with straight lines passing through the points $(x_{mn}, Q(x_{mn}))$, (η, η) , $(\tilde{x}_{mn}, Q(\tilde{x}_{mn}))$: а is $x_{mn} > \tilde{x}_{mn}$; б is $x_{mn} < \tilde{x}_{mn}$

4. Примеры

Действенность полученных теорем проиллюстрируем несколькими примерами матриц $A = (a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ и $P = (P_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ и функции Q , описывающей нелинейность системы уравнений (1), удовлетворяющих всем условиям сформулированных теорем.

- Примеры матрицы $(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$:

$$(A_1). \quad a_{mn} = \frac{(e-1)^4}{4e^2} e^{-|m|-|n|}, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2;$$



$$(A_2). a_{mn} = (\Theta_3(0, \frac{1}{e}))^{-2} e^{-|m|^2 - |n|^2}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \Theta_3(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2niz} \quad (|q| < 1) -$$

тета-функция Якоби (рис. 4);

$$(A_3). a_{mn} = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2 q^{|m|+|n|}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2, 0 < q < 1 - \text{произвольное число};$$

$$(A_4). a_{mn} = (2e^r - 1)^{-2} \frac{r^{|m|+|n|}}{|mn|!}, a_{mn} = (2\sqrt{e} - 1)^{-2} \frac{r^{-|m|-|n|}}{|mn|!}, a_{mn} = (e^r + \sqrt{e} - 1)^{-2} \frac{r^{m+n}}{|mn|!},$$

$(m, n) \in \mathbb{Z}^2, r > 0$ — произвольное число;

$$(A_5). a_{mn} = \frac{\text{th}^2(\pi)}{\pi^2} \frac{1}{(1+m^2)(1+n^2)}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \text{th}(\pi) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{e^\pi + e^{-\pi}};$$

$$(A_6). a_{mn} = (2 \cdot \zeta(2k) - 1)^{-2} (1 + |m|)^{-2k} (1 + |n|)^{-2k}, (m, n) \in \mathbb{Z}^2, k > \frac{1}{2} - \text{произвольное число, } \zeta - \text{дзета-функция Римана.}$$

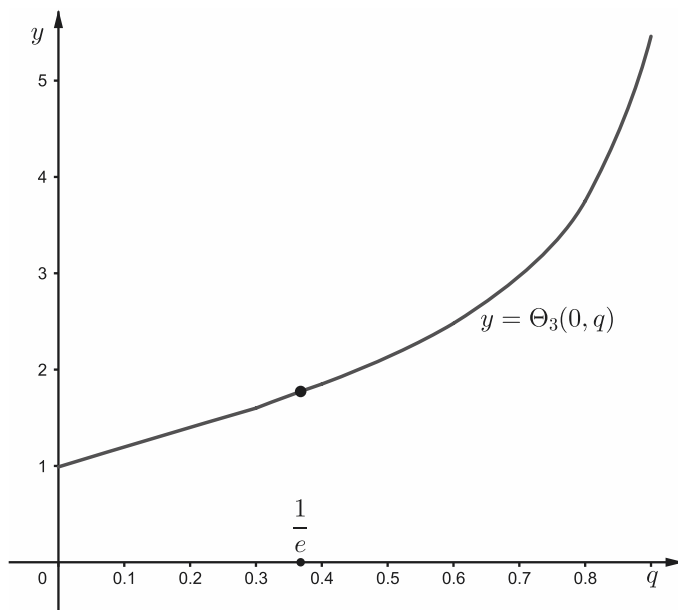


Рис. 4. График функции $y = \Theta_3(0, q)$ на $[0, 0.9]$
Fig. 4. Graph of the function $y = \Theta_3(0, q)$ on $[0, 0.9]$

Остановимся на примере (A_6) . Первое условие в (2) и условия в (3) автоматически выполняются. Покажем, что имеет место и второе условие в (2). Для этого достаточно убедиться, что $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|m|)^{2k}} = 2\zeta(2k) - 1, k > \frac{1}{2}$.

Действительно, при $k > \frac{1}{2}$ имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|m|)^{2k}} = 1 + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+p)^{2k}} = 1 + 2 \left(\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s^{2k}} - 1 \right) = 2\zeta(2k) - 1.$$

• Примеры матрицы $(P_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$:

$$(P_1). P_{ij} = 1 + |ij|^\alpha e^{-|i|-|j|}, (i, j) \in \mathbb{Z}^2, \alpha > 0 - \text{произвольное число};$$

$$(P_2). P_{ij} = 1 + e^{-|i|^2 - |j|^2}, (i, j) \in \mathbb{Z}^2;$$

$$(P_3). P_{ij} = 1 + \frac{1}{(1+i^2)(1+j^2)}, (i, j) \in \mathbb{Z}^2;$$

$$(P_4). P_{ij} = 1 + \frac{1}{(1+i^2+j^2)^\alpha}, (i, j) \in \mathbb{Z}^2, \alpha > 1 - \text{произвольное число};$$

$$(P_5). P_{ij} = 1 + \frac{1}{|ij|!}, (i, j) \in \mathbb{Z}^2.$$

• Примеры нелинейности Q :

$$(Q_1). Q(u) = u^p, u \in \mathbb{R}^+, \text{ где } p \geq 2 - \text{произвольное число};$$

$$(Q_2). Q(u) = cu^p + (1-c)u, u \in \mathbb{R}^+, \text{ где } c \in (0, 1] - \text{числовой параметр и } p \geq 2 - \text{произвольное число};$$



(Q_3). $Q(u) = \delta^u - 1$, $u \in \mathbb{R}^+$, где $\delta > 1$ — произвольное число;

(Q_4). $Q(u) = u^p \ln(u + 1)$, $u \in \mathbb{R}^+$, где $p \geq 2$ — произвольное число.

Список литературы

1. Владимиров В. С., Волович Я. И. О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны // Теоретическая и математическая физика. 2004. Т. 138, № 3. С. 355–368. <https://doi.org/10.4213/tmf36>
2. Владимиров В. С. О нелинейных уравнениях p -адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн // Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 149, № 3. С. 354–367. <https://doi.org/10.4213/tmf5522>
3. Жуковская Л. В. Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 146, № 3. С. 402–409. <https://doi.org/10.4213/tmf2043>
4. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // Journal of Mathematical Biology. 1978. Vol. 6, iss. 2. P. 109–130. <https://doi.org/10.1007/BF02450783>
5. Danchenko V. I., Rubay R. V. On integral equations of stationary distributions for biological systems // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 171, iss. 1. P. 34–45. <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0124-6>
6. Cercignani C. Theory and application of the Boltzmann equation. Edinburgh : Scottish Academic Press ; London : Distributed by Chatto and Windus, 1975. 415 p.
7. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. Москва : Наука, 1967. 440 с.
8. Villani C. Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true // Communications in Mathematical Physics. 2003. Vol. 234, iss. 3, pp. 455–490. <https://doi.org/10.1007/s00220-002-0777-1>
9. Латышев А. В., Юшканов А. А. Аналитическое описание скин-эффекта в металле с использованием двухпараметрического кинетического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 10. С. 1861–1872. <https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf767>
10. Barichello L. B., Siewert C. E. The temperature-jump problem in rarefied gas dynamics // European Journal of Applied Mathematics. 2000. Vol. 11, iss. 4. P. 353–534. <https://doi.org/10.1017/S0956792599004180>
11. Moeller N., Schnabl M. Tachyon condensation in open-closed p -adic string theory // Journal of High Energy Physics. 2004. Vol. 2004, iss. 1. Art. 011. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/01/011>
12. Aref'eva I. Ya., Dragovic B. G., Volovich I. V. p -adic superstrings // Physics Letters B. 1988. Vol. 214, iss. 3. P. 339–349. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(88\)91374-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(88)91374-3)
13. Diekmann O., Kaper H. G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 1978. Vol. 2, iss. 6. P. 721–737. [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(78\)90015-9](https://doi.org/10.1016/0362-546X(78)90015-9)
14. Volovich I. V. p -adic string // Classical Quantum Gravity. 1987. Vol. 4, iss. 4. P. L83–L87. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/4/4/003>
15. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. On solvability of one infinite system of nonlinear functional equations in the theory of epidemics // Eurasian Mathematical Journal. 2020. Vol. 11, iss. 2. P. 52–64. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-2-52-64>
16. Хачатрян Х. А. Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2020. Т. 84, № 4. С. 198–207. <https://doi.org/10.4213/im8898>
17. Atkinson C., Reuter G. E. H. Deterministic epidemic waves // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1976. Vol. 80, iss. 2. P. 315–330. <https://doi.org/10.1017/S0305004100052944>
18. Владимиров В. С. К вопросу несуществования решений уравнений p -адических струн // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 174, № 2. С. 208–215. <https://doi.org/10.4213/tmf8390>
19. Аветисян М. О., Хачатрян Х. А. О качественных свойствах решения для одной системы нелинейных бесконечных алгебраических уравнений // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24, № 4. С. 5–18. <https://doi.org/10.46698/z4764-9590-5591-k>
20. Khachatryan Kh. A., Broyan M. F. One-parameter family of positive solutions for a class of nonlinear infinite algebraic systems with Teopltz – Hankel type matrices // Journal of Contemporary Mathematical Analysis. 2013. Vol. 48, iss. 5. P. 209–220 <https://doi.org/10.3103/S1068362313050026>
21. Хачатрян Х. А., Андриян С. М. О разрешимости одного класса дискретных матричных уравне-



- ний с кубической нелинейностью // Украинский математический журнал. 2019. Т. 71, № 12. С. 1667–1683.
22. Арабаджян Л. Г. Об одной бесконечной алгебраической системе в нерегулярном случае // Математические заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 3–11. <https://doi.org/10.4213/mzm6578>
23. Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Серия: Математический анализ. 1984. Т. 22. С. 175–244. <https://www.mathnet.ru/rus/intm72>
24. Суетин П. К. Решение уравнений в дискретных свертках в связи с некоторыми задачами из радиотехники // Успехи математических наук. 1989. Т. 44, № 5 (269). С. 97–116. <https://www.mathnet.ru/rus/rm1917>
25. Карапетянц Н. К., Самко С. Г. О дискретных операторах Винера – Хопфа с осциллирующими коэффициентами // Доклады АН СССР. 1971. Т. 200, № 1. С. 17–20. <https://www.mathnet.ru/rus/dan36384>

References

1. Vladimirov V. S., Volovich Ya. I. Nonlinear dynamics equation in p -adic string theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 138, iss. 3, pp. 297–309. <https://doi.org/10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29>
2. Vladimirov V. S. Nonlinear equations for p -adic open, closed, and open-closed strings. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2006, vol. 149 iss. 3, pp. 1604–1616. <https://doi.org/10.1007/s11232-006-0144-z>
3. Zhukovskaya L. V. Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2006, vol. 146, iss. 3, pp. 335–342. <https://doi.org/10.1007/s11232-006-0043-3>
4. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. *Journal of Mathematical Biology*, 1978, vol. 6, iss. 2, pp. 109–130. <https://doi.org/10.1007/BF02450783>
5. Danchenko V. I., Rubay R. V. On integral equations of stationary distributions for biological systems. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 171, iss. 1, pp. 34–45. <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0124-6>
6. Cercignani C. *Theory and application of the Boltzmann equation*. Edinburgh, Scottish Academic Press; London, Distributed by Chatto and Windus, 1975. 415 p.
7. Kogan M. *Rarefied Gas Dynamics*. Springer, New York, 1969. 515 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-6381-9> (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1967. 440 p.).
8. Villani C. Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true. *Communications in Mathematical Physics*, 2003, vol. 234, iss. 3, pp. 455–490. <https://doi.org/10.1007/s00220-002-0777-1>
9. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. An analytical description of the skin effect in a metal by using a two-parameter kinetic equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, iss. 10, pp. 1773–1783. <https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf/v44/i10/p1861>
10. Barichello L. B., Siewert C. E. The temperature-jump problem in rarefied gas dynamics. *European Journal of Applied Mathematics*, 2000, vol. 11, iss. 4, pp. 353–534. <https://doi.org/10.1017/S0956792599004180>
11. Moeller N., Schnabl M. Tachyon condensation in open-closed p -adic string theory. *Journal of High Energy Physics*, 2004, vol. 2004, iss. 1, art. 011. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/01/011>
12. Aref'eva I. Ya., Dragovic B. G., Volovich I. V. p -adic superstrings. *Physics Letters B*, 1988, vol. 214, iss. 3, pp. 339–349. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(88\)91374-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(88)91374-3)
13. Diekmann O., Kaper H. G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1978, vol. 2, iss. 6, pp. 721–737. [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(78\)90015-9](https://doi.org/10.1016/0362-546X(78)90015-9)
14. Volovich I. V. p -adic string. *Classical Quantum Gravity*, 1987, vol. 4, iss. 4, pp. L83–L87. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/4/4/003>
15. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. On solvability of one infinite system of nonlinear functional equations in the theory of epidemics. *Eurasian Mathematical Journal*, 2020, vol. 11, iss. 2, pp. 52–64. <https://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-2-52-64>
16. Khachatryan Kh. A. Existence and uniqueness of solution of a certain boundary-value problem for a convolution integral equation with monotone non-linearity. *Izvestiya: Mathematics*, 2020, vol. 84, iss. 4, pp. 807–815. <https://doi.org/10.1070/IM8898>
17. Atkinson C., Reuter G. E. H. Deterministic epidemic waves. *Mathematical Proceeding of the*



- Cambridge Philosophical Society*, 1976, vol. 80, iss. 2, pp. 315–330. <https://doi.org/10.1017/S0305004100052944>
18. Vladimirov V. S. Nonexistence of solutions of the p -adic strings. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2013, vol. 174, iss. 2, pp. 178–185. <https://doi.org/10.1007/s11232-013-0015-3>
19. Avetisyan M. O., Khachatryan Kh. A. On the qualitative properties of a solution for a system of infinite nonlinear algebraic equations. *Vladikavkaz Mathematical Journal*, vol. 24, iss. 4, pp. 5–18 (in Russian). <https://doi.org/10.46698/z4764-9590-5591-k>
20. Khachatryan Kh. A., Broyan M. F. One-parameter family of positive solutions for a class of nonlinear infinite algebraic systems with Teoplitz – Hankel type matrices. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2013, vol. 48, iss. 5, pp. 209–220. <https://doi.org/10.3103/S1068362313050026>
21. Khachatryan K. A., Andriyan S. M. On the solvability of a class of discrete matrix equations with cubic nonlinearity. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2020, vol. 71, pp. 1910–1928. <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01755-4>
22. Arabadzhyan L. G. An infinite algebraic system in the irregular case. *Mathematical Notes*, 2011, vol. 89, iss. 1, pp. 3–10. <https://doi.org/10.1134/S0001434611010019>
23. Arabadzhyan L. G., Engibaryan N. B. Convolution equations and nonlinear functional equations. *Journal of Soviet Mathematics*, 1987, vol. 36, iss. 6, pp. 745–791. <https://doi.org/10.1007/BF01085507>
24. Suetin P. K. Solution of discrete convolution equations in connection with some problems of radio engineering. *Russian Mathematical Surveys*, 1989, vol. 44, iss. 5, pp. 119–143. <https://doi.org/10.1070/RM1989v044n05ABEH002206>
25. Karapetjanc N. K., Samko S. G. The discrete Wiener – Hopf operators with oscillating coefficients. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1971, vol. 200, iss. 1, pp. 17–20 (in Russian). <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0287338>

Поступила в редакцию / Received 20.04.2023

Принята к публикации / Accepted 03.07.2023

Опубликована / Published 29.11.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 512–525

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 512–525
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-512-525>, EDN: ILSNIX

Article

Numerical solution of first-order exact differential equations by the integrating factor method

L. A. Sevastianov^{1,2}, K. P. Lovetskiy¹, D. S. Kulyabov^{1,2}✉, S. V. Sergeev¹

¹Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia

²Joint Institute for Nuclear Research, 6 Joliot-Curie St., Dubna 141980, Moscow region, Russia

Leonid A. Sevastianov, sevastianov-la@pfur.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1856-4643>, AuthorID: 6741

Konstantin P. Lovetskiy, lovetskiy-kp@rudn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3645-1060>, AuthorID: 584101

Dmitry S. Kulyabov, kulyabov-ds@rudn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0877-7063>, AuthorID: 360953

Stepan V. Sergeev, 1032202195@rudn.ru, <https://orcid.org/0009-0004-1159-4745>

Abstract. A numerical algorithm for solving exact differential equations is proposed, based both on the efficient calculation of integrating factors and on a “new” numerical method for integrating functions. Robust determination of the integrating factors is implemented by using the Chebyshev interpolation of the desired functions and performing calculations on Gauss – Lobatto grids, which ensure the discrete orthogonality of the Chebyshev matrices. After that, the integration procedure is carried out using the Chebyshev integration matrices. The integrating factor and the final potential of the ODE solution are presented as interpolation polynomials depending on a limited number of numerically recoverable expansion coefficients.

Keywords: spectral method, collocation, integrating factors, integration matrices, recovery of coefficients, inverse problem

Acknowledgements: This work was supported by the RUDN University Scientific Projects Grant System (project No. 021934-0-000, recipient Konstantin P. Lovetskiy) and by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program (recipient Dmitry S. Kulyabov, Stepan V. Sergeev). The work of Leonid A. Sevastianov was supported by the Russian Science Foundation (project No. 20-11-20257).

For citation: Sevastianov L. A., Lovetskiy K. P., Kulyabov D. S., Sergeev S. V. Numerical solution of first-order exact differential equations by the integrating factor method. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 512–525. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-512-525>, EDN: ILSNIX

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 517.98

Численное решение дифференциальных уравнений первого порядка в полных дифференциалах методом интегрирующего множителя

Л. А. Севастьянов^{1,2}, К. П. Ловецкий¹, Д. С. Кулябов^{1,2}✉, С. В. Сергеев¹

¹Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

²Объединенный институт ядерных исследований, Россия, Московская обл., 141980, г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6



Севастьянов Леонид Антонович, доктор физико-математических наук, ¹профессор кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта; ²сотрудник лаборатории теоретической физики, sevastianov-la@pfur.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1856-4643>, AuthorID: 6741

Ловецкий Константин Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта, lovetskiy-kp@rudn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3645-1060>, AuthorID: 584101

Кулябов Дмитрий Сергеевич, доктор физико-математических наук, ¹профессор кафедры теории вероятностей и кибербезопасности; ²сотрудник лаборатории информационных технологий, kulyabov-ds@rudn.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0877-7063>, AuthorID: 360953

Сергеев Степан Викторович, аспирант кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта, 1032202195@rudn.ru, <https://orcid.org/0009-0004-1159-4745>

Аннотация. Предложен численный алгоритм решения дифференциальных уравнений в полных дифференциалах, основанный как на эффективном вычислении интегрирующих множителей, так и на «новом» численном методе интегрирования функций. Устойчивое определение интегрирующих множителей обеспечивается за счет использования чебышевской интерполяции искомым функций и проведения расчетов на сетках Гаусса – Лобатто, обеспечивающих дискретную ортогональность чебышевских матриц. После чего процедура интегрирования осуществляется с помощью чебышевских матриц интегрирования. Интегрирующий множитель и итоговый потенциал решения обыкновенного дифференциального уравнения представляются в виде интерполяционных полиномов, зависящих от ограниченного количества численно восстанавливаемых коэффициентов разложения.

Ключевые слова: спектральный метод, коллокация, интегрирующие множители, матрицы интегрирования, восстановление коэффициентов, обратная задача

Благодарности: Работа выполнена в рамках проекта № 021934-0-000 Системы грантовой поддержки научных проектов РУДН (Ловецкий К. П.) и при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН (Кулябов Д. С., Сергеев С. В.). Работа Севастьянова Л. А. поддержана Российским научным фондом (проект № 20-11-20257).

Для цитирования: Sevastianov L. A., Lovetskiy K. P., Kulyabov D. S., Sergeev S. V. Numerical solution of first-order exact differential equations by the integrating factor method [Севастьянов Л. А., Ловецкий К. П., Кулябов Д. С., Сергеев С. В. Численное решение дифференциальных уравнений первого порядка в полных дифференциалах методом интегрирующего множителя] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 512–525. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-512-525>, EDN: ILSNIX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

On the way of generalizing the pseudospectral method of Chebyshev collocations for solving linear ODEs to the class of nonlinear ODEs, we dwell on an intermediate subclass of special linear differential equations with two independent variables — exact differential equations [1].

The problem of numerical integration of ODEs is traditionally studied within the framework of solving the Cauchy problem. The most common Runge – Kutta method is related to all other methods included in the conventional libraries. Finite-difference methods for solving differential equations and finite element methods reduce the original continuous problem to a discrete analog, a system of algebraic equations. For linear differential equations (DE), this is a system of linear algebraic equations (SLAE). Both approaches in their traditional implementations require significant amounts of memory and/or substantial time costs.

An alternative to the latter approaches, which can be considered finite-dimensional approximations of the desired solutions and coefficients of equations from infinite-dimensional function spaces, is a truncated expansion in complete systems of orthogonal polynomials. For them, three-term relations are performed, which make it possible to drastically reduce the number of



intermediate calculations. Another resource is the availability of special “orthogonal” discrete grids consisting of the roots of the corresponding polynomials. An example is the Gauss – Lobatto grid for Chebyshev polynomials. Ultimately, these factors reduce the required memory and computation time by orders of magnitude.

The method of integrating factors is a representation of the solution in the form of a product of functions, a kind of method of separation of variables. Representing a solution as a product of two or more functions, compared to methods for finding a single desired function, provides much more opportunities and more variety to obtain the desired solution. The approach to the numerical solution of ODEs based on integrating factors offers new possibilities compared to simple traditional methods.

In analytical form, the method of integrating factors for constructing solutions of both linear and nonlinear differential equations has been used for a long time [2]. We propose an efficient numerical approach based on the collocation method and the use of integrating factors. A robust algorithm for the search for solution is implemented in the spectral space, and for the polynomial interpolation of the solution, expansion into a series of Chebyshev polynomials of the first kind is used.

1. Motivation

The class of exact differential equations or total differential equations is a kind of ordinary differential equations that are widely used in physics and technology (see, e.g., papers by L. L. Doskolovich [3–6] about inverse problems of calculating optical elements). In Refs. [7, 8], the inverse problem of designing a reflective surface of arbitrary shape to create a given illumination distribution is reduced to the form of the Monge – Ampère problem. Prior to that, in the papers by Doskolovich et al. [9, 10], this problem was solved in the presence of the surface axial symmetry and for one-dimensional illumination distributions.

In Ref. [11], a new method for reconstructing a reflecting (refracting) surface from a given source–target map is proposed, which determines the relationship between the directions of incident and reflected (refracted) rays. In the proposed method, the optical surface is represented as an envelope of multiple paraboloids (reflecting surface) or ellipsoids (refractive surface). This representation makes it possible to reduce the problem of designing an optical surface to restoring a function from its total differential. The proposed approach is illustrated by the synthesis of mirrors that produce uniform illumination on a square target in the far-field zone. The results of the calculations showed that the proposed method allows forming qualitative illumination distributions even if the integrability condition is not met.

Reference [12] proposes a method for designing reflective surfaces that form given continuous illumination distributions in two-dimensional regions. The surface of the mirror is represented as an envelope of a two-parameter family of ellipsoids. The first focus of each ellipsoid coincides with the point light source, and the second is in the illuminated area. This surface representation can be interpreted as an extreme case of a segmented surface used in the support quadric method to focus on a set of points. The envelope equation depends on the function that determines the lengths of the major axes of the ellipsoids of the family. The calculation of this function is carried out using a continuous approximation of the discrete function obtained from the solution of the discrete problem of focusing on a set of points. The high efficiency of the proposed method is illustrated by the developed examples of mirrors for creating a uniform distribution of illumination in areas of various shapes.

Based on the results of Refs. [11, 12], we developed a method for restoring a reflective (refractive) surface from a given source–screen mapping. This representation makes it possible to reduce the problem of designing an optical surface to the problem of restoring a function from its total differential. In this case, reduction to a total differential can be carried out using an integrating factor.



2. Basic solution method

As the main construction in developing a method for solving the nonlinear ODEs considered below, we will use a stable and efficient algorithm for restoring a function from a known derivative (practically this is the equivalent of the problem of restoring the antiderivative from the integrand) — the solution of the Cauchy problem for an ordinary differential equation [13, 14]

$$y'(x) = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [a, b].$$

The method consists in representing the approximate solution of the problem in the form of a series $y(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x)$ of Chebyshev polynomials of the first kind $T_k(x)$ with the domain of definition $x \in [-1, 1]$. The linear transformation $l(x) = \frac{(2x-(b+a))}{(b-a)}$ allows to proceed to solving the problem in the interval $[-1, 1]$, the upper estimate of the interpolation error [15] having the form:

$$|y(x) - \sum_{k=0}^n c_k T_k(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \left| \frac{(b-a)}{2} \right|^{n+1} \max_{\xi \in [a,b]} |y^{(n+1)}(\xi)|.$$

Thus, the Chebyshev interpolation is an almost optimal approximation in the sense of the norm L_∞ nearly equivalent to the L_2 norm. Moreover, the use of Gauss–Lobatto nodes as interpolation nodes leads to optimal integration formulas.

Below we consider both the interpolation problem and the problem of solving ODE exactly in the interval $[-1, 1]$.

$$y'(x) = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [-1, 1]. \quad (1)$$

We propose to find the expansion coefficients $c_k, k = 0, \dots, n$ of the approximate solution (1) in the form of the series $y(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x)$ of Chebyshev polynomials in two stages.

At the first stage, the stage of derivative interpolation, the collocation method is used to calculate the coefficients $b_k, k = 0, \dots, n$ of the derivative expansion $f(x_j) = \sum_{k=0}^n b_k T_k(x_j)$, $j = 0, \dots, n$ in the orthogonal basis of the Chebyshev polynomials of the first kind.

The algorithm stability is achieved at the expense of the discrete orthogonality of the modified Chebyshev matrix $\mathbf{T} = [T_{j,k}]_{0 \leq j, k \leq n}$ on the Gauss–Lobatto grid. The choice of collocation points $x_j = \cos(\pi j/n)$, $j = 0, \dots, n$, makes it possible by multiplying the first and the last equation of the collocation method by $1/\sqrt{2}$ to obtain an equivalent “modified” system with a new matrix $\tilde{\mathbf{T}}$ instead of $\mathbf{T}$ and vector $\tilde{\mathbf{f}}$ instead of $\mathbf{f}$. The new system already possesses the property of discrete “orthogonality”. Its multiplication from the left by the transposed matrix $\tilde{\mathbf{T}}^T$ yields a system with the diagonal matrix

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}^T \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 \\ \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \dots \\ \tilde{f}_n \end{bmatrix}$$

where $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{T}}^T (f_0/\sqrt{2}, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n/\sqrt{2})^T$

The expansion coefficients for the function $f(x)$ are easily expressed in the explicit form

$$b_0 = \frac{\tilde{f}_0}{n}, \quad b_1 = \frac{2\tilde{f}_1}{n}, \quad b_2 = \frac{2\tilde{f}_2}{n}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{\tilde{f}_n}{n}.$$

The second stage implies the calculation of the antiderivative expansion coefficients $c_k, k = 1, \dots, n$. For this purpose, we multiply the banded three-diagonal integration matrix [13, 16, 17] by the vector of the derivative expansion coefficients $b_k, k = 0, \dots, n$ and obtain the



expansion coefficients c_k , $k = 1, \dots, n$ of the antiderivative, except the zeroth one, c_0 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{1/2}{(n-1)} & 0 & \frac{-1/2}{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \frac{1}{2n} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0=? \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}.$$

In some cases, e.g., when solving the Cauchy problem with a given initial condition y_0 , it is also necessary to know the zero coefficient c_0 . Then a linear equation that specifies the initial/boundary condition is additionally solved, and the coefficient c_0 is calculated by the formula $c_0 = y_0 - \sum_{k=1}^n c_k (-1)^k$.

The approach presented has been successfully applied by the authors to solve linear ODEs of the first and second order [13, 14].

The third stage is the ultimate calculation of the potential surface values, which requires efficient computation of definite integrals of the functions, interpolation coefficients of which are already known. We will present a formula for calculating definite integrals from the known coefficients of Chebyshev interpolation, which directly follows from the recurrence relation for the Chebyshev polynomials of the first kind.

Assertion. Let the coefficients b_k , $k = 0, \dots, n$ be the coefficient of expansion of the integrand $f(x) = \sum_{k=0}^n b_k T_k(x)$, $j = 0, \dots, n$ in Chebyshev polynomials. Then the exact formula for calculating a definite integral by the interpolation coefficient of function $f(x)$ expansion in the interval $[-1, 1]$ has the form:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) dx = 2 \sum_{k=0, k=\text{even}}^n \frac{c_k}{1-k^2}.$$

On the way to generalizing the pseudospectral method of Chebyshev collocations from linear ODEs to the class of nonlinear ODEs, we dwell on an intermediate subclass of special linear differential equations with two independent variables.

3. Equations with separable variables

Consider the solution of one of the simplest nonlinear equations of the first order — an equation with separable variables.

Nonlinear first-order general equation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

can be written in the form

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

A transformation to such form is always possible. In the particular case when $M(x, y)$ depends only on x , and $N(x, y)$ depends only on y , the equation is reduced to the form

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

of an equation with separable variables. It is possible to use the symmetry in the form of the equation and emphasize the ‘independence’ of the dependent variables from the independent ones:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \quad (3)$$



The solution (a general integral) of this equation with separable variables in an implicit form is obtained by integrating Eq. (3):

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \quad (4)$$

where C is an arbitrary constant. Any differentiable function $y = \varphi(x)$, satisfying condition (4) is a solution of Eq. (2). Thus, it implicitly defines the solution of the differential equation with separable variables.

This form of the solution of the separable equation (with separable variables) can be substantiated in the following way. We denote by H_1 and H_2 the functions, the derivatives of which are M and N respectively, i.e.,

$$H_1'(x) = M(x), \quad H_2'(y) = N(y),$$

then Eq. (2) can be rewritten as

$$H_1'(x) + H_2'(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (5)$$

According to the rule of differentiating a composite function, a chain of equalities is valid

$$H_2'(y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy} H_2(y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} H_2(y)$$

and, therefore, Eq. (5) can be presented as

$$\frac{d}{dx} [H_1(x) + H_2(y)] = 0. \quad (6)$$

Integrating the latter, we get the general solution

$$H_1(x) + H_2(y) = c, \quad (7)$$

where c is an arbitrary constant. Any differentiable function $y = \varphi(x)$, satisfying condition (6) is a solution to Eq. (2) with separable variables in the implicit form.

Differential equation (2) together with the initial condition

$$y(x_0) = y_0 \quad (8)$$

defines a Cauchy problem. The solution of such an initial-value problem implies the specification of a certain numerical value of the parameter c in Eq. (7). It is possible to specify such a value by substituting in Eq. (7) the values $x = x_0$ and $y = y_0$ and computing the desired value of the constant

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0).$$

Substituting the calculated value of the constant c in (7) and keeping in mind that

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^x M(s) ds, \quad H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^y N(s) ds,$$

we obtain a formula to determine the particular integral curve of Eq. (2), passing through the given point.

The solution of the Cauchy problem satisfying the initial condition $y(x_0) = y_0$ is determined by the relation

$$\int_{x_0}^x M(\xi) d\xi + \int_{y_0}^y N(\eta) d\eta = 0, \quad (9)$$

that determines the integral curve passing through the point (x_0, y_0) .



Equation (9) implicitly determines the solution of differential equation (2), satisfying initial condition (8). It should be kept in mind that in order to find an explicit formula that describes the behavior of the integral curve, it is necessary to express the dependent variable y as a function of x from the nonlinear equation (9). Unfortunately, it is often impossible to do analytically; in such cases it is possible to use numerical methods to find approximate values of $y(x)$.

The algorithm of definite integral calculation based on Chebyshev interpolation:

- by linear transformation $l(x) = \frac{2x-(b+a)}{b-a}$ reduce the integral calculation to the interval $[-1, 1]$;
- calculate the coefficients b_k , $k = 0, \dots, n$ of the integrand expansion $f(x) = \sum_{k=0}^n b_k T_k(x)$, $j = 0, \dots, n$ in Chebyshev polynomials;
- calculate the values of the potential function at the point (x, y) under the given initial condition $y(x_0) = y_0$:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x M d\xi + \int_{y_0}^y N(\eta) d\eta$$

using the exact formula for calculating a definite integral from the interpolation coefficients of the expansion of the integrand $f(x)$:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) dx = 2 \sum_{k=0, k=\text{even}}^n \frac{c_k}{1-k^2}.$$

4. Numerical solution of an exact differential equation

Consider a simply connected open subset D of R^2 and two functions M and N , continuous in D . An implicit ordinary differential equation of the first order

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (10)$$

is called an *exact differential equation* (a *total differential equation*), if there exists a continuously differentiable function $F(x, y)$, called a *potential function*, such that

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = M(x, y), \quad \frac{dF(x, y)}{dy} = N(x, y).$$

The integration of such an equation reduces to constructing the function $F(x, y)$, after which the solution is found in the form $F(x, y) = C$, since $dF = 0$. Thus, to solve the problem it is necessary to calculate the values of the integral curve, which is a line of intersection of the potential surface with a horizontal plane.

Let the function $F(x, y)$ be a total differential of an exact DE defined on a certain simply connected and open subset D of R^2 . Then the differentiable function $f(x)$ such that $(x, f(x)) \in D$ is a solution if and only if there exists a real number c , such that

$$F(x, f(x)) = c.$$

In the case when the solution is subject to the requirement of passing through a given point (a problem with an initial or boundary condition),

$$y(x_0) = y_0,$$

the local value of the potential function can be calculated by the formula [18, Lesson 23]:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{x_0}^x M(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y N(x, t) dt = \\ &= \int_{x_0}^x M(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y \left[N(x_0, t) + \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial t}(u, t) du \right] dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Solving the implicit equation $F(x, y) = c$ with respect to y , where c is a given constant, allows us to calculate all possible solutions (Fig. 1).

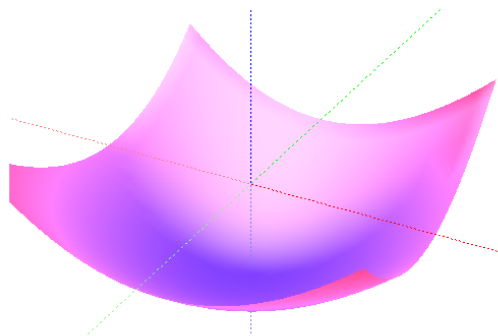


Fig. 1. The potential $F(x, y) = (x^2 + y^2) / 2$ of the exact DE $x dx + y dy = 0$ restored by the formula (11) (color online)

5. Integrating factors

The method of integrating factors allows a generalization of the proposed construction to a wider class of nonlinear first-order ODEs reducible to the total differential form.

Three cases of equations admitting exact solutions are known:

- based on trivial integrating factors: $\mu \equiv 1$;
- with an integrating factor depending only on x : $\mu(x)$;
- with an integrating factor depending only on y : $\mu(y)$.

In all three cases considered, the search for particular solutions is based on the pseudospectral Chebyshev collocation method. The integrating factor method for implementing the algorithm of numerical solution of linear ODEs by means of integration matrices [13] allows reducing the problem to twofold sequential multiplication of a two-diagonal integration matrix by the vector of spectral coefficients of the derivative. The lacking constants of integration are determined from either boundary, or initial conditions of the problem. In the second and third case, a nontrivial problem of finding the integration factors numerically additionally arises.

Case 1

If the left-hand side of the differential equation (10) is a total differential, i.e.,

$$M_y(x, y) - N_x(x, y) = 0,$$

then both its terms are calculated separately by means of the appropriate integration matrices.

If the differential equation (10) is not exact, but still has a solution, then a function $\mu(x, y)$ necessarily exists, such that the equivalent equation obtained by multiplying both sides of Eq. (10) by $\mu(x, y)$

$$(\mu M) dx + (\mu N) dy = 0$$

is exact. Such function $\mu(x, y)$ is called an integrating factor of the initial equation. Experience shows finding an integrating factor in the most general form is extremely difficult. Below we consider two special particular cases.

Case 2

If $M_y(x, y) - N_x(x, y) \neq 0$, and $\frac{(M_y - N_x)}{N}$ is a function only of x , let us denote it by $\xi(x)$. Then

$$\mu(x) = \pm \exp \left(\int \xi(x) dx \right)$$

is an integrating factor of this differential equation.

**Case 3**

If $M_y(x, y) - N_x(x, y) \neq 0$, and $\frac{(M_y - N_x)}{(-M)}$ is a function only of y , let us denote it by $\psi(y)$. Then

$$\mu(y) = \pm \exp \left(\int \psi(y) dy \right)$$

is an integrating factor of this differential equation.

A more general situation, when none of these cases takes place, is not considered here.

6. Discussion, numerical examples

Let us consider examples of the three cases listed in the previous section.

Example 1. The case of total differential

Consider a numerical method for constructing a general integral (potential) of an implicit exact differential equation:

$$(\sin(xy)xy \cos xy) dx + x^2 \cos xy dy = 0. \quad (12)$$

Equation (12) is an exact equation if and only if the condition

$$\frac{dM(x, y)}{dy} \equiv \frac{dN(x, y)}{dx} \quad (13)$$

is valid in some simply connected domain R of variation of variables.

If allowed by the problem statement, we analytically check the fulfillment of the condition (13):

$$\begin{aligned} \frac{dM(x, y)}{dy} &= \frac{d}{dy} (\sin(xy)xy \cos xy) = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy, \\ \frac{dN(x, y)}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^2 \cos xy) = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy. \end{aligned}$$

For Eq. (12), the necessary and sufficient condition is satisfied, and it is an exact differential equation.

In the case when checking the condition (13) analytically is not possible, it may well be sufficient to check this condition numerically. The feasibility of the necessary and sufficient conditions can be checked on a fine enough grid in the domain R with respect to the variables $(x, y) \in R$ by numerical pointwise comparison of the computed derivatives. When approximating functions with series expansion in Chebyshev polynomials of the first kind, such a comparison can be efficiently carried out using Gauss–Lobatto grids in both variables and Chebyshev differentiation matrices in the spectral space.

Next we substitute specific expressions $M(x, y) = \sin(xy)xy \cos xy$ and $N(x, y) = x^2 \cos xy$ into Eq. (11) to calculate the potential at the initial value, $y(0) = 0, x_0 = 0, y_0 = 0$. In the vicinity of the initial point, the potential values are calculated using the formula

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{x_0}^x (\sin(ty_0)ty_0 \cos ty_0) dt + \\ &+ \int_{y_0}^y \left[x_0^2 \cos x_0 t + \int_{x_0}^x \left\{ 2u \cos ut - u^2 t \sin ut \frac{\partial M}{\partial t}(u, t) \right\} du \right] dt. \end{aligned}$$

Numerically, the integrals in this equation are calculated based on the method of restoring the antiderivative from the known integrand. Plots of the calculated potential and its errors are shown in Fig. 2.

The exact solution, the potential function of Eq. (12) looks as follows:

$$x \sin(xy) = c.$$

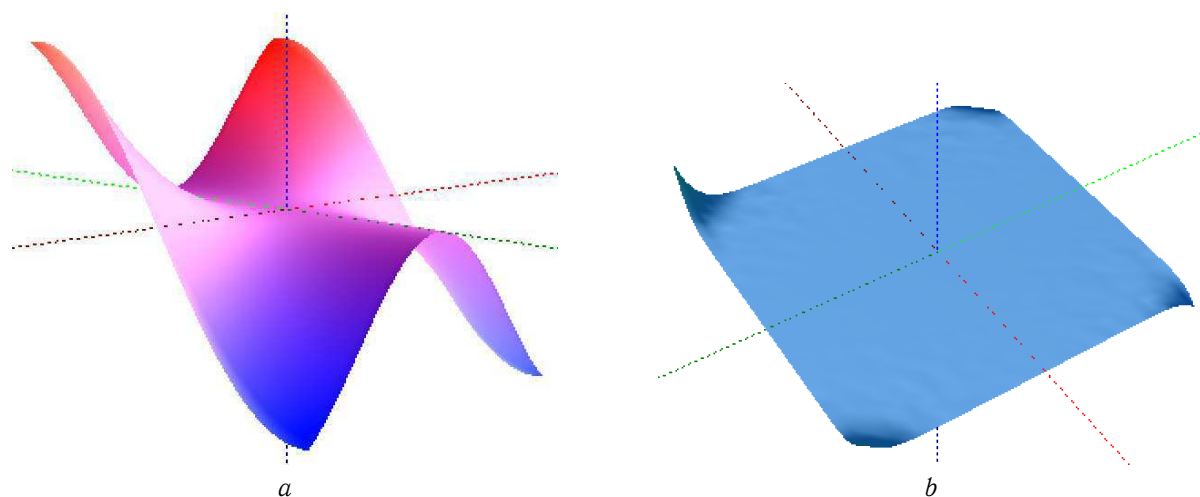


Fig. 2. The calculated potential surface and the error of its calculation: *a* – potential surface, the interval from -1.5 to $+1.5$ is shown; *b* – deviation from the exact surface $(F(x, y) - x \sin(xy)) \cdot 10^{12}$ (color online)

Example 2

The case of reduction to the form of a total differential using the integrating factor $\mu(x)$ [17, Sample 2.6.1].

Consider the equation

$$(2xy^3 - 2x^3y^3 - 4xy^2 + 2x) dx + (3x^2y^2 + 4y) dy = 0. \quad (14)$$

We will search the solution by choosing an appropriate integrating factor.

Passing to the standard notation in Eq. (14):

$$\begin{aligned} M &= 2xy^3 - 2x^3y^3 - 4xy^2 + 2x, \\ N &= 3x^2y^2 + 4y \end{aligned}$$

we write the difference of derivatives in the form

$$M_y - N_x = 6xy^2 - 6x^3y^2 - 8xy - 6xy^2 = -6x^3y^2 - 8xy. \quad (15)$$

Since the right-hand side of Eq. (15) is nonzero, Eq. (14) is not exact. However, the expression

$$\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{6x^3y^2 + 8xy}{3x^2y^2 + 4y} = -2x$$

is independent of y , therefore, the integrating factor can be calculated by the formula

$$\mu(x) = \exp\left(-\int 2x dx\right)$$

and equals $\mu(x) = \exp(-x^2)$. The numerical determination of the integrating factor reduces, as above, to the method of calculating the antiderivative of the integrand $(M_y - N_x)/N$, followed by the calculation of the exponential function in necessary points of the desired range. Multiplying Eq. (14) by $\mu(x)$, we proceed to the solution of the equivalent exact equation

$$e^{-x^2} (2xy^3 - 2x^3y^3 - 4xy^2 + 2x) dx + e^{-x^2} (3x^2y^2 + 4y) dy = 0.$$

To solve this equation, it is necessary to construct a function (potential) $F(x, y)$, such that

$$F_x(x, y) = e^{-x^2} (2xy^3 - 2x^3y^3 - 4xy^2 + 2x), \quad (16)$$

$$F_y(x, y) = e^{-x^2} (3x^2y^2 + 4y). \quad (17)$$

Substituting into the formula (11) expressions (16), (17), and the mixed derivative

$$F_{xy}(x, y) = e^{-x^2} (6xy^2 - 6x^3y^2 - 8xy),$$

for each desired point $(x, y) \in R$ of the domain of solution existence at the given initial condition $y(0) = 0, x_0 = 0, y_0 = \sqrt{1/2}$, we build the approximating potential surface (18) (Fig. 3).

The exact solution has the form

$$F(x, y) = e^{-x^2} (y^2 (x^2y + 2) - 1). \quad (18)$$

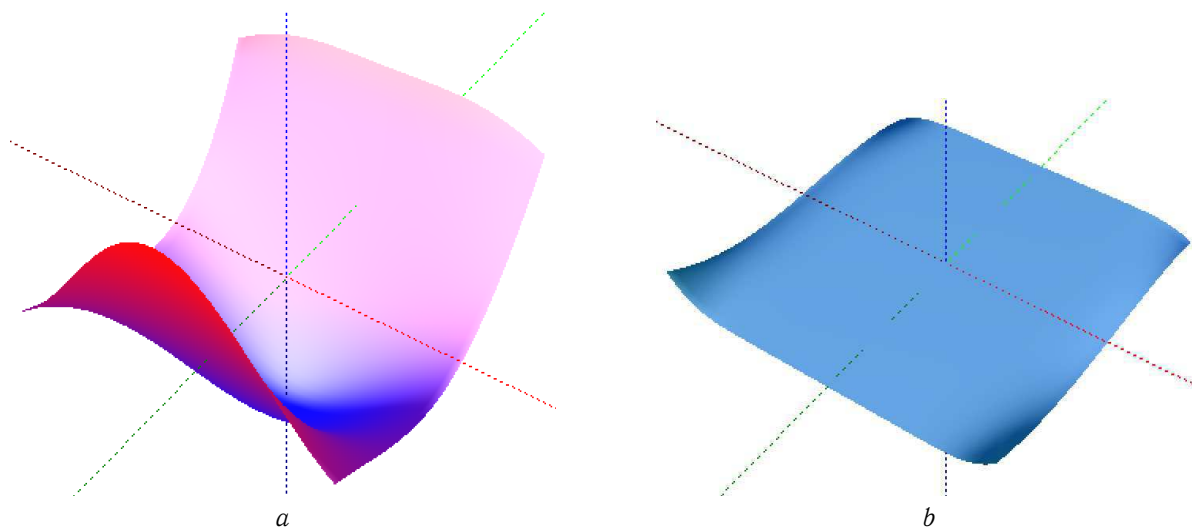


Fig. 3. The calculated potential surface and the error of its calculation: *a* — potential surface, the interval from -1.0 to $+1.5$ is shown; *b* — deviation from the exact solution $(F(x, y) - e^{-x^2} (y^2 (x^2y + 2) - 1)) \cdot 10^8$ (color online)

Example 3

The case of reducing the initial equation to the total differential form using an integrating factor $\mu(y)$ [17, Sample 2.6.2]:

$$2xy^3 dx + (3x^2y^2 + x^2y^3 + 1) dy = 0. \quad (19)$$

Let us introduce the standard notation in Eq. (19)

$$M = 2xy^3, \quad N = 3x^2y^2 + x^2y^3 + 1,$$

then the criterion of the equation belonging to exact differential equations has the form

$$M_y - N_x = 6x^2 - (6xy^2 + 2xy^3) = -2xy^3. \quad (20)$$

Since the right-hand side of Eq. (20) is nonzero, Eq. (19) is not exact. However, the expression

$$\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2 + x^2y^3 + 1}$$

depends on both x and y , therefore, it turns out impossible to calculate the integrating factor in the form $\mu(x)$.



Let us try another possibility of constructing the integrating factor — as a function of the second variable:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = -\frac{2xy^3}{2xy^3} = 1.$$

Since the relation (13) is independent of x , the integrating factor $\mu(y)$ exists and is written as $\mu(y) = \exp(y)$. The numerical determination of the integrating factor reduces, as above, to the method of computing the antiderivative from the integrand with subsequent calculation of the exponential function at the necessary points of the desired range. Multiplying Eq. (19) by $\mu(y)$, we proceed to the solution of the obtained exact differential equation

$$2xy^3e^y dx + (3x^2y^2 + x^2y^3 + 1)e^y dy = 0.$$

To solve this equation, it is necessary to construct the function (potential) $F(x, y)$, such that

$$F_x(x, y) = 2xy^3e^y, \quad (21)$$

$$F_y(x, y) = (3x^2y^2 + x^2y^3 + 1)e^y. \quad (22)$$

Substituting into formula (11) expressions (21), (22), and the expression of the mixed derivative

$$F_{xy}(x, y) = (6xy^2 + 2xy^3)e^y = 2xy^2(1 + y)e^y$$

for each desired point $(x, y) \in R$ from the domain of solution existence under the given initial condition $y(0) = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, we construct the approximating surface of the potential (23) (Fig. 4).

The exact solution has the form

$$F(x, y) = (x^2y^3 + 1)e^y. \quad (23)$$

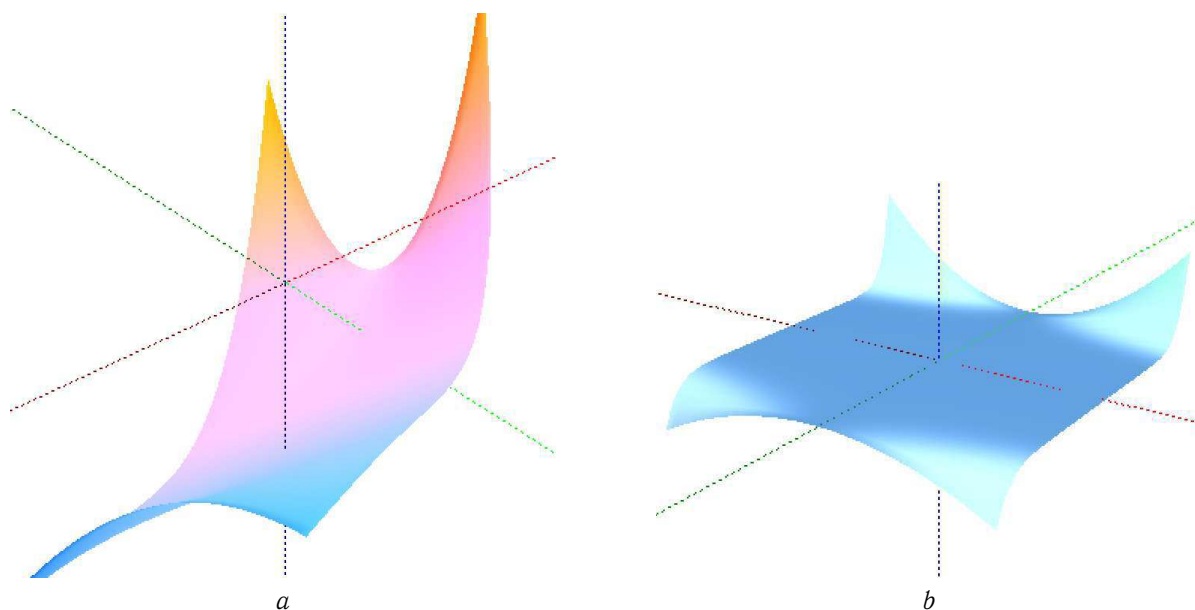


Fig. 4. The calculated potential surface and the error of its calculation: a — potential surface, the interval from -1.0 to $+1.0$ is shown; b — deviation from the exact surface $(F(x, y) - (x^2y^3 + 1)e^y) \cdot 10^{11}$ (color online)



Conclusion

The approximation of functions by the Chebyshev polynomials is optimal in L_∞ metric and near-optimal in L_2 -norm metric [19]. Using the collocation method to calculate the coefficients of expansion in Chebyshev polynomials makes it possible to obtain a high approximation accuracy with a small number of terms in the series. The use of three-term relations provides high speed and accuracy of calculation of Chebyshev polynomials at arbitrary points of the solution definition interval.

Due to the discrete orthogonality of Chebyshev matrices, the Chebyshev collocation method on Gauss – Lobatto grids practically reduces the calculation of interpolation coefficients to multiplying the matrix by the vector of values of the interpolated function. The use of integration and differentiation matrices reduces nonlinear operations (integration and differentiation) to algebraic multiplication of sparse matrices by vectors. Numerical experiments demonstrate a decrease in computational costs by orders of magnitude compared to traditional methods for solving ODEs.

The method of integrating factors representing the solution as a product of functions is a variant of the method of separation of variables. This is a more interesting approach compared to presenting the solution as an expansion of the desired function $f(x)$ into a series and finding expansion coefficients by the method of least squares in one form or another (Bubnov – Petrov – Galerkin), since the product is a more complex construction, which offers more diverse possibilities when searching for the desired solution.

The approach to the numerical solution of ODEs based on integrating factors adds new possibilities compared to simple traditional Runge – Kutta methods. The speed and accuracy of the solution procedure sharply increases due to the use of a global approximation of the solution over the entire interval. The technique for solving first-order ODEs is simplified and generalized [13]. In many cases, the integrating factor method makes it possible to reduce ODEs with separable variables to exact ODEs and restore the desired potential with high accuracy.

References

1. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of ordinary differential equations: Exact solutions, methods, and problems*. New York, Chapman Hall/CRC, 2017. 1496 p. <https://doi.org/10.1201/9781315117638>
2. Boas M. L. *Mathematical methods in the physical sciences*. John Wiley & Sons, Inc., 2005. 864 p.
3. Soifer V. A., Kotlar V., Doskolovich L. *Interactive methods for diffractive optical elements computation*. London, CRC Press, 2014. 244 p. <https://doi.org/10.1201/9781482272918>
4. Doskolovich L. L., Kharitonov S. I., Petrova O. I., Soifer V. A. A gradient method for design of multiorder varied-depth binary diffraction gratings. *Optics and Lasers in Engineering*, 1998, vol. 29, iss. 3–4, pp. 249–259. [https://doi.org/10.1016/S0143-8166\(97\)00113-9](https://doi.org/10.1016/S0143-8166(97)00113-9)
5. Doskolovich L. L., Mingazov A. A., Bykov D. A., Andreev E. S., Bezus E. A. Variational approach to calculation of light field eikonal function for illuminating a prescribed region. *Optics Express*, 2017, vol. 25, iss. 22, pp. 26378–26392. <https://doi.org/10.1364/OE.25.026378>
6. Doskolovich L. L., Bykov D. A., Andreev E. S., Bezus E. A., Olikier V. Designing double freeform surfaces for collimated beam shaping with optimal mass transportation and linear assignment problems. *Optics Express*, 2018, vol. 26, iss. 19, pp. 24602–24613. <https://doi.org/10.1364/OE.26.024602>
7. Wu R., Xu L., Liu P., Zhang Y., Zheng Z., Li H., Liu X. Freeform illumination design: A nonlinear boundary problem for the elliptic Monge – Ampere equation. *Optics Letters*, 2013, vol. 38, iss. 2, pp. 229–231. <https://doi.org/10.1364/OL.38.000229>
8. Wu R., Benitez P., Zhang Y., Minano J. C. Influence of the characteristics of a light source and target on the Monge – Ampere equation method in freeform optics design. *Optics Letters*, 2005, vol. 39, iss. 3, pp. 634–637. <https://doi.org/10.1364/OL.39.000634>
9. Doskolovich L. L., Kazanskiy N. L., Kharitonov S. I., Perlo P., Bernard S. Designing reflectors to generate a line-shaped directivity diagram. *Journal of Modern Optics*, 2005, vol. 52, iss. 11, pp. 1529–1536. <https://doi.org/10.1080/09500340500058082>
10. Doskolovich L. L., Kazanskiy N. L., Bernard S. Designing a mirror to form a line-shaped directivity diagram. *Journal of Modern Optics*, 2007, vol. 54, iss. 4, pp. 589–597. <https://doi.org/10.1080/0950034060102186>



11. Doskolovich L. L., Andreev E. S., Moiseev M. A. On optical surface reconstruction from a prescribed source-target mapping. *Computer Optics*, 2016, vol. 40, iss. 3, pp. 338–345 (in Russian). <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2016-40-3-338-345>
12. Doskolovich L. L., Andreev E. S., Kharitonov S. I., Kazansky N. L. Reconstruction of an optical surface from a given source-target map. *Journal of the Optical Society of America A*, 2016, vol. 33, iss. 8, pp. 1504–1508. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.33.001504>
13. Sevastianov L. A., Lovetskiy K. P., Kulyabov D. S. Multistage collocation pseudo-spectral method for the solution of the first order linear ODE. *2022 VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)*. Samara, Russian Federation, Institute of Electrical Electronics Engineers Inc., 2022, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1109/ITNT55410.2022.9848731>
14. Lovetskiy K. P., Kulyabov D. S., Hissein A. W. Multistage pseudo-spectral method (method of collocations) for the approximate solution of an ordinary differential equation of the first order. *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, 2022, vol. 30, iss. 2, pp. 127–138. <https://doi.org/10.22363/2658-4670-2022-30-2-127-138>
15. Stewart G. W. *Afternotes on numerical analysis*. Philadelphia, Pa, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996. 200 p. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971491>
16. Amiraslani A., Corless R. M., Gunasingam M. Differentiation matrices for univariate polynomials. *Numerical Algorithms*, 2020, vol. 83, pp. 1–31. <https://doi.org/10.1007/s11075-019-00668-z>
17. Fornberg B. *A practical guide to pseudospectral methods*. Cambridge University Press, 1996. 230 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511626357>
18. Tenenbaum M., Pollard H. *Ordinary differential equations*. Dover, New York, Dover Publications, Inc., 1963. 818 p.
19. Mendes N., Chhay M., Berger J., Dutykh D. Spectral methods. In: Mendes N., Chhay M., Berger J., Dutykh D. *Numerical methods for diffusion phenomena in building physics. A practical introduction*. Cham, Springer, 2019, pp. 167–209. https://doi.org/10.1007/978-3-030-31574-0_8

Поступила в редакцию / Received 14.09.2023

Принята к публикации / Accepted 04.12.2023

Опубликована / Published 29.11.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 526–535
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 526–535
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-526-535>, EDN: KYNPVY

Научная статья
УДК 512.542

О $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторах и $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающих подгруппах конечных групп

М. М. Сорокина[✉], Д. Г. Новикова

Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского, Россия, 241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, д. 14

Сорокина Марина Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, mmsorokina@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9516-626X>, AuthorID: 441219

Новикова Диана Геннадьевна, аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, novikovadg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5935-5397>, AuthorID: 1132164

Аннотация. Рассматриваются только конечные группы. $\mathfrak{F}$ -проекторы и $\mathfrak{F}$ -покрывающие подгруппы, где $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп, введены в рассмотрение В. Гашюцем в качестве естественного обобщения силовских и холловых подгрупп в конечных группах. Развивая идею В. Гашюца, В. А. Ведерниковым и М. М. Сорокиной были определены $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторы и $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающие подгруппы, где ω — непустое множество простых чисел, и установлены их ключевые характеристики. Цель настоящей работы — изучение свойств $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторов и $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающих подгрупп, устанавливающих их взаимосвязь с другими подгруппами в группах. Решены следующие задачи: для непустого ω -примитивно замкнутого гомоморфа $\mathfrak{F}$ и заданного множества π простых чисел установлены условия совпадения $\mathfrak{F}^\omega$ -проектора группы с ее π -холловой подгруппой; для заданной формации $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь между $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающими подгруппами группы $G = A \rtimes B$ и $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающими подгруппами группы B . В работе используются классические методы доказательств теории конечных групп, а также методы теории классов групп.

Ключевые слова: группа, конечная группа, класс групп, гомоморф, формация, $\mathfrak{F}^\omega$ -проектор, $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа

Для цитирования: Сорокина М. М., Новикова Д. Г. О $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторах и $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающих подгруппах конечных групп // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 526–535. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-526-535>, EDN: KYNPVY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On $\mathfrak{F}^\omega$ -projectors and $\mathfrak{F}^\omega$ -covering subgroups of finite groups

M. M. Sorokina[✉], D. G. Novikova

Bryansk State Academician I. G. Petrovski University, 14 Bezhitskaya St., Bryansk 241036, Russia

Marina M. Sorokina, mmsorokina@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9516-626X>, AuthorID: 441219

Diana G. Novikova, novikovadg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5935-5397>, AuthorID: 1132164

Abstract. Only finite groups are considered. $\mathfrak{F}$ -projectors and $\mathfrak{F}$ -covering subgroups, where $\mathfrak{F}$ is a certain class of groups, were introduced into consideration by W. Gaschutz as a natural generalization of Sylow and



Hall subgroups in finite groups. Developing Gaschutz's idea, V. A. Vedernikov and M. M. Sorokina defined $\mathfrak{F}^\omega$ -projectors and $\mathfrak{F}^\omega$ -covering subgroups, where ω is a non-empty set of primes, and established their main characteristics. The purpose of this work is to study the properties of $\mathfrak{F}^\omega$ -projectors and $\mathfrak{F}^\omega$ -covering subgroups, establishing their relation with other subgroups in groups. The following tasks are solved: for a non-empty ω -primitively closed homomorph $\mathfrak{F}$ and a given set π of primes, the conditions under which an $\mathfrak{F}^\omega$ -projector of a group coincides with its π -Hall subgroup are established; for a given formation $\mathfrak{F}$, a relation between $\mathfrak{F}^\omega$ -covering subgroups of a group $G = A \rtimes B$ and $\mathfrak{F}^\omega$ -covering subgroups of the group B is obtained. In the paper classical methods of the theory of finite groups, as well as methods of the theory of classes of groups are used.

Keywords: group, finite group, class of groups, homomorph, formation, $\mathfrak{F}^\omega$ -projector, $\mathfrak{F}^\omega$ -covering subgroup

For citation: Sorokina M. M., Novikova D. G. On $\mathfrak{F}^\omega$ -projectors and $\mathfrak{F}^\omega$ -covering subgroups of finite groups. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 526–535 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-526-535>, EDN: KYNPVY

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Посвящается светлой памяти

Виктора Александровича Ведерникова

Введение

Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Классом групп называется множество групп, содержащее вместе с каждой группой и все группы, ей изоморфные. Среди классов групп центральное место занимают формации, введенные в рассмотрение В. Гашюцем в работе [1].

С помощью функциональных методов В. Гашюц построил локальные формации, наиболее изученные в настоящее время и нашедшие многочисленные применения в теории групп. Обобщением понятия локальной формации является понятие примитивно замкнутого гомоморфа, а именно Г. Шунк в работе [2] доказал, что всякая локальная формация является примитивно замкнутым гомоморфом.

Другим естественным обобщением понятия локальной формации является введенное в рассмотрение Л.А. Шеметковым в [3] понятие ω -локальной формации, где ω — непустое множество простых чисел. В работе [4] были определены ω -примитивно замкнутые гомоморфы и установлено, что всякая ω -локальная формация является ω -примитивно замкнутым гомоморфом.

В. Гашюцем для локальной формации $\mathfrak{F}$ в разрешимой группе были введены в рассмотрение $\mathfrak{F}$ -проекторы [5] и $\mathfrak{F}$ -покрывающие подгруппы [1]. Эти понятия являются естественным обобщением понятий холловой и картеровой подгрупп, а именно в разрешимой группе множество всех π -холловых (нильпотентных) подгрупп совпадает с совокупностью всех ее $\mathfrak{G}_\pi$ -покрывающих ($\mathfrak{N}$ -покрывающих) подгрупп, где $\mathfrak{G}_\pi$ и $\mathfrak{N}$ — классы всех π -групп и всех nilpotentных групп соответственно. Отметим, что в классе всех разрешимых групп понятия $\mathfrak{F}$ -проектора и $\mathfrak{F}$ -покрывающей подгруппы совпадают. Многие важные свойства данных видов подгрупп в случае, когда $\mathfrak{F}$ является локальной формацией, были установлены Р. Картером, Т. Хоуксом, К. Дерком, Б. Хуппертом, Л. А. Шеметковым, Э. Ф. Шмигиревым, П. Шмидом, В. А. Ведерниковым, С. Ф. Каморниковым, Т. И. Васильевой и др. (см., например, [6–8]). Свойства $\mathfrak{F}$ -проекторов и $\mathfrak{F}$ -покрывающих подгрупп в группах для примитивно замкнутого гомоморфа $\mathfrak{F}$ изучались в работах [9, 10] и др.

В работе [4] для непустого класса групп $\mathfrak{F}$ были определены $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторы и $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающие подгруппы и получен ряд их ключевых свойств (существование, сопряженность, вложение и др.) для случая, когда класс $\mathfrak{F}$ является ω -локальной формацией или ω -примитивно замкнутым гомоморфом. В работе [11] исследовалась взаимосвязь $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторов и нормальных ω -подгрупп в группах. Настоящая работа продолжает исследования в данном направлении: изучаются условия, при которых $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторы и $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающие подгруппы совпадают с другими подгруппами в группе. Решены следующие задачи: для наследственного гомоморфа



$\mathfrak{X}$ и непустого ω -примитивно замкнутого в $\mathfrak{X}$ гомоморфа $\mathfrak{F}$ получены условия совпадения $\mathfrak{F}^\omega$ -проектора нильпотентной ω -группы G с ее π -холловой подгруппой, где $\pi = \chi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ (теорема 1); для непустой формации $\mathfrak{H}$ и формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\omega \mathfrak{H}$ установлены условия, при которых $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа группы $G = A \rtimes B$ совпадает с $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппой группы B (теорема 2). В качестве следствий из теоремы 1 вытекают известные свойства $\mathfrak{F}$ -проекторов [12, гл. 5]. Теорема 2 развивает результаты С. Ф. Каморникова из [13] о $\mathfrak{F}$ -покрывающих подгруппах.

1. Предварительные сведения

Используемые определения и обозначения для групп стандартны (см., например, [6, 7, 12]). Приведем лишь некоторые из них.

Запись $A \leq G$ ($A < G$, $A \triangleleft G$, $A < \cdot G$) означает, что A — подгруппа (соответственно собственная, нормальная, максимальная подгруппа) группы G ; $A \rtimes B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B группы G ; $\text{Core}_G(H)$ — ядро подгруппы H в группе G ; $\Phi(G)$ и $F(G)$ — подгруппа Фраттини и подгруппа Фиттинга группы G соответственно [12]. Запись $A := B$ означает равенство $A = B$ по определению.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, π — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$; $p \in \mathbb{P}$. Тогда $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$, $p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Группа G называется π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$, где $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G ; $\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \pi(G)$. Группа G называется π -отделимой, если для каждого ее главного фактора H/K имеет место $|\pi \cap \pi(H/K)| \leq 1$. Пусть p — простое число. Группа G называется p -нильпотентной, если $G_{p'} \triangleleft G$, где $G_{p'}$ — p' -холлова подгруппа группы G [6, с. 248]. Через $\mathfrak{G}$ обозначается класс всех конечных групп; $\chi(\mathfrak{F})$ — характеристика класса групп $\mathfrak{F}$, т.е. множество всех простых чисел p , для которых в $\mathfrak{F}$ имеется неединичная p -группа [12, с. 165].

Класс $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно гомоморфных образов, т.е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Гомоморф $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений, т.е. из $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/(A \cap B) \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *наследственным (нормально наследственным)*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно подгрупп (нормальных подгрупп), т.е. из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \leq G$ ($N \triangleleft G$) следует, что $N \in \mathfrak{F}$. Нормально наследственный класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп, т.е. из $G = AB$, где $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A, B \in \mathfrak{F}$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *формацией Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ является формацией и классом Фиттинга. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация Фиттинга. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , т.е. наименьшая нормальная подгруппа в G , фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$; $G_{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$ -радикал группы G , т.е. наибольшая нормальная подгруппа в G , принадлежащая $\mathfrak{F}$ [6, гл. 1, § 1].

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$ -максимальной в G , если $H \in \mathfrak{F}$ и из $H \leq K \leq G$ и $K \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $K = H$ [12, с. 169].

Произведением классов групп $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ называется класс групп следующего вида:

$$\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid \exists N \triangleleft G \text{ такая, что } N \in \mathfrak{F}_1 \text{ и } G/N \in \mathfrak{F}_2\}.$$

Если $\mathfrak{F}_2$ — непустая формация, то $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1\}$ — *корадикальное произведение* классов $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ [7, с. 337]; если $\mathfrak{F}_1$ — непустой класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}_1 \diamond \mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}_2\}$ — *радикальное произведение* классов $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ [7, с. 566].

В дальнейшем ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$; $\mathfrak{F}_\omega$ — класс всех ω -групп, принадлежащих классу $\mathfrak{F}$; $O_\omega(G)$ — наибольшая нормальная ω -подгруппа группы G . Формация $\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для любого } p \in \pi(G) \cap \omega\}$ называется ω -локальной формацией с ω -спутником f , где f — отображение множества $\omega \cup \{\omega'\}$ во множество всех формаций групп, $F_p(G)$ — наибольшая нормальная p -нильпотентная подгруппа группы G (см., например, [14, с. 46]).



Замечание 1. Всякая локальная формация является ω -локальной для любого ω . Если $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, то ω -локальная формация $\mathfrak{F}$ является локальной формацией (см., например, [14, следствия 3.2 и 4.2]).

Класс $\mathfrak{F}$ называется *насыщенным* (ω -насыщенным), если для любой $N \triangleleft G$ такой, что $N \leq \Phi(G)$ (соответственно $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$), справедливо: из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$ [7, с. 272] (соответственно, [15, с. 118]).

Замечание 2. Согласно теореме Гашюца – Любезедер – Шмидта [7, (IV, 4.6)], непустая формация является насыщенной тогда и только тогда, когда она является локальной. В [15, теорема 1] установлена эквивалентность понятий ω -насыщенной и ω -локальной формаций.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — непустые классы групп, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *примитивно замкнутым* в $\mathfrak{X}$ или, коротко, *P-замкнутым* в $\mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ справедливо: из $G/\text{Core}_G(M) \in \mathfrak{F}$ для любой $M < \cdot G$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$ (см., например, [7, с. 285]). Класс $\mathfrak{F}$ называется ω -*примитивно замкнутым* в $\mathfrak{X}$ или, коротко, ω P-*замкнутым* в $\mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ справедливо: из $G/(\text{Core}_G(M) \cap O_\omega(G)) \in \mathfrak{F}$ для любой $M < \cdot G$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$ [4, определение 2.5]. Класс $\mathfrak{F}$ называется *примитивно замкнутым* (ω -*примитивно замкнутым*), если $\mathfrak{F}$ является примитивно замкнутым (ω -примитивно замкнутым) в $\mathfrak{G}$. Примитивно замкнутый гомоморф называется *классом Шунка* [12, с. 163].

Замечание 3. Согласно [4, лемма 2.2] всякий примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф является ω -примитивно замкнутым в $\mathfrak{X}$ для любого ω . Если $\omega = \pi(\mathfrak{F})$, то ω -примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$ класс $\mathfrak{F}$ является примитивно замкнутым в $\mathfrak{X}$ [4, замечание 2.3]. Непустая формация $\mathfrak{F}$ ω -примитивно замкнута тогда и только тогда, когда она ω -насыщенна [4, лемма 2.4]).

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^\omega$ -*проектором* в G , если для любой нормальной ω -подгруппы N группы G подгруппа HN/N является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в G/N [4, определение 3.1]. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^\omega$ -*покрывающей подгруппой* группы G , если $H \in \mathfrak{F}$, и из того, что $H \leq U \leq G$, V — нормальная ω -подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$, следует, что $U = HV$ [4, определение 3.2].

Замечание 4. Если $\pi(G) \subseteq \omega$, то понятия $\mathfrak{F}^\omega$ -проектора и $\mathfrak{F}$ -проектора ($\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппы и $\mathfrak{F}$ -покрывающей подгруппы) совпадают [4, замечание 3.1].

При доказательстве основных результатов используются следующие леммы.

Лемма 1 ([4, лемма 3.2]). Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Если H — $\mathfrak{F}^\omega$ -проектор группы G и N — нормальная ω -подгруппа в G , то HN/N является $\mathfrak{F}^\omega$ -проектором в G/N .

Лемма 2 ([4, лемма 3.3]). Пусть $\mathfrak{F}$ — гомоморф. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппой группы G тогда и только тогда, когда H является $\mathfrak{F}^\omega$ -проектором каждой подгруппы группы G , в которой H содержится.

Лемма 3 ([4, лемма 3.4 (2)]). Пусть $\mathfrak{F}$ — гомоморф. Если H — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа группы G и $H \leq K \leq G$, то H — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа в K .

Лемма 4 ([16, теорема 2]). Пусть $\mathfrak{F}$ — ω -локальная формация. Если $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G является $\pi(\mathfrak{F})$ -отделимой ω -группой, то G имеет, по крайней мере, одну $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающую подгруппу ($\mathfrak{F}^\omega$ -проектор) и любые две $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающие подгруппы (любые два $\mathfrak{F}^\omega$ -проектора) из G сопряжены в G .

Лемма 5 ([4, теорема 3.4]). Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ω -примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф, $G \in \mathfrak{X}$, N — нильпотентная нормальная ω -подгруппа группы G . Если H — $\mathfrak{F}$ -подгруппа в G такая, что $G = HN$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппе из G . В частности, если H — $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа в G , то H является $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппой в G .



Лемма 6. Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ — классы групп.

- (1) [7, (IV.1.7)] Если $\mathfrak{F}_1$ — нормальный наследственный класс и $\mathfrak{F}_2$ — формация, то $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$.
- (2) [7, (IX.1.11)] Если $\mathfrak{F}_1$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{F}_2$ — гомоморф, то $\mathfrak{F}_1 \diamond \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$.
- (3) [7, (IV.1.8.c)] Если $\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_3$ — формации, то $(\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2) \circ \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1 \circ (\mathfrak{F}_2 \circ \mathfrak{F}_3)$.
- (4) [12, теорема 5.10 (2)] Если $\mathfrak{F}_1$ — гомоморф и $\mathfrak{F}_2$ — формация, то $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2$ — гомоморф.

Лемма 7 ([17, с. 53]). Всякая подгруппа π -отделимой группы π -отделима.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству теоремы 5.6 [12].

Лемма 8. Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ω -примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф. Тогда $\mathfrak{F}_\omega \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{\chi(\mathfrak{F}) \cap \omega}$.

2. Основные результаты

2.1. $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторы и холловы подгруппы в группах

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ — непустой ω -примитивно замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф, $\pi = \chi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, G — нильпотентная ω -группа из класса $\mathfrak{X}$. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$ -проектором в G тогда и только тогда, когда H — π -холлова подгруппа в G .

Доказательство. Пусть H — подгруппа группы G .

1. Предварительно установим, что H является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в G в том и только в том случае, когда H — π -холлова подгруппа в G .

Пусть H — $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы G . Ввиду условия теоремы H является нильпотентной ω -группой. Тогда из $H \in \mathfrak{F}$ получаем $H \in \mathfrak{F}_\omega \cap \mathfrak{N}$. Согласно лемме 8 $\mathfrak{F}_\omega \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\pi$. Следовательно, H является π -группой, и по теореме Холла подгруппа H содержится в некоторой π -холловой подгруппе P группы G . По условию теоремы подгруппа P является нильпотентной и поэтому $P \in \mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}_\omega \cap \mathfrak{N}$. Это означает, что $P \in \mathfrak{F}$. Тогда из $H \subseteq P$ в силу $\mathfrak{F}$ -максимальности подгруппы H в G получаем, что $H = P$. Следовательно, подгруппа H является π -холловой в G .

Пусть теперь H — π -холлова подгруппа группы G . С учетом условия теоремы $H \in \mathfrak{N}_\pi$. Так как $\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}_\omega \cap \mathfrak{N}$, то $H \in \mathfrak{F}$. Тогда существует $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа K группы G , содержащая H . Поскольку K является нильпотентной ω -группой, принадлежащей $\mathfrak{F}$, то ввиду леммы 8 $K \in \mathfrak{N}_\pi$. Из того, что K — π -подгруппа группы G , H — π -холлова подгруппа группы G и $H \subseteq K$, получаем, что $H = K$. Тем самым установлено, что H является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой группы G .

2. Докажем, что подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$ -проектором в G тогда и только тогда, когда H является π -холловой подгруппой в G .

Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$ -проектор группы G . Тогда согласно определению $\mathfrak{F}^\omega$ -проектора группы HN/N является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в G/N для любой нормальной ω -подгруппы N группы G , и, в частности, при $N = 1$ получаем, что H является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в G . По доказанному в пункте 1 данной теоремы заключаем, что H — π -холлова подгруппа группы G .

Пусть H является π -холловой подгруппой в G . Тогда, как следует из пункта 1 доказательства теоремы, H — $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы G . Так как $G = HG$, то по лемме 5 H — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа в G . Отсюда по лемме 2 получаем, что H является $\mathfrak{F}^\omega$ -проектором в G . $\square$

Следствие 1 ([12, следствие 1 теоремы 5.23]). Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Шунка, G — нильпотентная группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$ -проектором в G тогда и только тогда, когда H — $\chi(\mathfrak{F})$ -холлова подгруппа в G .



Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}$ — класс Шунка, т. е. примитивно замкнутый гомоморф в $\mathfrak{G}$, то по замечанию 3 $\mathfrak{F}$ — ω -примитивно замкнутый гомоморф в $\mathfrak{G}$ для любого ω . Пусть $\omega = \mathbb{P}$. Тогда G является ω -группой, $\chi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \chi(\mathfrak{F})$. Если $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, то по теореме 1, с учетом замечания 4, утверждение верно. Если $\mathfrak{F} = \emptyset$, то справедливость утверждения очевидна. $\square$

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — ω -локальная формация, $\pi = \chi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, G — нильпотентная ω -группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$ -проектором в G тогда и только тогда, когда H — π -холлова подгруппа группы G .

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}$ — ω -локальная формация, то $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ и по замечанию 2 $\mathfrak{F}$ — ω -насыщенная формация. Тогда по замечанию 3 $\mathfrak{F}$ является ω -примитивно замкнутым гомоморфом в $\mathfrak{G}$ и по теореме 1 утверждение верно. $\square$

Следствие 3 ([12, следствие 2 теоремы 5.23]). Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, G — нильпотентная группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$ -проектором в G тогда и только тогда, когда H — $\chi(\mathfrak{F})$ -холлова подгруппа группы G .

Доказательство. Если $\mathfrak{F} = \emptyset$, то справедливость утверждения очевидна. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. Тогда по замечанию 2 $\mathfrak{F}$ — локальная формация и ввиду замечания 1 $\mathfrak{F}$ является ω -локальной формацией для любого ω . Пусть $\omega = \mathbb{P}$. Тогда G является ω -группой, $\chi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \chi(\mathfrak{F})$ и по следствию 2, с учетом замечания 4, утверждение верно. $\square$

Следствие 4. Пусть $\mathfrak{F}$ — ω -локальная формация, $\pi = \chi(\mathfrak{F}) \cap \omega$, G — метанильпотентная ω -группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^\omega$ -проектором в G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы G и $HF(G)/F(G)$ — π -холлова подгруппа группы $G/F(G)$.

Доказательство. Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$ -проектор группы G . Тогда по определению $\mathfrak{F}^\omega$ -проектора группы H является $\mathfrak{F}$ -максимальной подгруппой в G . Поскольку $F(G)$ — нормальная ω -подгруппа в G , то по лемме 1 $HF(G)/F(G)$ — $\mathfrak{F}^\omega$ -проектор группы $G/F(G)$. Так как $G/F(G)$ — нильпотентная ω -группа, то по следствию 2 $HF(G)/F(G)$ — π -холлова подгруппа в $G/F(G)$.

Пусть теперь H — $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы G и $HF(G)/F(G)$ — π -холлова подгруппа в $G/F(G)$. Поскольку G — метанильпотентная ω -группа, то G является разрешимой, а значит, и $\pi(\mathfrak{F})$ -отделимой ω -группой. Согласно лемме 7 $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G также является $\pi(\mathfrak{F})$ -отделимой группой. Тогда по лемме 4 в G существует $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа. Пусть K — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа в G . Согласно лемме 2 K — $\mathfrak{F}^\omega$ -проектор группы G и по лемме 1 $KF(G)/F(G)$ — $\mathfrak{F}^\omega$ -проектор группы $G/F(G)$. По следствию 2 $KF(G)/F(G)$ является π -холловой подгруппой в $G/F(G)$. Так как группа $G/F(G)$ нильпотентна, то $KF(G)/F(G) = HF(G)/F(G)$ и поэтому $KF(G) = HF(G) := G_1$. По лемме 5 подгруппа H является $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппой группы G_1 , а значит, ввиду леммы 2 и $\mathfrak{F}^\omega$ -проектором в G_1 . Согласно леммам 2 и 3, K — $\mathfrak{F}^\omega$ -проектор в G_1 .

Поскольку $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G_1 является $\pi(\mathfrak{F})$ -отделимой ω -группой, то по лемме 4 H и K сопряжены в группе G_1 , а следовательно, и в группе G , т. е. $H = K^g$ для некоторого $g \in G$. Так как K — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа в G , то H также является $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппой в G и ввиду леммы 2 H есть $\mathfrak{F}^\omega$ -проектор в G . $\square$

Следствие 5 ([12, следствие 1 теоремы 5.24]). Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, G — метанильпотентная группа. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}$ -проектором в G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{F}$ -максимальная подгруппа группы G и $HF(G)/F(G)$ — $\chi(\mathfrak{F})$ -холлова подгруппа группы $G/F(G)$.

Доказательство. Если $\mathfrak{F} = \emptyset$, то утверждение верно. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация. Тогда по замечанию 2 $\mathfrak{F}$ — локальная формация и ввиду замечания 1 является ω -локальной формацией для любого ω . Пусть $\omega = \mathbb{P}$. Тогда $G/F(G)$ является нильпотентной ω -группой, $\chi(\mathfrak{F}) \cap \omega = \chi(\mathfrak{F})$ и согласно следствию 4 и замечанию 4 утверждение верно. $\square$



2.2. $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающие подгруппы в группах

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая формация, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\omega \mathfrak{H}$, $G = A \rtimes B$, A — ω -группа, $H \leq G$, $H \subseteq B$, $H_1 = HA$. Подгруппа H_1 группы G является $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппой в G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа в B .

Доказательство. Так как $A \triangleleft G$, то $H_1 \leq G$. Поскольку $A \triangleleft H_1$ и $A \cap H = 1$, то $H_1 = A \rtimes H$.

I. *Необходимость.* Пусть H_1 — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа группы G . Установим, что H является $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппой в B . Так как класс $\mathfrak{G}_\omega$ является нормально наследственным гомоморфом, то по лемме 6 (1, 4) класс $\mathfrak{F}$ также является гомоморфом. Тогда из $H_1 \in \mathfrak{F}$ следует, что $H \cong H_1/A \in \mathfrak{F}$.

Пусть $H \leq R \leq B$, L — нормальная ω -подгруппа в R и $R/L \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $R = HL$. Пусть $L_1 := AL$, $R_1 := AR$. Тогда $L_1 \subseteq R_1$. Поскольку $A \triangleleft G$, то $R_1 \leq G$ и $L_1 \leq G$, $H_1 \leq R_1 \leq G$. Из $R \subseteq B$ следует, что $A \cap L = 1$ и $A \cap R = 1$. Таким образом, $L_1 = A \rtimes L$, $R_1 = A \rtimes R$.

Установим, что L_1 — нормальная ω -подгруппа в R_1 . Действительно, $|L_1| = |A| \cdot |L|$ — ω -число. Далее, для любого $x \in R_1$ справедливо $x = ra$, где $r \in R$, $a \in A$. Тогда $L_1^x = (AL)^x = AL^x = AL^{ra} = A(L^r)^a = AL = L_1$. Следовательно, $L_1 \triangleleft R_1$.

Проверим, что $R_1/L_1 \in \mathfrak{F}$. Так как по модулярному тождеству Дедекинда $R \cap AL = L(A \cap R) = L$, то $R_1/L_1 = RA/LA = RLA/LA \cong R/(R \cap LA) = R/L$. Поскольку $R/L \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — класс групп, то $R_1/L_1 \in \mathfrak{F}$.

Из того, что H_1 — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа группы G , $H_1 \leq R_1 \leq G$, L_1 — нормальная ω -подгруппа в R_1 и $R_1/L_1 \in \mathfrak{F}$, согласно определению $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппы следует, что $R_1 = H_1 L_1$. Тогда $R_1 = AHAL = AHL = A \rtimes HL$. Поскольку $R_1 = A \rtimes R$, то $|R| = |HL|$. Таким образом, $R = HL$. Это согласно определению $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппы означает, что H — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа в B .

II. *Достаточность.* Пусть H — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа группы B . Покажем, что H_1 является $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппой в G . Из $H_1 = A \rtimes H$, $A \in \mathfrak{G}_\omega$ и $H \in \mathfrak{F}$ по определению произведения классов групп следует, что $H_1 \in \mathfrak{G}_\omega \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{H}$ — формация и класс $\mathfrak{G}_\omega$ является нормально наследственной формацией, то ввиду леммы 6 (1, 3) $\mathfrak{G}_\omega \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\omega(\mathfrak{G}_\omega \mathfrak{H}) = \mathfrak{G}_\omega \circ (\mathfrak{G}_\omega \circ \mathfrak{H}) = (\mathfrak{G}_\omega \circ \mathfrak{G}_\omega) \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{G}_\omega \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Таким образом, $H_1 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $H_1 \leq U_1 \leq G$, V_1 — нормальная ω -подгруппа в U_1 такая, что $U_1/V_1 \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $U_1 = H_1 V_1$. Пусть $K := B \cap U_1$. Установим, что $U_1 = A \rtimes K$. Действительно, согласно модулярному тождеству Дедекинда $U_1 = U_1 \cap G = U_1 \cap AB = A(U_1 \cap B) = AK$. Ввиду того, что $K \leq B$, получаем $K \cap A = 1$. Следовательно, $U_1 = A \rtimes K$.

Пусть $K_1 := V_1 \cap K$, $A_1 := V_1 \cap A$. Проверим, что $V_1 = A_1 \rtimes K_1$. Так как $A \triangleleft G$, то $A_1 K_1 \leq V_1$. Поскольку $U_1 = A \rtimes K$, то

$$|U_1/V_1| = \frac{|A| \cdot |K|}{|V_1|}. \quad (1)$$

С другой стороны, $U_1/V_1 = AV_1/V_1 \cdot KV_1/V_1$. Пусть $X := AV_1/V_1$ и $Y := KV_1/V_1$. Тогда

$$|U_1/V_1| = \frac{|X| \cdot |Y|}{|X \cap Y|}.$$

Так как $X \cong A/A \cap V_1 = A/A_1$, $Y \cong K/K \cap V_1 = K/K_1$, $X \cap Y = (A \cap K)V_1/V_1 = V_1/V_1$, то $|U_1/V_1| = |X| \cdot |Y| = |A/A_1| \cdot |K/K_1|$. Следовательно, ввиду (1) приходим к равенству $|V_1| = |A_1| \cdot |K_1|$. Поскольку $A_1 \cap K_1 = 1$, то $|V_1| = |A_1 K_1|$. Таким образом, $V_1 = A_1 \rtimes K_1$.

Поскольку $H \leq H_1 \leq U_1$ и $H \subseteq B$, то $H \subseteq U_1 \cap B = K$. Поэтому $H \leq K \leq B$. Так как V_1 — нормальная ω -подгруппа группы U_1 , то K_1 — нормальная ω -подгруппа группы K . Установим, что $K/K_1 \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 6 (1, 4) класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\omega \mathfrak{H}$ является гомоморфом.



Тогда из $U_1/V_1 \in \mathfrak{F}$ следует, что $KV_1/V_1 \cong (U_1/V_1)/(AV_1/V_1) \in \mathfrak{F}$. Так как $KV_1/V_1 \cong K/K_1$, то $K/K_1 \in \mathfrak{F}$.

Таким образом, из того, что $H \leq K \leq B$, K_1 — нормальная ω -подгруппа в K и $K/K_1 \in \mathfrak{F}$, согласно определению $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппы получаем равенство $K = HK_1$. Тогда $U_1 = AK = ANK_1 = H_1K_1 = H_1K_1V_1 = H_1V_1$. Тем самым установлено, что H_1 — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа группы G . $\square$

Следствие 6. Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая формация, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\omega \mathfrak{H}$, $G = A \rtimes B$, A — ω -холлова подгруппа в G , $H \leq G$, $H \subseteq B$, $H_1 = HA$. Подгруппа H_1 группы G является $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппой группы G тогда и только тогда, когда H — $\mathfrak{H}^\omega$ -покрывающая подгруппа группы B .

Доказательство. I. *Необходимость.* Пусть H_1 — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа группы G . Тогда по теореме 2 H является $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппой в B . Установим, что H — $\mathfrak{H}^\omega$ -покрывающая подгруппа в B . Так как по лемме 6 (2) $H_1 = A \rtimes H \in \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\omega \mathfrak{H} = \mathfrak{G}_\omega \diamond \mathfrak{H}$ и A — ω -холлова подгруппа в G , то по определению радикального произведения классов групп $H \cong H_1/A = H_1/O_\omega(H_1) \in \mathfrak{H}$, т.е. $H \in \mathfrak{H}$.

Пусть $H \leq R \leq B$, L — нормальная ω -подгруппа в R и $R/L \in \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, то $R/L \in \mathfrak{F}$. Поскольку H — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа в B , то $R = HL$. Это означает, что H — $\mathfrak{H}^\omega$ -покрывающая подгруппа группы B .

II. *Достаточность.* Пусть H — $\mathfrak{H}^\omega$ -покрывающая подгруппа группы B . Покажем, что H_1 является $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающей подгруппой в G . Из $H_1 = A \rtimes H$, $A \in \mathfrak{G}_\omega$ и $H \in \mathfrak{H}$ по определению произведения классов групп следует, что $H_1 \in \mathfrak{G}_\omega \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$.

Пусть $H_1 \leq U_1 \leq G$, V_1 — нормальная ω -подгруппа в U_1 такая, что $U_1/V_1 \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $U_1 = H_1V_1$. Пусть $K := B \cap U_1$, $K_1 := V_1 \cap K$, $A_1 := V_1 \cap A$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 2, $U_1 = A \rtimes K$ и $V_1 = A_1 \rtimes K_1$, $H \leq K \leq B$ и K_1 — нормальная ω -подгруппа группы K .

Установим, что $K/K_1 \in \mathfrak{H}$. Поскольку A — ω -холлова подгруппа группы G и $A \subseteq U_1$, то A — ω -холлова подгруппа в U_1 . Тогда AV_1/V_1 — ω -холлова подгруппа в U_1/V_1 и, значит, $AV_1/V_1 = O_\omega(U_1/V_1)$. Из $U_1/V_1 \in \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\omega \diamond \mathfrak{H}$ по определению радикального произведения классов групп следует, что $K/K_1 \cong KV_1/V_1 \cong (U_1/V_1)/(AV_1/V_1) = (U_1/V_1)/O_\omega(U_1/V_1) \in \mathfrak{H}$.

Таким образом, из того, что H — $\mathfrak{H}^\omega$ -покрывающая подгруппа в B , $H \leq K \leq B$, K_1 — нормальная ω -подгруппа в K и $K/K_1 \in \mathfrak{H}$, согласно определению $\mathfrak{H}^\omega$ -покрывающей подгруппы получаем равенство $K = HK_1$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 2, $U_1 = ANK_1 = H_1V_1$. Тем самым установлено, что H_1 — $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающая подгруппа группы G . $\square$

Заключение

В работе решены две задачи:

- 1) для заданного класса групп $\mathfrak{F}$ и фиксированного множества π простых чисел установлена взаимосвязь $\mathfrak{F}^\omega$ -проекторов и π -холловых подгрупп нильпотентной ω -группы (теорема 1);
- 2) для заданного класса групп $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающих подгрупп группы $G = A \rtimes B$ и $\mathfrak{F}^\omega$ -покрывающих подгрупп ее подгруппы B (теорема 2).

Приведенные следствия теоремы 1 представляют известные результаты о $\mathfrak{F}$ -проекторах групп (см., например, [12, гл. 5]). Теорема 2 развивает результаты С. Ф. Каморникова из [13] о $\mathfrak{F}$ -покрывающих подгруппах групп (см. [13, лемма 2]).

Список литературы

1. Gaschütz W. Zur theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Mathematische Zeitschrift. 1962. Vol. 80, iss. 4. P. 300–305. <https://doi.org/10.1007/BF01162386>
2. Schunck H. $\mathfrak{H}$ -Untergruppen in endlichen auflösbaren gruppen // Mathematische Zeitschrift. 1967. Vol. 97, iss. 4. P. 326–330. <https://doi.org/10.1007/BF01112173>
3. Шеметков Л. А. О произведении формаций // Доклады АН БССР. 1984. Т. 28, № 2. С. 101–103.
4. Ведерников В. А., Сорокина М. М. $\mathfrak{F}$ -проекторы и $\mathfrak{F}$ -покрывающие подгруппы конечных групп // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 6. С. 1224–1239. <https://doi.org/10.17377/smzh.2016.57.603>, EDN: XBEDHB



5. Gaschütz W. Lectures on Subgroups of Sylow type in finite soluble groups. Canberra : Australian National University, 1979. 100 p. (Notes on pure mathematics, vol. 11).
6. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. Москва : Наука, 1978. 272 с.
7. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
8. Васильева Т. И., Прокопенко А. И. Проекторы и решетки нормальных подгрупп конечных групп // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2004. Т. 48, № 4. С. 34–37. EDN: YYBIBN
9. Erickson R. Projectors of finite groups // Communication in Algebra. 1982. Vol. 10, iss. 18. P. 1919–1938. <https://doi.org/10.1080/00927878208822814>
10. Förster P. Projektive Klassen endlicher Gruppen I. Schunck- und Gaschutzklassen // Mathematische Zeitschrift. 1984. Vol. 186. P. 149–178. <https://doi.org/10.1007/BF01161802>
11. Васильева Т. И. О пересечениях обобщенных проекторов с произведениями нормальных подгрупп конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2019. № 2 (39). С. 61–65. EDN: ZBSSKX
12. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск : Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
13. Каморников С. Ф. О формационных подгруппах конечных групп // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Труды Гомельского семинара / под. ред. М. И. Салука. Минск : Наука и техника. 1986. С. 69–74.
14. Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω -веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60. <https://doi.org/10.4213/mzm327>, EDN: GJVNYM
15. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
16. Ведерников В. А., Сорокина М. М. On properties of $\mathfrak{F}^\omega$ -projectors and $\mathfrak{F}^\omega$ -covering subgroups of finite groups // Актуальные проблемы прикладной математики и физики : международная научная конференция, Нальчик – Терскол, 17–21 мая 2017 г. Нальчик : ИПМА КБНЦ РАН, 2017. С. 262–263.
17. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Минск : Наука и техника, 1964. 158 с.

References

1. Gaschütz W. Zur theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, 1962, vol. 80, iss. 4, pp. 300–305 (in German). <https://doi.org/10.1007/BF01162386>
2. Schunck H. $\mathfrak{H}$ -Untergruppen in endlichen auflösbaren gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, 1967, vol. 97, iss. 4, pp. 326–330 (in German). <https://doi.org/10.1007/BF01112173>
3. Shemetkov L. A. On the product of formations. *Doklady AN BSSR*, 1984, vol. 28, iss. 2. pp. 101–103 (in Russian).
4. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. $\mathfrak{F}$ -projectors and $\mathfrak{F}$ -covering subgroups of finite groups. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, iss. 6, pp. 957–968. <https://doi.org/10.1134/S0037446616060033>, EDN: XBEDHB
5. Gaschutz W. *Lectures on Subgroups of Sylow type in finite soluble groups*. Notes on pure mathematics, vol. 11. Canberra, Australian National University, 1979. 100 p.
6. Shemetkov L. A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow, Nauka, 1978. 272 p. (in Russian).
7. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
8. Vasil'eva T. I., Prokopenko A. I. Projectors and lattices of normal subgroups of finite groups. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2004, vol. 48, iss. 4, pp. 34–37 (in Russian). EDN: YYBIBN
9. Erickson R. P. Projectors of finite groups. *Communications in Algebra*, 1982, vol. 10, iss. 18, pp. 1919–1938. <https://doi.org/10.1080/00927878208822814>
10. Förster P. Projektive Klassen endlicher Gruppen I. Schunck- und Gaschutzklassen. *Mathematische Zeitschrift*, 1984, vol. 186, pp. 149–178 (in German). <https://doi.org/10.1007/BF01161802>
11. Vasilyeva T. I. On the intersections of generalized projectors with the products of normal subgroups of finite groups. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2019, iss. 2 (39), pp. 61–65 (in Russian). EDN: ZBSSKX
12. Monakhov V. S. *Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov* [Introduction to the theory of finite groups and their classes]. Minsk, Vysheyshaya shkola, 2006. 207 p. (in Russian).
13. Kamornikov S. F. On formation subgroups of finite groups. In: Saluk M. I. (ed.) *Arifmeticheskoe i*



- podgruppovoe stroenie konechnykh grupp. Trudy Gomel'skogo seminara* [Arithmetic and Subgroup Structure of Finite Groups. Work of the Gomel Seminar]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1986, pp. 69–74 (in Russian).
14. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. ω -fibered formations and Fitting classes of finite groups. *Mathematical Notes*, 2002, vol. 71, iss. 1, pp. 39–55. <https://doi.org/10.1023/A:1013922206539>, EDN: GJVNYM
 15. Skiba A. N., Shemetkov L. A. Multiple ω -local formations and Fitting classes of finite groups. *Siberian Advances in Mathematics*, 2000, vol. 10, iss. 2, pp. 112–141.
 16. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. On properties of $\mathfrak{F}^\omega$ -projectors and $\mathfrak{F}^\omega$ -covering subgroups of finite groups. In: *Actual Problems of Applied Mathematics and Physics*, May 17–21, 2017, Nalchik – Terskol. Nalchik, IAMA KBSC RAS, 2017, pp. 262–263 (in Russian).
 17. Chunikhin S. A. *Podgruppy konechnykh grupp* [Subgroups of finite groups]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1964. 158 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 19.05.2023

Принята к публикации / Accepted 03.07.2023

Опубликована / Published 29.11.2024



МЕХАНИКА

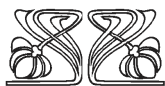
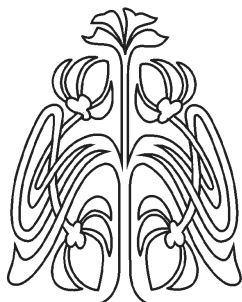
Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 536–551

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 536–551

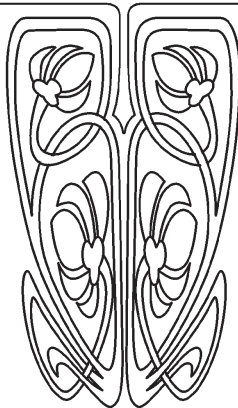
<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>

EDN: NZJSQK



Научный
отдел



Научная статья
УДК 514.85,531.36

«Парадоксальный» механизм П. Л. Чебышёва

С. Н. Бурьян

Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем, Россия, 191167, г. Санкт-Петербург, наб. Обводного канала, д. 29

Бурьян Сергей Николаевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, burianserg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, AuthorID: 974092

Аннотация. В статье рассматривается кинематика и динамика «парадоксального» механизма П. Л. Чебышёва. В конфигурационном пространстве этого механизма есть шесть особых точек, которые последовательно проходятся при полном обороте ведущего звена. В этих точках голономные связи, наложенные на систему, становятся линейно зависимыми, поэтому применить стандартный вывод уравнений движения в этих точках не представляется возможным. Свойства парадоксального механизма основаны на свойствах лямбда-механизма. Траектория вершины лямбда-механизма в «парадоксальном» механизме расположена между двумя окружностями и касается каждой окружности в трех точках. В соответствующих положениях «парадоксального» механизма возникают особенности конфигурационного пространства. В статье показано, что в окрестности особой точки конфигурационное пространство является объединением двух гладких кривых, которые пересекаются под ненулевым углом. Для численного и аналитического моделирования параметров «парадоксального» механизма приводятся основные формулы из трудов П. Л. Чебышёва. Для описания динамики «парадоксальный» механизм представляется как объединение лямбда-механизма и сингулярного маятника, движения которых ограничены двумя голономными связями. Выписаны уравнения движения и найдены возникающие силы реакции. Показано, что при малом увеличении длины звена двойного маятника конфигурационное пространство распадается на две непересекающиеся кривые. Чем меньше становится возмущение звена, тем больше по величине множители Лагранжа около особых конфигураций.

Ключевые слова: механизмы Чебышёва, «парадоксальный» механизм, шарнирный механизм, особая точка, голономная связь, множители Лагранжа



Для цитирования: Бурьян С. Н. «Парадоксальный» механизм П. Л. Чебышёва // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 536–551. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>, EDN: NZJSQK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

The “paradoxical” mechanism of P. L. Chebyshev

S. N. Burian

State Research Institute of Applied Problems, 29 Naberezhnaya Obvodnogo kanala, St. Petersburg 191167, Russia

Sergey N. Burian, burianserg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, AuthorID: 974092

Abstract. The kinematics and dynamics of P. L. Chebyshev’s “paradoxical” mechanism are considered. The point of interest in the dynamics of the “paradoxical” mechanism is connected with the fact that its configuration space contains six singular points. These points are successively passed through a full turn of the handle. Holonomic constraints which are imposed on the system become linearly dependent at singular points. Thus it is impossible to apply the standard methods of derivation of the motion equations at singular points. The properties of the “paradoxical” mechanism are based on the properties of the lambda mechanism. P. L. Chebyshev designed many mechanisms for particular types of motion by using the construction of the lambda mechanism. For example, it is possible to obtain an anti-rotation mechanism, a mechanism with two swings per revolution of the handle, or a mechanism with a stop of the driven link with certain parameters of the lambda mechanism. The trajectory of the vertex of the lambda mechanism in the “paradoxical” mechanism is located between two circles and touches each circle at three points. Therefore singular points arise in the configuration space. It is shown in the article that the configuration space consists of two “curves” that intersect at a nonzero angle in the neighbourhood of a singular point. In order to get a numerical and analytical model of the “paradoxical” mechanism, the main formulas from the works of P. L. Chebyshev are given. “Paradoxical” mechanism is represented as a combination of a lambda-mechanism and a singular pendulum, which motions are limited by two holonomic constraints. The equations of motion are written out and the reaction forces are found. It is shown that with a small increase in the length of the double pendulum rod the configuration space splits into two non-intersecting curves. The smaller the link perturbation becomes, the larger the Lagrange multipliers around singular configurations become.

Keywords: Chebyshev’s mechanisms, “paradoxical” mechanism, hinge mechanism, singular point, holonomic constraint, Lagrange multipliers

For citation: Burian S. N. The “paradoxical” mechanism of P. L. Chebyshev. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 536–551 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>, EDN: NZJSQK

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В данной статье рассматривается «парадоксальный» механизм П. Л. Чебышёва. Особенность данного шарнирного механизма заключается в том, что в некоторых положениях возникают дополнительные степени свободы, в результате чего механизм может сменить тип движения. В конфигурационном пространстве «парадоксального» механизма возникают геометрические особенности (или точки ветвления) типа двух пересекающихся кривых. Основной целью исследования является изучение кинематики и динамики «парадоксального» механизма около таких особых конфигураций (особых точек конфигурационного пространства). При



малом возмущении длины одного из звеньев механизма происходит перестройка конфигурационного пространства, которое распадается на объединение двух непересекающихся кривых. Поэтому также исследуется движение механизма при малом возмущении одного из звеньев. Для упрощения анализа рассматривается движение механизма по инерции, но полученные формулы можно напрямую обобщить на случай заданных внешних сил. Оригинальный «парадоксальный» механизм был расположен в горизонтальной плоскости.

Для построения «парадоксального» механизма применяется общая теория лямбда-механизма, которая изложена в работах Чебышёва [1, 2]. Находятся параметры лямбда-механизма, которые позволяют построить приближение всей шатунной кривой к окружности. Формулировка теоремы об альтернансе, которая применяется для определения параметров механизма, приведена в [3, с. 112–114]. На интернет-ресурсе¹ можно найти как текстовое описание механизмов П. Л. Чебышёва, так и трехмерные модели механизмов. Построение уравнений движения голономной системы со связями проводится по методам из [4, 5]. Некоторые модели механизмов, созданные П. Л. Чебышёвым, находятся в музее истории Санкт-Петербургского государственного университета, их описание и общий вид можно найти в [6]. «Парадоксальный» механизм имеет шесть особых точек конфигурационного пространства.

Особенности механических систем с голономными и неголономными связями изучаются в работах [7] и [8]. В статье [9] отмечается необходимость проверки конфигурационного пространства на наличие особых точек. Метод представления сложного шарнирного механизма как композиции нескольких более простых частей с дополнительными связями рассматривается в [10].

В статьях [11, 12] автором исследуются механизм с особенностями конфигурационного пространства, сингулярный маятник. Аналогичный маятник есть и в конструкции «парадоксального» механизма. В статье [12] изложена общая теория движения сингулярного маятника, включая теоретический и численный анализ сил реакции в стержнях. В работе [13] анализируется другой механизм с особенностями конфигурационного пространства — механизм Дарбу.

1. Геометрия лямбда-механизма

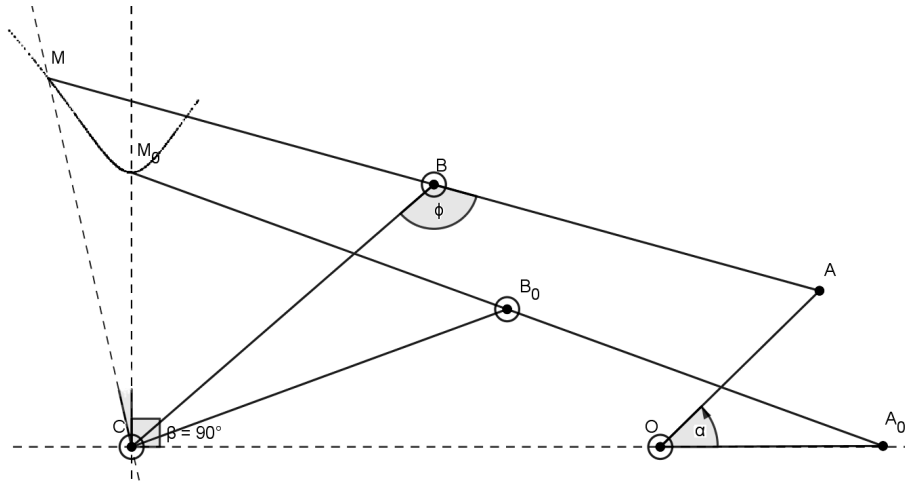
Часть механизмов П. Л. Чебышёва основана на конструкции специального плоского механизма для преобразования вращательного движения в симметричное движение около некоторой оси. Рассуждения в этом разделе следуют работам Чебышёва [1–3], здесь приводятся только основные моменты теории лямбда-механизма. Подробное описание общей теории есть в книге [3]. Дополнительные рассуждения, которых нет в [1–3], записаны как «замечания».

Опишем общую конструкцию лямбда-механизма. В плоскости движения механизма есть две закрепленные вершины C и O , расстояние $CO = d$. К вершине O шарнирно крепится стержень OA длины r . Звено ABM состоит из двух отрезков MB и BA равной длины, которые образуют угол $\omega = \angle ABM$. Движение звена ABM ограничено тем, что вершины B и C соединены стержнем BC , при этом $BC = AB = BM = 1$. Значение 1 формально задает масштаб звеньев механизма. Лямбда-механизм можно рассматривать как четырехзвенный шарнирный механизм. В работах П. Л. Чебышёва [1] положение лямбда-механизма параметризуется углом $\varphi = \angle ABC$.

Обозначения A_0 , M_0 , B_0 соответствуют начальным положениям вершин механизма, когда угол COA равен π . Далее углы AOA_0 и MCM_0 отсчитываются от начального положения механизма при $COA = \pi$, как показано на рис. 1. Длина радиус-вектора CM равна:

$$CM = 2 \sin \frac{\omega - \varphi}{2}. \quad (1)$$

¹Проект «Механизмы П. Л. Чебышёва», 2009–2013 гг. URL: <http://www.tcbeb.ru> (дата обращения: 20.03.2023).

Рис. 1. Лямбда-механизм при значении угла $\omega = \pi$ Fig. 1. Lambda mechanism for angle $\omega = \pi$

Косинус угла MCM_0 отклонения вершины M от оси симметрии CM_0 :

$$\cos MCM_0 = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - r^2 + d^2}{4d \sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (2)$$

Угол $\alpha = AOA_0$ отклонения рукоятки OA :

$$\cos \alpha = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - r^2 - d^2}{2dr}. \quad (3)$$

Для одного значения угла φ существуют два значения угла AOA_0 , которые отличаются только знаком углов в выражениях (2) и (3). При вращении звена OA вверх или вниз от линии центров COA_0 точка M описывает кривую, симметричную относительно оси CM_0 .

Замечание 1. Пусть углы α и φ изменяются в пределах $-\pi \leq \alpha \leq \pi$, $0 < \varphi < \pi$. В этом случае значение $\sin \frac{\varphi}{2}$ всегда положительно, поэтому возможно записать зависимость угла φ от угла α из формулы (3):

$$\varphi = 2 \arcsin \sqrt{\frac{r^2 + d^2 + 2rd \cos \alpha}{4}}.$$

Производная функции $\varphi'(\alpha)$ является отрицательной при $0 < \alpha < \pi$, поэтому $\varphi(\alpha)$ монотонно убывает при $0 < \alpha < \pi$. В силу четности функции $\varphi(\alpha)$ аналогично угол φ убывает от максимального значения φ_0 при $\alpha = 0$ до минимального значения φ_1 при $\alpha = \pm \alpha_{max}$.

Рассматривается следующая задача: кривая, которая описывается точкой M , должна мало отличаться от дуги окружности. Так как траектория вершины M симметрична относительно оси CM_0 , то центр окружности O_1 , которую приближает траектория точки M , должен лежать на прямой CM_0 . Обозначим через R радиус этой окружности. Тогда разность квадратов расстояния MO_1 и радиуса R записывается так:

$$MO_1^2 - R^2 = CO_1^2 - R^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{\omega - \varphi}{2} \right) - 4CO_1 \cdot \sin \frac{\omega - \varphi}{2} \cdot \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + d^2 - r^2}{4d \sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (4)$$



Необходимо определить условия, при которых разность (4) наименее отклоняется от нуля, когда угол φ находится в пределах $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$. Пределы φ_0 и φ_1 определяют максимальные и минимальные значения угла ABC . Если ввести переменную

$$x = \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

то разность (4) приводится к виду

$$MO_1^2 - R^2 = K \left[(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 \right], \quad (5)$$

где постоянные K, p_1, p_2, p_3 находятся прямым вычислением. Параметр K в работе Чебышёва не подбирается, вместо (5) минимизируется функция

$$F(x) = (p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3. \quad (6)$$

Величина K определяется после нахождения параметров p_1, p_2, p_3 . В результате задача приближения траектории движения точки M к окружности приводится к следующей: нужно подобрать параметры p_1, p_2, p_3 таким образом, чтобы функция (6) наименее уклонялась от нуля между значениями

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}.$$

Для решения этой задачи применяется общая теория функций, которые наименее уклоняются от нуля на заданном интервале. В работе [1] получено явное выражение для параметров механизма. Выражения для K, p_1, p_2, p_3 заметно упрощаются при $\omega = \pi$ и $\alpha_{max} = \pi$.

Решение Чебышёва для приближения траектории точки M к окружности при значениях углов $\omega = \pi$ и $\alpha_{max} = \pi$ записывается аналитическими выражениями и формулируется в терминах вспомогательного угла

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}.$$

Получается следующий набор параметров при заданном угле ψ :

$$r = \frac{2 \sin \psi \cdot \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}, \quad d = \frac{\sin 2\psi}{\sin 3\psi}, \quad CO_1 = \frac{2 \cos^2 \psi}{\sin 3\psi}. \quad (7)$$

Углы φ_2 и φ_3 , для которых достигается минимальное и максимальное расстояние $MO_1^2 - R^2$ между φ_0 и φ_1 , находятся по явным выражениям:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \psi, \quad \varphi_2 = \theta - \frac{\varphi_0}{2}, \quad \varphi_3 = \theta - \frac{\varphi_1}{2}.$$

Для радиусов R_1 и R_2 окружностей ω_1 и ω_2 , которых касается траектория точки M , выполняется

$$\frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{2 \cos \psi \cdot \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}, \quad \frac{R_1 - R_2}{2} = \frac{2 \cos 2\psi}{\sin 3\psi}.$$

Угол ψ не должен превосходить $\frac{\pi}{4}$. С приближением угла ψ к $\frac{\pi}{4}$ уменьшаются и величина $\frac{R_1 + R_2}{2}$, и величина $\frac{R_1 - R_2}{2}$.



$$\begin{aligned} x_M &= y_A(\alpha) + 2(x_B(\alpha) - x_A(\alpha)), & y_M &= y_A(\alpha) + 2(y_B(\alpha) - y_A(\alpha)), \\ v_B &= \sqrt{(x'_B(\alpha))^2 + (y'_B(\alpha))^2}, & MO_1 &= \sqrt{(x_M(\alpha) - x_{O_1})^2 + (y_M(\alpha) - y_{O_1})^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Координаты B в формулах (10) получаются при сдвиге середины отрезка CA на величину h ортогонально прямой CA . Полученные выражения координат вершин B и M являются гладкими, если $h \neq 0$, т.е. треугольник ABC невырожденный (угол φ не принимает значения 0 или π). Перед дальнейшим анализом сделаем некоторое общее замечание.

Утверждение 1. При значении угла $\omega = \pi$ линия CM_0 ортогональна прямой CO . Следовательно, $x_{O_1} = 0$ и $y_{O_1} = CO_1$.

Доказательство. Рассмотрим треугольник CM_0A_0 (положение лямбда-механизма при $\alpha = 0$). Так как по построению $BC = AB = BM = 1$, то описанная вокруг треугольника CM_0A_0 окружность имеет центр в точке B_0 и радиус 1. Угол M_0CA_0 является вписанным углом, который опирается на диаметр M_0A_0 , поэтому угол M_0CA_0 равен $\pi/2$. Следовательно, при $\omega = \pi$ ось симметрии кривой, которую описывает вершина M , совпадает с осью Oy . $\square$

Углы поворота стержней CB и AM :

$$c_1 = \arctan(y_B(\alpha), x_B(\alpha)), \quad c_2 = \arctan(y_B(\alpha) - y_A(\alpha), x_B(\alpha) - x_A(\alpha)).$$

В функции $\arctan(y, x)$ угол находится с учетом октанта точки (x, y) . Предположим, что все стержни имеют одинаковую равномерную плотность ρ на единицу длины. Тогда массы стержней OA , AM и CB зависят от длины стержней:

$$m_{OA} = r \cdot \rho, \quad m_{AM} = 2 \cdot \rho, \quad m_{CB} = 1 \cdot \rho.$$

Моменты инерции кривошипов OA и CB считаются относительно неподвижных точек O и C . Момент инерции шатуна AM считается относительно центра масс стержня AM , который совпадает с точкой B :

$$I_{OA} = \frac{1}{3} m_{OA} \cdot r^2, \quad I_{CB} = \frac{1}{3} m_{CB} \cdot 1^2, \quad I_{AM} = \frac{1}{12} m_{AM} \cdot 2^2.$$

Кинетическая энергия T_λ лямбда-механизма

$$\begin{aligned} T_\lambda(\alpha, \dot{\alpha}) &= \frac{1}{2} I_{OA} (\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} I_{CB} \left(\frac{d}{dt} c_1(\alpha) \right)^2 + \frac{1}{2} m_{AM} (v_B(\alpha))^2 (\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} I_{AM} \left(\frac{d}{dt} c_2(\alpha) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} J_\lambda(\alpha) (\dot{\alpha})^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Функция $J_\lambda(\alpha)$ в (11) формально определяется так:

$$J_\lambda(\alpha) = I_{OA} + I_{CB}(c'_1(\alpha))^2 + m_{AM}(v_B(\alpha))^2 + I_{AM}(c'_2(\alpha))^2 > 0.$$

Уравнения движения по инерции *свободного* лямбда-механизма

$$J_\lambda(\alpha) \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} J'_\lambda(\alpha) (\dot{\alpha})^2 = 0. \quad (12)$$

Таким образом, динамика лямбда-механизма описана дифференциальным уравнением (12) с гладкими коэффициентами.



3. Геометрия двойного маятника

Обозначим кривую, которую описывает вершина M лямбда-механизма, как Υ . Рассмотрим следующую кинематическую конструкцию: есть двойной маятник O_1DM , вершина O_1 фиксирована, а точка M движется только по заданной кривой Υ . Кривая Υ последовательно касается двух концентрических окружностей с центром в точке O_1 и радиусами $R_1 > R_2$ [1]. При длинах стержней $MD \pm O_1D = R_1 \pm R_2$ получаем *сингулярный маятник*, который изучался автором в статьях [12, 13]. Сингулярный маятник является двойным математическим маятником, свободная вершина которого движется по заданной кривой. Конфигурационное пространство сингулярного маятника вблизи особой точки представляет собой две пересекающиеся или две касающиеся кривые.

Введем параметризацию положения двойного маятника стандартным образом через пару углов ξ и η в системе координат $O_1x'y'$. Ось O_1x' направлена противоположно оси Oy , ось O_1y' параллельна оси Ox . Угол ξ измеряет отклонение стержня O_1D от вертикальной оси O_1x' , направленной «вниз». Угол η измеряет отклонение стержня DM от вертикальной оси. Углы ξ и η показаны на рис. 3.

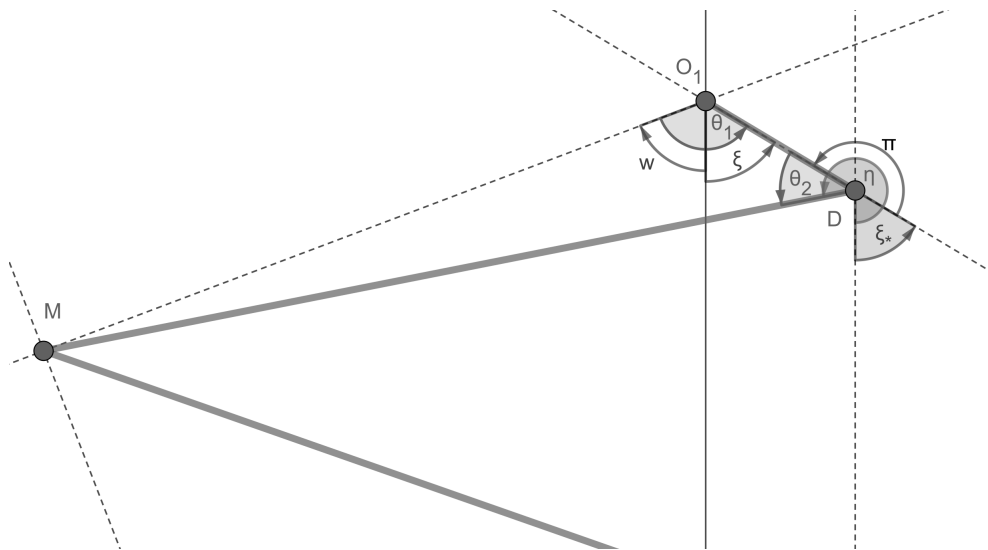


Рис. 3. Углы ξ , η , θ_1 , θ_2 и w , связанные с положением двойного маятника O_1DM
Fig. 3. Angles ξ , η , θ_1 , θ_2 and w related to the position of the double pendulum O_1DM

Точка O_1 совпадает с центром окружности, которую приближает траектория движения точки M (пункт 2). Из утверждения 1 следует, что точка O_1 находится на оси Oy . Угол w измеряет отклонение прямой MO_1 от луча O_1C .

В парадоксальном механизме к лямбда-механизму с параметрами (9) добавляется двойной маятник O_1DM со специальными длинами звеньев O_1D и DM . Выражения для длин звеньев O_1D и DM можно получить из формулы (1):

$$CM_0 = 2 \sin \left(\frac{\pi - \varphi_0}{2} \right), \quad CM_1 = 2 \sin \left(\frac{\pi - \varphi_1}{2} \right), \quad R_2 = |CM_1 - CO_1|, \quad (13)$$

$$R_1 = |CO_1 - CM_0|, \quad DM = \frac{R_2 + R_1}{2}, \quad O_1D = \frac{|R_2 - R_1|}{2}.$$

Для углов φ_0 и φ_1 из (9) по формулам (13) получаются следующие значения:

$$DO_1 = 0.123191, \quad DM = 0.583647. \quad (14)$$

«Парадоксальный» механизм длинами стержней (14) показан на рис. 2. Для построения



параметризации сингулярного маятника рассмотрим углы θ_1 и θ_2 [12]:

$$\begin{aligned}\theta_1(\alpha) &= \arccos\left(\frac{((MO_1)(\alpha))^2 + DO_1^2 - MD^2}{2(MO_1)(\alpha) \cdot DO_1}\right), \\ \theta_2(\alpha) &= \arccos\left(\frac{DO_1^2 + MD^2 - ((MO_1)(\alpha))^2}{2MD \cdot DO_1}\right), \\ w(\alpha) &= \arctan(x_M, -(y_M(\alpha) - CO_1)).\end{aligned}\quad (15)$$

Углы θ_1 и θ_2 определяют углы в треугольнике O_1DM по теореме косинусов. Выражение для угла w соответствует углу поворота системы координат для лямбда-механизма Oxy и системы координат для углов двойного маятника $O_1x'y'$. Вектор O_1M в системе Oxy имеет координаты $(x_M, y_M - CO_1)$, а в системе $Ox'y'$ — координаты $(-(y_M - CO_1), x_M)$.

Для углов ξ и η есть два варианта задания:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= w(\alpha) + \theta_1(\alpha), & \eta_1 &= \xi_1 + \pi + \theta_2(\alpha), \\ \xi_2 &= w(\alpha) - \theta_1(\alpha), & \eta_2 &= \xi_2 + \pi - \theta_2(\alpha).\end{aligned}\quad (16)$$

Положительный знак в (16) соответствует кривой в конфигурационном пространстве, для которой стержни O_1D и DM находятся справа от прямой MO_1 . Отрицательный знак в (16) соответствует расположению стержней O_1D и DM слева от прямой MO_1 (ориентация системы координат задана как на рис. 2). Углы w, θ_1 и θ_2 есть на рис. 3. Координаты точки D для двух вариантов движения в системе координат Oxy :

$$x_D^{1,2} = DO_1 \sin(w + \xi_{1,2}), \quad y_D^{1,2} = CO_1 - DO_1 \cos(w + \xi_{1,2}). \quad (17)$$

Координаты (17) применяются для нахождения центра масс шатуна MD .

4. Динамика двойного маятника

Сначала рассмотрим отдельно динамику двойного маятника O_1DM при движении по инерции, без учета дополнительных голономных связей от лямбда-механизма. Кинетическая энергия T_p («pendulum») двойного физического маятника записывается в виде

$$T_p = a(\dot{\xi})^2 + b \cos(\xi - \eta) \dot{\xi} \dot{\eta} + c(\dot{\eta})^2, \quad (18)$$

где введены следующие константы:

$$a = \frac{m_{O_1D} \cdot O_1D^2}{6} + \frac{m_{DM} \cdot O_1D^2}{2}, \quad b = \frac{m_{DM} \cdot MD \cdot O_1D}{2}, \quad c = \frac{m_{DM} \cdot DM^2}{6}.$$

Уравнения движения физического маятника только под действием сил инерции:

$$\begin{aligned}2a\ddot{\xi} + b \cos(\xi - \eta) \ddot{\eta} + b \sin(\xi - \eta) (\dot{\eta})^2 &= 0, \\ b \cos(\xi - \eta) \ddot{\xi} + 2c\ddot{\eta} - b \sin(\xi - \eta) (\dot{\xi})^2 &= 0.\end{aligned}\quad (19)$$

Уравнения (19) могут быть записаны в матричной форме:

$$A_p(\mathbf{q}_p) \ddot{\mathbf{q}}_p + B_p(\mathbf{q}_p, \dot{\mathbf{q}}_p) = 0. \quad (20)$$

В выражении (20) введены следующие матрично-векторные обозначения:

$$A_p = \begin{pmatrix} 2a & b \cos(\xi - \eta) \\ b \cos(\xi - \eta) & 2c \end{pmatrix}, \quad B_p = \begin{pmatrix} b \sin(\xi - \eta) (\dot{\eta})^2 \\ -b \sin(\xi - \eta) (\dot{\xi})^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_p = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Кинетическая энергия T_{pc} «связанного» двойного маятника O_1DM

$$T_{pc} = \frac{1}{2} I_{O_1D} (\xi'(\alpha))^2 (\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} I_{DM} (\eta'(\alpha))^2 (\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} m_{DM} (v_W)^2 = \frac{1}{2} J_{pc}(\alpha) (\dot{\alpha})^2,$$

где вершина W является серединой (центром масс) стержня DM .



5. Конфигурационное пространство

Рассмотрим траектории движения «парадоксального» механизма в проекции на плоскость углов (ξ, η) двойного маятника O_1DM для случая, когда длины стержней DO_1 и DM определяются по точным выражениям (13). Для этого обозначим непрерывные образы кривых (16)

$$\gamma_1(\alpha) = (\xi_1(\alpha), \eta_1(\alpha)), \quad \gamma_2(\alpha) = (\xi_2(\alpha), \eta_2(\alpha))$$

как Γ_1 и Γ_2 соответственно. Проекция конфигурационного пространства «парадоксального» механизма на двумерный тор состоит из объединения двух кривых Γ_1 и Γ_2 . График конфигурационного пространства для параметров механизма, указанных в выражениях (9) и (14), показан на рис. 4. Для построения графика применялись формулы (15) и (16). На рис. 4 видно, что кривые Γ_1 и Γ_2 имеют угловые точки в особых конфигурациях «парадоксального» механизма, а объединение кривых Γ_1 и Γ_2 дает две гладкие кривые, которые пересекаются под ненулевым углом. Всего в конфигурационном пространстве есть шесть особых точек, так как особые точки $(0, -\pi)$ и $(0, \pi)$ совпадают.

Теоретически покажем, что особые точки парадоксального механизма имеют тип трансверсального пересечения. Рассмотрим двойной маятник O_1DM , вершина M которого движется по заданной кривой Υ . Кривая Υ в рассматриваемом случае движения «парадоксального» механизма является траекторией вершины M лямбда-механизма. Тип конфигурационного пространства сингулярного маятника O_1DM определяется свойствами функции расстояний $d(\alpha) = (MO_1)(\alpha)$. С небольшими модификациями теорема о свойстве конфигурационного пространства из статьи [12] применима в данном случае. Единственное отличие заключается в том, что угол α (как независимая переменная) заменяется на угол $w(\alpha)$.

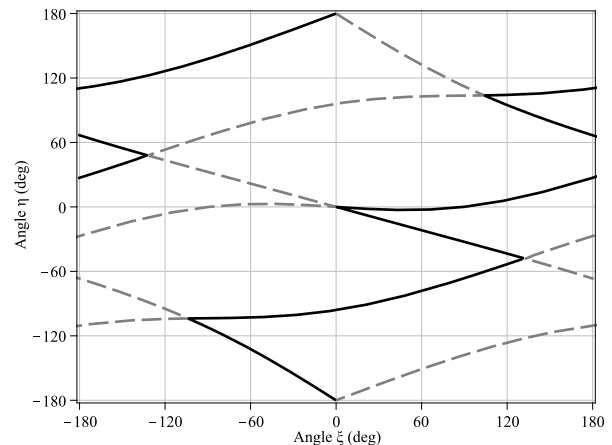


Рис. 4. Конфигурационное пространство «парадоксального» механизма в проекции на координатную плоскость углов (ξ, η) . Сплошной линией показана ветвь движения Γ_1 , пунктирной линией показана ветвь движения Γ_2

Fig. 4. The configuration space of the «paradoxical» mechanism in the projection onto the coordinate plane of the angles (ξ, η) . The solid line shows the Γ_1 motion branch, the dotted line shows the Γ_2 motion branch

Теорема 1. *Рассматривается двойной маятник O_1DM , вершина M движется по заданной гладкой кривой Υ . Координаты вершины M являются гладкими функциями некоторого параметра α . Пусть при значении параметра $\alpha = \alpha_*$ выполняется*

$$(MO_1)(\alpha_*) = DM \pm O_1D, \quad \frac{d}{d\alpha}(MO_1)(\alpha_*) = 0, \quad \frac{d^2}{d\alpha^2}(MO_1)(\alpha_*) \neq 0.$$

Первое условие соответствует особой точке конфигурационного пространства. Тогда в окрестности точки, которая соответствует α_ , конфигурационное пространство представляется как объединение двух гладких кривых, которые пересекаются трансверсально. Функции $\text{sign}(\alpha) \cdot \theta_{1,2}(\alpha)$, которые симметричны относительно α_* , являются гладкими функциями.*

Пересечение кривых Γ_1 и Γ_2 в особых точках конфигурационного пространства «парадоксального» механизма под ненулевым углом следует из того, что в особых конфигурациях функция MO_1 имеет нулевую первую производную и ненулевую вторую производную.

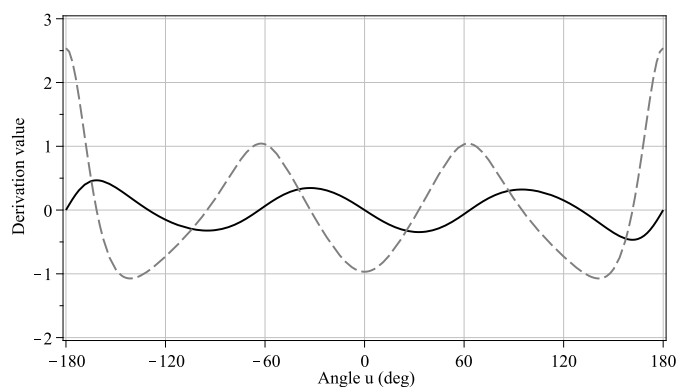


Рис. 5. Графики $(MO_1)'(\alpha)$ (сплошная линия) и $(MO_1)''(\alpha)$ (пунктирная линия)

Fig. 5. Graphs of $(MO_1)'(\alpha)$ (solid line) and $(MO_1)''(\alpha)$ (dashed line)

Графики первой и второй производной функции MO_1 показаны на рис. 5. Видно, что в экстремальных точках функции MO_1 вторая производная находится около локального минимума или максимума и отлична от нуля.

Найдем значения углов α , при которых функция MO_1 достигает минимума или максимума. Для этого подставим известные значения $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и значения параметров r и d из выражений (9) в формулу (3). В итоге получим следующий набор углов α :

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 0.000^\circ, \quad \alpha_2 = 63.491^\circ, \quad \alpha_3 = 130.281^\circ, \quad \alpha_4 = 180.000^\circ, \\ \alpha_5 = 229.718^\circ, \quad \alpha_6 = 296.510^\circ, \quad \alpha_7 = 360.000^\circ. \end{aligned} \quad (21)$$

Введем вспомогательную функцию знака $\text{sign}(\alpha)$, которая меняется с $+1$ на -1 при прохождении значений α через точки α_i из набора (21):

$$\text{sign}(\alpha) = \begin{cases} +1, & \text{если } \alpha_1 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_2 \\ -1, & \text{если } \alpha_2 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_3 \\ +1, & \text{если } \alpha_3 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_4 \\ -1, & \text{если } \alpha_4 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_5 \\ +1, & \text{если } \alpha_5 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_6 \\ -1, & \text{если } \alpha_6 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_7 \\ 0, & \text{если } \alpha = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, 7. \end{cases}$$

Замечание 4. Для гладкой параметризации сингулярного маятника в «парадоксальном» механизме с помощью углов ξ и η при точных значениях длин всех стержней нужно выбирать не углы $\theta_{1,2}(\alpha)$, а углы $\text{sign}(\alpha) \cdot \theta_{1,2}(\alpha)$, которые являются гладкими. Функция $\text{sign}(\alpha)$ позволяет описывать движение стержня O_1D в «парадоксальном» механизме при движении ведущего звена OA .

Замечание 5. В модели «парадоксального» механизма из статьи [12] и интернет-ресурса <http://www.tcheb.ru> стержень O_1D заменен на массивный диск. С точки зрения динамики в этом случае меняются только параметры a, b и c в выражении (19). Наиболее вероятно, что стержень был заменен на массивный диск для создания дополнительного момента, который позволяет пройти через особенность конфигурационного пространства при наличии люфтов в реальной модели.

Замечание 6. Так как конфигурационное пространство сингулярного маятника в «парадоксальном» механизме имеет особенности типа пересечения двух гладких кривых на плоскости, то гладкое движение механизма соответствует симметричному движению сингулярного маятника через особенности. Симметричное движение наблюдалось при движении двойного маятника в работе [12] и при движении модели «парадоксального» механизма.

6. Динамика «парадоксального» механизма

Систему «парадоксального» механизма можно представить как объединение лямбда-механизма $COABM$ и двойного маятника O_1DM , у которых совпадают координаты вершины M в плоскости движения механизма. Возникает две голономные связи f_1 и f_2 , которые



соответствуют совпадению координат x и y точки M у лямбда-механизма и двойного маятника. Выражения связей в координатах:

$$\begin{aligned} f_1 &= DO_1 \cos \xi + MD \cos \eta + (y_M(\alpha) - CO_1) = 0, \\ f_2 &= DO_1 \sin \xi + MD \sin \eta - x_M(\alpha) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим матрицу C , составленную из градиентов голономных связей f_1 и f_2 в выражениях (22), взятых по строкам:

$$C = \begin{pmatrix} -DO_1 \sin \xi & -MD \sin \eta & y'_M(\alpha) \\ DO_1 \cos \xi & MD \cos \eta & -x'_M(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Матрица (23) в общем случае имеет ранг 2.

Утверждение 2. Когда стержни DO_1 и MD становятся параллельными, то $\eta = \xi$ или $\eta = \xi + \pi$. В этом случае столбцы матрицы C

$$\begin{pmatrix} -\sin \xi \\ \cos \xi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sin \eta \\ \cos \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y'_M(\alpha) \\ -x'_M(\alpha) \end{pmatrix} \quad (24)$$

становятся линейно зависимыми.

Доказательство. Действительно, первые два вектора в (24) параллельны и ортогональны радиус-вектору MO_1 при $\eta = \xi$ или $\eta = \xi + \pi$. Кривая $(x_M(\alpha), y_M(\alpha))$ касается окружности радиуса $R_1 = DO_1 + DM$ (внешней) или радиуса $R_2 = DM - DO_1$ (внутренней), так как траектория точки M касается указанных окружностей по построению лямбда-механизма в «парадоксальном» механизме. Тогда вектор $(y'_M(\alpha), -x'_M(\alpha))$ является касательным вектором к одной из окружностей, поэтому вектор $(y'_M(\alpha), -x'_M(\alpha))$ ортогонален радиус-вектору MO_1 . Значит, координаты трех векторов на плоскости в (24) ортогональны вектору MO_1 , поэтому все три вектора являются параллельными. $\square$

Замечание 7. Так как в особых точках конфигурационного пространства «парадоксального» механизма стержни DO_1 и MD являются параллельными, то в этих положениях ранг матрицы связей C меньше максимального. Вырождение матрицы связей может приводить к неограниченному возрастанию множителей Лагранжа при движении системы к особой точке конфигурационного пространства.

Уравнения движения «парадоксального» механизма (по инерции) являются объединением систем уравнений (12) и (19), к которым добавлены две голономные связи (22). В матричном виде

$$A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 = C^T \Lambda, \quad (25)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2a & b \cos(\xi - \eta) & 0 \\ b \cos(\xi - \eta) & 2c & 0 \\ 0 & 0 & J_\lambda(\alpha) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \sin(\xi - \eta)(\dot{\eta})^2 \\ -b \sin(\xi - \eta)(\dot{\xi})^2 \\ 1/2 J'_\lambda(\alpha)(\dot{\alpha})^2 \end{pmatrix}, \\ \nabla f_1 &= \begin{pmatrix} -DO_1 \sin \xi \\ -MD \sin \eta \\ y'_M(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} DO_1 \cos \xi \\ MD \cos \eta \\ -x'_M(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Для получения замкнутой системы уравнений нужно к (25) добавить уравнения связей. При дифференцировании уравнений связей f_1 и f_2 дважды по времени как одно из слагаемых получается матрица G , которая содержит квадраты скоростей обобщенных координат:

$$G = \begin{pmatrix} -DO_1 \cos \xi (\dot{\xi})^2 - MD \cos \eta (\dot{\eta})^2 + y_M''(\dot{\alpha})^2 \\ -DO_1 \sin \xi (\dot{\xi})^2 - MD \sin \eta (\dot{\eta})^2 - x_M''(\dot{\alpha})^2 \end{pmatrix}.$$

Силы реакции идеальных голономных связей $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ можно выразить из (25) через обобщенные координаты и скорости *вне* особых точек:

$$\Lambda = (CA^{-1}C^T)^{-1}(CA^{-1}B - G). \quad (26)$$

Выражения для множителей Лагранжа (26) формально определены вне особых точек конфигурационного пространства.

7. Моделирование

Согласно анализу «парадоксального» механизма возможны два варианта моделирования. В первом варианте длины всех стержней «парадоксального» механизма (AO , AM , BC , MD и DO_1) находятся по *точным* формулам (7) и (13). Тогда две кривые (16) в конфигурационном пространстве, которым соответствует движение двойного маятника O_1DM всегда по одну сторону от прямой MO_1 , пересекаются в шести особых точках. Гладкое движение механизма происходит при смене типа движения в особых точках: после прохождения особых точек «правый» маятник O_1DM становится «левым» и наоборот. Для моделирования смены знака углов θ_1 и θ_2 используется функция знака $\text{sign}(\alpha)$ для углов (21) по замечанию 4.

Точное моделирование длин всех стержней на практике невозможно. Поэтому второй вариант моделирования соответствует некоторым «погрешностям» в длинах стержней. Далее рассматривается модель, в которой лямбда-механизм построен по «точным» значениям длин стержней, а звено DO_1 в двойном маятнике DO_1M больше «точного» значения на малую величину ε . Выбор такого типа «погрешности» механизма во многом является произвольным, но позволяет найти некоторые свойства модели движения. Новое положение вершины D обозначается как D' . В результате получается «возмущенный» двойной маятник $O_1D'M$ с длиной звена $D'O_1 = DO_1 + \varepsilon$.

Так как звено $D'O_1$ больше «точного» значения DO_1 , то сумма длин стержней MD' и $D'O_1$ больше максимального расстояния MO_1 , поэтому стержни MD и DO_1 не образуют развернутый угол в «парадоксальном» механизме. Аналогично стержни MD' и $D'O_1$ не могут иметь нулевой угол, так как в этом случае разность $MD' - D'O_1$ меньше минимального значения MO_1 . Следовательно, при возмущении звена DO_1 конфигурационное пространство «парадоксального» механизма распадается на две кривые без точек пересечения (особых точек). В этом случае геометрически механизм может двигаться только по одной из двух кривых: Γ_1 или Γ_2 .

Для движения по кривой Γ_1 делается численное моделирование. Кинетическая энергия для лямбда-механизма определяется по формуле (12). Кинетическая энергия двойного маятника определяется по выражениям (18). Углы ξ и η выражаются как функции угла α по формулам (16), при этом получаются зависимости $\xi_{1,2} = \xi_{1,2}(\alpha)$ и $\eta_{1,2} = \eta_{1,2}(\alpha)$. Плотность материала стержней в механизме считается равной 7700 kg/m^3 , длина $BC = 1 \text{ m}$, поперечное сечение стержней составляет $2 \times 1 \text{ cm}^2$.

Уравнение Лагранжа второго рода интегрируется по методу Рунге – Кутты порядка 4 (5) при начальных условиях $\alpha_0 = 0$ рад, $\dot{\alpha}_0 = 1$ рад/с. Движение механизма исследуется на интервале в 10 с, за которые «парадоксальный» механизм делает немного больше полного оборота. После нахождения зависимости $\alpha = \alpha(t)$ определяются соответствующие множители Лагранжа λ_1 и λ_2 по формулам (26). Полученные графики показаны на рис. 6 и 7. При других начальных условиях были получены аналогичные графики для множителей Лагранжа.

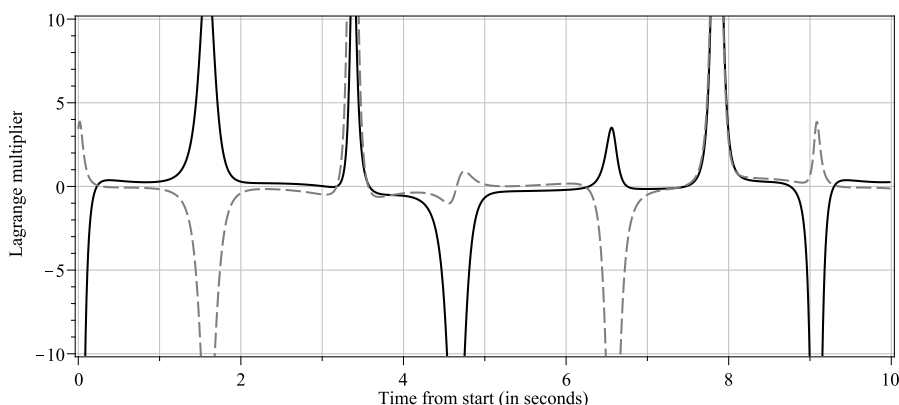


Рис. 6. Множители Лагранжа λ_1 (сплошная линия) и λ_2 (пунктирная линия) для случая движения по инерции по кривой Γ_1 , когда звено DO_1 увеличено на 0.01 м. Реакции меняются плавно, траектория не проходит вблизи особенности

Fig. 6. The Lagrange multipliers λ_1 (solid line) and λ_2 (dotted line) for the case of inertial motion along the Γ_1 curve, when the rod DO_1 is increased by 0.01 m. The reactions change smoothly, the trajectory does not pass near singularity

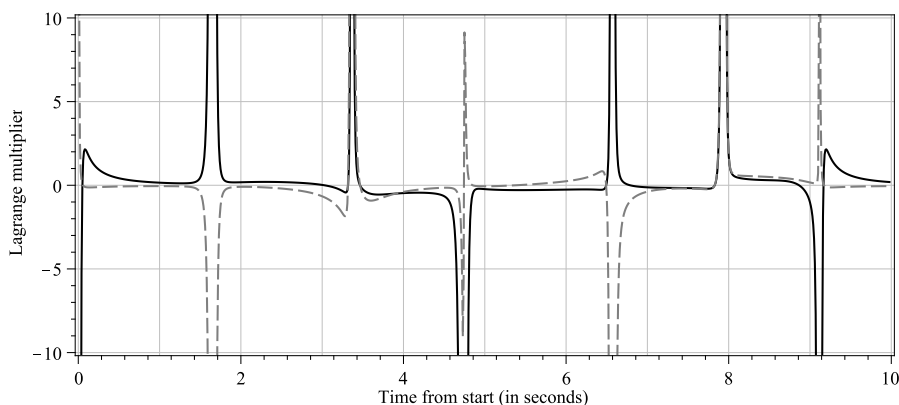


Рис. 7. Множители Лагранжа λ_1 (сплошная линия) и λ_2 (пунктирная линия) для случая движения по инерции по кривой Γ_1 , когда звено DO_1 увеличено на 0.0001 м. Множители Лагранжа имеют значительно большую величину в конфигурациях, которые близки к особым

Fig. 7. The Lagrange multipliers λ_1 (solid line) and λ_2 (dotted line) for the case of inertial motion along the Γ_1 curve, when the DO_1 link is increased by 0.0001 m. Lagrange multipliers have significantly larger values in the configurations which are close to singular

Заключение

В статье рассмотрена кинематика и динамика «парадоксального» механизма П. Л. Чебышёва. Данный шарнирный механизм представлен как объединение двух механических систем: лямбда-механизма и двойного маятника. При таком подходе «парадоксальный» механизм рассматривается как механическая система с тремя степенями свободы и двумя голономными связями. Число степеней свободы механизма в регулярных точках конфигурационного пространства равно 1. Уравнения связей соответствуют совпадению свободных вершин лямбда-механизма и двойного маятника. Записаны уравнения движения для системы со связями и выражения для множителей Лагранжа. Показано, что в конфигурационном пространстве «парадоксального» механизма возникают особые точки, или точки ветвления. Геометрические особенности соответствуют положению механизма, когда стержни двойного



маятника становятся параллельными. Двойной маятник может выйти двумя различными способами (зеркально симметричными) из особых конфигураций, поэтому в особых точках геометрически возникают дополнительные степени свободы. Теоретически показано, что для точных параметров оригинального «парадоксального» механизма в конфигурационном пространстве есть шесть особых точек, которые имеют тип двух пересекающихся кривых. При малом изменении длин стержней происходит перестройка конфигурационного пространства, которое распадается на две непересекающиеся кривые. При малом увеличении длины одного из звеньев двойного маятника его стержни не могут стать параллельными, поэтому двойной маятник в возмущенном «парадоксальном» механизме движется по одну сторону от некоторой прямой. В численном моделировании показано, что для возмущенного «парадоксального» механизма множители Лагранжа значительно возрастают при движении около критических положений механизма.

Список литературы

1. Чебышёв П. Л. О простейшей суставочной системе, доставляющей движения, симметричные около оси // Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева : в 5 т. Т. 4. Теория механизмов. Москва ; Ленинград : Изд-во АН СССР, 1948. С. 167–211.
2. Чебышёв П. Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов // Успехи математических наук. 1946. Т. 1, вып. 1. С. 12–37.
3. Научное наследие П. Л. Чебышёва. Вып. 2. Теория механизмов / под ред. И. Г. Бруевича, И. И. Артоболевского. Москва ; Ленинград : Изд-во АН СССР, 1945. 192 с.
4. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. Москва : Юрайт, 2016. 592 с.
5. Зегжда С. А., Солтаханов Ш. С., Юшков М. П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. Москва : Физматлит, 2005. 268 с.
6. Кутеева Г. А. О кабинете практической механики в Санкт-Петербургском государственном университете // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. 2013. № 7. С. 177–185. EDN: [XXEBHV](#)
7. Самсонов В. А., Михалев А. А. Перестройка пространства положений механической системы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 4. С. 13–16. EDN: [HRVSYR](#)
8. Закалюкин Г. А. Динамика балки с двумя коньками и системы неявных дифференциальных уравнений // Труды МАИ. 2011. № 42. С. 1–25.
9. Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. О проблеме Адамара – Гамеля и динамике колесных экипажей // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 1. С. 145–163. <https://doi.org/10.20537/nd1601009>, EDN: [VTZNOH](#)
10. Доронин Ф. А., Доев В. С. Исследование движения плоского механизма с помощью пакета программ Mathcad // Теория механизмов и машин. 2011. Т. 9, № 1. С. 77–87. EDN: [NUZKFFV](#)
11. Burian S. N., Kalnitsky V. S. On the motion of one-dimensional double pendulum // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959, iss. 1. Art. 030004. <https://doi.org/10.1063/1.5034584>
12. Бурьян С. Н. Силы реакции сингулярного маятника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9, № 2. С. 278–293. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.209>, EDN: [GCBILE](#)
13. Бурьян С. Н. Особенности динамики прямолинейного движения механизма Дарбу // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63), вып. 4. С. 658–669. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.412>

References

1. Chebyshev P. L. On the simplest articular system that delivers movements that are symmetrical about the axis. In: *Polnoye sobraniye sochineniy P. L. Chebysheva. T. 4. Teoriya mekhanizmov* [Complete works of P. L. Chebyshev. Vol. 4. Theory of mechanisms]. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ., 1948, pp. 167–211 (in Russian).
2. Chebyshev P. L. Theory of mechanisms known as parallelograms. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1946, vol. 1, iss. 1, pp. 12–37 (in Russian).
3. Bruevich I. G., Artobolevsky I. I. (eds.) *Nauchnoye naslediye P. L. Chebyshyeva. Vyp. 2. Teoriya mekhanizmov* [Scientific legacy of P. L. Chebyshev. Iss. 2. Theory of mechanisms]. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ., 1945. 192 p. (in Russian).



4. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., Tovstik P. E. *Rational and applied mechanics*. Springer Nature, 2021. 520 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-64118-4> (Russ. ed.: Moscow, Yurayt, 2016. 592 p.).
5. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. S., Yushkov M. P. *Mechanics of non-holonomic systems: A new class of control systems*. Springer Science & Business Media, 2009. 332 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatlit, 2005. 268 p.).
6. Kuteeva G. A. The Cabinet of applied mechanics in Saint-Petersburg State University. *Mechanics. Scientific Research and Educational Development*, 2013, vol. 7, pp. 177–185 (in Russian). EDN: [XXEBHV](#)
7. Samsonov V. A., Mikhalev A. A. Restructuring of the position space of a mechanical system. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2005, vol. 4, pp. 13–16 (in Russian). EDN: [HRVSYR](#)
8. Zakalyukin I. V. Dynamics of a beam with two sleights via system of implicit differential equations. *Trudy MAI*, 2011, vol. 42, pp. 1–25 (in Russian).
9. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. On the Hadamard – Hamel problem and the dynamics of wheeled vehicles. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, iss. 6, pp. 752–766. <https://doi.org/10.1134/S1560354715060106>
10. Doronin F. A., Doev V. S. Investigation of the movement of a flat mechanism using the Mathcad software package. *Theory of Mechanisms and Machines*, 2011, vol. 9, iss. 1, pp. 77–87 (in Russian). EDN: [NUZKfV](#)
11. Burian S. N., Kalnitsky V. S. On the motion of one-dimensional double pendulum. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1959, iss. 1, art. 030004. <https://doi.org/10.1063/1.5034584>
12. Burian S. N. Reaction forces of a singular pendulum. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2022, vol. 55, pp. 192–202. <https://doi.org/10.1134/S1063454122020054>
13. Burian S. N. Specificity of the Darboux mechanism rectilinear motion. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2018, vol. 5 (63), iss. 4, pp. 658–669 (in Russian). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.412>

Поступила в редакцию / Received 01.04.2023

Принята к публикации / Accepted 15.12.2023

Опубликована / Published 29.11.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 552–566

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 552–566
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-552-566>, EDN: PNYSJH

Научная статья

УДК 539.3

Оптимизация механических свойств вязкоупругих конструкций

А. О. Ватульян¹, О. В. Явруян^{1,2}✉

¹Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

²Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Россия, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, д. 53

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости, aovatulyan@sfsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

Явруян Оксана Вячеславовна, доктор физико-математических наук, ¹доцент кафедры теории упругости; ²ведущий научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, yavruyan@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3443-0837>, AuthorID: 488272

Аннотация. Проведено исследование спектральной задачи об определении оптимального распределения механических свойств произвольного неоднородного тела с учетом затухания в рамках модели линейной вязкоупругости, при которых первая собственная частота максимальна. Учет затухания осуществляется на основе концепции комплексных модулей в рамках модели стандартного вязкоупругого тела. В качестве управляющих функций выступают функции, характеризующие мгновенный и длительный модули. Постановка задачи включает в себя изопериметрические условия, которые накладываются на управляющие функции и определяют их среднее распределение по объему. Построен функционал типа Релея, вариационным образом найдено условие оптимальности, которое состоит в постоянстве условной потенциальной энергии. В качестве модельной задачи рассмотрены задачи о максимизации первой собственной частоты (изгибные и продольные колебания) функционально-градиентного стержня с учетом затухания на основе принципа соответствия. Получены аналитические выражения для законов изменения мгновенного и длительного модулей. Проверено, что задача в предельном случае (при равенстве нулю времени релаксации) сводится к упругому случаю. Для определения оптимального значения первой собственной частоты построено кубическое уравнение, которое решалось численно. Получены асимптотические формулы для определения оптимальной собственной частоты при малых значениях времени релаксации. Проведены расчеты по оценке оптимальности полученного решения. Например, при сравнении со случаем постоянных модулей выигрыш в значении первой собственной частоты составляет около 27% для случая изгиба.

Ключевые слова: оптимизация, первая собственная частота, механические свойства, неоднородность, вязкоупругость, консольная балка, изгибные колебания, продольные колебания

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>).

Для цитирования: Ватульян А. О., Явруян О. В. Оптимизация механических свойств вязкоупругих конструкций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 552–566. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-552-566>, EDN: PNYSJH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Optimisation of mechanical properties of viscoelastic structures

A. O. Vatulyan¹, O. V. Yavruyan^{1,2}✉

¹Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

²Southern Mathematical Institute – the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre of Russian Academy of Sciences, 53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia

Alexander O. Vatulyan, aovatulyan@sfned.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

Oksana V. Yavruyan, yavruyan@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3443-0837>, AuthorID: 488272

Abstract. The spectral problem of determining the optimal distribution of mechanical properties of an arbitrary inhomogeneous body taking into account damping is investigated. The optimisation problem consists in finding the maximum first natural frequency. Damping is taken into account in the framework of the linear viscoelasticity model on the basis of the complex modules concept for the standard viscoelastic body model. The functions characterising the instantaneous and long-time modules are used as control functions. The problem formulation includes isoperimetric conditions that are imposed on the control functions and determine their average volume distribution. A Relye functional is constructed, and the optimality condition, which consists in the constancy of the potential energy, is found in a variational manner. As a model problem the problems of maximisation of the first natural frequency (bending and longitudinal vibrations) of a functionally graded cantilever beam with consideration of damping are considered. Analytical expressions for the laws of variation of the instantaneous and long-range modules are obtained. It is checked that the problem in the limiting case (when the relaxation time is equal to zero) is reduced to the elastic case. To determine the optimal value of the first natural frequency, a cubic equation is constructed and solved numerically. Asymptotic formulae for determining the optimal natural frequency at small values of relaxation time are obtained. Calculations have been carried out to evaluate the optimality of the obtained solution. For example, in comparison with the case of constant modules, the gain in the value of the first natural frequency is about 27% for the case of bending.

Keywords: optimisation, first natural frequency, mechanical properties, inhomogeneity, viscoelasticity, cantilever beam, bending vibrations, longitudinal vibrations

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>).

For citation: Vatulyan A. O., Yavruyan O. V. Optimisation of mechanical properties of viscoelastic structures. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 552–566 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-552-566>, EDN: PNYSJH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Задачи оптимального проектирования привлекают внимание ученых начиная с середины прошлого века. Интерес к задачам оптимизации конструкции был вызван, в первую очередь, в связи с быстрым развитием авиастроения, космической техники, кораблестроения. На основе оптимального проектирования удалось достичь значительных результатов, позволяющих улучшить механические свойства конструкции, снизить вес и увеличить несущую способность [1]. Среди базовых работ того периода стоит отметить исследования таких ученых, как Н. В. Баничук [1], Н. Ольхофф [2], И. Ф. Ниордсон [3], а также работы [4–7]. На первых порах это были задачи оптимизации геометрических характеристик конструкций, удовлетворяющих рассматриваемому критерию качества, при этом внешние воздействия, условия закрепления границ и внутренняя структура элементов конструкций известны.



Дальнейшее развитие задач оптимального проектирования стало возможным благодаря широкому применению новых современных материалов с улучшенными свойствами — композиционных материалов, материалов с памятью формы, пьезо- и термоупругих материалов, а также в связи с возможностью создания новых функционально-градиентных материалов с заранее заданными свойствами. Именно в этот период интерес ученых обратился к постановкам оптимизационных задач, в которых в качестве управляющих функций выступают характеристики материала и внутренняя структура элементов конструкций.

Возможны различные постановки задач оптимизации свойств материалов, это и задачи устойчивости конструкций, задачи увеличения прочности (жесткости/податливости) конструкций, задачи, связанные с несущей способностью и прочностью конкретного участка конструкции. В отдельный широкий класс выделяются спектральные задачи оптимизации частотных параметров конструкции, среди которых наиболее популярными являются задачи максимизации первой собственной частоты колебаний, максимизации n -й резонансной частоты [5], задачи исключения резонансных частот в интересующем диапазоне частот, задачи максимизации частотных зазоров [8]. Так, в [8] исследована задача максимизации частотных зазоров путем оптимизации формы поперечно колеблющихся упругих балок в рамках модели Бернулли – Эйлера, а также изучено связанное с этим создание периодичности оптимизированных конструкций балок.

Большая часть задач оптимального проектирования выполнена с применением классических методов вариационного исчисления (вариационные принципы, метод сопряженных функций) или методов теории управления (принцип максимума Л. С. Понтрягина [5]).

Применение определенных вариационных методов обусловлено постановкой задачи, характером изопериметрических условий, а также линейностью/нелинейностью дифференциальных операторов, описывающих динамику объекта исследования. В последнем случае часто используются метод возмущений [4, 5], методы линеаризации с последующим построением итерационных последовательностей [3].

К настоящему моменту достаточно подробно исследованы задачи оптимизации первой собственной частоты для упругих балок [9], пластин и оболочек за счет управления формой поперечного сечения.

Так, оптимизация геометрических параметров однородных упругих балок рассмотрена в работах [1–6]. В статье [3] исследована задача оптимизации геометрических параметров консольной балки. Для определения оптимального решения задачи получено нелинейное дифференциальное уравнение, предложена итерационная схема для его решения на основе метода последовательных приближений. Эта работа в дальнейшем легла в основу многих других, в числе которых отметим исследование, где изучены двумерные задачи оптимального управления геометрией пластин и оболочек [4].

Спектральные вариационные задачи, в которых в качестве управляющих функций выступают механические характеристики, рассмотрены в работах [5–10].

Так, в статье [8] получены аналитические решения спектральной задачи о максимизации первой собственной частоты для неоднородной балки с различными способами закрепления на основе вариационного подхода, в качестве управляющих функций выступают упругие характеристики балки.

В работе [10] разработан обобщенный метод расчета консольной балки круглого сечения в условиях изгибных колебаний. Определено, что динамическую жесткость консоли можно увеличить, если основная часть стержня изготовлена из материала с высоким модулем упругости, а часть свободного конца — из материала с низкой плотностью. Следовательно, разработанный метод предназначен для составной балки, состоящей из двух материалов на разных концах.

Задачи оптимального проектирования внутренней структуры неоднородных анизотропных пластин и оболочек изучены в [9]. В работе исследована спектральная задача максимизации первой резонансной частоты, получено оптимальное решение в виде функции от двух пере-



менных, через которое выражены все упругие модули. Вариационная задача решена на основе метода малого физического параметра, в основе которого лежит предположение о слабой неоднородности исследуемых объектов.

Имеются также работы (например, [11]) оптимального проектирования механических характеристик в спектральных задачах, в которых осуществляются гомогенизация внутренней структуры и подбор параметров соответствующей эквивалентной модели с привлечением генетических алгоритмов.

В статье [12] оптимальное проектирование механических свойств сведено к определению ориентации волокон и граничной жесткости многослойной цилиндрической оболочки, которые определяются с помощью эвристических алгоритмов.

Отметим также более современные работы [13–17], связанные с многокритериальной оптимизацией материалов сложной внутренней структуры, сложных периодических структур типа метаматериалов. Проектированию структур с запрещенной резонансной зоной уделяется все больше внимания во многих приложениях по снижению нежелательных уровней вибрации и шума. Однако, как правило, в таких сложных конструкциях получить аналитическое решение не представляется возможным, и оптимизационный поиск сводится к подбору оптимальных характеристик на основе множественных экспериментов (вычислительных и реальных) с привлечением эвристических оптимизационных алгоритмов и метода конечных элементов для проведения расчетов механических полей.

Отметим также ряд работ [18, 19], которые направлены на оптимальную резонансную настройку объекта (расположение, размеры пьезоэлементов) с целью гашения колебаний (виброразгрузка). В [19] предложена конечно-элементная модель объекта, с помощью которой можно проектировать модульные системы управления без подключения экспериментальной базы.

В [20] определены оптимальные настройки ультразвуковой системы, состоящей из двух стержней, между которыми расположен жестко связанный с ними пьезоэлектрический возбудитель колебаний.

Вместе с тем, несмотря на неугасающий интерес к оптимизационным спектральным задачам, задачи, в которых осуществляется учет затухания, практически не исследованы [21].

В настоящей работе рассматривается задача максимизации первой собственной частоты для вязкоупругого неоднородного тела. Оптимизируются механические свойства тела при изопериметрическом условии, представлены примеры для стержневых конструкций.

1. Постановка оптимизационной задачи для произвольного вязкоупругого тела

Рассмотрим оптимизационную задачу максимизации первой резонансной частоты произвольного вязкоупругого неоднородного тела, занимающего объем V и ограниченного кусочно-гладкой поверхностью $S = S_u \cup S_\sigma$.

Вязкоупругие свойства тела учитываются на основе принципа соответствия Вольтерра [22], согласно которому решение вязкоупругой задачи может быть получено из решения соответствующей упругой задачи путем замены упругих модулей на комплексные, характеризующие физико-механические свойства вязкоупругого материала в зависимости от частоты колебаний. Для учета затухания используем следующий вариант представления комплексных модулей:

$$C_{lmjr}^*(x, ik) = C_{lmjr} G(x, ik), \quad C_{lmjr} = E R_{lmjr}, \quad G(x, ik) = \frac{h(x) + ik\tau g(x)}{1 + ik\tau}, \quad (1)$$

где R_{lmjr} — компоненты безразмерного тензора модулей упругости, E — характерный упругий модуль, $g(x)$, $h(x)$ — безразмерные характеристики, описывающие переменные безразмерные мгновенный и длительный модули, n — время релаксации, k — безразмерная частота колебаний $k\tau = \omega n$. При проведении вычислительных экспериментов важно учитывать условие модели $g(x) > h(x)$.



Уравнения движения и однородные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ u_i|_{S_u} &= 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = 0,\end{aligned}\quad (2)$$

где ρ — плотность среды.

Определяющие соотношения имеют вид

$$\sigma_{lm} = C_{lmjr}^* u_{j,r}.$$

В качестве управляющих функций в оптимизационной задаче выступают функции $h(x)$, $g(x)$, при этом оптимальному распределению характеристик $h_*(x)$, $g_*(x)$ соответствует максимальная первая собственная частота. Управляющие функции выбираются из класса функций, для которых выполняются изопериметрические условия (например, ограничения на их среднее значение)

$$\frac{1}{V} \int_V h(x) dx = h_0, \quad \frac{1}{V} \int_V g(x) dx = g_0. \quad (3)$$

Составим соотношение Релея аналогично упругому случаю [3] для нахождения первой собственной частоты для произвольного вязкоупругого тела. Для этого умножим каждое из уравнений (2) на соответствующую сопряженную функцию $\bar{u}_i$ и проинтегрируем по области V :

$$\omega^2 = \frac{\int_V \sigma_{mj,j} \bar{u}_m dV}{\int_V \rho u_m \bar{u}_m dV} = \frac{\int_V G(x, ik) C_{mjrl} u_{r,l} \bar{u}_{m,j} dV}{\int_V \rho u_m \bar{u}_m dV} \rightarrow \min_{g,h}.$$

Отметим свойство вещественности формы, характеризующей условную потенциальную энергию, которое следует из симметрии соответствующего тензора упругих модулей:

$$2\Pi = C_{mjrl} \bar{\varepsilon}_{mj} \varepsilon_{rl} = C_{mjrl} \bar{u}_{m,j} u_{r,l} = 2\bar{\Pi}.$$

Далее исследование будем проводить для величины k , отличающейся от ω лишь множителем — $k = \omega a \sqrt{\frac{\rho_0}{h_0}}$, a — характерный размер области. Для определения резонансной частоты вязкоупругого тела условно представим k как комплексную величину $k = k_0 + ik_1$, тогда спектральная оптимизационная задача сведется к максимизации ее вещественной и мнимой частей. Введем обозначение

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho u_j \bar{u}_j dV.$$

Изопериметрические условия (3) в рассматриваемой постановке можно трансформировать, разыскивая оптимальное распределение модулей, подчиненных комплексному условию

$$\frac{1}{V} \int_V G(x, ik) dV = \frac{h_0 + ik\tau g_0}{1 + ik\tau}, \quad (4)$$

при этом в предельных случаях имеем

$$\frac{1}{V} \int_V G(x, ik) dx = \begin{cases} h_0, & \tau \rightarrow 0, \\ g_0, & \tau \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Для решения вариационной задачи построим общий функционал, в котором учет изопериметрического условия осуществлен методом множителей Лагранжа [1, 2]:

$$J[g, h, u] = K^{-1} \int_V G(x, ik) \Pi dV - \lambda \frac{1}{V} \int_V G(x, ik) dV. \quad (5)$$

Отметим, что при предельном переходе при $\tau \rightarrow 0$ получаем функционал, соответствующий упругому случаю.



Найдем вариацию функционала (5):

$$\begin{aligned}\delta J[g, h, u] &= \left. \frac{d}{dt} J[g + t\delta g, h + t\delta h, u + t\delta u] \right|_{t=0}, \\ \delta J[g, h, u] &= K^{-1} \int_V \Pi \delta G dV - \lambda \int_V \delta G dV - R, \\ R &= 2K^{-1} \left(\int_V (C_{ijrl} \bar{u}_{i,j} G)_{,l} \delta u_r dV + k^2 \int_V \rho \bar{u}_i \delta u_i dV \right), \\ \delta G &= \frac{\delta h + i\tau k \delta g}{1 + i\tau k}.\end{aligned}$$

Таким образом, оптимальное решение достигается на функциях, удовлетворяющих условию $\delta J[g, h, u] = 0$.

Ввиду независимости вариаций δh , δg , δu_r , приравнивая к нулю коэффициенты при них, имеем уравнения движения и условие $\Pi - \lambda K = 0$, откуда получим условие оптимальности

$$\Pi(x) = C^2 = \text{const}. \quad (6)$$

Например, в случае изгибных колебаний балки, учет затухания в которой осуществляется согласно (1), квадратичная форма, характеризующая условную потенциальную энергию деформации, для балки Бернулли – Эйлера постоянного поперечного сечения $2\Pi = w''\bar{w}'' = \text{const}$ и соответствующие оптимальные решения являются квадратичными. В случае продольных колебаний стержня условия оптимальности, исходя из вида формы для условной потенциальной энергии $2\Pi = u'\bar{u}' = \text{const}$, оптимальные решения линейны.

Рассмотрим модельные задачи и определим оптимальные законы неоднородности.

2. Модельная задача о продольных колебаниях вязкоупругого стержня при различных способах закрепления (Задача 1)

В качестве примера рассмотрим свободные изгибные колебания вязкоупругого неоднородного стержня постоянного поперечного сечения при различных способах закрепления.

Безразмерная краевая задача, описывающая свободные колебания стержня, в общем виде записывается как $(r(x) — функция, характеризующая безразмерную плотность)$

$$\begin{aligned}(G(x, ik)u')' + k^2 ru &= 0, \\ a_1 u(0) + b_1 G(0, ik)u'(0) &= 0, \\ a_2 u(1) + b_2 G(1, ik)u'(1) &= 0.\end{aligned}$$

При $a_2 = 0$, $b_1 = 0$ имеем случай закрепленного на левом торце стержня (Задача 1а).

При $b_1 = b_2 = 0$ имеем случай закрепленного с обоих торцов стержня (Задача 1б).

Постановку оптимизационной задачи замыкают изопериметрические условия вида (3).

Соотношение Релея для первой собственной частоты запишется в виде

$$k^2 = \frac{\int_0^1 G(x, ik)u'\bar{u}'dx}{\int_0^1 r(x)u\bar{u}dx} \rightarrow \min_{g, h}.$$

Построим основной вариационный функционал, который учитывает изопериметрическое условие в виде (4)

$$J[g, h, u] = \frac{\int_0^1 G(x, ik)u'\bar{u}'dx}{\int_0^1 r(x)u\bar{u}dx} - \lambda \int_0^1 G dx.$$

Учтем вещественность форм $2\Pi = u'\bar{u}' = u_0'^2 + u_1'^2$, $u\bar{u} = u_0^2 + u_1^2$, где $u = u_0 + iu_1$, $K = \frac{1}{2} \int_0^1 r(u_0^2 + u_1^2) dx$, и применим основной вариационный принцип

$$\delta J[g, h, u] = K^{-1} \int_0^1 \delta G (u_0'^2 + u_1'^2) dx - \lambda \int_0^1 \delta G dx +$$



$$+2K^{-1} \left(\int_0^1 G (u'_0 \delta u'_0 + u'_1 \delta u'_1) dx - k^2 \int_0^1 r (u_0 \delta u_0 + u_1 \delta u_1) dx \right) = 0.$$

Выпишем множители перед независимыми вариациями $\delta h(x)$, $\delta g(x)$ и, приравняв их к нулю, получим условие оптимальности:

$$u_0'^2 + u_1'^2 = C^2, \quad C^2 = \lambda K. \quad (7)$$

Из условий равенства нулю множителей перед δu_0 , δu_1 имеем уравнения движения, аналогично упругому случаю, т. е. $(G(x, ik)u')' + k^2 ru = 0$.

Из условия оптимальности (7) видно, что собственные функции задачи представлены линейными функциями. Так, в случае Задачи 1а граничные условия имеют вид $u(0) = 0$, $G(1) = 0$ и соответствующее оптимальное смещение имеет вид $u = (1 + iC)x$.

Для определения оптимального модуля $G(x, ik)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение с граничным условием $G(1, ik) = 0$

$$(G(x, ik))' + k^2 x = 0,$$

откуда находим $G(x, ik) = \frac{1}{2}k^2(1 - x^2)$.

Таким образом, оптимальные законы распределения длительного и мгновенного модулей имеют вид

$$g(x) = C_1(1 - x^2), \quad h(x) = C_2(1 - x^2).$$

Удовлетворяя изопериметрическому условию (3), получим

$$g_*(x) = \frac{3}{2}g_0(1 - x^2), \quad h_*(x) = \frac{3}{2}h_0(1 - x^2). \quad (8)$$

Для нахождения максимальной первой собственной частоты (вещественной и мнимой частей) получим кубическое уравнение с комплексными коэффициентами:

$$3(i\tau k g_0 + h_0) = k^2(1 + i\tau k). \quad (9)$$

В результате решения (9) получим три комплексных корня, два из которых не удовлетворяют физической постановке задачи, например, в случае $g_0 = 1.75$, $h_0 = 1.333$, $\tau = 0.001$, $k_0 = 2.0$, $k_1 = 0.0006$.

В случае Задачи 1б $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, при этом построить непрерывные нетривиальные решения, удовлетворяющие условиям оптимальности, невозможно, поэтому расширим класс искомых функций и представим решение в виде

$$u = \begin{cases} (1 + iC_3)x, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ (1 + iC_3)(1 - x), & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Оптимальные распределения модулей (при $r(x) = 1$) имеют вид

$$g_*(x) = \begin{cases} 12g_0x^2, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 12g_0(x^2 - 2x + \frac{1}{2}), & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad h_*(x) = \begin{cases} 12h_0x^2, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 12h_0(x^2 - 2x + \frac{1}{2}), & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Максимальная первая собственная частота находится из кубического уравнения

$$6(i\tau k g_0 + h_0) = k^2(1 + i\tau k),$$

например, при $g_0 = 1.75$, $h_0 = 1.333$, $\tau = 0.001$, $k_0 = 2.828429$, $k_1 = 0.00125$.



3. Модельная задача об изгибных колебаниях вязкоупругой балки (Задача 2)

В качестве следующего примера рассмотрим свободные изгибные колебания вязкоупругой консольно закрепленной неоднородной балки (модель Бернулли – Эйлера) постоянного поперечного сечения S с площадью F , моментом инерции I , длиной l и плотностью $r(x)$.

Отметим, что можно сразу использовать условие (6), выписав потенциальную энергию для балки, а можно получить условие оптимальности непосредственно из соответствующей краевой задачи.

Для формулировки обезразмеренной краевой задачи, учитывающей затухание, используется концепция комплексных модулей, в рамках которой имеем задачу вида

$$\begin{aligned} (G(x, ik)w'')'' - k^2 Arw &= 0, \quad x \in [0, 1], \\ w(0) &= w'(0) = 0, \\ G(1, ik)w''(1) &= 0, \quad (G'(x, ik)w''(x))'(1) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $A = \frac{\omega^2 r_0 l^4 F}{h_0 I}$, r_0, h_0 — характерные значения плотности и мгновенного модуля.

Постановку оптимизационной задачи замыкают изопериметрические условия вида (3).

Соотношение Релея для первой собственной частоты и основной функционал запишутся в виде

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\int_0^1 G(x, ik)w''\bar{w}'' dx}{A \int_0^1 r w \bar{w} dx} \rightarrow \min_{g, h}, \\ J[g, h, w] &= \frac{\int_0^1 G(x, ik)w''\bar{w}'' dx}{A \int_0^1 r(x)w \bar{w} dx} - \lambda \int_0^1 G(x, ik) dx \rightarrow \min_{g, h}. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом вещественности форм $2\Pi = w''\bar{w}'' = w_0''^2 + w_1''^2$, $w\bar{w} = w_0^2 + w_1^2$, где $w = w_0 + iw_1$, $K = \frac{1}{2}A \int_0^1 r(w_0^2 + w_1^2) dx$, имеем

$$\begin{aligned} \delta J[g, h] &= K^{-1} \int_0^1 \delta G(w_0''^2 + w_1''^2) dx - \lambda \int_0^1 \delta G dx + \\ &+ 2K^{-1} \left(\int_0^1 G(w_0''\delta w_0'' + w_1''\delta w_1'') dx - k^2 A \int_0^1 r(w_0\delta w_0 + w_1\delta w_1) dx \right). \end{aligned}$$

Выписав множители перед независимыми вариациями δg , δh и приравняв их к нулю, получим основные соотношения вариационной задачи (при $r(x) = 1$)

$$\begin{aligned} w_0''^2 + w_1''^2 &= C^2, \\ (Gw'')'' - k^2 Aw &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12) находим вид собственных функций с учетом граничных условий при $x = 0$:

$$w_* = (1 + iC)x^2. \quad (13)$$

Для удовлетворения условиям на свободном конце консольного стержня примем условия в виде $G(1) = G'(1) = 0$.

Подставив (13) в (12) и решив соответствующее дифференциальное уравнение, найдем оптимальное распределение комплексного модуля. Заметим, что полученная задача при $\tau = 0$ аналогична упругому случаю, когда оптимальное распределение модуля упругости $E_*(x)$ с точностью до постоянного множителя определяется по закону:

$$E_*(x) = f_*(x) = \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x}{6} + \frac{1}{8} \right).$$



В случае, когда учитывается затухание, оптимальное решение принимает вид

$$\begin{aligned} G(x, ik) &= k^2 A f_*(x), \\ \alpha_1 g(x) + \alpha_2 h(x) &= k^2 A f_*(x), \\ \alpha_1 &= \frac{1}{1 + ik\tau}, \quad \alpha_2 = \frac{ik\tau}{1 + ik\tau}. \end{aligned}$$

Отсюда найдем законы распределения модулей

$$g(x) = C_1 f_*(x), \quad h(x) = C_2 f_*(x).$$

Удовлетворим изопериметрическим условиям, а также с учетом того, что

$$f_0 = \int_0^1 f_*(x) dx = 1/20,$$

получим $C_1 = g_0/f_0$, $C_2 = h_0/f_0$. Таким образом, оптимальные законы распределения длительного и мгновенного модулей имеют вид

$$g_*(x) = 20g_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x}{6} + \frac{1}{8} \right), \quad h_*(x) = 20h_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x}{6} + \frac{1}{8} \right). \quad (14)$$

Для нахождения максимальной первой собственной частоты (вещественной и мнимой частей) получим кубическое уравнение с комплексными коэффициентами:

$$i\tau k g_0 + h_0 = k^2 A f_0 (1 + i\tau k). \quad (15)$$

Стоит также отметить, что поведение оптимальных решений (8), (14) на свободном конце консоли $g_*(1) = 0$, $h_*(1) = 0$ может быть подвергнуто критике с практической точки зрения. Однако заметим, что получено аналитическое решение оптимизационной задачи, что не всегда возможно при других граничных условиях. На практике подобное поведение, не отвечающее традиционным условиям, накладываемым на характеристики балки, может быть исправлено за счет «добавления» на свободном конце элемента с постоянными характеристиками.

4. Асимптотический анализ первой собственной частоты для малых τ для Задачи 2

Проведем асимптотический анализ максимальной первой собственной частоты для малых времен релаксации на основе метода возмущений. Для этого k , w и модуль G разложим в ряд по степеням τ :

$$\begin{aligned} k &= k_{(0)} + i\tau k_{(1)} + O(\tau^2), \\ w &= w_{(0)} + i\tau w_{(1)} + O(\tau^2), \\ G &= h + i\tau k_{(0)}(g - h) + O(\tau^2), \\ k^2 &= k_{(0)}^2 + 2i\tau k_{(0)}k_{(1)} + O(\tau^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставим (16) в исходную краевую задачу (10) и соберем множители перед одинаковыми степенями τ :

$$\tau^0 : \begin{cases} (hw_{(0)}'')'' - k_{(0)}^2 A r w_{(0)} = 0, \\ w_{(0)}(0) = w_{(0)}'(0) = 0, \\ h(1)w_{(0)}''(1) = (hw_{(0)}'')'(1) = 0, \end{cases} \quad (17)$$



$$\tau^1 : \begin{cases} \left(h w_{(1)}'' + k_{(0)}(g - h) w_{(0)}'' \right)'' - \left(k_{(0)}^2 w_{(1)} + 2k_{(0)} k_{(1)} w_{(0)} \right) A r = 0, \\ w_{(1)}(0) = w_{(1)}'(0) = 0, \\ h(1) w_{(1)}''(1) + k_{(0)}(g(1) - h(1)) w_{(0)}''(1) = 0, \\ (h w_{(1)}'' + k_{(0)}(g - h) w_{(0)}'')'(1) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Заметим, что задача (17) аналогична упругому случаю [7], соответственно, $k_{(0)}^2 = \frac{h_0}{A f_0}$. Для нахождения k_1 дифференциальные уравнения (17) и (18) умножим на $w_{(1)}$ и на $w_{(0)}$ соответственно, вычтем первое из второго и проинтегрируем полученное уравнение по отрезку $x \in [0, 1]$. В результате несложных математических действий можем получить выражение для определения $k_{(1)}$:

$$k_{(1)} = \frac{\int_0^1 (g - h) w_{(0)}''^2 dx}{2A \int_0^1 r(x) w_{(0)}^2 dx},$$

и в случае $r(x) = 1$ находим $k_{(1)} = \frac{g_0 - h_0}{2A f_0}$. Таким образом, получаем асимптотическую формулу для вычисления оптимальной собственной частоты при малых значениях времени релаксации

$$k = \sqrt{\frac{h_0}{A f_0}} + i\tau \frac{g_0 - h_0}{2A f_0} + O(\tau^2). \quad (19)$$

Асимптотическую формулу (19) можно также получить непосредственно из уравнения (15). Для этого представим k в виде ряда по степеням τ (оставим в этот раз слагаемые до третьего порядка малости)

$$k = k_{(0)} + i\tau k_{(1)} + \tau^2 k_{(2)} + O(\tau^3)$$

и подставим в (15). Выпишем множители перед одинаковыми степенями τ :

$$\begin{aligned} \tau^0 : k_{(0)}^2 A f_0 &= h_0, \\ \tau^1 : A f_0 (2k_{(1)} + k_{(0)}^2) &= g_0, \\ \tau^2 : A f_0 (2k_{(0)} k_{(2)} - k_{(1)}^2 - k_{(0)}^2 k_{(1)}) &= -k_{(1)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из уравнений (20) найдем $k_{(j)}$, $j = 0, 1, 2$ и получим асимптотическую формулу для расчета k при малых временах релаксации τ , аналогичную (19):

$$k = \sqrt{\frac{h_0}{A f_0}} + i\tau \frac{g_0 - h_0}{2A f_0} + \tau^2 \frac{6}{8A f_0 \sqrt{A f_0 h_0}} \frac{g_0 h_0 - g_0^2 - 5h_0^2}{2} + O(\tau^3). \quad (21)$$

5. Численные результаты

Согласно предлагаемой схеме проведены расчеты для неоднородной консольной балки с учетом затухания. Результаты приведены в таблице для случая $g_0 = 1.75$, $h_0 = 1.33$ при различных значениях времени релаксации τ , а также для различных законов изменения модулей.

В таблице приняты следующие обозначения: $h_1(x) = 1 + x^2$; верхним индексом звездочкой «*» отмечены результаты расчета максимальной первой собственной частоты, полученной непосредственно из решения уравнения (15); g_* , h_* — оптимальные распределения модулей в каждой из модельных задач соответственно. Верификация результатов была проведена путем сравнения с результатами, полученными в [23]. Как видно из результатов, при оптимальном распределении модулей достигается максимальное значение первой собственной частоты.

При проведении расчетов для решения краевой задачи (11) использовался метод пристрелки и метод Рунге – Кутты. Результаты расчетов показывают, что первая собственная частота может быть увеличена на 27%.



Результаты оптимизационной задачи
Table. Results of the optimisation problem

τ	$h(x)$	$g(x)$	k_0	k_1
Задача 2				
0	$h_1(x)$		3.614	0
0.1	$h_1(x)$	$1.5 + x^3$	3.704	0.268
0.001	$h_1(x)$	$0.795(2 + x^4)$	3.611	0.003
0.01	h_0	g_0	4.060	0.026
0.01	h_*	g_*	5.166	0.042
0.01	h_*	g_*	5.166*	0.042*
0.1	h_*	g_*	5.339	0.342
Задача 1а				
0.01	h_*	g_*	2.0*	0.006*
Задача 1б				
0.01	h_*	g_*	2.829	0.013

На рис. 1 приведены графики оптимальных модулей для каждой из модельных задач. На рис. 2 приведена зависимость оптимальной частоты от времени релаксации для Задачи 2.

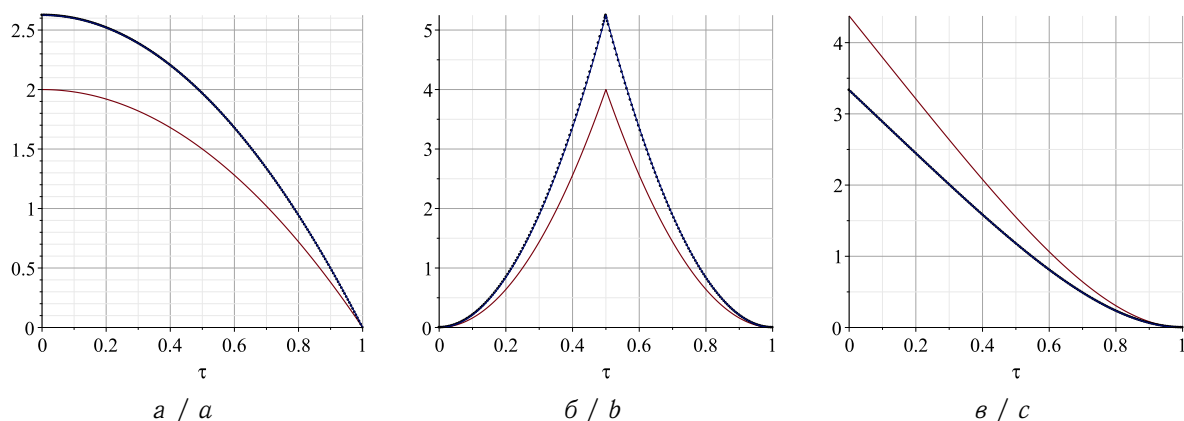


Рис. 1. Графики функций, характеризующих оптимальное распределение длительного (синий) $h(x)$ и мгновенного (красный) $g(x)$ модулей: а — для Задачи 1а; б — для Задачи 1б; в — для Задачи 2 (цвет онлайн)

Fig. 1. Figures of functions characterising the optimal distribution of long (blue) $h(x)$ and instantaneous (red) $g(x)$ modules: а for Problem 1а; б for Problem 1б; в for Problem 2 (color online)

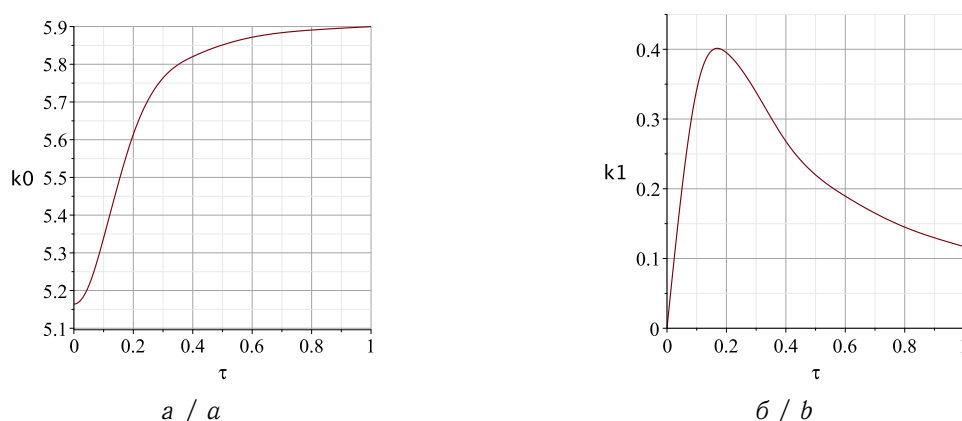


Рис. 2. Графики зависимости вещественной (а) и мнимой (б) частей максимальной частоты k от времени релаксации τ (Задача 2)

Fig. 2. Figures of dependence of real (а) and imaginary (б) parts of the maximal frequency k on the time of relaxation τ (Problem 2)



На рис. 3 приведены результаты, демонстрирующие диапазон применимости асимптотической формулы (21). Как видно из графиков, погрешность асимптотической формулы составляет не более 4% для $\tau < 0.1$.

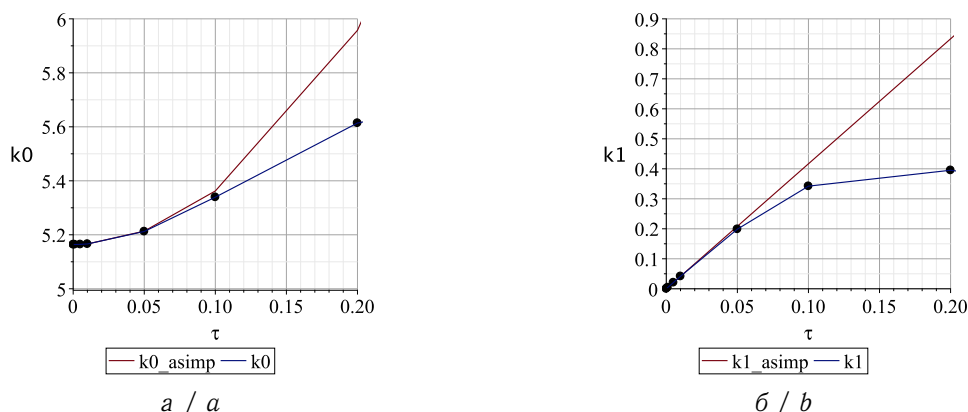


Рис. 3. Графики вещественной (а) и мнимой (б) частей k (цвет онлайн)
Fig. 3. Figures of real (left) and imaginary (right) parts of k (color online)

Заключение

Проведено исследование спектральной оптимизационной задачи об определении оптимального распределения вязкоупругих модулей произвольного неоднородного тела, при которых первая собственная частота колебаний максимальна. Получено общее условие оптимальности для произвольного тела с учетом затухания. Рассмотрены модельные задачи о продольных и изгибных колебаниях вязкоупругой балки. Построены необходимые функционалы, из вариационного подхода найдены условия оптимальности, которые характеризуются постоянством энергии деформаций. Получены аналитические выражения для законов изменения мгновенного и длительного модулей. Для определения оптимального значения первой собственной частоты сформулировано кубическое уравнение с комплексными коэффициентами.

Получена асимптотическая формула для оптимальной собственной частоты для малых значений времен релаксации.

Сделана серия расчетов, проведено сравнение с асимптотическим подходом. При сравнении с однородным случаем выигрыш в значении первой собственной частоты при изгибных колебаниях консольной балки составляет 27%.

Список литературы

1. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. Москва : Наука, 1980. 256 с.
2. Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций. Москва : Мир, 1981. 278 с. (Механика. Новое в зарубежной науке. Вып. 27).
3. Niordson I. F. On the optimal design of a vibrating beam // Quarterly of Applied Mathematics. 1965. Vol. 23. P. 47–53. <https://doi.org/10.1090/qam/175392>
4. Братусь А. С., Картелишвили В. М. Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 6. С. 119–139. EDN: ZVYSTR
5. Sarkisyan V. S., Gukasyan G. M., Grigoryan A. A. Optimal design of a circular plate with rectilinear anisotropy // Journal of Mathematical Sciences. 2001. Vol. 104, iss. 5. P. 1569–1574. <https://doi.org/10.1023/A:1011300122949>
6. Bratus' A. S., Posvyanskii V. P. The optimum shape of a bending beam // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2000. Vol. 64, iss. 6. P. 993–1004. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(00\)00131-3](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(00)00131-3)



7. Гринев В. Б., Филиппов А. П. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. Киев : Наукова думка, 1975. 290 с.
8. Gupta V. K., Murthy P. N. Optimal design of uniform non-homogeneous vibrating beams // Journal of Sound and Vibration. 1978. Vol. 59, iss. 4. P. 521–531. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(78\)80132-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(78)80132-1)
9. Саркисян В. С., Джулакян Г. М. Оптимизация первой собственной частоты колебания прямоугольной пластинки со слабой неоднородностью // Механика: межвузовский сборник научных трудов. Ереван : Изд-во Ереванского ун-та, 1984. Вып. 3. С. 120–125.
10. Liao Y. S. A generalized method for the optimal design of beams under flexural vibration // Journal of Sound and Vibration. 1993. Vol. 167, iss. 2. P. 193–202. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1329>
11. Belardi V. G., Trupiano S., Fanelli P., Vivio F. Overall elastic characterization of equivalent FE models for aluminum foams through computational homogenization approach and genetic algorithm optimization // European Journal of Mechanics – A/Solids. 2024. Vol. 103. Art. 105189. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105189>
12. Chen Y., Wang Q., Zhong R., Shi X., Qin B. Fiber orientation and boundary stiffness optimization of laminated cylindrical shells with elastic boundary for maximum the fundamental frequency by an improved sparrow search algorithm // Thin-Walled Structures. 2023. Vol. 193. Art. 111299. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111299>
13. Yan G., Li Yi., Huang Xi., Yao S., Zhou W. Multi-objective optimization of elastic metaplates for lightweight and ultrawide bandgaps // International Journal of Mechanical Sciences. 2023. Vol. 259. Art. 108603. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108603>
14. Hedayatrasa S., Abhary K., Uddin M., Ng Ch.-T. Optimum design of phononic crystal perforated plate structures for widest bandgap of fundamental guided wave modes and maximized in-plane stiffness // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol. 89. P. 31–58. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.01.010>
15. Niu B., Yan J., Cheng G. Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2009. Vol. 39, iss. 2. P. 115–132. <https://doi.org/10.1007/s00158-008-0334-4>
16. Ni X. H., Teng X. C., Jiang W., Zhang Y., Ren X. Multi-objective optimization and theoretical analysis of re-entrant structure with enhanced mechanical properties // Thin-Walled Structures. 2024. Vol. 199. Art. 111791. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.111791>
17. Thomes R. L., Mosquera-Sánchez J. A., De Marqui C. Bandgap widening by optimized disorder in one-dimensional locally resonant piezoelectric metamaterials // Journal of Sound and Vibration. 2021. Vol. 512. Art. 116369. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116369>
18. Федотов А. В., Беляев А. К., Полянский В. А. Численное исследование эффективности метода модальных фильтров и метода наблюдателей при реализации модального управления колебаниями упругих систем // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16, № 3. С. 160–176. <https://doi.org/10.18721/JPM.16313>
19. Федотов А. В. Применимость упрощенных моделей пьезоэлементов в задаче активного гашения колебаний // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 2. С. 126–132. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2020-63-2-126-132>
20. Асташев В. К., Пичугин К. А. Резонансная настройка стержневой системы с пьезоэлектрическим возбудителем колебаний // Вестник научно-технического развития. 2017. № 9 (121). С. 2–8.
21. Мацевич Т. А., Кирьянова Л. В., Смирнов В. А., Иванов П. С. Оптимизация параметров вязкоупругой модели элементов конструкций из композитных материалов на основе экспериментальных данных // Жилищное строительство. 2023. № 11. С. 32–36. <https://doi.org/10.31659/0044-4472-2023-11-32-36>
22. Кристенсен Р. М. Введение в механику композитов. Москва : Мир, 1982. 336 с.
23. Ватутлян А. О., Варченко А. А. Исследование колебаний балки из функционально-градиентного материала с учетом затухания // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2021. Т. 212, № 4. С. 10–18. <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2021-4-10-18>



References

1. Banichuk N. V. *Optimizatsiya form uprugikh tel* [Optimization of elastic body shapes]. Moscow, Nauka, 1980. 256 p. (in Russian).
2. Ol'hoff N. *Optimal'noe proektirovanie konstruktsiy* [Optimal design of structures]. Moscow, Mir, 1981. 278 p. (in Russian).
3. Niordson I. F. On the optimal design of a vibrating beam. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1965, vol. 23, pp. 47–53. <https://doi.org/10.1090/qam/175392>
4. Bratus' A. S., Kartelishvili V. M. Approximate analytical solutions in problems of optimization of stability and vibration frequencies of elastic thin-walled structures. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1981, iss. 6, pp. 119–139 (in Russian). EDN: ZVYSTR
5. Sarkisyan V. S., Gukasyan G. M., Grigoryan A. A. Optimal design of a circular plate with rectilinear anisotropy. *Journal of Mathematical Sciences*, 2001, vol. 104, iss. 5, pp. 1569–1574. <https://doi.org/10.1023/A:1011300122949>
6. Bratus' A. S., Posvyanskii V. P. The optimum shape of a bending beam. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, vol. 64, iss. 6, pp. 993–1004. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(00\)00131-3](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(00)00131-3)
7. Grinev V. B., Filippov A. P. *Optimizatsiya elementov konstruktsiy po mekhanicheskim kharakteristikam* [Optimization of structural elements by mechanical characteristics]. Kiev, Naukova dumka, 1975. 290 p. (in Russian).
8. Gupta V. K., Murthy P. N. Optimal design of uniform non-homogeneous vibrating beams. *Journal of Sound and Vibration*, 1978, vol. 59, iss. 4, pp. 521–531. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(78\)80132-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(78)80132-1)
9. Sarkisyan B. C., Dzhulakyan G. M. Optimization of the first natural frequency of oscillation of a rectangular plate with weak inhomogeneity. *Mekhanika: mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov* [Mechanics: Interuniversity collection of scientific papers]. Erevan, Erevan State University Publ., 1984, iss. 3, pp. 120–125 (in Russian).
10. Liao Y. S. A generalized method for the optimal design of beams under flexural vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, vol. 167, iss. 2, pp. 193–202. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1329>
11. Belardi V. G., Trupiano S., Fanelli P., Vivio F. Overall elastic characterization of equivalent FE models for aluminum foams through computational homogenization approach and genetic algorithm optimization. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2024, vol. 103, art. 105189. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105189>
12. Chen Y., Wang Q., Zhong R., Shi X., Qin B. Fiber orientation and boundary stiffness optimization of laminated cylindrical shells with elastic boundary for maximum the fundamental frequency by an improved sparrow search algorithm. *Thin-Walled Structures*, 2023, vol. 193, art. 111299. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111299>
13. Yan G., Li Yi., Huang Xi., Yao S., Zhou W. Multi-objective optimization of elastic metaplates for lightweight and ultrawide bandgaps. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, vol. 259, art. 108603. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2023.108603>
14. Hedayatrasa S., Abhary K., Uddin M., Ng Ch.-T. Optimum design of phononic crystal perforated plate structures for widest bandgap of fundamental guided wave modes and maximized in-plane stiffness. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016, vol. 89, pp. 31–58. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.01.010>
15. Niu B., Yan J., Cheng G. Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, vol. 39, iss. 2, pp. 115–132. <https://doi.org/10.1007/s00158-008-0334-4>
16. Ni X., Teng X. C., Jiang W., Zhang Y., Ren X. Multi-objective optimization and theoretical analysis of re-entrant structure with enhanced mechanical properties. *Thin-Walled Structures*, 2024, vol. 199, art. 111791. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.111791>
17. Thomes R. L., Mosquera-Sánchez J. A., De Marqui C. Bandgap widening by optimized disorder in one-dimensional locally resonant piezoelectric metamaterials. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, vol. 512, art. 116369. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116369>



18. Fedotov A. V., Belyaev A. K., Polyanskij V. A. Numerical study of the efficiency of modal filter method and observer method for implementation of modal control of vibrations of elastic systems. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, 2023, vol. 16, iss. 3, pp. 160–176 (in Russian). <https://doi.org/10.18721/JPM.16313>
19. Fedotov A. V. Applicability of simplified models of piezoelectric elements in the problem of active vibration damping. *Journal of Instrument Engineering*, 2020, vol. 63, iss. 2, pp. 126–132 (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2020-63-2-126-132>
20. Astashev V. K., Pichugin K. A. Resonant tuning of bar system with the piezoelectric exciter of oscillation. *Bulletin of Science and Technical Development*, 2017, vol. 9 (121), pp. 2–8 (in Russian).
21. Maceevich T. A., Kir'yanova L. V., Smirnov V. A., Ivanov P. S. Optimization of parameters of a viscoelastic model of elements of structures made from composite materials based on experimental data. *Zhilishchnoe Stroitel'stvo* [Housing Construction], 2023, vol. 11, pp. 32–36 (in Russian). <https://doi.org/10.31659/0044-4472-2023-11-32-36>
22. Kristensen R. M. *Mechanics of composite materials*. New York, Wiley, 1979. 348 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1982. 336 p.).
23. Vatul'yan A. O., Varchenko A. A. Investigation of vibrations of a beam made of a functionally graded material taking into account attenuation. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*, 2021, vol. 212, iss. 4, pp. 10–18 (in Russian). <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2021-4-10-18>

Поступила в редакцию / Received 10.05.2024

Принята к публикации / Accepted 13.06.2024

Опубликована / Published 29.11.2024



Научная статья

УДК 517.9:539.3:532.5

Исследование математической модели системы измерения давления в авиационных двигателях

П. А. Вельмисов[✉], А. В. Анкилов, Ю. В. Покладова

Ульяновский государственный технический университет, Россия, 432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32

Вельмисов Петр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, velmisov@ulstu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, AuthorID: 7922

Анкилов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ankil@ulstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5946-8535>, AuthorID: 16512

Покладова Юлия Валерьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, pokladovau@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9876-4038>, AuthorID: 606694

Аннотация. В работе исследуется механическая система, состоящая из трубопровода с камерой сгорания авиационного двигателя на одном конце и с датчиком, предназначенным для измерения давления в камере сгорания, на другом конце. Чувствительным элементом датчика, передающим информацию о давлении, является упругая пластина. Предложена математическая модель системы измерения давления с учетом передачи теплового потока по трубопроводу с рабочей средой (газом или жидкостью) от двигателя к упругому элементу. Для описания колебаний чувствительного элемента датчика рассмотрена линейная модель твердого деформируемого тела, учитывающая распределение температуры по толщине упругого элемента. С помощью метода малого параметра получена связанная система асимптотических дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая совместную динамику газожидкостной среды в трубопроводе и упругого чувствительного элемента датчика давления. Исследовались случаи шарнирного и жесткого закрепления концов чувствительного элемента. На основе метода Бубнова – Галёркина задача сведена к исследованию связанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью системы компьютерной алгебры Mathematica 12.0 произведены численные эксперименты для конкретных параметров механической системы.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, трубопровод, упругий элемент, датчик давления, дифференциальные уравнения, метод Бубнова – Галёркина

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00517).

Для цитирования: Вельмисов П. А., Анкилов А. В., Покладова Ю. В. Исследование математической модели системы измерения давления в авиационных двигателях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 567–577. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-567-577>, EDN: TTEUAH

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Investigation of mathematical model of pressure measurement system in aircraft engines

P. A. Velmisov[✉], A. V. Ankilov, Yu. V. Pokladova

Ulyanovsk State Technical University, 32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia

Petr A. Velmisov, velmisov@ulstu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, AuthorID: 7922

Andrey V. Ankilov, ankil@ulstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5946-8535>, AuthorID: 16512



Yuliya V. Pokladova, pokladovau@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9876-4038>, AuthorID: 606694

Abstract. A mechanical system consisting of a pipeline connected at one end to the combustion chamber of an aircraft engine, and with a sensor designed to measure the pressure in the combustion chamber at the other end is investigated in the work. The sensitive element of the sensor, which transmits information about pressure, is an elastic plate. A mathematical model of a pressure measurement system, taking into account the transfer of heat flow through a pipeline with a working medium (gas or liquid) from the engine to the elastic element, is proposed. To describe the vibrations of the sensitive element of the sensor, a linear model of a solid deformable body is considered, taking into account the temperature distribution over the thickness of the elastic element. Using the small parameter method, a coupled system of asymptotic partial differential equations was obtained that describes the joint dynamics of the gas-liquid medium in the pipeline and the elastic sensitive element of the pressure sensor. The cases of hinged and rigid fastening of the ends of the sensing element were studied. Based on the Bubnov – Galerkin method, the problem is reduced to the study of a coupled system of ordinary differential equations. Using the computer algebra system Mathematica 12.0, numerical experiments were carried out for specific parameters of the mechanical system.

Keywords: aeroelastohydroelasticity, pipeline, elastic element, pressure sensor, differential equations, Bubnov – Galerkin method

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00517).

For citation: Velmisov P. A., Ankilov A. V., Pokladova Yu. V. Investigation of mathematical model of pressure measurement system in aircraft engines. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 567–577 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-567-577>, EDN: TTEUAH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

При проектировании приборов, взаимодействующих с газожидкостной средой, особое значение имеет анализ динамики и устойчивости их деформируемых элементов [1–15]. При конструировании датчиков давления рабочих сред необходимо учитывать, что тепловое и аэрогидродинамическое воздействия могут повышать амплитуду и частоту колебаний упругих элементов до критических значений, не позволяющих обеспечивать необходимую точность их работы. Практическим и теоретическим вопросам проектирования датчиков давления газожидкостных сред посвящено много научных работ, в частности, отметим [11–14, 16–21]. Научные исследования [11–17, 20, 21] посвящены описанию принципов работы датчиков давления и определению их технических характеристик. В [11, 12, 18] приводятся основные принципы проектирования датчиков давления.

Агрессивное воздействие на чувствительный элемент датчика давления высоких температур и повышенных уровней виброускорений, проявляющихся при некоторых режимах работы двигателя, является основной проблемой при проектировании, конструировании и эксплуатации датчиков давления газожидкостных сред в авиационных и ракетных двигателях. Такие эксплуатационные условия ведут к завышенной погрешности измерений и к преждевременному разрушению упругого чувствительного элемента датчика. Одним из основных направлений решения этой проблемы является оптимальное проектирование механической системы «трубопровод – датчик давления». При проектировании датчик с помощью трубопровода отводится на расстояние от камеры сгорания двигателя, что позволяет ослабить агрессивное воздействие на него температур и виброускорений. Такие математические модели, в которых датчик расположен на конце отводного трубопровода, исследовались в работах авторов [6–9].



1. Постановка задачи

Исследуется математическая модель системы, состоящей из трубопровода и датчика давления и учитывающей, в отличие от [8], передачу теплового потока по трубопроводу с газожидкостной средой от авиационного двигателя к датчику, измеряющему давление этой среды. Поле скоростей газожидкостной среды в трубопроводе считается плоским (рис. 1). На конце трубопровода, закрепленном на выходе из камеры сгорания двигателя, задан закон изменения давления рабочей среды. На другом конце трубопровода закреплен датчик, предназначенный для измерения этого давления. Чувствительным элементом датчика является упругая пластина.

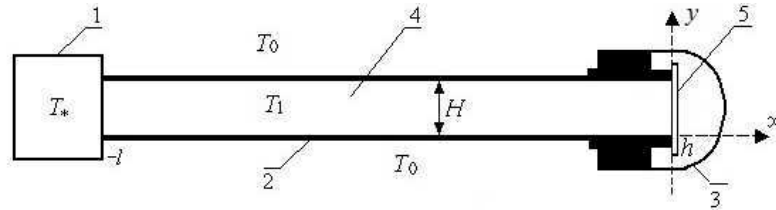


Рис. 1. Трубопровод, соединяющий двигатель с датчиком давления
Fig. 1. Pipe, connecting the engine to the pressure sensor

На рис. 1 введены следующие обозначения: l , H — длина и ширина трубопровода соответственно; h — толщина упругого чувствительного элемента; $T_1(x, t)$ — функция, описывающая закон изменения температуры газожидкостной среды внутри трубопровода; T_0 — постоянная температура окружающей трубопровод среды ($T_0 = \text{const}$); $T_*(t)$ — функция, описывающая закон изменения температуры на выходе из камеры сгорания двигателя (на входе в трубопровод); 1 — камера сгорания двигателя; 2 — трубопровод; 3 — датчик давления; 4 — газожидкостная среда в трубопроводе; 5 — чувствительный элемент датчика (упругая пластина).

Введем обозначения: $\Phi(x, y, t)$ — потенциал скорости газожидкостной среды; $P(x, y, t)$ — функция, описывающая давление в этой среде; $w(y, t)$ — функция, описывающая деформацию чувствительного элемента датчика; $T_2(x, t)$ — закон изменения температуры по толщине элемента; $F(y, t)$ — закон изменения давления рабочей среды на выходе из камеры сгорания (на входе в трубопровод). Уравнение $g(x, y, t) = 0$ описывает поверхность элемента. Тогда в модели несжимаемой среды математическая постановка задачи примет вид

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad y \in (0, H), \quad (1)$$

$$\Phi_x g_x + \Phi_y g_y = -g_t, \quad g(x, y, t) = 0, \quad y \in (0, H), \quad (2)$$

$$m\ddot{w} + Dw'''' + N(t)w'' + \gamma w = P - \bar{P}, \quad g(x, y, t) = 0, \quad y \in (0, H), \quad (3)$$

$$P = P_0 - \rho \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 + \frac{1}{2} \Phi_y^2 \right), \quad x \in (-l, 0), \quad y \in (0, H), \quad (4)$$

$$P(-l, y, t) = F(y, t), \quad y \in (0, H), \quad (5)$$

$$\rho c_1 T_{1t} = k_1 T_{1xx} - \beta_1 (T_1 - T_0), \quad x \in (-l, 0), \quad (6)$$

$$T_1(-l, t) = T_*(t), \quad (7)$$

$$T_{1x}(0, t) = 0, \quad (8)$$

$$\rho_0 c_2 T_{2t} = k_2 T_{2xx}, \quad x \in (0, h), \quad (9)$$

$$T_{2x}(h, t) = 0, \quad (10)$$

$$-k_2 T_{2x}(0, t) = \alpha_0 (T_1 - T_2)|_{x=0}, \quad (11)$$

$$N(t) = N_0 + \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \int_0^h T_2(x, t) dx. \quad (12)$$



Штрих и точка обозначают частные производные по координате y и времени t , а индексы x, y, t снизу – частные производные по координатам x, y и времени t . Коэффициенты системы: $\bar{P}$ – распределенная внешняя нагрузка, действующая на элемент; P_0 – давление в покоящейся газожидкостной среде, ρ – плотность этой среды; ρ_0, E, ν, m, D – плотность, модуль упругости, коэффициент Пуассона, погонная масса и изгибная жесткость пластины (упругого элемента); $N(t)$ – сжимающее (растягивающее) пластину усилие, вычисляемое по формуле (12); N_0 – постоянная составляющая усилия, созданная при закреплении пластины; γ – коэффициент жесткости слоя обжатия пластины (основания); α_T – температурный коэффициент линейного расширения; k_1, k_2 – коэффициенты теплопроводности среды и материала пластины соответственно; c_1, c_2 – коэффициенты теплоемкости среды и пластины; α_0, β_1 – коэффициенты теплообмена между рабочей средой и пластиной и между поверхностью трубопровода и окружающей средой.

Уравнение Лапласа (1) описывает движение несжимаемой среды в трубопроводе; граничное условие (2) задает закон непротекания газожидкостной среды через поверхность элемента; уравнение (3) описывает динамику упругого элемента; давление в рабочей среде (4) определяется интегралом Лагранжа – Коши; условие (5) задает закон равенства давлений на входе в трубопровод и на выходе из камеры сгорания двигателя; уравнения (6), (9) описывают закон распределения температуры по длине трубопровода и по толщине пластины соответственно; условие (7) задает закон изменения температуры на выходе из двигателя; условие (8) означает, что тепловой поток, проникающий через левую границу пластины $x = 0$, пренебрежимо мал вследствие малости толщины пластины и наличия вакуума справа от нее; (10) условия теплоизоляции внешней стороны пластины, справа от которой находится вакуум; (11) условие теплообмена между пластиной и рабочей средой в полости датчика.

2. Метод малого параметра

Произведем разложение функций $\Phi(x, y, t)$, $g(x, y, t)$, $w(y, t)$, $F(y, t)$ по малому параметру ε :

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, t) &= \varepsilon \varphi(x, y, t) + \dots, & g(x, y, t) &= x - w_0(y) - \varepsilon w_1(y, t) - \dots, \\ w(y, t) &= w_0(y) + \varepsilon w_1(y, t) + \dots, & F(y, t) &= P_0 + \varepsilon P_*(y, t) + \dots\end{aligned}\quad (13)$$

В силу малости температурного коэффициента линейного расширения материала пластины считаем его порядка ε :

$$\alpha_T = \varepsilon \alpha_{T1} + \dots \quad (14)$$

Подставим разложения (13) в систему (1)–(4), а разложение (14) в коэффициент (12) и ограничимся членами порядка ε . Тогда получим математическую модель задачи в первом асимптотическом приближении:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad x \in (-l, 0), \quad y \in (0, H), \quad (15)$$

$$Dw_0'''' + N_0 w_0'' + \gamma w_0 = P_0 - \bar{P}, \quad y \in (0, H), \quad (16)$$

$$m \ddot{w}_1 + Dw_1'''' + N_1(t) w_0'' + N_0 w_1'' + \gamma w_1 = -\rho \varphi_t(w_0(y), y, t), \quad y \in (0, H), \quad (17)$$

$$\varphi_x(w_0(y), y, t) - \varphi_y(w_0(y), y, t) w_0'(y) = \dot{w}_1(y, t), \quad y \in (0, H), \quad (18)$$

$$-\rho \varphi_t(-l, y, t) = P_*(y, t), \quad y \in (0, H), \quad (19)$$

где $P_*(y, t)$ – функция, описывающая избыточное давление на входе в трубопровод (в сечении $x = -l$), а коэффициент

$$N_1(t) = \frac{E \alpha_{T1}}{1 - \nu} \int_0^h T_2(z, t) dz. \quad (20)$$



3. Метод Бубнова – Галёркина

Предположим, что выполняется условие $P_*(y, t) = P_*(t)$. Для того чтобы потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ удовлетворял уравнению (15) и условию (19), возьмем его в виде разложения

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{1}{\rho} \int_0^t P_*(z) dz + (x + l)\alpha(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \cos \lambda_n y \cdot \operatorname{sh} \lambda_n(x + l), \quad (21)$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi}{H}$.

Считаем, что концы упругого элемента закреплены либо жестко, либо шарнирно. При шарнирном закреплении должны выполняться условия

$$w_0(0) = w_0''(0) = w_0(H) = w_0''(H) = w_1(0, t) = w_1''(0, t) = w_1(H, t) = w_1''(H, t) = 0, \quad (22)$$

а при жестком закреплении —

$$w_0(0) = w_0'(0) = w_0(H) = w_0'(H) = w_1(0, t) = w_1'(0, t) = w_1(H, t) = w_1'(H, t) = 0. \quad (23)$$

В случае отсутствия постоянной составляющей усилия $N_0 = 0$ и отсутствия обжимного слоя $\gamma = 0$ функция $w_0(y)$, удовлетворяющая уравнению (16), для граничных условий (22) примет вид

$$w_0(y) = \frac{P_0 - \bar{P}}{24D} (y^4 - 2Hy^3 + H^3y),$$

а для граничных условий (23) —

$$w_0(y) = \frac{P_0 - \bar{P}}{24D} (y^4 - 2Hy^3 + H^3y^2).$$

Согласно методу Бубнова – Галёркина решение уравнения (17) ищется в виде

$$w_1(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}(t) \xi_n(y), \quad (24)$$

где $\xi_n(y)$ — полная система базисных функций, подобранных так, чтобы выполнялись условия (22) для шарнирного закрепления и (23) для жесткого закрепления, а функции $w_{1n}(t)$ определяются из условия ортогональности невязки уравнения (17) к системе поверочных функций $\{h_n(y)\}$. В качестве поверочных функций для вывода системы обыкновенных дифференциальных уравнений возьмем базисные.

Базисные функции, являющиеся решением уравнения $\xi_n^{IV}(y) = \gamma^4 \xi_n(y)$, примут вид

$$\xi_n(y) = A_n \cos \gamma_n y + B_n \sin \gamma_n y + C_n \operatorname{ch} \gamma_n y + D_n \operatorname{sh} \gamma_n y, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Чтобы функция $w_1(y, t)$ в виде (24) удовлетворяла условиям (22) или (23), найдены коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n и параметр γ_n . Для случая шарнирного закрепления получим

$$\xi_n(y) = \sin \gamma_n y, \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{H}, \quad (25)$$

а для случая жесткого закрепления —

$$\xi_n(y) = \operatorname{ch}(\gamma_n y) - \cos(\gamma_n y) - \frac{\operatorname{ch}(\gamma_n H) - \cos(\gamma_n H)}{\operatorname{sh}(\gamma_n H) - \sin(\gamma_n H)} (\operatorname{sh}(\gamma_n y) - \sin(\gamma_n y)), \quad (26)$$

где γ_n находятся как корни уравнения $\operatorname{ch}(\gamma_n H) \cos(\gamma_n H) = 1$.



Системы функций в виде (25), (26) ортогональны на $[0, H]$, т. е. справедливы равенства

$$\int_0^H \xi_k(y) \xi_j(y) dy = 0, \quad \int_0^H \xi_k(y) \xi_j^{IV}(y) dy = 0, \quad k \neq j. \quad (27)$$

Подставляя (21), (24) в (17) и проецируя это уравнение на систему функций $\{\xi_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$, а условие (18) на систему функций $\{\cos \lambda_n y\}_{n=0}^{\infty}$, с учетом (27) согласно методу Бубнова – Галёркина получим

$$\begin{aligned} & (m\ddot{w}_{1k}(t) + (D\mu_k^4 + \gamma) w_{1k}(t)) \int_0^H \xi_k^2(y) dy + N_0 \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}(t) \int_0^H \xi_n''(y) \xi_k(y) dy = \\ & = P_*(t) \cdot \int_0^H \xi_k(y) dy - N_1(t) \int_0^H w_0''(y) \xi_k(y) dy - \rho \dot{\alpha}(t) \int_0^H (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy - \\ & - 2\rho \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\varphi}_n(t) \cdot \int_0^H \cos \lambda_n y \cdot \operatorname{sh} \lambda_n (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y \cdot \operatorname{ch} \lambda_n (w_0(y) + l) + w_0'(y) \sin \lambda_n y \cdot \operatorname{sh} \lambda_n (w_0(y) + l)) dy + \\ & + \alpha(t) \cdot H = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_{1n}(t) \int_0^H \xi_n(y) dy, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y \cdot \operatorname{ch} \lambda_n (w_0(y) + l) + w_0'(y) \sin \lambda_n y \cdot \operatorname{sh} \lambda_n (w_0(y) + l)) \times \\ & \times \cos \lambda_k y dy = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_{1n}(t) \int_0^H \xi_n(y) \cos \lambda_k y dy, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Из уравнения (29) находим функцию $\alpha(t)$. Подставляя $\alpha(t)$ в уравнения (28) и дифференцируя уравнения (30) по переменной t , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $\varphi_n(t)$, $w_{1n}(t)$:

$$\begin{aligned} & m\ddot{w}_{1k}(t) \int_0^H \xi_k^2(y) dy - \frac{\rho}{H} \left(\int_0^H (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy \right) \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{w}_{1n}(t) \int_0^H \xi_n(y) dy + \\ & + (D\mu_k^4 + \gamma) w_{1k}(t) \int_0^H \xi_k^2(y) dy + N_0 \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}(t) \int_0^H \xi_n''(y) \xi_k(y) dy = P_*(t) \int_0^H \xi_k(y) dy - \\ & - N_1(t) \int_0^H w_0''(y) \xi_k(y) dy - 2\rho \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\varphi}_n(t) \int_0^H \cos \lambda_n y \cdot \operatorname{sh} \lambda_n (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy + \\ & + \frac{2\rho}{H} \left(\int_0^H (w_0(y) + l) \xi_k(y) dy \right) \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\varphi}_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y \cdot \operatorname{ch} \lambda_n (w_0(y) + l) + \\ & + w_0'(y) \sin \lambda_n y \cdot \operatorname{sh} \lambda_n (w_0(y) + l)) dy, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (31)$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{w}_{1n}(t) \int_0^H \xi_n(y) \cos \lambda_k y dy = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\varphi}_n(t) \lambda_n \int_0^H (\cos \lambda_n y \cdot \operatorname{ch} \lambda_n (w_0(y) + l) + w'_0(y) \sin \lambda_n y \cdot \operatorname{sh} \lambda_n (w_0(y) + l)) \cos \lambda_k y dy, \quad k = 1, 2, \dots \quad (32)$$

4. Решение тепловой задачи

При решении тепловой задачи (6)–(11) вначале, решая задачу (6)–(8), определяем закон распределения температуры рабочей среды по длине трубопровода, затем, решая задачу (9)–(11), находим закон распределения температуры по толщине пластины.

Методом разделения переменных получим решение задачи (6)–(8), вывод которого дан в [9]:

$$T_1(x, t) = T_*(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \cdot e^{-\gamma_n t} \sin \nu_n(x + l) \left[\frac{\beta_1^0 T_0}{\gamma_n} - T_1^0 + e^{\gamma_n t} \left(T_*(t) - \frac{\beta_1^0 T_0}{\gamma_n} \right) - a_1^2 \nu_n^2 \int_0^t e^{\gamma_n \tau} T_*(\tau) d\tau \right], \quad (33)$$

где $T_1^0 = T_1(x, 0) = \text{const}$, $\gamma_n = a_1^2 \nu_n^2 + \beta_1^0$,

$$\nu_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}, \quad \chi_n = \frac{4}{\pi(2n+1)}, \quad a_1^2 = \frac{k_1}{\rho c_1}, \quad \beta_1^0 = \frac{\beta_1}{\rho c_1}.$$

Если известен закон изменения температуры $T_*(t)$ на выходе из камеры сгорания двигателя, то по формуле (33) можно определить значение температуры в любой момент времени t в любой точке трубопровода.

Решение задачи (9)–(11), позволяющее найти распределение температуры по толщине пластины в произвольный момент времени, имеет вид

$$T_2(x, t) = \tilde{T}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\delta_n t} \cos \mu_n(x - h) \left[T_2^0 - T_1^0 - \int_0^t e^{\delta_n \tau} \tilde{T}'(\tau) d\tau \right], \quad (34)$$

где

$$T_2^0 = T_2(x, 0) = \text{const}, \quad a_2^2 = \frac{k_2}{\rho_0 c_2}, \quad A_n = \frac{(-1)^n 2\alpha_0 \sqrt{\alpha_0^2 + k_2^2 \mu_n^2}}{\mu_n [h(\alpha_0^2 + k_2^2 \mu_n^2) + k_2 \alpha_0]}, \quad \delta_n = a_2^2 \mu_n^2,$$

а значения μ_n ($n = 0 \div \infty$) — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} \mu_n h = \frac{\alpha_0}{k_2 \mu_n}.$$

Функция $\tilde{T}(t) = T_1(0, t)$ определяется по формуле (33).

Подставляя (34), окончательно найдем коэффициент (20) системы (31), (32):

$$N_1(t) = \frac{E\alpha_{T1}}{1-\nu} \left(\tilde{T}(t)h + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\mu_n} e^{-\delta_n t} \sin \mu_n h \left[T_2^0 - T_1^0 - \int_0^t e^{\delta_n \tau} \tilde{T}'(\tau) d\tau \right] \right).$$

5. Численный эксперимент

Пусть окружающей трубопровод средой является воздух с температурой $T_0 = 293.15$ (20°C). Коэффициент теплообмена между поверхностью трубопровода и окружающей средой $\beta_1 = 15.5$. Считаем, что температура на входе в трубопровод постоянна $T_* = 1800$, а избыточное давление переменное $P_*(t) = 10^6(5 - \cos 10t)$. Рабочей средой в трубопроводе длиной $l = 0.5$ и шириной $H = 0.01$ является вода, тогда плотность $\rho = 1000$, коэффициент теплоемкости $c_1 = 4182$, коэффициент теплопроводности $k_1 = 0,683$. Пусть разность между давлением в покоей среде и распределенной по пластине внешней нагрузкой $P_0 - \bar{P} = 10^4$. Предположим, что пластина толщиной $h = 2.5 \cdot 10^{-4}$ изготовлена из алюминия, тогда плотность $\rho_0 = 2700$, модуль упругости $E = 7 \cdot 10^{10}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T = 12.3 \cdot 10^{-6}$, коэффициент теплоемкости $c_2 = 897$, коэффициент теплопроводности $k_2 = 209.3$, изгибная жесткость $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 0.103$, погонная масса $m = \rho_0 h = 0.675$. Считаем, что отсутствуют постоянная составляющая усилия $N_0 = 0$ и обжимной слой (основание) $\gamma = 0$. Все значения даны в системе СИ.

Возьмем начальные условия $T_1^0 = 293.15$, $T_2^0 = 293.15$, $w_k(0) = 0$, $\dot{w}_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots$

В системе компьютерной алгебры Mathematica 12.0, взяв отрезки рядов в формулах (21), (24) длиной M , для различных видов закрепления концов чувствительного элемента датчика построены графики функции деформации $w(y, t) = w_0(y) + \varepsilon \sum_{n=1}^M w_{1n}(t)\xi_n(y)$.

На рис. 2 приведены примеры расчетов для случая шарнирного и жесткого закрепления концов элемента.

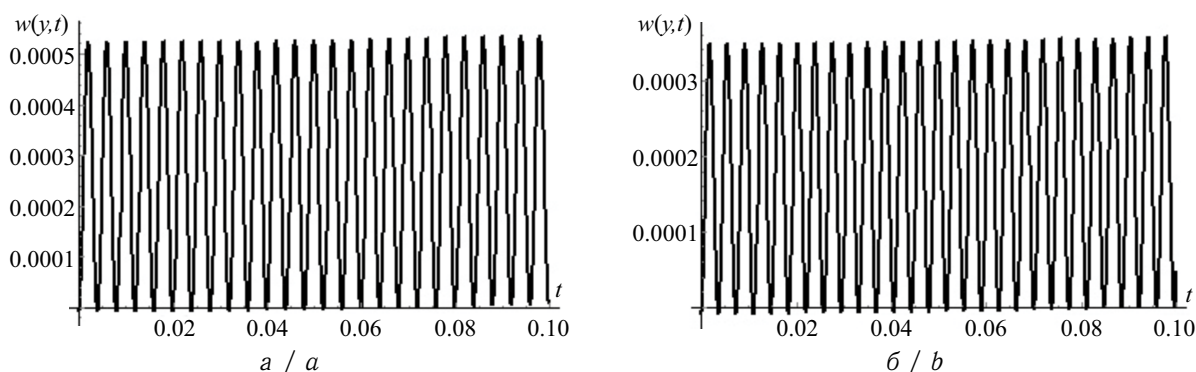


Рис. 2. Графики функции $w(y, t)$ в точке $y = 0.005$ в случае шарнирного (а) и жесткого (б) закрепления концов элемента при $\varepsilon = h/H$, $M = 2$ на временном отрезке $t \in [0; 0.1]$

Fig. 2. Graphs of the function $w(y, t)$ at $y = 0.005$ in the case of hinged (a) and rigid (b) fastening of the ends of the element at $\varepsilon = h/H$, $M = 2$ on the time interval $t \in [0; 0.1]$

На основании полученных графиков, аналогичных рис. 2, проводится анализ частоты и амплитуды колебаний упругого элемента датчика давления.

6. Другие модели деформируемого твердого тела

Для описания динамики чувствительного элемента датчика давления можно предложить несколько нелинейных математических моделей твердого деформируемого тела. Поэтому уравнение (3), описывающее динамику элемента, в зависимости от выбранной модели примет один из следующих видов:

$$mw_{tt} + Dw_{yyyy} + N(t)w_{yy} + \beta w_{yyyyt} + f(w_t, w) = P - \bar{P},$$

$$mw_{tt} + Dw_{yyyy} + N(t)w_{yy} + \beta w_{yyyyt} + f(w_t, w) - w_{yy} \left(\mu \int_0^H w_y^2 dy + \eta \frac{d}{dt} \int_0^H w_y^2 dy \right) = P - \bar{P},$$



$$mw_{tt} + \left[Dw_{yy} \left(1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yy} + N(t)w_{yy} + \beta w_{yyyyt} + f(w_t, w) = P - \bar{P},$$

$$mw_{tt} + \left[Dw_{yy} \left(1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yy} + N(t)w_{yy} + \beta \left[w_{yy} \left(1 - \frac{3}{2} w_y^2 \right) \right]_{yyt} + f(w_t, w) = P - \bar{P},$$

где $f(w_t, w)$ — нелинейная функция, зависящая от деформации и ее скорости; β , η — коэффициенты демпфирования; μ — коэффициент, зависящий от геометрических и прочностных характеристик упругого элемента и типа закрепления его концов.

Заключение

На основе разработанной математической модели, учитывающей тепловой поток от авиационного двигателя, в работе произведено исследование совместной динамики газожидкостной среды в трубопроводе и упругого элемента датчика давления. Математическая модель позволяет отслеживать в режиме реального времени взаимосвязь давления в камере сгорания и деформации чувствительного элемента датчика. Применялись методы малого параметра и Бубнова – Галёркина. Численный эксперимент произведен в системе Mathematica 12.0. Рассмотрены случаи шарнирного и жесткого закрепления концов элемента. Также предложены новые математические модели деформируемого твердого тела, описывающие динамику упругого элемента датчика давления. Результаты исследования можно использовать на стадии проектирования датчиков давления для авиационных и ракетных двигателей.

Список литературы

1. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E. Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // Discrete and Continuous Dynamical Systems – S. 2014. Vol. 7, № 6. P. 1133–1148. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133>
2. Faal R. T., Derakhshan D. Flow-induced vibration of pipeline on elastic support // Procedia Engineering. 2011. Vol. 14. P. 2986–2993. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.376>
3. Kheiri M., Paidoussis M. P. Dynamics and stability of a flexible pinned-free cylinder in axial flow // Journal of Fluids and Structures. 2015. Vol. 55. P. 204–217. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.02.013>
4. Giacobbi D. B., Semler C., Paidoussis M. P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density // Journal of Sound and Vibration. 2020. Vol. 473. Art. 115202. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202>
5. Abdelbaki A. R., Paidoussis M. P., Misra A. K. A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2020. Vol. 118. Art. 103290. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290>
6. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor” // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2172. P. 030006-1–030006-12. <https://doi.org/10.1063/1.5133495>, EDN: PJPWYD
7. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1353. Art. 012085. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>, EDN: QDIGJK
8. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Математическое моделирование систем измерения давления // Вестник Ульяновского государственного технического университета. 2020. № 2–3 (90–91). С. 10–19. EDN: CCGTAB
9. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления». Ульяновск : УлГТУ, 2008. 188 с. EDN: QNVYPF
10. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. Ульяновск : УлГТУ, 2018. 152 с. EDN: VNPZJX
11. Михайлов П. Г., Мокров Е. А., Митрохин С. В., Сергеев Д. А. Особенности метрологического обеспечения современных датчиков пульсаций давлений // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2012. № 5 (130). С. 174–179. EDN: OYDWKL
12. Михайлов П. Г., Мокров Е. А., Сергеев Д. А., Скотников В. В., Петрин В. А., Чернецов М. А. Чувствительные элементы высокотемпературных датчиков давления. Материалы и технологии



- изготовления // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2014. № 4 (153). С. 204–213. EDN: [SDJKNB](#)
13. *Пирогов С. П.* Манометрические трубчатые пружины. Санкт-Петербург : Недра, 2009. 276 с.
14. *Pirogov S. P., Cherentsov D. A., Chuba A. Yu., Ustinov N. N.* Simulation of forced oscillations of pressure monitoring devices // *International Journal of Engineering Trends and Technology*. 2022. Vol. 70, № 2. P. 32–36. <https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V70I2P205>, EDN: [BYSORN](#)
15. *Эткин Л. Г.* Виброчастотные датчики. Теория и практика. Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 408 с.
16. *Белозубов Е. М., Васильев В. А., Запевалин А. И., Чернов П. С.* Проектирование упругих элементов нано- и микроэлектромеханических систем // *Измерительная техника*. 2011. № 1. С. 17–19. EDN: [NDWZHT](#)
17. *Дмитриенко А. Г., Исаков С. А., Белозубов Е. М.* Датчики давления на основе нано- и микроэлектромеханических систем для ракетной и авиационной техники // *Датчики и системы*. 2012. № 9. С. 19–25. EDN: [PCIXWT](#)
18. *Белозубов Е. М., Мокров Е. А., Тихомиров Д. В.* Минимизация погрешности тонкопленочных тензорезисторных датчиков давления при воздействии нестационарной температуры // *Датчики и системы*. 2004. № 1. С. 26–29. EDN: [KWKNDB](#)
19. *Стучебников В., Васьков Ю., Савченко Е.* Специальные датчики давления промышленной группы «МИДА» // *Компоненты и технологии*. 2021. № 5 (238). С. 12–15. EDN: [BTNIBZ](#)
20. *Казарян А. А., Грошев Г. П.* Универсальный датчик давления // *Измерительная техника*. 2008. № 3. С. 26–30. EDN: [MVJYGR](#)
21. *Савченко Е. Г., Стучебников В. М., Устинов А. А.* Особенности проектирования высокотемпературных тензопреобразователей давления на основе структур КНС // *Приборы*. 2016. № 3 (189). С. 1–7. EDN: [VSELAP](#)

References

1. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E. Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – S*, 2014, vol. 7, iss. 6, pp. 1133–1148. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133>
2. Faal R. T., Derakhshan D. Flow-induced vibration of pipeline on elastic support. *Procedia Engineering*, 2011, vol. 14, pp. 2986–2993. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.07.376>
3. Kheiri M., Paidoussis M. P. Dynamics and stability of a flexible pinned-free cylinder in axial flow. *Journal of Fluids and Structures*, 2015, vol. 55, pp. 204–217. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.02.013>
4. Giacobbi D. B., Semler C., Paidoussis M. P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, vol. 473, art. 115202. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202>
5. Abdelbaki A. R., Paidoussis M. P., Misra A. K. A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2020, vol. 118, art. 103290. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290>
6. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”. *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2172, pp. 030006-1–030006-12. <https://doi.org/10.1063/1.5133495>, EDN: [PJPWYD](#)
7. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1353, art. 012085. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>, EDN: [QDIGJK](#)
8. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modeling of pressure measurement systems. *Vestnik Ul'yanovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Ulyanovsk State Technical University], 2020, iss. 2–3 (90–91), pp. 10–19 (in Russian). EDN: [CCGTAB](#)
9. Ankilov A. V., Velmisov P. A., Gorboconenko V. D., Pokladova Yu. V. *Matematicheskoe modelirovaniye mekhanicheskoy sistemy “truboprovod – datchik davleniya”* [Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”]. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Technical University Publ., 2008. 188 p. (in Russian). EDN: [QNVYFP](#)
10. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. *Issledovanie dinamiki deformiruemyykh elementov nekotorykh aerogidrouprugikh sistem* [Study of the dynamics of deformable elements of some aerohydroelastic systems]. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Technical University Publ., 2018. 152 p. (in Russian). EDN: [VNPZJX](#)
11. Mihaiov P. G., Mokrov E. A., Mitrohin S. V., Sergeev D. A. Features of metrological maintenance



- of modern sensors of pulsations of pressure. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2012, vol. 5 (130), pp. 174–179 (in Russian). EDN: [OYDWKL](#)
12. Mikhailov P. G., Mokrov E. A., Sergeev D. A., Skotnikov V. V., Petrin V. A., Chernetsov M. A. Sensitive elements of high-temperature pressure sensors. Materials and technologies izgotovleniya. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2014, vol. 4 (153), pp. 204–213 (in Russian). EDN: [SDJKNB](#)
13. Pirogov S. P. *Manometricheskie trubchatye pruzhiny* [Manometric tubular springs]. St. Petersburg, Nedra, 2009. 276 p. (in Russian).
14. Pirogov S. P., Cherentsov D. A., Chuba A. Yu., Ustinov N. N. Simulation of forced oscillations of pressure monitoring devices. *International Journal of Engineering Trends and Technology*, 2022, vol. 70, iss. 2, pp. 32–36. <https://doi.org/10.14445/22315381/IJETT-V70I2P205>, EDN: [BYSORN](#)
15. Etkin L. G. *Vibrochastotnye datchiki. Teoriya i praktika* [Vibration frequency sensors. Theory and practice], Moscow, Bauman MSTU Publ., 2004. 408 p. (in Russian).
16. Belozubov E. M., Vasiliev V. A., Zapevalin A. I., Chernov P. S. Design of elastic components of nano- and microelectromechanical systems. *Measurement Techniques*, 2011, vol. 54, iss. 1, pp. 21–24. EDN: [NDWZHT](#)
17. Dmitrienko A. G., Isakov S. A., Belozubov E. M. Pressure sensors based on nano- and microelectromechanical systems for rocket and aviation technology. *Datchiki i sistemy* [Sensors and Systems], 2012, iss. 9, pp. 19–25 (in Russian). EDN: [PCIXWT](#)
18. Belozubov E. M., Mokrov E. A., Tikhomirov D. V. Minimizing the error of thin-film strain-resistive pressure sensors under the influence of non-stationary temperature. *Datchiki i sistemy* [Sensors and Systems], 2004, iss. 1, pp. 26–29 (in Russian). EDN: [KWKNDDB](#)
19. Stuchebnikov V., Vaskov Yu., Savchenko E. Special pressure sensors of the MIDA industrial group. *Komponenty i tekhnologii* [Components and Technologies], 2021, iss. 5 (238), pp. 12–15 (in Russian). EDN: [BTNIBZ](#)
20. Kazaryan A. A., Groshev G. P. Universal pressure transducer. *Measurement Techniques*, 2008, vol. 51, iss. 3, pp. 269–275. EDN: [MVJYGR](#)
21. Savchenko E. G., Stuchebnikov V. M., Ustinov A. A. Features of the design of high-temperature strain gauge pressure transducers based on SNS structures. *Pribory* [Instruments], 2016, iss. 3 (189), pp. 1–7 (in Russian). EDN: [VSELAP](#)

Поступила в редакцию / Received 04.12.2023

Принята к публикации / Accepted 13.03.2024

Опубликована / Published 29.11.2024



Article

Shear waves in a nonlinear elastic cylindrical shell

A. I. Zemlyanukhin[✉], A. V. Bochkarev, N. A. Artamonov

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia

Aleksandr I. Zemlyanukhin, azemlyanukhin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4379-8310>, AuthorID: 13616

Andrey V. Bochkarev, ab2009sar@list.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9088-9234>, AuthorID: 10662

Nikolay A. Artamonov, twostvoll@gmail.com

Abstract. Asymptotic integration methods have been used to model the propagation of a shear wave beam along a nonlinear-elastic cylindrical shell of the Sanders – Koiter model. The shell is assumed to be made of a material characterized by a cubic dependence between stress and strain intensities, and the dimensionless parameters of thinness and physical nonlinearity are considered to have the same order of smallness. The multiscale expansion method is used, which makes it possible to determine the wave propagation speed from the equations of the linear approximation, and in the first essentially nonlinear approximation, to obtain a nonlinear quasi-hyperbolic equation for the main term of the expansion of the shear displacement component. The derived equation is a cubically nonlinear modification of the Lin – Reisner – Tsien equation modeling unsteady near-sonic gas flow and can be transformed into the modified Khokhlov – Zabolotskaya equation used to describe narrow beams in acoustics. The solution of the derived equation is found in the form of a single harmonic with slowly changing complex amplitude, since in deformable media with cubic nonlinearity the effect of self-induced wave essentially prevails over the effect of generation of higher harmonics. As a result, a perturbed nonlinear Schrödinger equation of defocusing type is obtained for the complex amplitude, for which there is no possibility of modulation instability development. In terms of the elliptic Jacobi function, an exact physically consistent solution, periodic along the dimensionless circumferential coordinate, is constructed.

Keywords: nonlinear elastic cylindrical shell, shear waves, asymptotic integration, nonlinear Schrödinger equation

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-29-00071).

For citation: Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Artamonov N. A. Shear waves in a nonlinear elastic cylindrical shell. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 578–586. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-578-586>, EDN: WBBTTQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 539.3

Сдвиговые волны в нелинейно-упругой цилиндрической оболочке

А. И. Землянухин[✉], А. В. Бочкарев, Н. А. Артамонов

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

Землянухин Александр Исаевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и системного анализа, azemlyanukhin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4379-8310>, AuthorID: 13616



Бочкарев Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, ab2009sar@list.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9088-9234>, AuthorID: 10662

Артамонов Николай Александрович, аспирант кафедры информационной безопасности автоматизированных систем, twostvoll@gmail.com

Аннотация. Методами асимптотического интегрирования проведено моделирование распространения пучка сдвиговых волн вдоль образующей нелинейно-упругой цилиндрической оболочки модели Сандерса – Койтера. Считается, что оболочка изготовлена из материала, характеризующегося кубической зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций, а безразмерные параметры тонкостенности и физической нелинейности являются величинами одного порядка малости. Используется разновидность метода многомасштабных разложений, позволяющая из уравнений линейного приближения определить скорость распространения волны, а в первом существенно нелинейном приближении — получить разрешающее нелинейное квазигиперболическое уравнение для главного члена разложения сдвиговой компоненты смещения. Выведенное уравнение представляет собой кубически нелинейную модификацию уравнения Линя – Рейснера – Цзяна, моделирующего нестационарное околзвукое течение газа, и может быть преобразовано в модифицированное уравнение Заболотской – Хохлова, используемое для описания узких пучков в акустике. Решение выведенного уравнения отыскивается в виде одной гармоники с медленно меняющейся комплексной амплитудой, поскольку в деформируемых средах с кубической нелинейностью эффект самовоздействия волны существенно преобладает над эффектом генерации высших гармоник. В результате для комплексной амплитуды получено возмущенное нелинейное уравнение Шредингера дефокусирующего типа, для которого отсутствует возможность развития модуляционной неустойчивости. В терминах эллиптической функции Якоби построено точное физически состоятельное решение, периодическое по безразмерной окружной координате.

Ключевые слова: нелинейно-упругая цилиндрическая оболочка, сдвиговые волны, асимптотическое интегрирование, нелинейное уравнение Шредингера

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-29-00071).

Для цитирования: Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Artamonov N. A. Shear waves in a nonlinear elastic cylindrical shell [Землянухин А. И., Бочкарев А. В., Артамонов Н. А. Сдвиговые волны в нелинейно-упругой цилиндрической оболочке] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 578–586. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-578-586>, EDN: WBBTTQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

Currently, there is an increasing interest in the study of nonlinear shear waves in systems of various physical natures in relation to problems of acoustic diagnostics and non-destructive testing. Biomedical applications of shear waves are discussed in [1, 2]. The possibility of diagnosing pathologies and the functional state of the muscular system is shown, due to the fact that the speed of these waves in the muscles is much lower than the speed of longitudinal waves and the formation of higher symmetry. Corresponding acoustic methods have great promise in the diagnosis of neuralgic pathologies, as well as in gerontology, sports, and space medicine. In [3], a method for measuring shear elasticity using focused ultrasound radiation pressure known as SWEI (Shear Wave Elasticity Imaging) was proposed. The development of this technique called supersonic shear imaging (SSI) is discussed in [4, 5]. The results of observing a shear wave excited by focused ultrasound in a rubber-like medium are given in [6]. A theoretical model has been constructed that allows one to calculate the characteristics of the generated shear wave depending on the parameters of the medium and the initial longitudinal wave. In [7], plane nonlinear shear waves in a medium with memory are considered. Model equations with cubic nonlinearity are derived and analyzed based on the Duffing equation. The dissertation [8] is devoted to the study of

the propagation of linear and nonlinear shear waves in viscoelastic media. Classes of exact wave solutions for shear waves in special viscous media were constructed in [9]. In [10], the effects of cubic nonlinearity in shear wave beams of different polarizations are analyzed analytically and numerically. Solitary and compact shear waves are studied in [11]. The possibility of generating the second harmonic for shear waves in an elastoplastic medium was demonstrated in [12]. Nonlinear shear waves in a solid with a microstructure are studied in [13]. In [14], shear waves in a nonlinear elastic body are analytically modeled. The propagation of a beam of shear waves in a hereditary medium in the quasi-optical approximation is considered in [15]. In [16], the propagation of shear solitons in an elastic plate is modeled. In [17–20], quasi-hyperbolic and evolutionary equations that can be reduced to integrable ones are derived. Thus, the possibility of generation and conditions for the existence of shear solitons are demonstrated. Nonlinear longitudinal and shear stationary deformation waves in a gradient-elastic medium are considered in [17]. It is shown that stationary shear waves are described by the Duffing equation. The propagation of nonlinear shear waves in a granular medium is considered in [19]. It is shown that low-frequency soliton-like disturbances are described by the Boussinesq equation. In [20], the modeling of solitary shear waves in a granular medium led to the perturbed sine-Gordon equation for the first time. It is shown that the speed of a solitary wave is always less than the speed of a transverse seismic wave. In [21], the influence of material heterogeneity on the evolution of a Riemann shear wave is studied. The dependence of the characteristic breaking distance of the Riemann wave on the values of the corresponding elastic moduli has been revealed.

Problems of nonlinear wave dynamics of cylindrical shells, in contrast to similar problems for rods and plates [22], have been studied to a lesser extent to date. The reason is that in rods and plates, tangential and normal displacements are separated in a linear approximation and are coupled only due to nonlinearity, which simplifies the use of asymptotic integration procedures [23] of systems of initial equations. In shells, due to curvature, longitudinal, circumferential and normal displacements are already connected in a linear approximation, and the division of wave movements into longitudinal, shear (torsional), and bending becomes, to a certain extent, conditional.

Depending on which component of the displacements predominates, we have to talk about longitudinal-flexural, flexural-longitudinal, flexural-shear, etc. waves. Nonlinear axisymmetric waves of the longitudinal-flexural type are considered in [24–27]. Flexural-longitudinal waves are studied in [28]. In these works, classes of exact soliton-like and periodic solutions were constructed and questions of their physical realizability were discussed. This article is devoted to modeling the propagation of a predominantly shear wave along the generatrix of a cylindrical shell.

1. Derivation of the resolving equation

We will carry out further analysis based on the Sanders–Koiter model of a cylindrical shell [29, 30]. Geometrically linear equations of motion of a shell element in forces and moments have the form:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2R} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{3}{2R} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{1}{R} N_y - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

where x, y are longitudinal and circumferential coordinates, u, v, w are movement of the middle surface of the shell element in the longitudinal, circumferential and radial directions, respectively, N_x, M_x are normal force and bending moment in a section perpendicular to the axis Ox , N_y, M_y are normal force and bending moment in a section perpendicular to the axis Oy , N_{xy}, M_{xy} are



shear force and torque in a plane section Oxy , h, R, γ are thickness, radius of curvature and surface density of the shell, g is acceleration of gravity and t is time.

We will assume that the shell is made of a nonlinear elastic material characterized by a cubic relationship between the intensities of stress and strain [31]

$$\sigma_i = E_0 \varepsilon_i - m \varepsilon_i^3,$$

where E_0 is the initial elastic modulus and m is the material constant determined experimentally [32].

The relationship between forces and moments with deformations and changes in curvature of the middle surface is assumed to be as follows:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{(E_0 - m e_i^2) h}{1 - \mu^2} (e_x + \mu e_y), \\ N_y &= \frac{(E_0 - m e_i^2) h}{1 - \mu^2} (e_y + \mu e_x), \\ N_{xy} &= \frac{(E_0 - m e_i^2) h}{2(1 + \mu)} e_{xy}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{(E_0 - m e_i^2) h^3}{12(1 - \mu^2)} (\kappa_x + \mu \kappa_y) - \frac{2mFh^3}{27(1 - \mu^2)(1 - \mu)^2} (e_x + \mu e_y), \\ M_y &= \frac{(E_0 - m e_i^2) h^3}{12(1 - \mu^2)} (\kappa_y + \mu \kappa_x) - \frac{2mFh^3}{27(1 - \mu^2)(1 - \mu)^2} (e_y + \mu e_x), \\ M_{xy} &= \frac{(E_0 - m e_i^2) h^3}{12(1 - \mu^2)} \cdot \frac{1 - \mu}{2} \cdot \kappa_{xy} - \frac{2mFh^3}{27(1 - \mu^2)(1 - \mu)^2} \cdot \frac{1 - \mu}{2} \cdot e_{xy}, \end{aligned} \quad (3)$$

where

$$e_i^2 = \frac{4}{9} \left(e_x^2 - e_x e_y + e_y^2 + \frac{\mu}{(1 - \mu)^2} (e_x + e_y)^2 + \frac{1}{3} e_{xy}^2 \right)$$

represents the square of the intensity of deformations of the middle surface, μ is Poisson's ratio and

$$F = (1 - \mu + \mu^2) (\kappa_x e_x + \kappa_y e_y) - \frac{1}{2} (1 - 4\mu + \mu^2) (\kappa_y e_x + \kappa_x e_y) + \frac{3}{4} \kappa_{xy} e_{xy} (1 - \mu)^2.$$

The components of changes in curvature and deformation in the linearized Sanders – Koiter model are related to the components of displacements by the following relations:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} w, \quad \kappa_y = -\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} \right], \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \kappa_{xy} = -2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4R} \left(3 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Substituting (4) into (2) and (3), and then the resulting relations into (1), we obtain a system of equations of motion of the shell element in displacements

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 - \mu}{2} \left(1 + \frac{h^2}{48R^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1 + \mu}{2} \left(1 - \frac{(1 - \mu) h^2}{16(1 + \mu) R^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \\ - \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{(1 - \mu) h^2}{24R} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\gamma (1 - \mu^2)}{g E_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f_1 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$



$$\left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{3h^2}{16R^2}\right) \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{(1-\mu)h^2}{16(1+\mu)R^2}\right) \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{h^2}{12R} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{(3-\mu)h^2}{24R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\gamma(1-\mu^2)}{gE_0} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f_2 = 0, \quad (6)$$

$$-\frac{h^2}{12} \nabla^4 w + \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R^2} w + \frac{(1-\mu)h^2}{24R} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{h^2}{12R} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - \frac{(3-\mu)h^2}{24R} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\gamma(1-\mu^2)}{gE_0} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f_3 = 0, \quad (7)$$

in which all nonlinear terms are reduced to f_1 , f_2 and f_3 . The resulting system differs from a similar system of equations of motion in the classical theory of Kirchhoff–Love shells [32] by the presence of underlined terms of higher orders of smallness. Taking them into account during further asymptotic integration, as will be shown below, leads to a new form of the resolving equation.

Let us introduce dimensionless independent and dependent variables into consideration using the formulas:

$$X = \frac{x}{l}, \quad Y = \frac{y}{R}, \quad T = \sqrt{\frac{E_0 g}{\gamma(1-\mu^2)}} \cdot \frac{t}{l}, \quad (8)$$

$$U = \frac{u}{R}, \quad V = \frac{v}{R}, \quad W = \frac{w}{h}.$$

Substituting (8) into the equations of motion (5)–(7) reveals in the latter small parameters of nonlinearity and thin-walledness $\frac{R}{l}$ and $\frac{h}{R}$, which we will consider to be quantities of the same order of smallness with the ratio of the physical nonlinearity parameters:

$$\frac{R}{l} = \frac{h}{R} = \frac{E_0}{m} = \varepsilon. \quad (9)$$

This assumption is typical for problems of asymptotic analysis of long-wave perturbations [24–26]. According to (9), the dispersion parameter $\frac{h}{l}$ is a value of the order of ε^2 .

Assuming that a beam of shear waves propagates along the generatrix of the shell, we introduce into consideration new independent variables and expansions of dependent variables in powers of the small parameter ε :

$$\chi = \varepsilon^2 X, \quad \eta = \varepsilon^2 Y, \quad \tau = T - \frac{X}{C}, \quad (10)$$

$$U = \varepsilon^{3/2} U_0 + \varepsilon^{5/2} U_1, \quad V = \varepsilon^{1/2} V_0 + \varepsilon^{5/2} V_1, \quad W = \varepsilon^{3/2} W_0 + \varepsilon^{5/2} W_1,$$

where C is the yet unknown wave propagation speed. Taking into account (8)–(10), in leading order in powers of the small parameter, the system of equations (5)–(7) takes the form

$$\frac{\mu}{C} \frac{\partial W_0}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{C^2} - 1\right) \frac{\partial^2 U_0}{\partial \tau^2} - \frac{(1+\mu)}{2C} \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau \partial \eta} = 0, \quad (11)$$

$$(2C^2 + \mu - 1) \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\mu}{C} \frac{\partial U_0}{\partial \tau} + W_0 - \frac{\partial V_0}{\partial \eta} = 0. \quad (13)$$

From (12) the dimensionless wave propagation speed

$$C = \pm \sqrt{\frac{1-\mu}{2}}.$$



is determined. The equation (6) in the first essentially nonlinear approximation has the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau \partial \chi} - \frac{3\sqrt{2-2\mu}}{32(1-\mu)} \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\sqrt{2-2\mu}} \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} + \frac{1+\mu}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 U_0}{\partial \tau \partial \eta} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2-2\mu}} \frac{\partial W_0}{\partial \eta} + \frac{\sqrt{2-2\mu}}{(1-\mu)^2} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \tau} \right)^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Using (11), (13) to express the terms with the functions U_0 and W_0 in terms of V_0 , we give the equation (14) its final form

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau \partial \chi} - c_1 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} + c_2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \eta^2} + c_3 \left(\frac{\partial V_0}{\partial \tau} \right)^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} = 0, \quad (15)$$

where

$$c_1 = \frac{3}{16\sqrt{2-2\mu}}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{1-\mu}}{2\sqrt{2}(1+2\mu)}, \quad c_3 = \frac{\sqrt{2}}{(1-\mu)\sqrt{1-\mu}}.$$

2. Discussion of the properties of equation (15) and construction of its periodic solutions

An equation similar to (15) was derived in [15] for a quasi-plane shear wave in a medium with memory. The cubically nonlinear equation (15) contains an additional term with coefficient c_1 arising due to the underlined terms in the system (5)–(7). Such an equation with quadratic nonlinearity formally coincides with the Lin – Reisner – Tsien (LRT) equation modelling unsteady near-sonic gas flow [33]. Therefore, by analogy with the classical and modified Korteweg – de Vries equations, (15) can be called the modified LRT equation. At the same time, for the function $f = \frac{\partial V_0}{\partial \tau}$, this equation takes the form of the modified Khokhlov – Zabolotskaya (KZ) equation [33]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial f}{\partial \chi} - c_1 \frac{\partial f}{\partial \tau} + c_3 f^2 \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) = -c_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2},$$

the second summand in the left-hand side of which is eliminated by passing to the corresponding traveling wave variable. It is known that in nonlinear acoustics the abbreviation KZ is more often used, while in aerodynamics the abbreviation LRT is more common [33].

With variable transformation

$$V_0 = \sqrt{\frac{c_1}{c_3}} \Phi, \quad t = c_1 \chi, \quad \xi = c_1 \chi + \tau, \quad \zeta = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \eta$$

the equation (15) takes the compact form

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \xi} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (16)$$

typical for problems of gas dynamics and acoustics. It is obvious that equation (16) has a large set of symmetries, and its invariant group analysis is a separate task for further research.

When analyzing nonlinear wave processes in cubically nonlinear deformable media, the experimentally established fact of a significant predominance of the phenomenon of wave self-action over the effect of generation of higher harmonics is usually used [34, 35]. This makes it possible to find a solution to equations of the type (15) in the form of a single harmonic with a slowly varying complex amplitude

$$V_0 = A(\chi, \eta) \exp(-i\omega\tau) + c.c. \quad (17)$$



Substituting (17) into (15), we obtain the perturbed nonlinear Schrödinger equation (NSE) for the amplitude A

$$i\omega \frac{\partial A}{\partial \chi} - c_1 \omega^2 A - c_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + c_3 \omega^4 A^2 |A| = 0. \quad (18)$$

To find an exact periodic solution to the NSE (18) we make the substitution $A(\chi, \eta) = a(\eta) \exp(i\omega\chi)$, after which for the amplitude $a(\eta)$ we obtain the Duffing equation

$$\frac{d^2 a}{d\eta^2} + d_1 a + d_2 a^3 = 0,$$

where

$$d_1 = \frac{c_1 + 1}{c_2} \omega^2, \quad d_2 = -\frac{c_3}{c_2} \omega^4.$$

A physically consistent solution, depending on the dimensionless circumferential coordinate η , must be periodic in η . This condition is met by the general solution of the Duffing equation in terms of the Jacobi elliptic function

$$a = C_1 \operatorname{sn}[g_1(g_2\eta + C_2), g_3],$$

in which C_1, C_2 are constants of integration and

$$g_1 = \sqrt{\frac{2d_1}{2d_1 + d_2 - C_1^2 d_2}}, \quad g_2 = \frac{1}{2} \sqrt{4d_1 + 2d_2}, \quad g_3 = C_1 \frac{\sqrt{-(2d_1 + d_2)d_2}}{2d_1 + d_2},$$

under condition $g_3 \neq \pm 1$.

Note that in equation (18) the coefficients in front of the dispersion and nonlinear terms have opposite signs, that is, a defocusing version of the NSE is obtained. It is known [36] that in this case, the development of modulation instability is impossible, that is, a spatially homogeneous solution is stable, as well as solutions in the form of periodic stationary waves.

Conclusion

It has been established that when modelling the propagation of a shear wave beam along a nonlinear-elastic cylindrical shell, a quasi-hyperbolic equation with cubic nonlinearity, generalizing the LRT and KZ equations, is formed. Thus, the connection between the problems of nonlinear wave dynamics of deformable systems, near-sonic gas dynamics, and nonlinear acoustics is demonstrated. It is shown that cubic nonlinearity allows to transform the derived equation into the NSE of defocusing type, in which it is impossible to develop the modulation instability of periodic wave solutions.

References

1. Rudenko O., Sarvazyan A. Wave biomechanics of skeletal muscle. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2006, vol. 120, art. 3270. <https://doi.org/10.1121/1.4777047>
2. Rudenko O. V. Nonlinear waves: Some biomedical applications. *Physics-Uspekhi*, 2007, vol. 50, iss. 4, art. 359. <https://doi.org/10.1070/PU2007v050n04ABEH006236>
3. Sarvazyan A. P., Rudenko O. V., Swanson S. D., Fowlkes J. B., Emelianov S. Y. Shear wave elasticity imaging: A new ultrasonic technology of medical diagnostics. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 1998, vol. 24, iss. 9, pp. 1419–1435. [https://doi.org/10.1016/S0301-5629\(98\)00110-0](https://doi.org/10.1016/S0301-5629(98)00110-0)
4. Rénier M., Gennisson J.-L., Tanter M., Catheline S., Barrière C., Royer D., Fink M. 7B-2 nonlinear shear elastic moduli in quasi-incompressible soft solids. *2007 IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings*. New York, NY, 2007, pp. 554–557. <https://doi.org/10.1109/ultsym.2007.144>
5. Gennisson J.-L. New parameters in shear wave elastography in vivo. In: *Mécanique pour le vivant. Identification et modélisation du comportement des tissus biologiques humains et animaux. Avancées et perspectives*. Colloque National, du 18 au 22 janvier 2016. Available at: <https://mecamat.ensma.fr/Aussois/2016/DOCUMENT/TexteGennisson.pdf> (accessed May 10, 2024).



6. Andreev V. G., Dmitriev V. N., Pishchal'nikov Yu. A., Rudenko O. V., Sapozhnikov O. A., Sarvazyan A. P. Observation of shear waves excited by focused ultrasound in a rubber-like medium. *Acoustical Physics*, 1997, vol. 43, iss. 2, pp. 123–128. EDN: LEFXVP
7. Cormack J. M., Hamilton M. F. Plane nonlinear shear waves in relaxing media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2018, vol. 143, iss. 2, pp. 1035–1048. <https://doi.org/10.1121/1.5023394>
8. Lindley B. S. *Linear and nonlinear shear wave propagation in viscoelastic media*. University of North Carolina, Chapel Hill, 2008. 78 p. Available at: <https://cdr.lib.unc.edu/downloads/z029p543p> (accessed May 10, 2024).
9. Rajagopal K. R., Saccomandi G. Shear waves in a class of nonlinear viscoelastic solids. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2003, vol. 56, iss. 2, pp. 311–326. <https://doi.org/10.1093/qjmam/56.2.311>
10. Wochner M. S., Hamilton M. F., Ilinskii Y. A., Zabolotskaya E. A. Cubic nonlinearity in shear wave beams with different polarizations. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2008, vol. 123, iss. 5, pp. 2488–2495. <https://doi.org/10.1121/1.2890739>
11. Destrade M., Saccomandi G. Solitary and compact-like shear waves in the bulk of solids. *Physical Review E*, 2006, vol. 73, iss. 6, art. 065604. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.065604>
12. Doronin A. M., Erofeev V. I. A generation of second harmonic of shear wave in elastoplastic media. *Letters on Materials*, 2016, vol. 6, iss. 2, pp. 102–104 (in Russian). <https://doi.org/10.22226/2410-3535-2016-2-102-104>
13. Erofeev V. I. Propagation of nonlinear shear waves in a solid with microstructure. *International Applied Mechanics*, 1993, vol. 29, pp. 262–266. <https://doi.org/10.1007/BF00847023>
14. Raskin I. G., Erofeev V. I. Propagation of sound shear waves in the nonlinear elastic solids. *Soviet Applied Mechanics*, 1991, vol. 27, iss. 1, pp. 127–129 (in Russian).
15. Potapov A. I., Soldatov I. N. Quasioptical approximation for a bundle of shear waves in a nonlinear hereditary medium. *Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika*, 1986, vol. 27, iss. 1, pp. 144–147 (in Russian).
16. Kivshar Yu. S., Syrkin E. S. Shear solitons in an elastic plate. *Akusticheskiy Zhurnal*, 1991, vol. 37, iss. 1, pp. 104–109 (in Russian).
17. Erofeev V. I., Sheshenina O. A. Nonlinear longitudinal and shear stationary deformation waves in a gradient-elastic medium. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov* [Mathematical Modeling of Systems and Processes], 2007, iss. 15, pp. 15–27 (in Russian).
18. Erofeev V. I., Kolesov D. A., Sandalov V. M. Demodulation of a shear wave in a nonlinear plate resting on an elastic foundation with the parameters changing following the running wave law. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity], 2013, vol. 75, iss. 4, pp. 268–272 (in Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2013-75-4-268-272>
19. Bogdanov A. N., Skvortsov A. T. Nonlinear shear waves in a granular medium. *Akusticheskiy Zhurnal*, 1992, vol. 38, iss. 3, pp. 408–412 (in Russian).
20. Bykov V. G. Solitary shear waves in a granular medium. *Acoustical Physics*, 1999, vol. 45, iss. 2, pp. 138–142.
21. Erofeev V. I., Sharabanova A. V. Riemann shift waves in material with properties depending on the stress state type. *Problemy Mashinostroeniya i Nadezhnosti Mashin*, 2004, vol. 1, pp. 20–23 (in Russian). EDN: OWBWPP
22. Erofeev V. I., Kajaev V. V., Semerikova N. P. *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost'* [Waves in rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity]. Moscow, Fizmatlit, 2002. 208 p. (in Russian).
23. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of thin walled elastic bodies*. San Diego, Academic Press, 1998. 226 p. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-20923-8>, EDN: WNSAFB
24. Zemlyanukhin A. I., Andrianov I. V., Bochkarev A. V., Mogilevich L. I. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 98, pp. 185–194. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05181-5>
25. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Andrianov I. V., Erofeev V. I. The Schamel – Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, vol. 491, art. 115752. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115752>
26. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Artamonov N. A. Physically admissible and inadmissible exact localized solutions in problems of nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2024, vol. 20, iss. 2, pp. 219–229. <https://doi.org/10.20537/nd240602>



27. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Ratushny A. V., Chernenko A. V. Generalized model of nonlinear elastic foundation and longitudinal waves in cylindrical shells. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 196–204. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-196-204>
28. Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V. Axisymmetric nonlinear modulated waves in a cylindrical shell. *Acoustical Physics*, 2018, vol. 64, pp. 408–414. <https://doi.org/10.1134/S1063771018040139>
29. Yamaki N., Simitses G. J. Elastic stability of circular cylindrical shells. *Journal of Applied Mechanics*, 1985, vol. 52, iss. 2, pp. 501–502. <https://doi.org/10.1115/1.3169089>
30. Amabili M. A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, vol. 264, iss. 5, pp. 1091–1125. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01385-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01385-8)
31. Lukash P. A. *Osnovy nelineinoy stroitel'noy mekhaniki* [Fundamentals of nonlinear structural mechanics]. Moscow, Stroyizdat, 1978. 208 p. (in Russian).
32. Volmir A. *The nonlinear dynamics of plates and shells*. Foreign Tech. Div., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1974. 450 p.
33. Rudenko O. V. The 40th anniversary of the Khokhlov – Zabolotskaya equation. *Acoustical Physics*, 2010, vol. 56, pp. 457–466. <https://doi.org/10.1134/S1063771010040093>
34. Zarembo L. K., Krasil'nikov V. A. *Vvedenie v nelineynuyu akustiku: Zvukovye i ul'trazvukovye volny bol'shoi intensivnosti* [Introduction to nonlinear acoustics: High intensity sound and ultrasonic waves]. Moscow, Nauka, 1966. 520 p. (in Russian).
35. Zarembo L. K., Krasil'nikov V. A. Nonlinear phenomena in the propagation of elastic waves in solids. *Soviet Physics Uspekhi*, 1971, vol. 13, iss. 6, pp. 778–797. <https://doi.org/10.1070/PU1971v013n06ABEH004281>
36. Ryskin N. M., Trubetskov D. I. *Nelineynye volny* [Nonlinear waves]. Moscow, Lenand, 2017. 312 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 15.07.2024

Принята к публикации / Accepted 15.08.2024

Опубликована / Published 29.11.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 587–597

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 587–597
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-587-597>, EDN: ZFBSON

Научная статья

УДК 539.3

Нелинейная статика и динамика пористых функционально-градиентных нанобалок с учетом поперечных сдвигов

А. В. Крысько^{1,2}, А. Н. Кречин³, М. В. Жигалов^{1,2}✉, В. А. Крысько^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, д. 15

²Институт проблем точной механики и управления РАН (ИПТМУ РАН), Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

³Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

Крысько Антон Вадимович, доктор физико-математических наук, ¹ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов; ²ведущий научный сотрудник лаборатории комплексных научных исследований, anton.krysko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9389-5602>, AuthorID: 357800

Кречин Александр Николаевич, аспирант кафедры «Математика и моделирование», san9.antonov@yandex.ru, AuthorID: 1038886

Жигалов Максим Викторович, доктор физико-математических наук, ¹ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, ²ведущий научный сотрудник лаборатории комплексных научных исследований, zhigalovm@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0642-7211>, AuthorID: 9130

Крысько Вадим Анатольевич, доктор технических наук, ¹главный научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, ²главный научный сотрудник лаборатории комплексных научных исследований, tak@san.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>, AuthorID: 3929

Аннотация. В работе построены нелинейные математические модели функционально-градиентных пористых нанобалок с учетом поперечных сдвигов. Поперечные сдвиги описываются с помощью кинематических моделей второго (С. П. Тимошенко) и третьего приближений (Шереметьева – Пелеха). Из модели Шереметьева – Пелеха как частный случай вытекают кинематические модели второго (С. П. Тимошенко) и первого приближений (Бернулли – Эйлера). Геометрическая нелинейность принята по Т. фон Карману, наноэффекты — по модифицированной моментной теории упругости Ф. Янга. Искомые уравнения получены из принципа Остроградского – Гамильтона. Разработан эффективный алгоритм, позволяющий рассматривать задачи как статике, так и хаотической динамики. Приводятся численные примеры.

Ключевые слова: функционально-градиентные пористые нанобалки, кинематическая гипотеза Шереметьева – Пелеха, метод установления, статика, хаотическая динамика

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00160).

Для цитирования: Крысько А. В., Кречин А. Н., Жигалов М. В., Крысько В. А. Нелинейная статика и динамика пористых функционально-градиентных нанобалок с учетом поперечных сдвигов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 587–597. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-587-597>, EDN: ZFBSON

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Nonlinear statics and dynamics of porous functional-gradient nanobeam taking into account transverse shifts

A. V. Krysko^{1,2}, A. N. Krechin³, M. V. Zhigalov^{1,2✉}, V. A. Krysko^{1,2}

¹Lavrentiev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 15 Academician Lavrentiev Ave., Novosibirsk 630090, Russia

²Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS), 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

³Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia

Anton V. Krysko, anton.krysko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9389-5602>, AuthorID: 357800

Alexander N. Krechin, san9.antonov@yandex.ru, AuthorID: 1038886

Maxim V. Zhigalov, zhigalovm@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0642-7211>, AuthorID: 9130

Vadim A. Krysko, tak@san.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>, AuthorID: 3929

Abstract. In this paper, nonlinear mathematical models of functionally gradient porous nanobeams are constructed taking into account transverse shifts. Transverse shifts are described using kinematic models of the second (S. P. Timoshenko) and third approximations (Sheremetyev – Pelekh). From the Sheremetyev – Pelekh model, as a special case, the kinematic models of the second (S. P. Timoshenko) and first approximation (Bernoulli – Euler) follow. Geometric nonlinearity is accepted according to T. von Karman, nanoeffects are accepted according to the modified Yang moment theory of elasticity. The required equations are derived from the Ostrogradsky – Hamilton principle. An efficient algorithm has been developed that allows us to consider both static and chaotic dynamics problems. Numerical examples are given.

Keywords: functionally gradient porous nanobeams, the Sheremetyev – Pelekh kinematic hypothesis, the method of establishment, statics, chaotic dynamics

Acknowledgements: The research was carried out at the expense of a grant from the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00160).

For citation: Krysko A. V., Krechin A. N., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Nonlinear statics and dynamics of porous functional-gradient nanobeam taking into account transverse shifts. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 587–597 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-587-597>, EDN: ZFBSON

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Благодаря улучшенным свойствам по сравнению с обычными многослойными конструкциями, такими как устойчивость к коррозии, механическим нагрузкам и высоким температурам, функционально-градиентные материалы (FGM) и пористые функционально-градиентные материалы (PFGM) используются в различных отраслях промышленности: аэрокосмической промышленности, биологии, химии, медицине (диагностика, клеточная нано- и микрохирургия, доставка лекарств пораженное место организма), электронной промышленности, робототехнике [1–4].

Анализ работ, посвященных исследованию балок из PFGM, показывает, что основное внимание уделяется анализу влияния различных характеристик, таких как коэффициенты градиентности и пористости, нанокэффициент, относительная толщина на изгиб, устойчивость и значения собственных частот [5–9]. Исследование вынужденных колебаний PFGM-балок приведено лишь в работе [10]. В статической линейной постановке исследованию влияния пористости функционально-градиентных пластинок посвящена статья [12]. Настоящая работа ставит своей целью проанализировать нелинейную статику и хаотическую динамику пористых функционально-градиентных нанобалок, описываемых кинематическими моделями 1, 2, 3 приближений.



1. Постановка задачи

Рассмотрим в пространстве R^3 : $\Omega = \{x, y, z / (x, y, z) \in [0, a] \times [0, b] \times [-h/2, -h/2]\}$ балку (рис. 1), выполненную из композита — функционально-градиентного пористого материала, состоящего из двух фаз: металлической и керамической.

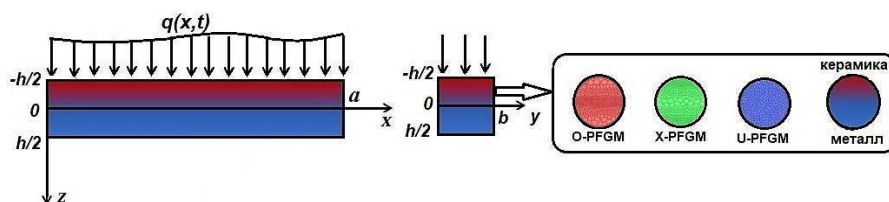


Рис. 1. Расчетная схема и типы PFGM (цвет онлайн)
Fig. 1. Design scheme and types of PFGM (color online)

Сформулируем следующие гипотезы.

Гипотеза 1. Кинематическая гипотеза третьего приближения — Шереметьева — Пелеха [12, 13]:

$$u_1 = u(x, t) + \overline{z\psi(x, t)} - \frac{z^3}{3h^2} \left(\psi(x, t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(x, t), \quad (1)$$

где $u(x, t)$, $w(x, t)$ и $\psi(x, t)$ обозначают осевое смещение срединной линии, прогиб балки и угол вращения поперечного сечения относительно вертикального направления. Здесь и далее член с подчеркиванием сверху относится к учету поворота нормали относительно перпендикуляра при изгибе, член, подчеркнутый снизу, относится к изгибанию нормали.

Замечание 1. Если в (1) пренебречь членами, подчеркнутыми снизу, — модель Тимошенко.

Замечание 2. Если в (1) пренебречь членами, подчеркнутыми снизу, а в члене, подчеркнутым сверху, положить $\psi(x, t) = -\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$, получаем модель Бернулли — Эйлера.

Гипотеза 2. Материал, из которого изготовлена нанопластинка, считается изотропным, но неоднородным по толщине $E(z)$, $\nu(z)$.

Гипотеза 3. Нанозффекты учитываются с помощью модифицированной моментной теории упругости Ф. Янга (F. Yang) [11].

Гипотеза 4. Геометрическая нелинейность учитывается в форме Т. фон Кармана.

Гипотеза 5. Функционально-градиентная пористость учитывается по модели Ф. Фана (F. Fan) [5].

Для построения разрешающих уравнений и граничных условий используем принцип Гамильтона

$$\delta = \int_{t_2}^{t_1} (K - U + W + W_\varepsilon) dt, \quad (2)$$

здесь U , K , W , W_ε — потенциальная энергия, кинетическая энергия, работа внешних сил и энергия диссипации:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_A (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dA dx, \\ K = \frac{1}{2} \int_0^a \int_A \rho \left[\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + z \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} - \frac{z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x \partial t} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx, \\ W = \int_0^a (q(x, t) w(x, t)) dx, \quad W_\varepsilon = \varepsilon \int_0^a \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} w(x, t) \right) dx, \quad (3)$$



где ε — коэффициент диссипации, в формуле (3) первые слагаемые относятся к классической теории упругости, вторые слагаемые — к модифицированной моментной теории упругости Ф. Янга [11].

В выражении (3) (основе теории балки Шереметьева – Пелеха) в предположении малых деформаций и умеренных вращений нелинейные соотношения Кармана для деформации-перемещения балки с учетом (1) имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\overline{\partial \psi(x, t)}}{\partial x} - \frac{z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right), \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\overline{\psi(x, t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}} \right) - \frac{z^2}{h^2} \left(\psi(x, t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right), \\ \theta_2 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) - \overline{\psi(x, t)} + \frac{z^2}{h^2} \left(\psi(x, t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right), \\ \chi_{12} = \chi_{21} &= \frac{1}{4} \left[-\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\overline{\partial \psi(x, t)}}{\partial x} + \left(1 + \frac{z^2}{h^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) \right], \\ \chi_{23} = \chi_{32} &= -\frac{z}{2h^2} \left(\psi(x, t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Главные компоненты симметричной части тензора напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{11}, \quad \sigma_{13} = k_s \mu \varepsilon_{13}, \\ m_{12} &= \mu l^2 \chi_{12}, \quad m_{23} = -\mu l^2 \chi_{23},\end{aligned}$$

где k_s — поправочный коэффициент, который для модели Шереметьева – Пелеха равен 1, а для модели С. П. Тимошенко — 5/6.

Искомые вариационные и дифференциальные уравнения, краевые и начальные условия вытекают из принципа Гамильтона – Остроградского (2). Разрешающие уравнения движения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left\{ k_1 \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right) \right\} &= b_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[k_1 \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right\} &+ \overline{k_3 \frac{\partial^3 \psi(x, t)}{\partial x^3}} - k_4 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \\ + k_5 \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) &+ q(x, t) = b_1 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} - b_6 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + b_5 \frac{\partial^3 \psi(x, t)}{\partial x \partial t^2}, \\ \overline{k_2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}} - \overline{k_3 \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3}} - k_5 \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \psi(x, t) \right) &= b_3 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - b_5 \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x \partial t^2}.\end{aligned}\quad (4)$$

Граничные условия при $x = 0, a$:

$$\begin{aligned}\left\{ k_1 \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right) \right\} &= 0, \quad u(x, t) = 0, \\ -\varepsilon \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + b_6 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + b_5 \frac{\partial^3 \psi(x, t)}{\partial x \partial t^2} &+ \left[k_1 \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \\ + k_3 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - k_4 \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} &+ \overline{k_5 \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \psi(x, t) \right)} = 0, \quad w(x, t) = 0, \\ \overline{k_3 \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}} - k_4 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} &= 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0,\end{aligned}$$



$$\overline{k_2 \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}} - \overline{k_3 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}} = 0, \quad \psi(x, t) = 0. \quad (5)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} w(x, 0) = \phi_1(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \phi_2(x), \quad u(x, 0) = \phi_3(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \phi_y(x), \\ \psi(x, 0) = \phi_3(x), \quad \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial t} = \phi_4(x). \end{aligned} \quad (6)$$

где $\phi_i(x)$, $i = 1, \dots, 6$ — заданные начальные условия.

Коэффициенты k_i (4) для модели Шереметьева – Пелеха имеют вид

$$\begin{aligned} k_1 &= \lambda(z) + 2\mu(z), \quad k_2 = (\lambda(z) + 2\mu(z)) \left(z^2 - \frac{2z^4}{3h^2} + \frac{z^6}{9h^4} \right), \\ k_{2nano} &= \frac{1}{4}\mu(z) \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right)^2, \quad k_3 = (\lambda(z) + 2\mu(z)) \left(\frac{2z^4}{3h^2} + \frac{z^6}{9h^4} \right), \\ k_{3nano} &= \frac{1}{4}\mu(z) \left(1 - \frac{z^4}{h^4} \right), \quad k_4 = (\lambda(z) + 2\mu(z)) \frac{z^6}{9h^4}, \\ k_{4nano} &= \frac{1}{4}\mu(z) \left(1 + \frac{z^2}{h^2} \right)^2, \quad k_5 = k_s\mu(z) \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right)^2, \\ k_{5nano} &= \mu(z) \frac{z^2}{h^4}, \quad b_1 = \rho(z), \quad b_3 = \rho(z) \left(z^2 - \frac{2z^4}{3h^2} + \frac{z^6}{9h^4} \right). \end{aligned}$$

Из уравнений (4) следуют уравнения для кинематических моделей Тимошенко и Бернулли – Эйлера, как для полно размерных $\gamma = 0$ балок, так и наноразмерных $\gamma \neq 0$ балок. Введем безразмерные параметры по формулам

$$\begin{aligned} \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{u} = \frac{ua}{h^2}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi a}{h}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{r} = \frac{a}{h}, \quad \bar{\gamma} = \frac{l}{h}, \quad \bar{b} = \frac{b}{h}, \\ \bar{A} = \frac{A}{bh}, \quad \bar{q} = q \frac{a^4}{h^4 E}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{a}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений в частных производных (4) с краевыми (5) и начальными условиями (6) сведена к задаче Коши методом конечных разностей второго порядка точности по пространственным координатам, которая решена методом Рунге – Кутты восьмого порядка точности и Ньюмарка. Достоверность результатов исследовалась по правилу Рунге: интервал разбиения по координате x был принят $1/100$, а по времени $1.953 \cdot 10^{-3}$, что обеспечило совпадение не только основных функций, но и производных до второго порядка включительно.

2. Численный эксперимент

Исследуем статику и нелинейную динамику пористых функционально-градиентных нанобалок для кинематических моделей Бернулли – Эйлера и Шереметьева – Пелеха для типов пористости, приведенных на рис. 1. Материал балки — композит, имеющий металлическую фазу и фазу керамики, коэффициент пористости $\Gamma = 0.2; 0.4$, модули упругости, коэффициент Пуассона, плотность для алюминия и керамики [14]:

$$\begin{aligned} E_c = 210 \text{ ГПа}, \quad E_m = 70 \text{ ГПа}, \quad \nu_c = 0.24, \quad \nu_m = 0.35, \\ \rho_c = 2400 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_m = 2700 \text{ кг/м}^3, \quad h = 1 \text{ м}. \end{aligned}$$



Граничные условия, соответствующие жесткой заделке:

$$w(0, t) = w(1, t) = \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial w(1, t)}{\partial x} = 0,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0$$

и начальные условия для $\phi_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, 6$.

Нагрузка:

$$q(x, t) = q_0 + q_1 \sin(\omega_p t), \quad (7)$$

где q_0 , q_1 — величина статической и амплитуда динамической нагрузки соответственно, ω_p — частота возбуждения, t — время.

2.1. Хаотическая динамика

В работе хаос определяется по формулировке Гулика [15]: «Хаос существует тогда, когда либо имеется существенная зависимость от начальных условий, либо функция имеет положительный показатель Ляпунова в каждой точке области ее определения и поэтому не является в конечном итоге периодической». Исследовалась хаотическая динамика нанобалок при действии переменной распределенной нагрузки с частотой возбуждения $\omega_p = 6$, коэффициент диссипации $\varepsilon = 1$, относительная длина $r = \frac{a}{h} = 50$. Спектр показателей Ляпунова получен с помощью подхода, разработанного В. А. Крысько и В. В. Добрияном на основе нейронных сетей, старший показатель Ляпунова проверялся методом Канца [16].

Рассмотрим нелинейную динамику балки, описываемую кинематической гипотезой третьего порядка Шереметьева – Пелеха, с типом пористости X ([16], см. рис. 1, табл. 1).

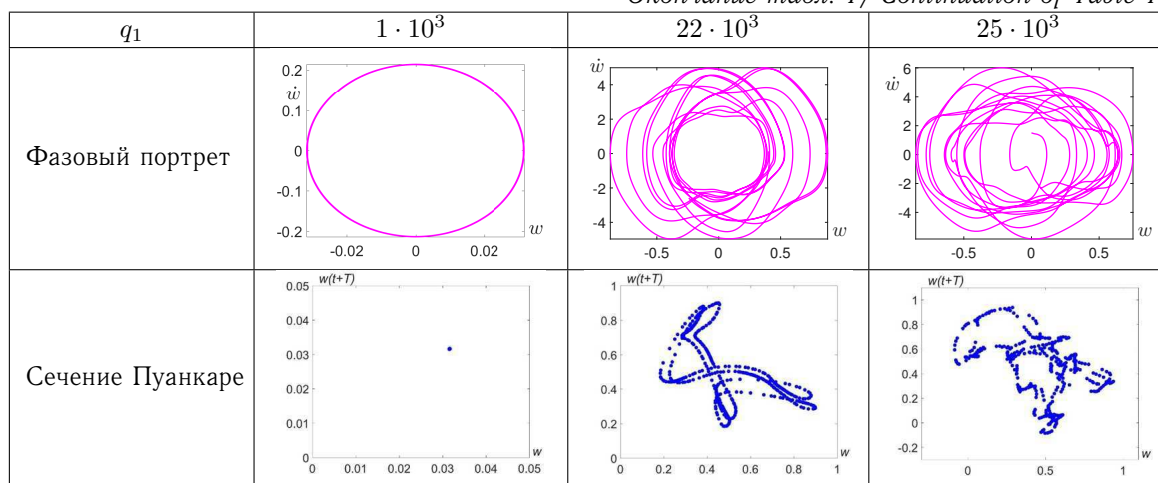
Таблица 1 / Table 1

Динамика балки Шереметьева – Пелеха
Dynamics of the Sheremetyev – Pelekh beam

q_1	$1 \cdot 10^3$	$22 \cdot 10^3$	$25 \cdot 10^3$
Сигналы			
Спектр Фурье			
Вейвлет Морле			



Окончание табл. 1 / Continuation of Table 1

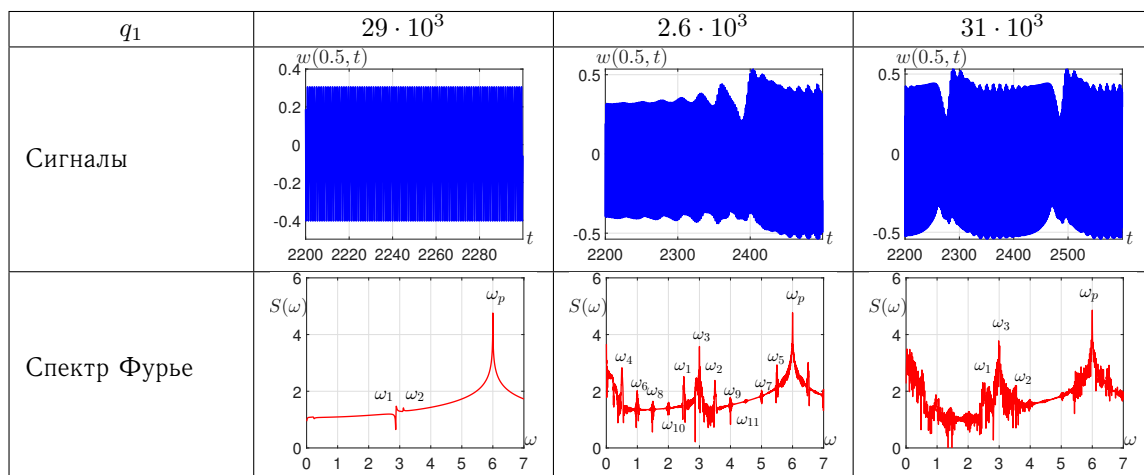


Коэффициент пористости $\Gamma = 0.2$ и размерно-зависимый параметр $\gamma = 0.3$. При нагрузке $q = 1 \cdot 10^3$ на спектре мощности наблюдается частота возбуждения ω_p , по сигналу, вейвлету, фазовому портрету и сечению Пуанкаре можно сделать вывод, что колебания гармонические. О гармонических колебаниях свидетельствуют также и показатели Ляпунова LE Spectrum: -0.00037 ; -0.26174 ; -0.26174 ; -1.32429 . Увеличение нагрузки приводит к появлению новых частот, и при $q = 22 \cdot 10^3$ на спектре присутствуют частоты $\omega_2 = \frac{11}{100}\omega_p$, $\omega_3 = \frac{33}{100}\omega_p$, $\omega_4 = \frac{55}{100}\omega_p$, $\omega_5 = \frac{77}{100}\omega_p$, «расстояния» между которыми равны и равны «расстоянию» между частотой ω_5 и ω_p . Вейвлет-спектр показывает переменный характер частот во времени. Фазовый портрет и сечение Пуанкаре указывают на хаотический характер колебаний. Спектр показателей Ляпунова имеет один положительный показатель (LE Spectrum: 0.05097 ; -0.05654 ; -0.43458 ; -0.51255). При нагрузке $q = 25 \cdot 10^3$ сигнал становится еще более хаотичным, на спектре Фурье имеется пьедестал частот. Вейвлет-спектр указывает на неизменяемость частотного спектра во времени. Фазовый портрет аналогичен предыдущему, а сечение Пуанкаре становится более хаотичным. В спектре показателей Ляпунова имеются два положительных показателя (LE Spectrum: 0.72661 ; 0.00432 ; -0.00122 ; -0.73915), т. е. система находится в гипер-хаосе. Состояние гипер-хаоса наблюдается в задачах для классических систем: обобщенное отображение Энона, система Лоренца [16].

Рассмотрим для сравнения результаты для пористой нанобалки Бернулли – Эйлера с аналогичными параметрами (табл. 2).

Таблица 2 / Table 2

Динамика балки Бернулли – Эйлера / Dynamics of the Bernoulli – Euler beam



Окончание табл. 2/ Continuation of Table 2

q_1	$29 \cdot 10^3$	$2.6 \cdot 10^3$	$31 \cdot 10^3$
Вейвлет Морле			
Фазовый портрет			
Сечение Пуанкаре			

При нагрузке $q = 29 \cdot 10^3$ сигнал не является синусоидальным и имеет пилообразную структуру, в спектре Фурье присутствуют две частоты с малой мощностью вокруг частоты $\frac{\omega_p}{2}$. На вейвлет-спектре они выражены слабо. Фазовый портрет имеет сложную неоднородную структуру. Спектр показателей Ляпунова отрицательный — LE Spectrum: $-0.00778; -0.04325; -0.06809; -0.06809$. При увеличении нагрузки происходит перестроение спектра, появляются новые частоты, и при $q = 29.6 \cdot 10^3$ на спектре присутствуют 12 частот. Наибольшую мощность имеют ω_p , $\frac{\omega_p}{2}$. Частоты расположены на спектре с шагом 0.5. Хаотичность колебаний подтверждает фазовый портрет, сечение Пуанкаре и спектр показателей Ляпунова — LE Spectrum: $0.05000; -0.08149; -0.54066; -0.54066$. Увеличение нагрузки приводит к перестроению спектра, и при $q = 31 \cdot 10^3$ спектр Фурье становится хаотичным на частотах ω_p , $\frac{\omega_p}{2}$. Сечение Пуанкаре и фазовый портрет указывают на хаотичность в фазовом пространстве. Спектр показателей Ляпунова имеет два положительных показателя (LE Spectrum: $0.056011; 0.00067704; -0.042798; -0.10512; -0.35535$), что говорит о состоянии гипер-хаоса.

2.2. Исследование зависимости нагрузка – прогиб при различных параметрах

Решение нелинейных статических задач осуществляется с помощью метода установления [14], через динамические задачи, с помощью методов, описанных в первом разделе настоящей работы. Рассмотрим и проанализируем поведение балочных структур, описываемых гипотезами 1-го и 3-го приближения (гипотеза 2-го приближения на графиках отсутствует, так как ее результаты близки к результатам гипотезы 3-го приближения), при действии внешней нагрузки q_0 (7), для различных значений размерно-зависимого параметра $\gamma = (0; 0.3)$ и при различных типах пористости — U , X , O ([16], рис. 2), при различных показателях пористости $\Gamma = 0.2; 0.4$, для $r = 50$. Результаты по кинематической модели Бернулли – Эйлера показаны сплошной линией, Шереметьева – Пелеха — штриховой. Отметим, что $q_1 = 0$ (7). Тип пористости на графиках обозначен цветами: синий цвет — тип пористости U , зеленый цвет — тип пористости X , красный цвет — тип пористости O . Из графиков рис. 2 видно, что тип пористости влияет на несущую способность балки. Для всех кинематических гипотез тип пористости U является наихудшим с точки зрения несущей способности балки. При увеличении размерно-зависимого параметра γ несущая способность балки увеличивается



примерно на 13–16%. Также при увеличении параметра пористости Γ несущая способность балки уменьшается примерно на 14–16%. Стоит отметить, что при увеличении параметра пористости Γ разница между типами пористости также увеличивается. Сравнение результатов (рис. 2) показывает, что увеличение коэффициента пористости для типа пористости U приводит к увеличению прогиба на 15% для модели Бернулли – Эйлера и на 11% для модели Шереметьева – Пелеха. Для типа пористости X значения соответственно 13 и 9%, а для типа пористости O — 8 и 5%. Из чего следует сделать вывод, что тип пористости O наиболее устойчив к увеличению пор и позволяет нести большую нагрузку.

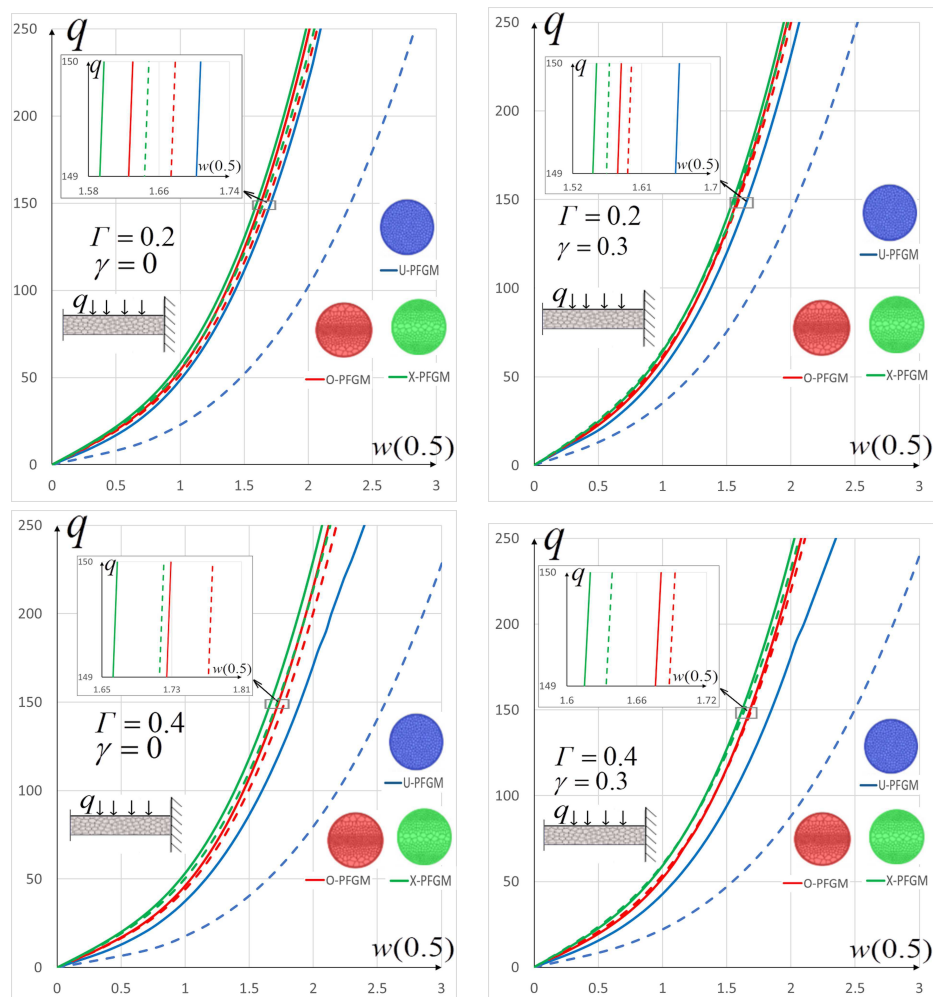


Рис. 2. Зависимость $q[w(0.5)]$ балок Бернулли – Эйлера и Шереметьева – Пелеха (цвет онлайн)
Fig. 2. Dependence $q[w(0.5)]$ of Bernoulli – Euler and Sheremetyev – Pelekh beams (color online)

Закключение

Построена математическая модель функционально-градиентных пористых гибких нанобалок с использованием кинематической гипотезы третьего порядка Шереметьева – Пелеха. Учет размерно-зависимого поведения материала основан на модифицированной моментной теории упругости. Из построенной математической модели Шереметьева – Пелеха как частный случай вытекают модели второго порядка Тимошенко и первого порядка Бернулли – Эйлера, с которой проведено сопоставление результатов. Численные результаты получены методом установления, методом конечных разностей второго порядка точности, методом Рунге – Кутты восьмого порядка и Ньюмарка.

В задачах нелинейной динамики нанобалок Бернулли – Эйлера и нанобалок Шереме-



тьева – Пелеха обнаружены два типа хаотических колебаний: хаос и гипер-хаос, так же как в классических задачах гиперхаотического обобщенного отображения Энона и системы Лоренца. Переход колебаний из гармонических в хаотические разный для каждой кинематической модели. В модели первого приближения — сценарий Фейгенбаума, в модели третьего приближения — переход в хаос через перемежаемость.

В задачах статики сравнение зависимостей $q[w(0.5)]$ показало, что наибольшее отличие результатов балок Бернулли – Эйлера и Шереметьева – Пелеха наблюдается при однородной по толщине пористости U-PFGM. Балки с типом пористости U-PFGM имеют наименьшую несущую способность для каждой модели. Отметим, что увеличение коэффициента пористости Γ приводит к снижению несущей способности пористых функционально-градиентных нанобалок.

Разработанный алгоритм расчета задач статики и динамики обладает высокой точностью, так как требует совпадения не только основных функций, но и их производных до второго порядка включительно; $\Delta x = 1/100$, $\Delta t = 1.953 \cdot 10^{-3}$ — соответственно шаги по пространственной координате и по времени. Представленные исследования имеют практический интерес для инженеров, проектирующих конструкции из пористых градиентных материалов.

Список литературы / References

1. Kumar R., Lal A., Singh B. N., Singh J. Non-linear analysis of porous elastically supported FGM plate under various loading. *Composite Structures*, 2020, vol. 233, art. 111721. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111721>
2. Shafiei N., Mirjavadi S. S., Afshari B. M., Rabby S., Kazemi M. Vibration of two-dimensional imperfect functionally graded (2D-FG) porous nano-/micro-beams. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, 2017, vol. 322, pp. 615–632. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.05.007>
3. Shafiei N., Mirjavadi S. S., Afshari B. M., Rabby S., Hamouda A. M. S. Nonlinear thermal buckling of axially functionally graded micro and nanobeams. *Composite Structures*, 2017, vol. 168, pp. 428–439. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.02.048>
4. Changho Oh, Stovall C. B., Dhaouadi W., Carpick R. W., de Boer M. P. The strong effect on MEMS switch reliability of film deposition conditions and electrode geometry. *Microelectronics Reliability*, 2019, vol. 98, pp. 131–143. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2019.04.023>
5. Fan F., Xu Y., Sahmani S., Safaei B. Modified couple stress-based geometrically nonlinear oscillations of porous functionally graded microplates using NURBS-based isogeometric approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, vol. 372, art. 113400. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113400>
6. Ebrahimi F., Barati M. R. Small-scale effects on hygro-thermo-mechanical vibration of temperature-dependent nonhomogeneous nanoscale beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2017, vol. 24, iss. 11, pp. 924–936. <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1196795>
7. Jouneghani F. Z., Dimitri R., Tornabene F. Structural response of porous FG nanobeams under hygro-thermo-mechanical loadings. *Composites Part B: Engineering*, 2018, vol. 152, pp. 71–78. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.06.023>
8. Ebrahimi F., Dabbagh A. Wave dispersion characteristics of heterogeneous nanoscale beams via a novel porosity-based homogenization scheme. *The European Physical Journal Plus*, 2019, vol. 134, art. 157. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12510-9>
9. Messai A., Fortas L., Merzouki T., Houari M. S. A. Vibration analysis of FG reinforced porous nanobeams using two variables trigonometric shear deformation theory. *Structural Engineering and Mechanics*, 2022, vol. 81, iss. 4, pp. 461–479. <https://doi.org/10.12989/sem.2022.81.4.461>
10. Xu X., Karami B., Shahsavari D. Time-dependent behavior of porous curved nanobeam. *International Journal of Engineering Science*, 2021, vol. 160, art. 103455. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2021.103455>
11. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, pp. 2731–2743. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)



12. Awrejcewicz J., Krysko A. V., Smirnov A., Kalutsky L. A., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Mathematical modeling and methods of analysis of generalized functionally gradient porous nanobeams and nanoplates subjected to temperature field. *Meccanica*, 2022, vol. 57, pp. 1591–1616. <https://doi.org/10.1007/s11012-022-01515-7>
13. Miller R. E., Shenoy V. B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*, 2000, vol. 11, iss. 3, pp. 139–147. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/11/3/301>
14. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Komarov S. A. Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, 2005, vol. 194, pp. 3108–3126. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.08.005>
15. Gulick D. *Encounters with chaos*. New York, McGraw-Hill College, 1992. 224 p.
16. Awrejcewicz J., Krysko A. V., Erofeev N. P., Dobriyan V., Barulina M. A., Krysko V. A. Quantifying chaos by various computational methods. Part 1: Simple systems. *Entropy*, 2018, vol. 20, iss. 3, art. 175. <https://doi.org/10.3390/e20030175>

Поступила в редакцию / Received 20.06.2023

Принята к публикации / Accepted 03.07.2023

Опубликована / Published 29.11.2024



Научная статья
УДК 534.014

Построение и анализ нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника асимптотическими методами

А. С. Смирнов^{1,2✉}, С. А. Булов³, Е. А. Дегилевич^{2,4}

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

²Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Россия, 199178, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., д. 61

³Центр инженерно-физических расчетов и анализа (АО «Цифра»), Россия, 195197, г. Санкт-Петербург, Кондратьевский пр., д. 15, корп. 2

⁴ООО «Центр Технологического Консалтинга», Россия, 194044, г. Санкт-Петербург, Большой Сампсониевский пр., д. 28, корп. 2

Смирнов Алексей Сергеевич, ¹ассистент Высшей школы механики и процессов управления; ²младший научный сотрудник лаборатории мехатроники, smirnov.alexey.1994@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6148-0322>, AuthorID: 947771

Булов Серафим Андреевич, инженер, tech.nature.engineering@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0009-0490-2101>, AuthorID: 1192307

Дегилевич Егор Алексеевич, ²аспирант; ⁴ведущий инженер, DegilevichEgor@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-0142-4561>, AuthorID: 1076938

Аннотация. Статья посвящена изучению нелинейных колебаний одной из наиболее часто встречающихся систем с тремя степенями свободы — трехзвенного математического маятника, параметры всех невесомых звеньев и всех концевых грузов которого полагаются идентичными. Обсуждается широкое применение модели трехзвенного маятника в прикладных задачах робототехники и биомеханики, а также ее важное научное значение в задачах устойчивости равновесия, стабилизации и управления движением. Рассматривается вопрос о нахождении нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника, знание которых позволяет осуществлять одночастотные режимы его движения при достаточно больших отклонениях. Для этой цели используются асимптотические методы нелинейной механики, которые дают возможность определить формы колебаний системы в первом приближении в рамках слабо-нелинейной модели. Обсуждаются основные особенности построенных нелинейных форм колебаний и выявляются их качественные и количественные отличия от традиционных линейных форм малых колебаний. Помимо этого, отмечается, что нелинейные формы колебаний могут быть найдены и на основе численного моделирования при помощи разгона системы под действием коллинеарного управления с малых отклонений, задаваемых по линейной форме, и до конечных амплитуд с выходом на одночастотное движение уже по нелинейной форме. Полученные аналитические выражения для частот нелинейных колебаний и соотношений амплитуд колебаний звеньев маятника для каждой из нелинейных форм сопоставляются с аналогичными численными зависимостями путем построения отвечающих им графических иллюстраций при одном и том же уровне полной механической энергии. Устанавливается, что аналитические и численные результаты находятся в согласии друг с другом, что определяет ценность построенного в работе приближенного решения. Полученные формулы и сделанные выводы представляют несомненный интерес в теоретическом отношении, а также они могут оказаться полезными и для их использования в конкретных практических целях.



Ключевые слова: трехзвенный математический маятник, нелинейная форма колебаний, асимптотические методы

Для цитирования: Смирнов А. С., Булов С. А., Дегилевич Е. А. Построение и анализ нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника асимптотическими методами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 598–610. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-598-610>, EDN: ZBOGPA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Construction and analysis of nonlinear oscillation modes of a three-link pendulum by asymptotic methods

A. S. Smirnov^{1,2✉}, S. A. Bulov³, E. A. Degilevich^{2,4}

¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29 Polytechnicheskaya St., St. Petersburg 195251, Russia

²Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61 Bolshoy Pr. V. O., St. Petersburg 199178, Russia

³Center of Engineering Physics, Simulation and Analysis (JSC “CEPSA”), 15/2 Kondratievsky Pr., St. Petersburg 195197, Russia

⁴CMT-Engineering, 28/2 Bolshoy Sampsonievskiy Pr., St. Petersburg 194044, Russia

Alexey S. Smirnov, smirnov.alexey.1994@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6148-0322>, AuthorID: 947771

Serafim A. Bulov, tech.nature.engineering@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0009-0490-2101>, AuthorID: 1192307

Egor A. Degilevich, DegilevichEgor@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-0142-4561>, AuthorID: 1076938

Abstract. This article is devoted to the study of nonlinear oscillations of one of the most common systems with three degrees of freedom – a three-link mathematical pendulum, the parameters of all weightless links and all end loads of which are assumed to be identical. The wide use of the three-link pendulum model in applied problems of robotics and biomechanics, as well as its important scientific significance in the problems of equilibrium stability, stabilization and motion control are discussed. The question of finding nonlinear oscillation modes of a three-link pendulum is considered, the knowledge of which makes it possible to implement single-frequency modes of its motion with sufficiently large deviations. For this purpose, asymptotic methods of nonlinear mechanics are used, which make it possible to determine the oscillation modes of the system in the first approximation within a weakly nonlinear model. The main features of the constructed nonlinear oscillation modes are discussed and their qualitative and quantitative differences from the traditional linear modes of small oscillations are revealed. In addition, it is noted that nonlinear oscillation modes can also be found on the basis of numerical simulation by accelerating the system under the action of collinear control from small deviations specified on a linear mode to finite amplitudes with access to single-frequency motion on a nonlinear mode. The obtained analytical expressions for the frequencies of nonlinear oscillations and the ratios of the oscillation amplitudes of the pendulum links for each of the nonlinear modes are compared with similar numerical dependencies by constructing graphic illustrations corresponding to them at the same level of total mechanical energy. It is established that the analytical and numerical results are in agreement with each other, which determines the value of the approximate solution constructed in the work. The formulas obtained and the conclusions drawn are of undoubted theoretical interest, and they may also be helpful for their use in specific practical purposes.

Keywords: three-link mathematical pendulum, nonlinear oscillation mode, asymptotic methods

For citation: Smirnov A. S., Bulov S. A., Degilevich E. A. Construction and analysis of nonlinear oscillation modes of a three-link pendulum by asymptotic methods. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 598–610 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-598-610>, EDN: ZBOGPA



This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Трехзвенный гравитационный маятник и его различные модификации в последнее время достаточно часто принимаются в качестве объектов исследования во многих научных работах. В первую очередь, это связано с тем, что подобные конструкции активно применяются в робототехнике и биомеханике, что и обуславливает их важное значение и интерес к ним со стороны ученых и исследователей.

В самом деле, в робототехнике модель трехзвенного маятника может использоваться для анализа поведения различных манипуляторов и промышленных роботов или представлять собой элемент какой-либо сложной составной конструкции. Изучение этой области позволит в будущем разрабатывать дешевые и эффективные автоматические системы, которые окажут помощь человеку в промышленности и смогут оптимизировать производственный процесс по многим параметрам. При этом о достаточной разработанности проблемы движения трехзвенного маятника свидетельствует наличие публикаций последних лет, которые посвящены экспериментальному исследованию устойчивости обращенного трехзвенного маятника [1], его стабилизации различными способами [2, 3], управлению движением трехзвенных конструкций [4–8], исследованию устойчивости равновесия трехзвенного маятника под действием следящих нагрузок [9, 10], анализу устойчивости его относительных равновесий [11], а также изучению ударной динамики трехзвенного маятника с учетом демпфирования [12]. Необходимо также отметить, что модель трехзвенного маятника может быть использована и как конечномерная аппроксимация тяжелой цепи, подвешенной за один из своих концов [13].

В биомеханике трехзвенная маятниковая модель может служить простейшим и в то же время достаточно адекватным приближением к конечностям человека или животного [14], а также описывать позу человека в целом [15, 16]. В этом случае на основе данной модели можно изучать естественные движения живых организмов в природе. Данная сфера является особенно важной и перспективной, так как многие эффективные и надежные инженерные решения зачастую заимствуются именно у природы, где они вырабатываются эволюционным путем на протяжении тысячелетий, а потому могут быть успешно приспособлены для конкретных прикладных задач. Отдельно стоит упомянуть и о применении модели трехзвенного маятника на стыке робототехники и биомеханики как важного компонента при разработке и исследовании экзоскелета, т. е. устройства, позволяющего существенно расширить возможности человеческого тела — его физическую силу и выносливость [17].

При этом важное прикладное значение представляет вопрос об управлении формами колебаний трехзвенного маятника. Для этой цели необходимо использовать адекватный закон управления, который позволит передавать всю подводимую в систему энергию на возбуждение только одной формы колебаний, не затрачивая ее на развитие других форм [18]. Естественно, что именно такой подход следует признать рациональным, поскольку при разгоне системы сразу по всем ее формам колебаний будет резко снижено качество процессов управляемого движения системы. Наибольший интерес представляет исследование указанных управляемых процессов разгона трехзвенного маятника от малых и до достаточно больших отклонений, т. е. с учетом плавного перехода от линейной области к нелинейной и с выходом на установившийся режим движения [19]. В этой связи данная задача тесно связана с проблемой построения нелинейных форм колебаний, структура которых является отнюдь не тривиальной и существенно зависит от характера нелинейности системы, что было отчетливо продемонстрировано и на примере трехзвенного маятника в работе [20] при помощи численного моделирования. Под нелинейной формой колебаний здесь подразумевается одночастотный режим движения нелинейной системы, который обычно и используется в практических приложениях, что определяет важность подробного описания таких режимов функционирования.



В качестве цели настоящего исследования принимаются построение и анализ нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника в первом приближении при помощи асимптотических методов и их сопоставление с результатами численного моделирования, подразумевающего организацию управляемого разгона системы с постепенным дрейфом формы колебаний от линейного варианта к нелинейному.

1. Математическая модель колебаний трехзвенного маятника

Рассмотрим трехзвенный математический маятник, длины всех невесомых звеньев которого для простоты полагаются одинаковыми и равными l , а массы всех концевых грузов также считаются идентичными и равными m (рис. 1).

Выражения для кинетической и потенциальной энергий этой системы были получены в работе [19], и они имеют следующий вид:

$$T = \frac{1}{2}ml^2 [3\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 4\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + 2\cos(\varphi_3 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 + 2\cos(\varphi_3 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3] = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (1)$$

$$\Pi = mgl(6 - 3\cos\varphi_1 - 2\cos\varphi_2 - \cos\varphi_3) = \Pi(\mathbf{q}), \quad (2)$$

где $\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T$ — столбец обобщенных координат, в качестве которых принимаются углы φ_1, φ_2 и φ_3 отклонения звеньев маятника от вертикали, а симметричная матрица $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ кинетической энергии (1) есть

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = ml^2 \begin{bmatrix} 3 & 2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) & \cos(\varphi_3 - \varphi_1) \\ 2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) & 2 & \cos(\varphi_3 - \varphi_2) \\ \cos(\varphi_3 - \varphi_1) & \cos(\varphi_3 - \varphi_2) & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A}.$$

Уравнения движения трехзвенного маятника могут быть записаны в виде одного нелинейного матричного уравнения [19]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{C}\sin\mathbf{q} = 0, \quad (3)$$

причем здесь использованы следующие удобные обозначения: $\dot{\mathbf{q}}^2 = [\dot{\varphi}_1^2, \dot{\varphi}_2^2, \dot{\varphi}_3^2]^T$ — столбец квадратов обобщенных скоростей, $\sin\mathbf{q} = [\sin\varphi_1, \sin\varphi_2, \sin\varphi_3]^T$ — столбец синусов обобщенных координат, а кососимметричная матрица $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ и симметричная постоянная матрица $\mathbf{C}$ есть

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = ml^2 \begin{bmatrix} 0 & -2\sin(\varphi_2 - \varphi_1) & -\sin(\varphi_3 - \varphi_1) \\ 2\sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & -\sin(\varphi_3 - \varphi_2) \\ \sin(\varphi_3 - \varphi_1) & \sin(\varphi_3 - \varphi_2) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^T = -\mathbf{G},$$

$$\mathbf{C} = mgl \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \mathbf{C}.$$

Линеаризуя полученное выше матричное уравнение движения (3) вблизи положения устойчивого равновесия $\mathbf{q} = 0$ (т. е. $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0$), можно получить линейную математическую модель колебаний трехзвенного маятника [19]:

$$\mathbf{A}_0\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0\mathbf{q} = 0,$$

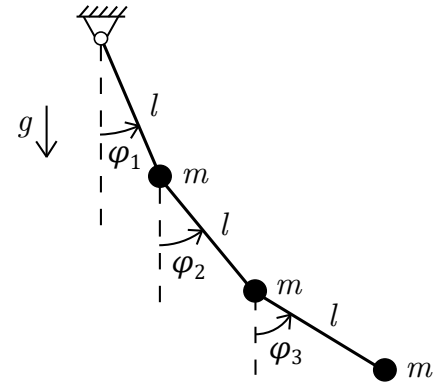


Рис. 1. Расчетная схема трехзвенного математического маятника
Fig. 1. Calculation scheme of a three-link mathematical pendulum



где $\mathbf{A}_0 = ml^2 \hat{\mathbf{A}}_0$ — постоянная симметричная матрица инерционных коэффициентов, а $\mathbf{C}_0 = mgl \hat{\mathbf{C}}_0$ — постоянная симметричная матрица квазиупругих коэффициентов, причем отвечающие им безразмерные матрицы $\hat{\mathbf{A}}_0$ и $\hat{\mathbf{C}}_0$ имеют следующий вид:

$$\hat{\mathbf{A}}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Соответствующие этой модели частоты малых колебаний k_{s0} трехзвенного маятника были получены в работе [20], и в безразмерном варианте $p_{s0} = k_{s0}/k$ они имеют вид

$$p_{10} = 0.645, \quad p_{20} = 1.515, \quad p_{30} = 2.508, \quad (5)$$

где для краткости обозначено $k = \sqrt{g/l}$ — частота малых колебаний математического маятника длиной l . Формы малых колебаний трехзвенного маятника тоже были найдены в работе [20], и они определяются следующими столбцами:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.292 \\ 1.631 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.353 \\ -2.398 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.645 \\ 0.767 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Для дальнейших действий понадобятся также безразмерные нормировочные коэффициенты $N_s = \mathbf{Q}_s^T \hat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{Q}_s$, которые с учетом (4) и (6) имеют следующие значения:

$$N_1 = 21.646, \quad N_2 = 3.923, \quad N_3 = 1.431. \quad (7)$$

2. Построение нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника

Для нахождения нелинейных форм колебаний системы будем использовать асимптотические методы нелинейной механики [21]. С этой целью обратимся к матричному уравнению (3) и разложим матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{q})$, $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ и столбец $\sin \mathbf{q}$ в ряды Тейлора по столбцу обобщенных координат $\mathbf{q}$ и удержим в этих разложениях лишь те слагаемые, которые необходимы для построения первого приближения:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) + \dots, \quad \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) + \dots, \quad \sin \mathbf{q} = \mathbf{q} - \frac{1}{6} \mathbf{q}^3 + \dots,$$

где матрица $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q})$ имеет второй порядок малости и определяется выражением

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) = -\frac{ml^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 & (\varphi_3 - \varphi_1)^2 \\ 2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 & 0 & (\varphi_3 - \varphi_2)^2 \\ (\varphi_3 - \varphi_1)^2 & (\varphi_3 - \varphi_2)^2 & 0 \end{bmatrix},$$

матрица $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$ имеет первый порядок малости и задается формулой

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = ml^2 \begin{bmatrix} 0 & -2(\varphi_2 - \varphi_1) & -(\varphi_3 - \varphi_1) \\ 2(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & -(\varphi_3 - \varphi_2) \\ \varphi_3 - \varphi_1 & \varphi_3 - \varphi_2 & 0 \end{bmatrix},$$

а под $\mathbf{q}^3 = [\varphi_1^3, \varphi_2^3, \varphi_3^3]^T$ понимается столбец кубов обобщенных координат. Тогда уравнение (3) может быть переписано в следующем виде:

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0 \mathbf{q} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}), \quad \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = -\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}^2 + \frac{1}{6} \mathbf{C}_0 \mathbf{q}^3, \quad (8)$$

причем в его левой части находятся лишь линейные слагаемые, а в правой части стоит столбец $\mathbf{P}$, который имеет третий порядок малости, и он может трактоваться как столбец



вынуждающих сил, действующих в линейной системе. Таким образом, (8) есть матричное уравнение колебаний трехзвенного маятника в рамках слабо-нелинейной модели, которое учитывает кубическую нелинейность и тем самым дает возможность построить нелинейные формы колебаний в первом приближении.

Будем искать решения уравнения (8) в исходном варианте в следующем виде:

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}_s a \cos \psi, \quad k_s(a) = \dot{\psi} = k_{s0} (1 + \beta_s a^2), \quad a = \text{const}, \quad (9)$$

т. е. по формам колебаний линейной системы $\mathbf{Q}_s$, но с измененными частотами k_s , которые зависят от величины a , характеризующей амплитуды колебаний звеньев маятника при движении по выбранной форме. При этом зависимости $k_s(a)$, исходя из учета кубической нелинейности в уравнении (8), должны быть, очевидно, квадратичными по a , а поправочные коэффициенты β_s в них могут быть найдены из уравнений гармонического баланса по заданным формам колебаний $\mathbf{Q}_s$ [21]:

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{Q}_s^T (\mathbf{A}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{P}) \cos \psi d\psi = 0. \quad (10)$$

Эти уравнения должны удовлетворяться с точностью до величин третьего порядка малости. Определяя с указанной точностью столбец $\ddot{\mathbf{q}}$ на основании формул (9), вычислим сначала комбинацию $\mathbf{A}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{q}}$, входящую в уравнения (10), переходя при этом к безразмерным матрицам (4) и частотам (5), а также принимая во внимание, что формы колебаний $\mathbf{Q}_s$ и соответствующие им безразмерные частоты p_{s0} в линейной модели подчинены уравнениям $(\hat{\mathbf{C}}_0 - p_{s0}^2 \hat{\mathbf{A}}_0) \mathbf{Q}_s = 0$:

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{q}} = -2mgl\beta_s p_{s0}^2 \hat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{Q}_s a^3 \cos \psi. \quad (11)$$

Для вычисления столбца вынуждающих сил $\mathbf{P}$ с необходимой точностью достаточно подставить в соответствующую формулу (8) $\mathbf{q} = \mathbf{Q}_s a \cos \psi$, $\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{Q}_s a k_{s0} \sin \psi$, $\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{Q}_s a k_{s0}^2 \cos \psi$, вследствие чего будем иметь

$$\mathbf{P} = mgl a^3 \left[\left(p_{s0}^2 \hat{\mathbf{A}}_s \mathbf{Q}_s + \frac{1}{6} \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{Q}_s^3 \right) \cos^3 \psi - p_{s0}^2 \hat{\mathbf{G}}_s \mathbf{Q}_s^2 \cos \psi \sin^2 \psi \right], \quad (12)$$

где условные обозначения $\mathbf{Q}_s^2$ и $\mathbf{Q}_s^3$ подразумевают столбцы квадратов и кубов элементов форм колебаний, а безразмерные матрицы $\hat{\mathbf{A}}_s$ и $\hat{\mathbf{G}}_s$ имеют представления

$$\hat{\mathbf{A}}_s = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2(Q_{2s} - Q_{1s})^2 & (Q_{3s} - Q_{1s})^2 \\ 2(Q_{2s} - Q_{1s})^2 & 0 & (Q_{3s} - Q_{2s})^2 \\ (Q_{3s} - Q_{1s})^2 & (Q_{3s} - Q_{2s})^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_s = \begin{bmatrix} 0 & -2(Q_{2s} - Q_{1s}) & -(Q_{3s} - Q_{1s}) \\ 2(Q_{2s} - Q_{1s}) & 0 & -(Q_{3s} - Q_{2s}) \\ Q_{3s} - Q_{1s} & Q_{3s} - Q_{2s} & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Для дальнейших действий формулу (12) удобно преобразовать к следующей форме:

$$\mathbf{P} = mgl a^3 (\mathbf{U}_s \cos \psi + \mathbf{V}_s \cos 3\psi), \quad (15)$$

где для столбцов $\mathbf{U}_s$ и $\mathbf{V}_s$ сделаны следующие обозначения:

$$\mathbf{U}_s = \frac{p_{s0}^2}{4} (3\hat{\mathbf{A}}_s \mathbf{Q}_s - \hat{\mathbf{G}}_s \mathbf{Q}_s^2) + \frac{1}{8} \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{Q}_s^3, \quad \mathbf{V}_s = \frac{p_{s0}^2}{4} (\hat{\mathbf{A}}_s \mathbf{Q}_s + \hat{\mathbf{G}}_s \mathbf{Q}_s^2) + \frac{1}{24} \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{Q}_s^3. \quad (16)$$



Подставляя выражения (11) и (15) в уравнения гармонического баланса (10), получим с учетом обозначений (7) и первого соотношения (16) формулу для искомых поправочных коэффициентов β_s :

$$\beta_s = -\frac{\mathbf{Q}_s^T \mathbf{U}_s}{2p_{s0}^2 N_s} = \frac{1}{16p_{s0}^2 N_s} \mathbf{Q}_s^T \left[2p_{s0}^2 (\hat{\mathbf{G}}_s \mathbf{Q}_s^2 - 3\hat{\mathbf{A}}_s \mathbf{Q}_s) - \hat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{Q}_s^3 \right].$$

После подстановки сюда числовых значений согласно (4)–(7), (13) и (14) находим:

$$\beta_1 = -0.0959, \quad \beta_2 = -2.405, \quad \beta_3 = -5.421. \quad (17)$$

Таким образом, для частот колебаний при движении по каждой из нелинейных форм имеем согласно (9) и (17) в безразмерном варианте $p_s = k_s/k$ следующие выражения:

$$p_1 = p_{10} (1 - 0.0959a^2), \quad p_2 = p_{20} (1 - 2.405a^2), \quad p_3 = p_{30} (1 - 5.421a^2). \quad (18)$$

Отсюда видно, что чем выше номер частоты, тем сильнее отношение p_s/p_{s0} зависит от величины a вследствие учета кубической нелинейности, т. е. роль нелинейных факторов особенно велика на высоких частотах.

Перейдем теперь к нахождению решений с точностью до третьего порядка малости, уточнив тем самым первую из формул (9) и получив представление о нелинейных формах колебаний в первом приближении. С этой целью выясним, какие вынужденные колебания возбуждает сила $\mathbf{P}$ из формулы (15) в линейной системе [21]. Подставляя (15) в (8) и принимая во внимание при решении получившегося уравнения, что гармоника $\cos \psi$ уже сбалансирована по форме $\mathbf{Q}_s$ ввиду (10), так что учитывать ее здесь не нужно, получим

$$\mathbf{q}_P(a, \psi) = (\mathbf{u}_s \cos \psi + \mathbf{v}_s \cos 3\psi) a^3, \quad (19)$$

где для столбцов $\mathbf{u}_s$ и $\mathbf{v}_s$ сделаны следующие обозначения:

$$\mathbf{u}_s = \sum_{r=1, r \neq s}^3 \mathbf{Q}_r \frac{\mathbf{Q}_r^T \mathbf{U}_s}{N_r(p_{r0}^2 - p_{s0}^2)}, \quad \mathbf{v}_s = \sum_{r=1}^3 \mathbf{Q}_r \frac{\mathbf{Q}_r^T \mathbf{V}_s}{N_r(p_{r0}^2 - 9p_{s0}^2)}. \quad (20)$$

Прибавляя (19) к первой формуле (9), получим искомые решения

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}_s a \cos \psi + \mathbf{q}_P(a, \psi) = (\mathbf{Q}_s a + \mathbf{u}_s a^3) \cos \psi + \mathbf{v}_s a^3 \cos 3\psi. \quad (21)$$

Выпишем числовые значения элементов столбцов $\mathbf{u}_s$ и $\mathbf{v}_s$ согласно (20) и с учетом (16):

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -0.0231 \\ 0.0107 \\ 0.0255 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1.310 \\ 2.020 \\ -1.044 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0.599 \\ 0.150 \\ -1.700 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.084 \\ 0.131 \\ -0.395 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.237 \\ -0.898 \\ 1.539 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1.319 \\ 2.173 \\ -1.182 \end{bmatrix}.$$

Определим амплитуды колебаний звеньев маятника A_{1s} , A_{2s} и A_{3s} в зависимости от параметра a , учитывая, что при не очень больших значениях a они достигаются так же, как и в линейной модели, при $\psi = 0$, поэтому согласно (21) будем иметь

$$A_{1s} = Q_{1s} a + (u_{1s} + v_{1s}) a^3, \quad A_{2s} = Q_{2s} a + (u_{2s} + v_{2s}) a^3, \quad A_{3s} = Q_{3s} a + (u_{3s} + v_{3s}) a^3.$$

В явном виде эти зависимости примут следующий вид:

$$A_{11} = a + 0.0612a^3, \quad A_{12} = a - 1.547a^3, \quad A_{13} = a - 0.720a^3,$$



$$\begin{aligned} A_{21} &= 1.292a + 0.1416a^3, & A_{22} &= 0.353a + 1.122a^3, & A_{23} &= -1.645a + 2.322a^3, \\ A_{31} &= 1.631a - 0.369a^3, & A_{32} &= -2.398a + 0.494a^3, & A_{33} &= 0.767a - 2.882a^3. \end{aligned}$$

Образуем теперь отношения $\mu_s = A_{2s}/A_{1s}$ и $\eta_s = A_{3s}/A_{1s}$ и составим для них приближенные выражения путем их разложения в ряд с удержанием одной поправки:

$$\begin{aligned} \mu_s &= \mu_{s0} \left[1 + \left(\frac{u_{2s} + v_{2s}}{Q_{2s}} - \frac{u_{1s} + v_{1s}}{Q_{1s}} \right) a^2 \right], \\ \eta_s &= \eta_{s0} \left[1 + \left(\frac{u_{3s} + v_{3s}}{Q_{3s}} - \frac{u_{1s} + v_{1s}}{Q_{1s}} \right) a^2 \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где $\mu_{s0} = Q_{2s}/Q_{1s}$ и $\eta_{s0} = Q_{3s}/Q_{1s}$ — соотношения амплитуд колебаний звеньев маятника в рамках линейной модели, так что $\mu_{10} = 1.292$, $\mu_{20} = 0.353$, $\mu_{30} = -1.645$, $\eta_{10} = 1.631$, $\eta_{20} = -2.398$, $\eta_{30} = 0.767$. В явном виде формулы (22) приобретают вид

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_{10} (1 + 0.0483a^2), & \mu_2 &= \mu_{20} (1 + 4.727a^2), & \mu_3 &= \mu_{30} (1 - 0.692a^2), \\ \eta_1 &= \eta_{10} (1 - 0.288a^2), & \eta_2 &= \eta_{20} (1 + 1.341a^2), & \eta_3 &= \eta_{30} (1 - 3.038a^2). \end{aligned} \quad (23)$$

Остается вычислить полную механическую энергию системы $E = T + \Pi$ с точностью до слагаемых четвертого порядка малости по параметру a . Обращаясь с этой целью к формулам (1) и (2) и удерживая в T и Π после разложения тригонометрических функций в ряды лишь необходимые слагаемые, будем иметь

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}ml^2 \left[3\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + 4 \left(1 - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} \right) \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + 2 \left(1 - \frac{(\varphi_3 - \varphi_1)^2}{2} \right) \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(1 - \frac{(\varphi_3 - \varphi_2)^2}{2} \right) \dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3 \right] + \frac{1}{2}mgl \left(3\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + \varphi_3^2 - \frac{\varphi_1^4}{4} - \frac{\varphi_2^4}{6} - \frac{\varphi_3^4}{12} \right). \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу решения (21) и учитывая при вычислении угловых скоростей $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ и $\dot{\varphi}_3$, что частоты колебаний определяются формулами (18), можно получить выражения для полной энергии при движении по каждой из трех нелинейных форм колебаний с точностью до четвертого порядка малости:

$$E_1 = E_0 (1 - 0.157a^2), \quad E_2 = E_0 (1 - 1.453a^2), \quad E_3 = E_0 (1 - 2.836a^2), \quad (24)$$

где $E_0 = 4.5mgl a^2$ — полная энергия в рамках линейной модели, причем представление для нее одинаково для всех форм колебаний. Видно, что в формулах (24) отсутствует зависимость от ψ , как это и должно быть, поскольку полная энергия в силу консервативности задачи должна оставаться постоянной величиной во времени.

Таким образом, в рамках модели колебаний трехзвенного маятника с учетом слабой нелинейности движение системы по каждой из трех нелинейных форм колебаний описывается формулой (21), подчеркивающей периодический, но уже не гармонический характер этих форм колебаний. Поэтому для описания движения по нелинейным формам колебаний необходимо указание конкретных зависимостей обобщенных координат от времени, а не только знание частот (18) и соотношений амплитуд колебаний (23), чего было вполне достаточно в линейной модели ввиду гармонического характера форм малых колебаний. Это означает, что упомянутые величины не дают полного представления о нелинейных формах колебаний, однако они являются их важными показателями, позволяющими оценить количественные отличия нелинейных форм колебаний от линейных при не очень больших уровнях энергии. Кроме того, именно их удобно рассматривать при сопоставлении приближенных аналитических результатов с численными, к чему мы и переходим.

3. Обсуждение результатов

Чтобы сравнить найденные выше аналитические решения с результатами численного интегрирования, необходимо указать, что для получения нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника при помощи численного моделирования следует организовать управляемое движение системы под действием коллинеарного управления, когда управляющие воздействия по всем степеням свободы формируются пропорционально обобщенным импульсам [18, 19]. Важнейшим достоинством этого управления является то, что оно позволяет осуществлять разгон системы с малых и вплоть до достаточно больших амплитуд по каждой из форм колебаний, не нарушая при этом формы малых колебаний и осуществляя их плавный переход в нелинейные формы колебаний [20]. Учитывая сказанное, столбец обобщенных управляющих сил $\mathbf{R}$, сформированных по принципу коллинеарного управления, можно представить в виде

$$\mathbf{R} = \gamma \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \gamma \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (25)$$

где принята во внимание формула (1), а γ — положительный коэффициент усиления, который можно принять величиной постоянной и достаточно малой, поскольку для постепенного перевода линейных форм колебаний в нелинейные нарастание колебаний должно быть достаточно медленным. Подставляя столбец (25) в правую часть матричного управления (3) и полагая начальные условия движения достаточно малыми и отвечающими поочередно каждой из форм малых колебаний (6) (для этого наиболее просто отклонить все звенья маятника в соответствии с требуемой формой колебаний и предоставить систему самой себе), можно наблюдать после осуществления процедуры численного интегрирования процесс управляемого разгона системы, сопровождаемый постепенным дрейфом форм колебаний из линейного варианта в нелинейный с ростом амплитуд. Для выхода на режим движения, отвечающий некоторому заданному уровню энергии E_* , достаточно отключить действие управления при достижении этого значения, после чего система перейдет в консервативное движение по интересующей нас нелинейной форме колебаний [20]. Полученные таким образом графические зависимости углов отклонения звеньев маятника от времени позволят снять все необходимые характеристики нелинейных форм колебаний. Подчеркнем также, что вместо E_* удобно ввести в рассмотрение безразмерную энергию $\delta_* = E_*/(mgl)$, значения которой следует принимать не очень большими, поскольку далее мы будем сравнивать численные результаты с аналитическими, полученными в рамках модели со слабой нелинейностью, когда формы колебаний еще не столь сильно отличаются от линейных.

Опишем теперь процесс сопоставления аналитических результатов с численными. Варьируя параметр a , построим сначала для каждой из трех форм колебаний зависимости отношения p_s/p_{s0} согласно (18) от этого параметра, а также зависимости отношений μ_s/μ_{s0} и η_s/η_{s0} согласно (23) от того же параметра. Отметим, что деление p_s , μ_s и η_s на p_{s0} , μ_{s0} и η_{s0} соответственно осуществляется из соображений удобства, чтобы все получившиеся таким образом зависимости при $a = 0$ начинались из 1.

На рис. 2 указанные приближенные аналитические зависимости приведены сплошными линиями для всех форм колебаний. Далее будем поочередно фиксировать различные значения a в принятом на рис. 2 диапазоне для каждой из форм колебаний и определять отвечающие им безразмерные энергии $\delta_s = E_s/(mgl)$ по формулам (24). Найденное таким образом то или иное значение δ_s следует затем задать в качестве безразмерного желаемого уровня энергии δ_* , на который требуется вывести систему при помощи коллинеарного управления. Это означает, что соответствие между аналитическими и численными результатами в принятом варианте станет осуществляться так, что им будет отвечать один и тот же уровень энергии.

Устанавливая в результате указанного численного моделирования безразмерную частоту колебаний $p_s = k_s/k$ и соотношения амплитуд $\mu_s = A_{2s}/A_{1s}$ и $\eta_s = A_{3s}/A_{1s}$, можно вычислить и интересующие нас величины p_s/p_{s0} , μ_s/μ_{s0} и η_s/η_{s0} , принимая во внимание, что все необходимые для этого значения из линейной модели известны из точного решения.



На рис. 2 для всех форм колебаний численные результаты показаны кружками. Легко видеть, что при достаточно небольших значениях a эти кружки точно накладываются на сплошные линии, отвечающие приближенному решению в рамках слабо-нелинейной модели. Однако по мере увеличения a наблюдается постепенное расхождение численных и аналитических результатов, что становится более заметным с увеличением номера формы колебаний. Отсюда можно сделать вывод, что полученные аналитические формулы являются асимптотически корректными.

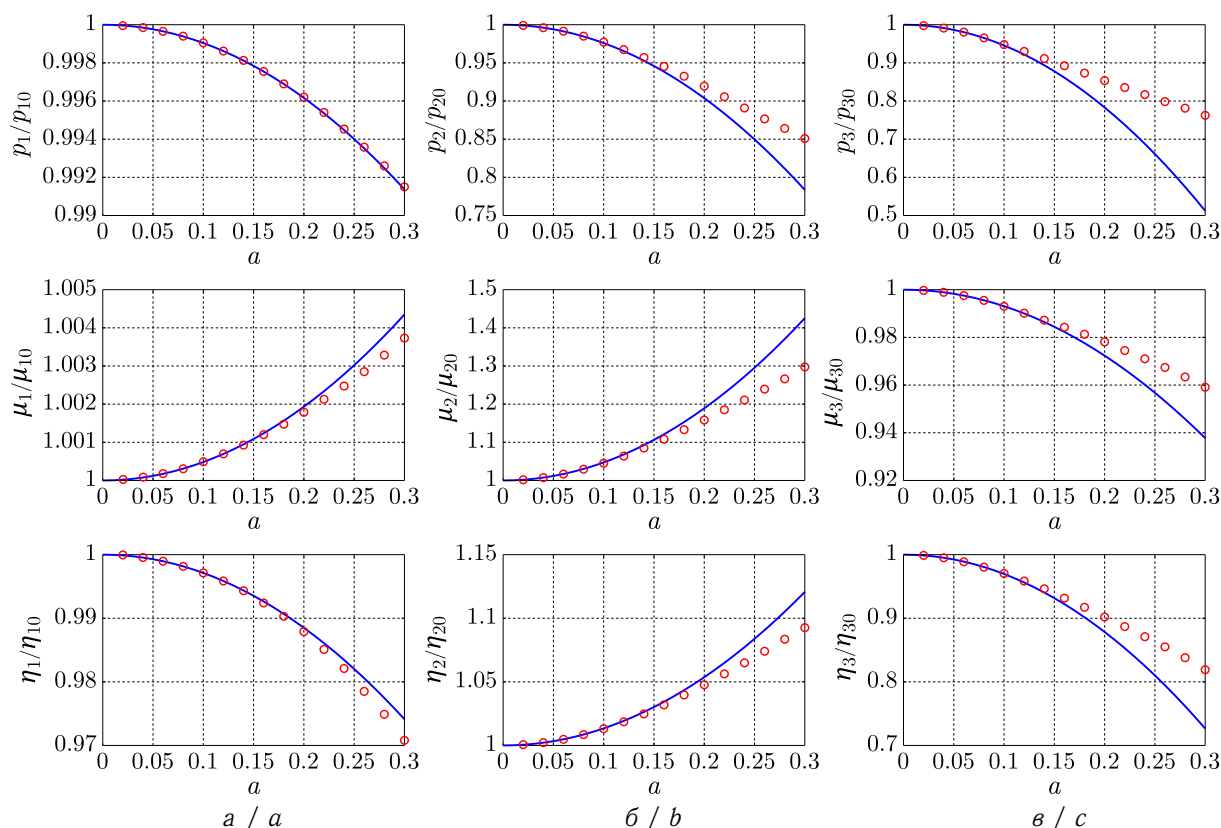


Рис. 2. Величины, характеризующие нелинейные формы колебаний трехзвенного маятника: a — первая форма колебаний (p_1/p_{10} , μ_1/μ_{10} , η_1/η_{10}); b — вторая форма колебаний (p_2/p_{20} , μ_2/μ_{20} , η_2/η_{20}); v — третья форма колебаний (p_3/p_{30} , μ_3/μ_{30} , η_3/η_{30})

Fig. 2. The quantities characterizing the nonlinear oscillation modes of a three-link pendulum: a is the first oscillation mode (p_1/p_{10} , μ_1/μ_{10} , η_1/η_{10}); b is the second oscillation mode (p_2/p_{20} , μ_2/μ_{20} , η_2/η_{20}); c is the third oscillation mode (p_3/p_{30} , μ_3/μ_{30} , η_3/η_{30})

Закключение

В настоящей работе был рассмотрен вопрос о построении и исследовании нелинейных форм колебаний трехзвенного маятника с идентичными параметрами звеньев и концевых грузов в первом приближении с учетом кубической нелинейности. При помощи асимптотических методов нелинейной механики были получены достаточно несложные приближенные решения, описывающие движение системы по каждой из нелинейных форм колебаний в отдельности с необходимой точностью и представляющие собой периодические, но уже не гармонические колебания. Это обстоятельство заметно усложняет характер нелинейных форм колебаний по сравнению с традиционными линейными формами малых колебаний, обобщением которых они являются. Указанные решения позволяют количественно оценить постепенный дрейф частот колебаний и соотношений между амплитудами колебаний звеньев маятника при плавном переходе из линейной зоны в слабо-нелинейную с увеличением амплитуд. Найденные



аналитические решения были сопоставлены с результатами численного моделирования, для чего осуществлялся управляемый разгон трехзвенного маятника при помощи коллинеарного управления с малых отклонений, отвечающих поочередно каждой из линейных форм колебаний, и вплоть до достижения режима колебательного движения по нелинейной форме с наперед заданным уровнем полной механической энергии. Сравнение аналитических и численных результатов, отвечающих одинаковому уровню энергии, показало их весьма хорошее соответствие при не очень больших амплитудах, что гарантирует достоверную асимптотику приведенного в работе приближенного решения и тем самым определяет его важное теоретическое и практическое значение. Полученные результаты могут представлять интерес при решении конкретных прикладных задач в области теории механических колебаний, динамики и управления движением маятниковых конструкций, а также современной робототехники и биомеханики.

Список литературы

1. Грибков В. А., Хохлов А. О. Экспериментальное исследование устойчивости обращенных стабилизируемых маятников // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2017. № 2 (71). С. 22–39. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-2-22-39>, EDN: YJGTOR
2. Архипова И. М. О стабилизации тройного перевернутого маятника с помощью вибрации точки опоры с произвольной частотой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6, № 2. С. 281–287. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.210>, EDN: KOOKGU
3. Jibril M., Tadese M., Tadese E. A. Comparison of a triple inverted pendulum stabilization using optimal control technique // Report and Opinion. 2020. Vol. 12, iss. 10. P. 62–70. <https://doi.org/10.7537/marsroj121020.10>
4. Ананьевский И. М. Управление трехзвенным перевернутым маятником в окрестности положения равновесия // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 2. С. 149–155. EDN: XMTBXN
5. Glück T., Eder A., Kugi A. Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation // Automatica. 2013. Vol. 49, iss. 3. P. 801–808. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.12.006>
6. Chen W., Theodomile N. Simulation of a triple inverted pendulum based on fuzzy control // World Journal of Engineering and Technology. 2016. Vol. 4, iss. 2. P. 267–272. <https://doi.org/10.4236/wjet.2016.42026>
7. Hussein M. T. CAD design and control of triple inverted-pendulums system // The Iraqi Journal for Mechanical and Materials Engineering. 2018. Vol. 18, iss. 3. P. 481–497. <https://doi.org/10.32852/ijqfmme.v18i3.183>
8. Huang X., Wen F., Wei Z. Optimization of triple inverted pendulum control process based on motion vision // EURASIP Journal on Image and Video Processing. 2018. Vol. 2018, iss. 73. P. 1–8. <https://doi.org/10.1186/s13640-018-0294-6>
9. Иванова А. И. Об устойчивости положения равновесия трехзвенного маятника под действием следящей силы // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2004. № 3 (14). С. 19–26.
10. Kovalchuk V. Triple inverted pendulum with a follower force: Decomposition on the equations of perturbed motion // Danish Scientific Journal. 2020. № 36-2. P. 46–48. EDN: MWQFZL
11. Евдокименко А. П. Устойчивость и ветвление относительных равновесий трехзвенного маятника в быстровращающейся системе отсчета // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 6. С. 902–920. EDN: KXXQUH
12. Awrejcewicz J., Kudra G., Lamarque C.-H. Investigation of triple pendulum with impacts using fundamental solution matrices // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, iss. 2. P. 4191–4213. <https://doi.org/10.1142/S0218127404011818>
13. Смирнов А. С., Дегилевич Е. А. Колебания цепных систем. Санкт-Петербург : Политех-Пресс, 2021. 246 с. EDN: XIOEBN
14. Agarana M. C., Akinlabi E. T. Mathematical modelling and analysis of human arm as a triple pendulum system using Euler – Lagragian model // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 413. The 2nd International Conference on Engineering for Sustainable World (ICESW 2018), 9–13 July 2018. Mechanical Engineering Department, Covenant University. Ota, Nigeria. 2018. Art. 012010. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/413/1/012010>



15. Новожилов И. В., Терехов А. В., Забелин А. В., Левик Ю. С., Шлыков В. Ю., Казенников О. В. Трехзвенная математическая модель для задачи стабилизации вертикальной позы человека // Математическое моделирование движений человека в норме и при некоторых видах патологии / под ред. И. В. Новожилова, П. А. Кручинина. Москва : Изд-во МГУ, 2005. С. 7–20.
16. Тяжелов А. А., Кизилова Н. Н., Фищенко В. А., Яремич С. Ю., Карпинский М. Ю., Карпинская Е. Д. Анализ стабильности на основе математической модели тела человека как многозвенной системы // Травма. 2012. Т. 13, № 4. С. 17–25. EDN: [RBKNXF](#)
17. Лоскутов Ю. В., Кудрявцев И. А. Оценка максимального момента в коленном приводе экзоскелета при вставании с опоры // Вестник Поволжского государственного технического университета. Серия: Материалы. Конструкции. Технологии. 2018. № 3 (7). С. 55–62. EDN: [YZUYPZ](#)
18. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями нелинейных механических систем на основе принципов биодинамики // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 4 (53). С. 11–19. EDN: [YNTDQY](#)
19. Булов С. А., Смирнов А. С. Управление формами колебаний трехзвенного маятника // Неделя науки ФизМех : сб. ст. Всерос. науч. конф. (Санкт-Петербург, 4–9 апреля 2022 г.). Санкт-Петербург : Политех-Пресс, 2022. С. 184–186. EDN: [UGWRVB](#)
20. Смирнов А. С., Булов С. А., Смольников Б. А. Численное моделирование нелинейных форм колебаний трехзвенного манипулятора // Современное машиностроение: Наука и образование : материалы 12-й Междунар. науч. конф. (Санкт-Петербург, 22 июня 2023 г.) / под ред. А. Н. Евграфова, А. А. Поповича. Санкт-Петербург : Политех-Пресс, 2023. С. 117–133. EDN: [IEONKZ](#)
21. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва : ГИФМЛ, 1958. 408 с.

References

1. Gribkov V. A., Khokhlov A. O. Experimental study of inverted regulable pendulum stability. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2017, iss. 2 (71), pp. 22–39 (in Russian). <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-2-22-39>, EDN: [YJGTOR](#)
2. Arkhipova I. M. On stabilization of a triple inverted pendulum via vibration of a support point with an arbitrary frequency. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, 2019, vol. 52, iss. 2, pp. 194–198. <https://doi.org/10.1134/S1063454119020031>, EDN: [DCCHMC](#)
3. Jibril M., Tadese M., Tadese E. A. Comparison of a triple inverted pendulum stabilization using optimal control technique. *Report and Opinion*, 2020, vol. 12, iss. 10, pp. 62–70. <https://doi.org/10.7537/marsroj121020.10>
4. Anan'evskii I. M. The control of a three-link inverted pendulum near the equilibrium point. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, suppl. 1, pp. S16–S21. <https://doi.org/10.3103/S0025654418030020>, EDN: [NIEIYE](#)
5. Glück T., Eder A., Kugi A. Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation. *Automatica*, 2013, vol. 49, iss. 3, pp. 801–808. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.12.006>
6. Chen W., Theodomile N. Simulation of a triple inverted pendulum based on fuzzy control. *World Journal of Engineering and Technology*, 2016, vol. 4, iss. 2, pp. 267–272. <https://doi.org/10.4236/wjet.2016.42026>
7. Hussein M. T. CAD design and control of triple inverted-pendulums system. *The Iraqi Journal for Mechanical and Materials Engineering*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 481–497. <https://doi.org/10.32852/ijjfmme.v18i3.183>
8. Huang X., Wen F., Wei Z. Optimization of triple inverted pendulum control process based on motion vision. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, 2018, vol. 2018, iss. 73, pp. 1–8. <https://doi.org/10.1186/s13640-018-0294-6>
9. Ivanova A. I. On the stability of the equilibrium position of a three-link pendulum under the action of a follower force. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2004, iss. 3 (14), pp. 19–26 (in Russian).
10. Kovalchuk V. Triple inverted pendulum with a follower force: Decomposition on the equations of perturbed motion. *Danish Scientific Journal*, 2020, iss. 36-2, pp. 46–48. EDN: [MWQFZL](#)
11. Evdokimenko A. P. Stability and branching of the relative equilibria of a three-link pendulum in a rapidly rotating frame of reference. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, iss. 6, pp. 648–663. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.01.005>, EDN: [NAKFXN](#)
12. Awrejcewicz J., Kudra G., Lamarque C.-H. Investigation of triple pendulum with impacts using



- fundamental solution matrices. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, vol. 14, iss. 2, pp. 4191–4213. <https://doi.org/10.1142/S0218127404011818>
13. Smirnov A. S., Degilevich E. A. *Oscillations of chain systems*. St. Petersburg, Polytech-Press, 2021. 246 p. (in Russian). EDN: [XIOEBN](#)
 14. Agarana M. C., Akinlabi E. T. Mathematical modelling and analysis of human arm as a triple pendulum system using Euler – Lagrangian model. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 413. The 2nd International Conference on Engineering for Sustainable World (ICESW 2018), July 9–13, 2018. Mechanical Engineering Department, Covenant University, Ota, Nigeria, 2018, art. 012010. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/413/1/012010>
 15. Novozhilov I. V., Terekhov A. V., Zabelin A. V., Levik Yu. S., Shlykov V. Yu., Kazennikov O. V. Three-link mathematical model for the problem of stabilization of the vertical posture of a person. In: Novozhilov I. V., Kruchinin P. A. (eds.) *Matematicheskoe modelirovanie dvizheniy cheloveka v norme i pri nekotorykh vidakh patologii* [Mathematical modeling of human movements in normal conditions and in some types of pathology]. Moscow, Moscow University Press, 2005, pp. 7–20 (in Russian).
 16. Tyazhelov A. A., Kizilova N. N., Fischenko V. A., Yaremin S. Yu., Karpinsky M. Yu., Karpinskaya Ye. D. Analysis of posturography based on mathematical model of human body as multilink system. *Trauma* [Injury], 2012, vol. 13, iss. 4, pp. 17–25 (in Russian). EDN: [RBKNXF](#)
 17. Loskutov Yu. V., Kudryavcev I. A. Determination of the maximum torque in the knee drive of exoskeleton during “sit-to-stand” and “stand-to-sit” movement. *Vestnik of Volga State University of Technology. Series: Materials. Constructions. Technologies*, 2018, iss. 3 (7), pp. 55–62 (in Russian). EDN: [YZUYPZ](#)
 18. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Resonance oscillations control of the non-linear mechanical systems based on the principles of biodynamics. *Mashinostroyeniye i inzhenernoye obrazovanie* [Mechanical Engineering and Engineering Education], 2017, iss. 4 (53), pp. 11–19 (in Russian). EDN: [YNTDQY](#)
 19. Bulov S. A., Smirnov A. S. Control of the oscillation modes of a three-link pendulum. In: *Nedelya nauki FizMekh* [Week of Science PhysMech]. Collection of articles of the All-Russian Scientific Conference (St. Petersburg, April 04–09, 2022). St. Petersburg, Polytech-Press, 2022, pp. 184–186 (in Russian). EDN: [UGWRVB](#)
 20. Smirnov A. S., Bulov S. A., Smolnikov B. A. Numerical simulation of nonlinear oscillation modes of a three-link manipulator. In: Evgrafov A. N., Popovich A. A. (eds.) *Sovremennoye mashinostroyeniye: Nauka i obrazovanie* [Modern Mechanical Engineering: Science and Education]. Proceedings of the 12th International Scientific Conference (St. Petersburg, June 22, 2023). St. Petersburg, Polytech-Press, 2023, pp. 117–133 (in Russian). EDN: [IEOHKZ](#)
 21. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, GIFML, 1958. 408 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 09.09.2023

Принята к публикации / Accepted 15.10.2023

Опубликована / Published 29.11.2024



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 611–618

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 611–618
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-611-618>, EDN: UCIQBF

Научная статья
УДК 531.383

Несовершенства кварцевого стекла и их влияние на динамику резонатора ВТГ

С. А. Шевченко✉, Б. Е. Мельников

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

Шевченко Сергей Александрович, инженер Высшей школы механики и процессов управления, shevchenko.sergei.a@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3367-416X>, AuthorID: 1009774

Мельников Борис Евгеньевич, доктор технических наук, профессор Высшей школы механики и процессов управления, melnikov_be@spbstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7889-1996>, AuthorID: 2861

Аннотация. В работе представлена инженерная оценка уровня разброса значений таких физико-механических свойств кварцевого стекла, как плотность и модуль упругости. Наличие разброса значений рассматриваемых параметров по объему материала приводит к появлению негативного эффекта — расщеплению рабочей собственной частоты резонатора гироскопа. Оценка проводится на основе рассмотрения микроструктуры кварцевого стекла и переменности ее параметров. Как результат, представлены значения расщепления частоты резонатора от расчетных уровней разброса свойств конструкционного материала.

Ключевые слова: кварцевое стекло, волновой твердотельный гироскоп, аморфное состояние, кристаллическая структура, расщепление частоты

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-10009).

Для цитирования: Шевченко С. А., Мельников Б. Е. Несовершенства кварцевого стекла и их влияние на динамику резонатора ВТГ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 611–618. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-611-618>, EDN: UCIQBF

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Fused quartz imperfections and their influence on the CVG resonator dynamics

S. A. Shevchenko✉, B. E. Melnikov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29 Polytechnicheskaya St., St. Petersburg 195251, Russia

Sergei A. Shevchenko, shevchenko.sergei.a@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3367-416X>, AuthorID: 1009774

Boris E. Melnikov, melnikov_be@spbstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7889-1996>, AuthorID: 2861

Abstract. The paper presents the engineering estimate of the dispersion level of the values of such fused quartz glass physical and mechanical properties as density and elasticity modulus. The value scatter of the considered parameters over material volume leads to negative effect appearance — working natural frequency splitting of gyroscope resonator. Evaluation is carried out on the basis of the consideration of the fused quartz glass micro-structure and variability of its parameters. As a result, resonator frequency splitting values from calculated scattering levels of the structural material properties are presented.



Keywords: fused quartz glass, Coriolis vibratory gyroscope, amorphous state, crystalline substance, frequency split

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-10009).

For citation: Shevchenko S. A., Melnikov B. E. Fused quartz imperfections and their influence on the CVG resonator dynamics. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 611–618 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-611-618>, EDN: UCIQBF

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Физико-механические (и пр.) свойства конструкционных материалов, используемых при изготовлении изделий, напрямую определяют их технические характеристики, поэтому еще на этапе проектирования необходимо не просто знать справочные значения данных материалов, а еще и уметь оценивать их зависимость от различных факторов или определять величину отклонения от стандартной величины.

В приборостроении в целом и в гироскопии в частности, где проектируются приборы, предназначенные для определения положения объектов в инерциальном пространстве [1–3], ввиду малости измеряемых величин любое несовершенство (неидеальность) конструкции, в том числе проявленное в виде переменных по объему физико-механических свойств, существенно сказывается на работе. В настоящей статье рассматривается один из наиболее перспективных в настоящее время измерительных приборов инерциальной навигации — волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) [4,5], а именно инженерная оценка разброса таких параметров, как плотность и модуль упругости, основанная на информации о структуре применяемого материала, с последующей оценкой влияния на работу прибора.

Принцип работы ВТГ основан на эффекте инертности упругих волн [6], возбуждаемых в твердом теле, поэтому к рассмотрению принимается чувствительный элемент ВТГ — его резонатор. Резонатор ВТГ представляет собой тонкостенную оболочку, как правило, цилиндрической или полусферической формы, в которой возбуждается стоячая волна упругих колебаний, используемая в дальнейшем, например, для измерения угла поворота объекта вокруг оси чувствительности ВТГ [7]. Непостоянство плотности и модуля упругости по объему резонатора (в силу его осевой симметрии) приводит к возникновению двух близких по значению собственных частот, разница по модулю которых называется расщеплением рабочей собственной частоты. Расщепление частот негативно сказывается на работе ВТГ, что приводит к необходимости его прогнозирования и устранения на этапе проектирования и изготовления.

В качестве конструкционных материалов резонаторов ВТГ целесообразно использовать материалы с низким внутренним трением, так как чувствительность прибора напрямую зависит от добротности его резонатора. Резонаторы приборов малого и среднего класса точности могут быть изготовлены из прецизионных сплавов, таких как 32НКД, 44НХТЮ, 21НКМТ-ВИ [8,9]. Наибольшее распространение среди материала резонаторов для высокоточных приборов получило кварцевое стекло [6,10]. Оно и будет рассматриваться в дальнейшем. Необходимо отметить, что наилучшими характеристиками в части минимизации внутреннего трения, безусловно, обладают монокристаллические структуры, например синтетический сапфир, однако ввиду своей анизотропии и высокой твердости данный класс материалов почти не нашел применения в рассматриваемой области.

Кварцевое стекло как конструкционный материал хорошо известен и описан как в отечественной, так и зарубежной литературе [11–13]. Однако в силу его применения, в первую очередь как оптического конструкционного материала, трудно найти информацию по разбросу значений его физико-механических характеристик — модулю упругости или

плотности. Например, в ГОСТ 15130-86 «Стекло кварцевое оптическое. Общие технические условия» для указанных параметров представлены постоянные значения без каких-либо технологических допусков на отклонение от измеряемой величины. При этом с точки зрения работы ВТГ разброс этих значений имеет одно из ключевых значений.

1. Материалы и методы

Кварцевое стекло, как известно [14, 15], имеет аморфную структуру, характеризующуюся отсутствием дальнего порядка и наличием большого количества пустот (рис. 1) [16]. Ввиду хаотичности расположения пустот по объему, а также непостоянства их размера трудно сформировать зависимость, позволяющую определить пределы колебаний значений плотности и модуля упругости от справочных значений. Однако если допустить постоянство суммарного объема пустот, то можно провести инженерную оценку колебаний рассматриваемых значений, используя данные по параметрам базового соединения кварцевого стекла — оксида кремния.

Основной структурной единицей кварцевого стекла (как и кристаллического кварца) является кремнекислородный тетраэдр SiO_4 , в котором атом кремния окружен четырьмя атомами кислорода. На рис. 2 [16] показаны значения межатомных расстояний (длин связей), определяющих геометрические размеры тетраэдра. При этом результаты экспериментов [17, 18] говорят о возможном изменении длины связей в пределах 1%, что может быть использовано для расчета колебаний значений плотности и модуля упругости.

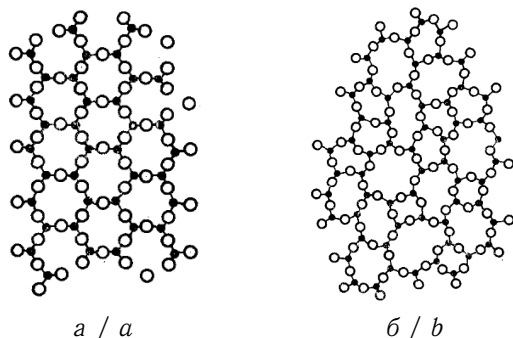


Рис. 1. Структура кристаллического (а) и аморфного (б) кварца по Захариасену
Fig. 1. The structure of crystalline (a) and amorphous (b) quartz according to Zahariasen

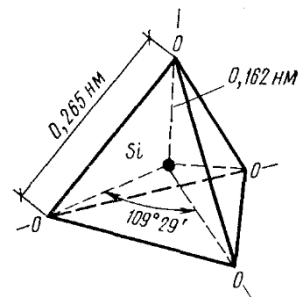


Рис. 2. Структурная единица кварцевого стекла SiO_4
Fig. 2. The structural unit of quartz glass is SiO_4

1.1. Метод определения разброса значений плотности

Для определения расчетного значения плотности кварцевого стекла воспользуемся выражением для плотности кристаллических структур [19]

$$\rho = \frac{m \cdot M \cdot 10^{-3}}{N_a \cdot V},$$

где m [ед.] — число молекул в рассматриваемой элементарной ячейке; M [а.е.м.] — молекулярная масса; N_a [1/моль] — число Авогадро; V [м³] — объем элементарной ячейки. Принимая допущение о постоянстве суммарного объема пустот в стекле, модифицируем представленное выражение путем домножения на коэффициент δ , являющегося аналогом коэффициента пористости материала, для получения целевого значения плотности по [19]. При этом в качестве элементарной ячейки выбираем представленный на рис. 2 тетраэдр, тем самым получая максимально плотное расположение атомов.

Разброс значений плотности получим путем варьирования объема элементарной ячейки, вызванного колебаниями значений длины связи Si–O (на основе [17, 18]). Объем элементарной ячейки определялся для фигуры, представляющей собой пять пересекающихся сфер

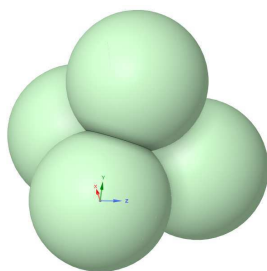


Рис. 3. Геометрическая модель структурной единицы кварцевого стекла
Fig. 3. Geometric model of the structural unit of quartz glass

(рис. 3) с радиусами, соответствующими ионным радиусам атомов соединения [20] (ионный радиус кислорода и кремния 140 пм и 41 пм соответственно).

Необходимо отметить, что похожий подход использовался в [21] для определения значений плотности различных минералов.

1.2. Метод определения разброса значений модуля упругости

Для определения расчетного значения модуля упругости кварцевого стекла воспользуемся выражением для модуля упругости кристаллических структур [22, 23]

$$E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 a_0^2},$$

где e [Кл] — элементарный заряд, равный заряду электрона; ϵ_0 [Кл²/Н·м²] — электрическая постоянная; r [м] — расстояние между взаимодействующими зарядами (половина длины связи Si–O); a_0 [м] — период кристаллической решетки (размер элементарной ячейки). Аналогично расчету разброса плотности домножим полученное выражение на корректирующий коэффициент γ для получения целевого значения модуля упругости по ГОСТ 15130-86. Разброс значений модуля упругости также получим за счет колебаний длины связи Si–O (на основе [17, 18]).

1.3. Метод определения расщепления частоты резонатора ВТГ

Расщепление частоты резонатора ВТГ определяется с использованием модели, построенной на основе определяющих соотношений теории тонких оболочек по В. В. Новожилову [24]. Соответствующие выражения для потенциальной энергии упругой деформации растяжимой оболочки и выражение для кинетической энергии элементарного объема оболочки представлены в [7, 24]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho h v^2 A_1 A_2 d\theta d\phi,$$

$$W = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - 2(1-\nu) \left(\epsilon_1 \epsilon_2 - \frac{\omega^2}{4} \right) \right] A_1 A_2 d\theta d\phi +$$

$$+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[(\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2(1-\nu) (\kappa_1 \kappa_2 - \tau^2) \right] A_1 A_2 d\theta d\phi,$$

где h [м] — толщина полусферической оболочки; A_1, A_2 — параметры Ляме; ν — коэффициент Пуассона материала; E [МПа] — модуль упругости материала; ϵ_1, ϵ_2 — параметры, характеризующие удлинение срединной поверхности; κ_1, κ_2 — параметры, характеризующие изгибные деформации срединной поверхности; ω, τ — параметры, характеризующие деформации сдвига и кручения соответственно; θ, ϕ [град] — зенитный и азимутальный углы соответственно; $\mathbf{v}$ [м/с] — вектор скорости.

Применяя вариационный принцип Гамильтона [25] совместно с методом Ритца [26], возможно свести задачу по определению собственных частот к классической постановке задачи на собственные значения:

$$(A - \lambda^2 B) \mathbf{C} = 0,$$

где A, B — матрицы, связанные с кинетической и потенциальной энергиями, а также координатными функциями; $\mathbf{C}$ — вектор-столбец неизвестных коэффициентов; λ — вектор-столбец значений собственных частот.



Учет колебаний значений физико-механических характеристик (q) проводится путем внесения соответствующих гармоник в выражения для кинетической и потенциальной энергий

$$q(\phi) = q_0 + X \sin(m\phi + \beta),$$

где q_0 — номинальное значение рассматриваемого параметра, X — амплитуда гармоники, ϕ [град], — угловая координата, соответствующая азимутальному углу. Расщепление частот вычисляется как разность по модулю двух близких по значению (парных) собственных частот осесимметричной оболочки.

2. Результаты и обсуждения

На основе представленных выше методов получена инженерная оценка предельных значений (разброса) плотности и модуля упругости материала резонатора, а также значения расщепления его собственной частоты, ими вызванного. Разброс в 1% длины связи Si–O соответствует экспериментальным значениям [17, 18] для низкотемпературной модификации кремнезема — (α) модификации, часто используемой для изготовления кварцевого стекла. В силу того что для изготовления резонаторов используется высококачественное кварцевое стекло, содержащее минимальное количество примесей, влиянием их на разброс плотности пренебрегается. Массовая доля примесей металлов (Al, Fe и пр.), а также гидроксильных групп оценивается в 0.02% [27]. Значение расщепления определялось для четвертой гармоники распределения несовершенства как для гармоники, вносящей определяющий вклад в рассматриваемую величину [10]. Полученные результаты представлены в таблице.

Результаты расчетной оценки
Table. The results of the estimated assessment

Параметр	Min	Max	Расщепление, Гц
Плотность, кг/м ³	2.133	2.263	37.3
Модуль упругости, Па	$7.053 \cdot 10^{10}$	$7.64 \cdot 10^{10}$	1.2

Учитывая полученные результаты, а также необходимость достижения значений расщепления на уровне не менее 0.1 Гц, можно отметить существенность полученных результатов в части влияния переменного значения характеристик материала на параметры прибора. Следствием этого является необходимость дополнительного контроля разброса физико-механических характеристик на этапе получения заготовок из кварцевого стекла, предназначенных для изготовления резонаторов. Необходимо сказать и о вероятных предельных значениях разброса значений плотности и модуля упругости (с учетом принятых допущений), а также значений расщепления, им вызванных. Отмечается и то, что при сопоставимом разбросе значений ($\pm 4\%$) вклад разнотности на порядок выше вклада разнотности упругости, что было показано в [28]. В дополнение, разброс допустимых значений для коэффициента Пуассона по ГОСТ 15130-86 приводит к расщеплению на уровне 0.54 Гц, что меньше рассмотренных значений, но также требующему внимания.

Заключение

В представленной работе приведена расчетная инженерная оценка, позволяющая определить разброс значений таких физико-механических свойств кварцевого стекла, как плотность и модуль упругости. Оценка построена на выражениях для расчета значений свойств кристаллических структур с учетом поправки на аморфную структуру стекла. Принято допущение о постоянстве среднего значения пустот по объему. В качестве переменной использованы экспериментальные данные по определению длины связи Si–O. Полученные возможные максимальные колебания плотности и модуля упругости приводят к существенному влиянию на такую характеристику, как расщепление рабочей собственной частоты волнового твердотельного гироскопа, что требует дополнительного контроля рассматриваемых характеристик при выборе и изготовлении заготовок для резонаторов.



Список литературы

1. *Woodman O. J.* An introduction to inertial navigation. Cambridge : University of Cambridge, Computer Laboratory, 2007. 37 p. (Technical Report, № 696).
2. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. Москва : Наука, 1976. 670 с.
3. Инерциальная навигация. Анализ и проектирование / под ред. К. Ф. О'Доннелла. Москва : Наука, 1969. 592 с.
4. *Delhaye F.* HRG by SAFRAN: The game-changing technology // 2018 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INEKTIAL). Lake Como, Italy, 2018. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/ISISS.2018.8358163>
5. *Пешехонов В. Г.* Перспективы гироскопии // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019 : сб. тр. Москва : Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2019. С. 36–38. <https://doi.org/10.25728/vspu.2019.0036>, EDN: **PXERVV**
6. *Климов Д. М., Журавлев В. Ф., Жбанов Ю. К.* Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). Москва : Ким Л. А., 2017. 193 с. EDN: **YNIIZR**
7. *Меркурьев И. В., Подалков В. В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. Москва : Физматлит, 2009. 226 с.
8. *Распопов В. Я., Алалуев Р. В., Ладонкин А. В., Лихошерст В. В., Шепилов С. И.* Настройка и калибровка волнового твердотельного гироскопа с металлическим резонатором, работающего в режиме датчика угловой скорости // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28, № 1. С. 31–41. <https://doi.org/10.17285/0869-7035.0019>
9. *Басараб М. А., Лунин Б. С., Матвеев В. А., Фомичев А. В., Чуманкин Е. А., Юрин А. В.* Миниатюрные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов // Вестник МГТУ имени Н. Э. Баумана. Серия: Приборостроение. 2014. № 4. С. 80–95. EDN: **SNFDUF**
10. *Лунин Б. С., Матвеев В. А., Басараб М. А.* Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. Москва : Радиотехника, 2014. 176 с.
11. *Bourhis E.* Glass: Mechanics and technology. 2nd ed. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2014. 416 p. <https://doi.org/10.1002/9783527679461>
12. *Hulsenberg D., Harnisch A., Bismarck A.* Microstructuring of glasses. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 348 p. (Springer Series in Materials Science, vol. 87). <https://doi.org/10.1007/978-3-540-49888-9>
13. *Ботвинкин О. К., Запорожский А. И.* Кварцевое стекло. Москва : Стройиздат, 1965. 260 с.
14. *Бартенев Г. М.* Строение и механические свойства неорганических стекол. Москва : Стройиздат, 1966. 216 с.
15. *Rao K. J.* Structural chemistry of glasses. Amsterdam : Elsevier, 2002. 568 p.
16. Химическая технология стекла и ситаллов / под ред. Н. М. Павлушкина. Москва : Стройиздат, 1983. 432 с.
17. *Helms R., Poindexter E.* The silicon-silicon dioxide system: Its microstructure and imperfection // Reports on Progress in Physics. 1994. Vol. 57, iss. 8. P. 791–852. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/57/8/002>, EDN: **AZJNTD**
18. *Шелби Дж.* Структура, свойства и технология стекла. Москва : Мир, 2006. 288 с.
19. *Шаскольская М. П.* Кристаллография : 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Высшая школа, 1984. 376 с.
20. Краткий справочник физико-химических величин / под ред. К. П. Мищенко, А. А. Равделя. 2-е изд., доп. Ленинград : Госхимиздат, 1957. 112 с.
21. *Зуев В. В.* Остовно-электронная кристаллохимия и свойства минералов. С.-Петербург : Наука, 2009. 270 с.
22. *Зуев Л. Б., Данилов В. И.* Физические основы прочности материалов. С.-Петербург : Интеллект, 2013. 376 с.
23. *Бадамшин И. Х.* От четырех к одному. Силы внутриатомного взаимодействия и прочность материалов. Москва : ИД Академия Естествознания, 2014. 89 с.
24. *Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И.* Линейная теория тонких оболочек. Ленинград : Политехника, 1991. 656 с.
25. *Голдстейн Г.* Классическая механика : пер. с англ. Москва : Наука, 1975. 415 с.
26. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Наука, 1970. 512 с.
27. *Леко В. К., Мазурин О. В.* Свойства кварцевого стекла. Ленинград : Наука, Ленингр. отд-ние, 1985. 165 с.



28. Shevchenko S. A., Konotopov O. I. The dynamic characteristics of a resonator of the gyroscope based on elastic waves in solids: finite-element modeling // St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 2021. Vol. 14, iss. 2. P. 65–80. <https://doi.org/10.18721/JPM.14206>

References

1. Woodman O. J. *An introduction to inertial navigation*. Technical Report, No. 696. Cambridge, University of Cambridge, Computer Laboratory, 2007. 37 p.
2. Ishlinskiy A. Yu. *Oriyentatsiya, giroskopy i inertsial'naya navigatsiya* [Orientation, gyroscopes and inertial navigation]. Moscow, Nauka, 1976. 670 p. (in Russian).
3. O'Donnell C. F. (ed.) *Inertial navigation. Analysis and design*. New York, McGraw-Hill Education, 1964. 442 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1969. 592 p.).
4. Delhay F. HRG by SAFRAN: The game-changing technology. *2018 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INEKTIAL)*. Lake Como, Italy, 2018, pp. 1–4. <https://doi.org/10.1109/ISISS.2018.8358163>
5. Peshekhonov V. G. Gyroscopy perspectives. *XIII Vserossiyskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-2019* [XIII All-Russian Conference on Management Problems VSPU-2019]. Moscow, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS Publ., 2019, pp. 36–38 (in Russian). <https://doi.org/10.25728/vspu.2019.0036>, EDN: PXERVB
6. Klimov D. M., Zhuravlev V. F., Zhanov Yu. K. *Kvartsevyi polusfericheskiy rezonator (volnovoy tverdotel'nyy giroskop)* [Fused quartz hemispherical resonator (coriolis vibratory gyroscope)]. Moscow, Kim L. A., 2017. 193 p. (in Russian). EDN: YNIIZR
7. Merkur'ev I. V., Podalkov V. V. *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotel'nogo giroskopov* [Dynamics of micromechanical and wave solid-state gyroscopes]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 226 p. (in Russian).
8. Raspopov V. Ya., Alaluev R. V., Ladonkin A. V., Likhoshester V. V., Shepilov S. I. Tuning and calibration of a hemispherical resonator gyroscope with a metal resonator to operate in angular rate sensor mode. *Gyroscopy and Navigation*, 2020, vol. 11, pp. 34–40. <https://doi.org/10.1134/S2075108720010113>
9. Basarab M. A., Lunin B. S., Matveev V. A., Fomichev A. V., Chumankin E. A., Yurin A. V. Miniature gyroscope based on elastic waves in solids for small spacecraft. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering*, 2014, vol. 4, pp. 80–95 (in Russian). EDN: SNFDUF
10. Lunin B. S., Matveev V. A., Basarab M. A. *Volnovoy tverdotel'nyy giroskop. Teoriya i tekhnologiya* [Coriolis vibratory gyroscope. Theory and Technology]. Moscow, Radiotekhnika, 2014. 176 p. (in Russian).
11. Bourhis E. *Glass: Mechanics and technology*. 2nd ed. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2014. 416 p. <https://doi.org/10.1002/9783527679461>
12. Hulsenberg D., Harnisch A., Bismarck A. *Microstructuring of glasses*. Springer Series in Materials Science, vol. 87. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 348 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-49888-9>
13. Botvinkin O. K., Zaporozhskiy A. I. *Kvartsevoe steklo* [Fused quartz glass]. Moscow, Stroyizdat, 1965. 260 p. (in Russian).
14. Bartenev G. M. *Stroyenie i mekhanicheskie svoystva neorganicheskikh stekol* [Structure and mechanical properties of inorganic glasses]. Moscow, Stroyizdat, 1966. 216 p. (in Russian).
15. Rao K. J. *Structural chemistry of glasses*. Amsterdam, Elsevier, 2002. 568 p.
16. Pavlushkin N. M. (ed.) *Khimicheskaya tekhnologiya stekla i sitallov* [Chemical technology of glass and crystalline glass]. Moscow, Stroyizdat, 1983. 432 p. (in Russian).
17. Helms R., Poindexter E. The silicon-silicon dioxide system: Its microstructure and imperfection. *Reports on Progress in Physics*, 1994, vol. 57, iss. 8, pp. 791–852. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/57/8/002>, EDN: AZJNTD
18. Shelby J. E. *Introduction to glass science and technology*. 2nd ed. Royal Society of Chemistry, 2005. 308 p. <https://doi.org/10.1039/9781847551160> (Russ. ed.: Moscow, Mir, 2006. 288 p.).
19. Shaskol'skaya M. P. *Kristallografiya* [Crystallography]. 2nd ed., rev. and suppl. Moscow, Vysshaya shkola, 1984. 376 p. (in Russian).
20. Mishchenko K. P., Ravdel' A. A. (eds.) *Kratkiy spravochnik fiziko-khimicheskikh velichin* [Brief reference book of physical and chemical quantities]. 2nd ed., suppl. Leningrad, Goskhimizdat, 1957. 112 p. (in Russian).



21. Zuev V. V. *Ostovno-elektronnaya kristallokhimiya i svoystva mineralov* [Residual-electron crystallochemistry and properties of minerals]. St. Petersburg, Nauka, 2009. 270 p. (in Russian).
22. Zuev L. B., Danilov V. I. *Fizicheskie osnovy prochnosti materialov* [Physical foundations of the strength of materials]. St. Petersburg, Intellekt, 2013. 376 p. (in Russian).
23. Badamshin I. Kh. *Ot chetyrekh k odnomu. Sily vnutriatomnogo vzaimodeystviya i prochnost' materialov* [From four to one. Forces of Intra-atomic interaction and strength of materials]. Moscow, Publisher House Akademiya Estestvoznaniya, 2014. 89 p. (in Russian).
24. Novozhilov V. V., Chernykh K. F., Mikhaylovskiy E. I. *Lineynaya teoriya tonkikh obolochek* [Linear theory of thin shells]. Leningrad, Politekhnik, 1991. 656 p. (in Russian).
25. Goldstein H., Poole Ch., Safko J. *Classical mechanics*. Addison Wesley, 2002. 638 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1975. 415 p.).
26. Mikhlin S. G. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variation methods in mathematical physics]. 2nd ed. rev. and suppl. Moscow, Nauka, 1970. 512 p. (in Russian).
27. Leko V. K., Mazurin O. V. *Svoystva kvartseвого стекла* [Properties of the fused quartz glass]. Leningrad, Nauka, 1985. 165 p. (in Russian).
28. Shevchenko S. A., Konotopov O. I. The dynamic characteristics of a resonator of the gyroscope based on elastic waves in solids: Finite-element modeling. *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*, 2021, vol. 14, iss. 2, pp. 65–80. <https://doi.org/10.18721/JPM.14206>

Поступила в редакцию / Received 13.05.2023

Принята к публикации / Accepted 15.01.2024

Опубликована / Published 29.11.2024

ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 619–628

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 619–628

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-619-628>

EDN: HLJKIS

Научная статья

УДК 004.891

Методы машинного обучения в задаче оценки риска мошенничества в автостраховании

И. А. Воробьев

Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова НИУ «Высшая школа экономики», Россия, 123458, г. Москва, ул. Таллинская, д. 34

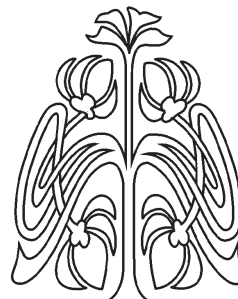
Воробьев Иван Александрович, аспирант кафедры компьютерной безопасности, vorobyev-ivan@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2886-6813>

Аннотация. Оценка уровня мошенничества в автостраховании представляет собой актуальную и сложную задачу, что обусловлено деятельностью мошеннических групп. Для уверенности менеджмента страховых компаний в стратегии противодействия мошенничеству необходим инструмент, позволяющий оценить текущее состояние портфеля претензий. Современные методы машинного обучения позволяют проводить такую оценку, используя данные о страхователях и страховых случаях. При применении данных подходов возникает ряд проблем, не позволяющих достичь необходимого качества выявления мошенничества. К ним можно отнести дисбаланс классов и так называемый дрейф концепции (concept drift), возникающий вследствие изменения сценариев схем мошенников и субъективности экспертной оценки конкретного страхового случая. В настоящем исследовании предлагается подход, позволяющий улучшить метрики моделей для выявления мошенничества в портфеле претензий. Численный эксперимент на двух открытых наборах данных показал прирост полноты выявления страхового мошенничества на 49 п.п. и 19 п.п. в сравнении с классическим моделированием.

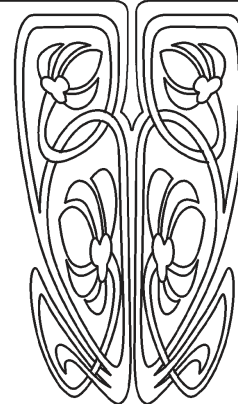
Ключевые слова: оценка риска, выявление мошенничества, страховые претензии, машинное обучение, дрейф концепции, дисбаланс классов

Для цитирования: Воробьев И. А. Методы машинного обучения в задаче оценки риска мошенничества в автостраховании // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 619–628. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-619-628>, EDN: HLJKIS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Научный
отдел





ML methods for assessing the risk of fraud in auto insurance

I. A. Vorobyev

HSE Moscow Institute of Electronics and Mathematics, 34 Tallinskaya St., Moscow 123458, Russia

Ivan A. Vorobyev, vorobyev-ivan@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2886-6813>

Abstract. The car insurance fraud level assessment is an urgent and complex task, which is largely due to the activities of fraudulent groups. For the confident management of insurance companies in the anti-fraud strategy, a tool to assess the current state of the claim's portfolio is needed. Modern machine learning methods make it possible to carry out such an assessment using data on policyholders and insurance cases. When applying these approaches, a number of problems arise that do not allow achieving the required quality of fraud detection. These include class imbalance and the so-called concept drift, which arises as a result of changes in the scenarios of fraudsters' schemes and the subjectivity of the expert assessment of a specific insurance case. This study proposes an approach to improve model metrics for detecting fraud in a claims portfolio. A numerical experiment conducted on two open data sets demonstrated a significant improvement in the detection rate of insurance fraud compared to classical modeling. Specifically, there was an increase in the completeness of fraud detection by 49 and 19 percentage points for the two datasets, respectively.

Keywords: risk assessment, fraud detection, insurance claims, machine learning, concept drift, class imbalance

For citation: Vorobyev I. A. ML methods for assessing the risk of fraud in auto insurance. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 619–628 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-619-628>, EDN: HLJKIS

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Развитие технологий хранения и обработки данных способствовало распространению методов машинного обучения (ML) в различных областях, включая сферы, где требуется принятие решений. Благодаря накопленным массивам информации появилась возможность сделать переход от экспертных подходов к автоматизированным, основанным на данных. При этом основным инструментом в таких задачах стали модели классификации, извлекающие закономерности из наборов данных.

Для улучшения качества классификации используются различные подходы, которые зависят от области применения, объема данных, наличия разметки у объектов классификации, дисбаланса классов и других факторов. Сообщество ученых разработаны доступные инструменты (например, открытая библиотека машинного обучения [scikit-learn](https://scikit-learn.org/) (<https://scikit-learn.org/>)), облегчающие решение типовых проблем, с помощью которых исследователи достигают значительных результатов в задачах принятия решений.

Тем не менее определенные бизнес-процессы требуют индивидуального подхода к внедрению методов машинного обучения в них. В настоящем исследовании предлагается улучшить качество классификации путем корректировки разметки данных с использованием нейронной сети в тех наборах данных, где маркировка целевого класса проводится экспертами. Новизна такого подхода заключается в том, что улучшение классификации достигается не усложнением методов ML, а вследствие повышения качества входных данных для обучения, в которых высока вероятность наличия некорректной экспертной оценки или присутствия экземпляров, не рассмотренных экспертами.

Одной из областей, где в последние годы методы машинного обучения дали возможность решить ряд проблем, является обнаружение мошенничества в автостраховании [1]. Однако



повышение эффективности классификации в этой сфере остается актуальной проблемой. В связи с этим тестирование применимости предлагаемого подхода проведено на наборах данных о страховом мошенничестве.

По данным Всероссийского союза страховщиков (<https://ins-union.ru/>), в течение года страховые компании подают в суд более 8000 исковых заявлений, а сумма выплат мошенникам составляет около 0.5% от общего объема выплат по претензиям страхователей. Это существенно влияет на процесс формирования тарифов и в конечном счете отражается на законопослушных клиентах.

Традиционно процесс выявления мошеннических претензий состоит из анализа истории участников и сравнения полученных результатов с рассматриваемым страховым случаем [2]. В результате эксперт принимает решение по претензии о наличии признаков страхового мошенничества. Накопление таких вердиктов также является ценной информацией и в будущем может рассматриваться как разметка для применения методов машинного обучения с учителем.

С другой стороны, сотрудники страховых компаний могут иметь собственные предубеждения в части определения признаков мошенничества. Например, эксперты, имеющие интерес к риску мошенничества, могут оценить одну и ту же претензию по-разному. С течением времени в попытках обойти фрод-мониторинг меняется и поведение мошенников, при этом, согласно индустриальному опросу (<https://www.friss.com/insight/insurance-fraud-report-2022/>), реакция экспертов не всегда успевает за изменениями. Поэтому претензия, размеченная как легитимная, на деле может оказаться мошеннической, а вследствие незнания новой схемы эксперт допускает ошибку. По этим причинам в данных о мошенничестве может возникнуть так называемый *concept drift* [3], что приводит к неустойчивости моделей машинного обучения во времени.

Предлагаемый подход вносит вклад в исследования, посвященные выявлению мошенничества в автостраховании, и сосредоточен на повышении качества классификации моделей машинного обучения, применяемых к претензиям страхователей. Основной особенностью данной задачи является дисбаланс классов — поиск мошенничества схож с поиском иголки в стоге сена, что накладывает определенные ограничения на использование моделей классификации. В отличие от других работ из данной области (например, [4]), где проблема дисбаланса класса решается традиционными техниками (*Undersampling*, *Oversampling*, *SMOTE* и др.), в настоящем исследовании проводится корректировка целевого класса с помощью нейронной сети, что позволяет сбалансировать данные для использования методов машинного обучения совместно с устранением проблемы «*concept drift*». При этом предполагается снижение размерности пространства признаков исходного набора данных с сохранением метрик качества выявления мошенничества. Вследствие снижения достигается интерпретируемость принятого решения по претензии, что решает проблему нехватки бизнес-контекста в антифрод системах, рассмотренную, например, в финансовой сфере [5].

В данной статье:

- 1) представлен новый подход, который позволяет улучшить разделяющую способность классификатора путем повышения качества данных для обучения;
- 2) продемонстрировано, что использование нейронной сети для корректировки экспертной разметки позволяет решить проблемы дисбаланса классов и «*concept drift*», что приводит к улучшению качества классификации;
- 3) предлагаемый подход рассмотрен в задаче выявления мошенничества в автостраховании;
- 4) проведен численный эксперимент на двух открытых наборах данных с разметкой мошеннических претензий, который подтверждает эффективность предложенного подхода.

1. Область исследования

Рассматривается процесс страховой компании, в котором снижается риск мошенничества со стороны страхователей. Первой преградой для мошенников является проверка клиента



перед заключением договора страхования. Помимо актуарных расчетов страховщик может обратиться к внутренним черным или белым спискам, внешним источникам данных о клиенте (например, кредитной истории), применить модели оценки риска мошенничества со стороны страхователя. Такие процедуры напрямую влияют на страховщика — удлиняют процесс продажи полиса, ухудшая клиентский опыт, а ложные отказы снижают уровень сбора страховой премии. Эти факты заставляют страховые компании упрощать и автоматизировать проверки на данном этапе. В таком случае менеджмент компании ориентируется на точность выявления мошенничества, что позволяет профессиональным мошенникам проникать в страховой портфель.

Далее страховщик анализирует заявленные претензии и при выявлении признаков страхового мошенничества отказывает в выплате. На данном этапе применяются как экспертные методы оценки со стороны службы безопасности страховщика, так и техники с использованием методов машинного обучения. Положительный эффект дает совмещение работы эксперта и систем, позволяющих оценивать претензии с помощью анализа данных и социальных сетей. В текущем процессе страховая компания ориентируется на полноту выявления мошенничества, чтобы остановить уже проявившего себя профессионального мошенника и снизить его влияние на показатель убыточности портфеля.

В данном исследовании предлагается метод повышения качества оценки риска мошенничества в автостраховании с использованием машинного обучения при выплате претензии.

2. Методы и алгоритм оценки риска

Оценка претензии на риск мошенничества методами машинного обучения осуществляется с помощью исторических данных. Каждая претензия обладает своим признаковым описанием и, если она обрабатывалась экспертом, имеет ответ на вопрос о наличии в ней мошенничества со стороны страхователя. Тогда задачу выявления мошенничества можно свести к задаче обучения по прецедентам [6]. В частности, будем рассматривать задачу классификации с двумя непересекающимися классами. При этом найденная решающая функция (далее — модель или классификатор) будет использоваться для оценки конкретной претензии на риск мошенничества с помощью ее признакового описания (далее — признаки).

Для оценки результатов эксперимента выбраны традиционно используемые в задачах выявления мошенничества метрики:

$$Recall = \frac{TP}{(TP + FN)}, \quad Precision = \frac{TP}{(TP + FP)},$$

где TP (True positive) — мошенническая претензия идентифицирована корректно, FP (False positive) — легитимная претензия идентифицирована как мошенническая, TN (True negative) — легитимная претензия идентифицирована корректно, FN (False negative) — мошенническая претензия идентифицирована как легитимная.

Recall (полнота) позволит оценить долю мошенничества, выявленную классификатором по отношению ко всем мошенническим претензиям; Precision (точность) — вероятность того, что подозреваемая классификатором претензия действительно мошенническая.

Также для сравнения моделей и прироста качества выявления мошенничества будет использоваться ROC кривая [7]. Увеличение площади под кривой ROC (AUC) будет выступать в качестве меры улучшения построенного классификатора.

Открытые наборы данных автострахования, пригодные для исследования с точки зрения машинного обучения и с размеченными случаями мошенничества, встречаются крайне редко [8]. Один из них — широко известный и используемый в различных исследованиях «carclaims.txt». В нем содержатся страховые случаи, зарегистрированные в США за период с 1994 по 1996 гг. [9].

Также для демонстрации применимости подхода на различных страховых данных рассмотрен файл «insurance_claims.csv» (<https://www.kaggle.com/datasets/bunttyshah/auto-insurance-claims-data/>), в котором содержатся претензии за период с января по февраль 2015 г.



Для целей данного исследования выбраны признаки, приведенные в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Описание признаков претензий для оценки мошеннической составляющей
Description of claims characteristics for assessing the fraudulent component

Набор данных	Название признака	Описание
«carclaims.txt»	Age	Возраст страхователя
	DriverRating	Рейтинг водителя
	Gender	Пол страхователя
	BasePolicy	Тип полиса
	Fault	Виновная сторона
	NumberOfSuppliments	Количество доп. опций
	PastNumberOfClaims	Количество страховых случаев
	VehiclePrice	Стоимость автомобиля
	AgeOfPolicyHolder	Возраст страхователя
«insurance_claims.csv»	age	Возраст страхователя
	policy_annual_premium	Страховая премия
	insured_sex	Пол страхователя
	total_claim_amount	Сумма претензии
	incident_severity	Серьезность страхового случая

Такой малочисленный состав признаков выбран с целью сохранения применимости предложенного подхода для оценки мошеннической составляющей в различных портфелях претензий страховых компаний. Данный набор признаков можно получить из анкетных данных страхователей и претензий при урегулировании страхового случая. Категориальные признаки в экспериментах были закодированы в числовые по принципу one-hot (<https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.preprocessing.OneHotEncoder.html/>).

Набор данных «carclaims.txt» состоит из 15 420 записей, из которых 14 497 являются легитимными претензиями, а 923 (6.0%) — с признаками страхового мошенничества. Размер «insurance_claims.csv» составляет 1000 записей, из которых 247 — мошеннические (24.7%). Претензии можно выстроить в хронологическом порядке по тому, как они поступали в страховую компанию, поэтому качество модели предлагается проверять на более поздних данных, так называемой out-of-time выборке.

Рассмотрим следующий процесс моделирования для снижения дисбаланса классов и решения проблемы «concept drift»:

- 1) набор данных разбивается на четыре части из разных временных периодов;
- 2) более ранняя часть (D_{init}) предназначена для обучения модели M_L , с помощью которой будет корректироваться экспертная оценка;
- 3) следующая по времени (D_{train}) используется для обучения модели M_S предлагаемым подходом на переразмеченном наборе данных, а также для обучения базовой модели M_B , с которой будет сравниваться результат эксперимента;
- 4) следующая часть ($D_{control_1}$) предназначена для поиска точек отсечения (TH_{fraud} , $TH_{legitimate}$) модели M_L , в зависимости от значений которых будет приниматься решение о корректировке разметки в D_{train} ;
- 5) наконец на выборке $D_{control_2}$ будет проводиться валидация результатов.

Разбиение данных и классификаторы для оценки претензий схематично представлены на рис. 1.

В табл. 2 приведены используемые параметры и ссылки на описание моделей, примененных в процессе обучения.

Выбор Random Forest и нейронной сети в качестве классификатора обусловлен исследованием [10], в котором показано сравнение основных методов машинного обучения в задачах выявления мошенничества в автостраховании. Для получения лучших параметров моделей использовался широко известный подход кросс-валидации, в частности GridSearchCV

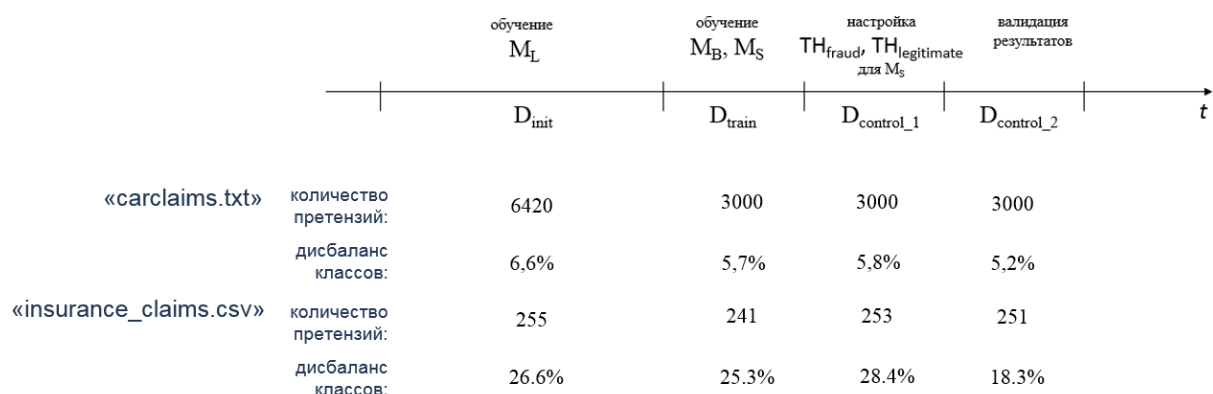


Рис. 1. Применение предлагаемого подхода на наборах данных претензий автострахования

Fig. 1. Application of the proposed approach on automobile insurance claims datasets

Таблица 2 / Table 2

Используемые в процессе обучения классификаторы

Classifiers used in the training process

Название	Классификатор	Параметры	Ссылка на описание
Multilayer perceptron	M_L	«carclaims.txt»: <i>hidden_layer_sizes</i> = (10), <i>solver</i> = 'lbfgs' «insurance_claims.csv»: <i>hidden_layer_sizes</i> = (2), <i>solver</i> = 'lbfgs', <i>activation</i> = 'relu'	https://scikit-learn.org/stable/modules/neural_networks_supervised.html (дата обращения: 22.09.2023)
Random Forest Classifier	M_B	«carclaims.txt»: <i>class_weight</i> = {0 : 1, 1 : 1}, <i>criterion</i> = 'entropy', <i>n_estimators</i> = 5 «insurance_claims.csv»: <i>class_weight</i> = {0 : 1, 1 : 1}, <i>criterion</i> = 'entropy', <i>n_estimators</i> = 2, <i>max_depth</i> = 3	https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.ensemble.RandomForestClassifier.html (дата обращения: 22.09.2023)
	M_S	«carclaims.txt»: <i>class_weight</i> = {0 : 1, 1 : 3}, <i>criterion</i> = 'entropy', <i>n_estimators</i> = 5 «insurance_claims.csv»: <i>class_weight</i> = {0 : 1, 1 : 1}, <i>criterion</i> = 'entropy', <i>n_estimators</i> = 2, <i>max_depth</i> = 3	

(https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.model_selection.GridSearchCV.html/) при оптимизации метрики roc_auc .

Экспериментально с помощью измерения качества классификации на $D_{\text{control_1}}$ подобраны значения TH_{fraud} , $TH_{\text{legitimate}}$:

а) для набора данных «carclaims.txt»: $TH_{\text{fraud}} = 0.75$; $TH_{\text{legitimate}} = 0.1$;



б) для «insurance_claims.csv»: $TH_{fraud} = 0.8$; $TH_{legitimate} = 0.05$.

После этого претензии в D_{train} были переразмечены следующим образом:

- 1) если результат оценки (вероятность отнесение к мошенничеству) претензии с помощью M_L больше TH_{fraud} , то она переразмечается как мошенническая;
- 2) если результат оценки менее $TH_{legitimate}$, то претензия переразмечается как легитимная;
- 3) в остальных случаях разметка претензии не подвергается изменению.

Данная корректировка классов улучшила баланс в D_{train} до 36.3% в наборе данных «carclaims.txt» и до 35.8% в «insurance_claims.csv». Далее проведено обучение M_B на данных D_{train} до корректировки классов и M_S на данных D_{train} после корректировки.

Этапы проведенного эксперимента схематично показаны на рис. 2.

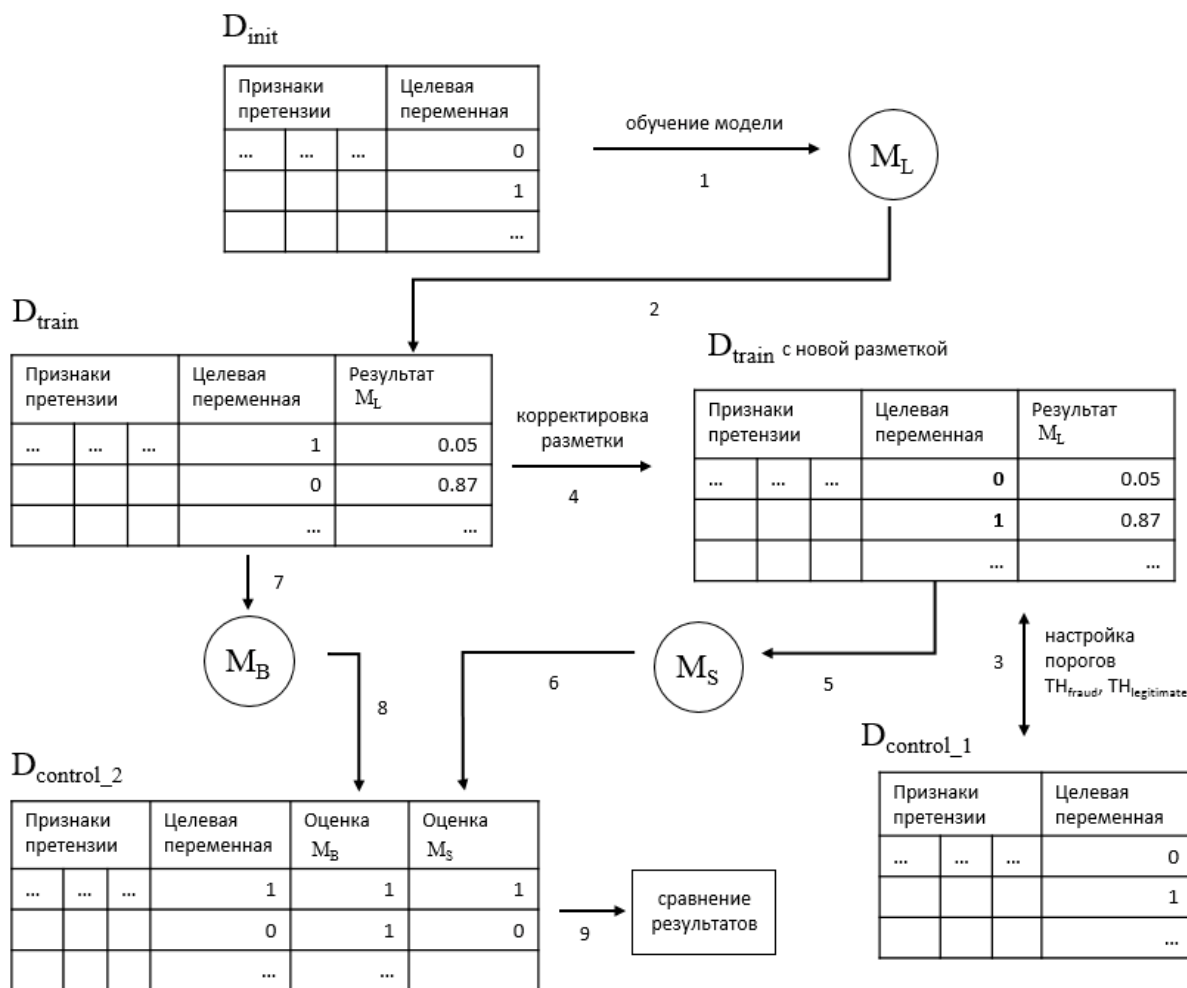


Рис. 2. Этапы проведения эксперимента
Fig. 2. Stages of conducting an experiment

3. Результаты эксперимента

Полученные модели M_B и M_S применены в выборке $D_{control_2}$, которая никаким образом не участвовала в обучении классификаторов или настройке параметров и является более поздней по времени с точки зрения появления претензии у страховщика. Также в данной выборке разметка не подвергалась корректировке. На рис. 3 представлены ROC кривые для этих моделей.

Значения площадей под данными кривыми (AUC) показывает значительно лучшее качество классификации для предложенного подхода в сравнении с традиционным обучением без

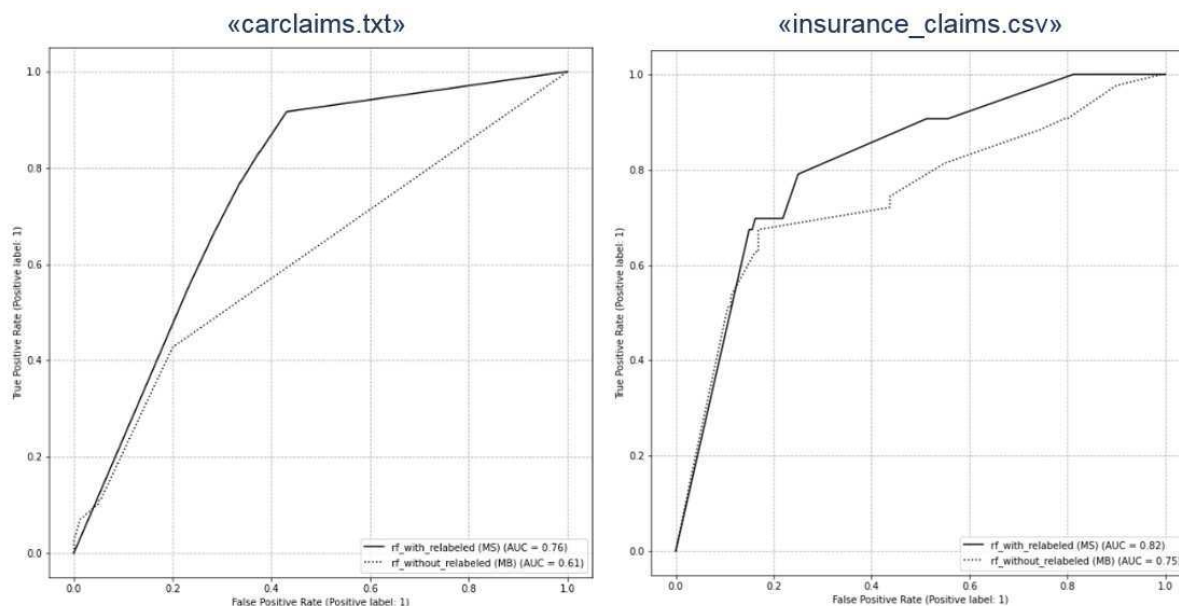


Рис. 3. Сравнение ROC кривых для моделей M_B и M_S
Fig. 3. Comparison of ROC curves for M_B and M_S models

корректировки разметки. В табл. 3 также приведены значения Recall при фиксированной точности для сравнения моделей.

Таблица 3 / Table 3

Сравнение метрик качества выявления мошенничества
Comparison of fraud detection quality metrics

Набор данных	Метрика	Предложенный подход, M_S	Традиционный подход, M_B
«carclaims.txt»	ROC AUC	0.76	0.61
	Precision	0.10	0.10
	Recall	0.92	0.43
«insurance_claims.csv»	ROC AUC	0.82	0.75
	Precision	0.55	0.55
	Recall	0.70	0.51

Заключение

В настоящей работе исследована возможность корректировки экспертной разметки данных с помощью нейронной сети для дальнейшего применения методов машинного обучения. Прирост эффективности выявления мошенничества в данном случае подтвержден приростом основных метрик качества классификации. Для иллюстрации эффективности использованы два открытых набора данных о страховом мошенничестве.

Предложенный подход позволяет решить проблемы дисбаланса классов и «concept drift» за счет добавления в обучение мошеннических кейсов, ошибочно помеченных экспертами как легитимные.

На следующем этапе исследования предполагается расширить область применения данного подхода на оценку риска мошенничества в банковских операциях, где также существует проблема некачественной разметки данных.

Список литературы

1. Bao Y., Hilary G., Ke B. Artificial intelligence and fraud detection // Innovative technology at the interface of finance and operations / ed. by V. Babich, J. R. Birge, G. Hilary. Cham :



- Springer, 2022. P. 223–247. (Springer Series in Supply Chain Management, vol. 11). https://doi.org/10.1007/978-3-030-75729-8_8
2. Subelj L., Furlan S., Bajec M. An expert system for detecting automobile insurance fraud using social network analysis // *Expert Systems with Applications*. 2011. Vol. 38, iss. 1. P. 1039–1052. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.07.143>
 3. Jin C., Feng Y., Li F. Concept drift detection based on decision distribution in inconsistent information system // *Knowledge-Based Systems*. 2023. Vol. 279. Art. 110934. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2023.110934>
 4. Gupta P., Varshney A., Khan M., Ahmed R., Shuaib M., Alam S. Unbalanced credit card fraud detection data: A machine learning-oriented comparative study of balancing techniques // *Procedia Computer Science*. 2023. Vol. 218. P. 2575–2584. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2023.01.231>
 5. Pant P., Srivastava P. Cost-sensitive model evaluation approach for financial fraud detection system // 2021 Second International Conference on Electronics and Sustainable Communication Systems (ICESC). Coimbatore, India, 2021. P. 1606–1611. <https://doi.org/10.1109/ICESC51422.2021.9532741>
 6. Воронцов К. В. Математические методы обучения по прецедентам (теория обучения машин) // «Машинное обучение», курс лекций. 2011. 141 с. URL: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/6/6d/Voron-ML-1.pdf> (дата обращения: 22.09.2023).
 7. Fawcett T. An introduction to ROC analysis // *Pattern Recognition Letters*, 2006. Vol. 27, iss. 8. P. 861–874. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2005.10.010>
 8. Subudhi S., Panigrahi S. Use of optimized Fuzzy C-Means clustering and supervised classifiers for automobile insurance fraud detection // *Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences*. 2020. Vol. 32, iss. 5. P. 568–575. <https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2017.09.010>
 9. Phua C., Alahakoon D. Minority report in fraud detection: Classification of skewed data // *ACM SIGKDD Explorations Newsletter*. 2004. Vol. 6, iss. 1. P. 50–59. <https://doi.org/10.1145/1007730.1007738>
 10. Itri B., Mohamed Y., Mohamed Q., Omar B. Performance comparative study of machine learning algorithms for automobile insurance fraud detection // 2019 Third International Conference on Intelligent Computing in Data Sciences (ICDS). Marrakech, Moroko, 2019. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/ICDS47004.2019.8942277>

References

1. Bao Y., Hilary G., Ke B. Artificial intelligence and fraud detection. In: Babich V., Birge J. R., Hilary G. (eds.) *Innovative technology at the interface of finance and operations*. Springer Series in Supply Chain Management, vol. 11. Cham, Springer, 2022, pp. 223–247. https://doi.org/10.1007/978-3-030-75729-8_8
2. Subelj L., Furlan S., Bajec M. An expert system for detecting automobile insurance fraud using social network analysis. *Expert Systems with Applications*, 2011, vol. 38, iss. 1, pp. 1039–1052. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.07.143>
3. Jin C., Feng Y., Li F. Concept drift detection based on decision distribution in inconsistent information system. *Knowledge-Based Systems*, 2023, vol. 279, art. 110934. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2023.110934>
4. Gupta P., Varshney A., Khan M., Ahmed R., Shuaib M., Alam S. Unbalanced credit card fraud detection data: A machine learning-oriented comparative study of balancing techniques. *Procedia Computer Science*, 2023, vol. 218, pp. 2575–2584. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2023.01.231>
5. Pant P., Srivastava P. Cost-sensitive model evaluation approach for financial fraud detection system. *2021 Second International Conference on Electronics and Sustainable Communication Systems (ICESC)*. Coimbatore, India, 2021, pp. 1606–1611. <https://doi.org/10.1109/ICESC51422.2021.9532741>
6. Voroncov K. V. Mathematical methods of learning from precedents (the theory of machine learning). “*Mashinnoe obuchenie*”, *kurs lektsiy* [“Machine Learning”, course of lectures], 2011. 141 p. Available at: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/6/6d/Voron-ML-1.pdf> (accessed September 22, 2023) (in Russian).
7. Fawcett T. An introduction to ROC analysis. *Pattern Recognition Letters*, 2006, vol. 27, iss. 8, pp. 861–874. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2005.10.010>
8. Subudhi S., Panigrahi S. Use of optimized Fuzzy C-Means clustering and supervised classifiers for



- automobile insurance fraud detection. *Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences*, 2020, vol. 32, iss. 5, pp. 568–575. <https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2017.09.010>
9. Phua C., Alahakoon D. Minority report in fraud detection. *ACM SIGKDD Explorations Newsletter*, 2004, vol. 6, iss. 1, pp. 50–59. <https://doi.org/10.1145/1007730.1007738>
 10. Itri B., Mohamed Y., Mohamed Q., Omar B. Performance comparative study of machine learning algorithms for automobile insurance fraud detection. *2019 Third International Conference on Intelligent Computing in Data Sciences (ICDS)*. Marrakech, Moroko, 2019, pp. 1–4. <https://doi.org/10.1109/ICDS47004.2019.8942277>

Поступила в редакцию / Received 19.12.2023

Принята к публикации / Accepted 26.12.2023

Опубликована / Published 29.11.2024



ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)
Известия Саратовского университета. Новая серия.
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024.
Том 24, выпуск 4

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития
Серия: История. Международные отношения
Серия: Математика. Механика. Информатика

Серия: Науки о Земле
Серия: Социология. Политология
Серия: Физика
Серия: Филология. Журналистика
Серия: Философия. Психология. Педагогика
Серия: Химия. Биология. Экология
Серия: Экономика. Управление. Право

