

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2025

Том 25

Выпуск 1



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ

САРАТОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
Новая серия



Научный журнал
2025 Том 25

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издаётся с 2005 года

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 1

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Дудов С. И., Осипцев М. А. Об одном следствии чебышевского
альтернанса 4

Кайгородов Е. В. Хопфовы аддитивные группы колец 15

Krasnoschekikh G. V., Volchikov Vit. V. A uniqueness theorem
for mean periodic functions on the Bessel – Kingmann hypergroup
[Краснощеких Г. В., Волчков Вит. В. Теорема единственности
для периодических в среднем функций на гипергруппе
Бесселя – Кингмана] 24

Molchanov V. A., Farakhutdinov R. A. On structure of isomorphisms
of universal graphic automata [Молчанов В. А., Фарахутдинов Р. А.
О структуре изоморфизмов универсальных графовых автоматов] 34

Расулов К. М., Нагорная Т. Р. Об одном методе решения
задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций
в круговых областях 46

Соломатин Д. В. Ранги планарности многообразий полугрупп
нётеровых по уравнениям 53

Механика

Бурьян С. Н. Динамика парадоксального механизма
П. Л. Чебышёва 57

**Жильцов К. Н., Тырышкин И. М., Ищенко А. Н.,
Дьячковский А. С., Чупашев А. В.** Численное моделирование
гидродинамики обтекания тела в режиме суперкавитации 70

Кириллова И. В. Асимптотическая теория нестационарных
упругих волн в оболочках вращения при ударных торцевых
воздействиях изгибающего типа 80

Муслов С. А., Арутюнов С. Д., Сухочев П. Ю., Чижмаков Е. А.
Расчет параметров упругих и гиперупругих моделей кожи лица 91

Информатика

**Гамаюнова В. О., Богомолов А. С., Кушников В. А.,
Иващенко В. А.** Мультиагентное моделирование эвакуации
из помещений с учетом столкновений агентов 106

Ганигин С. Ю., Давыдов А. Н., Нечаев А. С., Киященко В. В.
Разработка и анализ алгоритма обнаружения множественных
экземпляров объекта на микроскопических изображениях
с использованием численных методов 116

Сергеева Н. В., Пагано М., Тананко И. Е., Станкевич Е. П.
Метод формирования оптимальной маршрутной матрицы сетей
массового обслуживания с групповым обслуживанием требований 128

Фонин А. А., Сучков С. Г., Николаевцев В. А.
Математические модели для обработки и интерпретации
сейсмических данных в новом методе сейсморефракции 140

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-76640 от 26 августа 2019 г.
Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1).
Журнал индексируется RSCI, Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017.
Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru).
Журнал выходит 4 раза в год.
Цена свободная.
Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Директор издательства

Бучко Ирина Юрьевна

Редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Редактор-стилист

Агафонов Андрей Петрович

Верстка

Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор

Каргин Игорь Анатольевич

Корректор

Агафонов Андрей Петрович

В оформлении издания использованы работы художника Соколова Дмитрия Валерьевича (13.11.1940–20.11.2023)

Адрес учредителя, издателя

и издательства (редакции):

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49,
52-26-89

E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 21.02.2025.

Подписано в свет 28.02.2025.

Выход в свет 28.02.2025.

Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 17,43 (18,75).

Тираж 100 экз. Заказ 7-Т

Отпечатано в типографии
Саратовского университета.

Адрес типографии:

410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2025



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

Dudov S. I., Osiptsev M. A. On one consequence of the Chebyshev alternance 4

Kaigorodov E. V. Hopfian additive groups of rings 15

Krasnoschekikh G. V., Volchikov Vit. V. A uniqueness theorem for mean periodic functions on the Bessel – Kingmann hypergroup 24

Molchanov V. A., Farakhutdinov R. A. On structure of isomorphisms of universal graphic automata 34

Rasulov K. M., Nagornaya T. R. A method for solving the Poincare boundary value problem for generalized harmonic functions in circular domains 46

Solomatin D. V. Planarity ranks for varieties of equationally noetherian semigroups 53

Mechanics

Burian S. N. Dynamics of P. L. Chebyshev's paradoxical mechanism 57

Zhiltsov K. N., Tyryshkin I. M., Ischenko A. N., Diachkovskii A. S., Tchupashev A. V. Numerical study of the hydrodynamics of supercavitation flow around an underwater body 70

Kirillova I. V. Asymptotic theory of the transient waves in shells of revolution at shock edge loading of the bending type 80

Muslov S. A., Arutyunov S. D., Sukhochev P. Yu., Chizhnikov E. A. Calculation of parameters of elastic and hyperelastic facial skin models 91

Computer Sciences

Gamayunova V. O., Bogomolov A. S., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A. Multi-agent modeling of evacuation from premises with consideration of agent collisions 106

Ganigin S. Yu., Davydov A. N., Nechaev A. S., Kiyashchenko V. V. Development and analysis of an algorithm for detecting multiple instances of an object in microscopic images using numerical methods 116

Sergeeva N. V., Pagano M., Tananko I. E., Stankevich E. P. A novel method for generating the optimal routing matrix of queuing networks with batch service 128

Fonin A. A., Suchkov S. G., Nikolayevtsev V. A. Mathematical models for processing and interpreting seismic data in a new seismic survey method 140

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный, Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Шалыто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

August P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezhnikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

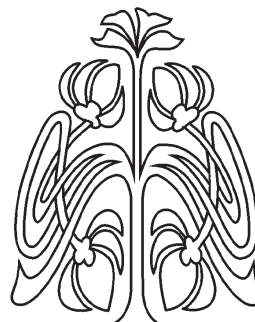
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

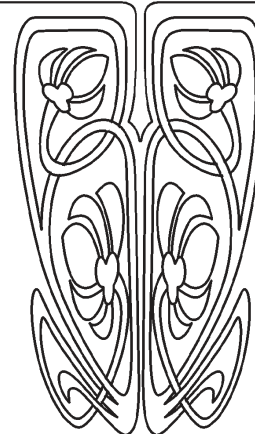
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**





МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 4–14

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 4–14

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-4-14>

EDN: BELGZJ

Научная статья

УДК 517.2+519.853

Об одном следствии чебышевского альтернанса

С. И. Дудов, М. А. Осипцев[✉]

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Дудов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и математической экономики, DudovSI@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0098-3652>, SPIN: 9937-8404, AuthorID: 3409

Осипцев Михаил Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Osipcevm@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-1051-0250>, SPIN: 5249-2944, AuthorID: 13323

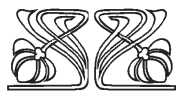
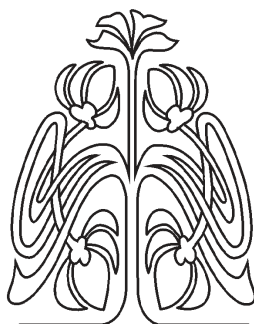
Аннотация. Рассматривается классическая задача наилучшего приближения непрерывной функции полиномом по чебышевской системе функций. Известно, что решение задачи характеризуется альтернансом. Кроме того, имеет место линейная функция роста отклонения целевой функции коэффициентов полинома от ее минимального значения относительно отклонения вектора коэффициентов от оптимального. С помощью средств выпуклого анализа получена формула точного коэффициента этого линейного роста. В отличие от полученных ранее, она выражена в конструктивной для реализации форме через значения функций чебышевской системы в точках, реализующих альтернанс.

Ключевые слова: наилучшее приближение, чебышевская система функций, альтернанс, константа сильной единственности, субдифференциал, острый минимум

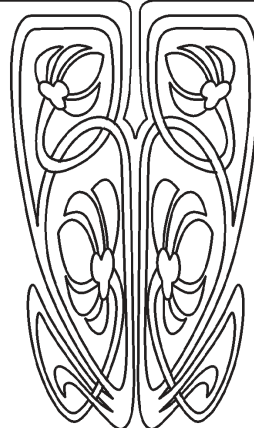
Благодарности: Авторы выражают глубокую признательность рецензенту за конструктивные замечания и М. В. Балашову за указанные на относящиеся к рассматриваемой теме работы.

Для цитирования: Дудов С. И., Осипцев М. А. Об одном следствии чебышевского альтернанса // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 4–14. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-4-14>, EDN: BELGZJ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Научный
отдел





Article

On one consequence of the Chebyshev alternance

S. I. Dudov, M. A. Osipcev✉

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Sergei I. Dudov, DudovSI@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0098-3652>, SPIN: 9937-8404, AuthorID: 3409

Mikhail A. Osipcev, Osipcevm@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-1051-0250>, SPIN: 5249-2944, AuthorID: 13323

Abstract. The classical problem of the best approximation of a continuous function by a polynomial over a Chebyshev system of functions is considered. It is known that the solution of the problem is characterized by alternance. In addition, there is a linear growth function of the deviation of the target function of the coefficients of the polynomial from its minimum value with respect to the deviation of the vector of coefficients from the optimal one. In this article, the formula for the exact coefficient of this linear growth function is obtained by means of convex analysis. In contrast to those obtained earlier, it is expressed in a form constructive for realization through the values of the Chebyshev system functions at the points realizing alternance.

Keywords: best approximation, Chebyshev system of functions, alternance, strong uniqueness constant, subdifferential, sharp minimum

Acknowledgements: The authors express their deep gratitude to the reviewer for constructive comments and to M. V. Balashov for the works related to the topic under consideration.

For citation: Dudov S. I., Osipcev M. A. On one consequence of the Chebyshev alternance. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 4–14 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-4-14>, EDN: BELGZJ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В работе [1] получен результат, количественно характеризующий единственность элемента наилучшего приближения в общей задаче равномерного на компакте приближения непрерывной функции конечномерным чебышевским подпространством. Для его формулировки примем обозначения.

Пусть T — компакт, $C(T)$ — пространство непрерывных на T вещественных функций с нормой $\|f\|_C = \max_{t \in T} |f(t)|$. Напомним, что подпространство $\Psi \subset C(T)$ называется чебышевским, если для любой функции $f \in C(T)$ существует и единствен элемент наилучшего приближения $\psi^* \in \Psi$, т. е. на котором $\|f - \psi^*\|_C = \min_{\psi \in \Psi} \|f - \psi\|$.

Интересующий нас результат можно выразить в следующем виде. Пусть $\Psi \subset C(T)$ — конечномерное чебышевское подпространство. Тогда для любой функции $f \in C(T)$ элемент наилучшего приближения $\psi^* \in \Psi$ является единственным, причем существует такая константа $k > 0$, зависящая от f и Ψ , что

$$\|f - \psi\|_C - \|f - \psi^*\|_C \geq k \|\psi - \psi^*\|_C, \quad \forall \psi \in \Psi. \quad (1)$$

Это свойство стали называть сильной единственностью решения. А наибольшую константу $k = k(f)$, для которой выполняется (1), называют константой сильной единственности, соответствующей функции f . Для произвольного конечномерного чебышевского пространства Ψ и $f \in C(T) \setminus \Psi$ получена формула [2, 3]

$$k(f) = \min_{\substack{\psi \in \Psi \\ \|\psi\|_C = 1}} \max_{t \in H(f)} \sigma_f(t) \psi(t), \quad (2)$$

где $H(f) = \{t \in T : |f(t) - \psi^*(t)| = \|f - \psi^*\|_C\}$, $\sigma_f(t) = \text{sign}(f(t) - \psi^*(t))$.



Однако, как отмечалось и подробно анализировалось в [4], этот эффект сильной единственности элемента наилучшего приближения в неявном виде уже присутствовал в статье Н. Г. Чеботарева [5] (см. также [6]), опубликованной на 20 лет ранее [1]. Обратимся к ней. В ней рассматривается минимаксная задача

$$\Phi(A) = \max_{x \in X} f(x, A) \rightarrow \inf_{A \in D}, \quad (3)$$

где X — компакт в $\mathbb{R}^k$, D — область в $\mathbb{R}^n$, а функция $f(x, A)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по компонентам вектора A на $X \times D$. Основным результатом [5] являлось достаточное условие локального по направлениям строгого минимума функции $\Phi(A)$ в точке A_0 , т. е. когда неравенство $\Phi(A) > \Phi(A_0)$ выполняется на пересечении прямой, проходящей через точку A_0 , с некоторой ее окрестностью. Автор [4] указывает на то, что используя это достаточное условие Н. Г. Чеботарева можно:

1) доказать существование $\beta > 0$ и $\epsilon > 0$ таких, что

$$\Phi(A) > \Phi(A_0) + \beta \|A - A_0\|, \quad \forall A \in D, \quad \|A - A_0\| < \epsilon, \quad (4)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма на $\mathbb{R}^n$;

2) доказать, что при дополнительном предположении выпуклости функционала $\Phi(A)$ на $\mathbb{R}^n$ и $D = \mathbb{R}^n$ имеет место

$$\Phi(A) \geq \Phi(A_0) + \lambda \|A - A_0\|, \quad \forall A \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

где

$$\lambda = \inf_{\|g\|=1} \max_{x \in R(A_0)} \langle f'_A(x, A_0), g \rangle > 0, \quad (6)$$

$$R(A) = \{x \in X : f(x, A) = \Phi(A)\},$$

а $f'_A(x, A)$ — градиент функции $f(x, A)$ по A ;

3) интерпретируя задачу из [1] как задачу вида (3), получить оценку (1), (2).

Отметим также, что сам Н. Г. Чеботарев демонстрировал выполнимость своего достаточного условия на примере задачи приближения непрерывной функции алгебраическими полиномами заданной степени.

Тем не менее формальное неравенства вида (1), (4) или (5) в работе Н. Г. Чеботарева отсутствуют.

В настоящей статье мы рассматриваем задачу о равномерном на компакте наилучшем приближении непрерывной функции обобщенным полиномом по заданной чебышевской системе функций. С помощью средств выпуклого анализа дадим строгое доказательство сильной единственности элемента наилучшего приближения в форме (5) с получением точной константы сильной единственности. Она будет выражена в конструктивной для реализации формуле через значения функций, образующих чебышевскую систему, в точках реализации альтернанса.

1. Вспомогательный факт

В основе получения искомого коэффициента скорости роста лежит излагаемый ниже вспомогательный факт.

Примем следующие обозначения: $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$ — система непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций; $\{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}}$ — система точек (узлов) на $\mathbb{R}$, $0_n = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение; $B(0_n, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в 0_n ; $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$; $P_n(A, t) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(t)$ — обобщенный



полином по системе $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$; $\text{co } G$ — выпуклая оболочка множества G ;

$$D = \begin{pmatrix} -\varphi_0(t_0) & \varphi_0(t_1) & \dots & (-1)^{n+1}\varphi_0(t_{n+1}) \\ -\varphi_1(t_0) & \varphi_1(t_1) & \dots & (-1)^{n+1}\varphi_1(t_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\varphi_n(t_0) & \varphi_n(t_1) & \dots & (-1)^{n+1}\varphi_n(t_{n+1}) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма. Если $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$ чебышевская система функций на отрезке $[a, b]$ и $\{t_i\}_{i=\overline{0,n+1}} \subset [a, b]$, причем $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$, то:

1) матрица D невырождена и обратная к ней матрица $C = (c_{i,j})_{i,j=\overline{1,n+2}}$ имеет последний столбец с положительными элементами $c_{k,n+2} > 0$, $k = \overline{1, n+2}$;

2) выполняется включение

$$B(0_{n+1}, \delta_0) \subset \text{co}\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) : j = \overline{0, n+1}\}, \quad (7)$$

где

$$\delta_0 = \min_{k=\overline{1,n+2}} \frac{c_{k,n+2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} c_{k,j}^2}}. \quad (8)$$

Доказательство. 1. Раскладывая определитель матрицы D по элементам последней строки, мы получаем $n+2$ слагаемых одного знака, поскольку $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$ — чебышевская система [7, гл. 1, § 1].

2. Теперь покажем, что

$$0_{n+1} \in \text{co}\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) : j = \overline{0, n+1}\}. \quad (9)$$

Предположим противное. Тогда, по теореме отделимости (см., например, [8]), существует вектор $A \in \mathbb{R}^{n+1}$, $A \neq 0_{n+1}$, для которого

$$\langle A, v \rangle < 0, \quad \forall v \in \text{co}\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) : j = \overline{0, n+1}\}.$$

Следовательно, и

$$\langle A, (-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) \rangle = (-1)^j P_n(A, t_j) < 0, \quad j = \overline{0, n+1}.$$

Таким образом, полином $P_n(A, t)$ последовательно $n+1$ раз меняет знак и $n+1$ раз принимает нулевые значения на $[t_0, t_{n+1}] \subset [a, b]$. Это противоречит тому, что $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$ чебышевская система.

3. Теперь покажем, что все элементы последнего столбца матрицы $C = D^{-1}$ положительны.

Из (9), в соответствии с определением выпуклой оболочки, следует существование набора чисел $\{\alpha_j\}_{j=\overline{0,n+1}} : \alpha_j \geq 0$, для которого

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j (-1)^j (\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) = 0_{n+1}, \\ \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Как и в [9, гл. 6, § 8, п. 2], покажем, что все $\alpha_j > 0$. Предположим, например, что $\alpha_{n+1} = 0$. Тогда, с одной стороны, из (10) вытекает

$$\sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j (-1)^j \langle A, (\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) \rangle = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j (-1)^j P_n(A, t_j) = 0 \quad (11)$$

для любого вектора коэффициентов $A \in \mathbb{R}^{n+1}$.



С другой стороны, поскольку $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$ — чебышевская система, то в линейной по A системе уравнений

$$P_n(A, t_j) = y_j, \quad j = \overline{0, n},$$

определитель отличен от нуля [10, гл. 1, § 2, теорема 1], и относительно A система имеет единственное решение. Тогда возьмем в качестве $y_j = \alpha_j(-1)^j$, $j = \overline{0, n}$ и подставим в (11).

Получим $\sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j^2 = 0$, что противоречит (10).

Итак, мы доказали, что решение системы (10)

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) > 0_{n+2}. \quad (12)$$

Но система (10) может быть записана в виде

$$D\alpha = \begin{pmatrix} 0_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Поэтому, учитывая невырожденность матрицы D , из (12), (13) получаем

$$\alpha = C \begin{pmatrix} 0_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \{c_{1,n+2}, c_{2,n+2}, \dots, c_{n+2,n+2}\}' > 0_{n+2}.$$

4. Рассмотрим уравнение

$$D\alpha = \begin{pmatrix} \delta b \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $b = (b_1, b_2, \dots, b_{n+1}) \in B(0_{n+1}, 1)$. Его решение можно записать в виде $\alpha(\delta) = (\alpha_0(\delta), \alpha_1(\delta), \dots, \alpha_{n+1}(\delta))$:

$$\alpha_k(\delta) = \delta \sum_{j=1}^{n+1} c_{k+1,j} b_j + c_{k+1,n+2}, \quad k = \overline{0, n+1}.$$

Отсюда, учитывая

$$\min_{b \in B(0_{n+1}, 1)} \sum_{j=1}^{n+1} c_{k+1,j} b_j = - \left(\sum_{j=1}^{n+1} c_{k+1,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

следует $\alpha(\delta) \geq 0_{n+2}$ при $\delta \in (0, \delta_0]$. Это и означает (ср. (10) и (13)), что любой элемент из $B(0_{n+1}, \delta_0)$ представим в виде выпуклой комбинации элементов множества $\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) : j = \overline{0, n+1}\}$, т.е. включение (7) тем самым доказано. $\square$

Замечание 1. Из доказательства, по сути, следует, что определенное формулой (8) значение δ_0 есть радиус наибольшего евклидова шара с центром в 0_{n+1} , вложенного в многогранник $M = co\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) : j = \overline{0, n+1}\}$.

2. Основной результат

Пусть $f(t)$ — непрерывная на множестве $T \subset \mathbb{R}$ функция, $|T| \geq n+2$. Рассматриваем задачу

$$\Phi(A) \equiv \max_{t \in T} |f(t) - P_n(A, t)| \rightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} \quad (15)$$

равномерного на T приближения функции $f(t)$ обобщенным полиномом. Далее считаем, что $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$ чебышевская на T система функций.



Теорема 1. Пусть на векторе коэффициентов A^* функция $\Phi(A)$ достигает минимума на $\mathbb{R}^{n+1}$, и при этом альтернанс реализуется на системе точек $\{t_j\}_{j=\overline{0, n+1}} \subset T : t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$:

$$\begin{aligned}\Phi(A^*) &= |f(t_j) - P_n(A^*, t_j)|, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f(t_j) - P_n(A^*, t_j) &= P_n(A^*, t_{j+1}) - f(t_{j+1}), \quad j = \overline{0, n},\end{aligned}$$

и, кроме того, $[t_0, t_{n+1}] \subset T$. Тогда для любого $A \in \mathbb{R}^{n+1}$ выполняется неравенство

$$\Phi(A) - \Phi(A^*) \geq \delta_0 \|A - A^*\|, \quad (16)$$

где $\delta_0 > 0$ определяется формулой (8).

Доказательство. Используя известный факт из субдифференциального исчисления для выпуклых функций (см. [8, гл. 2, § 3, теорема 3.14]), формулу субдифференциала выпуклой на $\mathbb{R}^{n+1}$ функции $\Phi(A)$ можно записать в форме

$$\partial\Phi(A) = co\{\xi(t)(\phi_0(t), \dots, \phi_n(t)) : t \in R(A)\}. \quad (17)$$

Здесь $R(A) = \{t \in T : \Phi(A) = |f(t) - P_n(A, t)|\}$, а функция $\xi(\cdot)$ определена на $R(A)$ так:

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi(A) = P_n(A, t) - f(t), \\ -1, & \text{если } \Phi(A) = f(t) - P_n(A, t). \end{cases}$$

Поскольку по условию точки $\{t_j\}_{j=\overline{0, n+1}}$ реализуют альтернанс для вектора коэффициентов A^* , то

$$\{t_j\}_{j=\overline{0, n+1}} \subset R(A^*), \quad \xi(t_j) = -\xi(t_{j+1}), \quad j = \overline{0, n}.$$

Это, учитывая (17) и считая для определенности $\xi(t_0) = 1$, означает

$$co\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) : j = \overline{0, n+1}\} \subset \partial\Phi(A^*).$$

Отсюда, используя лемму, получаем

$$B(0_{n+1}, \delta_0) \subset \partial\Phi(A^*). \quad (18)$$

В соответствии с определением субдифференциала (см. [8, гл. 2]) выполняется неравенство

$$\Phi(A) - \Phi(A^*) \geq \langle v, A - A^* \rangle, \quad \forall v \in \partial\Phi(A^*), \quad A \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (19)$$

Теперь, используя (18) и подставляя в (19) в качестве

$$v = \delta_0 \frac{A - A^*}{\|A - A^*\|} \in B(0_{n+1}, \delta_0),$$

получаем оценку (16) роста функции $\Phi(A)$ в зависимости от отклонения A от A^* . $\square$

Замечание 2. Оценка (16) является точной в том смысле, что заменить в ней δ_0 на некоторое большее значение нельзя.

Действительно, как уже отмечалось (замечание 1), шар $B(0_{n+1}, \delta_0)$ является наибольшим из шаров с центром в 0_{n+1} вложенных в многогранник $M = co\{(-1)^j(\varphi_0(t_j), \dots, \varphi_n(t_j)) : j = \overline{0, n+1}\}$. Если $R(A^*) = \{t_j\}_{j=\overline{0, n+1}}$, то $\partial\Phi(A^*) = M$. Пусть v_0 — точка касания этого шара с гранью этого многогранника, а значит, $\delta_0 = \|v_0\|$. Из этого следует (см. [8, гл. 2, § 3, теорема 3.5])

$$\Phi'(A^*, v_0) \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\Phi(A^* + \alpha v_0) - \Phi(A^*)}{\alpha} = \max_{v \in \partial F(A^*)} \langle v, v_0 \rangle = \|v_0\|^2. \quad (20)$$



С другой стороны, если предположить, что существует $\delta_1 > \delta_0$, для которого

$$\Phi(A) - \Phi(A^*) \geq \delta_1 \|A - A^*\|, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n+1},$$

то для $A = A^* + \alpha v_0$ имеем

$$\Phi(A^* + \alpha v_0) - \Phi(A^*) \geq \alpha \delta_1 \|v_0\|.$$

Отсюда следует $\Phi'(A^*, v_0) \geq \delta_1 \|v_0\|$, что противоречит (20).

Кроме того, неравенство (16) говорит об «остром» минимуме функции $\Phi(\cdot)$ в точке A^* (см. [11]).

Замечание 3. Одна из эквивалентных форм записи достаточного условия локального решения задачи (3) у Н. Г. Чеботарева выглядит как принадлежность нуля внутренности выпуклой оболочки градиентов функции $f(x, A)$ по A для $x \in R(A)$. Ввиду вышеизложенного лемма отвечает на вопрос: с какой именно по размеру окрестности нуль содержится в этой выпуклой оболочке для задачи (15).

Замечание 4. Для применения численных методов решения к задаче (15) интерес представляет следующее.

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда справедлива следующая оценка для производной функции $\Phi(A)$ по направлению наискорейшего спуска в любой точке $A \in \mathbb{R}^{n+1}$, $A \neq A^*$,

$$\min_{\substack{g \in \mathbb{R}^{n+1} \\ \|g\|=1}} \Phi'(A, g) \leq -\delta_0.$$

Доказательство. В силу выпуклости $\Phi(A)$ имеем

$$\Phi((1 - \alpha)A + \alpha A^*) \leq (1 - \alpha)\Phi(A) + \alpha\Phi(A^*), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Перепишем неравенство в форме

$$\Phi(A + \alpha(A^* - A)) - \Phi(A) \leq \alpha(\Phi(A^*) - \Phi(A)).$$

Отсюда, используя неравенство (16), получаем $\Phi'(A, g) \leq -\delta_0$ для $g = \frac{A^* - A}{\|A^* - A\|}$. $\square$

3. Сравнение оценок

3.1. Очевидно, задача (15) является частным случаем задачи (3). Приведем сравнение коэффициентов λ из (6) и δ_0 из (16) (см. (8)).

Поскольку градиент $f'_A(x, A^*)$ в задаче (3) для задачи (15) при замене x на t и для $t \in R(A^*)$ примет вид $f'_A(t, A^*) = \xi(t)(\varphi_0(t), \dots, \varphi_n(t))$, то, учитывая (17), имеем

$$\max_{t \in R(A^*)} \langle f'_A(t, A^*), g \rangle = \max_{v \in \text{co}\{f'_A(t, A^*) : t \in R(A^*)\}} \langle v, g \rangle = \max_{v \in \partial\Phi(A^*)} \langle v, g \rangle.$$

Следовательно, для задачи (15) формула (6) коэффициента λ принимает вид

$$\lambda = \inf_{\|g\|=1} \max_{v \in \partial\Phi(A^*)} \langle v, g \rangle. \quad (21)$$

В [12, гл. 1, § 6] фактически доказано, что если $\delta > 0$ и D — некоторый выпуклый компакт из $\mathbb{R}^{n+1}$, то эквивалентны соотношения

$$B(0_{n+1}, \delta) \subset D, \quad (22)$$

$$\max_{v \in D} \langle v, g \rangle \geq \delta, \quad \forall g \in \mathbb{R}^{n+1} : \|g\| = 1. \quad (23)$$



Как следует из леммы, для системы точек $\{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}} \subset T$, на которой реализуется альтернанс, выполняется

$$\{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}} \subset R(A^*),$$

$$B(0_{n+1}, \delta_0) \subset \text{co}\{\xi(t)(\varphi_0(t), \dots, \varphi_n(t)) : t \in \{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}}\} \subset \partial\Phi(A^*).$$

Отсюда, учитывая (21), эквивалентность соотношений (22) и (23), получаем $\lambda \geq \delta_0$. Равенство $\lambda = \delta_0$, очевидно, будет выполняться, если $R(A^*) = \{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}}$.

3.2. Проведем сравнение оценок линейного роста приращения целевой функции (1) и (16) на следующем примере. Пусть $f(t) = t^2$ — приближаемая функция на $T = [-1, 1]$, $n = 1$, $\{\varphi_0(t) = 1, \varphi_1(t) = t\}$ — чебышевская на T система функций, $P_1(A, t) = a_0 + a_1 t$, $A = (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$. Рассматриваем задачу

$$\Phi(A) \equiv \max_{t \in [-1, 1]} |t^2 - a_0 - a_1 t| \rightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^2}.$$

1. Нетрудно убедиться, что оптимальным является вектор коэффициентов $A^* = (0.5, 0)$, т.е. $a_0^* = 0.5$, $a_1^* = 0$. При этом $R(A^*) = \{t_0, t_1, t_2\}$, где $t_0 = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Для $f(t, A) = |t^2 - a_0 - a_1 t|$ получаем $f'_A(t_0, A^*) = (-1, 1)$, $f'_A(t_1, A^*) = (1, 0)$, $f'_A(t_2, A^*) = (-1, -1)$, и тогда $\partial\Phi(A^*) = \text{co}\{(-1, 1), (1, 0), (-1, -1)\}$. Следовательно, максимальный радиус круга, содержащегося в $\partial\Phi(A^*)$ и с центром в 0_2 , равен $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Таким образом, $\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. Теперь найдем $k(f)$ по формуле (2).

Нетрудно видеть, что

$$\{A : \max_{t \in [-1, 1]} |a_0 + a_1 t| = 1\} = \{(a_0, a_1) : a_0 \in [-1, 1], a_1 = -1 + |a_0| \text{ или } a_1 = 1 - |a_0|\}.$$

Тогда, учитывая $\sigma_f(t_i) = (-1)^{i+1}$, $i = 0, 1, 2$, получаем

$$k(f) = \min_{a_0 \in [-1, 1]} \max_{i=0,1,2} \{(-1)^{i+1}(a_0 + (|a_0| - 1)t_i), (-1)^{i+1}(a_0 + (1 - |a_0|)t_i)\} =$$

$$= \min_{a_0 \in [-1, 1]} \max\{a_0, 1 - a_0 - |a_0|, -1 - a_0 + |a_0|\} = \frac{1}{3}.$$

3. Таким образом, в соответствии с (2) и (16) имеем

$$\Phi(A) - \Phi(A^*) \geq \frac{1}{3} \max_{t \in [-1, 1]} |a_0 - \frac{1}{2} + a_1 t| \equiv f_1(A), \quad (24)$$

$$\Phi(A) - \Phi(A^*) \geq \frac{1}{\sqrt{5}} ((a_0 - \frac{1}{2})^2 + a_1^2)^{\frac{1}{2}} \equiv f_2(A). \quad (25)$$

Для сравнения $f_1(A)$ и $f_2(A)$ рассмотрим некоторые варианты.

Вариант 1. Для $A_1(\alpha) = (0.5, \alpha)$, $\alpha > 0$ имеем

$$f_1(A_1(\alpha)) = \frac{\alpha}{3} < f_2(A_1(\alpha)) = \frac{\alpha}{\sqrt{5}},$$

$$\Phi(A_1(\alpha)) - \Phi(A^*) = \max_{t \in [-1, 1]} |t^2 - 0.5 - \alpha t| - 0.5 = \alpha \text{ при } \alpha \in [0, 2].$$

Вариант 2. Для $A_2(\alpha) = (0.5 + \alpha, \alpha)$, $\alpha > 0$ получаем

$$f_1(A_2(\alpha)) = \frac{1}{3} \max_{t \in [-1, 1]} |\alpha + \alpha t| = \frac{2}{3} \alpha, f_2(A_2(\alpha)) = \sqrt{\frac{2}{5}} \alpha.$$

При этом для $\alpha \in [0, 2]$

$$\Phi(A_2(\alpha)) - \Phi(A^*) = \max_{t \in [-1, 1]} |t^2 - 0.5 - \alpha - \alpha t| - 0.5 = \max\{|2\alpha - 0.5|, |\alpha + \frac{\alpha^2}{4} + 0.5|\} - 0.5 > \alpha.$$



Таким образом, при $\alpha \in [0, 2]$ теперь $f_1(A_2(\alpha)) > f_2(A_2(\alpha))$, а неравенства (24) и (25) выполняются так же строго, как и в первом варианте.

Вариант 3. Для $A_3(\alpha) = (0.5 + \alpha, 2\alpha)$ имеем

$$f_1(A_3(\alpha)) = \frac{1}{3} \max_{t \in [-1, 1]} |\alpha + 2\alpha t| = \alpha, f_2(A_3(\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^2 + 4\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha.$$

При этом для $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \Phi(A_3(\alpha)) - \Phi(A^*) &= \max_{t \in [-1, 1]} |t^2 - 0.5 - \alpha - 2\alpha t| - 0.5 = \max_{t = -1, 1, \alpha} |t^2 - 0.5 - \alpha - 2\alpha t| - 0.5 = \\ &= \max\{|0.5 + \alpha|, |0.5 - 3\alpha|, |0.5 + \alpha + \alpha^2|\} - 0.5. \end{aligned}$$

Итак, в этом случае $f_1(A_3(\alpha)) = f_2(A_3(\alpha)) = \alpha$ и при $\alpha \in [0, \frac{1}{6}]$ $\Phi(A_3(\alpha)) - \Phi(A^*) = \alpha + \alpha^2$, т.е. оценки (24) и (25) становятся точными при малом $\alpha > 0$.

4. Об оценке снизу коэффициента роста

Для применения численных методов решения и оценки скорости их сходимости полезно располагать оценкой снизу для δ_0 . Эта оценка будет зависеть как от используемой чебышевской системы функций $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0, n}}$, так и от системы узлов, на которой реализуется альтернанс. При получении этой оценки можно иметь в виду следующие обстоятельства. Обозначим через

$$D(\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0, n}}, \{t_j\}_{j=\overline{0, n}}) = \begin{pmatrix} \varphi_0(t_0) & \dots & \varphi_0(t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n(t_0) & \dots & \varphi_n(t_n) \end{pmatrix}.$$

В [10, гл. 1, § 2, следствие теоремы 1] доказан следующий факт.

Предложение 1. Если система функций $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0, n}}$ является чебышевской на $[a, b]$ и $\{t_j\}_{j=\overline{0, n}}$ — система различных точек из $[a, b]$, расстояние между которыми не меньше некоторого $\Delta > 0$, то

$$|D(\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0, n}}, \{t_j\}_{j=\overline{0, n}})| \geq r(\Delta) > 0,$$

где $r(\Delta)$ не зависит от системы точек $\{t_j\}_{j=\overline{0, n}}$ из $[a, b]$.

Из этого предложения, считая $T \subset [a, b]$, следует оценка для элементов последнего столбца матрицы $C = D^{-1}$.

$$c_{k, n+2} = \frac{|D(\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0, n}}, \{t_j\}_{j=\overline{0, n+1}} \setminus t_{k-1})|}{|D|} \geq \frac{r(\Delta)}{|D|}. \quad (26)$$

Для оценки знаменателя в формуле (8) имеем

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_{k, j}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} D_{jk}^2}{|D|^2}, \quad (27)$$

где D_{jk} — алгебраическое дополнение элемента $d_{k, j}$ матрицы D . Эти дополнения ограничены на $[a, b]$, в силу непрерывности функций образующих чебышевскую систему. Используя специфику этих функций, можно получить независимую от $\{t_j\}_{j=\overline{0, n}} \subset [a, b]$ оценку

$$\sum_{j=1}^{n+1} D_{jk}^2 \leq M^2. \quad (28)$$



Таким образом, из (27), (28) имеем

$$\delta_0 \geq \frac{r(\Delta)}{M}.$$

Приведем примеры реализации формулы (8) для «классической» чебышевской системы:

1) $n = 1$, $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=0,1} = \{1, t\}$, на системе узлов $\{t_0, t_1, t_2\}$

$$\delta_0 = \min \left\{ \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{4 + (t_1 + t_2)^2}}, 1, \frac{t_1 - t_0}{\sqrt{4 + (t_0 + t_1)^2}} \right\};$$

2) $n = 2$, $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=0,1,2} = \{1, t, t^2\}$, на системе узлов $\{t_0, t_1, t_2, t_3\}$

$$\delta_0 = \min \left\{ \frac{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}{\sqrt{4(t_1 - t_3)^2 + 4(t_1^2 - t_3^2)^2 + (t_1 - t_3)^2(t_2(t_3 - t_2) + t_1(t_2 + t_3))^2}}, \right. \\ \frac{(t_2 - t_0)(t_3 - t_0)(t_3 - t_2)}{\sqrt{4(t_0 - t_2)^2 + 4(t_0^2 - t_2^2)^2 + (t_2 t_3(t_3 - t_2) + t_0^2(t_2 + t_3) - t_0(t_2^2 + t_3^2))^2}}, \\ \frac{(t_1 - t_0)(t_3 - t_1)(t_3 - t_0)}{\sqrt{4(t_1 - t_3)^2 + 4(t_1^2 - t_3^2)^2 + (t_1 - t_3)^2(-t_0^2 + t_1 t_3 + t_0(t_1 + t_3))^2}}, \\ \left. \frac{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)}{\sqrt{4(t_0 - t_2)^2 + 4(t_0^2 - t_2^2)^2 + (t_0 - t_2)^2(t_1(-t_1 + t_2) + t_0(t_1 + t_2))^2}} \right\}.$$

В заключение отметим, что альтернанс (в некотором обобщенном виде) имеет место в задачах по полиномиальным оценкам и приближении сегментных функций (см. [13–16]), где также могут быть получены оценки роста целевой функции, подобные оценке (16).

Список литературы

1. *Newman D. J., Shapiro H. S.* Some theorems on Chebyshev approximation // *Duke Mathematical Journal*. 1963. Vol. 30, iss. 4. P. 673–681. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-63-03071-0>
2. *Cline A. K.* Lipschitz conditions on uniform approximation operators // *Journal of Approximation Theory*. 1973. Vol. 8, iss. 2. P. 160–172. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(73\)90025-7](https://doi.org/10.1016/0021-9045(73)90025-7)
3. *Bartelt M.* On Lipschitz conditions, strong unicity and a Theorem of A. K. Cline // *Journal of Approximation Theory*. 1975. Vol. 14, iss. 4. P. 245–250. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(75\)90072-6](https://doi.org/10.1016/0021-9045(75)90072-6)
4. *Маринов А. В.* О равномерных константах сильной единственности в чебышевских приближениях и основополагающих результатах Н. Г. Чеботарева // *Известия Российской академии наук. Серия математическая*. 2011. Т. 75, вып. 3. С. 161–188. <https://doi.org/10.4213/im4255>
5. *Чеботарев Н. Г.* Об одном критерии минимакса // *Доклады Академии наук СССР*. 1943. Т. 39, № 9. С. 373–376.
6. *Чеботарев Н. Г.* Собрание сочинений : в 2 т. Т. 2. Москва : Изд-во Академии наук СССР, 1949. 588 с.
7. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. Москва : Наука, 1976. 568 с.
8. *Пишечный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. Москва : Наука, 1980. 320 с.
9. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. Москва : Наука, 1972. 368 с.
10. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. Москва : Наука, 1977. 510 с.
11. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. Москва : Наука, 1983. 383 с.
12. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. Москва : Наука, 1981. 384 с.
13. *Выгодчикова И. Ю., Дудов С. И., Сорина Е. В.* Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2009. Т. 49, № 7. С. 1175–1183.



14. Дудов С. И., Сорина Е. В. Равномерная оценка сегментной функции полиномиальной полосой фиксированной ширины // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 11. С. 1981–1994.
15. Дудов С. И., Сорина Е. В. Равномерная оценка сегментной функции полиномиальной полосой // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 5. С. 44–71.
16. Волосивец С. С., Дудов С. И., Прохоров Д. В., Хромова Г. В. Новые методы аппроксимации и оптимизации в задачах действительного и комплексного анализа. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2016. 296 с. EDN: XSCTLV

References

1. Newman D. J., Shapiro H. S. Some theorems on Cebyshev approximation. *Duke Mathematical Journal*, 1963, vol. 30, iss. 4, pp. 673–681. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-63-03071-0>
2. Cline A. K. Lipschitz conditions on uniform approximation operators. *Journal of Approximation Theory*, 1973, vol. 8, iss. 2, pp. 160–172. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(73\)90025-7](https://doi.org/10.1016/0021-9045(73)90025-7)
3. Bartelt M. On Lipschitz conditions, strong unicity and a theorem of A. K. Cline. *Journal of Approximation Theory*, 1975, vol. 14, iss. 4, pp. 245–250. [https://doi.org/10.1016/0021-9045\(75\)90072-6](https://doi.org/10.1016/0021-9045(75)90072-6)
4. Marinov A. V. On uniform constants of strong uniqueness in Chebyshev approximations and fundamental results of N. G. Chebotarev. *Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, iss. 3, pp. 603–630. <https://doi.org/10.1070/IM2011v075n03ABEH002546>
5. Cebotarev N. G. On a general criterion of the minimax. *Doklady Academy of Science URSS*, 1943, vol. 39, iss. 9, pp. 373–376 (in Russian).
6. Chebotarev N. G. *Sobranie socineniy* [Collected works]. Vol. 2. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ., 1949. 588 p. (in Russian).
7. Karlin S., Studden W. J. *Tchebycheff systems: With applications in analysis and statistics*. Interscience Publishers, 1966. 586 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1976. 568 p.).
8. Pshenichnyy B. N. *Vypuklyy analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow, Nauka, 1980. 320 p. (in Russian).
9. Dem'yanov V. F., Malozemov V. N. Introduction to minimax. New York, Dover Publications, 1990. 307 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1972. 368 p.).
10. Dzyadyk V. K. *Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsiy polinomami* [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. Moscow, Nauka, 1977. 510 p. (in Russian).
11. Polyak B. T. *Introduction to optimization*. New York, Optimization Software, Inc., Publications Division, 1987. 438 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1983. 383 p.).
12. Dem'yanov V. F., Vasiliev L. V. *Nondifferentiable optimization*. New York, Springer-Optimization Software, 1985. 452 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1981. 384 p.).
13. Vygodchikova I. Yu., Dudov S. I., Sorina E. V. External estimation of a segment function by a polynomial strip. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, iss. 7, pp. 1119–1127. <https://doi.org/10.1134/S0965542509070057>
14. Dudov S. I., Sorina E. V. Uniform estimation of a segment function by a polynomial strip of fixed width. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, iss. 11, pp. 1864–1877. <https://doi.org/10.1134/S0965542511110066>
15. Dudov S. I., Sorina E. V. Uniform estimate for a segment function in terms of a polynomial strip. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2013, vol. 24, iss. 5, pp. 723–742. <https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2013-01262-3>
16. Volosivets S. S., Dudov S. I., Prokhorov D. V., Khromova G. V. *Novye metody approksimatsii i optimizatsii v zadachakh deystvitel'nogo i kompleksnogo analiza* [New methods of approximation and optimization in the problems of real and complex analysis]. Saratov, Saratov State University Publ., 2016. 296 p. (in Russian). EDN: XSCTLV

Поступила в редакцию / Received 23.01.2023

Принята к публикации / Accepted 02.09.2024

Опубликована / Published 28.02.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 15–23

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 15–23
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-15-23>, EDN: CCBE OV

Научная статья
УДК 512.541

Хопфовы аддитивные группы колец

Е. В. Кайгородов

Горно-Алтайский государственный университет, Россия, 649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1

Кайгородов Евгений Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики, заведующий научно-исследовательской лабораторией алгебры и математических методов в естественных науках, gazetaintegral@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5172-5915>, SPIN: 1353-4138, AuthorID: 762359

Аннотация. Группа называется хопфовой, если она не изоморфна никакой своей собственной фактор-группе, или любой ее эпиморфизм на себя является изоморфизмом, т. е. автоморфизмом. Это свойство было впервые доказано швейцарским математиком Х. Хопфом для фундаментальных групп римановых поверхностей. Результаты настоящей работы концентрируются вокруг проблемы исследования общих свойств хопфовых абелевых групп и описания хопфовых групп в некоторых классах абелевых групп. Среди вопросов, связанных с хопфовыми абелевыми группами, важное место занимает вопрос об изучении свойства хопфовости в таком специфическом классе абелевых групп, как аддитивные группы колец. Аддитивные группы колец — одна из линий, связывающих теорию абелевых групп с теорией колец. По методам исследования и характеру результатов это новое направление, возникшее в середине прошлого века, традиционно относят к теории абелевых групп. При рассмотрении аддитивных групп конкретных классов колец возникают интересные примеры хопфовых абелевых групп. В работе изучается свойство хопфовости в аддитивных группах E -колец (называющихся также E -группами) и артиновых колец. Доказывается, что аддитивная группа E -кольца является хопфовой, а также дается полное описание строения хопфовых аддитивных групп артиновых колец.

Ключевые слова: абелева группа, хопфова группа, аддитивная группа кольца, E -кольцо, артиново кольцо

Для цитирования: Кайгородов Е. В. Хопфовы аддитивные группы колец // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 15–23. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-15-23>, EDN: CCBE OV

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Hopfian additive groups of rings

E. V. Kaigorodov

Gorno-Altai State University, 1 Lenkin St., Gorno-Altai 649000, Russia

Evgeniy V. Kaigorodov, gazetaintegral@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5172-5915>, SPIN: 1353-4138, AuthorID: 762359

Abstract. A group is called Hopfian if it is not isomorphic to any of its proper factor groups, or, equivalently, any of its epimorphisms on itself is an isomorphism, i.e., an automorphism. This property was first proved by the Swiss mathematician H. Hopf for fundamental groups of Riemann surfaces. The



results of the present paper concentrate around the problem of investigating general properties of Hopfian abelian groups and describing Hopfian groups in certain classes of abelian groups. Among the questions relating to Hopfian abelian groups, the study of the hopficity property in such a specific class of abelian groups as additive groups of rings occupies an important place. Additive groups of rings are one of the directions of research connecting the theory of abelian groups with the theory of rings. With regards to the methods of investigation and the nature of the results, this newly emerged direction, which appeared in the middle of the last century, is traditionally referred to the theory of abelian groups. When considering additive groups of particular classes of rings, some interesting examples of Hopfian abelian groups arise. The paper studies the hopficity in additive groups of E -rings (also called E -groups) and artinian rings. The work, in particular, proves that the additive group of an E -ring is Hopfian, and also gives a full description of how Hopfian additive groups of artinian rings are structured.

Keywords: abelian group, Hopfian group, additive group of ring, E -ring, artinian ring

For citation: Kaigorodov E. V. Hopfian additive groups of rings. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 15–23 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-15-23>, EDN: CCBE OV

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Вопрос о существовании групп с конечным числом образующих, изоморфных какой-нибудь своей собственной факторгруппе, поставленный швейцарским математиком Хайнцем Хопфом в 1932 г., носит ныне название *проблемы Хопфа* [1]. Чуть позже группы, удовлетворяющие противоположному условию (т. е. не изоморфные никакой собственной факторгруппе) стали называться *хопфовыми*. Прошедшие девяносто лет породили множество связанных с проблемой Хопфа вопросов и распространили ее на прочие известные алгебраические системы. Нельзя не отметить, что арсенал последних в настоящее время постоянно расширяется: иные зарождаются в самой алгебре, а некоторые появляются в других разделах математики, например, в связи с потребностями геометрии, математической логики, дискретной математики. Часто новые типы алгебраических систем приходят из физики, химии, криптографии.

На наш взгляд, именно актуальные проблемы криптографии побуждают сейчас специалистов задумываться над конструированием новых алгебраических систем с заданными свойствами, на основе которых будут разработаны криптосистемы для постквантовой криптографии. Так, в декабре 2022 г. группа китайских ученых нашла способ [2] взломать 2048-битный ключ криптосистемы RSA, используя квантовый компьютер всего с 372 кубитами. Это обстоятельство дает мощный толчок к ускорению алгебраических исследований в области постквантовой криптографии: крайне необходимо, чтобы таковая была построена и уверенно получала развитие к моменту квантового взлома. Поэтому изучение алгебраических систем, их свойств и отображений в настоящее время приобретает значительную важность.

Хопфовость представляет собой довольно экзотическое свойство алгебраической системы, которое в определенном смысле приближает ее к конечной. Следуя Курошу [1] и Гретцеру [3], можно сказать, что хопфовость является некоторым обобщением конечности. Исследования, посвященные хопфовым алгебраическим системам и другим, граничным с хопфовостью, свойствам алгебраических систем, весьма многочисленны и содержательны. Однако, хопфовы абелевы группы представлены в обозримой литературе слабо. Изучением таких групп занимались Баумслаг [4–6], Корнер [7], Ирвин и Такаши [8, 9], Голдсмит и Гонг [10–13], Паолини и Шелах [14].

Настоящая работа продолжает исследования автора по хопфовым абелевым группам [15, 16]. Все обозначения и терминология в тексте работы стандартны и согласуются с [17, 18]. Всюду далее слово «группа» означает аддитивно записанную абелеву группу. Буква p обозначает простое число. Используем символ $\mathbb{Q}_p^*$ для обозначения кольца целых p -адических чисел и J_p — для группы целых p -адических чисел, являющейся аддитивной группой кольца $\mathbb{Q}_p^*$.



1. Основные определения и вспомогательные результаты

Определение 1. Группа называется *хопфовой*, если она не изоморфна никакой своей собственной факторгруппе.

Помимо такого определения, введенного самим Хопфом для групп (не обязательно абелевых), в ряде случаев удобнее пользоваться эквивалентным определением.

Определение 2. Группа называется *хопфовой*, если любой ее эпиморфизм на себя является автоморфизмом.

Теорема 1. Если $A = A_1 \oplus A_2$ и группа A является хопфовой, то группы A_1 и A_2 также хопфовы.

Доказательство. Пусть $A = A_1 \oplus A_2$ и A — хопфова группа. Предположим противное: пусть группа A_1 , например, не хопфова. Следовательно, существует эпиморфизм $\alpha_1: A_1 \rightarrow A_1$, у которого $\text{Ker } \alpha_1 \neq 0$. Зададим эпиморфизм $\alpha: A \rightarrow A$, полагая $\alpha(a) = \alpha_1(a_1) + id_{A_2}(a_2)$ для любого $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$. Имеем: $\alpha(a) = \alpha(a_1 + a_2) = \alpha_1(a_1) + id_{A_2}(a_2) = \alpha_1(a_1) + a_2$. Очевидно, α — эпиморфизм, однако $\text{Ker } \alpha = \text{Ker } \alpha_1 \neq 0$. Получили противоречие с хопфовостью группы A , а значит, группы A_1 и A_2 хопфовы. $\square$

Несложно показать, что теорема 1 обобщается на случай, когда количество прямых слагаемых в разложении группы A более 2 и даже бесконечно.

Следствие 1. Пусть A_i — семейство групп, $i \in I$, где I — произвольное индексное множество, и пусть группа $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ является хопфовой. Тогда все группы A_i также хопфовы.

Как неожиданно показал Корнер [7], утверждение, обратное к теореме 1, в общем случае неверно. На вопрос о том, допускает ли обращение эта теорема при каких-то ограничениях на прямые слагаемые, отвечает

Теорема 2. Если $A = A_1 \oplus A_2$, где группы A_1 и A_2 являются хопфовыми, и по крайней мере одна из них вполне характеристична в группе A , то группа A также хопфова.

Доказательство. Пусть для определенности прямое слагаемое A_1 вполне характеристично в группе A . Рассмотрим некоторый эпиморфизм $\alpha: A \rightarrow A$. Его можно представить в виде матрицы $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, где $\alpha_{11} \in E(A_1)$, $\alpha_{22} \in E(A_2)$ и $\alpha_{12} \in \text{Hom}(A_2, A_1)$. Вначале докажем, что эндоморфизм $\alpha_{22}: A_2 \rightarrow A_2$ является автоморфизмом. Возьмем произвольный элемент $a_2 \in A_2$. Поскольку α — эпиморфизм, то в группе A существует такой элемент $b = b_1 + b_2$, где $b_1 \in A_1$ и $b_2 \in A_2$, что $\alpha(b) = a_2$. Действие эндоморфизма α на элементе b запишется в виде умножения матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ на матрицу-столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Итак, $\alpha(b) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(b_1) + \alpha_{12}(b_2) \\ \alpha_{22}(b_2) \end{pmatrix}$. Вместе с тем $\alpha(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$, откуда $\alpha_{22}(b_2) = a_2$. Поэтому α_{22} — эпиморфизм, а так как группа A_2 хопфова, то α_{22} — автоморфизм.

Осталось показать, что отображение α_{11} тоже является автоморфизмом. Произвольно выберем элемент $a_1 \in A_1$. Сюръективность эндоморфизма α гарантирует существование в группе A такого элемента $c = c_1 + c_2$, где $c_1 \in A_1$ и $c_2 \in A_2$, что $\alpha(c) = a_1$. Имеем: $\alpha(c) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(c_1) + \alpha_{12}(c_2) \\ \alpha_{22}(c_2) \end{pmatrix}$. Учитывая, что $\alpha(c) = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, получаем $\alpha_{11}(c_1) + \alpha_{12}(c_2) = a_1$ и $\alpha_{22}(c_2) = 0$. Другими словами, $c_2 \in \text{Ker } \alpha_{22}$, однако эндоморфизм α_{22} биективен, поэтому $c_2 = 0$. Получаем: $\alpha_{11}(c_1) = a_1$, откуда α_{11} — эпиморфизм. Группа A_1 хопфова, следовательно, α_{11} — автоморфизм группы A_1 . Поэтому матрица $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ обратима, а это значит, что α — автоморфизм, что доказывает хопфовость группы A . $\square$



Свойство вполне характеристичности позволяет дать необходимое и достаточное условие хопфовости прямой суммы любого числа групп.

Теорема 3. Пусть A_i — семейство групп, $i \in I$, где I — произвольное индексное множество, $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, причем все группы A_i вполне характеристичны в A . Тогда хопфовость группы A эквивалентна хопфовости каждого прямого слагаемого A_i .

Доказательство. Необходимость вытекает напрямую из следствия 1. Докажем теперь достаточность. Пусть все группы A_i являются хопфовыми и α — некоторый эпиморфизм группы A . Ограничения $\alpha_i: A_i \rightarrow A_i$ этого эпиморфизма на прямых слагаемых — тоже эпиморфизмы, но в силу хопфовости групп A_i — еще и автоморфизмы, поэтому α — автоморфизм. $\square$

Нам понадобится следующий простой факт.

Теорема 4. Если группа без кручения имеет конечный ранг, то она хопфова.

Доказательство. Пусть группа A без кручения имеет конечный ранг, а B — некоторая подгруппа группы A . Тогда имеет место равенство: $\text{rk}_0(A) = \text{rk}_0(B) + \text{rk}_0(A/B)$ [17, разд. 3.4, упражнение 3]. Если $A \cong A/B$, то факторгруппа A/B тоже является группой без кручения, откуда $\text{rk}(A) = \text{rk}(B) + \text{rk}(A/B)$. С другой стороны, $\text{rk}(A) = \text{rk}(A/B)$, поэтому $\text{rk}(B) = 0$. Тогда $B = 0$, что доказывает хопфовость группы A . $\square$

Докажем теперь две леммы, позволяющие построить достаточно обширный класс примеров нехопфовых групп.

Лемма 1. Прямая сумма бесконечного числа копий произвольной ненулевой группы является нехопфовой группой.

Доказательство. Пусть сначала число копий некоторой группы в прямом разложении счетно. Запишем прямое разложение в виде $A = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$, где все прямые слагаемые A_i изоморфны некоторой группе G . Построим эпиморфизм $\alpha: A \rightarrow A$, не являющийся автоморфизмом. Пусть он отображает A_1 в 0, а каждое прямое слагаемое A_i , где $i \geq 2$, изоморфно отображает на прямое слагаемое A_{i-1} . Ясно, что $\text{Ker } \alpha \neq 0$ и α — не автоморфизм, следовательно, группа A нехопфова.

Пусть теперь $A = \bigoplus_{i \in M} A_i$, где индексное множество M несчетно, а P — некоторое счетное подмножество множества M . Введем обозначения $N = M \setminus P$, $B = \bigoplus_{i \in P} A_i$, $C = \bigoplus_{k \in N} A_k$ и запишем группу A в виде прямой суммы «счетной» и «несчетной» компонент: $A = B \oplus C$. Если допустить, что группа A является хопфовой, то по теореме 1 группа B также будет хопфовой, но, как только что было доказано, это невозможно. $\square$

Лемма 2. Квазициклическая группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$ нехопфова.

Доказательство. Построим какой-нибудь эпиморфизм α квазициклической группы на себя, не являющийся автоморфизмом. Пусть, например, он действует как умножение на число p . Ясно, что $\text{Ker } \alpha \neq 0$, значит, α — не инъективен и группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$ нехопфова. $\square$

Дадим в следующей теореме полное описание строения хопфовых делимых групп. Это становится возможным сделать, поскольку строение делимых групп хорошо известно, и вообще, теория делимых групп настолько удовлетворительна, насколько это может быть при современном состоянии алгебры.

Теорема 5. Делимая группа хопфова, если и только если она представляет собой прямую сумму конечного числа копий рациональной группы.



Доказательство. Для всякой делимой группы D имеет место разложение $D = \bigoplus_p T_p \oplus E$, где T_p — прямая сумма групп $\mathbb{Z}(p^\infty)$, а E — прямая сумма групп $\mathbb{Q}$ [17, разд. 4.3, теорема 3.1]. Если группа D хопфова, то, применяя следствие 1, утверждаем хопфовость групп T_p и E . По лемме 2 имеем $T_p = 0$, поэтому $D = E$. Используя лемму 1, получаем, что E — прямая сумма конечного числа копий рациональной группы.

Обратное утверждение следует из теоремы 4. $\square$

Ответим теперь на вопрос о том, когда произвольная прямая сумма циклических групп является хопфовой группой.

Теорема 6. Прямая сумма $A = \bigoplus_{i \in M} A_{p_i} \oplus A_0$ циклических групп, где M — некоторое индексное множество, A_{p_i} — прямая сумма циклических p_i -групп, A_0 — прямая сумма циклических групп бесконечного порядка, хопфова тогда и только тогда, когда все группы A_{p_i} конечны, а группа A_0 имеет конечный ранг.

Доказательство. Из хопфовости группы A и следствия 1 вытекает хопфовость всех групп A_{p_i} и A_0 . Отсюда по лемме 1 A_0 — свободная группа конечного ранга. Покажем, что все группы A_{p_i} конечны. Если это не так, то в группе A_{p_i} можно выделить прямое слагаемое B , являющееся прямой суммой счетного числа циклических p_i -групп. Такая группа B нехопфова. В самом деле, запишем $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots$, где все B_i — циклические группы с неубывающими при возрастании значений индекса i порядками. Построим какой-нибудь эпиморфизм $\beta: B \rightarrow B$ с ненулевым ядром. Пусть β отображает B_1 в 0, а каждое прямое слагаемое B_i отображает на прямое слагаемое B_{i-1} , $i \geq 2$. Ясно, что $\text{Ker } \beta \neq 0$ и группа B нехопфова, что невозможно, так как группа A_{p_i} хопфова.

Обратно, пусть все группы A_{p_i} конечны, а группа A_0 имеет конечный ранг. Обозначим $C = \bigoplus_{i \in M} A_{p_i}$ и запишем $A = C \oplus A_0$. Группа C является периодической, поэтому $\text{Hom}(C, A_0) = 0$, другими словами, подгруппа C вполне характеристична в группе A . Следовательно,

$$E(A) \cong \begin{pmatrix} E(C) & \text{Hom}(A_0, C) \\ 0 & E(A_0) \end{pmatrix}.$$

Из теорем 1 и 2 следует, что хопфовость группы A эквивалентна хопфовости прямых слагаемых C и A_0 , которая, в свою очередь, получается из теорем 3 и 4. Таким образом, A — хопфова группа. $\square$

2. Хопфовость аддитивных групп E -колец и артиновых колец

Изучение аддитивных групп колец — сравнительно новое направление исследований, возникшее в середине прошлого века внутри теории абелевых групп. В настоящее время это направление получило значительный прогресс в своем развитии, что связано, прежде всего, с тем, что аддитивная группа кольца, даже если она устроена достаточно несложно, может дать определенную важную информацию о самом кольце. Вопросы о связях структуры кольца и структуры его аддитивной группы тесно переплетаются с теорией колец эндоморфизмов абелевых групп как содержательно, так и методологически. Органично дополняющие друг друга работы Фукса [17, гл. 18] и Фейгельштока [19] на сегодняшний день наиболее полно отражают современное состояние исследований по аддитивным группам колец.

Аддитивные группы некоторых конкретных классов колец служат интересными примерами хопфовых абелевых групп. Здесь мы рассмотрим аддитивные группы E -колец и артиновых колец, обладающих свойством хопфовости, а именно покажем, что аддитивная группа произвольного E -кольца хопфова, и охарактеризуем хопфовы аддитивные группы артиновых колец.

Хорошо известно, что E -кольца были введены Шульцем [20] в 1973 г. Однако нельзя утверждать, что таковые не появлялись в более ранних работах (разумеется, без употребления



термина, предложенного Шульцем). Так, например, еще Коши на заре XIX в. знал, что кольца $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ и $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ являются E -кольцами. Этот факт учитывался им при изучении функций действительного переменного, являющихся решениями функционального уравнения $f(x+y) = f(x) + f(y)$, ныне носящего название «уравнение Коши». Знаменитый французский математик доказал даже, что над полем действительных чисел любое непрерывное решение уравнения Коши имеет вид $f(x) = f(1) \cdot x$.

Базовые факты и классические результаты о E -кольцах изложены в [17, разд. 18.6; 18, § 6; 21]. Рассмотрим некоторые из них.

Определение 3. Ассоциативное кольцо с единицей R называется E -кольцом, если $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, R) = \text{Hom}_R(R, R)$.

Отметим следующий важный критерий E -кольца. Кольцо R является E -кольцом тогда и только тогда, когда произвольный эндоморфизм α аддитивной группы кольца R совпадает с умножением слева кольца R на элемент $\alpha(1)$.

В самом деле, если R — E -кольцо и $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, R)$, то для любого элемента r кольца R имеем $\alpha(r) = \alpha(1_R \cdot r) = \alpha(1_R) \cdot r$. Обратно, если $\alpha(r) = \alpha(1_R) \cdot r$, то для любого $s \in R$ $\alpha(rs) = \alpha(1_R)(rs) = (\alpha(1_R)r)s = \alpha(r)s$.

Другими словами, если R есть E -кольцо, то канонический (естественный) гомоморфизм кольца R в кольцо эндоморфизмов его аддитивной группы $E(R^+)$, отображающий элемент $x \in R$ в эндоморфизм левого умножения на x , является изоморфизмом. Иначе, для E -кольца R имеет место канонический изоморфизм $R \cong E(R^+)$.

Аддитивные группы E -колец получили название E -групп. Группа A является E -группой, если и только если $A \cong \text{End } A$ и кольцо эндоморфизмов $E(A)$ коммутативное [22]. Для E -групп сформулируем достаточно простой, но вместе с тем исчерпывающий результат.

Теорема 7. Любая E -группа хопфова.

Доказательство. Пусть R — E -кольцо. Ввиду сказанного выше произвольный эндоморфизм $f \in E(R^+)$ совпадает с умножением слева кольца R на элемент $f(1_R)$. Таким образом, имеет место канонический изоморфизм $\Phi: E(R^+) \rightarrow R$, где $\Phi(f) = f(1_R)$. Пусть $\beta: R^+ \rightarrow R^+$ — произвольный эпиморфизм. Если доказать, что элемент $\beta(1_R)$ обратим в кольце R , то это будет означать, что отображение β обратимо в кольце $E(R^+)$, т. е. β — автоморфизм. Предположим, напротив, что для каждого элемента r кольца R имеем $\beta(1_R) \cdot r \neq 1_R$. Учитывая, что R — E -кольцо, получаем $\beta(1_R) \cdot r = \beta(r)$, и $\beta(r) \neq 1_R$ для каждого элемента $r \in R$. Следовательно, для элемента $1_R \in R^+$ в аддитивной группе R^+ не найдется ни одного прообраза при отображении β . Противоречие с тем, что отображение β сюръективно. Поэтому элемент $\beta(1)$ обратим в кольце R , а β — автоморфизм. $\square$

Ниже построим пример, в какой-то степени иллюстрирующий теорему 7, а сейчас запишем такой известный факт [18, § 3, пример 3.5].

Лемма 3. Кольцо эндоморфизмов группы J_p целых p -адических чисел естественным образом изоморфно кольцу $\mathbb{Q}_p^*$ целых p -адических чисел.

Доказательство. Пусть δ — некоторое целое p -адическое число. Умножение кольца $\mathbb{Q}_p^*$ на число δ определяет эндоморфизм группы J_p . Обозначим этот эндоморфизм через $\tau(\delta)$. Если ε — какое-то другое p -адическое число, то $\delta \cdot 1 \neq \varepsilon \cdot 1$, т. е. различные p -адические числа дают различные эндоморфизмы группы J_p . Получаем вложение кольца $\mathbb{Q}_p^*$ в кольцо $E(J_p)$, т. е. регулярное представление кольца $\mathbb{Q}_p^*$.

Если α — какой-нибудь эндоморфизм группы J_p , то α совпадает с умножением кольца $\mathbb{Q}_p^*$ на элемент $\delta = \alpha(1)$. Действительно, из $\alpha(1) = \tau(\delta)(1)$ выводим $(\alpha - \tau(\delta))(1) = 0$ и $(\alpha - \tau(\delta))(x) = 0$ для любого целого рационального числа x . Следовательно, ядро $\text{Ker}(\alpha - \tau(\delta))$ содержит подгруппу $\mathbb{Z}$ группы J_p , порожденную элементом 1. Легко проверить, что факторгруппа $J_p/\mathbb{Z}$ делима, а сама группа J_p редуцирована. Поэтому $J_p/\text{Ker}(\alpha - \tau(\delta)) = 0$, откуда



$\alpha = \tau(\delta)$, т. е. α представляет собой умножение кольца $\mathbb{Q}_p^*$ на число δ . Значит, имеющееся вложение кольца $\mathbb{Q}_p^*$ в кольцо $E(J_p)$ является изоморфизмом колец. $\square$

Из леммы 3 следует, что кольцо $\mathbb{Q}_p^*$ является E -кольцом, а группа J_p целых p -адических чисел хопфова. С другой стороны, этот факт вытекает также из [15, теорема 3].

В завершение охарактеризуем хопфовы аддитивные группы артиновых колец. Напомним, что кольцо R называется *артиновым слева (справа)*, если любая последовательность $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ левых (соответственно, правых) идеалов, где $I_m \neq I_n$ при $m \neq n$, конечна. Говорят также, что R — *кольцо с условием обрыва убывающих цепей левых (соответственно, правых) идеалов*. Отметим, что существование единицы в артиновом кольце в общем случае не предполагается.

Теорема 8. *Аддитивная группа A некоторого артинова кольца является хопфовой тогда и только тогда, когда она имеет вид $A = D \oplus T$, где D — прямая сумма конечного числа копий рациональной группы, а T — конечная группа.*

Доказательство. Аддитивная группа любого артинова кольца имеет вид $A = D \oplus C \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_k$, где D — делимая группа без кручения, C — периодическая делимая группа, а все группы A_i — суть прямые суммы циклических групп одного и того же порядка, равного степени простого числа [17, разд. 18.4, теорема 4.4]. В силу следствия 1 из хопфовости группы A вытекает хопфовость прямых слагаемых D , C и всех A_i . Далее, по теореме 5 группа D есть прямая сумма конечного числа копий группы $\mathbb{Q}$, а $C = 0$. Применяя теорему 6, получаем, что все группы A_i конечны.

Обратно, поскольку группа D не имеет кручения, а T — периодическая группа, можно записать $\text{Hom}(T, D) = 0$, а это значит, что подгруппа T вполне характеристична в группе A . Из хопфовости групп D , T и теоремы 2 следует хопфовость группы A . $\square$

Заключение

В алгебре хорошо известно, что свойства эндоморфизмов алгебраической системы во многом определяют свойства самой этой системы. Поэтому изучение алгебраических систем, эндоморфизмы которых удовлетворяют каким-то конкретным условиям, представляет большой интерес. Одним из таких условий является свойство хопфовости. Изначально затрагивающее только группы, оно получило распространение на абелевы группы, кольца, модули, упорядоченные алгебраические системы, топологические пространства, решетки и другие типы алгебраических систем.

Результаты настоящей работы группируются вокруг вопросов изучения свойства хопфовости в аддитивных группах отдельных классов колец. Получено весьма удовлетворительное описание хопфовых аддитивных групп E -колец и артиновых колец, что обусловлено хорошо известными строением и свойствами аддитивных групп таких колец. В целом же проблема описания хопфовых аддитивных групп колец нова, и еще очень многое необходимо наработать, чтобы сделать ее достаточно прозрачной. К названной проблеме примыкают и другие, не менее интересные. Так, например, заслуживают внимания хопфовы сепарабельные и векторные абелевы группы, абелевы группы, обладающие хопфовыми кольцами эндоморфизмов, хопфовы абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов и т. д.

Список литературы

1. Курош А. Г. Теория групп. Москва : Физматлит, 2011. 808 с. EDN: RBBEOR
2. Bao Yan, Ziqi Tan, Shijie Wei, Haocong Jiang, Weilong Wang, Hong Wang, Lan Luo, Qianheng Duan, Yiting Liu, Wenhao Shi, Yangyang Fei, Xiangdong Meng, Yu Han, Zheng Shan, Jiachen Chen, Xuhao Zhu, Chuanyu Zhang, Feitong Jin, Hekang Li, Chao Song, Zhen Wang, Zhi Ma, H. Wang, Gui-Lu Long. Factoring integers with sublinear resources on a superconducting quantum processor // ArXiv preprint arXiv:2212.12372. 2022. URL: <https://arxiv.org/pdf/2212.12372.pdf> (дата обращения: 14.01.2024).
3. Гретцер Г. Общая теория решеток : пер. с англ. / под ред. Д. М. Смирнова. Москва : Мир, 1981. 456 с.



4. Baumslag G. Hopficity and Abelian groups // Topics in Abelian groups : Proceedings of the New Mexico Symposium on Abelian Groups. Scott-Foresman-Chicago : New Mexico State University, 1962. P. 331–335.
5. Baumslag G. On Abelian Hopfian groups. I // Mathematische Zeitschrift. 1962. Vol. 78, iss. 1. P. 53–54. <https://doi.org/10.1007/BF01195151>
6. Baumslag G. Products of Abelian Hopfian groups // Journal of the Australian Mathematical Society. 1968. Vol. 8. P. 322–326. <https://doi.org/10.1017/S1446788700005383>
7. Corner A. L. S. Three examples on Hopficity in torsion-free Abelian groups // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1965. Vol. 16, iss. 3–4. P. 303–310. <https://doi.org/10.1007/BF01904838>
8. Irwin J. M., Takashi J. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups // Pacific Journal of Mathematics. 1969. Vol. 29, iss. 1. P. 151–160. <https://doi.org/10.2140/pjm.1969.29.151>
9. Takashi J., Irwin J. M. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups, 2 // Journal of Faculty of Science, Hokkaido University. 1969. Vol. 20, iss. 4. P. 194–203. <https://doi.org/10.14492/hokmj/1530064871>
10. Goldsmith B., Gong K. On super and hereditarily Hopfian and co-Hopfian Abelian groups // Archiv der Mathematik. 2012. Vol. 99, iss. 1. P. 1–8. <https://doi.org/10.1007/s00013-012-0402-2>
11. Goldsmith B., Gong K. On adjoint entropy of Abelian groups // Communications in Algebra. 2012. Vol. 40. P. 972–987. <https://doi.org/10.1080/00927872.2010.543447>
12. Goldsmith B., Gong K. A note on Hopfian and co-Hopfian Abelian groups // Contemporary Mathematics. 2012. Vol. 576. P. 129–136. <https://doi.org/10.1090/conm/576/11356>
13. Goldsmith B., Gong K. On some generalizations of Hopfian and co-Hopfian Abelian groups // Acta Mathematica Hungarica. 2013. Vol. 139, iss. 4. P. 393–398. <https://doi.org/10.1007/s10474-012-0290-8>
14. Paolini G., Shelah S. On the existence of uncountable Hopfian and co-Hopfian Abelian groups // Israel Journal of Mathematics. 2023. Vol. 257, iss. 2. P. 533–560. <https://doi.org/10.1007/s11856-023-2534-4>
15. Кайгородов Е. В. Хопфовы алгебраически компактные абелевы группы // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, вып. 6. С. 667–675. EDN: [RXKLUX](#)
16. Кайгородов Е. В. О некоторых классах хопфовых абелевых групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, вып. 8. С. 59–61. EDN: [TWUZML](#)
17. Fuchs L. Abelian Groups. Cham : Springer, 2015. 747 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-19422-6>
18. Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. Москва : Факториал Пресс, 2006. 512 с. EDN: [QJPUCH](#)
19. Feigelshtock S. Additive groups of rings. Boston ; London ; Melbourne : Pitman Advanced Publishing Program, 1983. 113 p.
20. Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // Journal of the Australian Mathematical Society. 1973. Vol. 15, iss. 1. P. 60–69. <https://doi.org/10.1017/S1446788700012763>
21. Крылов П. А., Туганбаев А. А., Царев А. В. E -группы и E -кольца // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т. 159. С. 111–132.
22. Гришин А. В., Царев А. В. $\mathcal{E}$ -замкнутые группы и модули // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, вып. 2. С. 97–106. EDN: [TWUYLX](#)

References

1. Kurosh A. G. *Teoriya grupp* [The theory of groups]. Moscow, Fizmatlit, 2011. 808 p. (in Russian). EDN: [RBBEOR](#)
2. Bao Yan, Ziqi Tan, Shijie Wei, Haocong Jiang, Weilong Wang, Hong Wang, Lan Luo, Qianheng Duan, Yiting Liu, Wenhao Shi, Yangyang Fei, Xiangdong Meng, Yu Han, Zheng Shan, Jiachen Chen, Xuhao Zhu, Chuanyu Zhang, Feitong Jin, Hekang Li, Chao Song, Zhen Wang, Zhi Ma, H. Wang, Gui-Lu Long. Factoring integers with sublinear resources on a superconducting quantum processor. *ArXiv preprint arXiv:2212.12372*, 2022. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2212.12372.pdf> (accessed January 14, 2024).
3. Grätzer G. *Lattice theory: Foundation*. Basel, Birkhäuser Verlag, 2011. 587 p. (Russ. ed. : Moscow, Mir, 1981. 456 p.). <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0018-1>
4. Baumslag G. Hopficity and Abelian groups. *Topics in Abelian groups. Proceedings of the New Mexico Symposium on Abelian Groups*. Scott-Foresman-Chicago, New Mexico State University, 1962, pp. 331–335.



5. Baumslag G. On Abelian Hopfian groups. I. *Mathematische Zeitschrift*, 1962, vol. 78, iss. 1, pp. 53–54. <https://doi.org/10.1007/BF01195151>
6. Baumslag G. Products of Abelian Hopfian groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1968, vol. 8, pp. 322–326. <https://doi.org/10.1017/S1446788700005383>
7. Corner A. L. S. Three examples on Hopficity in torsion-free Abelian groups. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1965, vol. 16, iss. 3–4, pp. 303–310. <https://doi.org/10.1007/BF01904838>
8. Irwin J. M., Takashi J. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups. *Pacific Journal of Mathematics*, 1969, vol. 29, iss. 1, pp. 151–160. <https://doi.org/10.2140/pjm.1969.29.151>
9. Takashi J., Irwin J. M. A quasi-decomposable Abelian group without proper isomorphic quotient groups and proper isomorphic subgroups, 2. *Journal of Faculty of Science, Hokkaido University*, 1969, vol. 20, iss. 4, pp. 194–203. <https://doi.org/10.14492/hokmj/1530064871>
10. Goldsmith B., Gong K. On super and hereditarily Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. *Archiv der Mathematik*, 2012, vol. 99, iss. 1, pp. 1–8. <https://doi.org/10.1007/s00013-012-0402-2>
11. Goldsmith B., Gong K. On adjoint entropy of Abelian groups. *Communications in Algebra*, 2012, vol. 40, pp. 972–987. <https://doi.org/10.1080/00927872.2010.543447>
12. Goldsmith B., Gong K. A note on Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. *Contemporary Mathematics*, 2012, vol. 576, pp. 129–136. <https://doi.org/10.1090/conm/576/11356>
13. Goldsmith B., Gong K. On some generalizations of Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. *Acta Mathematica Hungarica*, 2013, vol. 139, iss. 4, pp. 393–398. <https://doi.org/10.1007/s10474-012-0290-8>
14. Paolini G., Shelah S. On the existence of uncountable Hopfian and co-Hopfian Abelian groups. *Israel Journal of Mathematics*, 2023, vol. 257, iss. 2, pp. 533–560. <https://doi.org/10.1007/s11856-023-2534-4>
15. Kaigorodov E. V. Hopfian algebraically compact Abelian groups. *Algebra and Logic*, 2014, vol. 52, iss. 6, pp. 442–447. <https://doi.org/10.1007/s10469-014-9259-8>
16. Kaigorodov E. V. Some classes of Hopfian Abelian groups. *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 197, iss. 5, pp. 623–624. <https://doi.org/10.1007/s10958-014-1744-z>
17. Fuchs L. *Abelian Groups*. Cham, Springer, 2015. 747 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-19422-6>
18. Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. *Endomorphism Rings of Abelian Groups*. Dordrecht, Springer, 2003. 443 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-0345-1>
19. Feigelstock S. *Additive groups of rings*. Boston, London, Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program, 1983. 113 p.
20. Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1973, vol. 15, iss. 1, pp. 60–69. <https://doi.org/10.1017/S1446788700012763>
21. Krylov P. A., Tuganbaev A. A., Tsarev A. V. E -groups and E -rings. *Journal of Mathematical Sciences*, 2021, vol. 256, iss. 4, pp. 341–361. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05430-2>
22. Grishin A. V., Tsarev A. V. $\mathcal{E}$ -closed groups and modules. *Journal of Mathematical Sciences*, 2012, vol. 186, iss. 4, pp. 592–598. <https://doi.org/10.1007/s10958-012-1008-8>

Поступила в редакцию / Received 16.01.2024

Принята к публикации / Accepted 15.05.2024

Опубликована / Published 28.02.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 24–33

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 24–33
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-24-33>, EDN: CEYQRP

Article

A uniqueness theorem for mean periodic functions on the Bessel – Kingmann hypergroup

G. V. Krasnoschekikh[✉], Vit. V. Volchkov

Donetsk State University, 24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russia

Gleb V. Krasnoschekikh, wolverimred@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0005-2783-4333>

Vitaliy V. Volchkov, volna936@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4274-0034>, SPIN: 4478-1677, AuthorID: 7006247848

Abstract. One of the properties of a periodic function on the real axis is that it is completely determined by its values on the period. This fact admits the following nontrivial multidimensional generalization: if a function $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$) with zero integrals over all spheres (or balls) of fixed radius r is zero in some ball of radius r , then f is zero in $\mathbb{R}^n$. The condition of infinite smoothness of the function f in this statement cannot be relaxed. In this paper, we study a similar phenomenon for solutions of convolution equations related to the generalized Bessel shift operator. First, we consider the case when the convolution factor in the equation is an indicator of a segment symmetric with respect to zero. It is shown that the solutions to such an equation are determined by their values on the specified segment. Further, a generalization of this property for the general Bessel convolution equation is given. The results obtained are analogues of the well-known uniqueness theorems for mean periodic functions belonging to F. John, Yu.I. Lyubich and A.F. Leontiev.

Keywords: generalized translation, convolution equations, Bessel functions, spherical transform, Titchmarsh convolution theorem

Acknowledgements: The study was conducted on the topic of the state task (registration number: 124012400352-6).

For citation: Krasnoschekikh G. V., Volchkov Vit. V. A uniqueness theorem for mean periodic functions on the Bessel – Kingmann hypergroup. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 24–33. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-24-33>, EDN: CEYQRP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 517.44

Теорема единственности для периодических в среднем функций на гипергруппе Бесселя – Кингмана

Г. В. Краснощеких[✉], Вит. В. Волчков

Донецкий государственный университет, Россия, 283001, г. Донецк, ул. Университетская, д. 24

Краснощеких Глеб Витальевич, аспирант кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, wolverimred@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0005-2783-4333>

Волчков Виталий Владимирович, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений, volna936@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4274-0034>, SPIN: 4478-1677, AuthorID: 505219



Аннотация. Одно из свойств периодической функции на вещественной оси состоит в том, что она полностью определяется своими значениями на периоде. Этот факт допускает следующее нетривиальное обобщение на многомерный случай: если функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$) с нулевыми интегралами по всем сферам (или шарам) фиксированного радиуса r равна нулю в некотором шаре радиуса r , то f является нулевой на $\mathbb{R}^n$. Условие бесконечной гладкости функции f в этом утверждении ослабить нельзя. В данной работе изучается подобное явление для решений уравнений свертки, связанных с оператором обобщенного сдвига Бесселя. Сначала рассматривается случай, когда свертывателем уравнения является индикатор отрезка, симметричного относительно нуля. Показано, что решения такого уравнения определяется своими значениями на указанном отрезке. Далее приводится обобщение этого свойства для общего уравнения свертки Бесселя. Полученные результаты являются аналогами известных теорем единственности для периодических в среднем функций, принадлежащих Ф. Йону, Ю. И. Любичу и А. Ф. Леонтьеву.

Ключевые слова: обобщенный сдвиг, уравнения свертки, функции Бесселя, сферическое преобразование, теорема Титчмарша о свертке

Благодарности: Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер: 124012400352-6).

Для цитирования: Krasnoschekikh G. V., Volchkov Vit. V. A uniqueness theorem for mean periodic functions on the Bessel – Kingmann hypergroup [Краснощеких Г. В., Волчков Вит. В. Теорема единственности для периодических в среднем функций на гипергруппе Бесселя – Кингмана] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 24–33. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-24-33>, EDN: CEYQRP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

The well-known uniqueness theorem of F. John (see [1, Chap. 6; 2]) states that if a function $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$) with zero integrals over all spheres (or balls) of fixed radius r is zero in some ball of radius r , then f is zero in $\mathbb{R}^n$. The condition of infinite smoothness of the function f in this statement cannot be relaxed (see [1, Chap. 6] for $n = 2, 3$ and [3, Theorems 14.7 and 14.9] for the general case).

The theorem of F. John has been further developed and refined in different directions. In particular, spectral analogues of F. John's theorem were established [3, Theorem 14.1], its generalizations and refinements were studied for the twisted spherical means [4], for weighted spherical means on a sphere [5], on symmetric spaces and the Heisenberg group [3, Chap. 15–17], and for solutions of convolution equations [6, Theorem 1; 7, 8; 9, Theorem 8; 10, Chap. 5; 11–13].

In addition to their independent interest, the results obtained turned out to be important due to their applications in extreme problems of integral geometry, the theory of lacunary series, the support problem, the theory of harmonic functions as well as in the study of various classes of mean periodic functions and their generalizations (see [14]). Furthermore, it was found that F. John's theorem and its analogues have deep connections with microlocal analysis, which is widely used in research on partial differential equations [15, 16].

Various issues of analysis and differential equations related to the generalized translation operator were studied by J. Delsart, B. M. Levitan, K. Trimèche, I. A. Kipriyanov, S. M. Sitnik, S. S. Platonov, etc. (see [17–21] and the bibliography in these works). In [22], a study of the injectivity of the spherical mean operator on the Chébli-Trimèche hypergroups was initiated and a local two-radii theorem was proved. In this paper, we obtain an analogue of John's uniqueness theorem for mean periodic functions on the Bessel – Kingmann hypergroup, which is a model representative of the above-mentioned class of hypergroups.

In addition to self-interest, the study of spherical means and their generalizations on hypergroups is important due to the following circumstances. The fact is that various properties



of mean periodic functions on multidimensional spaces allowed us to obtain earlier applications to other issues of analysis only for a certain discrete set of parameters depending on the dimension of the space, the multiplicity of root subspaces of the Lie algebra of the isometry group, etc. Establishing the appropriate results on hypergroups will make it possible to remove this restriction.

It should be noted that general information on the theory of hypergroups and hypercomplex systems is contained in the review by G. L. Litvinov [23] and the monograph by Yu. M. Berezansky and A. A. Kalyuzhny [24]. Our attention to the study of mean periodic functions on hypergroups was attracted by A. A. Kalyuzhny during the reports of the second author at the seminar of Yu. M. Berezansky and M. L. Gorbachuk (Institute of Mathematics, Kiev, 2009, 2010). The authors thank A. A. Kalyuzhny and the seminar participants for their interest and useful discussions.

1. Statement of the main result

Let H be an arbitrary set, and let Φ be a linear space of complex-valued functions defined on H . Suppose that each element $x \in H$ is associated with a linear operator R^x in Φ , and for any fixed $y \in H$ the function $\psi(x) = R^x \varphi(y)$ is contained in Φ for all $\varphi \in \Phi$. A set H is called a *hypergroup* if the following conditions (see [23, Sect. 2; 24, Chap. 1, Sect. 2]) are satisfied:

1) for any elements $x, y \in H$ the relation

$$R^x L^y = L^y R^x$$

is valid, where

$$L^y \varphi(x) = R^x \varphi(y), \quad \varphi \in \Phi;$$

2) there exists an element $e \in H$ such that $R^e = I$ (I is the identity operator).

In this case, it is said that the operators R^x form a family of *generalized translation operators*.

The Bessel–Kingmann hypergroup corresponds to the case when $H = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\Phi = C([0, +\infty))$ and $R^x = T_x^\alpha$, where $\alpha > -1/2$,

$$T_x^\alpha f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})(\sin\theta)^{2\alpha} d\theta, \quad x, y \geq 0. \quad (1)$$

It is convenient to assume that f is extended on $\mathbb{R}$ to an even function and

$$T_x^\alpha f(y) = T_{|x|}^\alpha f(|y|), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

We denote by $L_{b,\alpha}^{1,\text{loc}}(I_R)$ the space of even locally summable functions with respect to the measure $|x|^{2\alpha+1}dx$ on the interval $I_R = (-R, R)$, $0 < R \leq +\infty$. In this paper, we study an equation of the form

$$\int_0^r T_y^\alpha f(x) x^{2\alpha+1} dx = 0, \quad y \in I_{R-r} \quad (0 < r < R), \quad (2)$$

where $f \in L_{b,\alpha}^{1,\text{loc}}(I_R)$. The main result of this paper is the following uniqueness theorem for solutions of equation (2).

Theorem 1. *Let $0 < r < R \leq +\infty$. Suppose that a function $f \in L_{b,\alpha}^{1,\text{loc}}(I_R)$ satisfies condition (2) and $f = 0$ on I_r . Then $f = 0$ on I_R .*

Thus, the solutions of equation (2) of class $L_{b,\alpha}^{1,\text{loc}}(I_R)$ are completely determined by their values on the interval I_r . Similar results in $\mathbb{R}^n$ and other multidimensional spaces (see [3, Chaps. 14–17; 14, Part 2, Chaps. 1–3]) require additional conditions on the smoothness of the function f in the neighborhood of its null set. Note also that the size of the null set I_r in Theorem 1 cannot be reduced in general (see [14, Part 2, Sect. 1.2, Theorem 1.2]).



2. Auxiliary assertions

Throughout the following, we assume that α is a fixed number from the interval $(-1/2, +\infty)$. As usual, the symbols $\mathbb{N}$ and $\mathbb{Z}_+$ denote the sets of natural and non-negative integers respectively.

Let $0 < r < R \leq +\infty$, $\bar{I}_r = [-r, r]$. If $f, g \in L_{\natural, \alpha}^{1, \text{loc}}(I_R)$ and $\text{supp } g \subset \bar{I}_r$ ($\text{supp } g$ is the support of the function g), then the Bessel (Hankel) convolution

$$(f \star g)(y) = \int_0^r (T_y^\alpha f)(x) g(x) x^{2\alpha+1} dx, \quad y \in I_{R-r} \quad (3)$$

is defined, which belongs to the class $L_{\natural, \alpha}^{1, \text{loc}}(I_{R-r})$. In particular, if $g = \chi_r$ is the indicator of the segment $\bar{I}_r$, then

$$(f \star \chi_r)(y) = \int_0^r (T_y^\alpha f)(x) x^{2\alpha+1} dx, \quad y \in I_{R-r}.$$

Thus, to study equation (2) it is convenient to introduce the classes

$$V_r(I_R) = \{f \in L_{\natural, \alpha}^{1, \text{loc}}(I_R) : f \star \chi_r = 0 \text{ on } I_{R-r}\},$$

$$V_r^m(I_R) = V_r(I_R) \cap C_{\natural}^m(I_R), \quad m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\},$$

where $C_{\natural}^m(I_R)$ is the space of even m times continuously differentiable functions on I_R .

The convolution (3) naturally extends to even distributions f, g at least one of which has a compact support. The main properties of this convolution are contained in [18, Chap. 6; 21, Sect. 2; 22, Sect. 2]. For example, the operator $f \rightarrow f \star g$ commutes with the Bessel differential operator, i.e.

$$L_\alpha(f \star g) = (L_\alpha f) \star g = f \star (L_\alpha g), \quad (4)$$

where L_α acts on a function $h \in C_{\natural}^2(I_R)$ as follows:

$$(L_\alpha h)(x) = h''(x) + \frac{2\alpha+1}{x} h'(x) = \frac{1}{x^{2\alpha+1}} \frac{d}{dx} (x^{2\alpha+1} h'(x)). \quad (5)$$

Let J_ν be the Bessel function of the first kind of order ν ,

$$\mathbb{I}_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)}{z^\nu}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\varphi_\lambda(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) \mathbb{I}_\alpha(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

The function φ_λ is an eigenfunction of operators (5) and (1):

$$L_\alpha \varphi_\lambda = -\lambda^2 \varphi_\lambda, \quad T_x^\alpha \varphi_\lambda(y) = \varphi_\lambda(x) \varphi_\lambda(y) \quad (6)$$

(see [18, Chap. 6; 21, Sect. 2; 22, Sect. 2]). Using the Poisson integral representation for J_ν , it is easy to obtain the relation

$$\varphi_\lambda(x) = \int_0^x \cos(\lambda y) K(x, y) dy, \quad x > 0, \quad (7)$$

$$K(x, y) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \frac{(x^2 - y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{x^{2\alpha}}, \quad 0 \leq y < x,$$



and the following estimate

$$\left| \left(\frac{d}{dx} \right)^m \varphi_\lambda(x) \right| \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{m}{2}+1)} |\lambda|^m e^{|x||\operatorname{Im} \lambda|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (8)$$

The spherical transform (the Bessel transform) of a compactly supported function $f \in L_{\natural,\alpha}^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$ is defined by

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \varphi_\lambda(x) x^{2\alpha+1} dx, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

In this case, it follows from (3) and (6) that

$$\varphi_\lambda \star f = \tilde{f}(\lambda) \varphi_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

Moreover, for compactly supported functions $f, g \in L_{\natural,\alpha}^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$, we have an analogue of the Borel formula

$$\widetilde{f \star g}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda) \tilde{g}(\lambda) \quad (10)$$

(see [21, Sect. 2; 22, Sect. 2]).

Let $C_{\natural,c}^m(\mathbb{R})$ be the space of even m times continuously differentiable functions on $\mathbb{R}$ with compact supports. For $f \in C_{\natural,c}(\mathbb{R})$, we set

$$r(f) = \inf\{r > 0 : \operatorname{supp} f \subset \bar{I}_r\}.$$

Denote by $[x]$ and $\{x\}$ the integer and fractional parts of the number $x \in \mathbb{R}$ respectively.

Lemma 1. Assume that $f \in C_{\natural,c}^m(\mathbb{R})$ for some $m \in \mathbb{Z}_+$, and let $D = \frac{d}{dx}$ be the differentiation operator. Then

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{(-1)^{[\frac{m}{2}]}}{\lambda^{2[\frac{m+1}{2}]}} \int_0^\infty (D^{2\{\frac{m}{2}\}} \varphi_\lambda)(x) (D^{2\{\frac{m}{2}\}} L_{\alpha}^{[\frac{m}{2}]} f)(x) x^{2\alpha+1} dx. \quad (11)$$

In particular,

$$|\tilde{f}(\lambda)| \leq \frac{c e^{r(f)|\operatorname{Im} \lambda|}}{(1+|\lambda|)^m}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (12)$$

where the constant $c > 0$ does not depend on λ .

Proof. For $m = 0$, relation (11) coincides with the definition of a spherical transform. Hence, by integrating in parts using (5), (6) and induction, we obtain

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{\lambda^{2[\frac{m+1}{2}]}} \int_0^\infty \varphi_\lambda(x) (L_{\alpha}^{\frac{m}{2}} f)(x) x^{2\alpha+1} dx, \quad \text{if } m \in 2\mathbb{Z}_+,$$

and

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{(-1)^{[\frac{m}{2}]}}{\lambda^{m+1}} \int_0^\infty \varphi'_\lambda(x) (L_{\alpha}^{\frac{m-1}{2}} f)'(x) x^{2\alpha+1} dx, \quad \text{if } m \in 2\mathbb{Z}_+ + 1.$$

These two equations are equivalent to the relation (11). The estimate (12) follows from (11) and (8). $\square$



Lemma 2. Assume that $f \in C_{b,c}^m(\mathbb{R})$ for some integer $m > 2\alpha + 2$, and let

$$\gamma_\alpha = \frac{1}{(2^\alpha \Gamma(\alpha + 1))^2}.$$

Then

$$f(x) = \gamma_\alpha \int_0^\infty \tilde{f}(\lambda) \varphi_\lambda(x) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

where the integral in (13) converges uniformly on $\mathbb{R}$.

Proof. Under the condition $f \in C_{b,c}^\infty(\mathbb{R})$, the required formula is proved in [25, Theorem 2.3]. In the general case, we put

$$g(x) = \gamma_\alpha \int_0^\infty \tilde{f}(\lambda) \varphi_\lambda(x) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda. \quad (14)$$

It can be seen from (12) and (8) that the integral in (14) converges uniformly on $\mathbb{R}$ and $g \in C_b(\mathbb{R})$. By virtue of (9), for any function $h \in C_{b,c}^\infty(\mathbb{R})$ we have

$$(g \star h)(x) = \gamma_\alpha \int_0^\infty \tilde{f}(\lambda) \tilde{h}(\lambda) \varphi_\lambda(x) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda.$$

On the other hand, since $f \star h \in C_{b,c}^\infty(\mathbb{R})$, then

$$(f \star h)(x) = \gamma_\alpha \int_0^\infty \widetilde{f \star h}(\lambda) \varphi_\lambda(x) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda = \gamma_\alpha \int_0^\infty \tilde{f}(\lambda) \tilde{h}(\lambda) \varphi_\lambda(x) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda$$

(see [25, Theorem 2.3] and (10)). From the last two relations and the arbitrariness of the function h , we conclude that $f = g$. $\square$

The following statement is the well-known Titchmarsh theorem of supports (see, for example, [14, Part 1, Sect. 3.2]).

Lemma 3. Assume that $f_1, f_2 \in L^1(0, 1)$, and let

$$\int_0^t f_1(x) f_2(t-x) dx = 0$$

for almost all $t \in (0, 1)$. Then $\text{supp } f_1 \subset [a, 1]$ and $\text{supp } f_2 \subset [b, 1]$ for some $a, b \in [0, 1]$ such that $a + b \geq 1$.

Lemma 4. Assume that $lr < R \leq (l+1)r$ for some $l \in \mathbb{N}$, and let $m > 2\alpha + 2$. If $f \in V_r^m(I_R)$ and $f = 0$ on I_{lr} , then $f = 0$ on I_R .

Proof. For any $\varepsilon \in (0, R - lr)$, we consider a function $\eta_\varepsilon \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ such that $\eta_\varepsilon = 1$ on $I_{R-\varepsilon}$ and $\eta_\varepsilon = 0$ on $\mathbb{R} \setminus I_{R-\frac{\varepsilon}{2}}$. We set

$$F = \begin{cases} \eta_\varepsilon f & \text{on } I_R \\ 0 & \text{on } \mathbb{R} \setminus I_R. \end{cases}$$



Then $F \in C_{b,c}^m(\mathbb{R})$, and $F = 0$ on I_{lr} . In view of Lemmas 1 and 2,

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\tilde{F}(\lambda)| (1 + |\lambda|)^m < +\infty$$

and

$$F(x) = \gamma_\alpha \int_0^\infty \tilde{F}(\lambda) \varphi_\lambda(x) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

We define the function $h \in C_b(\mathbb{R})$ by relation

$$h(x) = \int_0^\infty \tilde{F}(\lambda) \lambda^{2\alpha+1} \cos(\lambda x) d\lambda. \quad (16)$$

Using (15), (7) and Fubini's theorem, we obtain

$$F(x) = \gamma_\alpha \int_0^x h(y) K(x, y) dy, \quad x > 0. \quad (17)$$

Since $F = 0$ on I_{lr} , then

$$h = 0 \quad \text{on} \quad I_{lr} \quad (18)$$

(see Lemma 3). Next, it follows from the definition of the function F and the hypothesis that

$$F \star \chi_r = 0 \quad \text{on} \quad I_{R-r-\varepsilon}.$$

Taking (15), (9), and (7) into account, we can write the convolution $F \star \chi_r$ as

$$(F \star \chi_r)(x) = \gamma_\alpha \int_0^x \left(\int_0^\infty \tilde{\chi}_r(\lambda) \tilde{F}(\lambda) \lambda^{2\alpha+1} \cos(\lambda y) d\lambda \right) K(x, y) dy, \quad x > 0.$$

Therefore, Lemma 3 and the equality

$$\tilde{\chi}_r(\lambda) = \int_0^r \varphi_\lambda(x) x^{2\alpha+1} dx$$

imply the relation

$$\int_0^r \left(\int_0^\infty \tilde{F}(\lambda) \lambda^{2\alpha+1} \varphi_\lambda(t) \cos(\lambda y) d\lambda \right) t^{2\alpha+1} dt = 0, \quad y \in I_{R-r-\varepsilon}. \quad (19)$$

The inner integral in (19) is transformed as follows (see (7) and (16)):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tilde{F}(\lambda) \lambda^{2\alpha+1} \varphi_\lambda(t) \cos(\lambda y) d\lambda &= \int_0^\infty \tilde{F}(\lambda) \lambda^{2\alpha+1} \cos(\lambda y) \left(\int_0^t \cos(\lambda z) K(t, z) dz \right) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_0^\infty \tilde{F}(\lambda) \lambda^{2\alpha+1} (\cos(\lambda(y+z)) + \cos(\lambda(y-z))) d\lambda \right) K(t, z) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (h(y+z) + h(y-z)) K(t, z) dz. \end{aligned}$$



Now from (19) and (18) we have

$$\int_0^r \left(\int_0^t h(y+z)K(t,z)dz \right) t^{2\alpha+1} dt = 0, \quad 0 \leq y < R-r-\varepsilon.$$

After changing the integration order, we arrive at the relation

$$\int_y^{y+r} h(u)H(u-y)du = 0, \quad (l-1)r < y < R-r-\varepsilon,$$

where

$$H(\xi) = \int_\xi^r K(t,\xi)t^{2\alpha+1}dt, \quad 0 < \xi < r.$$

Hence and from (18) we find

$$\int_0^t h(v+lr)H(r-t+v)dv = 0, \quad 0 < t < R-lr-\varepsilon.$$

This relation, Lemma 3 and equality (18) show that $h = 0$ on $(0, R-\varepsilon)$. Therefore, $F = 0$ on $(0, R-\varepsilon)$ (see (17)). To complete the proof, it remains to use the evenness of the function f and the arbitrariness of $\varepsilon \in (0, R-lr)$. $\square$

Corollary 1. *Let $0 < r < R \leq +\infty$, and assume that $f \in V_r^m(I_R)$ for some $m > 2\alpha + 2$. If $f = 0$ on I_r , then $f = 0$ on I_R .*

Proof. For $r < R \leq 2r$, the statement is obtained from Lemma 4 for $l = 1$. Suppose that it is valid for $R \leq kr$ with some $k \geq 2$, and let $kr < R \leq (k+1)r$. By the hypothesis, $f \in V_r^m(I_{kr})$ and $f = 0$ on I_r . By the induction assumption, we conclude that $f = 0$ on I_{kr} . Then, owing to Lemma 4, $f = 0$ on I_R . $\square$

3. Proof of Theorem 1

We put

$$f_1 = f,$$

$$f_{q+1}(x) = \int_0^{|x|} \frac{1}{t^{2\alpha+1}} \left(\int_0^t y^{2\alpha+1} f_q(y) dy \right) dt, \quad x \in I_R, \quad q \in \mathbb{N}.$$

It is clear that all functions f_q are equal to zero on I_r . In addition,

$$f_q \in C^{2q-3}(I_R) \quad \text{for} \quad q \geq 2, \quad (20)$$

and

$$L_\alpha(f_{q+1}) = f_q, \quad q \in \mathbb{N} \quad (21)$$

in the space of even distributions on I_R (see (5)). In particular,

$$f = L_\alpha^{q-1}(f_q), \quad q \in \mathbb{N}.$$

We claim that $f_q \in V_r(I_R)$ for any $q \geq 1$. For $q = 1$, this follows from the hypothesis of the theorem and the definition of the function f_1 . Suppose that $f_k \in V_r(I_R)$ for some $k \in \mathbb{N}$. Then (see (4) and (21))

$$L_\alpha(f_{k+1} \star \chi_r) = (L_\alpha f_{k+1}) \star \chi_r = f_k \star \chi_r = 0 \quad \text{on} \quad I_{R-r}.$$



Hence, it can be seen that

$$f_{k+1} \star \chi_r = \text{const} \quad \text{on} \quad I_{R-r}.$$

Since

$$(f_{k+1} \star \chi_r)(0) = \int_0^r f_{k+1}(x) x^{2\alpha+1} dx = 0,$$

we have $f_{k+1} \star \chi_r = 0$ on I_{R-r} . So, $f_q \in V_r(I_R)$ and $f_q = 0$ on I_r for any $q \in \mathbb{N}$. Now, bearing (20) in mind and using Corollary 1, we conclude that $f_q = 0$ on I_R for $q > \alpha + \frac{5}{2}$. Therefore, $f = L_\alpha^{q-1}(f_q) = 0$ on I_R . Thus, Theorem 1 is proved. $\square$

Conclusion

The proof of Theorem 1 shows that the following more general result can be obtained by completely similar reasoning.

Theorem 2. Let g be a nonzero function with a compact support of class $L_{b,\alpha}^{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$, and let $R \in (r(g), +\infty]$. Assume that $f \in L_{b,\alpha}^{1,\text{loc}}(I_R)$, $f \star g = 0$ on $I_{R-r(g)}$ and $f = 0$ on $I_{r(g)}$. Then $f = 0$ on I_R .

Various analogs of Theorem 2 for the usual convolution on the real axis are due to Yu. I. Lyubich [6, Theorem 1], A. F. Leontiev [10, Chap. 5], V. V. Volchkov [3, Chap. 13] and D. A. Zraisky [13].

References

1. John F. *Plane waves and spherical means: Applied to partial differential equations*. New York, Interscience Publishers, 1955. 190 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9453-2>
2. Smith J. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1972, vol. 72, iss. 3, pp. 403–416. <https://doi.org/10.1017/S0305004100047241>
3. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*. London, Springer, 2009. 671 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-84882-533-8>
4. Agranovsky M. L., Narayanan E. K. A local two radii theorem for the twisted spherical means on $\mathbb{C}^n$. *Contemporary Mathematics*, 2005, vol. 382, pp. 13–27. <https://doi.org/10.1090/conm/382>
5. Savost'yanova I. M., Volchkov Vit. V. Analog of the John theorem for weighted spherical means on a sphere. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2013, vol. 65, iss. 5, pp. 674–683. <https://doi.org/10.1007/s11253-013-0805-7>
6. Lyubich Yu. I. On a class of integral equations. *Sbornik: Mathematics*, 1956, vol. 38(80), iss. 2, pp. 183–202 (in Russian).
7. Lyubich Yu. I. Uniqueness theorem for mean-periodic functions. *Journal of Soviet Mathematics*, 1984, vol. 26, iss. 5, pp. 2206–2206. <https://doi.org/10.1007/BF01221539>
8. Kargaev P. P. Zeros of mean-periodic functions. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1985, vol. 37, iss. 3, pp. 181–183. <https://doi.org/10.1007/BF01158736>
9. Leont'ev A. F. On the properties of a sequence of Dirichlet polynomials, convergent in an interval of the imaginary axis. *Izvestiya Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1965, vol. 29, iss. 2, pp. 269–328 (in Russian).
10. Leont'ev A. F. *Posledovatel'nosti polinomov iz eksponent* [Sequences of polynomials from exponents]. Moscow, Nauka, 1980. 384 p. (in Russian).
11. Zraisky D. A. Refinement of the uniqueness theorem for solutions of the convolution equation. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine*, 2006, vol. 12, pp. 69–75.
12. Zraisky D. A. A class of mean-periodic functions which are uniquely determined by their restrictions to the “period”. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, vol. 33, pp. 38–41 (in Russian).
13. Zraisky D. A. A new uniqueness theorem for one-dimensional convolution equation. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics*, 2020, vol. 34, pp. 63–67.



14. Volchkov V. V. *Integral geometry and convolution equations*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2003. 454 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-0023-9>
15. Quinto E. T. Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds. *Israel Journal of Mathematics*, 1993, vol. 84, pp. 353–363. <https://doi.org/10.1007/BF02760947>
16. Zairaisky D. A. A uniqueness theorem for functions with zero integrals over balls. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine*, 2012, vol. 25, pp. 77–83.
17. Levitan B. M. *Teoriya operatorov obobshchennogo sdviga* [Theory of generalized translation operators]. Moscow, Nauka, 1973. 312 p. (in Russian).
18. Trimèche K. *Generalized wavelets and hypergroups*. London, CRC Press, 1997. 364 p. <https://doi.org/10.1201/9780203753712>
19. Kipriyanov I. A. *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular elliptic boundary value problems]. Moscow, Nauka, 1997. 208 p. (in Russian)
20. Sitnik S. M., Shishkina E. L. *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravnenii s operatorami Besselya* [Transformation operator method for differential equations with Bessel operators]. Moscow, Nauka, 2019. 224 p. (in Russian). EDN: YGUEZW
21. Platonov S. S. Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line. *Izvestia: Mathematics*, 2007, vol. 71, iss. 5, pp. 1001–1048. <https://doi.org/10.1070/IM2007v071n05ABEH002379>
22. Selmi B., Nessibi M. M. A local two radii theorem on the Chébli-Trimèche hypergroup. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, vol. 329, iss. 1, pp. 163–190. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.06.061>
23. Litvinov G. L. Hypergroups and hypergroup algebras. *Journal of Soviet Mathematics*, 1987, vol. 38, pp. 1734–1761. <https://doi.org/10.1007/BF01088201>
24. Berezansky Yu. M., Kalyuzhnyi A. A. *Harmonic analysis in hypercomplex systems*. Dordrecht, Springer, 1998. 486 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-1758-8>
25. Koornwinder T. H. Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups. In: Askey R. A., Koornwinder T. H., Schempp W. (eds.). *Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications*. Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1984, pp. 1–85. https://doi.org/10.1007/978-94-010-9787-1_1

Поступила в редакцию / Received 28.09.2023

Принята к публикации / Accepted 13.03.2024

Опубликована / Published 28.02.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 34–45

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 34–45
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-34-45>, EDN: DEBJXL

Article

On structure of isomorphisms of universal graphic automata

V. A. Molchanov, R. A. Farakhutdinov✉

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Vladimir A. Molchanov, v.molchanov@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6509-3090>, SPIN: 7518-1174, AuthorID: 2266

Renat A. Farakhutdinov, renatfara@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2877-8557>, SPIN: 7667-3987, AuthorID: 1078801

Abstract. Automata theory is one of the branches of mathematical cybernetics, that studies information transducers that arise in many applied problems. The major objective of automata theory is to develop methods by which one can describe and analyze the dynamic behavior of discrete systems. Depending on study tasks, automata are considered, for which the set of states and the set of output signals are equipped with additional mathematical structure preserved by transition and output functions of automata. We investigate automata over graphs and call them graphic automata. Universal graphic automaton $\text{Atm}(G, H)$ is a universally attractive object in the category of such automata. The semigroup of input signals of the automaton is $S(G, H) = \text{End } G \times \text{Hom}(G, H)$. It can be considered as a derivative algebraic system of the mathematical object $\text{Atm}(G, H)$, which contains useful information about the initial automaton. It is common knowledge that properties of the semigroup are interconnected with properties of the algebraic structure of the automaton. Hence, it is possible to study universal graphic automata by researching their input signal semigroups. Earlier the authors proved that a wide class of such kind of automata are determined up to isomorphism by their input signal semigroups. In this paper, we investigate a connection between isomorphisms of universal graphic automata and isomorphisms of their components — semigroups of input signals and graphs of states and output signals.

Keywords: automata, graph, semigroup, isomorphism, automorphism

For citation: Molchanov V. A., Farakhutdinov R. A. On structure of isomorphisms of universal graphic automata. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 34–45. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-34-45>, EDN: DEBJXL

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 519.713.2

О структуре изоморфизмов универсальных графовых автоматов

В. А. Молчанов, Р. А. Фарахутдинов✉

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Молчанов Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, v.molchanov@inbox.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6509-3090>, SPIN: 7518-1174, AuthorID: 2266



Фарахутдинов Ренат Абуханович, аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, renatfara@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2877-8557>, SPIN: 7667-3987, AuthorID: 1078801

Аннотация. Теория автоматов — один из разделов математической кибернетики, изучающий преобразователи информации, возникающие во многих прикладных задачах. Основная цель теории автоматов — разработка методов, с помощью которых можно описывать и анализировать динамическое поведение дискретных систем. В зависимости от исследуемых задач рассматриваются автоматы, у которых множество состояний и множество выходных сигналов наделены дополнительной математической структурой, согласованной с функциями переходов и выходов автомата. Мы исследуем автоматы над графами и называем их графовыми автоматами. Универсальный графовый автомат $\text{Atm}(G, H)$ является универсально притягивающим объектом в категории таких автоматов. Полугруппа входных сигналов такого автомата имеет вид $S(G, H) = \text{End } G \times \text{Hom}(G, H)$. Её можно рассматривать как производную алгебраическую систему математического объекта $\text{Atm}(G, H)$, содержащую полезную информацию об исходном автомате. Известно, что свойства полугруппы взаимосвязаны со свойствами алгебраической структуры автомата. Следовательно, можно изучать универсальные графовые автоматы, исследуя их полугруппы входных сигналов. Ранее авторы доказали, что широкий класс таких автоматов определяется (с точностью до изоморфизма) своими полугруппами входных сигналов. В данной работе исследуется связь изоморфизмов универсальных графовых автоматов с изоморфизмами их компонент — полугрупп входных сигналов и графов состояний и выходных сигналов.

Ключевые слова: автомат, граф, полугруппа, изоморфизм, автоморфизм

Для цитирования: Molchanov V. A., Farakhutdinov R. A. On structure of isomorphisms of universal graphic automata [Молчанов В. А., Фарахутдинов Р. А. О структуре изоморфизмов универсальных графовых автоматов] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 34–45. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-34-45>, EDN: DEBJXL

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

One of the main topics of modern algebra is an investigation of mathematical objects by studying derived algebraic systems associated with these objects. Various algebraic systems are considered the initial mathematical objects, and the automorphism groups, the endomorphism semigroups, the lattices of subsystems of algebraic systems, and others are considered as the derived algebraic systems. For the automorphism groups of algebraic systems, the endomorphism semigroups of graphs, the endomorphism rings of modules, and other derived algebraic systems, these questions were very successfully investigated by B. I. Plotkin [1], A. G. Pinus [2, 3], L. M. Gluskin [4, 5], Yu. M. Vazhenin [6, 7], A. V. Mikhalev [8], and other algebraists.

It is also of interest to study structured automata in the categories [9], that is automata, in which the sets of states and output signals are equipped with mathematical structures from a category $\mathbf{K}$, and transition and output functions are morphisms of this category. A set of input signals is usually equipped with an associative operation, which makes it an object of the semigroup category. The study of such automata belongs to the direction described above: in this case, the initial object is an automaton, and the derived system is the semigroup of its input signals, which are considered transformations of the set of the automaton states.

In this paper, we consider automata over the graph category $\mathbf{Gr}$, which is called graphic automata. As follows from [9], in the category of graphic automata with a graph of states G_1 and a graph of output signals G_2 , there is the universal attracting object $\text{Atm}(G_1, G_2)$, which is called universal graphic automaton over the graphs G_1, G_2 . The semigroup of input signals of such automaton $S = \text{End } G_1 \times \text{Hom}(G_1, G_2)$ is regarded as the derived algebraic system of the automaton $\text{Atm}(G_1, G_2)$. In the paper [10], authors investigated the problem of definability of such automata by their input signal semigroups: it is shown that the universal graphic automata

over many reflexive graphs are completely determined (up to isomorphism and graph duality) by their semigroups of input signals. In this article, for such automata, we consider the structure of their isomorphisms and groups of automorphisms. Theorem 2 shows a connection between isomorphisms of universal graphic automata and isomorphisms of the automaton components — the graph of states, the graph of output signals, and the input signal semigroup. For universal graphic automata over quasi-acyclic graphs of states and antisymmetric graphs of output signals, in Theorem 3, we obtain the isomorphism structure description of the input signal semigroups of automata, and in Theorem 4, we obtain the structure description of the automorphism group of automata.

1. Basic notions

We assume that the reader is familiar with basic notions of the semigroup theory [11], the automata theory [9], and the graph theory [12]. Let us briefly unify the basic notations used in this work.

From now on, by a graph, we mean a directed graph. For a graph $G = (X, \rho)$, an edge $(x, y) \in \rho$ is called proper if $(y, x) \notin \rho$. A graph is called quasi-acyclic if each of its proper edges does not belong to any cycle. Acyclic graphs, quasi-order graphs, and many others are examples of quasi-acyclic graphs. A quasi-acyclic graph will be called trivial if it has no proper edges, and nontrivial otherwise. For a graph $G = (X, \rho)$ the graph $\tilde{G} = (X, \rho^{-1})$ is called the dual graph of G .

In what follows, under connectivity components of a graph, we keep in mind weak connectivity components. A graph is called connected if it has only one connectivity component.

An anti-isomorphism of a graph $G_1 = (X_1, \rho_1)$ onto a graph $G_2 = (X_2, \rho_2)$ is an isomorphism of the graph G_1 onto the graph $\tilde{G}_2$ dual to G_2 . An anti-automorphism of a graph $G = (X, \rho)$ is an isomorphism of the graph G onto its dual graph $\tilde{G}$.

A semigroup automaton is an algebraic system $A = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$ consisting of a set of states X_1 , an input signal semigroup $(S, \cdot)$, a set of output signals X_2 , a transition function $\star : X_1 \times S \rightarrow X_1$, and an output function $\diamond : X_1 \times S \rightarrow X_2$, satisfying

$$\begin{aligned}x \star (s_1 \cdot s_2) &= (x \star s_1) \star s_2, \\x \diamond (s_1 \cdot s_2) &= (x \star s_1) \diamond s_2\end{aligned}$$

for every $x \in X_1$, $s_1, s_2 \in S$.

A semigroup automaton $A = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$ is called graphic if its set of states X_1 and set of output signals X_2 are equipped with structures of graphs $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$ such that for every input signal $s \in S$ a transition function $\delta_s = x \star s$ ($x \in X_1$) is an endomorphism of G_1 and an output function $\lambda_s = x \diamond s$ ($x \in X_1$) is a homomorphism of G_1 in G_2 . In this case, we denote the automaton by $A = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$. For any graphs $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$ the graphic automaton $\text{Atm}(G_1, G_2) = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$ with the input signal semigroup $S = \text{End } G_1 \times \text{Hom}(G_1, G_2)$, consisting of pairs $s = (\varphi, \psi)$, $\varphi \in \text{End } G_1$, $\psi \in \text{Hom}(G_1, G_2)$, and functions $x \star s = \varphi(x)$, $x \diamond s = \psi(x)$ ($x \in X_1$), is the universally attracting object in the category of graphic automata, that is why it is called universal graphic automaton [9].

A mapping $c_x : X \rightarrow \{x\}$ is called a constant mapping of a set X to an element x . For mappings $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ a composition is defined by the formula $(f \cdot g)(x) = g(f(x))$ for $x \in X$. For mappings $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$ a direct product $f \times g : X \times X \rightarrow Y \times Y$ is defined by the formula $(f \times g)(u, v) = (f(u), g(v))$. For any transformation φ of a set X , it is true that $(f \times g)(\varphi) = f^{-1}\varphi g$. We denote $f \times f = f^2$.

An isomorphism of a graphic automaton $A_1 = (G_1, S_1, G'_1, \star_1, \diamond_1)$, where $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G'_1 = (X'_1, \rho'_1)$, onto a graphic automaton $A_2 = (G_2, S_2, G'_2, \star_2, \diamond_2)$, where $G_2 = (X_2, \rho_2)$, $G'_2 = (X'_2, \rho'_2)$, is an ordered triple $\gamma = (f, h, g)$, consisting of isomorphisms $f : G_1 \rightarrow G_2$,



$h : S_1 \rightarrow S_2$, $g : G'_1 \rightarrow G'_2$ such that for any $x \in X_1$, $s, t \in S_1$ the following conditions hold:

$$\begin{aligned} h(s \cdot t) &= h(s) \cdot h(t), \\ f(x \star_1 s) &= f(x) \star_2 h(s), \\ g(x \diamond_1 s) &= f(x) \diamond_2 h(s). \end{aligned}$$

An isomorphism of an automaton $A = (G, S, G', \star, \diamond)$ onto itself is called an automorphism of the automaton A . The set of all automorphisms of A with the composition forms the automorphism group $\text{Aut } A$ of the automaton A .

2. Preparatory phase

To solve the main issue, we use some auxiliary results obtained in [10].

Lemma 1. *Let $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$ be reflexive graphs. Then the following statements are true for the semigroup $S = \text{End } G_1 \times \text{Hom}(G_1, G_2)$:*

- 1) *an element $s \in S$ is a right zero of the semigroup S if and only if there exist $a \in X_1$, $b \in X_2$ such that $s = (c_a, c_b)$;*
- 2) *an element $s \in S$ is a left identity of the semigroup S if and only if $s = (\Delta_X, \psi)$ for some $\psi \in \text{Hom}(G_1, G_2)$.*

For graphs G_1, G_2 , we denote by $Z(G_1, G_2)$ the set of all right zeros of the semigroup $S = \text{End } G_1 \times \text{Hom}(G_1, G_2)$, by $U(G_1, G_2)$ — the set of all left identities of the semigroup S . It is clear that the set $Z(G_1, G_2)$ is defined in the semigroup S by the predicate $M(x) = (\forall y)(y \cdot x = x)$ of the semigroup theory, and the set $U(G_1, G_2)$ is defined in the semigroup S by the predicate $N(x) = (\forall y)(x \cdot y = y)$ of the semigroup theory.

Lemma 2. *Let $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$ be reflexive graphs. Then the formula of the semigroup theory*

$$E(x, y) = M(x) \wedge M(y) \wedge (\forall e)(N(e) \implies x \cdot e = y \cdot e)$$

defines a binary relation ε on the semigroup $S = \text{End } G_1 \times \text{Hom}(G_1, G_2)$, such that the following statements hold:

- 1) *ε is an equivalence on the set $Z(G_1, G_2)$ such that for any elements $s_1, s_2 \in Z(G_1, G_2)$ the condition $s_1 \equiv_\varepsilon s_2$ is valid if and only if $s_1 = (c_a, c_u)$, $s_2 = (c_a, c_v)$ for some $a \in X_1$, $u, v \in X_2$;*
- 2) *for any right zero $s = (c_a, c_b)$ of the semigroup S , the equivalence class $\varepsilon(s) = \{(c_a, c_u) \mid u \in X_2\}$.*

By analogy with Lemma 1 in [13], we can obtain the following result.

Lemma 3. *Let $G = (X, \rho)$, $H = (Y, \sigma)$ be reflexive graphs, $v \in X$, $(x, y) \in \sigma$. A mapping $f : X \rightarrow Y$ defined for $u \in X$ by the formula*

$$f(u) = \begin{cases} y, & \text{if there is a path from } v \text{ to } u, \\ x, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

is an homomorphism of G_1 in G_2 .

3. Main results

The following result describes the relationship between isomorphisms of the input signal semigroup of a universal graphic automaton and isomorphisms of its graph of states and its graph of output signals.



Theorem 1. Let $G_i = (X_i, \rho_i), G'_i = (X'_i, \rho'_i)$ be reflexive graphs ($i = 1, 2$), the graph G_1 has an edge that does not belong to any cycle, and let $\text{Atm}(G_1, G'_1), \text{Atm}(G_2, G'_2)$ be the universal graphic automata with the input signal semigroups $S_i = \text{End } G_i \times \text{Hom}(G_i, G'_i)$ ($i = 1, 2$), $h : S_1 \rightarrow S_2$ is an isomorphism of the semigroup S_1 onto the semigroup S_2 . Then there exist isomorphisms f, g_a ($a \in X_1$) of graphs G_1, G'_1 onto graphs G_2, G'_2 respectively or onto their dual graphs $\tilde{G}_2, \tilde{G}'_2$ respectively, such that for any pair $(\varphi, \psi) \in S_1$ the equality

$$h(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^\varphi) \quad (1)$$

holds, where $\psi^\varphi(f(a)) = g_{\varphi(a)}(\psi(a))$ for all $a \in X_1$.

Proof. Consider reflexive graphs $G_i = (X_i, \rho_i), G'_i = (X'_i, \rho'_i)$ ($i = 1, 2$), such that the graph G_1 has an edge that does not belong to any cycle, and an isomorphism h of the semigroup $S_1 = \text{End } G_1 \times \text{Hom}(G_1, G'_1)$ onto the semigroup $S_2 = \text{End } G_2 \times \text{Hom}(G_2, G'_2)$.

It is common knowledge that every semigroup isomorphism preserves the satisfiability of formulas of the elementary semigroup theory. Hence, the isomorphism h preserves the satisfiability of the formulas $M(x), N(x), E(x, y)$. Therefore, the isomorphism h maps the set of all right zeros $Z(G_1, G'_1)$ of the semigroup S_1 onto the set of all right zeros $Z(G_2, G'_2)$ of the semigroup S_2 , the set of all left identities $U(G_1, G'_1)$ of the semigroup S_1 onto the set of all left identities $U(G_2, G'_2)$ of the semigroup S_2 . According to Lemma 2, the Cartesian product h^2 maps the equivalence $\varepsilon_1 = \varepsilon_{(G_1, G'_1)}$ (defined in the semigroup S_1 by the formula $E(x, y)$) onto the equivalence $\varepsilon_2 = \varepsilon_{(G_2, G'_2)}$ (defined in the semigroup S_2 by the formula $E(x, y)$).

According to item 1 of Lemma 1, for any $a \in X_1, b \in X'_1$, there are elements $d \in X_2, e \in X'_2$ such that $h(c_a, c_b) = (c_d, c_e)$. The isomorphism h maps the equivalence class $\varepsilon_1(c_a, c_b)$ to the equivalence class $\varepsilon_2(c_d, c_e)$. Therefore, formulas $f(a) = d, g_a(b) = e$ define mappings $f : X_1 \rightarrow X_2, g_a : X'_1 \rightarrow X'_2$ ($a \in X_1$) such that

$$h(c_a, c_b) = (c_{f(a)}, c_{g_a(b)}).$$

It is easy to see that mappings $f : G_1 \rightarrow G_2, g_a : G'_1 \rightarrow G'_2$ ($a \in X_1$) are bijections.

Let $(\varphi, \psi) \in S_1, a \in X_1$ and $\varphi(a) = d, \psi(a) = e$. Then

$$(c_a, c_b) \cdot (\varphi, \psi) = (c_a \varphi, c_a \psi) = (c_{\varphi(a)}, c_{\psi(a)}) = (c_d, c_e).$$

Since h is an isomorphism of S_1 onto S_2 , the equality

$$h(c_a, c_b) \cdot h(\varphi, \psi) = h(c_d, c_e)$$

holds. We denote $h(\varphi, \psi) = (\varphi', \psi')$. According to the construction of mappings $f : X_1 \rightarrow X_2, g_a : X'_1 \rightarrow X'_2$ ($a \in X_1$), we obtain

$$h(c_a, c_b) = (c_{f(a)}, c_{g_a(b)}), \quad h(c_d, c_e) = (c_{f(d)}, c_{g_d(e)}).$$

Then

$$\begin{aligned} (c_{f(a)}, c_{g_a(b)}) \cdot (\varphi', \psi') &= (c_{f(d)}, c_{g_d(e)}), \\ (c_{f(a)} \varphi', c_{f(a)} \psi') &= (c_{f(d)}, c_{g_d(e)}), \\ (c_{\varphi'(f(a))}, c_{\psi'(f(a))}) &= (c_{f(d)}, c_{g_d(e)}), \end{aligned}$$

and, hence, $\varphi'(f(a)) = f(d) = f(\varphi(a)), \psi'(f(a)) = g_d(e) = g_{\varphi(a)}(\psi(a))$. Therefore,

$$\begin{aligned} \varphi' &= \{(f(a), f(\varphi(a))) | a \in X_1\} = f^2(\varphi), \\ \psi' &= \{(f(a), g_{\varphi(a)}(\psi(a))) | a \in X_1\} = \psi^\varphi, \end{aligned}$$



where $\psi^\varphi(f(a)) = g_{\varphi(a)}(\psi(a))$ for all $a \in X_1$.

Hence, for any pair $(\varphi, \psi) \in S_1$, the equality (1) holds.

It is easy to verify that the Cartesian product $f^2 : \text{End } G_1 \rightarrow \text{End } G_2$ is a bijection. Moreover, for any $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{End } G_1$ the following equalities holds:

$$f^2(\varphi_1\varphi_2) = f^{-1}\varphi_1\varphi_2f = f^{-1}\varphi_1\Delta_{X_1}\varphi_2f = f^{-1}\varphi_1ff^{-1}\varphi_2f = f^2(\varphi_1)f^2(\varphi_2).$$

It follows that f^2 is an isomorphism of $\text{End } G_1$ onto $\text{End } G_2$. According to theorem condition, the graph G_1 has an edge $(u_0, v_0) \in \rho_1$ that does not belong to any cycle. On the strength of Yu. M. Vazhenin's result [7], the mapping f is an isomorphism or an anti-isomorphism of the graph $G_1 = (X_1, \rho_1)$ onto the graph $G_2 = (X_2, \rho_2)$.

Suppose that f is an isomorphism of the graph G_1 onto the graph G_2 . It is necessary to prove that, for any $a \in X_1$, the mapping g_a is an isomorphism of the graph G'_1 onto the graph G'_2 .

Let $(x_0, y_0) \in \rho'_1$ holds for some $x_0, y_0 \in X'_1$. The mapping $\psi : G_1 \rightarrow G'_1$, defined for $u \in X_1$ by the formula

$$\psi(u) = \begin{cases} y_0, & \text{if there exists a path from } v_0 \text{ to } u, \\ x_0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

is a homomorphism of the graph G_1 into the graph G'_1 due to Lemma 3, and $\psi^2(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$. It means $(c_a, \psi) \in S_1$, and from (1) it follows that $h(c_a, \psi) = (c_{f(a)}, \psi^{c_a})$, $\psi^{c_a} \in \text{Hom}(G_2, G'_2)$. On the other hand, $\psi^{c_a}(f(x)) = g_{c_a(x)}(\psi(x)) = g_a(\psi(x))$. Then for $x = u_0$ we get $\psi^{c_a}(f(u_0)) = g_a(\psi(u_0)) = g_a(x_0)$, and for $x = v_0$ we get $\psi^{c_a}(f(v_0)) = g_a(\psi(v_0)) = g_a(y_0)$. Hence ψ^{c_a} maps $(f(u_0), f(v_0))$ into $(g_a(x_0), g_a(y_0))$. Since $(f(u_0), f(v_0)) \in \rho_2$ and ψ^{c_a} is a homomorphism of the graph G_2 into the graph G'_2 , then $(g_a(x_0), g_a(y_0)) \in \rho'_2$. Thus, $g_a \in \text{Hom}(G'_1, G'_2)$.

Conversely, let the condition $(x'_0, y'_0) \in \rho'_2$ hold for some $x'_0, y'_0 \in X'_2$. Then from Lemma 3 it follows that for some homomorphism $\psi_1 \in \text{Hom}(G_2, G'_2)$ the equation $\psi_1(f(u_0), f(v_0)) = (x'_0, y'_0)$ holds. Hence $(c_{f(a)}, \psi_1) \in S_2$, and there exists such pair $(\varphi, \psi) \in S_1$ that $h(\varphi, \psi) = (c_{f(a)}, \psi_1)$. Thus, due to the equation (1), we have that $c_{f(a)} = f^2(\varphi) = f^{-1}\varphi f$, $\psi_1 = \psi^\varphi$. Then

$$\varphi = (ff^{-1})\varphi(ff^{-1}) = fc_{f(a)}f^{-1} = f(f^{-1}c_af)f^{-1} = (ff^{-1})c_a(ff^{-1}) = c_a.$$

As a result we get

$$\begin{aligned} x'_0 &= \psi_1(f(u_0)) = \psi^{c_a}(f(u_0)) = g_a(\psi(u_0)), \quad \psi(u_0) = g_a^{-1}(x'_0), \\ y'_0 &= \psi_1(f(v_0)) = \psi^{c_a}(f(v_0)) = g_a(\psi(v_0)), \quad \psi(v_0) = g_a^{-1}(y'_0) \end{aligned}$$

and $(g_a^{-1}(x'_0), g_a^{-1}(y'_0)) \in \rho'_1$, therefore $g_a^{-1} \in \text{Hom}(G'_2, G'_1)$. By this means g_a ($a \in X_1$) is a family of isomorphisms of the graph G'_1 onto the graph G'_2 .

Analogously if f is an isomorphism of the graph G_1 onto the graph $\tilde{G}_2$, then all mappings g_a ($a \in X_1$) are isomorphisms of the graph G'_1 onto the graph $\tilde{G}'_2$, because in this case the condition $(u_0, v_0) \in \rho_1$ is equivalent to $(f(v_0), f(u_0)) \in \rho_2$, the condition $(x_0, y_0) \in \rho'_1$ is equivalent to $(g_a(y_0), g_a(x_0)) \in \rho'_2$. $\square$

The following result shows the connection between isomorphisms of universal graphic automata and their components.

Theorem 2. Let $G_i = (X_i, \rho_i)$, $G'_i = (X'_i, \rho'_i)$ be graphs ($i = 1, 2$) and f be an isomorphism of G_1 onto G_2 , g be an isomorphism of G'_1 onto G'_2 . The ordered triple of mappings $\gamma = (f, h, g)$ is an isomorphism of the universal graphic automaton $A_1 = \text{Atm}(G_1, G'_1)$ with the input signal semigroup $S_1 = \text{End } G_1 \times \text{Hom}(G_1, G'_1)$ onto the universal graphic automaton $A_2 = \text{Atm}(G_2, G'_2)$ with the input signal semigroup $S_2 = \text{End } G_2 \times \text{Hom}(G_2, G'_2)$ if and only if the mapping $h : S_1 \rightarrow S_2$ is defined for any $(\varphi, \psi) \in S_1$ by the formula $h(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi))$.



Proof. Necessity. Let $\gamma = (f, h, g)$ be an isomorphism of the automaton A_1 onto A_2 . Then for any $x \in X_1$, $s = (\varphi_1, \psi_1) \in S_1$ the following conditions hold:

$$f(x \star_1 s) = f(x) \star_2 h(s), \quad g(x \diamond_1 s) = f(x) \diamond_2 h(s).$$

Then for the image $h(s) = (\varphi_2, \psi_2) \in S_2$ for all $x \in X_1$ it follows

$$f(\varphi_1(x)) = \varphi_2(f(x)), \quad g(\psi_1(x)) = \psi_2(f(x)).$$

Hence, $\varphi_1 f = f \varphi_2$, $\psi_1 g = f \psi_2$, and it follows $\varphi_2 = f^{-1} \varphi_1 f = f^2(\varphi_1)$, $\psi_2 = f^{-1} \psi_1 g = (f \times g)(\psi_1)$. Therefore, $h(\varphi_1, \psi_1) = (f^2(\varphi_1), (f \times g)(\psi_1))$.

Sufficiency. Let isomorphisms f of G_1 onto G_2 and g of G'_1 onto G'_2 define a mapping $h : S_1 \rightarrow S_2$ by the formula $h(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi))$ for all $(\varphi, \psi) \in S_1$. Let $(\varphi, \psi) \in S_1$. By the definition $\varphi \in \text{End } G_1$, $\psi \in \text{Hom}(G_1, G'_1)$, hence $f^2(\varphi) = f^{-1} \varphi f \in \text{End } G_2$, $(f \times g)(\psi) = f^{-1} \psi g \in \text{Hom}(G_2, G'_2)$. It follows that $h(\varphi, \psi) \in S_2$.

It is easy to verify that $h : S_1 \rightarrow S_2$ is a bijective mapping. Extra to this, for any $s_1 = (\varphi_1, \psi_1)$, $s_2 = (\varphi_2, \psi_2)$ from S_1 the following equalities hold:

$$\begin{aligned} h(s_1 \cdot s_2) &= (f^2(\varphi_1 \varphi_2), (f \times g)(\varphi_1 \psi_2)) = (f^{-1} \varphi_1 \varphi_2 f, f^{-1} \varphi_1 \psi_2 g) = \\ &= (f^{-1} \varphi_1 f f^{-1} \varphi_2 f, f^{-1} \varphi_1 f f^{-1} \psi_2 g) = (f^2(\varphi_1) f^2(\varphi_2), f^2(\varphi_1) (f \times g)(\psi_2)) = \\ &= (f^2(\varphi_1), (f \times g)(\psi_1)) \cdot (f^2(\varphi_2), (f \times g)(\psi_2)) = h(s_1) \cdot h(s_2). \end{aligned}$$

Thus, h is an isomorphism of S_1 onto S_2 .

Let $x \in X_1$, $(\varphi, \psi) \in S_1$. The following equalities hold:

$$\begin{aligned} f(x) \star_2 h(s) &= f(x) \star_2 (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi)) = f^2(\varphi)(f(x)) = \\ &= (f^{-1} \varphi f)(f(x)) = f(\varphi(f^{-1}(f(x)))) = f(\varphi(x)) = f(x \star_1 s), \\ f(x) \diamond_2 h(s) &= f(x) \diamond_2 (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi)) = ((f \times g)(\psi))(f(x)) = \\ &= (f^{-1} \psi g)(f(x)) = g(\psi(f^{-1}(f(x)))) = g(\psi(x)) = g(x \diamond_1 s). \end{aligned}$$

Therefore, the ordered triple $\gamma = (f, h, g)$ is an isomorphism of the automaton A_1 onto the automaton A_2 . $\square$

Theorem 2 implies that for automata $A_1 = \text{Atm}(G_1, G'_1)$, $A_2 = \text{Atm}(G_2, G'_2)$ any isomorphism $\gamma = (f, h, g)$ of A_1 onto A_2 is completely determined by a pair of isomorphisms of state graphs and output signal graphs. On the other hand, the set of isomorphisms of semigroups of input signals of such automata is much larger than the set of isomorphisms of automata. It is demonstrated by the following example.

Let $G = (X, \rho)$ be a graph with connectivity components $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ and $G' = (\mathbb{Z}, \leq)$. For any $n \in \mathbb{N}$, we define a transformation g_n of the graph G' in such a manner: $g_n(z) = z + n$ ($z \in \mathbb{Z}$). All transformations g_n are automorphisms of the graph G' . Consider a universal graphic automaton $\text{Atm}(G, G')$ with the semigroup of input signals $S = \text{End } G \times \text{Hom}(G, G')$. For any pair $(\varphi, \psi) \in S$, we set $h(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^\varphi)$, where $\psi^\varphi(a) = g_n(\psi(a))$ for all $a \in X$, satisfying the condition $\varphi(a) \in X_n$. It is clear that the mapping h is an automorphism of the semigroup S , but it cannot be the second component of any automorphism of the automaton $\text{Atm}(G, G')$.

The following example shows that for universal graphic automata not all isomorphisms of the state graphs and families of isomorphisms of the output signal graphs define isomorphisms of the semigroups of input signals.

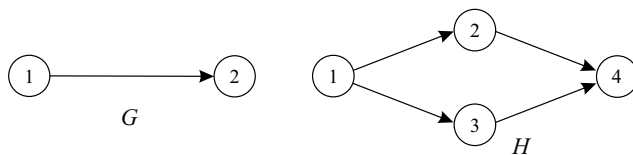


Figure. Graphs G and H

Let $G = (X_G, \rho_G)$, $H = (X_H, \rho_H)$ be reflexive graphs pictured in the Figure (loops are not shown), $\text{Atm}(G, H)$ is a



universal graphic automaton with the semigroup of input signals $S = \text{End } G \times \text{Hom}(G, H)$. Consider the following two automorphisms of the graph H : $g_1 = \Delta_H$ — the identity automorphism of the graph H , $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. For each $(\varphi, \psi) \in S$, we set $h(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^\varphi)$, where $\psi^\varphi(x) = g_{\varphi(x)}(\psi(x))$ for all $x \in X_G$. Then, for the identity endomorphism $\varphi = \Delta_G$ and for the constant mapping ψ of the set X_G to the vertex 2 of the graph H , the condition $(\varphi, \psi) \in S$ holds, but $h(\varphi, \psi) \notin S$ because

$$h(\varphi, \psi) = \left(\Delta_G, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ g_{\varphi(1)}(\psi(1)) & g_{\varphi(2)}(\psi(2)) \end{pmatrix} \right) = \left(\Delta_G, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ g_1(2) & g_2(2) \end{pmatrix} \right) = \left(\Delta_G, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

and

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \notin \text{Hom}(G, H).$$

Therefore, $h \notin \text{Aut } S$, i.e. the identity automorphism Δ_H of the graph H and the family of automorphisms g_1, g_2 of the graph H do not define an automorphism of the automaton $\text{Atm}(G, H)$.

The following result describes the structure of isomorphisms of the semigroups of input signals of universal graphic automata.

Theorem 3. *Let $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G'_1 = (X'_1, \rho'_1)$, $G_2 = (X_2, \rho_2)$, $G'_2 = (X'_2, \rho'_2)$ be reflexive graphs, besides G'_1 is an antisymmetric graph, G_1 is a nontrivial quasi-acyclic graph with connectivity components $\{X_{1_i}\}$, $i \in I$, and let $\text{Atm}(G_1, G'_1)$, $\text{Atm}(G_2, G'_2)$ be the universal graphic automata with the semigroups of input signals $S_1 = \text{End } G_1 \times \text{Hom}(G_1, G'_1)$ and $S_2 = \text{End } G_2 \times \text{Hom}(G_2, G'_2)$ correspondingly. Then a mapping $h : S_1 \rightarrow S_2$ is an isomorphism of the semigroup S_1 onto the semigroup S_2 if and only if for some isomorphism (anti-isomorphism) $f : G_1 \rightarrow G_2$ and some family of isomorphisms (anti-isomorphisms) $g_i : G'_1 \rightarrow G'_2$, $i \in I$, for all $(\varphi, \psi) \in S_1$ the mapping h is defined by the formula*

$$h(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^\varphi), \quad (2)$$

where $\psi^\varphi(f(a)) = g_i(\psi(a))$ for any $a \in X_1$, such that the condition $\varphi(a) \in X_{1_i}$ is satisfied for some $i \in I$.

Proof. *Necessity.* Let $h : S_1 \rightarrow S_2$ be an isomorphism of S_1 onto S_2 . By Theorem 1 the isomorphism h inspires bijections $f : G_1 \rightarrow G_2$, $g_a : G'_1 \rightarrow G'_2$ ($a \in X_1$) by the formulas:

$$\begin{aligned} f(a) = b &\iff (\exists y \in X'_1, z \in X'_2) h(c_a, c_y) = (c_b, c_z) \quad (a \in X_1, b \in X_2), \\ g_a(y) = z &\iff h(c_a, c_y) = (c_{f(a)}, c_z) \quad (y \in X'_1, z \in X'_2). \end{aligned}$$

According to the construction of the bijections f, g_a ($a \in X_1$), we have

$$h(c_a, c_x) = (c_{f(a)}, c_{g_a(x)}), \quad h^{-1}(c_{f(a)}, c_y) = (c_a, c_{g_a^{-1}(x)}). \quad (3)$$

By Theorem 1 for any pair of mappings $(\varphi, \psi) \in S_1$ equation (2) holds, the mapping f is an isomorphism (or an anti-isomorphism) of G_1 onto G_2 , the family of mappings g_a are isomorphisms (or anti-isomorphisms) of G'_1 onto G'_2 for all $a \in X_1$.

We now show that, for adjacent vertices a, b of the graph G_1 , isomorphisms g_a, g_b are equal. For definiteness, let $(a, b) \in \rho_1$ and let f be an isomorphism of G_1 onto G_2 . If the edge $(a, b) \in \rho_1$ is proper, then by Lemma 1 [13], there exists an endomorphism $\varphi_1 \in \text{End } G_1$ such that $\varphi_1(X_1) = \{a, b\}$, $\varphi_1(a) = a$, $\varphi_1(b) = b$. If the edge $(a, b) \in \rho_1$ has an opposite edge, then consider the transformation $\varphi_2 : G_1 \rightarrow G_1$, which is defined for all $u \in X_1$ by the formula

$$\varphi_2(u) = \begin{cases} a, & u = a, \\ b, & u \neq a. \end{cases}$$



Obviously $\varphi_2 \in \text{End } G_1$. Therefore, in any case, there is an endomorphism $\varphi \in \text{End } G_1$ such that $\varphi(X_1) = \{a, b\}$, $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$. Then for all $x \in X'_1$ we get

$$h(\varphi, c_x) = (f^2(\varphi), c_x^\varphi) = \left(f^2(\varphi), \begin{pmatrix} \cdots & f(a) & \cdots & f(b) & \cdots \\ \cdots & g_a(x) & \cdots & g_b(x) & \cdots \end{pmatrix} \right) \in S_2.$$

Since $(a, b) \in \rho_1$ and f is an isomorphism of G_1 onto G_2 , then $(f(a), f(b)) \in \rho_2$, and since $c_x^\varphi \in \text{Hom}(G_2, G'_2)$, then $(g_a(x), g_b(x)) \in \rho'_2$. Similarly, using formulas (3), it is possible to show that, for $f(a), f(b) \in X_2$ and any $y \in X'_2$, the condition $(g_a^{-1}(y), g_b^{-1}(y)) \in \rho'_1$ holds. Then, for isomorphisms g_a, g_b of the graph G'_1 onto the graph G'_2 and for any $x \in X'_1$, we get

$$(g_a(x), g_b(x)) \in \rho'_2 \implies (g_b^{-1}(g_a(x)), g_b^{-1}(g_b(x))) \in \rho'_1 \iff (g_b^{-1}(g_a(x)), x) \in \rho'_1, \\ (g_a^{-1}(g_a(x)), g_b^{-1}(g_a(x))) \in \rho'_1 \iff (x, g_b^{-1}(g_a(x))) \in \rho'_1.$$

Since the graph G'_1 is antisymmetric, then $g_b^{-1}(g_a(x)) = x$, hence $g_a \cdot g_b^{-1} = \Delta_{X'_1}$, i.e. $g_a = g_b$.

Sufficiency. Let for an isomorphism $f : G_1 \rightarrow G_2$ and a family of isomorphisms $g_i : G'_1 \rightarrow G'_2$ ($i \in I$) a mapping $h : S_1 \rightarrow S_2$ is defined by the formula

$$h(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^\varphi),$$

where $\psi^\varphi(f(a)) = g_i(\psi(a))$ for all $a \in X_1$ such that the condition $\varphi(a) \in X_{1_i}$ is satisfied for some $i \in I$.

Let's check that $h(\varphi, \psi) \in S_2$ for any $(\varphi, \psi) \in S_1$. In Theorem 1 it was shown that f^2 is an isomorphism of $\text{End } G_1$ onto $\text{End } G_2$, hence $f^2(\varphi) \in \text{End } G_2$.

Let $(u_2, v_2) \in \rho_2$, $u_1 = f^{-1}(u_2)$, $v_1 = f^{-1}(v_2)$. Since f is an isomorphism of G_1 onto G_2 , then $(u_1, v_1) \in \rho_1$, and since $\varphi \in \text{End } G_1$, then $(\varphi(u_1), \varphi(v_1)) \in \rho_1$ and $\varphi(u_1), \varphi(v_1)$ belong to some connectivity component X_{1_i} of the graph G_1 . Since $\psi \in \text{Hom}(G_1, G'_1)$, we get $(\psi(u_1), \psi(v_1)) \in \rho'_1$. Then for the isomorphism g_i of the graph G'_1 onto the graph G'_2 we obtain that $(g_i(\psi(u_1)), g_i(\psi(v_1))) \in \rho'_2$ and, consequently, $(\psi^\varphi(u_2), \psi^\varphi(v_2)) \in \rho'_2$. This implies $\psi^\varphi \in \text{Hom}(G_2, G'_2)$ and $h(\varphi, \psi) \in S_2$.

Let us verify that the mapping h is a bijection. Let us show that the mapping h is injective: let $(\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2) \in S_1$, $(\varphi_1, \psi_1) \neq (\varphi_2, \psi_2)$. If $\varphi_1 \neq \varphi_2$ then $f^2(\varphi_1) \neq f^2(\varphi_2)$, hence $h(\varphi_1, \psi_1) \neq h(\varphi_2, \psi_2)$. If $\varphi_1 = \varphi_2$, then $\psi_1 \neq \psi_2$, that is, there exists an element $a \in X_1$ such that $\psi_1(a) \neq \psi_2(a)$. Suppose the element a belongs to a connectivity component X_{1_i} of the graph G_1 . Then $g_i(\psi_1(a)) \neq g_i(\psi_2(a))$ and hence $\psi_1^\varphi(f(a)) \neq \psi_2^\varphi(f(a))$, i.e. $\psi_1^\varphi \neq \psi_2^\varphi$. Thus $h(\varphi_1, \psi_1) \neq h(\varphi_2, \psi_2)$ and h is injective.

Let us show that the mapping h is surjective: let $(\varphi_2, \psi_2) \in S_2$. We define mappings $\varphi_1 = f^{-1}(\varphi_2)$, $\psi_1(a) = g_i^{-1}(\psi_2(f(a)))$ for all $a \in X_1$ such that $\varphi_1(a) \in X_{1_i}$ (for some $i \in I$). In Theorem 1, it was shown that $\varphi_1 \in \text{End } G_1$. Let us show that $\psi_1 \in \text{Hom}(G_1, G'_1)$. Let $(a, b) \in \rho_1$, then $(\varphi_1(a), \varphi_1(b)) \in \rho_1$, and elements $\varphi_1(a), \varphi_1(b)$ belong to the same connectivity component X_{1_i} of the graph G_1 . As a result, we get the equalities

$$\psi_1(a) = g_i^{-1}(\psi_2(f(a))), \quad \psi_1(b) = g_i^{-1}(\psi_2(f(b))).$$

Since f is an isomorphism of G_1 onto G_2 , it follows that $(f(a), f(b)) \in \rho_2$. Moreover, $\psi_2 \in \text{Hom}(G_2, G'_2)$ implies $(\psi_2(f(a)), \psi_2(f(b))) \in \rho'_2$ and from the fact that g_i is an isomorphism of G'_1 onto G'_2 it follows that

$$(g_i^{-1}(\psi_2(f(a))), g_i^{-1}(\psi_2(f(b)))) \in \rho'_1,$$

i.e. $(\psi_1(a), \psi_1(b)) \in \rho'_1$. Thus $(\varphi_1, \psi_1) \in S_1$, $h(\varphi_1, \psi_1) \in S_2$. Hence, h is surjective and, as a result, bijective.

Let us verify that the mapping h is consistent with the operations of semigroups S_1 and S_2 . Let $(\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2) \in S_1$. By definition, we have $(\varphi_1, \psi_1) \cdot (\varphi_2, \psi_2) = (\varphi_1\varphi_2, \varphi_1\psi_2)$. Then

$$h((\varphi_1, \psi_1) \cdot (\varphi_2, \psi_2)) = h(\varphi_1\varphi_2, \varphi_1\psi_2) = (f^2(\varphi_1\varphi_2), (\varphi_1\psi_2)^{\varphi_1\varphi_2}),$$



$$h(\varphi_1, \psi_1) \cdot h(\varphi_2, \psi_2) = (f^2(\varphi_1), \psi_1^{\varphi_1}) \cdot (f^2(\varphi_2), \psi_2^{\varphi_2}) = (f^2(\varphi_1)f^2(\varphi_2), f^2(\varphi_1)\psi_2^{\varphi_2}).$$

Hence $f^2(\varphi_1\varphi_2) = f^2(\varphi_1)f^2(\varphi_2)$.

Consider arbitrary vertex $a \in X_1$ of the graph G_1 . We denote $\varphi_1(a) = b$, $\varphi_2(b) = c$, $\psi_2(b) = d$. Then

$$(\varphi_1\varphi_2)(a) = \varphi_2(\varphi_1(a)) = \varphi_2(b) = c, \quad (\varphi_1\psi_2)(a) = \psi_2(\varphi_1(a)) = \psi_2(b) = d.$$

As a result, we get

$$\begin{aligned} (\varphi_1\psi_2)^{\varphi_1\varphi_2}(f(a)) &= g_{\varphi_1\varphi_2(a)}((\varphi_1\psi_2)(a)) = g_c(d), \\ f^2(\varphi_1)\psi_2^{\varphi_2}(f(a)) &= \psi_2^{\varphi_2}(f^2(\varphi_1)(a)) = \psi_2^{\varphi_2}(f(\varphi_1(a))) = \psi_2^{\varphi_2}(f(b)) = g_{\varphi_2(b)}(\psi_2(b)) = g_c(d). \end{aligned}$$

Therefore, right sides are equal and the equality

$$h((\varphi_1, \psi_1) \cdot (\varphi_2, \psi_2)) = h(\varphi_1\varphi_2, \varphi_1\psi_2)$$

holds. Hence, the mapping h is compatible with operations of the semigroups S_1 , S_2 and h is an isomorphism of S_1 onto S_2 .

Similarly, one can show that the mapping $h : S_1 \rightarrow S_2$ is an isomorphism if it is defined by an anti-isomorphism f of the graph G_1 onto the graph G_2 and a family of isomorphisms g_i of the graph G'_1 onto the graph G'_2 , ($i \in I$). $\square$

The results obtained describe the structure of isomorphisms of the universal graphic automata over quasi-acyclic state graphs and antisymmetric output signal graphs and also establish the relationship between isomorphisms of such automata and isomorphisms of their components (the state graphs, the output signal graphs, the input signal semigroups).

Let G, G' be graphs and $\text{Atm}(G, G')$ be the universal graphic automaton over graphs G, G' . The obtained results on the structure of isomorphisms of the universal graphic automata allow us to study the relationship between the automorphism groups of the automaton $\text{Atm}(G, G')$ and the automorphism groups of its components. We denote by $\text{Ant } G$ the set of all anti-automorphisms of the graph G , by $(\text{Aut } G)^I$ — the set of families $\{g_i\}_{i \in I}$ of automorphisms of the graph G .

Theorem 4. *Let $G = (X, \rho)$ be a nontrivial quasi-acyclic reflexive graph with connectivity components $\{X_i\}$ ($i \in I$), $G' = (X', \rho')$ be an antisymmetric reflexive graph, and let $A = \text{Atm}(G, G')$ be the universal graphic automaton with the input signal semigroup $S = \text{End } G \times \times \text{Hom}(G, G')$. Then for the automorphism group $\text{Aut } A$ of the automaton A , the automorphism groups $\text{Aut } G$, $\text{Aut } G'$ of graphs G, G' and the automorphism group $\text{Aut } S$ of the input signal semigroup S , the following conditions hold:*

- 1) $\text{Aut } A \cong (\text{Aut } G \times \text{Aut } G') \cup (\text{Ant } G \times \text{Ant } G')$;
- 2) *the automorphism group $\text{Aut } S$ is isomorphic to the algebra with the basic set $P = (\text{Aut } G \times \times (\text{Aut } G')^I) \cup (\text{Ant } G \times (\text{Ant } G')^I)$ and the binary operation $\cdot$, which is defined by the formula*

$$(f, \{g_i\}_{i \in I}) \cdot (f', \{g'_i\}_{i \in I}) = (f \cdot f', \{g_i \cdot g'_{\tilde{f}(i)}\}_{i \in I}), \quad (4)$$

where f, f' are automorphisms (anti-automorphisms) of the graph G , $\{g_i\}_{i \in I}$, $\{g'_i\}_{i \in I}$ are families of automorphisms (anti-automorphisms) of the graph G' and $\tilde{f}$ is a permutation of the set of indices I induced by the automorphism (anti-automorphism) f .

Proof. The proof of part 1) of the current theorem follows directly from Theorem 2.

Any automorphism (anti-automorphism) f of the graph $G = (X, \rho)$ defines a permutation $\tilde{f}$ of the set of indices I by the formula $\tilde{f}(i) = j$, where for any $x \in X_i$, $i \in I$ the condition $f(x) \in X_j$ is satisfied for some $j \in I$.

According to Theorem 3, every automorphism h of the semigroup S is determined by an automorphism (anti-automorphism) f of the graph G and a family of automorphisms (anti-automorphisms) $\{g_i\}_{i \in I}$ of the graph G' so that for all $(\varphi, \psi) \in S$ the formula

$$h(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^\varphi)$$



holds, where $\psi^\varphi(f(a)) = g_i(\psi(a))$ for all $a \in X$ such that the condition $\varphi(a) \in X_i$ is satisfied for some $i \in I$. This implies that the formula $\Gamma(h) = (f, \{g_i\}_{i \in I})$ ($h \in \text{Aut } S$) defines the bijection $\Gamma : \text{Aut } S \rightarrow P$. Let us show that for all $h_1, h_2 \in \text{Aut } S$ the condition $\Gamma(h_1 \cdot h_2) = \Gamma(h_1) \cdot \Gamma(h_2)$ is satisfied. Let $\Gamma(h_1) = (f_1, \{g_i^1\}_{i \in I})$, $\Gamma(h_2) = (f_2, \{g_i^2\}_{i \in I})$, where $f_1, f_2 \in \text{Aut } G$ (or $\text{Ant } G$), $\{g_i^1\}_{i \in I}, \{g_i^2\}_{i \in I} \in (\text{Aut } G')^I$ (or $(\text{Ant } G')^I$). By the definition of the binary operation $\cdot$ in the algebra P the following equalities hold:

$$\Gamma(h_1) \cdot \Gamma(h_2) = (f_1, \{g_i^1\}_{i \in I}) \cdot (f_2, \{g_i^2\}_{i \in I}) = (f_1 \cdot f_2, \{g_i^1 \cdot g_{f_1(i)}^2\}_{i \in I}).$$

Let us denote $h_1 \cdot h_2 = h$, $f_1 \cdot f_2 = f$ and $g_i^1 \cdot g_{f_1(i)}^2 = g_i$ for every $i \in I$. Let $(\varphi_1, \psi_1) \in S$ and $h_1(\varphi_1, \psi_1) = (\varphi_2, \psi_2)$. On the other hand, by Theorem 3 we have $h_1(\varphi_1, \psi_1) = (f_1^2(\varphi_1), \psi_1^{\varphi_1})$, where $\psi_1^{\varphi_1}(a) = g_i^1(\psi_1(f_1^{-1}(a)))$ for any $a \in X$ such that the condition $\varphi_1(f_1^{-1}(a)) \in X_i$ holds for some $i \in I$. Hence $\varphi_2 = f_1^2(\varphi_1)$, $\psi_2 = \psi_1^{\varphi_1}$. Similarly, for $(\varphi_2, \psi_2) \in S$ we get $h_2(\varphi_2, \psi_2) = (f_2^2(\varphi_2), \psi_2^{\varphi_2})$, where $\psi_2^{\varphi_2}(a) = g_i^2(\psi_2(f_2^{-1}(a)))$ for any $a \in X$ such that $\varphi_2(f_2^{-1}(a)) \in X_i$ holds for some $i \in I$.

As a result, we get

$$f_2^2(\varphi_2) = f_2^2(f_1^2(\varphi_1)) = (f_1 f_2)^2(\varphi_1) = f^2(\varphi_1).$$

In addition, for every $a \in X$ we get

$$\begin{aligned} \varphi_2(f_2^{-1}(a)) &= (f_1^2(\varphi_1))(f_2^{-1}(a)) = (f_1^{-1}\varphi_1 f_1)(f_2^{-1}(a)) = \\ &= (f_2^{-1}f_1^{-1}\varphi_1 f_1)(a) = ((f_1 f_2)^{-1}\varphi_1 f_1)(a) = f_1(\varphi_1((f_1 f_2)^{-1}(a))) = f_1(\varphi_1(f^{-1}(a))) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \psi_2(f_2^{-1}(a)) &= \psi_1^{\varphi_1}(f_2^{-1}(a)) = g_i^1(\psi_1(f_1^{-1}(f_2^{-1}(a)))) = \\ &= g_i^1((f_2^{-1}f_1^{-1}\psi_1)(a)) = g_i^1(((f_1 f_2)^{-1}\psi_1)(a)) = g_i^1((f^{-1}\psi_1)(a)) = g_i^1(\psi_1(f^{-1}(a))), \end{aligned}$$

where the index $i \in I$ is such that

$$\varphi_1(f_1^{-1}(f_2^{-1}(a))) = (f_2^{-1}f_1^{-1}\varphi_1)(a) = ((f_1 f_2)^{-1}\varphi_1)(a) = (f^{-1}\varphi_1)(a) = \varphi_1(f^{-1}(a)) \in X_i.$$

Consequently,

$$h(\varphi_1, \psi_1) = (h_1 h_2)(\varphi_1, \psi_1) = h_2(h_1(\varphi_1, \psi_1)) = h_2(\varphi_2, \psi_2) = (f_2^2(\varphi_2), \psi_2^{\varphi_2}) = (f^2(\varphi_1), \psi_2^{\varphi_2}),$$

where for every $a \in X$ equations hold

$$\begin{aligned} \psi_2^{\varphi_2}(a) &= g_{f_1(i)}^2(\psi_2(f_2^{-1}(a))) = g_{f_1(i)}^2(g_i^1(\psi_1(f^{-1}(a)))) = \\ &= (g_i^1 g_{f_1(i)}^2)(\psi_1(f^{-1}(a))) = g_i(\psi_1(f^{-1}(a))), \end{aligned}$$

since the vertex $\varphi_1(f^{-1}(a))$ belongs to the connectivity component X_i , the vertex $\varphi_2(f_2^{-1}(a)) = f_1(\varphi_1(f^{-1}(a)))$ belongs to the connectivity component $X_{f_1(i)}$ and $g_i^1 g_{f_1(i)}^2 = g_i$.

It is easy to see that $f = f_1 f_2$ is an automorphism (anti-automorphism) of the graph G , for each index $i \in I$ the mapping g_i is an automorphism (anti-automorphism) of the graph G' . Hence $\Gamma(h_1 \cdot h_2) = (f, \{g_i\}_{i \in I})$, where $f = f_1 f_2$, $g_i = g_i^1 g_{f_1(i)}^2$ for all $i \in I$. It follows that

$$\Gamma(h_1) \cdot \Gamma(h_2) = (f_1 f_2, \{g_i^1 g_{f_1(i)}^2\}_{i \in I}) = \Gamma(h_1 \cdot h_2)$$

and the mapping $\Gamma : \text{Aut } S \rightarrow P$ is an isomorphism. $\square$



Corollary 1. Let $G = (X, \rho)$ be a nontrivial quasi-acyclic reflexive graph, $G' = (X', \rho')$ be an antisymmetric reflexive graph, and let $A = \text{Atm}(G, G')$ be the universal graphic automaton with the input signal semigroup $S = \text{End } G \times \text{Hom}(G, G')$. Then the automorphism group $\text{Aut } S$ of the input signal semigroup S is isomorphic to a subgroup of the union of the wreath products [14] of the groups

$$((G', \text{Aut } G') \wr (G, \text{Aut } G)) \cup ((G', \text{Ant } G') \wr (G, \text{Ant } G)), \quad (5)$$

which consists of ordered pairs (ψ, φ) , where $\varphi \in \text{Aut } G$ and $\psi \in (\text{Aut } G')^G$ or $\varphi \in \text{Ant } G$ and $\psi \in (\text{Ant } G')^G$, $\psi(a) = \psi(b)$ for all adjacent vertexes $a, b \in X$ of the graph G .

Corollary 2. Let $G = (X, \rho)$ be a nontrivial quasi-acyclic reflexive connected graph, $G' = (X', \rho')$ be an antisymmetric reflexive graph, and let $A = \text{Atm}(G, G')$ be a universal graphic automaton with the input signal semigroup $S = \text{End } G \times \text{Hom}(G, G')$. Then, the automorphism group $\text{Aut } S$ of the input signal semigroup S is isomorphic to the group $(\text{Aut } G \times \text{Aut } G') \cup (\text{Ant } G \times \text{Ant } G')$.

References

1. Plotkin B. I. *Groups of automorphisms of algebraic systems*. California, Wolters Noordhoff Publishing, 1972. 502 p. (Rus. ed. : Moscow, Nauka, 1966. 604 p.).
2. Pinus A. G. Elementary equivalence of derived structures of free semigroups, unars, and groups. *Algebra and Logic*, 2004, vol. 43, iss 6, pp. 408–417. <https://doi.org/10.1023/B:ALLO.0000048829.60182.48>
3. Pinus A. G. On the elementary equivalence of derived structures of free lattices. *Russian Mathematics*, 2002, iss. 5, pp. 44–47 (in Russian). EDN: HQUCWH
4. Gluskin L. M. Semigroups and rings of endomorphisms of linear spaces. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, 1959, vol. 23, iss. 6, pp. 841–870 (in Russian).
5. Gluskin L. M. Semi-groups of isotone transformations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1961, vol. 16, iss. 5, pp. 157–162 (in Russian).
6. Vazhenin Yu. M. Elementary properties of semigroups of transformations of ordered sets. *Algebra and Logic*, 1970, vol. 9, iss 3, pp. 169–179. <https://doi.org/10.1007/BF02218675>
7. Vazhenin Yu. M. Elementary definability and elementary characterizability of classes of reflexive graphs. *Izvestiya Vysshih Uchebnyh Zavedenij. Matematika*, 1972, iss. 7, pp. 3–11 (in Russian).
8. Mikhalev A. V. Endomorphism rings of modules and lattices of submodules. *Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 5, iss. 6, pp. 786–802. <https://doi.org/10.1007/BF01085149>
9. Plotkin B. I., Greenglaz L. Ya., Gvaramiya A. A. *Elementy algebraicheskoy teorii avtomatov* [Elements of algebraic theory of automata]. Moscow, Vyshaja Shkola, 1994. 191 p. (in Russian).
10. Molchanov V. A., Farakhutdinov R. A. On definability of universal graphic automata by their input symbol semigroups. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 42–50. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-42-50>
11. Bogomolov A. M., Salii V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 1997. 368 p. (in Russian).
12. Harary F. *Graph theory*. Boston, Addison-Wesley Publishing Company, 1969. 270 p. (Russ. ed. : Moscow, Mir, 1973. 300 p.).
13. Farakhutdinov R. A. Relatively elementary definability of the class of universal graphic semiautomata in the class of semigroups. *Russian Mathematics*, 2022, vol. 66, iss. 1, pp. 62–70. <https://doi.org/10.3103/S1066369X22010029>
14. Kurosh A. G. *Teoriya grupp* [Group theory]. Moscow, Nauka, 1967. 648 p. (in Russian).

Received / Поступила в редакцию 01.09.2023

Accepted / Принята к публикации 10.10.2023

Published / Опубликовано / 28.02.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 46–52
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 46–52
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-46-52>, EDN: HZJNHM

Научная статья
УДК 517.544.8

Об одном методе решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в круговых областях

К. М. Расулов, Т. Р. Нагорная✉

Смоленский государственный университет, Россия, 214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4

Расулов Карим Магомедович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, kahrimanr@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2040-8447>, AuthorID: 531506

Нагорная Татьяна Романовна, старший преподаватель кафедры математического анализа, tani7n@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-5976-7391>, AuthorID: 935182

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача типа задачи Пуанкаре для одного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка, порождающего класс обобщенных гармонических функций. Устанавливается, что в случае круговых областей решение рассматриваемой краевой задачи, по сути, сводится к решению дифференциальной краевой задачи типа Римана в классах аналитических функций комплексного переменного. Кроме того, получены необходимые и достаточные условия разрешимости исследуемой задачи, а также установлена ее нетеровость.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, обобщенная гармоническая функция, краевая задача Пуанкаре, дифференциальная краевая задача типа Римана, интегральное уравнение, круговая область

Для цитирования: Расулов К. М., Нагорная Т. Р. Об одном методе решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в круговых областях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 46–52. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-46-52>, EDN: HZJNHM

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

A method for solving the Poincare boundary value problem for generalized harmonic functions in circular domains

K. M. Rasulov, T. R. Nagornaya✉

Smolensk State University, 4 Przhevalskogo St., Smolensk 214000, Russia

Karim M. Rasulov, kahrimanr@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2040-8447>, AuthorID: 531506

Tatyana R. Nagornaya, tani7n@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-5976-7391>, AuthorID: 935182

Abstract. The paper considers a Poincare-type boundary value problem for a second-order elliptic differential equation that generates a class of generalized harmonic functions. It is established that in the case of circular domains the solution of the considered boundary value problem reduces to the solution of a Riemann-type differential boundary value problem in the classes of analytic functions of a complex variable. In addition, necessary and sufficient conditions for the solvability of the problem are obtained.

Keywords: differential equation, generalized harmonic function, Poincare boundary value problem, differential boundary value problem of the Riemann type, integral equation, circular domain



For citation: Rasulov K. M., Nagornaya T. R. A method for solving the Poincare boundary value problem for generalized harmonic functions in circular domains. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 46–52 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-46-52>, EDN: HZNJHM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

1. Постановка задачи и вспомогательные утверждения

Пусть T^+ — односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, лежащая внутри единичного круга $U_1^+ = \{z : |z| < 1\}$. Будем считать, что границей области T^+ служит простая замкнутая кривая Ляпунова L . В области T^+ рассматривается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n+1)}{(1-z\bar{z})^2} W = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, n — некоторое неотрицательное целое число, $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ — неизвестная функция.

В работах [1, 2] было установлено, что всякое регулярное решение уравнения (1) в области T^+ представляется в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n B_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k} + \overline{\sum_{k=0}^n B_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k f^+(z)}{dz^k}}, \quad (2)$$

где $B_k^n = \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ — аналитические в области T^+ функции.

Так как при $n = 0$ решения уравнения (1) являются гармоническими функциями в области T^+ , то, следуя [3–5], в дальнейшем в случае $n \geq 1$ решения дифференциального уравнения (1) в области $T^+ \subset U_1^+$ будем называть обобщенными гармоническими функциями порядка n в области T^+ , а функции $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$, входящие в правую часть представления (2), назовем соответственно первой и второй аналитическими компонентами обобщенной гармонической функции $W(z)$. Класс всех обобщенных гармонических функций порядка n в области T^+ будем обозначать символом $G_n(T^+)$, а через $G_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ обозначим класс обобщенных гармонических функций порядка n в области T^+ , для которых в представлении (2) аналитические компоненты $\varphi^+(z)$, $f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т. е. $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаются на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно.

Рассматривается следующая краевая задача: требуется найти все обобщенные гармонические функции $W(z)$ порядка n ($n \geq 1$) в области T^+ , принадлежащие классу $G_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$a(t) \frac{\partial W(t)}{\partial x} + b(t) \frac{\partial W(t)}{\partial y} + c(t) W(t) = q(t), \quad t \in L, \quad (3)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $q(t)$ — заданные на контуре L комплекснозначные функции из класса $H(L)$ (т. е. удовлетворяющие на L условию Гельдера).

Следуя [6, с. 80], сформулированную выше задачу будем называть краевой задачей Пуанкаре для обобщенных гармонических функций порядка n или, короче, задачей GP_n , а соответствующую GP_n однородную задачу ($q(t) \equiv 0$) — задачей GP_n^0 .

В работах [3–5] были построены явные решения задачи GP_1 в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, при следующих предположениях относительно коэффициентов $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ краевого условия (3):

- 1) $a(t) \equiv b(t) \equiv 0$, $c(t) \equiv 1$;



- 2) $a(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{r^2}{t})$, $b(t) = \frac{1}{2i}(t - \frac{r^2}{t})$, $c(t) \equiv 0$;
 3) $a(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{r^2}{t})$, $b(t) = \frac{1}{2i}(t - \frac{r^2}{t})$, $c(t) \equiv -1$.

Настоящая статья в основном посвящена построению общего конструктивного метода решения задачи GP_n в случае, когда $n = 1$, $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, а $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — произвольные функции, удовлетворяющие на L_r условию Гельдера, где $L_r = \{t : |t| = r\}$ — граница круга T_r^+ . Но прежде чем изложить метод решения задачи GP_n , установим одно интегральное представление для кусочно-аналитических функций комплексного переменного.

Применяя лемму 2.1 из монографии [7] к аналитическим функциям $f^+(z) = \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz}$ и $f^-(z) = \frac{d^2\varphi^-(z)}{dz}$, где $\varphi^+(z)$ — функция, аналитическая в T_r^+ и непрерывная в замкнутой области $T_r^+ \cup L_r$, а функция $\varphi^-(z)$ — аналитическая в $T_r^- = \{z : |z| > r\} \cup \{\infty\}$ и непрерывная в $T_r^- \cup L_r$, несложно доказать следующее утверждение (см. также [8, с. 372; 9]).

Теорема 1. Пусть $G_*(t)$ — заданная на L_r функция, принадлежащая классу $H(L_r)$, причем $G_*(t) \neq 0$, а $\chi_* = \text{Ind } G_*(t) = \frac{1}{2\pi} [\text{Arg } G_*(t)]_{L_r}$ — индекс Коши функции $G_*(t)$ вдоль окружности L_r . Тогда:

1) если $\chi_* < 0$, то имеют место представления

$$\varphi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{L_r} \mu(\tau) \cdot (\tau - z) \ln \left(1 - \frac{z}{\tau}\right) d\tau + \varphi^+(0), \quad (4)$$

$$\varphi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{L_r} \frac{\mu(\tau)}{\tau^2 G_*(t)} \cdot \left[(\tau - z) \ln \left(1 - \frac{\tau}{z}\right) - \tau\right] d\tau + \varphi^-(\infty), \quad (5)$$

где $\mu(\tau)$ — комплекснозначная функция, удовлетворяющая на L_r условию Гельдера и определяемая по заданным $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ с точностью до выражения, линейно зависящего от $|\chi_*|$ произвольных комплексных постоянных;

2) если же $\chi_* \geq 0$, то имеют место представления

$$\varphi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{L_r} \mu(\tau) \cdot (\tau - z) \ln \left(1 - \frac{z}{\tau}\right) d\tau + \sum_{k=0}^{\chi_*+1} \alpha_k z^k, \quad (6)$$

$$\varphi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{L_r} \frac{\mu(\tau)}{\tau^2 G_*(t)} \cdot \left[(\tau - z) \ln \left(1 - \frac{\tau}{z}\right) - \tau\right] d\tau + \varphi^-(\infty), \quad (7)$$

где $\mu(\tau)$ — комплекснозначная функция, удовлетворяющая на L_r условию Гельдера, а α_k ($k = 0, 1, \dots, \chi_* + 1$) — комплексные постоянные, вполне определяемые по заданным функциям $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$. Здесь под $\ln(1 - \frac{z}{\tau})$ понимается ветвь, исчезающая при $z = 0$, а под $\ln(1 - \frac{\tau}{z})$ — ветвь, исчезающая при $z = \infty$.

2. Метод решения задачи GP_1 в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$ в случае, когда $a(t), b(t), c(t) \in H(L_r)$

Пусть выполняется условие

$$[a(t)]^2 + [b(t)]^2 \neq 0, \quad t \in L_r. \quad (8)$$

В силу (2) при $n = 1$ и $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ всякая обобщенная гармоническая функция $W(z)$ из класса $G_1(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$ задается так:

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1 - z\bar{z}}\varphi^+(z) + \overline{\frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1 - z\bar{z}}f^+(z)}, \quad z \in T^+, \quad (9)$$

где $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ — аналитические в круге T_r^+ функции, принадлежащие классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$.



С учетом (9) и соотношений $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$ краевое условие (3) при $n = 1$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} & a(t) \left\{ \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + \frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{2(\bar{t})^2 + 2}{(1-t\bar{t})^2} \varphi^+(t) \right\} + \\ & + a(t) \left\{ \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + \frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{df^+(t)}{dt} + \frac{2(\bar{t})^2 + 2}{(1-t\bar{t})^2} f^+(t) \right\} + \\ & + ib(t) \left\{ \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + \frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{2(\bar{t})^2 - 2}{(1-t\bar{t})^2} \varphi^+(t) \right\} - \\ & - ib(t) \left\{ \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + \frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}} \frac{df^+(t)}{dt} + \frac{2(\bar{t})^2 - 2}{(1-t\bar{t})^2} f^+(t) \right\} + \\ & + c(t) \left\{ \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}} \varphi^+(t) + \frac{df^+(t)}{dt} + \frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}} f^+(t) \right\} = q(t), \quad t \in L_r. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее, с учетом (8), разделив обе части (10) на $[a(t) + ib(t)]$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + \left(\frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}} + \frac{c(t)}{[a(t) + ib(t)]} \right) \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \\ & + \frac{2(\bar{t})^2 [a(t) + ib(t)] + 2[a(t) - ib(t)] + 2\bar{t}(1-t\bar{t})c(t)}{[a(t) + ib(t)](1-t\bar{t})^2} \varphi^+(t) + \\ & + \frac{[a(t) - ib(t)]}{[a(t) + ib(t)]} \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + \left(\frac{[a(t) - ib(t)]}{[a(t) + ib(t)]} \frac{2t}{1-t\bar{t}} + \frac{c(t)}{[a(t) + ib(t)]} \right) \frac{df^+(t)}{dt} + \\ & + \frac{2t^2 [a(t) - ib(t)] + 2[a(t) + ib(t)] + 2t(1-t\bar{t})c(t)}{[a(t) + ib(t)](1-t\bar{t})^2} f^+(t) = \frac{q(t)}{[a(t) + ib(t)]}, \quad t \in L_r. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь, построив аналитическую в области $T_r^- = \bar{C} \setminus (T_r^+ \cup L_r)$ функцию $\varphi^-(z)$ по формуле

$$\varphi^-(z) = \overline{f^+} \left(\frac{r^2}{z} \right), \quad z \in T_r^-, \quad (12)$$

и учитывая (см., например, [8, с. 290]), что на окружности $L_r = \{t : |t| = r\}$ выполняются следующие условия «симметрии»:

$$\overline{\frac{d^2 f^+(t)}{dt^2}} = \frac{t^4}{r^4} \frac{d^2 \varphi^-(t)}{dt^2} + \frac{2t^3}{r^4} \frac{d\varphi^-(t)}{dt}, \quad \overline{\frac{df^+(t)}{dt}} = -\frac{t^2}{r^2} \frac{d\varphi^-(t)}{dt}, \quad \overline{f^+(t)} = \varphi^-(t), \quad t \in L_r,$$

равенство (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + A_1(t) \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + A_0(t) \varphi^+(t) - \\ & - G(t) \frac{d^2 \varphi^-(t)}{dt^2} - G_1(t) \frac{d\varphi^-(t)}{dt} - G_0(t) \varphi^-(t) = Q(t), \quad t \in L_r, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \frac{2\bar{t}}{1-t\bar{t}} + \frac{c(t)}{a(t) + ib(t)}, \quad A_0(t) = \frac{2(\bar{t})^2 [a(t) + ib(t)] + 2[a(t) - ib(t)] + 2\bar{t}(1-t\bar{t})c(t)}{[a(t) + ib(t)](1-t\bar{t})^2}, \\ G(t) &= -\frac{[a(t) - ib(t)]}{[a(t) + ib(t)]} \frac{t^4}{r^4}, \quad G_1(t) = -\left\{ \frac{[a(t) - ib(t)]}{[a(t) + ib(t)]} \left(\frac{2t^3}{r^4} - \frac{2t^3}{(1-t\bar{t})r^2} \right) - \frac{t^2}{r^2} \frac{c(t)}{[a(t) + ib(t)]} \right\}, \\ G_0(t) &= -\frac{2t^2 [a(t) - ib(t)] + 2[a(t) + ib(t)] + 2t(1-t\bar{t})c(t)}{[a(t) + ib(t)](1-t\bar{t})^2}, \quad Q(t) = \frac{q(t)}{a(t) + ib(t)}, \quad t \in L_r. \end{aligned}$$



Легко заметить, что при выполнении условия (8) будем иметь

$$G(t) = -\frac{[a(t) - ib(t)] t^4}{[a(t) + ib(t)] r^4} \neq 0, \quad t \in L_r, \quad (14)$$

причем $G(t) \in H(L_r)$. В силу (14) равенство (13) представляет собой краевое условие хорошо известной невырожденной дифференциальной задачи типа Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно-аналитической функции $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ (см., например, [8, с. 365] или [7, с. 142]).

Предположим, что задача типа Римана (13) разрешима и уже найдены ее решения $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$. Тогда на основании (12) находим аналитическую в круге T_r^+ функцию $f^+(z)$ по формуле

$$f^+(z) = \overline{\varphi^-} \left(\frac{r^2}{z} \right), \quad z \in T_r^+.$$

Подставляя значения найденных аналитических в T_r^+ функций $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ в правую часть равенства (9), получаем решение исходной задачи GP_1 .

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$ и выполняется условие (8). Тогда решение краевой задачи GP_1 сводится к решению невырожденной дифференциальной задачи Римана (13) относительно ограниченной на бесконечности кусочно-аналитической функции $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$. Для разрешимости краевой задачи GP_1 в круге T_r^+ необходимо и достаточно, чтобы была разрешимой дифференциальная задача Римана (13).

В заключение получим условия разрешимости задачи GP_1 и установим ее нетеровость при выполнении условия (8).

В силу (14) имеем: $\chi = \text{Ind } G(t) = 2m + 4$, где $m = \text{Ind}[a(t) - ib(t)]$. Введем в рассмотрение функцию $G_*(t) = G(t) \cdot t^{-2}$. Тогда $\chi_* = \text{Ind } G_*(t) = \chi - 2$.

В дальнейшем число $\chi = \text{Ind } G(t)$ будем называть индексом задачи типа Римана (13), а число $\chi_* = \text{Ind } G_*(t)$ — приведенным индексом этой задачи.

С учетом теоремы 1 при $\chi_* = \text{Ind } G_*(t) < 0$ (т. е. при $\chi < 2$) решение краевой задачи (13) будем искать в виде (4) и (5). Подставляя в равенство (13) вместо $\frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k}$ и $\frac{d^k \varphi^-(t)}{dt^k}$ ($k = 0, 1, 2$) граничные значения аналитических функций (4), (5) и их производных, получаем следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$(\mathbf{K}\mu)(t) \equiv \mu(t) + \int_{L_r} K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = Q_1(t), \quad t \in L_r, \quad (15)$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{G(\tau) - G(t)}{G(\tau)} \right) \frac{1}{\tau - t} + K_1(t, \tau), \quad Q_1(t) = Q(t) - \varphi^+(0)A_0(t) + \varphi^-(\infty)G_0(t),$$

а $K_1(t, \tau)$ — фредгольмово ядро (т. е. $K_1(t, \tau) \in H_*(L_r \times L_r)$), которое вполне определенным образом выражается через коэффициенты краевого условия (13). Но так как $\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{G(\tau) - G(t)}{G(\tau)} \right) \frac{1}{\tau - t} \in H_*(L_r \times L_r)$ (см., например, [7, с. 29]), то ядро $K(t, \tau) \in H_*(L_r \times L_r)$.

Таким образом, при $\chi < 2$ решение краевой задачи GP_1 , по сути, сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма (15).

Из теории интегральных уравнений Фредгольма второго рода известно (см., например, [8, с. 175]), что для разрешимости неоднородного уравнения (15) (а значит, и задачи GP_1 в случае $\chi < 2$) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_{L_r} Q_1(t) \omega_k(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \nu, \quad (16)$$



где $\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_\nu(t)$ — полная система линейно независимых над полем C решений однородного уравнения, союзного с уравнением

$$(\mathbf{K}\mu)(t) = 0. \quad (17)$$

При выполнении условий (16) общее решение неоднородного уравнения (15) задается формулой

$$\mu(t) = Q_1(t) + \int_{L_r} R(t, \tau) Q_1(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k \omega_k(t), \quad (18)$$

где $R(t, \tau)$ — обобщенная резольвента ядра $K(t, \tau)$, а $\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k \omega_k(t)$ — общее решение однородного уравнения (17), т. е. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ — произвольные комплексные постоянные.

Подставляя в правые части (4) и (5) вместо $\mu(t)$ ее значение из (18), получаем решение исходной задачи GP_1 в случае $\chi < 2$.

Пусть теперь индекс $\chi \geq 2$. В этом случае решения задачи GP_1 будем искать в виде (6) и (7). Подставляя в равенство (13) вместо $\frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k}$ и $\frac{d^k \varphi^-(t)}{dt^k}$ ($k = 0, 1, 2$) граничные значения аналитических функций (6), (7) и их производных, получаем следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$(\mathbf{K}\mu)(t) \equiv \mu(t) + \int_{L_r} K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = Q_2(t), \quad t \in L_r, \quad (19)$$

где ядро $K(t, \tau)$ такое же, как в (15),

$$Q_2(t) = Q(t) - A_0(t) \sum_{k=0}^{\chi_*+1} \alpha_k t^k - A_1(t) \sum_{k=1}^{\chi_*+1} k \alpha_k t^{k-1} - \sum_{k=2}^{\chi_*+1} k \alpha_k t^k + \varphi^-(\infty) G_0(t). \quad (20)$$

Итак, в случае $\chi \geq 2$ исходная краевая задача GP_1 эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма (19).

Замечание. Здесь важно отметить, что так как в выражение для функции $Q_2(t)$, задаваемой формулой (20), линейно входят $\chi_* + 1 = \chi - 1$ произвольных комплексных постоянных α_k ($k = 0, 1, \dots, \chi_* + 1$), некоторые из условий разрешимости вида (16) для неоднородного уравнения Фредгольма (19) можно удовлетворять за счет определенного выбора значений этих постоянных.

С учетом данного замечания при $\chi \geq 2$ условия разрешимости задачи GP_1 можно записать так:

$$\int_{L_r} Q_2(t) \tilde{\omega}_k(t) d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \nu - s, \quad (21)$$

где $\tilde{\omega}_1(t), \tilde{\omega}_2(t), \dots, \tilde{\omega}_{\nu-s}(t)$ — некоторые линейно независимые над полем C решения однородного уравнения, союзного с уравнением (17), причем $0 \leq s \leq \min(\nu, \chi - 1)$.

Резюмируя изложенное выше, получаем следующий результат.

Теорема 3. Пусть выполняется условие (8). Если $\chi = \text{Ind } G(t) < 2$, то для разрешимости краевой задачи GP_1 в круге T_r^+ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (16). Если же $\chi = \text{Ind } G(t) \geq 2$, то для разрешимости краевой задачи GP_1 в круге T_r^+ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (21).

Поскольку число p условий разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма второго рода (вида (15) или вида (19)) является конечным и число l линейно независимых над полем C решений однородного уравнения, союзного с уравнением (17), также является конечным, то из теорем 2 и 3 вытекает, что при выполнении условия (8) краевая задача GP_1 будет нетеровой.



Список литературы

1. Bauer K. W. Über eine der Differentialgleichung $(1 + z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete funktionentheorie // Bonner Mathematische Schriften. 1965. № 23. S. 1–98.
2. Bauer K. W., Ruscheweyh S. Differential operators for partial differential equations and function theoretic applications. Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 1980. 253 p. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 791). <https://doi.org/10.1007/BFb0103468>
3. Нагорная Т. Р., Расулов К. М. О краевой задаче Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в круговых областях // Научно-технический вестник Поволжья. 2022. № 7. С. 32–35. EDN: FCWCDDP
4. Нагорная Т. Р., Расулов К. М. Алгоритм явного решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций второго порядка в круговых областях // Научно-технический вестник Поволжья. 2022. № 11. С. 24–27. EDN: KIPYRE
5. Расулов К. М., Нагорная Т. Р. О решении в явном виде краевой задачи Неймана для дифференциального уравнения Бауэра в круговых областях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 326–335. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-326-335>, EDN: DIKXIA
6. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1976. 295 с.
7. Расулов К. М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск : Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Москва : Наука, 1977. 640 с.
9. Рогожин В. С. Новое интегральное представление кусочно-аналитической функции и его приложения // Доклады АН СССР. 1960. Т. 135, № 4. С. 791–793.

References

1. Bauer K. W. Über eine der Differentialgleichung $(1 + z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie. *Bonner Mathematische Schriften*, 1965, iss. 23, pp. 1–98 (in German).
2. Bauer K. W., Ruscheweyh S. *Differential operators for partial differential equations and function theoretic applications*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 791. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1980. 264 p. <https://doi.org/10.1007/BFb0103468>
3. Nagornaya T. R., Rasulov K. M. On the Poincaré boundary value problem for generalized harmonic functions in circular domains. *Scientific and Technical Volga Region Bulletin*, 2022, iss. 7, pp. 32–35 (in Russian). EDN: FCWCDDP
4. Nagornaya T. R., Rasulov K. M. A solution algorithm of the Poincaré boundary value problem for the second-order generalized harmonic functions in circular domains. *Scientific and Technical Volga Region Bulletin*, 2022, iss. 11, pp. 24–27 (in Russian). EDN: KIPYRE
5. Rasulov K. M., Nagornaya T. R. The explicit solution of the Neumann boundary value problem for Bauer differential equation in circular domains. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 326–335 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-326-335>, EDN: DIKXIA
6. Bitsadze A. V. Equations of mathematical physics. Moscow, Mir Publishers, 1980. 300 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1976. 295 p.).
7. Rasulov K. M. *Kraevye zadachi dlya polianaliticheskikh funktsiy i nekotorye ikh prilozheniya* [Boundary value problems for polyanalytic functions and some of their applications]. Smolensk, SSPU Publ., 1998. 344 p. (in Russian).
8. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary value problem]. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (in Russian).
9. Rogozhin V. S. A new integral representation of a sectionally-analytic function and its application. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1960, vol. 135, iss. 4, pp. 791–793 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 21.06.2023

Принята к публикации / Accepted 23.07.2023

Опубликована / Published 28.02.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 53–56

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 53–56
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-53-56>, EDN: JLOWEC

Краткое сообщение
УДК 512.572

Ранги планарности многообразий полугрупп нётеровых по уравнениям

Д. В. Соломатин

Омский государственный педагогический университет, Россия, 644099, г. Омск, наб. Тухачевского, д. 14

Соломатин Денис Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике, solomatin_dv@omgpu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9356-9890>, SPIN: 6289-6887, AuthorID: 693200

Аннотация. Изучается проблема описания многообразий полугрупп конечного ранга планарности. В дополнение к ранее полученным результатам автор указывает новые бесконечные счётные серии многообразий полугрупп конечного ранга планарности.

Ключевые слова: полугруппа, граф Кэли полугруппы, планарный граф, нетривиальное полугрупповое тождество

Благодарности: Автор благодарен профессору А. Н. Шевлякову за любезно предоставленные дополнительные материалы о многообразиях полугрупп нётеровых по уравнениям и конструктивные замечания.

Для цитирования: Соломатин Д. В. Ранги планарности многообразий полугрупп нётеровых по уравнениям // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 53–56. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-53-56>, EDN: JLOWEC

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Short communication

Planarity ranks for varieties of equationally noetherian semigroups

D. V. Solomatin

Omsk State Pedagogical University, 14 Tukhachevsky Emb., Omsk 644099, Russia

Denis V. Solomatin, solomatin_dv@omgpu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9356-9890>, SPIN: 6289-6887, AuthorID: 693200

Abstract. The problem of describing semigroup varieties with finite planarity rank is researched. In addition to the previously obtained results the author finds new countable infinite series of semigroup varieties with finite planarity rank.

Keywords: semigroup, Cayley graph of a semigroup, planar graph, nontrivial semigroup identity

Acknowledgements: The author is grateful to Professor A. N. Shevlyakov for kindly providing additional materials on varieties of Noetherian semigroups by equations and constructive remarks.

For citation: Solomatin D. V. Planarity ranks for varieties of equationally noetherian semigroups. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 53–56 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-53-56>, EDN: JLOWEC

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Введение

Полугрупповым многообразием $\mathbf{V}$ называем произвольное (возможно, и тривиальное) множество полугрупп, замкнутое относительно операций взятия подполугрупп, прямого произведения и гомоморфных образов. Для системы полугрупповых тождеств Σ условимся через $\text{var}\Sigma$ обозначать многообразие полугрупп, определяемое этой системой. Попутно напомним, что *графом Кэли* полугруппы S относительно множества образующих её элементов X называем конечный ориентированный мультиграф $\text{Cay}(S, X)$, состоящий из множества вершин S и множества помеченных дуг — всевозможных троек (a, x, b) , где $a, b \in S$, $x \in X$ и $ax = b$. Таким образом, для каждого элемента из S граф Кэли имеет соответствующую вершину, и для всех элементов $a \in S$, $x \in X$ имеются дуги от a до ax , помеченные элементом x . При изучении вопросов планарности графов Кэли полугрупп удобен переход к основе анализируемого графа. *Основа графа Кэли* полугруппы S относительно множества образующих её элементов X обозначается $\text{SCay}(S, X)$ и получается из исходного графа $\text{Cay}(S, X)$ путём удаления петель, меток, потери направленности дуг и замены кратных рёбер одним ребром, соединяющим те же вершины. Таким образом, естественно называть граф Кэли планарным тогда и только тогда, когда его основа является обыкновенным планарным графом. Пусть $F_k(\mathbf{V})$ — свободная полугруппа ранга k данного многообразия $\mathbf{V}$. Наибольшее количество образующих k , относительно которых $F_k(\mathbf{V})$ допускает планарный граф Кэли, характеризует ранг планарности $r_\pi(\mathbf{V})$ данного многообразия. Более точно, если существует такое натуральное число r , что все $\mathbf{V}$ -свободные полугруппы $F_k(\mathbf{V})$ ранга $k \leq r$ допускают планарные графы Кэли (относительно множеств их свободных образующих), а $\mathbf{V}$ -свободная полугруппа $F_{r+1}(\mathbf{V})$ ранга $r + 1$ уже не допускает планарный граф Кэли, то *рангом планарности* многообразия $\mathbf{V}$ называется это число $r = r_\pi(\mathbf{V})$. Если для многообразия $\mathbf{V}$ такого натурального числа не существует, то говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет бесконечный ранг планарности, и пишут $r_\pi(\mathbf{V}) = \infty$. При этом удобно считать ранг планарности тривиального многообразия равным нулю. В ряде ключевых случаев ранг планарности оказывается бесконечным, поэтому вызывает особый интерес задача описания полугрупповых многообразий бесконечного ранга планарности, являющаяся продолжением поставленной Л. М. Мартыновым в 2015 г. проблематики, связанной с описанием рангов планарности многообразий полугрупп¹. Частично удастся приблизиться к решению этой задачи путём приведения серий конкретных примеров, однако полного описания ещё не получено.

Стоит отметить, что очень мало операций над графами наследует свойство планарности, таким образом, «почти нет» планарных графов [1]. Тем не менее к нетривиальному описанию многообразий бесконечного ранга планарности возможно приблизиться методом исключения, если отсеивать серию за серией многообразия полугрупп конечного ранга планарности. В основной теореме настоящей заметки представим новую такую серию. Для получения этой серии оказалось интересным изучение полугрупповых многообразий, у которых планарные основы графов Кэли свободных полугрупп данного ранга являются произведением основ графов Кэли свободных полугрупп некоторых многообразий полугрупп того же ранга. Напомним, что *произведением графов* [2, с. 20] для любой пары обыкновенных графов $G = (VG, EG)$ и $H = (VH, EH)$ называется граф

$$G \times H = (VG \times VH, \{((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \mid (u_1 = v_1 \in VG \wedge \{u_2, v_2\} \in EH) \vee (u_2 = v_2 \in VH \wedge \{u_1, v_1\} \in EG)\}).$$

В общем случае такое произведение планарных графов не всегда приводит к планарному графу.

¹Новые проблемы алгебры и логики. Юбилейное 900-е заседание семинара: Омский алгебраический семинар, 12 ноября 2015. <http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900> (дата обращения: 19.10.2023)



Основной результат

Рассмотрим $V_n = \text{var}\{(xy)^{n+1} \approx xy; (yx)^n \approx x^n; xxyx \approx yxyx; xy^n z \approx xt^n z\}$, — серию многообразий, которые играют важную роль при изучении вопроса нётеровости по уравнениям в теории полугрупп, так как известно [3], что полугрупповое многообразие V полностью состоит из полугрупп нётеровых по уравнениям, если существует $n \geq 1$ такое, что V удовлетворяет следующим тождествам: $(xy)^{n+1} \approx xy$, $(yx)^n \approx x^n$, $xxyx \approx yxyx$, $xy^n z \approx xt^n z$. В структуре полугрупп из таких многообразий нет ничего сложного. Их идеал разложимых элементов $\text{Red}(S) = \{s \mid \exists a, b : s = ab\}$ является прямоугольной связкой абелевых групп, ранги планарности многообразий которых известны по серии работ [4, 5].

Соответственно, изучение вопроса планарности графа Кэли полугруппы $S \in V_n$ может сводиться к изучению планарности графа Кэли для подполугруппы $\text{Red}(S)$. Следовательно, ранги планарности многообразий данной серии конечны. В следующей теореме вычислим конкретные значения рангов планарности многообразий этой серии, не прибегая к сведению в $\text{Red}(S)$.

Теорема 1. Пусть $V_n = \text{var}\{(x_1 x_2)^{n+1} \approx x_1 x_2; (x_1 x_2 x_1)^n \approx x_1^n; x_1 x_1 x_2 x_1 \approx x_1 x_2 x_1 x_1; x_1 (x_2^n) x_3 \approx x_1 (x_4^n) x_3\}$. Тогда, для $n = 1$ ранг планарности многообразия V_n равен 4, для $n = 2$ равен 2, а для $n > 2$ равен 1.

Доказательство. При $n = 1$ многообразие V_n является многообразием прямоугольных связок, ранг планарности которого $r_\pi(V_1) = 4$ известен из [6]. Интересно, что для многообразия V_1 оказалось

$$\text{SCay}(F_k(V_1), \{x_1, \dots, x_k\}) = \text{SCay}(F_k(\text{var}\{xy \approx x\}), \{l_1, \dots, l_k\}) \times \text{SCay}(F_k(\text{var}\{xy \approx y\}), \{r_1, \dots, r_k\}),$$

а это большая редкость. Плоская укладка основы графа Кэли свободной 2-порожденной полугруппы многообразия V_2 представлена на рис. 1, а 3-порожденная свободная полугруппа данного многообразия содержит изображенный на рис. 2 граф в качестве подграфа, следовательно, она не является планарной и $r_\pi(V_2) = 2$.

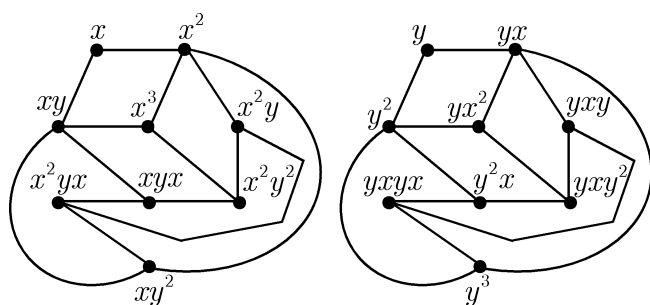


Рис. 1. Плоская укладка графа $\text{SCay}(F_2(V_2), \{x, y\})$
Fig. 1. Flat graph stacking $\text{SCay}(F_2(V_2), \{x, y\})$

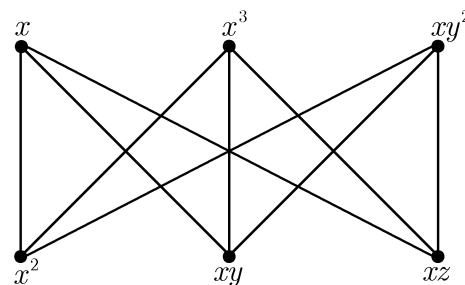


Рис. 2. Подграф графа $\text{SCay}(F_3(V_2), \{x, y, z\})$, гомеоморфный графу $K_{3,3}$
Fig. 2. A subgraph of the graph $\text{SCay}(F_3(V_2), \{x, y, z\})$, homeomorphic to graph $K_{3,3}$

При $n > 2$ плоская укладка основы графа Кэли однопорожденной свободной полугруппы многообразия V_n очевидно совпадает с плоской укладкой графа $\text{SCay}(F_1(\text{var}\{x^{n+2} = x^2\}), \{x\})$. Для большего числа образующих основа графа Кэли свободной полугруппы такого многообразия содержит гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф, изображенный на рис. 3. Таким образом, $r_\pi(V_n) = 1$ при $n > 2$. Что и требовалось доказать. $\square$

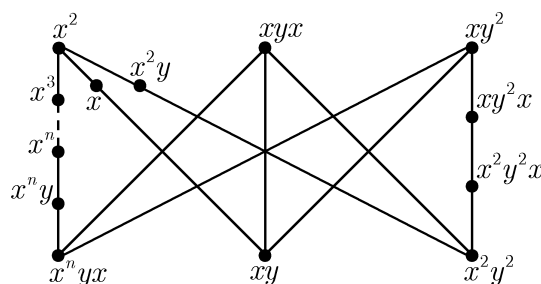


Рис. 3. Подграф графа $SCay(F_2(V_n), \{x, y\})$ при $n \geq 3$, гомеоморфный графу $K_{3,3}$

Fig. 3. Subgraph of graph $SCay(F_2(V_n), \{x, y\})$ for $n \geq 3$, homeomorphic to graph $K_{3,3}$

Заметим, что если есть полугруппа S и двусторонний идеал K полугруппы S , то возникает естественный вопрос, когда фактор-полугруппа S/K будет планарной? Понятно, что если $K = \{0\}$, то S/K планарна тогда и только тогда, когда S планарна. А если $K = Red(S)$, то полугруппа S/K планарна всегда [6].

Список литературы

1. Коршунов А. Д. Основные свойства случайных графов с большим числом вершин и ребер // Успехи математических наук. 1985. Т. 40, вып. 1. С. 107–173.
2. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. Москва : Наука, 1990. 384 с.
3. Shevlyakov A. N. Direct powers of algebraic structures and equations // Прикладная дискретная математика. 2022. № 58. С. 31–39. <https://doi.org/10.17223/20710410/58/4>, EDN: SLWROD
4. Соломатин Д. В. Ранги планарности многообразий коммутативных моноидов // Вестник Омского университета. 2012. № 4 (66). С. 41–45. EDN: RRQLSF
5. Соломатин Д. В. Ранги планарности многообразий коммутативных полугрупп // Прикладная дискретная математика. 2016. № 4 (34). С. 50–64. <https://doi.org/10.17223/20710410/34/4>, EDN: XEAAEX
6. Соломатин Д. В. Планарные многообразия полугрупп // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т. 12. С. 232–247. <https://doi.org/10.17377/semi.2015.12.019>, EDN: VKASBJ

References

1. Korshunov A. D. The main properties of random graphs with a large number of vertices and edges. *Russian Mathematical Surveys*, 1985, vol. 40, iss. 1, pp. 121–198. <https://doi.org/10.1070/RM1985v040n01ABEH003529>
2. Emelichev V. A., Melnikov O. I., Sarvanov V. I., Tyshkevich R. I. *Lectures on graph theory*. Moscow, Nauka, 1990. 384 p. (in Russian).
3. Shevlyakov A. N. Direct powers of algebraic structures and equations. *Applied Discrete Mathematics*, 2022, iss. 58, pp. 31–39. <https://doi.org/10.17223/20710410/58/4>, EDN: SLWROD
4. Solomatin D. V. Planarity ranks of the varieties of commutative monoids. *Herald of Omsk University*, 2012, iss. 4 (66), pp. 41–45 (in Russian). EDN: RRQLSF
5. Solomatin D. V. The ranks of planarity for varieties of commutative semigroups. *Applied Discrete Mathematics*, 2016, iss. 4 (34), pp. 50–64. (in Russian). <https://doi.org/10.17223/20710410/34/4>, EDN: XEAAEX
6. Solomatin D. V. Planar varieties of semigroups. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2015, vol. 12, pp. 232–247 (in Russian). <https://doi.org/10.17377/semi.2015.12.019>, EDN: VKASBJ

Поступила в редакцию / Received 19.12.2023

Принята к публикации / Accepted 13.03.2024

Опубликована / Published 28.02.2025

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 57–69

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 57–69

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-57-69>

EDN: NAODYG

Научная статья

УДК 514.85,531.36

Динамика парадоксального механизма П. Л. Чебышёва

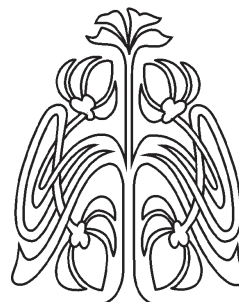
С. Н. Бурьян

Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем, Россия, 191167, г. Санкт-Петербург, наб. Обводного канала, д. 29

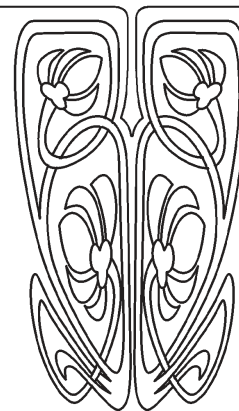
Бурьян Сергей Николаевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, burianserg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, SPIN: 1839-6004, AuthorID: 974092

Аннотация. Рассматривается парадоксальный механизм П. Л. Чебышёва. Этот механизм может быть представлен как объединение лямбда-механизма и двойного маятника, свободные вершины которых соединены шарнирно. Одно из звеньев двойного маятника обычно заменяется массивным диском. Среди известных механизмов П. Л. Чебышёва только в парадоксальном механизме возникают особые точки конфигурационного пространства, или точки ветвления. В соответствующих конфигурациях механизма стержни двойного маятника становятся параллельными или антипараллельными. Механизм может продолжить движение из особых точек двумя различными способами, которые отличаются направлением вращения диска. В одном случае при полном обороте ведущего звена диск делает два полных оборота, а в другом случае — четыре полных оборота. Траектория свободной вершины лямбда-механизма в парадоксальном механизме находится между двумя концентрическими окружностями и поочередно касается каждой окружности в трех точках. В статье рассматривается обобщение для случая, когда количество последовательных точек касания с двумя окружностями является произвольным четным числом. Доказывается, что в этом случае возможно получить любое заданное количество оборотов диска за один оборот ведущего звена механизма. Для парадоксального механизма записаны основные уравнения динамики, получено выражение для момента сил инерции диска. Сравнивается работа внешнего момента, который приложен к ведущему звену механизма, и работа сил инерции диска.

Ключевые слова: механизмы Чебышёва, парадоксальный механизм, шарнирный механизм, особая точка, голономная связь, множители Лагранжа



Научный
отдел





Для цитирования: Бурьян С. Н. Динамика парадоксального механизма П. Л. Чебышёва // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 57–69. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-57-69>, EDN: NAODYG
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Dynamics of P. L. Chebyshev's paradoxical mechanism

S. N. Burian

State Research Institute of Applied Problems, 29 Naberezhnaya Obvodnogo kanala, St. Petersburg 191167, Russia

Sergey N. Burian, burianserg@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7795-6735>, SPIN: 1839-6004, AuthorID: 974092

Abstract. The paradoxical mechanism of P. L. Chebyshev is the main issue of this article. The paradoxical mechanism could be considered as the union of the lambda-mechanism and a double pendulum the free vertices of which are hingedly connected. One of the pendulum rods is usually replaced by a massive disk. Among all known mechanisms of P. L. Chebyshev, singular points of the configuration space or branching points arise only in the paradoxical mechanism. In particular configurations of the paradoxical mechanism the rods of the double pendulum become parallel. In this case, the mechanism could continue the motion from the singular points in two different ways. There are two types of smooth motion of the paradoxical mechanism, which differ by the direction of the disk rotation. In the first case, with a full circle of the drive link, the disk makes two full circles. In the second case, it makes four full circles. The trajectory of the free vertex of the lambda-mechanism in the paradoxical mechanism is located between two concentric circles and alternately touches each circle at three points. In addition, the curve that is located between two concentric circles and touches each circle in an arbitrary number of points is considered in the article. It is proved that it is possible to obtain any given number of disk revolutions in one revolution of the mechanism-driving link. The basic equations of dynamics are written down for the paradoxical mechanism. The expression for the moment of inertia forces of the disk is written down. The work of the external moment, which is applied to the leading link of the mechanism, and the work of the disk inertia forces are compared.

Keywords: Chebyshev's mechanisms, paradoxical mechanism, hinge mechanism, singular point, holonomic constraint, Lagrange multipliers

For citation: Burian S. N. Dynamics of P. L. Chebyshev's paradoxical mechanism. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 57–69 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-57-69>, EDN: NAODYG

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В работах П. Л. Чебышёва по теории механизмов рассматривается специальный механизм для преобразования вращательного движения в движение по заданной кривой, который получил название «лямбда-механизм». Вероятно, такое название возникло из-за того, что в некоторых положениях этот шарнирный механизм становится похожим на греческую букву «λ». Лямбда-механизм является плоским шарнирным механизмом с одной степенью свободы, который состоит из трех связанных стержней. У механизма есть три параметра, которые однозначно определяют его геометрию. В зависимости от отношений параметров возможно получить различные формы кривых, которые описывает свободная вершина лямбда-механизма.

Для решения задач о синтезе шарнирных механизмов с остановками, механизмов для двух качаний коромысла за один оборот кривошипа, механизмов передачи вращательного движения



Чебышёвым используются свойства кривых, которые описываются лямбда-механизмом [1, 2]. Например, для механизма с двумя качаниями за один оборот применяется вспомогательный лямбда-механизм, который описывает кривую типа «восьмерки». Среди известных механизмов П. Л. Чебышёва только в «парадоксальном» механизме возникают особые точки конфигурационного пространства, или точки ветвления. Этот «парадоксальный» механизм является основным объектом исследования в данной статье. Далее кавычки в названии «парадоксальный механизм» опускаются.

На интернет-ресурсе [3] есть цифровые модели механизмов П. Л. Чебышёва. Некоторые оригинальные модели П. Л. Чебышёва находятся в музее истории Санкт-Петербургского государственного университета. Фотографии, описания и истории некоторых моделей механизмов есть в [4].

Для описания движения парадоксального механизма применяются уравнения Лагранжа второго рода, которые подробно описываются в [5, 6]. В динамике парадоксального механизма за один оборот ведущего звена ведомый диск (маховик) совершает два или четыре полных оборота. Соответственно, при этом получается кратное увеличение скорости на самом диске в сравнении со скоростью вращения ведущего звена. Поэтому интерес также представляет сравнение работы, которую совершает ведущее звено под действием (постоянного) внешнего момента, и работы, которую совершает момент сил инерции диска. Для определения работы маховика применяется понятие момента сил инерции, которое рассматривается в [7, 8] с точки зрения теории механизмов.

Конфигурационное пространство парадоксального механизма имеет геометрические особые точки, через которые проходит не одна, а две возможные траектории движения системы. Особенности конфигурационного пространства возникают из-за зависимых (не)голономных связей, наложенных на систему. В литературе проблема динамики для систем с геометрическими особенностями является мало исследованной. Перестройки конфигурационного пространства и бифуркации положений равновесия для особенностей голономных связей исследуются в [9]. Движение механической системы с особенностями неголономных связей анализируется в [10]. В статье [11] исследуется механизм с особенностями конфигурационного пространства, сингулярный маятник. Аналогичный маятник есть и в парадоксальном механизме. В работе [12] рассматриваются свойства векторных полей на конфигурационном пространстве с особенностью с помощью методов дифференциальной геометрии.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 1 кратко сформулированы результаты П. Л. Чебышёва по парадоксальному механизму. В разделе 2 обобщаются свойства кривой, которая описывается свободной вершиной лямбда-механизма в парадоксальном механизме. В разделе 3 находится момент сил инерции диска (маховика). Статья является продолжением статьи автора [13], в которой более подробно рассматриваются построения, связанные с кинематикой и динамикой парадоксального механизма.

В данной работе рассматриваются два новых вопроса, связанных с парадоксальным механизмом и его обобщениями. Первым вопросом является общее количество оборотов ведомого звена (обобщенного) парадоксального механизма. В парадоксальном механизме ведомое звено (или маховик) делает два или четыре полных оборота за один виток ведущего звена. Рассматривается обобщение парадоксального механизма, в котором ведомое звено совершает произвольное заданное число оборотов. Вторым вопросом является изучение момента сил инерции маховика для некоторых типов движения парадоксального механизма. Рассматриваются два случая: вращение ведущего звена с постоянной угловой скоростью и действие постоянного момента на ведущее звено.

1. Движения парадоксального механизма

Приведем кратко общую конструкцию парадоксального механизма П. Л. Чебышёва, следуя работам [1, 2]. Парадоксальный механизм состоит из двух частей: лямбда-механизма $OABMC$ и двойного маятника MDO_1 . Вершины O , C и O_1 неподвижны. Звено OA длины r вращается

вокруг вершины O . Расстояние CO равно d . Длины отрезков AB , BM и CB равны 1 (параметр масштаба). Длина звена AM равна 2, вершина B является серединой отрезка AM . Передвижение звена AM ограничено звеном CB . Параметры r, d и CO_1 подбираются таким образом, чтобы траектория точки M была заключена между двумя концентрическими окружностями ω_1 и ω_2 с центром в точке O_1 и радиусами $R_1 > R_2$. Кривая Υ , которую описывает точка M , последовательно касается каждой окружности ω_1 и ω_2 в трех точках. Длины стержней DO_1 и DM подбираются по условиям на сумму и разность длин стержней: $DO_1 + DM = R_1$ и $DM - DO_1 = R_2$. Точка O_1 находится на прямой, ортогональной прямой CO . Общая схема парадоксального механизма показана на рис. 1.

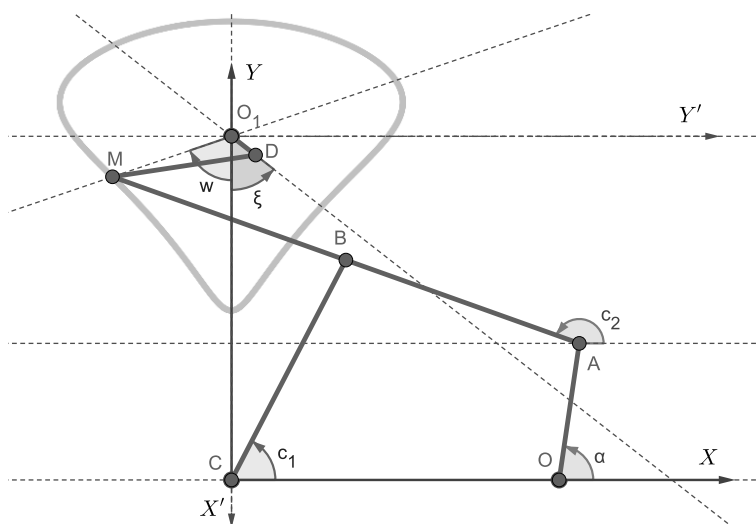


Рис. 1. Общая схема парадоксального механизма П. Л. Чебышёва. Показана траектория вершины M , которая находится между двумя концентрическими окружностями с центрами в точке O_1
 Fig. 1. General scheme of the paradoxical mechanism of P. L. Chebyshev. The trajectory of the vertex M which is located between two concentric circles with centers in point O_1 is highlighted

Решение Чебышёва позволяет определить параметры r, d и CO_1 парадоксального механизма, для которых вершина M описывает кривую, наименее отклоняющуюся от некоторой окружности ω с центром в точке O_1 и радиуса R . Аналитические выражения для параметров механизма формулируются в терминах вспомогательного угла ψ . Приведем конечные формулы из [1]:

$$r = \frac{2 \sin \psi \cdot \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}, \quad d = \frac{\sin 2\psi}{\sin 3\psi}, \quad CO_1 = \frac{2 \cos^2 \psi}{\sin 3\psi}. \quad (1)$$

Полученная кривая, заматаемая точкой M , три раза касается окружности радиуса R_1 с центром в точке O_1 и три раза касается окружности радиуса R_2 с центром в точке O_1 . Точки касания окружностей чередуются. Для радиусов R_1 и R_2 получаются выражения [1]:

$$\frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{2 \cos \psi \sin 2\psi \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}, \quad \frac{R_1 - R_2}{2} = \frac{2 \cos 2\psi}{\sin 3\psi}. \quad (2)$$

По результатам сравнения с длинами стержней в сборнике трудов [2], оригинальный парадоксальный механизм был построен для значения параметра $\psi \approx 43.669^\circ$. При вычислениях для угла $\psi = 43.669^\circ$ по формулам (1) и (2) получаются следующие значения параметров:

$$r = 0.5571409122, \quad d = 1.323723763, \quad CO_1 = 1.386699116, \\ R_1 = 0.7067373020, \quad R_2 = 0.4605558024. \quad (3)$$



Углы α поворота звена OA , при которых достигается минимальное или максимальное расстояние MO_1 , получаются при анализе функции MO_1 :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0.000^\circ, & \alpha_2 &= 63.491^\circ, & \alpha_3 &= 130.281^\circ, \\ \alpha_4 &= 180.000^\circ, & \alpha_5 &= 229.718^\circ, & \alpha_6 &= 296.510^\circ, & \alpha_7 &= 360.000^\circ.\end{aligned}\quad (4)$$

Введем вспомогательную функцию знака, которая меняется с $+1$ на -1 при прохождении значений α через точки α_i из списка (4):

$$\text{sign}(\alpha) = \begin{cases} +1, & \text{если } \alpha_1 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_2, \\ -1, & \text{если } \alpha_2 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_3, \\ +1, & \text{если } \alpha_3 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_4, \\ -1, & \text{если } \alpha_4 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_5, \\ +1, & \text{если } \alpha_5 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_6, \\ -1, & \text{если } \alpha_6 < \alpha \text{ и } \alpha < \alpha_7, \\ 0, & \text{если } \alpha = \alpha_i, i = 1, \dots, 7. \end{cases}$$

Функция $\text{sign}(\alpha)$ позволяет описывать движение стержня DO_1 в парадоксальном механизме при движении DO_1 в одну сторону. В этом случае маятник MDO_1 движется симметрично относительно подвижной прямой MO_1 при прохождении через углы α_i из набора (4).

Параметризация парадоксального механизма рассматривалась автором в статье [13]. Приведем здесь только конечные формулы. Введем систему координат в плоскости движения парадоксального механизма. Начало координат совпадает с точкой C , ось Cx направлена по вектору CO , ось Cy ортогональна оси Cx (см. рис. 1). Координаты вершин A , B и M можно параметризовать углом α следующим образом. Положение вершины A явно определяется углом α . Положение вершины B определяется из равнобедренного треугольника ABC . Для этого сначала находится середина H отрезка CA . Далее из точки H выходит отрезок с длиной, равной высоте AH треугольника ABC . Для параметризации также вводится середина K отрезка DM . В результате получается следующая параметризация лямбда-механизма:

$$\begin{aligned}x_A &= d + r \cos \alpha, & y_A &= r \sin \alpha, & CA &= \sqrt{r^2 + d^2 + 2rd \cos \alpha}, & h &= \sqrt{1 - \frac{(CA(\alpha))^2}{4}}; \\ x_B &= \left(\frac{0 + x_A(\alpha)}{2} \right) - h(\alpha) \cdot \left(\frac{y_A(\alpha) - 0}{CA(\alpha)} \right), & y_B &= \left(\frac{0 + y_A(\alpha)}{2} \right) + h(\alpha) \cdot \left(\frac{x_A(\alpha) - 0}{CA(\alpha)} \right), \\ x_M &= x_A(\alpha) + 2(x_B(\alpha) - x_A(\alpha)), & y_M &= y_A(\alpha) + 2(y_B(\alpha) - y_A(\alpha)), \\ v_B &= \sqrt{(x'_B(\alpha))^2 + (y'_B(\alpha))^2}, & MO_1 &= \sqrt{(x_M(\alpha) - x_{O_1})^2 + (y_M(\alpha) - y_{O_1})^2}, \\ x_K &= \frac{x_M(\alpha) + x_D(\alpha)}{2}, & y_K &= \frac{y_M(\alpha) + y_D(\alpha)}{2}, & v_K &= \sqrt{(x'_K(\alpha))^2 + (y'_K(\alpha))^2}.\end{aligned}\quad (5)$$

Значения $x_{O_1} = 0$ и $y_{O_1} = CO_1$. Полученные зависимости координат вершин B и M в (5) являются гладкими, если $h \neq 0$, т. е. треугольник ABC является невырожденным. Это условие выполняется для параметров (3). Углы поворота стержней CB и AM :

$$c_1 = \arctan(y_B(\alpha), x_B(\alpha)), \quad c_2 = \arctan(y_B(\alpha) - y_A(\alpha), x_B(\alpha) - x_A(\alpha)).$$

В функции $\arctan(y, x)$ угол находится с учетом октанта точки (x, y) .

Угол поворота w оси O_1M отсчитывается в следующей неподвижной системе отсчета: ось X' совпадает с лучом O_1C , ось Y' параллельна оси Cx . Эта система координат введена по аналогии с системой координат двойного математического маятника (см. рис. 1). Угол θ_1 измеряет отклонение стержня DO_1 от прямой MO_1 , угол θ_2 равен углу MDO_1 . Величина



углов θ_1 и θ_2 определяется по теореме косинусов в треугольнике MDO_1 . Также введем углы ξ и η , которые равны углам отклонения стержней DO_1 и DM от оси $X' = O_1C$. Углы ξ и η являются стандартными параметрами для описания положения двойного маятника MDO_1 .

Зададим знаки углов θ_1 и θ_2 , для которых получается гладкое движение вершины D парадоксального механизма:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \text{sign}(\alpha) \cdot \arccos\left(\frac{(MO_1(\alpha))^2 + DO_1^2 - MD^2}{2MO_1(\alpha) \cdot DO_1}\right), \\ \theta_2 &= \text{sign}(\alpha) \cdot \arccos\left(\frac{DO_1^2 + MD^2 - (MO_1(\alpha))^2}{2MD \cdot DO_1}\right), \\ w &= \arctan(x_M(\alpha), -(y_M(\alpha) - CO_1)).\end{aligned}\quad (6)$$

Выражение для угла w в (6) получается при переходе из системы координат Cxy в систему $O_1x'y'$. Углы ξ и η задаются в зависимости от гладкой ветви движения парадоксального механизма [13]:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= w(\alpha) + \theta_1(\alpha), & \eta_1 &= \xi_1 + \pi + \theta_2(\alpha), \\ \xi_2 &= w(\alpha) - \theta_1(\alpha), & \eta_2 &= \xi_2 + \pi - \theta_2(\alpha).\end{aligned}\quad (7)$$

Положительный знак перед углами θ_1 и θ_2 в (7) соответствует типу движения, при котором точка D вращается против часовой стрелки при полном обороте рукоятки OA против часовой стрелки. Отрицательный знак соответствует вращению вершины D по часовой стрелке. За счет смены знака при прохождении через «сложенное» и «раскрытое» положение маятника MDO_1 при углах $\alpha = \alpha_i$ из списка (4) полученное движение (7) является гладким. Без смены знаков при $\alpha = \alpha_i$ вершина D имеет разрывную скорость движения. Это следует из теории движения сингулярного маятника, которая подробнее рассматривается в [11]. В парадоксальном механизме двузвенник MDO_1 является сингулярным маятником. Кратко сформулируем теорему о свойстве конфигурационного пространства.

Теорема 1. *Рассматривается двойной маятник MDO_1 , вершина M движется по заданной гладкой кривой Υ . Координаты вершины M являются гладкими функциями некоторого параметра α . Пусть при значении параметра $\alpha = \alpha_*$ выполняются следующие условия:*

$$MO_1(\alpha_*) = DM \pm DO_1, \quad \frac{d}{d\alpha} MO_1(\alpha_*) = 0, \quad \frac{d^2}{d\alpha^2} MO_1(\alpha_*) \neq 0.$$

Первое условие соответствует особой точке конфигурационного пространства. Тогда в окрестности точки, которая соответствует α_ , конфигурационное пространство представляется как объединение двух гладких кривых, которые пересекаются под ненулевым углом. При гладком движении углы θ_1 и θ_2 должны менять знак при прохождении особой точки α_* .*

В особых конфигурациях функция $MO_1(\alpha)$ имеет нулевую первую производную, так как расстояние MO_1 достигает минимума или максимума. Прямым вычислением можно проверить, что функция $MO_1(\alpha)$ имеет ненулевую вторую производную [13]. Следовательно, по теореме 1 кривые (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) являются гладкими, а геометрическая особенность может быть представлена как две пересекающиеся кривые.

Теперь запишем уравнения движения парадоксального механизма под действием сил инерции или приложенного внешнего момента M_Σ , который действует на ведущее звено. В статье автора [13] было показано, что кинетическая энергия парадоксального механизма может быть представлена как сумма двух приведенных моментов:

$$T(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{1}{2} J_\Sigma(\alpha) (\dot{\alpha})^2 = \frac{1}{2} (J_\lambda(\alpha) + J_p(\alpha)) (\dot{\alpha})^2. \quad (8)$$



Приведенный момент J_λ в (8) для лямбда-механизма:

$$J_\lambda(\alpha) = I_{OA} + I_{CB}(c'_1(\alpha))^2 + m_{AM}(v_B(\alpha))^2 + I_{AM}(c'_2(\alpha))^2.$$

Приведенный момент J_p в (8) для двойного маятника MDO_1 :

$$J_p(\alpha) = I_{DO_1}(\xi'(\alpha))^2 + I_{DM}(\eta'(\alpha))^2 + m_{DM}(v_K(\alpha))^2.$$

Уравнение движения при действии момента M_Σ , который приложен к ведущей рукоятке OA , получается применением уравнений Лагранжа второго рода:

$$\ddot{\alpha} = \frac{M_\Sigma(\alpha)}{J_\Sigma(\alpha)} - \frac{1}{2} \frac{J'_\Sigma(\alpha)}{J_\Sigma(\alpha)} (\dot{\alpha})^2. \quad (9)$$

В модели парадоксального механизма из [2] стержень DO_1 заменяется на массивный диск. В результате получается дополнительный момент, который должен обеспечивать вращение звена DO_1 в одну сторону. Для модели динамики парадоксального механизма с диском достаточно заменить момент инерции стержня DO_1 на момент инерции диска в выражении для J_p в (8).

Замечание 1. При численном моделировании движения парадоксального механизма по формулам (9) необходима повышенная точность в десятичных знаках для параметров механизма. Округление до третьей цифры после запятой у длин стержней (3) приводит к заметным скачкам кинетической энергии. При использовании шести знаков после запятой результаты получаются более «гладкими».

2. Особые точки и количество вращений

Рассмотрим более общий случай, когда вершина M маятника MDO_1 движется по некоторой гладкой кривой Υ . Кривая Υ может отличаться от множества точек, которое замечает вершина лямбда-механизма. При этом считается, что кривая Υ как множество точек диффеоморфна окружности на плоскости, поэтому возможно говорить об одном обороте точки M по кривой Υ .

Предполагается, что положение точки M на кривой Υ гладко параметризуется углом w отклонения луча MO_1 от некоторой фиксированной прямой (в парадоксальном механизме от прямой O_1C). Пусть кривая Υ заключена между двумя концентрическими окружностями ω_1 и ω_2 с центром в точке O_1 и радиусами $r_1 > r_2$. Предположим также, что кривая Υ касается окружности ω_1 в точках α_i , $i = 1, \dots, n$ и касается окружности ω_2 в точках β_i , $i = 1, \dots, n$, причем порядок касания чередуется: $\alpha_1 = 0, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \alpha_n = 2\pi$. Длины стержней DO_1 и MD подобраны так, что сумма длин $DO_1 + MD$ равна радиусу r_1 большей окружности, а разность длин $MD - DO_1$ равна радиусу r_2 меньшей окружности. Предполагается, что $MD > DO_1$.

В точках α_i стержни DO_1 и MD становятся параллельными (маятник MDO_1 «раскрытый»), а в точках β_i стержни DO_1 и MD становятся антипараллельными (маятник MDO_1 «сложенный»). Общая схема показана на рис. 2. Точками M_1, M_2, M_3 и D_1, D_2, D_3 показаны три положения маятника для двух максимальных расстояний (точки M_1 и M_3) и для минимального расстояния (точка M_2). Значения Δ_1 и Δ_2 показывают угол, на который поворачивается звено D_iO_1 .

Рассмотрим, сколько оборотов сделает звено DO_1 при движении точки M по кривой Υ . Как будет показано далее, дополнительное количество оборотов звена DO_1 связано с наличием особых точек, в которых стержни DO_1 и MD становятся (анти)параллельными. Также общее число оборотов зависит от направления вращения звена DO_1 .

Предложение 1. Если стержни DO_1 и DM не становятся параллельными или антипараллельными при движении $0 \leq w \leq 2\pi$, то за один оборот точки M по кривой Υ стержень DO_1 делает один оборот.

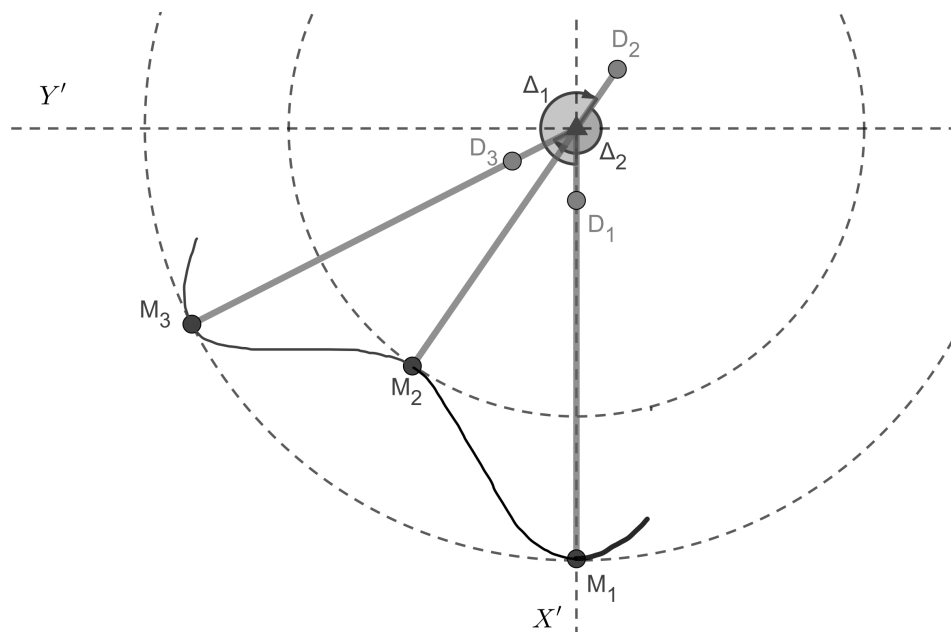


Рис. 2. Перемещение звена DO_1 при обороте точки M и DO_1 в одну сторону
Fig.. 2. Motion of the rod DO_1 with full circle of vertexes M and DO_1 in similar direction

Доказательство. Так как стержни DO_1 и DM не могут стать параллельными или антипараллельными, то угол θ_1 заключен в интервале $0 < \theta_1 < \pi$ или в интервале $-\pi < \theta_1 < 0$. Угол поворота стержня DO_1 равен $w + \theta_1(w)$. Тогда сумма $w + \theta_1(w)$ не может быть равной 0 , 4π или -2π . При движении вершины M по кривой Υ угол w меняется от 0 до 2π . Так как стержень DO_1 возвращается в начальное положение, делая целое число оборотов, то сумма $w + \theta_1(w)$ может быть равной только 2π . Следовательно, возможен только один оборот вершины D . $\square$

Предложение 2. Пусть выполнены следующие условия: $DO_1 + DM = r_1$, $DM - DO_1 = r_2$ и стержень DO_1 всегда вращается в ту же сторону, в которую движется точка M . Предположим, что стержни DO_1 и DM последовательно становятся параллельными и антипараллельными $2n$ раз. Тогда за один оборот точки M по кривой Υ стержень DO_1 суммарно делает $n + 1$ оборот.

Доказательство. Будем считать, что движение вершины M идет по часовой стрелке. Такое движение будет у парадоксального механизма при движении по кривой (ξ_2, η_2) . Рассмотрим, на какой угол должен повернуться стержень DO_1 при переходе от значения $\xi = \alpha_1$ (максимальное расстояние MO_1) к значению $\xi = \beta_1$ (минимальное расстояние MO_1). При повороте в точки M и стержня DO_1 в одну сторону стержень DO_1 должен повернуться на угол $\beta_1 - \alpha_1 + \pi$ (см. рис. 2). При переходе от угла $\xi = \beta_1$ к углу $\xi = \alpha_2$ (максимальное расстояние MO_1) стержень DO_1 должен повернуться на угол $\alpha_2 - \beta_1 + \pi$. Продолжая аналогично, получаем суммарное приращение Δ угла поворота DO_1 :

$$\Delta = (\beta_1 - \alpha_1 + \pi) + (\alpha_2 - \beta_1 + \pi) + \dots + (\alpha_n - \beta_{n-1} + \pi) = 2\pi n + (\alpha_n - \alpha_1) = 2\pi(n + 1).$$

Значит, суммарно будет $n + 1$ полный оборот стержня DO_1 . $\square$

Предложение 3. Пусть выполнены следующие условия: $DO_1 + DM = r_1$, $DM - DO_1 = r_2$ и стержень DO_1 всегда вращается в сторону, противоположную движению точки M . Предположим, что стержни DO_1 и DM последовательно становятся параллельными и



антипараллельными $2n$ раз. Тогда за один оборот точки M по кривой Υ стержень DO_1 суммарно делает $n - 1$ оборот.

Доказательство. Будем считать, что движение вершины M идет по часовой стрелке, а стержень DO_1 движется против часовой стрелки. Рассмотрим, на какой угол должен повернуться стержень DO_1 при переходе от значения $\xi = \alpha_1$ (максимальное расстояние MO_1) к значению $\xi = \beta_1$ (минимальное расстояние MO_1). При повороте точки M и стержня DO_1 в разные стороны стержень DO_1 должен повернуться на угол $-\pi + (\beta_1 - \alpha_1)$. Действительно, для поворота по часовой стрелке стержень DO_1 должен повернуться на угол $\pi + \beta_1 - \alpha_1$. Тогда при повороте против часовой стрелки, с учетом знака, получаем поворот на угол

$$-(2\pi - (\pi + \beta_1 - \alpha_1)) = -\pi + (\beta_1 - \alpha_1).$$

При переходе от угла $\xi = \beta_1$ к углу $\xi = \alpha_2$ (максимальное расстояние MO_1) стержень DO_1 должен повернуться на угол $-\pi + (\alpha_2 - \beta_1)$. Продолжая аналогично, получаем суммарное приращение Δ угла поворота DO_1 :

$$\Delta = -\pi + (\beta_1 - \alpha_1) - \pi + (\alpha_2 - \beta_1) + \dots - \pi + (\alpha_n - \beta_{n-1}) = -2\pi n + (\alpha_n - \alpha_1) = -2\pi(n - 1).$$

Значит, суммарно будет $n - 1$ полный оборот стержня DO_1 . $\square$

Вернемся к парадоксальному механизму П. Л. Чебышёва. В парадоксальном механизме [1, 2] параметры лямбда-механизма $OABCM$ и положение точки O_1 подобраны так, что расстояние MO_1 ровно 3 раза достигает максимального значения и ровно 3 раза достигает минимального значения. Минимальные и максимальные значения расстояния MO_1 чередуются. В модели механизма на сайте [3] показано, что при вращении ведущего звена возможно два варианта для суммарного числа оборотов ведомого маховика: 4 оборота или 2 оборота.

Замечание 2. Выводы в предложениях 2 и 3 согласуются с движением парадоксального механизма. В этом механизме есть $n = 3$ пар минимумов и максимумов функции MO_1 . Когда точки M и D движутся в одну сторону, то стержень DO_1 делает $n + 1 = 4$ оборота. Когда точки M и D движутся в разные стороны, то получается $n - 1 = 2$ полных оборота.

3. Работа сил инерции на диске

В этом разделе рассматривается соотношение работы момента внешних сил M_Σ , приложенного к рукоятке OA , к работе момента сил инерции M_1 , приложенного к звену (или диску) DO_1 парадоксального механизма. Анализируются два варианта движения. В первом случае момент M_Σ подбирается так, что угол α имеет постоянную скорость. Как следствие, $\ddot{\alpha} = 0$. Во втором варианте считается, что момент M_Σ является постоянным. В общем случае функции M_Σ , ξ , J_Σ являются функциями угла α . Момент инерции J_1 диска DO_1 является константой.

Замечание 3. В лямбда-механизме $OABCM$ положение вершин A , B и M зависит только от угла α поворота звена OA относительно луча CO (см. рис. 1). Угол w описывает поворот точки M относительно луча O_1C . За один оборот звена OA вершина M делает один полный оборот вокруг точки O_1 . Следовательно, за один поворот звена OA угол w меняется от 0 до 2π . За один оборот угол w получает приращение в 2π радиан. Тогда для k оборотов

$$w(\alpha + 2\pi k) = w(\alpha) + 2\pi k.$$

При дифференцировании получаем, что скорость изменения угла

$$w'(\alpha + 2\pi k) = w'(\alpha) + 0 = w'(\alpha)$$

является периодической функцией с периодом 2π .



В двойном маятнике MDO_1 угол ξ (см. рис. 1) делает 2 или 4 оборота при изменении угла α от 0 до 2π , т. е.

$$\xi(\alpha + 2\pi k) = \xi(\alpha) + 2\pi k m$$

для некоторого целого m (в зависимости от направления вращения диска). Следовательно, скорость изменения угла

$$\xi'(\alpha + 2\pi k) = \xi'(\alpha) + 0 = \xi'(\alpha)$$

будет 2π -периодической функцией.

Также рассмотрим приращения $\Delta_k w$ и $\Delta_k \xi$ функций w и ξ , которые получаются за k полных оборотов угла α . Выражения для приращений углов

$$\Delta_k w = w(\alpha + 2\pi k) - w(\alpha) = 2\pi k, \quad \Delta_k \xi = \xi(\alpha + 2\pi k) - \xi(\alpha) = 2\pi k m$$

линейно зависят от числа полных оборотов k . Следовательно, функции w и ξ можно представить как суммы линейных и периодических функций:

$$w(\alpha) = \alpha + \underbrace{(w(\alpha) - \alpha)}_{2\pi\text{-периодическая}}, \quad \xi(\alpha) = m\alpha + \underbrace{(\xi(\alpha) - m\alpha)}_{2\pi\text{-периодическая}}.$$

Полученное представление в виде суммы линейной и периодической функции также доказывает, что функции w и ξ имеют периодические производные.

Периодичность производных функции $\eta(\alpha)$ доказывается аналогично периодичности производных функции $\xi(\alpha)$.

Замечание 4. Приведенный момент парадоксального механизма J_Σ зависит от приведенного момента J_λ лямбда-механизма и приведенного момента J_p двойного маятника. Линейные и угловые скорости звеньев лямбда-механизма и двойного маятника являются 2π -периодическими функциями угла α по замечанию 3. Следовательно, приведенный момент J_Σ также является периодической функцией: $J_\Sigma(\alpha + 2\pi k) = J_\Sigma(\alpha)$.

Замечание 5. Динамически углы w и ξ получают приращения на целое число оборотов при полном обороте угла α . При этом геометрически для значений угла $\alpha = 0$ и $\alpha = 2\pi$ лямбда-механизм $OABCM$ находится в одной и той же конфигурации. Двойной маятник MDO_1 также возвращается в начальное положение при изменении угла α от 0 до 2π радиан. При этом звено O_1D делает 2 или 4 полных оборота. Геометрическая периодичность движения звеньев парадоксального механизма с периодом 2π наглядно показана в анимации 3D-модели механизма на сайте *Механизмы П. Л. Чебышева* <https://tcheb.ru/>.

Работа момента M_Σ за один оборот рукоятки OA :

$$A_{in} = \int_0^{2\pi} M_\Sigma d\alpha. \quad (10)$$

Работа момента сил инерции M_1 (за один оборот ведущего звена), который приложен к диску DO_1 , можно привести к следующему виду с учетом $d\xi = \xi' d\alpha$:

$$A_{out} = \int_0^{2\pi} M_1 d\xi = \int_0^{2\pi} M_1 \xi' d\alpha. \quad (11)$$

Кинетическая энергия T_1 звена (или диска) DO_1 :

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 (\dot{\xi})^2.$$

При движении парадоксального механизма под действием внешнего момента M_Σ на ведущем звене OA диск DO_1 движется по инерции. На каждую малую часть диска массой dm на



расстоянии h от неподвижной вершины O_1 действует сила инерции $\mathbf{F}(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}, h)$, которая вызвана ускорением $\mathbf{a}$ этой массы. Мгновенная работа силы инерции A_{Disk} является суммой работ всех сил инерции $\mathbf{F}$. Обозначим как ds мгновенный вектор перемещения массы dm . После упрощений получаем:

$$\begin{aligned} ds &= h(-\sin(\xi), \cos(\xi)) d\xi, \\ \mathbf{F} &= \mathbf{a} dm = h(-\cos(\xi)(\dot{\xi})^2 - \sin(\xi)\ddot{\xi}, -\sin(\xi)(\dot{\xi})^2 + \cos(\xi)\ddot{\xi}) dm, \\ A_{Disk} &= \int_{Disk} \mathbf{F} ds = \ddot{\xi} d\xi \left(\int_{Disk} h^2 dm \right) = J_1 \ddot{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Тогда можно положить, что момент M_1 «сил инерции диска» определяется выражением

$$M_1 = J_1 \ddot{\xi}. \quad (12)$$

Аналогичные определения момента сил инерции приведены в литературе. Например, в [7] и [8] применяется уравнивающий момент $M'_1 = -J_1 \ddot{\xi}$ для движения диска по инерции.

Скорость и ускорения угла ξ выражаются через производные угла α :

$$\dot{\xi} = \xi' \dot{\alpha}, \quad \ddot{\xi} = \xi'' (\dot{\alpha})^2 + \xi' \ddot{\alpha}.$$

При подстановке $\ddot{\alpha}$ из уравнения (9) в формулу (12) получается

$$M_1 = J_1 \left(\left(\xi'' - \frac{1}{2} \xi' \frac{J'_\Sigma}{J_\Sigma} \right) (\dot{\alpha})^2 + \xi' \frac{M_\Sigma}{J_\Sigma} \right). \quad (13)$$

Квадрат скорости $(\dot{\alpha})^2$ находится по уравнению изменения кинетической энергии всего парадоксального механизма под действием внешнего момента M_Σ от начального угла $\alpha = \alpha_0$ до угла α :

$$J_\Sigma(\alpha)(\dot{\alpha})^2 - J_\Sigma(\alpha_0)(\dot{\alpha}_0)^2 = 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_\Sigma d\alpha. \quad (14)$$

Предложение 4. Если вращение звена OA происходит с постоянной угловой скоростью, то работа момента M_1 за один оборот звена OA равна 0.

Доказательство. При постоянной угловой скорости звена OA получаем $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$ и $\ddot{\alpha} = 0$. Тогда выражение (12) для момента M_1 упрощается:

$$M_1 = J_1 \xi''(\alpha) (\dot{\alpha})^2 = J_1 \xi''(\alpha) (\dot{\alpha}_0)^2.$$

Функция $\xi'(\alpha)$ является 2π -периодической по замечанию 3. Тогда выполняется соотношение

$$A_{out} = J_1 \int_0^{2\pi} \xi'' \cdot (\dot{\alpha}_0)^2 (\xi' d\alpha) = (\dot{\alpha}_0)^2 J_1 \int_0^{2\pi} \xi' \xi'' d\alpha = (\dot{\alpha}_0)^2 J_1 \left(\frac{(\xi')^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Значит, при постоянной скорости вращения звена OA работа сил инерции за один оборот ведущего звена равна нулю. $\square$

Предложение 5. Если вращение происходит под действием постоянного момента $M_\Sigma(\alpha) = M_\Sigma$, то работа момента сил инерции M_1 зависит от отношения J_1 и J_Σ при значении $\alpha = 0$.

Доказательство. По замечанию 4 приведенный момент J_Σ является 2π -периодическим, т. е. $J_\Sigma(2\pi) = J_\Sigma(0)$. Тогда при постоянном моменте M_Σ из выражения (14) получаем

$$J_\Sigma(2\pi)(\dot{\alpha}_{2\pi})^2 - J_\Sigma(0)(\dot{\alpha}_0)^2 = J_\Sigma(0) \cdot ((\dot{\alpha}_{2\pi})^2 - (\dot{\alpha}_0)^2) = 4\pi M_\Sigma. \quad (15)$$



После подстановки (14) и (13) в (11) получаем выражение для работы A_{out} момента M_1 за один оборот звена OA :

$$A_{out} = J_1 \int_0^{2\pi} \left(\left(\xi'' - \frac{1}{2} \xi' \frac{J'_\Sigma}{J_\Sigma} \right) \left(\frac{2 \int_0^\alpha M_\Sigma d\alpha + J_\Sigma(0)(\dot{\alpha}_0)^2}{J_\Sigma} \right) + \xi' \frac{M_\Sigma}{J_\Sigma} \right) \xi' d\alpha.$$

Величину работы A_{out} проще найти через изменение кинетической энергии диска. С учетом 2π -периодичности функции $\xi'(\alpha)$ по замечанию 3 получаем

$$2 \int_0^{2\pi} M_1 d\xi = J_1(\dot{\xi}_{2\pi})^2 - J_1(\dot{\xi}_0)^2 = J_1(\xi'(0))^2 \cdot ((\dot{\alpha}_{2\pi})^2 - (\dot{\alpha}_0)^2). \quad (16)$$

Выразим $(\dot{\alpha}_{2\pi})^2 - (\dot{\alpha}_0)^2$ из уравнения (15) и подставим в (16). Тогда

$$A_{out} = \int_0^{2\pi} M_1 d\xi = 2\pi M_\Sigma (\xi'(0))^2 \left(\frac{J_1}{J_\Sigma(0)} \right).$$

Отношение работ A_{out} и $A_{in} = 2\pi M_\Sigma$:

$$k = \frac{A_{out}}{A_{in}} = \frac{J_1(\xi'(0))^2}{J_\Sigma(0)} = \frac{J_1(\xi'(0))^2}{J_1(\xi'(0))^2 + \dots} < 1$$

зависит от соотношения J_1 и $J_\Sigma(0)$. □

Заключение

В данной работе исследовались свойства движения ведомого маховика (диска) в парадоксальном механизме П. Л. Чебышёва. Количество оборотов, которые совершит диск за один оборот ведущего звена, зависит от свойств конфигурационного пространства. Если в конфигурационном пространстве нет геометрических особенностей, то диск делает только один полный оборот. При наличии особенностей диск может совершить более одного полного оборота. Геометрически особым положениям механизма соответствуют конфигурации, в которых стержни двойного маятника в парадоксальном механизме становятся параллельными или антипараллельными. При наличии особых точек диск может всегда двигаться в одну сторону: только по часовой или только против часовой стрелки. Без особых точек диск периодически меняет направление движения на противоположное.

В парадоксальном механизме ведомый диск может сделать два или четыре полных оборота за один оборот ведущей рукоятки. Количество оборотов зависит от начального направления вращения диска. В общем случае показано, что механизмы типа парадоксального могут совершать любое заданное количество оборотов. Также изучен коэффициент передачи между работой, совершаемой внешним моментом, и работой сил инерции на диске.

Список литературы

1. Чебышёв П. Л. О простейшей суставочной системе, доставляющей движения, симметричные около оси // Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева : в 5 т. Т. 4. Теория механизмов. Москва ; Ленинград : Изд-во АН СССР, 1948. С. 167–211.
2. Научное наследие П. Л. Чебышёва. Вып. 2. Теория механизмов / под ред. И. Г. Бруевича, И. И. Артоболевского. Москва ; Ленинград : Изд-во АН СССР, 1945. 192 с.
3. Механизмы П. Л. Чебышева : сайт / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН ; Фонд "Математические этюды". 2009–2023. URL: <https://tcheb.ru/> (дата обращения: 10.03.2023).
4. Кутеева Г. А. О кабинете практической механики в Санкт-Петербургском государственном университете // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. 2013. № 7. С. 177–185. EDN: XXEBHV
5. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. Москва : Юрайт, 2016. 592 с.



6. Зегжда С. А., Солтаханов Ш. С., Юшков М. П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. Москва : Физматлит, 2005. 268 с.
7. Тимофеев Г. А. Теория машин и механизмов: курс лекций. Москва : Юрайт, 2010. 351 с.
8. Ильин М. М., Колесников К. С., Саратов Ю. С. Теория колебаний. Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 272 с.
9. Самсонов В. А., Михалев А. А. Перестройка пространства положений механической системы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 4. С. 13–16. EDN: [HRVSYR](#)
10. Закалюкин Г. А. Динамика балки с двумя коньками и системы неявных дифференциальных уравнений // Труды МАИ. 2011. № 42. С. 1–25.
11. Бурьян С. Н. Силы реакции сингулярного маятника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9, № 2. С. 278–293. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.209>, EDN: [GCBILE](#)
12. Бурьян С. Н. Конические особые точки и векторные поля // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7, № 4. С. 649–661. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.407>, EDN: [TIKKSE](#)
13. Бурьян С. Н. «Парадоксальный» механизм П. Л. Чебышёва // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 536–551. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>, EDN: [NZJSQK](#)

References

1. Chebyshev P. L. On the simplest articular system that delivers movements that are symmetrical about the axis. In: *Polnoye sobraniye sochineniy P. L. Chebysheva. T. 4. Teoriya mekhanizmov* [Complete works of P. L. Chebyshev. Vol. 4. Theory of mechanisms]. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ., 1948, pp. 167–211 (in Russian).
2. Bruevich I. G., Artobolevsky I. I. (eds.) *Nauchnoye naslediyе P. L. Chebysheva. Vyp. 2. Teoriya mekhanizmov* [Scientific legacy of P. L. Chebyshev. Iss. 2. Theory of mechanisms]. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ., 1945. 192 p. (in Russian).
3. *Mechanisms by Tchebyshev*. Steklov Mathematical Institute of RAS, Mathematical Etudes Foundation, 2009–2023. Available at: <https://tcheb.ru/> (accessed March 10, 2023).
4. Kuteeva G. A. The Cabinet of applied mechanics in Saint-Petersburg State University. *Mechanics. Scientific Research and Educational Development*, 2013, vol. 7, pp. 177–185 (in Russian). EDN: [XXEBHV](#)
5. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., Tovstik P. E. *Rational and applied mechanics*. Springer Nature, 2021. 520 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-64118-4> (Russ. ed.: Moscow, Yurayt, 2016. 592 p.).
6. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. S., Yushkov M. P. *Mechanics of non-holonomic systems: A new class of control systems*. Springer Science & Business Media, 2009. 332 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatlit, 2005. 268 p.).
7. Timofeev G. A. *Teoriya mashin i mekhanizmov: kurs lektsiy* [Theory of machines and mechanisms: A course of lectures]. Moscow, Yurayt, 2010. 351 p. (in Russian).
8. Ilyin M. M., Kolesnikov K. S., Saratov Yu. S. *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2003. 272 p. (in Russian).
9. Samsonov V. A., Mikhalev A. A. Restructuring of the position space of a mechanical system. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2005, vol. 4, pp. 13–16 (in Russian). EDN: [HRVSYR](#)
10. Zakalyukin I. V. Dynamics of a beam with two sleights via system of implicit differential equations. *Trudy MAI*, 2011, vol. 42, pp. 1–25 (in Russian).
11. Burian S. N. Reaction forces of a singular pendulum. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2022, vol. 55, pp. 192–202. <https://doi.org/10.1134/S1063454122020054>
12. Burian S. N. Conical singular points and vector fields. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2021, vol. 54, pp. 311–320. <https://doi.org/10.1134/S106345412104004X>
13. Burian S. N. The “paradoxical” mechanism of P. L. Chebyshev. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 536–551. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-536-551>, EDN: [NZJSQK](#)

Поступила в редакцию / Received 02.04.2023

Принята к публикации / Accepted 18.06.2024

Опубликована / Published 28.02.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 70–79

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 70–79
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-70-79>, EDN: ODBWYX

Научная статья
УДК 004.942:531.3:532.3

Численное моделирование гидродинамики обтекания тела в режиме суперкавитации

К. Н. Жильцов[✉], И. М. Тырышкин, А. Н. Ищенко, А. С. Дьячковский,
А. В. Чупашев

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634045, г. Томск, пр-кт Ленина, д. 36

Жильцов Константин Николаевич, научный сотрудник лаборатории математической физики, konstantin@niipmm.tsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4594-9116>, SPIN: 8679-3704, AuthorID: 904266

Тырышкин Илья Михайлович, инженер-исследователь лаборатории математической физики, tyryshkin@niipmm.tsu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2298-0754>, SPIN: 9477-8010, AuthorID: 175973

Ищенко Александр Николаевич, заведующий отделом быстропротекающих процессов, ischan@niipmm.tsu.ru, SPIN: 4129-6433, AuthorID: 7409

Дьячковский Алексей Сергеевич, заведующий сектором, lex_okha@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8553-6645>, SPIN: 1073-8519, AuthorID: 854289

Чупашев Андрей Владимирович, младший научный сотрудник лаборатории прикладной газодинамики, chupashevav@gmail.com, SPIN: 7192-9069, AuthorID: 864662

Аннотация. Работа посвящена исследованию высокоскоростного обтекания удлиненного тела в водной среде на различных глубинах в режиме суперкавитации. Целью исследования является изучение состояния окружающей среды в окрестности тела, погруженного в воду, и возможного влияния возмущений среды на движение в воде группы метаемых тел. При моделировании обтекания применялась математическая модель сжимаемой среды на основе уравнений Навье – Стокса. Учитывались двухфазность, турбулентность и процесс фазового перехода с использованием моделей Смеси, $k - \epsilon$ и полной модели кавитации Сингхала. В работе рассматривались удлиненные конические ударники с различными диаметрами кавитатора и обтекаемые потоком жидкости с различной скоростью. Численные результаты приводились в сравнении с экспериментальными результатами, полученными при метании ударников на гидробаллистической трассе на базе Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета. В результате численного моделирования было показано, что предложенная математическая модель позволяет точно предсказывать геометрическую форму и размеры каверны. Численные результаты также хорошо согласуются с полуэмпирической аппроксимационной формулой для формы каверны. Расчеты показывают, что в окрестности тела формируется ударно-волновая картина течения и возмущения потока распространяются на достаточное удаление от тела. На прямом уступе с переднего торца тела — кавитатора — происходит срыв потока, а за скачком уплотнения происходит резкое понижение давления до значений давления насыщенного пара. Геометрические размеры каверны зависят от скорости и окружающего давления: чем больше скорость потока, тем больше размеры каверны. Из расчетов следует, что при повышении давления среды, в случае имитации глубоководного метания при одних и тех же условиях для скорости, происходит уменьшение объема каверны и сокращение области распространения возмущений среды, что может положительно сказываться на кучности метания группы тел в воде.

Ключевые слова: математическое моделирование, кавитация, каверна, суперкавитирующее движение

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00233).



Для цитирования: Жильцов К. Н., Тырышкин И. М., Ищенко А. Н., Дьячковский А. С., Чупашев А. В. Численное моделирование гидродинамики обтекания тела в режиме суперкавитации // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 70–79. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-70-79>, EDN: ODBWYX
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Numerical study of the hydrodynamics of supercavitation flow around an underwater body

K. N. Zhiltsov[✉], I. M. Tyryshkin, A. N. Ischenko, A. S. Diachkovskii, A. V. Chupashev

National research Tomsk State University, 36 Lenina Pr., Tomsk, 634045, Russia

Konstantin N. Zhiltsov, konstantin@niipmm.tsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4594-9116>, SPIN: 8679-3704, AuthorID: 904266

Ilya M. Tyryshkin, tyryshkin@niipmm.tsu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2298-0754>, SPIN: 9477-8010, AuthorID: 175973

Aleksander N. Ischenko, ischan@niipmm.tsu.ru, SPIN: 4129-6433, AuthorID: 7409

Alexey S. Diachkovskii, lex_okha@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8553-6645>, SPIN: 1073-8519, AuthorID: 854289

Andrey V. Chupashev, chupashevav@gmail.com, SPIN: 7192-9069, AuthorID: 864662

Abstract. The work is devoted to the study of the high-speed flow around an elongated body in water at various depths in the supercavitation regime. The aim of the research is to study the state of the environment around a submerged body and the possible influence of environmental disturbances on the movement of a group of bodies. The mathematical model of a compressible medium was used based on the Navier – Stokes equations. Two-phase, turbulence and phase transition were taken into account using the Mixture model, $k - \epsilon$ equations and Singhal full cavitation model, respectively. In the work, elongated conical bodies with different cavitator diameters and streamlined by a fluid flow at different speeds were considered. The numerical results were compared with the experimental results obtained by launching bodies on a hydroballistic track at the RIAMM TSU. Numerical simulation results showed that the proposed mathematical model can accurately predict the geometric shape and dimensions of the cavity. The numerical results are also in good agreement with the semi-empirical approximation for the cavity shape. Flow calculations show that a shock-wave flow pattern is formed near the body and flow disturbances propagate to a sufficient distance. On a cavitator at the front end of the body the flow is stalled and there is a sharp decrease of pressure to the values of saturated vapor pressure behind the shock wave. The dimensions of the cavity depend on the speed and ambient pressure — a greater flow rate leads to an increase in the size of the cavity. From calculations it follows that in the case of simulating deep-water launching under the same conditions of speed, following the medium pressure increase the volume of the cavity and the area of a disturbances propagation in the medium decreases, which can positively affect the accuracy of moving a group of bodies in a water.

Keywords: mathematical modeling, cavitation, cavity, supercavitating flow

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-19-00233).

For citation: Zhiltsov K. N., Tyryshkin I. M., Ischenko A. N., Diachkovskii A. S., Chupashev A. V. Numerical study of the hydrodynamics of supercavitation flow around an underwater body. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 70–79 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-70-79>, EDN: ODBWYX

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

На сегодняшний день существуют четкие представления о развитии кавитационных течений для малых скоростей применительно к различным подводным аппаратам [1]. На основе экспериментальных работ по исследованию явления кавитации выработаны инженерные подходы к определению основных характеристик каверн и их влиянию на движущиеся под водой тела [2–4]. Развитие численного моделирования [5] позволило расширить представления о явлении кавитации и получить новые знания о физических процессах, происходящих при движении тел в воде.

Большая часть исследовательских работ о суперкавитирующем движении тел в воде сводится к рассмотрению единичных тел. В работах [6–10] рассматриваются задачи о движении в воде или входе в воду одиночных тел под разными углами атаки на дозвуковых и сверхзвуковых скоростях [10] при различных числах кавитации с переменной плотностью среды [9]. Рассматриваются как оперенные тела большой массы, так и инертные тела. В то же время остро стоит необходимость рассматривать группу тел, движущихся относительно недалеко друг от друга [11]. Поэтому особый интерес представляет работа [12], посвященная суперкавитирующему обтеканию двух тел, которые движутся последовательно друг за другом. В работе представлены результаты зависимости коэффициента сопротивления от числа кавитации и расстояния тел друг от друга. Таким образом, можно сделать вывод, что работ, которые исследуют групповое движение тел, недостаточно, а большая часть из них посвящена процессу численных исследований и сводится к оценке поведения тела в воде и процессу формирования каверны.

В данной работе проведено численное исследование суперкавитирующего движения одиночного тела. Подробно представлены результаты моделирования процессов гидро- и газодинамики в результате движения с последующим образованием каверны. Приведены результаты состояния окружающей среды в условиях нахождения движущегося тела на различных глубинах. Представлены оценки области влияния движущегося тела в суперкавитирующем режиме, которое необходимо учитывать в случае группового метания тел.

1. Физическо-математическая постановка задачи

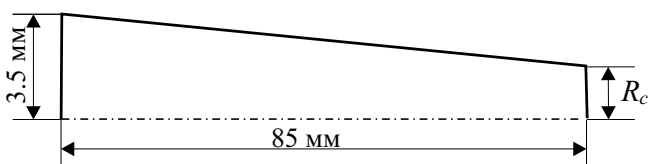


Рис. 1. Форма и геометрические размеры тела
Fig. 1. Shape and geometric size of the body

Рассматривается процесс обтекания конического тела (рис. 1) слоем воды с фиксированной скоростью потока V . При обтекании за прямым уступом тела — кавитатором, происходит срыв потока и образование скачка уплотнения с резким падением давления за скачком. В области пониженного давления развивается процесс фазового перехода

с образованием кавитационного пузыря. С течением времени каверна полностью охватывает тело и обтекание переходит в режим суперкавитации. Анализ литературы показал, что процессы гидродинамики при обтекании тела в водной среде в условиях суперкавитации хорошо моделируются с помощью осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса [9, 13, 14]. Система уравнений гидродинамики на основе законов сохранения для многофазной среды включает в себя уравнение неразрывности [15], уравнение движения, уравнение энергии и замыкается уравнениями турбулентности $k - \epsilon$ [16] и уравнением кавитации. Система принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m) + \nabla(\rho_m \vec{v}_m) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \vec{v}_m) + \nabla(\rho_m \vec{v}_m \vec{v}_m) = -\nabla p + \nabla[\mu_m(\nabla \vec{v}_m + \nabla \vec{v}_m^T)] + \vec{F} + \nabla \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k \vec{v}_{dr,k} \vec{v}_{dr,k} \right), \quad (2)$$



$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k E_k + \nabla \sum_{k=1}^n (\alpha_k \vec{v}_k (\rho_k E_k + p)) = \nabla [k_{eff} \nabla T], \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k) + \nabla (\alpha_k \rho_k \vec{v}_m) = -\nabla (\alpha_k \rho_k \vec{v}_{dr,k}) + \sum_{q=1}^n (\dot{m}_{qk} - \dot{m}_{kq}), \quad (4)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(C_k \frac{k^2}{\epsilon} + \gamma \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P - \epsilon, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(C_\epsilon \frac{k^2}{\epsilon} + \gamma \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k}, \quad (6)$$

где ρ_m — плотность смеси, $\vec{v}_m$ — скорость смеси, ∇ — оператор Лапласа в осесимметричной системе координат, p — давление, μ_m — вязкость смеси, α_k — объемная концентрация k -й фазы, ρ_k — плотность k -й фазы, $\vec{v}_{dr,k}$ — скорость дрейфа k -й фазы, E_k — энергия k -й фазы, k_{eff} — эффективная теплопроводность, T — температура, $\dot{m}_{qk}$ — массоперенос из q -й фазы в k -ю фазу.

Процесс кавитации моделировался с использованием уравнения полной кавитационной модели Сингхала [5]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho f_v) + \nabla (\rho f_v \vec{v}_v) = \nabla (\Gamma \nabla f_v) + R_e - R_c, \quad (7)$$

где f_v — концентрация пара, Γ — коэффициент диффузии, R_e и R_c — источниковые члены, определяющие скорости испарения и конденсации, соответственно.

Система уравнений (1)–(7) замыкается при помощи уравнений общеизвестного уравнения состояния идеального газа для газообразной фазы и уравнения Тейта для сжимаемости воды.

Задача решалась в осесимметричной постановке. В начальный момент времени задаются распределения газодинамических параметров: давление P_0 , температура T_0 , скорость набегающего потока V_0 . Граница Г1 (рис. 2) является осью симметрии. На границе Г2 задаются условия скорости потока $V = \text{const}$. На границах Г3 расчетной области задаются мягкие граничные условия. На стенках метаемого тела, границы Г4 соблюдаются условия прилипания.

Решение системы уравнений (1)–(7) с уравнениями состояния для газообразной и жидкой фаз основано на применении метода контрольных объемов [14]. Для проведения математического моделирования использовался программный продукт ANSYS FLUENT. Интегрирование дифференциальных уравнений по времени и пространству проводилось с использованием неявной разностной схемы первого порядка точности, а дискретизация градиентов — по формуле Грина – Гаусса.

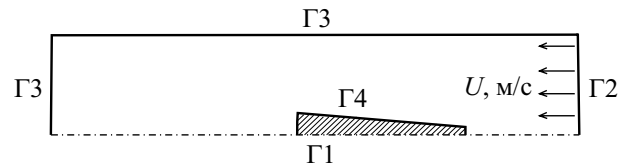


Рис. 2. Схема расчетной области и расстановки граничных условий

Fig. 2. Computational domain and boundary condition

2. Верификация методики расчета

Тесты на сеточную сходимость проводились для оценки необходимой и достаточной размерности сетки для проведения численного моделирования. Оригинальный шаг расчетной сетки в части расчетной области, где по результатам полуэмпирической аппроксимации [2] формируется каверна, составлял 0.5 мм, в окрестности метаемого тела составил 0.25 мм. Сгущение проводилось кратно двум за один этап, таким образом, минимальный шаг сетки в окрестности метаемого тела составил 0.03125 мм. На рис. 3 представлено изображение конечной расчетной сетки, дающее представление об этапах сгущения. Результаты тестов на сеточную сходимость отображены в табл. 1. На рис. 4 представлена форма каверны в зависимости от размерности расчетной сетки. Из табл. 1 видно, что когда шаг сетки составляет

0.0625 мм, погрешность в оценке сил и радиуса каверны становятся минимальными. Данный шаг сетки и был выбран для проведения расчетов.

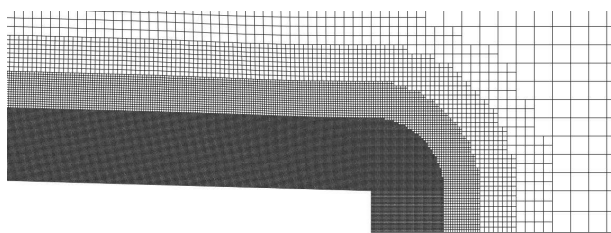


Рис. 3. Сгущения расчетной сетки в окрестности
метаемого тела
Fig. 3. Computational grid around the body

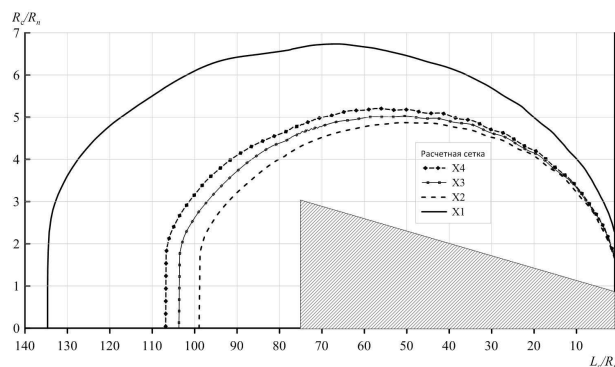


Рис. 4. Сравнение геометрической формы каверны в
зависимости от размерности расчетной сетки
Fig. 4. Comparison of the cavity geometric shape
depending on the computational grid

Таблица 1 / Table 1

Результаты сходимости расчетной сетки
Convergence results of the calculated grid

Расчетная сетка	Размер ячейки, мм	Коэффициент сопротивления, C_f	R_c/R_n	Ошибка C_f , %	Ошибка R_c/R_n , %
X1	0.25000	2.8729	6.73	—	—
X2	0.12500	1.2748	4.86	55.63	27.79
X3	0.06250	1.1767	5.02	7.70	3.41
X4	0.03125	1.1348	5.19	3.56	3.48

Валидация математической модели и расчетной методики проводилась в сравнении с результатами эксперимента для движения суперкавитирующего тела в воде и результатами, полученными с использованием эмпирической аппроксимации для формы суперкаверны за дисковым кавитатором [2]:

$$\bar{R}^2 = 3.659 + 0.847(\bar{x} - 2) - 0.236\sigma(\bar{x} - 2)^2, \quad \bar{x} > 2, \quad (8)$$

где $\bar{R} = R_c/R_n$, $\bar{x} = x/R_n$, R_c — радиус каверны в точке x , R_n — радиус кавитатора, x — координата сечения каверны ($x = 0$ — положение кавитатора), $\sigma = 2\Delta p/(\rho V^2)$.

В табл. 2 представлены результаты экспериментов для конического ударника (см. рис. 1) при давлении на глубине 0.25 м и результаты аппроксимации [2]. В табл. 2 указаны: радиус кавитатора R_n , скорость обтекания V и глубина H , которая определяется путем задания противодействия в окружающей области, R_c/R_n — отношение радиуса миделя каверны к радиусу кавитатора.

Таблица 2 / Table 2

Данные экспериментов, на основании которых
проводилась валидация расчетной методики
Experimental data on which the calculation method was
validated

Эксперимент	R_n , мм	V , м/с	H , м	R_c/R_n
Эксперимент № 1	1.0725	356	0.25	8.09
Эксперимент № 2	1.1450	269	0.25	9.76

(см. табл. 2). Форма каверны, полученная численно при значении коэффициента объемной доли $\alpha = 0.5$ (рис. 5, б) качественно совпадает с формой каверны, полученной на гидробаллистической трассе в НИИ ПММ ТГУ. Контурная карта давления, полученная

На рис. 5 представлено сравнение результатов численного моделирования с экспериментом для скорости натекания потока $V = 356$ м/с



численно (рис. 5, в) показывает, что тело создает кавитатором скачки уплотнения различной интенсивности, которые достигают в окрестности кавитатора 80 атм и более. Составляющие аксиальной и радиальной скоростей (рис. 5, г, д) для представленного случая показывают границы распространения возмущения среды в окрестности обтекаемого тела.

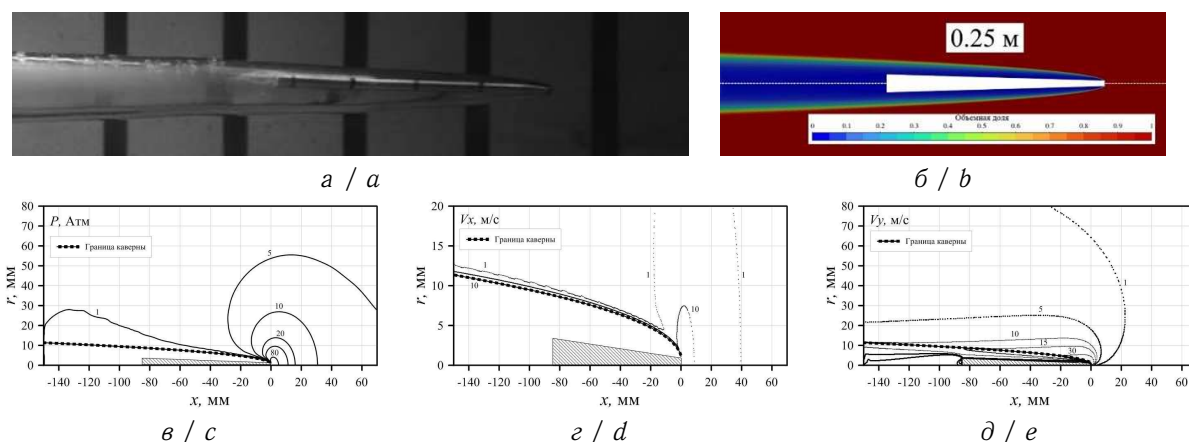


Рис. 5. Сравнение эксперимента № 1 с численным моделированием на глубине 0.25 м: а — эксперимент; б — моделируемая форма каверны; в — изолинии распределения давления в области метаемого тела; г — изолинии распределения аксиальной скорости; д — изолинии распределения радиальной скорости (цвет онлайн)

Fig. 5. Comparison of experiment No. 1 with numerical simulation at a depth of 0.25 m: a is experiment; b is the simulated shape of the cavity; c is isolines of pressure distribution in the area of the projectile body; d is isolines of axial velocity distribution; e is isolines of radial velocity distribution (color online)

На рис. 6 представлено сравнение результатов численного моделирования с экспериментом для скорости натекания потока $V = 269$ м/с (см. табл. 2). Форма каверны также хорошо предсказывается численными расчетами в сравнении с экспериментом (рис. 6, а, б). Данные контурных карт давления и составляющих скорости (рис. 6, в, г, д) говорят о меньшей интенсивности распространения ударной волны и возмущений потока.

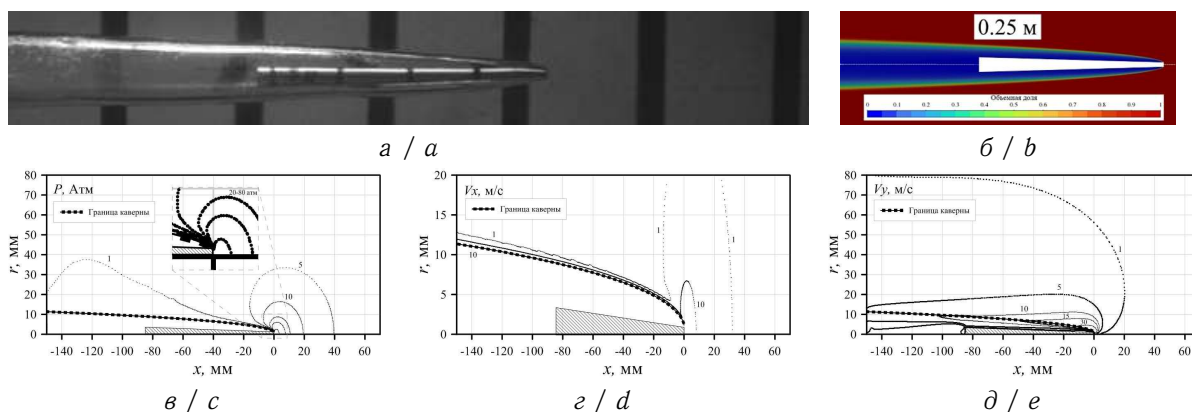


Рис. 6. Сравнение эксперимента № 2 с численным моделированием на глубине 0.25 м: а — эксперимент; б — моделируемая форма каверны; в — изолинии распределения давления в области метаемого тела; г — изолинии распределения аксиальной скорости; д — изолинии распределения радиальной скорости (цвет онлайн)

Fig. 6. Comparison of experiment No. 2 with numerical simulation at a depth of 0.25 m: a is experiment; b is the simulated shape of the cavity; c is isolines of pressure distribution in the area of the projectile body; d is isolines of axial velocity distribution; e is isolines of radial velocity distribution (color online)

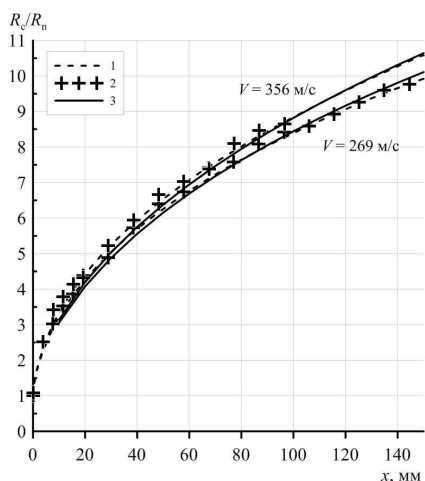


Рис. 7. Сравнение радиуса сформированной каверны вдоль оси O_x для представленных расчетных случаев: 1 — численное моделирование; 2 — экспериментальные данные; 3 — формула [2]

Fig. 7. Comparison of the cavity radius along the O_x axis for the presented calculations: 1 — numerical simulation; 2 — experimental data; 3 — equation [2]

ровании, в сравнении с данными по аппроксимационной формуле [2]. Видно, что на исследуемой глубине погружения в 100 м объем каверны для обеих скоростей существенно уменьшился по сравнению обтеканием у поверхности воды. Уменьшились и длина,

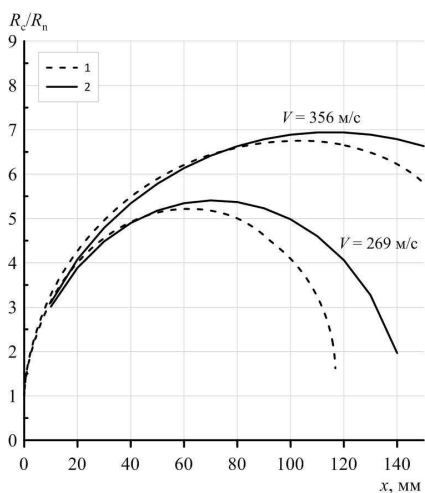


Рис. 8. Сравнение радиуса сформированной каверны вдоль оси O_x для представленных расчетных случаев на глубине 100 м: 1 — численное моделирование; 2 — формула [2]

Fig. 8. Comparison of the cavity radius along the O_x axis for the presented calculations at a depth of 100 m: 1 — numerical simulation; 2 — formula [2]

На рис. 7 приводится сравнение отношения R_c/R_n полученное в эксперименте, при численном моделировании и с использованием аппроксимации [2]. Для двух рассмотренных случаев скорости набегающего потока полуэмпирическая аппроксимация [2] и представленная в данной работе математическая модель (1)–(7) позволяют с высокой точностью предсказывать форму каверны, полученную в эксперименте.

3. Результаты исследований

Гидробаллистическая трасса, на базе которой проводится метание суперкавитирующих тел, не имеет возможности имитировать глубоководный пуск, а полуэмпирическая аппроксимация [2] позволяет оценивать только длину и радиус каверны, учитывая радиус кавитатора и состояние среды. На основании предложенной математической модели были проведены расчеты обтекания тела со скоростями набегающего потока $V_1 = 356$ м/с и $V_2 = 269$ м/с для глубины погружения 100 м. Глубина погружения задается давлением в окружающей области. Для глубины 100 м величина давления составляет 10 атм.

На рис. 8 представлен график изменения отношения R_c/R_n , полученный при математическом моделировании по аппроксимационной формуле [2]. Видно, что на исследуемой глубине погружения в 100 м объем каверны для обеих скоростей существенно уменьшился по сравнению обтеканием у поверхности воды. Уменьшились и длина, и радиус каверны. Причем для скорости V_2 длина каверны такова, что закрывается в непосредственной близости от тыльной стороны тела. Аппроксимационная формула из [2], в данном случае, предсказывает большую длину и больший радиус каверны, при этом разница в определении радиуса каверны значительно меньше, нежели при определении длины.

На рис. 9 представлено сравнение контуров давления для обтекания тела на глубине 100 м для исследуемых скоростей. Помимо уменьшения интенсивности распространения ударной волны в связи с уменьшением скорости следует отметить тот факт, что закрытие каверны, а в случае скорости $V_2 = 269$ м/с это явление зафиксировано, происходит со значениями давлений, близкими к давлениям на кавитаторе. Непосредственно над каверной образуется область «разряжения» среды, затрагивая практически всю длину каверны.

На рис. 10 представлены аксиальные и радиальные составляющие скорости. В потоке жидкости аксиальные скорости формируют область ускорения перед кавитатором. Данная область меньше по размеру в сравнении с условиями низкого противодавления и такая динамика характерна для обеих рассматриваемых скоростей обтекания. Важно обратить внимание на то, что в точке

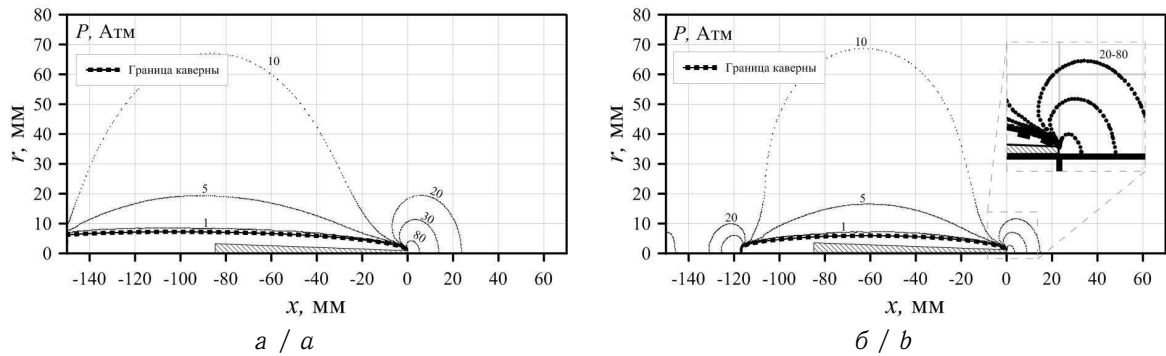


Рис. 9. Сравнение распределения давления, полученного при математическом моделировании, в окрестности тела на глубине 100 м для скоростей 356 м/с (а) и 269 м/с (б)

Fig. 9. Comparison of the pressure distribution obtained by mathematical modeling in the vicinity of a body at a depth of 100 m for velocities of 356 m/s (a) and 269 m/s (b)

захлопывания каверны (рис. 10, б) аксиальная скорость показывает всплеск значений, образуя большую область скачка скорости на расстоянии $20R_n$ от тела, что может быть вызвано возросшими давлениями в области закрытия каверны (рис. 9, б). Данные по распределению радиальных составляющих скорости также подтверждают наличие возмущений в области схлопывания каверны, причем их интенсивность при скорости 269 м/с практически аналогична возмущениям на кавитаторе. В случае большей скорости 356 м/с интенсивность заметных возмущений гораздо ниже и, очевидно, зависит как от скорости потока, так и от давления окружающей среды.

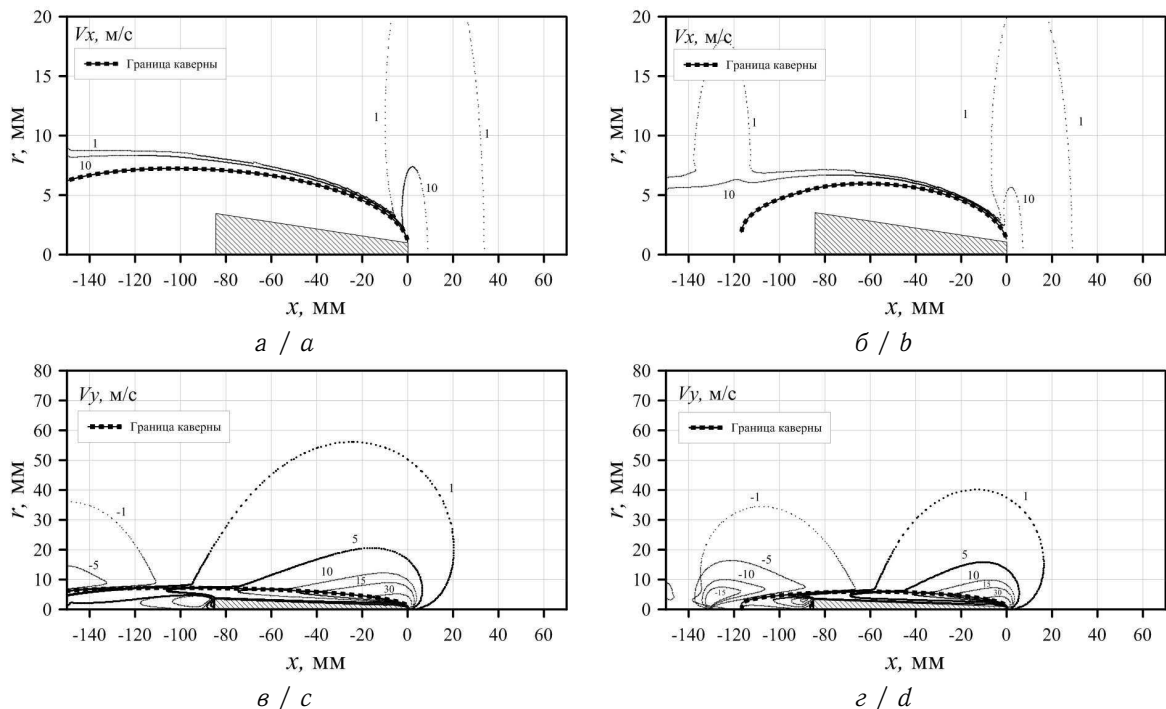


Рис. 10. Сравнение распределения составляющих V_x и V_y скорости среды на глубине 100 м, полученное при математическом моделировании для скоростей тела 356 м/с (а, в) и 269 м/с (б, г)

Fig. 10. Comparison of the V_x and V_y velocity component distribution at a depth of 100 m, obtained by mathematical modeling for velocities 356 m/s (a, c), and 269 m/s (b, d)

Учитывая полученные данные по распределению радиальных составляющих скорости можно сделать вывод о том, что при групповом метании двух тел у поверхности воды летящее следом тело будет попадать в область интенсивных радиальных скоростей вперед



идущего тела ($V_y > 5$ м/с) при расстоянии между телами менее $20R_c$ (при $V = 269$ м/с) и менее $25R_c$ (при $V = 356$ м/с). При увеличении глубины погружения для рассматриваемых случаев это расстояние уменьшится до $16R_c$ (при $V = 269$ м/с) и до $20R_c$ (при $V = 356$ м/с). Следует отметить, что зона распространения радиальной скорости от кавитатора нелинейна вдоль каверны и имеет возмущения в области схлопывания каверны. Таким образом, важное значение будут иметь степень отставания одного тела от другого и расстояние между телами.

Существенное влияние на движущиеся в воде тела при групповом метании может оказать и фронт ударной волны, создаваемый кавитатором, поскольку отстающее метаемое тело будет проходить через скачок уплотнения, созданный впереди идущим телом. В данном случае ударные волны будут взаимодействовать друг с другом. В таком случае необходимо проводить отдельную оценку интерференции ударных волн в условиях плотной среды и их силы воздействия на движущиеся в потоке тела.

Выводы

В работе реализована математическая модель обтекания тела в режиме суперкавитации на дозвуковых и трансзвуковых скоростях. Результаты математического моделирования приведены в сравнении с экспериментальными данными и хорошо согласуются с результатами, полученными полуэмперической аппроксимацией для определения геометрического размера каверны.

В рамках осесимметричной постановки для одиночного тела проведены численные исследования его обтекания на глубинах 100 м и у поверхности воды. Сравнение численного результата с результатами, полученными полуэмперической аппроксимацией, также хорошо согласуются между собой.

Реализованная математическая модель позволяет расширить возможности аналитических и экспериментальных оценок гидро- и газодинамических процессов, происходящих в окружающей среде в окрестности метаемого тела. На основании этих результатов можно проводить оценки о возможности метания тел на различных глубинах и с различными скоростями, оценивать возможное взаимовлияние тел при их групповом метании.

Список литературы

1. Рождественский В. В. Кавитация. Ленинград : Судостроение, 1977. 247 с.
2. Савченко Ю. Н. Исследование суперкавитационных течений // Прикладна гідромеханіка. 2007. Т. 9, № 2. С. 150–158.
3. Hrubes J. D. High-speed imaging of supercavitating underwater projectiles // Experiments in Fluids. 2001. Vol. 30, iss. 1. P. 57–64. <https://doi.org/10.1007/s003480000135>
4. Truscott T. T., Epps B. P., Belden J. Water entry of projectiles // Annual Review of Fluid Mechanics. 2014. Vol. 46. P. 355–378. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-011212-140753>
5. Кулагин В. А., Пьяных Т. А. Исследование кавитационных течений средствами математического моделирования // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Техника и Технологии. 2012. Т. 5, № 1. С. 57–62. EDN: OXZAOD
6. Xulong X., Tao X. Hydrodynamic characteristics of a supercavitating vehicle's aft body // Ocean Engineering. 2016. Vol. 114. P. 37–46. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.01.012>
7. Saranjam B. Experimental and numerical investigation of an unsteady supercavitating moving body // Ocean Engineering. 2013. Vol. 59. P. 613–626. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2012.12.021>
8. Qing Mu, Yipin Lv, Kangjian Wang, Tianhong Xiong, Wenjun Yi Numerical simulation on the cavitation flow of high speed oblique water entry of revolution body // Mathematical Problems in Engineering. 2019. Vol. 2019. P. 1–10. <https://doi.org/10.1155/2019/8034619>
9. Chunyong Fan, Zengliang Li, Khoo B. C., Mingchao Du. Supercavitation phenomenon research of projectiles passing through density change area // AIP Advances. 2019. Vol. 9, iss. 4. Art. 045303. <https://doi.org/10.1063/1.5087625>
10. Van-Tu Nguyen, Warn-Gyu Park. Numerical study of the thermodynamics and supercavitating flow around an underwater high-speed projectile using a fully compressible multiphase flow model // Ocean Engineering. 2022. Vol. 257. Art. 111686. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111686>
11. Ищенко А. Н., Афанасьева С. А., Буркин В. В., Дьячковский А. С., Чупашев А. В. Исследование взаимного влияния группы ударников при высокоскоростном одновременном входе в воду //



- Письма в журнал технической физики. 2019. Т. 45, № 20. С. 47–50. <https://10.21883/PJTF.2019.20.48395.17950>, EDN: LYQMTM
12. Huang X., Cheng C., Zhang X. Machine learning and numerical investigation on drag reduction of underwater serial multi-projectiles // *Defence Technology*. 2022. Vol. 18, iss. 2. P. 229–237. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2020.12.002>
13. Xu C., Khoo B. C. Numerical investigation on free surface effect on the supercavitating flow over a low aspect ratio wedge-shaped hydrofoil // *Journal of Hydrodynamics*. 2020. Vol. 32, iss. 1. P. 20–30. <https://doi.org/10.1007/s42241-020-0003-7>
14. Патанкар С. В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах / пер. с англ. Е. В. Калабина под ред. Г. Г. Янькова. Москва : Изд-во МЭИ, 2003. 312 с. EDN: QMIDVJ
15. Manninen M., Taivassalo M. On the mixture model for multiphase flow. Espoo : Technical Research Centre of Finland, VTT Publications 288, 1996. 67 p.
16. Launder B.E., Spalding D. B. Lectures in mathematical model of turbulence. London : Academic Press, 1972. 176 p.

References

1. Rozhdestvenskiy V. V. *Kavitatsiya* [Cavitation]. Leningrad, Sudostroenie, 1997. 247 p. (in Russian).
2. Savchenko Yu. N. Study of supercavitational flows. *Prikladna gidromekhanika* [Applied Hydro-mechanics], 2007, vol. 9, iss. 2, pp. 150–158 (in Russian).
3. Hrubec J. D. High-speed imaging of supercavitating underwater projectiles. *Experiments in Fluids*, 2001, vol. 30, iss. 1, pp. 57–64. <https://doi.org/10.1007/s003480000135>
4. Truscott T. T., Epps B. P., Belden J. Water entry of projectiles. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2014, vol. 46, pp. 355–378. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-011212-140753>
5. Kulagin V. A., Pyanykh T. A. Research of cavitating flows by methods of mathematical simulation. *Journal of the Siberian Federal University. Engineering and Technologies*, 2012, vol. 5, iss. 1, pp. 57–62 (in Russian). EDN: OXZAOD
6. Xulong X., Tao X. Hydrodynamic characteristics of a supercavitating vehicle's aft body. *Ocean Engineering*, 2016, vol. 114, pp. 37–46. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.01.012>
7. Saranjam B. Experimental and numerical investigation of an unsteady supercavitating moving body. *Ocean Engineering*, 2013, vol. 59, pp. 613–626. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2012.12.021>
8. Qing Mu, Yipin Lv, Kangjian Wang, Tianhong Xiong, Wenjun Yi. Numerical simulation on the cavitation flow of high speed oblique water entry of revolution body. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019, vol. 2019, pp. 1–10. <https://doi.org/10.1155/2019/8034619>
9. Chunyong Fan, Zengliang Li, Khoo B. C., Mingchao Du. Supercavitation phenomenon research of projectiles passing through density change area. *AIP Advances*, 2019, vol. 9, iss. 4, art. 045303. <https://doi.org/10.1063/1.5087625>
10. Van-Tu Nguyen, Warn-Gyu Park. Numerical study of the thermodynamics and supercavitating flow around an underwater high-speed projectile using a fully compressible multiphase flow model. *Ocean Engineering*, 2022, vol. 257, art. 111686. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111686>
11. Ishchenko A., Afanas'eva S., Burkin V., Diachkovskii A., Chupashev A. Studying the mutual influence of a set of strikers during simultaneous high-velocity entry into water. *Technical Physics Letters*, 2019, vol. 45, iss. 10, pp. 1059–1062. <https://10.1134/S1063785019100225>, EDN: DWXYND
12. Huang X., Cheng C., Zhang X. Machine learning and numerical investigation on drag reduction of underwater serial multi-projectiles. *Defence Technology*, 2022, vol. 18, iss. 2, pp. 229–237. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2020.12.002>
13. Xu C., Khoo B. C. Numerical investigation on free surface effect on the supercavitating flow over a low aspect ratio wedge-shaped hydrofoil. *Journal of Hydrodynamics*, 2020, vol. 32, iss. 1, pp. 20–30. <https://doi.org/10.1007/s42241-020-0003-7>
14. Patankar S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York, Hemisphere Publishing Corporation, 1980. 197 p. (Russ. ed.: Moscow, MEI Publ., 2003. 312 p.).
15. Manninen M., Taivassalo M. *On the mixture model for multiphase flow*. Espoo, Technical Research Centre of Finland, VTT Publications 288, 1996. 67 p.
16. Launder B. E., Spalding D. B. Lectures in mathematical model of turbulence. London, Academic Press, 1972. 176 p.

Поступила в редакцию / Received 29.06.2023

Принята к публикации / Accepted 17.11.2023

Опубликована / Published 28.02.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 80–90

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 80–90
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-80-90>, EDN: SUWSYV

Научная статья
УДК 539.3

Асимптотическая теория нестационарных упругих волн в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях изгибающего типа

И. В. Кириллова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Кириллова Ирина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, iv@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8053-3680>, SPIN: 3935-1990, AuthorID: 179980

Аннотация. Работа посвящена завершению построения асимптотической схемы расчленения нестационарного напряжённо-деформированного состояния тонкостенных оболочек вращения при ударных торцевых нагрузках изгибающего типа на составляющие с различными показателями изменчивости по пространственным координатам и динамичности по времени. Используются разработанные ранее асимптотически приближённые уравнения таких составляющих, как изгибная составляющая по теории Кирхгофа – Лява, высокочастотная антисимметричная коротковолновая составляющая и антисимметричный гиперболический погранслои в окрестности фронта волны расширения. Доказана полнота описания нестационарных волн с помощью указанных компонент. Для этого выделены в фазовой плоскости области согласования соседних составляющих. Найдены асимптотические оценки границ этих областей согласования и доказано совпадение там асимптотик разрешающих уравнений.

Ключевые слова: асимптотическая теория, изгибная составляющая теории Кирхгофа – Лява, высокочастотное коротковолновое приближение, гиперболический погранслой, оболочка вращения, фронт волны расширения

Для цитирования: Кириллова И. В. Асимптотическая теория нестационарных упругих волн в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях изгибающего типа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 80–90. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-80-90>, EDN: SUWSYV

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Asymptotic theory of the transient waves in shells of revolution at shock edge loading of the bending type

I. V. Kirillova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Irina V. Kirillova, iv@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8053-3680>, SPIN: 3935-1990, AuthorID: 179980

Abstract. The present work is devoted to completing the construction of the nonstationary stress-strain state asymptotic theory of shells of revolution at shock edge bending loading. There components with different values of the variability and dynamicity indices are used. This asymptotic model applies such components as the bending component of the Kirchhoff – Love shell theory, the antisymmetric high-frequency



short-wave component and the antisymmetric hyperbolic boundary layer in the vicinity of the dilatation wave front. The existence of the overlap regions is indicative of the exact statement of the boundary value problems for all the components and of the validity of the introduced separation scheme.

Keywords: asymptotic theory, bending component, high-frequency short-wave component, hyperbolic boundary layer, dilatation wave front, overlap region, shell of revolution.

For citation: Kirillova I. V. Asymptotic theory of the transient waves in shells of revolution at shock edge loading of the bending type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 80–90 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-80-90>, EDN: SUWSYV

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В работах [1, 2] были заложены основы асимптотической теории нестационарного напряжённо-деформированного состояния (НДС) тонких оболочек. При этом использовались результаты численных расчётов соответствующих процессов в пластинах и цилиндрических оболочках [3]. Асимптотический анализ основывался на применении аппарата построения асимптотической теории тонких оболочек, разработанного для статических задач в [4].

В работе [3] приведена классификация торцевых граничных условий, приводящих к трём принципиально различным видам нестационарного НДС тонких оболочек. Выделены воздействие вида LT (продольное, тангенциального типа), LM (продольное, изгибающего типа) и NW (нормального типа).

Ударные торцевые воздействия приводят к сложному взаимодействию элементарных волн, порождаемых как торцевой, так и лицевыми поверхностями. Растущее со временем количество переотражённых от лицевых поверхностей элементарных волн не позволяет строить НДС как их наложение, поэтому необходимо использовать теоретический подход учёта сразу суммарных величин компонент НДС.

Полное описание нестационарного волнового процесса в тонких пластинах и оболочках невозможно выполнить с помощью двумерных теорий: они не могут описать решение в прифронтовых зонах волн расширения и сдвига, а также определяют ложные фронты, которые с точки зрения трёхмерной теории являются квазифронтами. Также можно отметить, что в рассматриваемых нестационарных задачах НДС существенно неоднородно по пространственным координатам в различных участках фазовой плоскости. Следовательно, показатели изменяемости НДС по пространственным координатам и показатель динамичности по времени имеют там различные значения, и необходимо выделять в фазовой плоскости области с однородными значениями этих показателей. В каждой области однородности изменяемости НДС возможно построение соответствующей асимптотической теории. Полнота выбора составляющих НДС во всей фазовой плоскости может быть определена доказательством наличия областей согласования соседних асимптотик.

Такая концепция асимптотической модели полностью соответствует принципу Сен-Венана в динамике тонкостенных конструкций, изложенному в работах [5, 6].

В работах [7, 8] на примере цилиндрической оболочки представлена окончательная редакция схемы расчленения нестационарного НДС на составляющие с различными показателями изменяемости и динамичности.

Настоящая работа является завершающей в плане построения асимптотической теории, описывающей распространение упругих волн в оболочках на примере оболочек вращения произвольной формы, при торцевых ударных воздействиях вида LM. Требуется доказать, что следующие компоненты: квазистатический погранслои типа Сен-Венана, моментная составляющая по теории Кирхгофа – Лява (динамический простой краевой эффект), высокочастотная антисимметричная составляющая и гиперболический погранслои в окрестности фронта волны расширения, полностью описывают искомое НДС. Для указанных составляющих использу-

ются приближённые теории, полученные методом асимптотического интегрирования точных трёхмерных уравнений теории упругости.

Уравнения для моментной составляющей получены были в работе [9], уравнения высокочастотной коротковолновой составляющей — в [2], а уравнения гиперболического погранслоя с учётом изменения геометрии переднего фронта волны в процессе её распространения — в работе [10].

Полнота описания нестационарных процессов с помощью указанных компонент доказывается асимптотическим анализом разрешающих уравнений в областях согласования на предмет их совпадения с некоторой асимптотической погрешностью.

1. Постановка задачи

Рассмотрим оболочку вращения, представленную на рис. 1, где система координат (α, θ, z) отнесена к срединной поверхности. Здесь α — длина дуги вдоль образующей, θ — угол в окружном направлении, z — координата внешней нормали срединной поверхности.

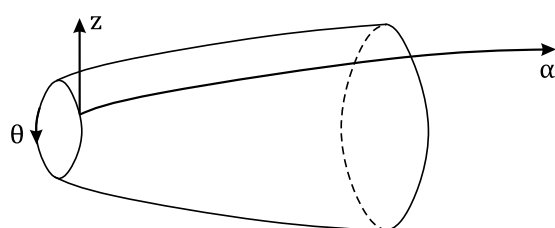


Рис. 1. Оболочка вращения
Fig. 1. Shell of revolution

Рассматриваем осесимметричный случай НДС оболочки. Пусть граничные условия вида ЛМ (когда на торце отличен от нуля только изгибающий момент) задаются в виде

$$\sigma_{11} = Iz H(t), \quad v_3 = 0, \quad \alpha = 0, \quad (1)$$

где I — амплитуда, σ_{ij} ($i, j = 1, 3$) — напряжения, v_i ($i = 1, 3$) — перемещения, t — время, $H(t)$ — функция Хевисайда. Рассматриваем начальный промежуток времени, когда перед-

ний фронт волны проходит расстояние, соизмеримое с характерным значением радиусов кривизны оболочки и не достигает её второго торца.

Зададим однородные начальные условия:

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 3), \quad t = 0. \quad (2)$$

Уравнения теории упругости для рассматриваемых оболочек подробно описаны в монографиях [1, 2].

2. Схема расчленения нестационарного НДС оболочек вращения при ударных воздействиях изгибающего типа

В работах [3, 12–14] проведено сопоставление численных результатов, полученных для пластин и цилиндрических оболочек при решении конкретных волновых задач на базе точных трёхмерных уравнений теории упругости и приближённых двумерных уравнений теорий Кирхгофа – Лява и Тимошенко. Проведённое численное сопоставление результатов расчёта вместе с анализом волновых свойств решений точной трёхмерной и приближённых двумерных волновых теорий дали основу для разработки схемы расчленения нестационарного НДС в фазовой плоскости на составляющие с различными показателями изменчивости. Во введении было указано, что в работах [7, 8] такая схема изложена на примере цилиндрической оболочки и мы распространяем её на общий случай оболочек вращения.

На рис. 2 изображена схема решения для изгибающего момента в некоторый момент времени $t = t_0$ (рассматривается осесимметричный случай НДС по трёхмерной теории упругости). Области R_1 – R_4 на этом рисунке представляют области применимости приближённых теорий. Характерные свойства рассматриваемого нестационарного НДС, определяющие применение этих теорий, следующие:

– основной разрыв решения при воздействии вида ЛМ переносится фронтом волны расширения со скоростью $c_1 = \sqrt{(1 - \nu)E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)\rho}$, где E — модуль Юнга, ν — коэффициент



Пуассона, а ρ — плотность материала оболочки;

- в малой окрестности фронта волны расширения R_1 имеет место антисимметричный гиперболический погранслои;

- за прифронтовой зоной R_1 образуется зона малоамплитудных осцилляций R_2 , описываемая высокочастотной коротковолновой составляющей;

- в зоне R_3 решение определяется моментной составляющей теории Кирхгофа – Лява (динамическим простым краевым эффектом);

- в малой зоне R_4 имеет место квазистатический погранслои типа Сен-Венана.

В настоящей работе представлен анализ асимптотического совпадения соседних составляющих в областях согласования B_1, B_2 :

B_1 — область согласования высокочастотного коротковолнового приближения и антисимметричного гиперболического погранслоя;

B_2 — область согласования моментной составляющей теории Кирхгофа – Лява и высокочастотного коротковолнового приближения.

Исследование асимптотического совпадения составляющих в областях согласования и оценка границ этих областей выполнены в следующих разделах асимптотическим анализом разрешающих уравнений в этих областях.

3. Область согласования изгибной составляющей теории Кирхгофа – Лява и высокочастотного коротковолнового приближения

В работе [1] было введено понятие динамического погранслоя, включающего в себя в рассматриваемом случае ЛМ-воздействия такие составляющие, как высокочастотное коротковолновое приближение и гиперболический погранслои, т. е. составляющие с показателями изменчивости и динамичности, большими или равными единице. Там же рассматривалось согласование этого динамического погранслоя с изгибной составляющей теории Кирхгофа – Лява. Путём сравнения асимптотик решений для этих составляющих, полученных методом интегрального преобразования Лапласа, экспоненциального представления решений в пространстве изображений и метода перевала при обращении изображений, было установлено следующим асимптотическим неравенством:

$$\varepsilon^{1/2} \ll \xi_0 \ll \varepsilon^{1/4} \quad (3)$$

расположение искомой области согласования. Здесь $\xi_0 = \alpha/R$, R — характерное значение радиусов кривизны, ε — малый параметр: $\varepsilon = h/R$, h — толщина оболочки.

Отметим, что при выделении антисимметричного высокочастотного коротковолнового приближения область его согласования с изгибной составляющей рассматривалась на примере цилиндрической оболочки в работах [2, 8]. Здесь расположение области согласования также исследовалось на базе сравнения асимптотик решения, что также привело к оценке её границ в форме (3).

В настоящем разделе мы анализируем существование и границы расположения искомого составляющих в самом общем случае. Рассматриваем произвольную форму оболочек вращения и проводим асимптотические оценки разрешающих уравнений. Начнём с анализа поведения уравнений изгибной составляющей при выходе из основной области её применимости.

Уравнения изгибной составляющей были получены автором в работах [9, 15] с показателями изменчивости по продольной координате и динамичности, связанными соотношением

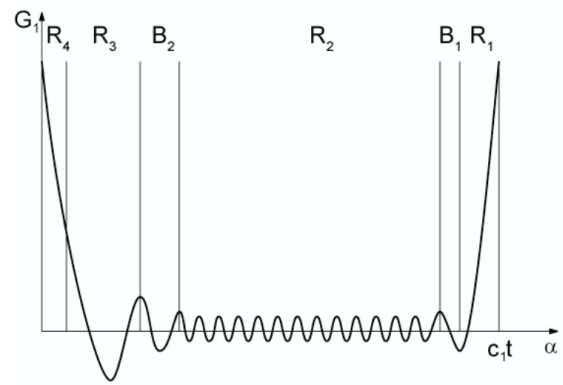


Рис. 2. Схема расчленения нестационарного НДС в оболочке вращения

Fig. 2. Scheme of dissection of non-stationary stress-strain state in a shell of revolution



$q = (1 + a)/2$. В рассматриваемом осесимметричном случае показатели изменяемости и динамичности принимают следующие значения: $q = 1/2, a = 0$. Уравнения высокочастотных коротковолновых колебаний получены в работах [1, 2, 15] с показателями изменяемости и динамичности $q = a = 1$. Следовательно, в рассматриваемой области согласования, как переходной зоне, показатель изменяемости должен быть больше $1/2$ и менее 1.

Для записи уравнений изгибной составляющей введём безразмерные переменные

$$\xi = \varepsilon^{-1/2}\xi_0, \quad \xi_0 = \alpha/R, \quad \tau_0 = c_3 t/R, \quad c_3 = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)} \quad (4)$$

и безразмерные усилия T_i^* , моменты G_i^* , перерезывающие силы N_i^* и перемещения u^*, w^* :

$$u = h\varepsilon^{-1/2}u^*, \quad w = h\varepsilon^{-1}w^*, \quad T_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\varepsilon T_i^*, \quad (5)$$

$$G_i = \frac{2Eh^2}{1-\nu^2}G_i^*, \quad N_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\varepsilon^{1/2}N_i^*,$$

где величины со звёздочками имеют один и тот же асимптотический порядок (звёздочки в дальнейшем будем опускать); через c_3 обозначена скорость распространения продольной волны по двумерной теории. Тогда разрешающие уравнения в перемещениях будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) \frac{\partial w}{\partial \xi} + \varepsilon^{1/2} \frac{B'}{B} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_0^2} + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right) w - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \varepsilon^{1/2} \frac{2B'}{3B} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0,$$

где R_i — главные радиусы кривизны срединной поверхности, B — расстояние от оси вращения до срединной поверхности. Уравнения состояния записываются следующим образом:

$$T_1 = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) w + \varepsilon^{1/2} \frac{\nu B'}{B} u, \quad (7)$$

$$T_2 = \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) w + \varepsilon^{1/2} \frac{B'}{B},$$

$$G_1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{1/2} \frac{\nu B'}{B} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right), \quad G_2 = -\frac{1}{3} \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{1/2} \frac{B'}{B} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right).$$

В приграничной переходной зоне, рассматриваемой как область согласования с соседней высокочастотной коротковолновой составляющей, показатель изменяемости больше $1/2$. Соответственно, введём новые переменные ξ_*, τ_* , отвечающие увеличенным значениям показателей изменяемости и динамичности:

$$\xi_* = \varepsilon^{-r}\xi, \quad \tau_* = \varepsilon^{-2r}\tau_0, \quad r > 0. \quad (8)$$

Введём также показатель уменьшенной интенсивности продольного перемещения

$$u = \varepsilon^r u_*. \quad (9)$$

Формулы (8) определяют новые значения показателей изменяемости и динамичности решения для изгибной составляющей в предполагаемой области согласования: $q = 1/2 + r$, $a = 2r$.

Перейдём в уравнениях (6) к новым переменным ξ_*, τ_* и перемещению u_* :

$$\frac{\partial^2 u_*}{\partial \xi_*^2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) \frac{\partial w}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} \frac{\partial u_*}{\partial \xi_*} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi_*^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_*^2} + \varepsilon^{4r} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}\right) w - \varepsilon^{4r} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right) \frac{\partial u_*}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{2B'}{3B} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi_*^3} = 0.$$



Отметим, что во втором уравнении (10) с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon^{4r})$ можно пренебречь членами, содержащими радиусы кривизны. Отметим также, что при $r > 1/6$ указанными членами можно пренебречь по сравнению со слагаемыми, содержащими функцию B и её производную. Тогда интегрирование (10) сводится к интегрированию следующего разрешающего уравнения:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi_*^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_*^2} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{2B'}{3B} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi_*^3} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, уравнение (11) описывает изгибную составляющую в области, где значение показателя изменчивости q увеличивается, т.е. при $\xi_0 \gg \varepsilon^{1/2}$.

Перейдём к построению асимптотически оптимальных уравнений для антисимметричного высокочастотного коротковолнового приближения в предполагаемой области согласования. Введём для рассматриваемой области показатели изменчивости и динамичности, аналогичные предшествующему случаю изгибной составляющей:

$$q = \frac{1}{2} + r, \quad a = 2r \quad (0 < r < 1/2). \quad (12)$$

В соответствии с (12) перейдём в разрешающих уравнениях высокочастотного коротковолнового приближения [1, 2] к безразмерным переменным с учётом изменчивости и динамичности

$$\alpha = R\varepsilon^{1/2+r}\xi_*, \quad z = R\varepsilon\zeta, \quad t = R\varepsilon^{2r}\tau_*/c_2 \quad (13)$$

и зададим асимптотические величины компонент напряжений и перемещений в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= R\varepsilon v_1^*, \quad v_3 = R\varepsilon^{1/2+r} v_3^*, \\ \sigma_{11} &= E\varepsilon^{1/2-r} \sigma_{11}^*, \quad \sigma_{31} = E\varepsilon^{1-2r} \sigma_{31}^*, \quad \sigma_{33} = E\varepsilon^{3/2-3r} \sigma_{33}^*, \end{aligned} \quad (14)$$

где величины со звёздочками обладают одним и тем же асимптотическим порядком. Пренебрегая в разрешающих уравнениях рассматриваемой составляющей величинами порядка $O(\varepsilon^{1-2r})$, приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{31}^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} (\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^*) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{33}^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{31}^*}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} \sigma_{31}^* - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial v_3^*}{\partial \tau_*^2} &= 0, \\ \sigma_{11}^* &= \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_1^*}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \nu \frac{B'}{B} \right), \\ \frac{\partial v_3^*}{\partial \zeta} &= 0, \quad \frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3^*}{\partial \xi_*} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (15) определяют следующую зависимость компонент НДС от нормальной координаты ζ :

$$\begin{aligned} v_1^* &= \zeta v_1^{(1)}, \quad v_3^* = \zeta v_3^{(0)}, \quad \sigma_{11}^* = \zeta \sigma_{11}^{(1)}, \\ \sigma_{31}^* &= \sigma_{31}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{31}^{(2)}, \quad \sigma_{33}^* = \zeta \sigma_{33}^{(1)} + \zeta^3 \sigma_{33}^{(2)}, \end{aligned} \quad (16)$$

которая показывает выполнение геометрических гипотез Кирхгофа – Лява относительно неизменности длины нормального элемента к срединной поверхности и его перпендикулярности к ней.

Поскольку рассматриваются однородные граничные условия на лицевых поверхностях

$$\sigma_{31}^* = \sigma_{33}^* = 0, \quad \zeta = \pm 1, \quad (17)$$



то зависимости для составляющих разложения компонент НДС по нормальной координате из (16) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
 v_1^{(1)} &= -\frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \xi_*}, \\
 \sigma_{11}^{(1)} &= \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \nu \frac{B'}{B} v_1^{(1)} \right), \\
 \sigma_{31}^{(0)} &= -\sigma_{31}^{(2)}, \\
 \sigma_{31}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \sigma_{11}^{(1)}}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} (\sigma_{11}^{(1)} - \sigma_{22}^{(2)}) \right], \\
 \sigma_{33}^{(1)} &= -\frac{\partial \sigma_{31}^{(0)}}{\partial \xi_*} - \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} \sigma_{31}^{(0)} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_3^{(0)}}{\partial \tau_*^2}, \\
 \sigma_{33}^{(3)} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial \sigma_{31}^{(2)}}{\partial \xi_*} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{B'}{B} \sigma_{31}^{(2)} \right).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Система (18) определяет следующее разрешающее уравнение относительно прогиба $v_3^{(0)}$:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^4 v_3^{(0)}}{\partial \xi_*^4} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \tau_*^2} + \varepsilon^{1/2+r} \frac{2B'}{3B} \frac{\partial^3 v_3^{(0)}}{\partial \xi_*^3} = 0. \tag{19}$$

Поскольку $c_2^2/c_3^2 = (1-\nu)/2$, временная переменная $\tau_*^{(1)}$ из (8) и временная переменная $\tau_*^{(2)}$ из (13) связаны соотношением

$$\tau_*^{(2)} = \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \tau_*^{(1)}, \tag{20}$$

то уравнения (11) и (19) совпадают в области изменения показателя q

$$\frac{1}{2} < q < 1. \tag{21}$$

Это соответствует границам области согласования изгибной составляющей Кирхгофа – Лява и антисимметричной высокочастотной коротковолновой составляющей, определяемой следующим асимптотическим неравенством:

$$\varepsilon^{1/2} \ll \xi_0 \ll 1. \tag{22}$$

Данный вывод, основанный на сравнении асимптотик разрешающих уравнений, уточняет оценку (3).

4. Область согласования высокочастотного коротковолнового приближения и антисимметричного гиперболического погранслоя

В работе [15] область согласования высокочастотного коротковолнового приближения рассматривалась на примере оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны. Поскольку показатели изменяемости высокочастотной коротковолновой составляющей имеют значения $q = a = 1$, а показатели изменяемости гиперболического погранслоя имеют значения $q = a = 2$, то в [15] было показано, что для того узкого класса оболочек показатели изменяемости увеличиваются от значений единица на расстоянии $O(\varepsilon)$ от фронта до значений двух на расстоянии от фронта $O(\varepsilon^2)$. Прифронтная область $O(\varepsilon^2)$ и является при этом областью применимости гиперболического погранслоя. Таким образом, область согласования и была выделена как область такого увеличения значений показателей изменяемости и динамичности.

Рассмотрим поведение уравнений высокочастотной коротковолновой составляющей для нашего общего случая оболочек вращения. Поскольку, как показано в [10], фронтальная



поверхность формируется повернутыми нормальными к срединной поверхности, то приведённая ранее схема расположения области согласования рассматриваемых составляющих уже не имеет места. Проанализируем асимптотику разрешающих уравнений этой составляющей в окрестности фронта волны расширения.

В работе [10] построено асимптотическое представление геометрии переднего фронта волны расширения в произвольной оболочке вращения: в рамках погрешности $O(\varepsilon^2)$ он может быть задан повернутой нормалью к срединной поверхности по формуле

$$\alpha = \alpha_0 \left[1 - \varepsilon \frac{\zeta}{\xi_0} F(\xi_0) + O(\varepsilon^2) \right], \quad F(\xi_0) = \int_0^{\xi_0} \frac{d\xi_0}{R_1^*}, \quad (23)$$

где $R_1^* = R_1/R$, $\alpha_0 = c_1 t_0$, t_0 — текущий момент времени. При этом длину отрезка z_F^0 на повернутой нормали можно задать следующей формулой:

$$z_F^0 = z \sqrt{1 + F^2(\xi_0)}. \quad (24)$$

В соответствии с (24) и вводим новую координату $z_F = z \sqrt{1 + F^2(\xi_0)}$, которая при $\alpha = c_1 t$ отсчитывается вдоль повернутой нормали, совпадающей с передним фронтом волны.

Выпишем сначала разрешающие уравнения искомой составляющей относительно перемещений и уравнения состояния в исходной системе координат (α, z) [1, 2]:

$$\begin{aligned} \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left(k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \frac{\partial v_3}{\partial z} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left(k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \frac{\partial v_3}{\partial z} + k_1 \frac{B'}{B} v_1 \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где $k_1 = \nu/(1-2\nu)$, $k_2 = (1-\nu)/(1-2\nu)$.

Перейдём в разрешающих уравнениях высокочастотной коротковолновой составляющей (25)–(26) к новой системе координат (α, z_F) , связанной непосредственно с передним фронтом волны расширения:

$$\begin{aligned} \varkappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1+F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\sqrt{1+F^2}}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} + \\ + \frac{z_F F}{R_1} \left[\frac{2\varkappa^{-2}}{\sqrt{1+F^2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} \right] + \varkappa^{-2} \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+F^2}}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \varkappa^{-2} (1+F^2) \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + \\ + \frac{z_F}{R_1 \sqrt{1+F^2}} \left[\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} + \frac{2}{\sqrt{1+F^2}} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial z_F} \right] + \frac{B' \sqrt{1+F^2}}{(1-2\nu)B} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} &= 0, \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left(k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_1 \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left(k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + k_2 \sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_3}{\partial z_F} \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\sqrt{1+F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (28)$$



При выводе уравнений гиперболического погранслоя в оболочках вращения произвольной формы в работе [10] переход к координатам (α, z_F) был произведён в исходных трёхмерных уравнениях теории упругости. При этом были выделены симметричный и антисимметричный его типы по введённой координате z_F . Для рассматриваемого антисимметричного типа с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon)$ компоненты НДС $v_1, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ по координате z_F нечётны, а v_3, σ_{13} — чётны. Такой анализ помог перед процедурой асимптотического интегрирования трёхмерных уравнений упростить их и получить такую форму, которая полностью совпадает с уравнениями высокочастотной коротковолновой составляющей в координатах (α, z_F) , представленными выражениями (27)–(28). Следовательно, уравнения высокочастотной коротковолновой составляющей полностью описывают НДС в узкой прифронтной области в окрестности фронта волны (23) и уравнения гиперболического погранслоя согласно [10] представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + (1 + F^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_F^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{2z_F}{R_1 \sqrt{1 + F^2}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha \partial z_F} + \frac{B'}{B} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} &= 0, \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1 + \nu)\alpha^2} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \\ \sigma_{33} &= \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}, \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{1 + \nu} \sqrt{1 + F^2} \frac{\partial v_1}{\partial z_F}. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, мы получим, что уравнения высокочастотной коротковолновой составляющей (25)–(26) являются общими с точки зрения описания также и в узкой прифронтной области переднего фронта волны расширения. Это является вполне естественным, поскольку эти уравнения строились для НДС с показателями изменчивости и динамичности, равными единице и выше.

Областью применимости уравнений гиперболического погранслоя (29) является область в окрестности фронта, которая в прифронтных координатах $\xi_0 = \alpha/R$, $\zeta_F = z_F/h$, $\tau_0 = c_1 t/R$ определяется асимптотическим неравенством

$$\tau_0 - \xi_0 = O(\varepsilon^2), \quad |\zeta_F| \leq \sqrt{1 + F^2(\xi_0)}. \quad (30)$$

В исходных координатах (α, z, t) область (30) входит в область $\tau_0 - \xi_0 = O(\varepsilon)$, а границу этой области можно считать областью согласования гиперболического погранслоя и высокочастотной коротковолновой составляющей.

Вывод

Проведённое в представленной работе исследование позволило завершить для случая ударных торцевых воздействий вида LM построение полной асимптотической теории нестационарных волновых процессов в оболочках вращения произвольной формы. Доказана полнота представления нестационарного НДС четырьмя составляющими: изгибной составляющей теории Кирхгофа – Лява, антисимметричной высокочастотной коротковолновой составляющей, антисимметричным гиперболическим погранслоем и квазистатическим погранслоем типа Сен-Венана. Определены асимптотически границы областей согласования соседних составляющих. Следует также отметить, что приведённая концепция расчленения нестационарного НДС полностью соответствует принципу Сен-Венана в динамике тонкостенных конструкций.

Список литературы

1. Коссович Л. Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 176 с. EDN: [VIOSWL](#)
2. Kaplunov J. D., Nolde E. V., Kossovich L. Y. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego ; London ; Boston ; New York ; Sydney ; Tokyo ; Toronto : Academic Press, 1998. 226 p. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-20923-8>, EDN: [WNSAFB](#)



3. Nigul U. K. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // *International Journal of Solids and Structures*. 1969. Vol. 5, iss. 6. P. 607–627. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва : Наука, 1976. 512 с.
5. Новожилов В. В., Слепян Л. И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней // *Прикладная математика и механика*. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 261–281.
6. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Ленинград : Судостроение, 1972. 374 с.
7. Kossovich L. Yu., Kirillova I. V. Dynamics of shells under shock loading: an asymptotic approach // *Civil-Comp Proceedings*. 2008. Vol. 88. P. 1–20. EDN: QPMORG
8. Коссович Л. Ю., Кириллова И. В. Асимптотическая теория нестационарных процессов в тонких оболочках // *Proceedings of the Second International Conference Topical Problems of Continuum Mechanics*. Dilijan, Armenia, 2010. P. 321–325.
9. Каплунов Ю. Д., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // *Прикладная математика и механика*. 1993. Т. 57, вып. 1. С. 83–91. EDN: UJSTAN
10. Кириллова И. В. Асимптотическая теория гиперболического погранслоя в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях тангенциального типа // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Т. 24, вып. 2. С. 222–230. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYWBV
11. Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическая теория волновых процессов в оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нормальных воздействиях // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2022. № 2. С. 35–49. <https://doi.org/10.31857/S057232992202012X>, EDN: HHWAXC
12. Нигул У. К. О методах и результатах анализа переходных волновых процессов изгиба упругой плиты // *Известия Академии наук Эстонской ССР. Серия физико-математических и технических наук*. 1965. Т. 14, № 3. С. 345–384. <https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1965.3.04>
13. Нигул У. К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформаций круговых цилиндрических оболочек // *Труды 6-й Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин*. Москва : Наука, 1966. С. 593–599.
14. Нигул У. К. Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинах по теории упругости и приближенным теориям // *Прикладная математика и механика*. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 308–322.
15. Кириллова И. В. Асимптотический вывод двух типов приближения динамических уравнений теории упругости для тонких оболочек : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1998. 122 с.

References

1. Kossovich L. Yu. *Nestatsionarnye zadachi teorii uprugikh tonkikh obolochek* [Non-stationary problems of the theory of elastic thin shells]. Saratov, Saratov State University Publ., 1986. 176 p. (in Russian). EDN: VIOSWL
2. Kaplunov J. D., Nolde E. V., Kossovich L. Y. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego, London, Boston, New York, Sydney, Tokyo, Toronto, Academic Press, 1998. 226 p.. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-20923-8>, EDN: WNSAFB
3. Nigul U. K. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, vol. 5, iss. 6, pp. 607–627. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
4. Goldenveizer A. L. Theory of elastic thin shells. Oxford, Pergamon Press, 1961. 658 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1976. 512 p.).
5. Novozhilov V. V., Slepian L. I. On Saint-Venant's principle in the dynamics of beams. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 29, iss. 2, pp. 293–315. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(65\)90032-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(65)90032-8)
6. Slepian L. I. *Nestatsionarnye uprugie volny* [Unsteady elastic waves]. Leningrad, Sudostroenie, 1972. 374 p. (in Russian).
7. Kossovich L. Yu., Kirillova I. V. Dynamics of shells under shock loading: an asymptotic approach. *Civil-Comp Proceedings*, 2008, vol. 88, pp. 1–20. EDN: QPMORG
8. Kossovich L. Yu., Kirillova I. V. Asymptotic theory of non-stationary processes in thin shells. *Proceedings of the Second International Conference Topical Problems of Continuum Mechanics*. Dilijan, Armenia, 2010, pp. 321–325 (in Russian).
9. Kaplunov Yu. D., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Asymptotic integration of the dynamic equations



- of the theory of elasticity for the case of thin shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 57, iss. 1, pp. 83–91 (in Russian). EDN: UJSTAN
10. Kirillova I. V. Asymptotic theory of the hyperbolic boundary layer in shells of revolution at shock edge loading of the tangential type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 2, pp. 222–230 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-2-222-230>, EDN: SFYWBV
 11. Kirillova I. V., Kossovich L. Yu. Asymptotic theory of wave processes in shells of revolution under surface impact and normal end actions. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 2, pp. 232–243. <https://doi.org/10.3103/S0025654422020078>, EDN: WCTBUQ
 12. Nigul U. K. On the methods and the results of analysis of transient wave processes of bending of an elastic plate. *Eesti NSV Teaduste Akadeemia Toimetised. Füüsika-, Matemaatika- ja Tehnikateaduste Seeria*, 1965, vol. 14, iss. 3, pp. 345–384 (in Russian). <https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1965.3.04>
 13. Nigul U. K. On the applicability of approximate theories in transient processes of deformations of circular cylindrical shells. *Trudy 6-y Vsesoyuznoy konferentsii po teorii obolochek i plastin* [Proceedings of the 6th All-Union Conference on the Theory of Shells and Plates]. Moscow, Nauka, 1966, pp. 593–599 (in Russian).
 14. Nigul U. K. Comparison of the results of the analysis of transient wave processes in shells and plates according to the theory of elasticity and approximate theories. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1969, vol. 33, iss. 2, pp. 308–322 (in Russian).
 15. Kirillova I. V. *Asymptotic derivation of two types of approximation of dynamic equations of the theory of elasticity for thin shells*. Diss. Cand. Sci. (Phys.-Math.). Saratov, 1998. 122 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 21.10.2024

Принята к публикации / Accepted 19.11.2024

Опубликована / Published 28.02.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 91–105

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 91–105
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-91-105>, EDN: TJSGIS

Научная статья

УДК 517.98

Расчет параметров упругих и гиперупругих моделей кожи лица

С. А. Муслов¹, С. Д. Арутюнов¹, П. Ю. Сухочев^{2✉}, Е. А. Чижмаков¹

¹Московский государственный медико-стоматологический университет имени А. И. Евдокимова, Россия, 127006, Москва, ул. Долгоруковская, д. 4

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

Муслов Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, доктор биологических наук, профессор кафедры нормальной физиологии и медицинской физики, muslov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9752-6804>, SPIN: 7213-2852, AuthorID: 185513

Арутюнов Сергей Дарчоевич, доктор медицинских наук, заведующий кафедрой цифровой стоматологии, <https://orcid.org/0000-0001-6512-8724>, SPIN: 1052-4131, AuthorID: 262790

Сухочев Павел Юрьевич, научный сотрудник лаборатории математического обеспечения имитационных динамических систем, <https://orcid.org/0000-0002-8004-6011>, SPIN: 7780-8694, AuthorID: 1004519

Чижмаков Евгений Александрович, ассистент кафедры технологий протезирования в стоматологии, <https://orcid.org/0000-0003-1313-3307>, SPIN: 8122-7810, AuthorID: 1079573

Аннотация. Результаты одноосных механических испытаний кожи лица (лба) *in vitro* были сопоставлены с линейной, билинейной и нелинейной экспоненциальной, а также пятью гиперупругими моделями. Результаты показали, что деформационные свойства тканей наилучшим образом описываются экспоненциальной функцией. В рамках феноменологической модели определены параметры упругого дифференциального модуля (минимальные, средние и максимальные значения). Рассмотрены линейная и билинейная упругие модели и определены численные значения параметров моделей. Для изучения гиперупругих свойств кожи были использованы неогуксовская, Муни – Ривлина, Огдена, Веронда – Вестманн и полиномиальная модели. С целью поиска наиболее совершенных алгоритмов расчеты производились в системе компьютерной алгебры Mathcad 15.0 и многоцелевом программном пакете Ansys 2022 R2. Определены параметры моделей и теснота корреляционной связи между экспоненциальной кривой и расчетными данными, коэффициент корреляции использовался как критерий соответствия моделей. Наибольшую корреляцию с данными феноменологической модели продемонстрировала полиномиальная модель и модель Огдена, наименьшую — неогуксовская. Значения модулей Юнга и других упругих и гиперупругих характеристик тканей сравнивались для изучения факторов, влияющих на механическое поведение кожи лица человека, и могут быть использованы при расчетах в конечно-элементном анализе и разработке замещающих материалов для пластических операций.

Ключевые слова: кожа, лицо, линии Лангера, упругие свойства, гиперупругие модели

Для цитирования: Муслов С. А., Арутюнов С. Д., Сухочев П. Ю., Чижмаков Е. А. Расчет параметров упругих и гиперупругих моделей кожи лица // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 91–105. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-91-105>, EDN: TJSGIS

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Calculation of parameters of elastic and hyperelastic facial skin models

S. A. Muslov¹, S. D. Arutyunov¹, P. Yu. Sukhochev^{2✉}, E. A. Chizhnikov¹

¹Evdokimov Moscow State University of Medicine and Dentistry, 4 Dolgorukovskaya St., Moscow 127006, Russia

²Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

Sergey A. Muslov, muslov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9752-6804>, SPIN: 7213-2852, AuthorID: 185513

Sergey D. Arutyunov, <https://orcid.org/0000-0001-6512-8724>, SPIN: 1052-4131, AuthorID: 262790

Pavel Yu. Sukhochev, <https://orcid.org/0000-0002-8004-6011>, SPIN: 7780-8694, AuthorID: 1004519

Evgeny A. Chizhnikov, <https://orcid.org/0000-0003-1313-3307>, SPIN: 8122-7810, AuthorID: 1079573

Abstract. The results of uniaxial mechanical tests of the facial (forehead) skin in vitro were compared with linear, bilinear and non-linear exponential, as well as five hyperelastic models. The results showed that the deformation properties of tissues are best described by the exponential function. Linear and bilinear elastic models are considered and the numerical values of the model parameters are determined. To study the hyperelastic properties of the skin, neohookean, Mooney – Rivlin, Ogden, polynomial and Veronda – Westmann phenomenological models were used. In order to find the most advanced algorithms for calculating the parameters of hyperelastic models, calculations were performed in the Mathcad 15 computer algebra system and the Ansys 2022 R2 multi-purpose software package. The parameters of the models and the closeness of the correlation between the exponential curve and the calculated data were determined, the correlation coefficient was used as a criterion for the correspondence of the models. The polynomial model and the Ogden model demonstrated the highest correlation with the experimental values, and the neohookean one demonstrated the lowest correlation. The values of Young's moduli and other elastic and hyperelastic characteristics of tissues were compared to study the factors affecting the mechanical behavior of human facial skin, and can be used in calculations in finite element analysis and in the development of replacement materials for plastic surgery.

Keywords: skin, face, Langer lines, elastic properties, hyperelastic models

For citation: Muslov S. A., Arutyunov S. D., Sukhochev P. Yu., Chizhnikov E. A. Calculation of parameters of elastic and hyperelastic facial skin models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 91–105 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-91-105>, EDN: TJSJGIS

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Данные по механическим свойствам кожи лица человека весьма переменчивы. Это достаточно сильно затрудняет их интерпретацию врачами хирургами при подготовке к пластическим операциям, инженерами, создающими замещающие материалы для косметологии, и просто исследователями, занимающимися вопросами биомеханики тканей органов и разрабатывающими модели конечных элементов. Тем более эти данные весьма немногочисленны.

Т. Yamaguchi в 1960 г. первым сообщил о механических свойствах кожи лба человека [1]. По его данным, разрушающее растягивающее усилие на единицу ширины образцов составляет в среднем 0.9 кгс/мм, предел прочности (Ultimate Tensile Strength, UTS) 0.46 кгс/мм², предельное удлинение 54% у взрослых, 1.0 кгс/мм, 0.51 кгс/мм² и 70% у обследованных в возрасте 10–49 лет соответственно. Для кожи щек эти данные составили 1.1 кгс/мм, 0.56 кгс/мм², 70% и 1.3 кгс/мм, 0.62 кгс/мм² и 70% соответственно. Для кожи шеи, в свою очередь, 1.6 кгс/мм, 1.19 кгс/мм², 93% и 2.2 кгс/мм, 1.32 кгс/мм², 120%. Результаты этих исследований также содержатся в энциклопедическом труде Н. Yamada «Strength of Biological Materials» [2]. Однако данные по упругим свойствам кожи лица в этих сообщениях отсутствуют. Также нет сведений о том, каким образом были получены результаты.



В [3] эти показатели (4.6 МПа, 54%) были использованы для сравнения со своими оригинальными результатами, полученными динамическим методом корреляции изображений (*Image Correlation Method*). Авторы на площади 0.1 мм×0.1 мм и в разрешении 1536×1024 на частоте 1000 Гц наблюдали с помощью цифровой видеокамеры за плоской деформацией образца кожи лба мужчины, умершего в возрасте 85 лет. При этом ими были получены следующие результаты: предел прочности 3.5 ± 1.5 МПа, полная деформация Грина – Лагранжа $9.5 \pm 1.9\%$ и локальная — $24.0 \pm 5.3\%$. Деформации анализировали с помощью симметричного тензора Грина – Лагранжа:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right),$$

где u — вектор, описывающий смещение точки тела, его координаты — разность между координатами близких точек до и после деформации.

В обзорной публикации [4] со ссылкой на [3] были приведены следующие прочностные параметры кожи лба и рук, полученные при растяжении образцов со скоростью 55 с^{-1} : предел прочности 5.7–12.6 МПа, максимальная относительная деформация до разрушения 1.27–1.59. Однако при изучении сообщения [3] такие данные обнаружены не были.

Заслуживают внимания исследования стоматологов в 2015 г. [5], занимающихся косметологией кожи лица и влиянием на ее эластичные свойства высоко- и низкомолекулярных комплексов гиалуроновой кислоты. Модуль Юнга кожи лица, измеренный методом ультразвуковой эхографии до, через один и три месяца после процедур, составил справа 9.0 ± 0.7 , 7.9 ± 0.9 , 7.0 ± 0.5 МПа ($M \pm SEM$) и слева 9.8 ± 0.9 , 7.8 ± 0.7 , 6.45 ± 0.7 МПа ($p < 0.01$), т.е. эластичность кожи после процедур статистически значимо повысилась. Очевидно, это первые опубликованные исследования упругих свойств кожи лица в биомеханике.

В [6] методом динамического анализа изучали реологические свойства кожи лица (щеки) женщин в возрасте 18–40, 40–60 и 60–80 лет. Кожа была получена в качестве хирургических отходов после операций по подтяжке лица. Наблюдали значительное снижение жесткости (модуля упругости накопления G') кожи лица с возрастом от 3.3 до 2.4 кПа, что авторы связали с ее прогрессирующей деградацией при старении. Определяли также угол δ механических потерь — важную характеристику вязко-упругих материалов.

Реологические вязко-упругие свойства кожи бедра и живота мужчин и женщин в возрасте 49–85 лет и «длительный модуль упругости E^* экспериментального графика растяжения-релаксации» изучали в [7]. В этих исследованиях использовали трехпараметрическую модель Кельвина вязко-упругого тела, а модуль Юнга E^* показал значения 2.5–4.2 МПа. Авторы отмечали, что полученные результаты могут быть использованы для расчета напряженно-деформированного состояния кожи при хирургических операциях.

Модуль Юнга кожи лба был рассчитан в [8]. По этим данным он составил 0.33 ± 0.04 МПа ($M \pm SD$) при толщине образцов 1.4 ± 0.05 мм. Авторы выполняли сравнение механических свойств (упругих и релаксационных) различных участков кожи для реконструкции ушной раковины и носа. Исследовали образцы кожи размером 10×50 мм десяти мужчин в возрасте 77–94 года, европеоидов без каких-либо заболеваний кожи, с ориентацией продольной оси образцов параллельно линиям Лангера. Подкожный жир удалялся с образцов, оставляли только эпидермис и дерму. Толщина образцов кожи лба, измеренная электронным штангенциркулем, составляла 1.4 ± 0.05 мм. Упругий модуль и скорость релаксации авторы рассчитывали на основании ранее опубликованной методики [9]. Исследователи сообщили данные: модуль Юнга кожи шеи, прилегающей к нижней челюсти — 1.28 ± 0.06 МПа, кожи под височно-теменной областью — 0.65 ± 0.05 МПа и кожи заушного сосцевидного отростка — 0.86 ± 0.05 МПа. По порядку величины приведенные данные оказались намного ниже литературных значений для кожи различных отделов тела человека [10] и поэтому нами в расчетах были использованы в качестве начального модуля Юнга. Действительно, модуль Юнга мягких биологических



тканей человека и животных является анизотропным, дифференциальным и инкрементальным (увеличивающимся с деформацией). Мы останавливались на этом аспекте в [11]. В начальной стадии деформирования тканей «участвует» только эластиновая матрица с низким модулем упругости, именно она является несущим элементом, а гораздо более «жесткие» коллагеновые волокна еще волнисты и лишь при некотором $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$ «включаются» в процесс деформирования, что сопровождается возрастанием полного модуля Юнга и снижением податливости материала. Таким образом, характер переплетения коллагеновых волокон, их переориентирование и вовлечение соседних структур параллельно друг другу делает возможным значительное растяжение кожи.

Несмотря на ряд интересных результатов, полученных разными авторами, ни в одном из исследований упругих характеристик кожи лица не предпринято попыток построения механической феноменологической модели данной анатомической области тела человека.

Исследованию гиперупругих свойств кожи человека и животных посвящено весьма много работ, в том числе обзор [4] и группа оригинальных статей [12–20]. Из иерархии гиперупругих моделей чаще всего использовалась модель Огдена [4, 12–14], а также Муни – Ривлина [4, 13, 15], Веронда – Вестманн [16, 17], полиномиальная [4, 14], неогуконская [4, 13], редко — Гассера – Огдена – Хольцапфеля (GOH) [4, 18]. Содержанием большинства работ была подгонка (“*fitting*”) параметров модели с целью получения наибольшего соответствия опытных и модельных данных. Часть авторов использовали полученные результаты для проведения нелинейного конечно-элементного анализа [4, 20, 21] и др. Однако гиперупругие характеристики кожи лица не изучались. Можно отметить исследования [19], в которых авторы построили конечно-элементную модель, которая имитировала экспериментальные деформации с погрешностью от 11 до 23%. Кожа лица добровольцев с помощью микророботизированного устройства демонстрировала нелинейную, анизотропную и вязкоупругую реакцию силы на перемещение и была представлена функцией энергии деформации Огдена и квазилинейным вязкоупругим законом (QLV).

Цель работы — на основании существующих литературных данных изучить зависимость упругих модулей кожи лица от деформации в рамках различных (линейной, билинейной и экспоненциальной) моделей; сравнить существующие гиперупругие модели механического поведения кожи лица для случая одноосного растяжения и определить параметры этих моделей.

Методы исследования

Определение и исследование параметров упругих и гиперупругих моделей производили в системе компьютерной алгебры Mathcad 15.0 и многоцелевом программном комплексе Ansys 2022 R2, признанных во всем мире универсальных средствах решения широкого класса задач математической физики и механики. В пакете Mathcad оперировали со встроенными функциями `linfit`, `genfit`, при расчете силы корреляции моделей — функцией `corr`, при стыковке векторов численных данных билинейной модели — функцией `stack`.

В комплексе Ansys применяли модуль `Static Structural – Physical Properties – Hyperelastic`. При вводе данных использовали инженерные (условные) напряжения и деформации, а не истинные (Коши) как это рекомендовано в [22] для ряда версий Ansys. Соответствие модельных и экспериментальных данных в пакете Ansys 2022 R2 оценивали с помощью функции `Error Norm for Fit` в позиции `Absolute error`. Как известно, пункт меню `Error Norm for Fit` позволяет использовать различные нормы при расчете точности аппроксимаций. Если возникают большие деформации, лучше применять абсолютную погрешность, поскольку в этом случае большие значения деформации имеют больший вес [23]. Отметим также, что гиперупругая модель Веронда – Вестманн в состав версии Ansys 2022 R2 не входит, поэтому компьютерный расчет материальных констант этой модели и ее адекватности опытным данным осуществлялся только в системе Mathcad 15.0.



Результаты и обсуждения

Экспоненциальная, линейная и билинейная модели

Экспоненциальная модель

Параметры экспоненциальной модели кожи лица (лба) рассчитывали на основе зависимости

$$\sigma(\varepsilon) = a(\exp(b \cdot \varepsilon) - 1), \quad (1)$$

которая успешно применялась при изучении влияния вязкоупругости на болевые ощущения кожи в рамках квазилинейной модели вязкоупругости (*quasi-linear viscoelasticity*, QLV) [24]. На правомерность такой аппроксимации указывают также имеющиеся многочисленные сведения об экспоненциальном характере J -зависимости деформация – напряжение для большинства мягких биологических тканей [2, 25, 26]. Материальные константы a и b определялись путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sigma_{\max} = a(\exp(b \cdot \varepsilon_{\max}) - 1), \\ E(0) = ab, \end{cases} \quad (2)$$

опираясь на литературные данные: $\sigma_{\max} = 4.6$ МПа, $\varepsilon_{\max} = 0.54$ [1, 2], $E(0) = 0.33$ МПа [8]. В результате были получены следующие значения параметров модели: $a = 0.037$ МПа, $b = 8.953$. Модуль Юнга кожи, таким образом, определялся соотношением $E = 0.33 \cdot \exp(8.953\varepsilon)$ и являлся дифференциальным и инкрементальным (возрастающим с деформацией). Его значения составили:

- минимальное — $E_{\min} = E(0) = 0.33$ (МПа);
- среднее — $E_{\text{med}}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}} \int_0^{\varepsilon_{\max}} E(\varepsilon) d\varepsilon = 8.52$ (МПа);
- максимальное — $E_{\max} = E(\varepsilon_{\max}) = 41.51$ (МПа);
- с отношением $E_{\max}/E_{\min} = 125.80$.

Линейная модель

Для определения параметров линейной модели кожи применяли функцию **genfit** Mathcad 15.0. Модуль Юнга линейной модели составил 4.26 МПа, что соответствует интервалу значений $E_{\min}$ – $E_{\max}$ экспоненциальной модели и меньше $E_{\text{med}}(\varepsilon)$ в два (2.00) раза. Среднее квадратичное отклонение линейной модели от экспоненциальной в исследуемом интервале деформаций при шаге 4.01 составило 0.74, коэффициент корреляции между моделями 0.8613. Отметим, что угловой коэффициент линии тренда экспоненциальной модели равен 4.25 МПа при коэффициенте детерминации $R^2 = 0.62$ (данные Microsoft Office Excel 2016), что подтверждает результаты, полученные в Mathcad.

Билинейная модель

Параметры двухпараметрической билинейной модели кожи были заимствованы из экспоненциальной с помощью формул: $E_1 = E_{\min}$ и $E_2 = E_{\max}$. В результате были получены значения $E_1 = 0.33$ МПа и $E_2 = 41.51$ МПа соответственно.

На диаграмме σ – ε (рис. 1) билинейная модель представлена касательными, проведенными к линии регрессии с координатами

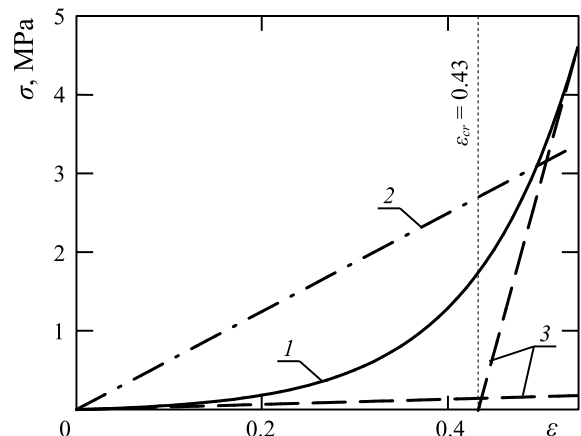


Рис. 1. Модели кожи лица: 1 — экспоненциальная; 2 — линейная; 3 — билинейная. Метка $\varepsilon_{cr} = 0.43$ соответствует смене механизмов деформирования кожи

Fig. 1. Facial skin models: 1 — exponential; 2 — linear; 3 — bilinear. The $\varepsilon_{cr} = 0.43$ label corresponds to a change in the mechanisms of skin deformation

$\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$. При вычислении корреляции билинейной зависимости с экспоненциальной кривой, чтобы составить из двух матриц одну, применяли функцию `Mathcad stack(A, B, C, ...)`. Отметим, что точка пересечения касательных ε_{cr} соответствует моменту «переключения» режима деформирования биологических тканей с «эластинового» на «эластин-коллагеновый» и тесно связана с особенностями механизма деформации. В результате расчетов выявлено значение $\varepsilon_{cr} = 0.43$ (43%). Это значение весьма неплохо согласуется с предсказанным Х. Markenscoff и I. Yannas [27], которые использовали простую модель сети коллагеновых волокон в дерме для расчета уровня деформации, при котором жесткость кожи резко увеличивается. Коллагеновая сеть была смоделирована как состоящая из небольших прямых волокон единичной длины, прикрепленных друг к другу. Угол в точках крепления рассматривался как случайная величина, распределенная с равной вероятностью от 0 до 180°. Они прогнозировали, что все волокна выпрямляются при деформации $\varepsilon = 57\%$, что неплохо соответствует нашей оценке, предъявленной выше.

Согласно [4] данные билинейной модели кожи составили в зависимости от анатомического расположения образцов (абдоминальная область, предплечье, отделы спины), метода испытания, толщины образцов и их ориентации относительно линий Лангера: $E_1 = 0.41 - 1.95$ МПа, $E_2 = 0.187 - 82.81$ МПа, $\varepsilon_{cr} = 3.8 - 21\%$.

Гиперупругие модели

В организме человека большинство мягких тканей считаются гиперупругими. В этом случае закон Гука не может применяться, а взаимосвязь между напряжениями σ и деформациями ε , λ ($\lambda = \varepsilon + 1$) задается с помощью потенциала энергии деформации W . Многие гиперупругие модели используются для оценки механического поведения мягких тканей, и не всегда этот выбор является обоснованным. В связи с этим выбор адекватных численных моделей и определяющих соотношений для гиперупругих материалов до сих пор является актуальной задачей в биомеханике [28].

Неогуковская модель

В отличие от линейно-упругих материалов, кривая «напряжение – деформация» неогуковского материала не является линейной. На начальном этапе деформирования соотношение σ – λ линейно, но в какой-то момент кривая выходит на плато. Это самая простая гиперэластичная модель, в которой используется постоянный модуль сдвига. Ее удобно использовать на начальном этапе, поскольку она требует минимального количества констант. Устанавливающие уравнения неогуковской модели:

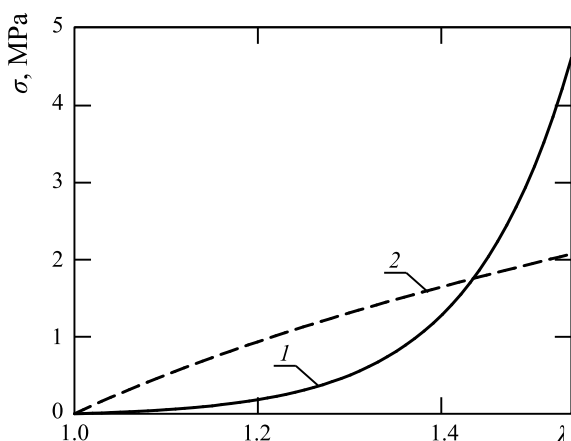


Рис. 2. Модели кожи лица: 1 — экспоненциальная; 2 — неогуковская

Fig. 2. Facial skin models: 1 — exponential; 2 — neoohookean

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3), \quad \sigma = 2\mu \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad (3)$$

где I_1 — первый инвариант тензора деформаций, μ — единственный параметр модели, $\lambda = \varepsilon + 1$.

Кривая неогуковской модели кожи лица (лба), рассчитанная на основе численных данных, полученных с помощью формулы (1), представлена на рис. 2. Среднее квадратичное отклонение неогуковской кривой от экспоненциальной составило 0.817 (здесь и далее при шаге относительной деформации 0.01), коэффициент корреляции — 0.82. Параметр μ модели 0.92 МПа (табл. 1), что весьма сильно разнится с прогнозируемым значением $E(0)/3 \approx 0.11$ МПа. Что касается



различий в значениях μ ровно в два раза в программах Mathcad и Ansys, они, на наш взгляд, обусловлены разными обозначениями этого параметра в программах.

Таблица 1 / Table 1

Параметры гиперупругих моделей (Mathcad 15.0 и Ansys 2022 R2)
Parameters of hyperelastic models (Mathcad 15.0 and Ansys 2022 R2)

Гиперупругая модель; параметры	Метод расчета	μ , МПа	α	C_{10}, C_1 , МПа	C_{01}, C_2 , МПа	C_{20}, C_3 , МПа	C_{02} , МПа	C_{11} , МПа
Неогуковская; μ	Mathcad	0.921						
	Ansys	1.8416						
Муни – Ривлина; C_{10}, C_{01}	Mathcad			6.861	–8.227			
	Ansys			6.8611	–8.2274			
Огдена; μ, α	Mathcad	0.016	13.006					
	Ansys	0.0153	14.184					
Полиномиальная; $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{02}, C_{11}$	Mathcad			–6.864	7.179	64.902	114.227	–167.760
	Ansys			–6.8639	7.1794	64.9017	114.227	–167.765
Веронда – Вестманн; C_1, C_2, C_3	Mathcad			16.008	–0.818	14.474		
	Ansys			–	–	–		

Модель Муни – Ривлина

Закон Муни – Ривлина является наиболее употребительным при моделировании гиперупругих материалов. В двухпараметрической модели Муни – Ривлина второго порядка при одноосном растяжении зависимость напряжения от деформации гиперупругих тел описывается функцией [29]

$$\sigma = 2 \left(C_{10} - \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) = 2C_{10} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2C_{01} \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right), \quad (4)$$

где σ — инженерное (условное) напряжение, а две материальные константы C_{10} и C_{01} имеют размерность напряжений и определяют функцию плотности энергии деформированного материала как линейную комбинацию двух инвариантов левого тензора деформации Коши – Грина:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3), \quad (5)$$

I_1 и I_2 — первый и второй инварианты тензора, равные

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2; \quad I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2},$$

а значения $\lambda_i = \varepsilon_i + 1$ ($i = 1, 2, 3$) — главные компоненты, ε_i — главные относительные деформации. Поскольку биологические ткани предполагаются несжимаемыми $I_3 = 1$. Если $C_{01} = 0$, модель эквивалентна неогуковской модели. При малых деформациях вклад C_{01} ничтожен, и можно показать, что C_{10} связан с модулем Юнга соотношением $E = 6C_{10}$. Модель была предложена М. Муни в 1940 г. и выражена в терминах инвариантов Р. Ривлином в 1948 г. Параметры модели Муни – Ривлина для кожи лица (лба) составили $C_{10} = 6.861$ МПа, $C_{01} = -8.227$ МПа (см. табл. 1). Деформационная кривая кожи лица, рассчитанная в модели Муни – Ривлина, отображена на рис. 3. Среднее квадратичное отклонение модельной от экспоненциальной

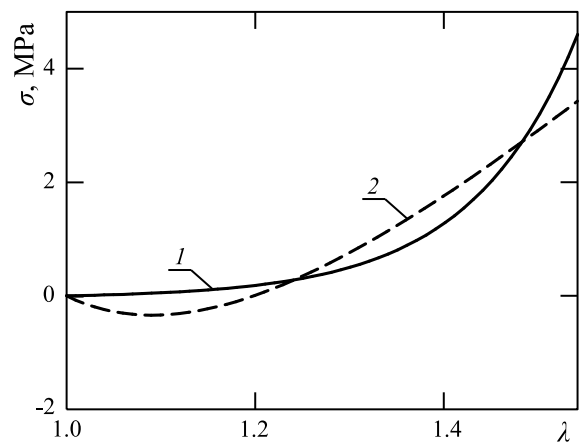


Рис. 3. Модели кожи лица: 1 — экспоненциальная; 2 — модель Муни – Ривлина

Fig. 3. Facial skin models: 1 — exponential; 2 — Mooney – Rivlin model

кривой составило 0.378, коэффициент корреляции — 0.951 (табл. 2). Как видно, среднее квадратичное отклонение для модели Муни – Ривлина существенно ниже, а коэффициент корреляции существенно выше, чем у неогуксовской модели.

Таблица 2 / Table 2

Статистические параметры соответствия гиперупругих моделей (Mathcad 15.0 / Ansys 2022 R2)
Statistical parameters of compliance of hyperelastic models (Mathcad 15.0 / Ansys 2022 R2)

Параметр	Неогуксовская	Муни – Ривлина	Огдена	Полиномиальная	Веронда – Вестманн
SD/AE^*	0.817/36.069	0.378/7.717	0.019/0.013	0.011/0.006	0.159/–
r^{**}	0.82	0.951	0.9999	1	0.9915

Примечание. * SD/AE — стандартное отклонение (*standard deviation*, Mathcad)/абсолютная погрешность (*absolute error*, Ansys); ** r — коэффициент корреляции. SD и r рассчитывались по отношению к нелинейной экспоненциальной модели при шаге деформации 0.01.

На рис. 3 также проявился известный недостаток модели: неустойчивость, которая может иметь место в интервале малых деформаций (при росте нагрузки деформация имеет противоположный знак). В результате модель не подходит для описания малых деформаций материала. Действительно, $C_{10} + C_{01} < 0$ и $C_{01} < 0$, что противоречит критериям устойчивости материала в двухпараметрической модели Муни – Ривлина $C_{10} + C_{01} > 0$ и $C_{01} > 0$, которые следуют из условия $\partial^2 \sigma_{ij} / \partial \varepsilon_{ij}^2 > 0$ [30]. В Ansys параметры модели Муни – Ривлина оказались равны $C_{10} = 6.8611$ МПа, $C_{01} = -8.2274$ МПа (см. табл. 1). Очевидно отсутствие расхождений в результатах расчетов параметров модели в Mathcad и Ansys, вероятно, оба приложения используют один и тот же алгоритм расчетов. Отметим, что переход в Ansys на ввод истинных (Коши) напряжений и деформаций [11, 22] не дал положительных результатов. Были зафиксированы очень значительные расхождения в значениях материальных констант, подсчитанных приложениями.

Модель Огдена

В рамках гиперупругой модели Огдена формула для упругого потенциала при одноосной деформации

$$W = \sum_{p=1}^n \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda^{\alpha_p} - 3), \quad (6)$$

что дает

$$\sigma = \sum_{p=1}^n \mu_p (\lambda^{\alpha_p} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_p}), \quad (7)$$

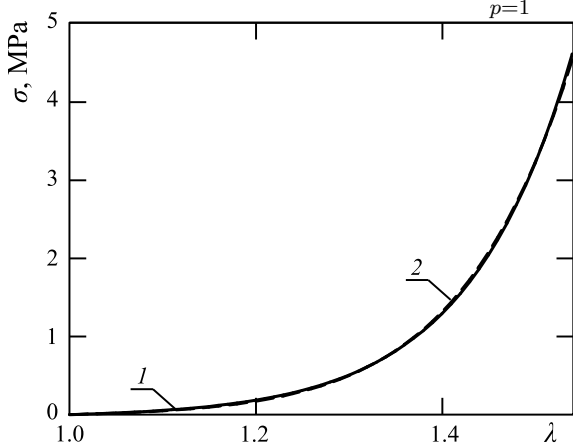


Рис. 4. Модели кожи лица: 1 — экспоненциальная; 2 — модель Огдена

Fig. 4. Facial skin models: 1 — exponential; 2 — Ogden model

где μ_p и α_p — материальные константы, n — порядок модели. Это феноменологическая модель, основанная на главных относительных удлинениях в большей степени, чем на инвариантах деформаций [31].

По отношению к экспоненциальной кривой среднее квадратичное отклонение составило 0.337, коэффициент корреляции — 0.9837, параметры модели $\mu = 0.016$ МПа, $\alpha = 13.006$ (см. табл. 1) и сильно зависели от начального приближения. Кривую $\sigma - \lambda$, соответствующую модели Огдена кожи лица, можно видеть на рис. 4. В Ansys показатели составили $\mu = 0.0153$ МПа, $\alpha = 14.184$ (см. табл. 1). Для сравнения по данным исследований кожи человека [32], были получены следующие численные результаты:



$\mu = 0.11$ МПа, $\alpha = 9$; по данным [33], для свиной кожи в зависимости от скорости компрессии образцов при испытаниях $0.004 - 4000 \text{ с}^{-1}$ $\mu = 0.4 - 7.5$ МПа, $\alpha = 12$; по данным [34], при скорости нагружения растяжением $0.005 - 3500 \text{ с}^{-1}$ $\mu = 3 - 370$ кПа, $\alpha = 7 - 11$.

Согласно авторам [19], исследовавшим кривые сила – перемещение кожи лица *in vivo*, параметры примененной для интерпретации данных константы модели Огдена второго порядка были определены как $\mu_1 = 49.8$ кПа, $\mu_2 = 0.0003$ кПа, $\alpha_1 = 2.10$, $\alpha_2 = 35.24$.

Отклонения результатов расчетов параметров модели Огдена в Ansys по отношению к таковым в Mathcad составили -4.37% для μ и 9.05% для α .

Полиномиальная модель

В полиномиальной пятипараметрической модели второго порядка соответствующие устанавливающие выражения имеют вид [35, 36]

$$W = \sum_{i=0, j=0}^n C_{ij} (I_1 - 3)^i \cdot (I_2 - 3)^j, \quad (8)$$

где $i = 0, 1, 2$; I_1 и I_2 – инварианты левого тензора деформации Коши – Грина; $C_{00} = 0$ и

$$\begin{aligned} \sigma &= 2(\lambda - \lambda^{-2})[C_{10} + C_{01}\lambda^{-1} + 2C_{10}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) + \\ &+ 2\lambda^{-1}C_{02}(2\lambda + \lambda^{-2} - 3) + C_{11}(\lambda - 1 - \lambda^{-1} + \lambda^{-2})] = \\ &= 2C_{10}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} + 2C_{01}\left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right) + 4C_{20}\left(\lambda^3 - 3\lambda + 1 + \frac{3}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3}\right) + \right. \\ &\left. + 4C_{02}\left(2\lambda^3 - 3 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{3}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^5}\right) + 6C_{11}\left(\lambda^2 - \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^4}\right)\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Полиномиальная модель – это наиболее общий вариант записи потенциала энергии деформации. Она лежит в основе других известных моделей [28]. Среднее квадратичное отклонение от нелинейного экспоненциального представления σ – λ составило 0.011, коэффициент корреляции – 1, параметры модели $C_{10} = -6.864$, $C_{01} = 7.179$, $C_{20} = 64.902$, $C_{02} = 114.227$, $C_{11} = -167.76$ МПа и хорошо описывают весь диапазон деформаций растяжения (рис. 5).

Таким образом, модель в данном случае правильно характеризуют поведение материала для малых и больших деформаций. Параметры полиномиальной модели, рассчитанные в Ansys, существенно не отличались от полученных в Mathcad и были равны $C_{10} = -6.8639$, $C_{01} = 7.1794$, $C_{20} = 64.9017$, $C_{02} = 114.227$, $C_{11} = -167.765$ МПа (см. табл. 1).

Мы сравнили модельные кривые для полиномиальной модели, полученные в программах Mathcad 15.0 и Ansys 2022 R2. В последней использовали режим не **Absolute error**, как обычно, а **Normalized error**. В исследованном интервале деформаций кривые практически идентичны ($SD = 0.058$, $r = 0.9994$), а отсутствие сходства в данных связано, вероятно, с различными итерационными процедурами, применяемыми приложениями в процессе расчета параметров моделей. На наш взгляд, это замечание будет полезно исследователям параметров гиперупругих моделей материалов при их расчетах. Также отметим, что по своей природе функция Mathcad **linfit** сильно зависит от исходного приближения. При наличии локальных минимумов это может приводить к нестабильным результатам.

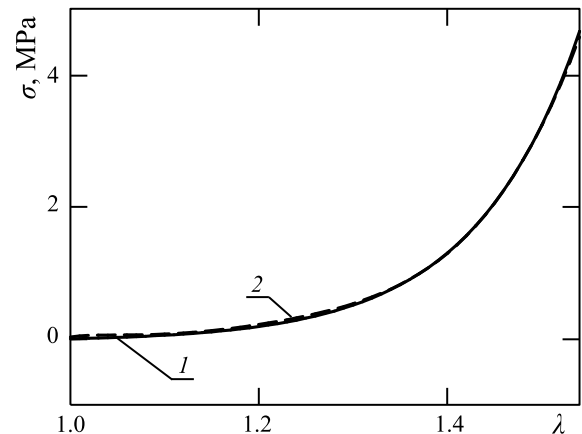


Рис. 5. Модели кожи лица: 1 – экспоненциальная; 2 – полиномиальная

Fig. 5. Facial skin models: 1 – exponential; 2 – polynomial

Для примера отметим, что Lapeer R. et al. на основании опытов на растяжение кожи в конечно-элементном моделировании в целях пластической хирургии (паховой герниопластики) использовали данные: $C_1 = 10860$, $C_2 = 150.2$, $C_3 = 762.5$, $C_4 = 2256$, $C_5 = 354.5$ кПа для пятипараметрической полиномиальной модели и образцов кожи с изначальным расположением параллельно линиям Лангера. Также они использовали редуцированные трех- и четырехпараметрические полиномиальные модели, а также шестипараметрическую и модель Огдена [37].

Модель Веронда – Вестманн

Модель Веронда – Вестманн (Veronda – Westmann, V-W) задается соотношениями [38]

$$W = C_1[e^{C_2(I_1-3)} - 1] - \frac{C_1 C_2}{2}(I_2 - 3),$$

$$\sigma = 2C_1 C_2 e^{C_2(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)}(\lambda - \lambda^{-2}) + 2C_3(1 - \lambda^{-3}).$$

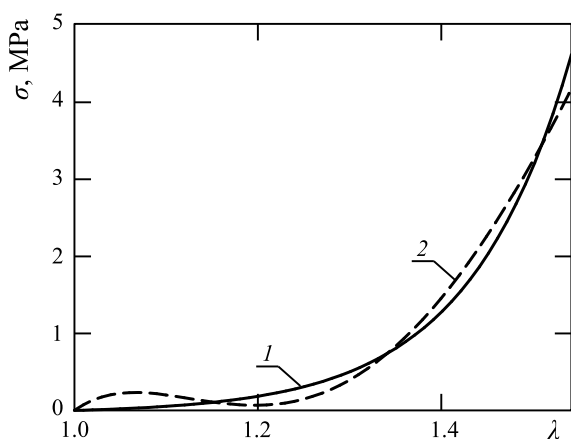


Рис. 6. Модели кожи лица: 1 — экспоненциальная; 2 — модель Веронда – Вестманн

Fig. 6. Facial skin models: 1 — Exponential; 2 — Veronda – Westmann model

Данная модель нечасто применяется при анализе материалов с механическими нелинейными свойствами (например, отсутствует среди гиперупругих моделей, входящих в пакет Ansys 2022 R2), но на рис. 6 видно, что удовлетворительно коррелирует с расчетными данными экспоненциальной модели, полученными в Mathcad. Среднее квадратичное отклонение составило 0.159, коэффициент корреляции — 0.9915, параметры модели равны $C_1 = 16.008$, $C_2 = -0.818$, $C_3 = 14.474$ МПа. Обращает на себя внимание участок модельной неустойчивости материала на участке деформации, соответствующем $\lambda = 1.1 - 1.2$.

Отметим, что в [16] при анализе механических свойств кожи спины человека применяли другую форму записи истинных одноосных напряжений в модели Веронда – Вестманн:

$$\sigma = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) C_1 C_2 \left(e^{C_2(I_1-3)} - \frac{1}{2\lambda} \right)$$

и получили значения параметров модели $C_1 = 13.1 - 35$, $C_2 = 0.26 - 0.33$ МПа в зависимости от анатомического расположения и ориентации образцов относительно линий Лангера.

Сравним статистические показатели примененных моделей (см. табл. 2).

Видно, что наиболее близки к нелинейной экспоненциальной модели, рассмотренной вначале и наиболее часто применяемой при анализе механического поведения мягких биологических тканей, полиномиальная модель ($SD = 0.11$, $r = 1$) и модель Огдена ($SD = 0.019$, $r = 0.9999$), наименее близка к экспоненциальной модели неогуковская модель ($SD = 0.817$, $r = 0.82$). Таким образом, наиболее точно описывает механическое поведение кожи лица (лоб) человека полиномиальная и модель Огдена, наименее точно — неогуковская. Эти выводы подтверждаются графиками на рис. 2, 4 и 5, а также результатами, полученными в Ansys (см. табл. 2).

Выводы

1. Механическое поведение кожи лица характеризуется экспоненциальной функцией $\sigma(\varepsilon) = a(\exp(b \cdot \varepsilon) - 1)$, свойственной мягким биологическим тканям ($a = 0.037$ МПа, $b = 8.953$).



2. Дифференциальный модуль Юнга кожи лица описывается функцией $E = ab \cdot \exp(b \cdot \varepsilon)$ и является инкрементальным, т.е. растущим по мере деформирования. Проанализированы линейная ($r = 0.861$) и билинейная с двумя модулями ($r = 0.931$) модели и определены параметры моделей и их корреляция с экспоненциальной зависимостью.
3. В линейной модели величина упругого модуля кожи лица равна $E = 4.26$ МПа, в билинейной модели $E_1 = 0.33$ и $E_2 = 41.51$ МПа, соответственно. Величина деформации, при которой происходит смена механизма деформирования кожи лица с эластинового на коллагеновый, — 0.43.
4. При исследовании гиперупругих свойств кожи лица применены феноменологические модели: неогукowska, Муни – Ривлина, Огдена, полиномиальная и Веронда – Вестманн. Для описания механического поведения кожной ткани лучше всего подходят гиперупругие модели на основе пятипараметрической полиномиальной модели и модели Огдена ($r = 1$ и $r = 0.9999$ соответственно). Наиболее точно описывают весь диапазон деформаций растяжения полиномиальная гиперупругая модель.
5. Некоторые расхождения в результатах расчетов параметров гиперупругих моделей Огдена в пакетах Mathcad и Ansys могут стать предметом отдельного изучения.
6. В клинической медицине знания о механических свойствах кожи лица могут быть полезны для осуществления успешной кожной пластики, которую применяют при обширных дефектах кожных покровов, обусловленных, в частности, ожогами, для закрытия гранулирующих ран, при скальпированных ранениях, после иссечения деформирующих рубцов, новообразований, при пластических челюстно-лицевых операциях, в криминалистике, анимации и т. д.

Список литературы

1. Yamaguchi T. Study on the strength of human skin // Journal of Kyoto Prefectural University of Medicine. 1960. Vol. 67. P. 347–379.
2. Yamada H. Strength of biological materials. Baltimore : Krieger Publ., 1973. 297 p.
3. Jacquemoud C., Bruyere-Garnier K., Coret M. Methodology to determine failure characteristics of planar soft tissues using a dynamic tensile test // Journal of Biomechanics. 2007. Vol. 40, iss. 2. P. 468–475. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2005.12.010>
4. Joodaki H., Panzer M. B. Skin mechanical properties and modeling: A review // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine. 2018. Vol. 232, iss. 4. P. 323–343. <https://doi.org/10.1177/0954411918759801>
5. Laurino C., Palmieri B., Coacci A. Efficacy, safety, and tolerance of a new injection technique for high- and low-molecular-weight hyaluronic acid hybrid complexes // Eplasty. 2015. Vol. 15. P. 427–437.
6. Lynch B., Pigeon H., Le Blay H., Brizion S., Bastien P., Bornschlöggl T., Domanov Y. A mechanistic view on the aging human skin through ex vivo layer-by-layer analysis of mechanics and microstructure of facial and mammary dermis // Scientific Reports. 2022. Vol. 12. Art. 849. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-04767-1>
7. Федоров А. Е., Самарцев В. А., Кириллова Т. А. О механических свойствах кожи человека // Российский журнал биомеханики. 2006. Т. 10, № 2. С. 29–42. EDN: JWTICT
8. Griffin M. F., Leung B. C., Premakumar Y., Szarko M., Butler P. E. Comparison of the mechanical properties of different skin sites for auricular and nasal reconstruction // Journal of Otolaryngology – Head & Neck Surgery. 2017. Vol. 46. Art. 33. <https://doi.org/10.1186/s40463-017-0210-6>
9. Wood J. M., Soldin M., Shaw T. J., Szarko M. The biomechanical and histological sequelae of common skin banking methods // Journal of Biomechanics. 2014. Vol. 47, iss. 5. P. 1215–1219. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2013.12.034>
10. Annaiidh A. N., Bruyère K., Destrade M., Gilchrist M. D., Otténio M. Characterizing the anisotropic mechanical properties of excised human skin // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. 2012. Vol. 5, iss. 1. P. 139–148. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2011.08.016>
11. Муслов С. А., Перцов С. С., Арутюнов С. Д. Физико-механические свойства биологических тканей / под ред. О. О. Янушевича. Москва : Практическая медицина, 2023. 456 с. EDN: MNOSIQ
12. Manan N. F. A., Ramli M. H. M., Patar M. N. A. A., Holt C., Evans S., Chizari M. Determining hyperelastic parameters of human skin using 2D finite element modelling and simulation // 2012



- IEEE Symposium on Humanities, Science and Engineering Research. Kuala Lumpur, Malaysia, 2012. P. 805–809. <https://doi.org/10.1109/shuser.2012.6268996>
13. *Othman N. L. A., Isa K. M., Manssor N. A. S.* Hyperelastic models of sheep skin under uniaxial tensile test // *Proceedings of Mechanical Engineering Research Day*. 2022. Vol. 2022. P. 242–243.
 14. *Gasson P., Lapeer R.* Fitting hyperelastic material models to stress-strain data from an in-vitro experiment on human skin // *Proceedings of the International Conference on Polymers and Moulds Innovations (PMI)* 17–18 September 2009. Ghent, Belgium, 2009. P. 127–133.
 15. *Azizzati S., Mahmud J.* Skin prestretch evaluation adapting Mooney – Rivlin model // *Journal of Medical and Bioengineering*. 2015. Vol. 4, iss. 1. P. 31–35. <https://doi.org/10.12720/jomb.4.1.31-35>
 16. *Chanda A.* Biomechanical modeling of human skin tissue surrogates // *Biomimetics*. 2018. Vol. 3, iss. 3. Art. 18. <https://doi.org/10.3390/biomimetics3030018>
 17. *Groves R. B., Coulman S. A., Birchall J. C., Evans S. L.* An anisotropic, hyperelastic model for skin: Experimental measurements, finite element modelling and identification of parameters for human and murine skin // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2013. Vol. 18. P. 167–180. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2012.10.021>
 18. *Li W., Luo X. Y.* An invariant-based damage model for human and animal skins // *Annals of Biomedical Engineering*. 2016. Vol. 44, iss. 10. P. 3109–3122. <https://doi.org/10.1007/s10439-016-1603-9>
 19. *Flynn C., Taberner A. J., Nielsen P. M. F., Fels S.* Simulating the three-dimensional deformation of in vivo facial skin // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2013. Vol. 28. P. 484–494. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2013.03.004>
 20. *Flynn C., Taberner A., Nielsen P.* Mechanical characterisation of in vivo human skin using a 3D forcesensitive micro-robot and finite element analysis // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2011. Vol. 10. P. 27–38. <https://doi.org/10.1007/s10237-010-0216-8>
 21. *Lapeer R. J., Gasson P. D., Karri V. A.* Hyperelastic finite-element model of human skin for interactive realtime surgical simulation // *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 2011. Vol. 58, iss. 4. P. 1013–1022. <https://doi.org/10.1109/tbme.2009.2038364>
 22. *Browell R., Lin G.* The power of nonlinear materials capabilities. Part 1 of 2 on modeling materials with nonlinear characteristics / Мощь нелинейных возможностей. Первая часть статьи о моделировании материалов с нелинейными свойствами. Перевод выполнен Б. Г. Рубцовым // *ANSYS Solutions*. 2000. Vol. 2, iss. 1. URL: <https://studizba.com/show/1050594-1-ray-browell-the-power-of-nonlinear.html> (дата обращения: 05.09.2023).
 23. *Инженерный анализ в Ansys Workbench : учеб. пособие. Ч. 1 / под. ред. В. А. Бруйка. Самара : Самарский гос. техн. ун-т, 2010. 271 с. EDN: QMHFYZ*
 24. *Liu F., Li C., Liu S., Genin G. M., Huang G., Lu T. J., Xu F.* Effect of viscoelasticity on skin pain sensation // *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2015. Vol. 5, iss. 6. P. 222–226. <https://doi.org/10.1016/j.taml.2015.11.002>
 25. *Fung Y. C.* *Biomechanics: Mechanical properties of living tissues*. 2nd ed. New York, NY : Springer, 1993. 586 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2257-4>
 26. *Лямец Л. Л.* Применение экспоненциальных полиномов для структурного биомеханического анализа сосудистой стенки // *Математическая морфология: электронный математический и медико-биологический журнал*. 1997. Т. 2, № 1. С. 71–82. EDN: ADBYXD
 27. *Markenscoff X., Yannas I.* On the stress-strain relation for skin // *Journal of Biomechanics*. 1979. Vol. 12. P. 127–129. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(79\)90151-9](https://doi.org/10.1016/0021-9290(79)90151-9)
 28. *Шмурак М. И., Кучумов А. Г., Воронова Н. О.* Анализ гиперупругих моделей для описания поведения мягких тканей организма человека // *Master's Journal*. 2017. № 1. С. 230–243. EDN: YUOPFB
 29. *Melly S. K., Liu L., Liu Y., Leng J.* A review on material models for isotropic hyperelasticity // *International Journal of Mechanical System Dynamics*. 2021. Vol. 1. P. 71–88. <https://doi.org/10.1002/msd2.12013>
 30. *Kumar N., Rao V.* Hyperelastic Mooney – Rivlin Model: Determination and physical interpretation of material constants // *MIT International Journal of Mechanical Engineering*. 2016. Vol. 6, iss. 1. P. 43–46.
 31. *Ogden R. W.* Large deformation isotropic elasticity — on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 1972. Vol. 326, iss. 1567. P. 565–584. <https://doi.org/10.1098/rspa.1972.0026>
 32. *Shergold O. A., Fleck N. A.* Mechanisms of deep penetration of soft solids, with application to



- the injection and wounding of skin // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 2004. Vol. 460, iss. 2050. P. 3037–3058. <https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1315>
33. Shergold O. A., Fleck N. A., Radford D. The uniaxial stress versus strain response of pig skin and silicone rubber at low and high strain rates // International Journal of Impact Engineering. 2006. Vol. 32, iss. 9. P. 1384–1402. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2004.11.010>
34. Lim J., Hong J., Chen W. W., Weerasooriya T. Mechanical response of pig skin under dynamic tensile loading // International Journal of Impact Engineering. 2011. Vol. 38, iss. 2–3. P. 130–135. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2010.09.003>
35. Rackl M. Curve fitting for Ogden, Yeoh and polynomial models. ScilabTEC 2015, 7th International Scilab Users Conference. Paris, France, 21st and 22nd May 2015. 18 p.
36. Calvo-Gallego J. L., Martinez-Reina J., Dominguez J. A polynomial hyperelastic model for the mixture of fat and glandular tissue in female breast // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. 2015. Vol. 31, iss. 9. Art. e02723. <https://doi.org/10.1002/cnm.2723>
37. Lapeer R., Gasson P., Karri V. Simulating plastic surgery: From human skin tensile tests, through hyperelastic finite element models to real-time haptics // Progress in Biophysics and Molecular Biology. 2010. Vol. 103, iss. 2–3. P. 208–216. <https://doi.org/10.1016/j.pbiomolbio.2010.09.013>
38. Veronda D., Westmann R. Mechanical characterizations of skin-finite deformations // Journal of Biomechanics. 1970. Vol. 3, iss. 1. P. 111–124. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(70\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0021-9290(70)90055-2)

References

1. Yamaguchi T. Study on the strength of human skin. *Journal of Kyoto Prefectural University of Medicine*, 1960, vol. 67, pp. 347–379.
2. Yamada H. *Strength of biological materials*. Baltimore, Krieger Publ., 1973. 297 p.
3. Jacquemoud C., Bruyere-Garnier K., Coret M. Methodology to determine failure characteristics of planar soft tissues using a dynamic tensile test. *Journal of Biomechanics*, 2007, vol. 40, iss. 2, pp. 468–475. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2005.12.010>
4. Joodaki H., Panzer M. B. Skin mechanical properties and modeling: A review. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, 2018, vol. 232, iss. 4, pp. 323–343. <https://doi.org/10.1177/0954411918759801>
5. Laurino C., Palmieri B., Coacci A. Efficacy, safety, and tolerance of a new injection technique for high- and low-molecular-weight hyaluronic acid hybrid complexes. *ePlasty*, 2015, vol. 15, pp. 427–437.
6. Lynch B., Pigeon H., Le Blay H., Brizion S., Bastien P., Bornschlög T., Domanov Y. A mechanistic view on the aging human skin through ex vivo layer-by-layer analysis of mechanics and microstructure of facial and mammary dermis. *Scientific Reports*, 2022, vol. 12, art. 849. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-04767-1>
7. Fedorov A. E., Samartsev V. A., Kirillova T. A. On mechanical properties of human skin. *Russian Journal of Biomechanics*, 2006, vol. 10, iss. 2, pp. 29–42 (in Russian). EDN: [JWTICT](https://doi.org/10.1038/s41598-022-04767-1)
8. Griffin M. F., Leung B. C., Premakumar Y., Szarko M., Butler P. E. Comparison of the mechanical properties of different skin sites for auricular and nasal reconstruction. *Journal of Otolaryngology – Head & Neck Surgery*, 2017, vol. 46, art. 33. <https://doi.org/10.1186/s40463-017-0210-6>
9. Wood J. M., Soldin M., Shaw T. J., Szarko M. The biomechanical and histological sequelae of common skin banking methods. *Journal of Biomechanics*, 2014, vol. 47, iss. 5, pp. 1215–1219. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2013.12.034>
10. Annaidh A. N., Bruyère K., Destrade M., Gilchrist M. D., Otténio M. Characterizing the anisotropic mechanical properties of excised human skin. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2012, vol. 5, iss. 1, pp. 139–148. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2011.08.016>
11. Muslov S. A., Pertsov S. S., Arutyunov S. D. *Fiziko-mekhanicheskiye svoystva biologicheskikh tkaney* [Physical and mechanical properties of biological tissues]. Moscow, Prakticheskaya Meditsina, 2023. 456 p. (in Russian). EDN: [MNOSIQ](https://doi.org/10.1038/s41598-022-04767-1)
12. Manan N. F. A., Ramli M. H. M., Patar M. N. A. A., Holt C., Evans S., Chizari M. Determining hyperelastic parameters of human skin using 2D finite element modelling and simulation. *2012 IEEE Symposium on Humanities, Science and Engineering Research*. Kuala Lumpur, Malaysia, 2012, pp. 805–809. <https://doi.org/10.1109/shuser.2012.6268996>
13. Othman N. L. A., Isa K. M., Manssor N. A. S. Hyperelastic models of sheep skin under uniaxial tensile test. *Proceedings of Mechanical Engineering Research Day*, 2022, vol. 2022, pp. 242–243.
14. Gasson P., Lapeer R. Fitting hyperelastic material models to stress-strain data from an in-vitro experiment on human skin. *Proceedings of the International Conference on Polymers and Moulds*



- Innovations (PMI) 17–18 September 2009*. Ghent, Belgium, 2009, pp. 127–133.
15. Azzizati S., Mahmud J. Skin prestretch evaluation adapting Mooney – Rivlin model. *Journal of Medical and Bioengineering*, 2015, vol. 4, iss. 1, pp. 31–35. <https://doi.org/10.12720/jomb.4.1.31-35>
 16. Chanda A. Biomechanical modeling of human skin tissue surrogates. *Biomimetics*, 2018, vol. 3, iss. 3, art. 18. <https://doi.org/10.3390/biomimetics3030018>
 17. Groves R. B., Coulman S. A., Birchall J. C., Evans S. L. An anisotropic, hyperelastic model for skin: Experimental measurements, finite element modelling and identification of parameters for human and murine skin. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2013, vol. 18, pp. 167–180. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2012.10.021>
 18. Li W., Luo X. Y. An invariant-based damage model for human and animal skins. *Annals of Biomedical Engineering*, 2016, vol. 44, iss. 10, pp. 3109–3122. <https://doi.org/10.1007/s10439-016-1603-9>
 19. Flynn C., Taberner A. J., Nielsen P. M. F., Fels S. Simulating the three-dimensional deformation of in vivo facial skin. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2013, vol. 28, pp. 484–494. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2013.03.004>
 20. Flynn C., Taberner A., Nielsen P. Mechanical characterisation of in vivo human skin using a 3D forcesensitive micro-robot and finite element analysis. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2011, vol. 10, pp. 27–38. <https://doi.org/10.1007/s10237-010-0216-8>
 21. Lapeer R. J., Gasson P. D., Karri V. A. Hyperelastic finite-element model of human skin for interactive realtime surgical simulation. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2011, vol. 58, iss. 4, pp. 1013–1022. <https://doi.org/10.1109/tbme.2009.2038364>
 22. Browell R., Lin G. The power of nonlinear materials capabilities. Part 1 of 2 on modeling materials with nonlinear characteristics // *ANSYS Solutions*, 2000, vol. 2, iss. 1. Available at: <https://studizba.com/show/1050594-1-ray-browell-the-power-of-nonlinear.html> (accessed September 05, 2023).
 23. Bruyaka V. A. (ed.). *Inzhenernyy analiz v Ansys Workbench* [Engineering analysis in Ansys Workbench]: tutorial. Part 1. Samara : Samara State Technical University Publ., 2010. 271 p. (in Russian). EDN: QMHFYZ
 24. Liu F., Li C., Liu S., Genin G. M., Huang G., Lu T. J., Xu F. Effect of viscoelasticity on skin pain sensation. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2015, vol. 5, iss. 6, pp. 222–226. <https://doi.org/10.1016/j.taml.2015.11.002>
 25. Fung Y. C. *Biomechanics: Mechanical properties of living tissues*. 2nd ed. New York, NY, Springer, 1993. 586 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2257-4>
 26. Lyamets L. L. Application of exponential polynomials for structural biomechanical analysis of the vascular wall. *Mathematical Morphology: Electronic Mathematical and Medical-Biological Journal*, 1997, vol. 2, iss. 1, pp. 71–82 (in Russian). EDN: ADBYXD
 27. Markenscoff X., Yannas I. On the stress-strain relation for skin. *Journal of Biomechanics*, 1979, vol. 12, pp. 127–129. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(79\)90151-9](https://doi.org/10.1016/0021-9290(79)90151-9)
 28. Shmurak M. I., Kuchumov A. G., Voronova N. O. Hyperelastic models analysis for description of soft human tissues behavior. *Master's Journal*, 2017, iss. 1, pp. 230–243 (in Russian). EDN: YUOPFB
 29. Melly S. K., Liu L., Liu Y., Leng J. A review on material models for isotropic hyperelasticity. *International Journal of Mechanical System Dynamics*, 2021, vol. 1, pp. 71–88. <https://doi.org/10.1002/msd2.12013>
 30. Kumar N., Rao V. Hyperelastic Mooney – Rivlin Model: Determination and physical interpretation of material constants. *MIT International Journal of Mechanical Engineering*, 2016, vol. 6, iss. 1, pp. 43–46.
 31. Ogden R. W. Large deformation isotropic elasticity — on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1972, vol. 326, iss. 1567, pp. 565–584. <https://doi.org/10.1098/rspa.1972.0026>
 32. Shergold O. A., Fleck N. A. Mechanisms of deep penetration of soft solids, with application to the injection and wounding of skin. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 2004, vol. 460, iss. 2050, pp. 3037–3058. <https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1315>
 33. Shergold O. A., Fleck N. A., Radford D. The uniaxial stress versus strain response of pig skin and silicone rubber at low and high strain rates. *International Journal of Impact Engineering*, 2006, vol. 32, iss. 9, pp. 1384–1402. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2004.11.010>



34. Lim J., Hong J., Chen W. W., Weerasooriya T. Mechanical response of pig skin under dynamic tensile loading. *International Journal of Impact Engineering*, 2011, vol. 38, iss. 2–3, pp. 130–135. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2010.09.003>
35. Rackl M. Curve fitting for Ogden, Yeoh and polynomial models. *ScilabTEC 2015, 7th International Scilab Users Conference*. Paris, France, 21st and 22nd May 2015. 18 p.
36. Calvo-Gallego J. L., Martinez-Reina J., Dominguez J. A polynomial hyperelastic model for the mixture of fat and glandular tissue in female breast. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 2015, vol. 31, iss. 9, art. e02723. <https://doi.org/10.1002/cnm.2723>
37. Lapeer R., Gasson P., Karri V. Simulating plastic surgery: From human skin tensile tests, through hyperelastic finite element models to real-time haptics. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 2010, vol. 103, iss. 2–3, pp. 208–216. <https://doi.org/10.1016/j.pbiomolbio.2010.09.013>
38. Veronda D., Westmann R. Mechanical characterizations of skin-finite deformations. *Journal of Biomechanics*, 1970, vol. 3, iss. 1, pp. 111–124. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(70\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0021-9290(70)90055-2)

Поступила в редакцию / Received 05.10.2023

Принята к публикации / Accepted 04.12.2023

Опубликована / Published 28.02.2025



ИНФОРМАТИКА

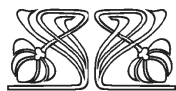
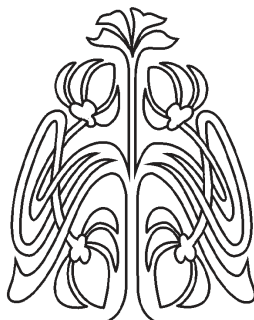
Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 106–115

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 106–115

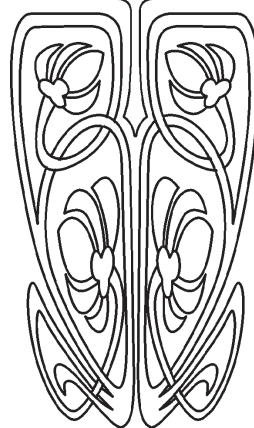
<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-106-115>

EDN: TLQGGD



Научный
отдел



Научная статья

УДК 001.891.573

Мультиагентное моделирование эвакуации из помещений с учетом столкновений агентов

В. О. Гамаюнова¹, А. С. Богомолов^{1,2,3}✉,
В. А. Кушников^{1,2}, В. А. Иващенко²

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²Федеральный исследовательский центр «Саратовский научный центр Российской академии наук», Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

³Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и механики», Россия, 283048, ДНР, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, д. 74

Гамаюнова Виктория Олеговна, магистрант кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, 29vikagamaiunova@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0006-8367-9742>

Богомолов Алексей Сергеевич, доктор технических наук, ¹профессор кафедры математической кибернетики и компьютерных наук; ²ведущий научный сотрудник лаборатории системных проблем управления и автоматизации в машиностроении Института проблем точной механики и управления; ³ведущий научный сотрудник отдела теории управляющих систем, bogomolov@iptmuran.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6972-3181>, SPIN: 3689-2420, AuthorID: 109940

Кушников Вадим Алексеевич, доктор технических наук, ¹профессор кафедры математической кибернетики и компьютерных наук; ²главный научный сотрудник лаборатории комплексных научных исследований, kushnikoff@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9195-2546>, SPIN: 4755-5063, AuthorID: 10353

Иващенко Владимир Андреевич, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем точной механики и управления, ivaipmtu@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0073-5838>, SPIN: 5426-0852, AuthorID: 10354

Аннотация. Предложена программная реализация развитой мультиагентной модели эвакуации людей различных возрастных групп из помещений сложной формы. Реализованная модель отличается возможностью учета физических столкновений агентов, их возрастных габаритов в соответствии с методиками из приказа МЧС России от 2022 г. В поведении агентов заложено целенаправленное стремление к выходу, при этом при возникновении заторов они могут ожидать, пока место для движения освободится. Это позволяет более



точно учесть особенности организованной эвакуации. Для моделирования столкновений агентов друг с другом и с препятствиями используется модель частично упругого удара. Была проведена серия экспериментов для различных возрастных групп: дети, подростки, взрослые и смешанные группы. Для каждой возрастной группы было рассчитано и усреднено время полной эвакуации из помещения. Программа предоставляет возможность визуализировать процесс эвакуации людей, задавая их начальную расстановку случайно или вручную. Полученные результаты были сопоставлены с данными аналогичного эксперимента по методикам из приказа МЧС России от 2009 г. Сравнение показало, что в данном эксперименте дети и подростки эвакуируются примерно с такой же скоростью. Однако группа взрослых людей достигает выхода быстрее. Результаты сравнения позволили предположить, что особенности используемого мультиагентного подхода с учетом способности агентов ожидать выхода позволяет увеличивать степень организованности моделируемого поведения группы, что дает возможность существенно сократить время эвакуации (более чем в два раза для 100 человек). Полученные и перспективные результаты проекта предназначены для использования в разработке цифровых двойников процессов эвакуации из помещений коммерческого и общественного назначения.

Ключевые слова: моделирование, эвакуация, мультиагентная модель, возрастные группы людей, чрезвычайные ситуации, цифровой двойник

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект № FREM-2023-003).

Для цитирования: Гамаюнова В. О., Богомолов А. С., Кушников В. А., Иващенко В. А. Мультиагентное моделирование эвакуации из помещений с учетом столкновений агентов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 106–115. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-106-115>, EDN: TLQGGD

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Multi-agent modeling of evacuation from premises with consideration of agent collisions

V. O. Gamayunova¹, A. S. Bogomolov^{1,2,3✉}, V. A. Kushnikov^{1,2}, V. A. Ivashchenko²

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

²Saratov Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

Viktoria O. Gamayunova, 29vikagamaiunova@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0006-8367-9742>

Aleksey S. Bogomolov, bogomolov@iptmuran.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6972-3181>, SPIN: 3689-2420, AuthorID: 109940

Vadim A. Kushnikov, kushnikoff@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9195-2546>, SPIN: 4755-5063, AuthorID: 10353

Vladimir A. Ivashchenko, ivaipmtu@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0073-5838>, SPIN: 5426-0852, AuthorID: 10354

Abstract. The article proposes a software implementation of a developed multi-agent model for the evacuation of people of various age groups from premises of a complex shape. The model is distinguished by the possibility of taking into account the physical collisions of agents, their age dimensions in accordance with the methods from the order of the Ministry of Emergency Situations of Russia from 2022. The behavior of agents is based on a purposeful desire to exit. At the same time, in the event of congestion, they can wait until a place for movement is vacated. To simulate the collisions of agents with each other and with obstacles, we use the model of partially elastic impact. We carried out a series of experiments for different age groups: children, teenagers, adults and mixed groups. The total evacuation time from the premises was calculated and averaged for each age group. The program provides an opportunity to visualize the process of evacuation of people, set their initial arrangement randomly or manually. We



compared the obtained results with the data of a similar experiment using the methods from the order of the Russian Emergencies Ministry of 2009. The comparison showed that in this experiment, children and teenagers are evacuated at about the same speed. However, a group of adults reaches the exit faster. The results of the comparison suggested that the features of the multi-agent approach used, taking into account the ability of agents to expect an exit, make it possible to increase the degree of organization of the modeled behavior of the group. This makes it possible to significantly reduce the evacuation time (more than twice for 100 people). The obtained and promising results of the project are intended for use in the development of digital twins of evacuation processes from commercial and public premises.

Keywords: simulation, evacuation, multi-agent model, age groups of people, emergencies

Acknowledgements: The research was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state task (project No. FREM-2023-003).

For citation: Gamayunova V. O., Bogomolov A. S., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A. Multi-agent modeling of evacuation from premises with consideration of agent collisions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 106–115 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-106-115>, EDN: TLQGGD

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Оперативная и своевременная эвакуация людей из помещений при чрезвычайных ситуациях является одной из ключевых задач в области обеспечения безопасности населения. В подготовке помещений к возможным чрезвычайным ситуациям важную роль играет математическое моделирование процессов эвакуации в различных условиях. Моделирование эвакуации позволяет оценить возможные сценарии действий в случае чрезвычайной ситуации, максимальное допустимое количество людей в помещении, время полной эвакуации и другие важные факторы. Поэтому данному вопросу посвящено достаточно большое количество научных публикаций и нормативных документов в различных странах. Так, обзор [1] освещает эволюцию методов расчета процесса эвакуации людей при пожаре начиная с 30-х гг. прошлого века. Рассматриваются такие математические модели, как графоаналитический метод расчета и алгоритмы имитационно-стохастического моделирования. Отмечен переход от моделирования движения потока людей к исследованию индивидуально-поточного движения с учетом эмоционального и физического состояния.

В [2] исследуются известные случаи пожаров, возможное влияние своевременного оповещения и оперативной эвакуации, а также опасных факторов пожара на общее время эвакуации и последствия для здоровья людей.

В настоящее время для моделирования эвакуации людей из ограниченных пространств довольно часто используются модели социальной силы. Модель социальной силы движения толпы, или модель Хелбинга [3,4], использует аппарат для анализа молекулярной и реактивной динамики, что позволяет описать образование скоплений людей и вовлечение их в панику. Индивидуальные движения людей описываются с помощью сил отталкивания и притяжения. Программная реализация данной модели описана в [5]. Данная модель существенно упрощает описание поведения людей, в то время как процесс моделирования оказывается достаточно ресурсозатратным.

В [6] исследуются стратегии эффективной эвакуации людей с ограниченными возможностями. Рассматриваются типы уязвимости с точки зрения расстояния от выхода и скорости передвижения. Исследуется влияние предоставления преимуществ при эвакуации уязвимым людям на эвакуацию в целом при различном начальном количестве эвакуируемых. Однако в указанной работе апробация предложенных стратегий приводится при использовании модели социальных сил, где отсутствует механизм предотвращения столкновений, что приводит к менее реалистичному моделированию процесса эвакуации.



В [7] разработана интегрированная модель эвакуации из помещения, учитывающая индивидуальное влияние опасных факторов пожара на каждого человека, а также возникновение стресса, влияющего на принятие решений и скорость передвижения людей. В программной реализации данные импортируются из симулятора пожара FDS на каждом модельном шаге и синхронизируются с симуляцией эвакуации. Полученные в исследовании результаты показывают, что эвакуация на ранней стадии развития пожара создает меньше стресса для эвакуируемых и приводит к более быстрой эвакуации.

Статья [8] описывается моделирование эвакуации из высотных зданий с использованием модели клеточного автомата. При этом учитывается актуальный для высотных зданий фактор усталости, когда агенты со временем замедляются.

В [9] предлагается адаптивная система управления эвакуацией, в которой предварительно обученные лидеры перемещаются с заданной скоростью и следят за указаниями на специальных браслетах, являющихся индикаторами оптимального выхода, к которому следует двигаться. Остальные агенты знают о необходимости следовать указаниям ближайших лидеров. Выдвигается предположение, что в чрезвычайных ситуациях получение инструкций от человека особенно важно для содействия скоординированной эвакуации и повышения безопасности.

В статье [10] представлены результаты исследования моделирования эвакуации людей разных возрастных групп из помещений, представляемых как поле клеточного автомата. Перемещение людей осуществляется по свободным от препятствий и других людей клеткам. Поиск направления к выходу осуществляется на основе предварительной рассчитанной ее удаленности от выхода. Однако исследование выполнено с соблюдением методик из приказа МЧС¹ 2009 г., который в настоящее время утратил силу и заменен на приказ² 2022 г. с другими рекомендациями по учету размеров проекций людей при эвакуации. Кроме того, используемая в статье модель эвакуации не учитывает столкновение людей с препятствиями и друг с другом.

Физические столкновения людей учитываются в модели упругого удара в работе [11], где предлагаются результаты интегрированного моделирования распространения опасных факторов пожара и эвакуации людей. Однако в этой работе не исследованы процессы эвакуации без пожара (по иным причинам) и также с учетом возможного преобладания лиц младшего, среднего и старшего возраста и рекомендаций МЧС РФ на этот счет.

В силу сказанного актуальной является задача математического моделирования эвакуации людей различных возрастных групп с учетом их физических столкновений и сравнения результатов с полученными ранее. Для этой цели разработан программный комплекс, использующий описанные ниже математические модели и алгоритм.

1. Используемые математические модели

В настоящем исследовании используется программное обеспечение на основе математической модели, предлагаемой и апробированной в [11–13]. Модель определяет правила выбора агентами скорости и направления движения на основании заранее просчитанных векторов, задающих направление к ближайшему выходу. Учитываются физические взаимодействия их друг с другом и с препятствиями, столкновения агентов рассматриваются как частично упругий удар [14].

При создании основной модели задается множество стен помещения, а также множество эвакуационных зон, помещение разбивается на множество клеток c_{ij} . Человек в помещении представляется проекцией в виде круга и имеет следующие параметры: вектор координат

¹Об утверждении методики определения расчетных величин пожарного риска в зданиях, сооружениях и строениях различных классов функциональной пожарной опасности: Приказ МЧС России от 30.06.2009 г. № 382. Москва : МЧС России, 2009. 48 с.

²Об утверждении методики определения расчетных величин пожарного риска в зданиях, сооружениях и пожарных отсеках различных классов функциональной пожарной опасности: Приказ МЧС России от 14.11.2022 г. № 1140. Москва : МЧС России, 2022. 65 с.



$x(t)$; радиус проекции r , зависящий от рассматриваемой возрастной группы; масса m — случайная равномерно распределенная величина на отрезке 60–100 кг; вектор скорости $v(t)$ и ускорения — $a(t)$; максимально возможная скорость и ускорение $v_{\max}$ и $a_{\max}$ — случайная равномерно распределенная величина на отрезках 1–2 м/с и 1–2 м/с² соответственно. В начальный момент скорость и ускорение равны нулю.

Изменение координат местоположения людей описывается следующим образом:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t.$$

Скорость в последующий момент времени определяется так:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t.$$

Изменение скорости движения при столкновении двух людей рассчитывается по формулам

$$u_{1n} = -\epsilon v_{1n} + (1 + \epsilon) \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}, \quad u_{2n} = -\epsilon v_{2n} + (1 + \epsilon) \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2},$$

где ϵ — коэффициент восстановления при частично упругом ударе, v_{1n} и v_{2n} — нормальные проекции скоростей движения агентов к плоскости соударения до удара, а u_{1n} и u_{2n} — после удара; m_1 и m_2 — массы сталкивающихся агентов.

При столкновении агента со стеной проекция его скорости движения, параллельная стене, не изменяется, другая меняет знак на противоположный и уменьшает свое значение согласно коэффициенту ϵ .

Ускорение агента принимается равным нулю, если он движется с оптимальной скоростью, и максимальным в противоположном случае, что обуславливается стремлением агента как можно скорее покинуть помещение. Если на пути нет препятствий, то $|v_{opt}| = v_{\max}$, где $v_{opt}(t)$ — оптимальная скорость движения, для расчета направления вектора $v_{opt}(t)$ в каждой клетке помещения определяется вектор e , который задает направление к ближайшему выходу. Алгоритм вычисления вектора e описан в [13].

Предположим, что центр проекции агента находится в клетке c_{ij} , тогда для этой клетки рассчитываются расстояния $l(\alpha)$ до ближайшего препятствия в направлении движения под углом α к вектору e , где $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Тогда модуль оптимальной скорости под углом α к вектору e вычисляется по формуле

$$v_{opt}(\alpha) = \begin{cases} v_{\max}, & l_{\alpha} \geq L + r, \\ \frac{v_{\max}(l_{\alpha} - r)}{L}, & r \leq l_{\alpha} \leq L + r, \\ 0, & l_{\alpha} \leq r, \end{cases}$$

где $L = 2$ м — критическое расстояние.

Далее вводится функция $f(\alpha) = v_{\alpha opt}(\alpha) \cos(\alpha)$ и оптимальным выбирается тот угол α , при котором значение функции $f(\alpha)$ максимально. Таким образом, человек, имея угол обзора 180°, определяет в поле своего зрения наилучшее направление движения.

Отличительной особенностью реализации предложенной в [11] модели в данном исследовании является учет того, что в случае скопления людей движение в любом из направлений под углом α к вектору e может оказаться невозможным. В таком случае предполагаем, что человек аналогично ищет наилучший v_{opt} в противоположном направлении. Такой подход обусловлен стремлением человека обойти скопление людей, движущихся к выходу, и быстрее добраться до выхода. В случае невозможности движения в любом из направлений вокруг себя человек останавливается и ждет, когда освободится пространство, что несколько уменьшает эффект разброса, возникающий от упругих ударов в модели [11]. Блок-схема разработанной программы представлена на рис. 1, фрагмент программы, отмеченный пунктирной линией, исполняется для каждого агента.

В данной статье мы не рассматриваем влияние факторов пожара, предполагая, что анализируется эвакуация по более общим причинам (тренировочная эвакуация, эвакуация в связи с сообщением о стихийном бедствии, угрозе взрыва и др.).



2. Результаты вычислительных экспериментов

При проведении эксперимента были учтены возрастные группы эвакуируемых людей: дети дошкольного возраста, дети и подростки школьного возраста, люди молодого и среднего возраста со средней площадью горизонтальной проекции 0.03, 0.06 и 0.1 м² соответственно (Приказ МЧС России от 14.11.2022 г. № 1140). Также, была смоделирована эвакуация смешанной группы. Экран работы программы показан на рис. 2.

Зависимость времени эвакуации от числа людей исследовалась в прямоугольном помещении размером 6 на 10 метров с единственным выходом аналогичном помещению, рассматриваемому в [10]. Проводились эксперименты для начального количества эвакуируемых людей от 5 до 100 для каждой возрастной группы. Для каждого значения количества людей эксперимент был проведен 20 раз, итоговое время эвакуации рассчитывалось путем усреднения полученных значений. Результаты вычислений представлены на рис. 3.

Как следует из полученного результата, при малом количестве людей (до 10 человек) время полной эвакуации различается незначительно. Эвакуация смешанной группы людей происходит за время, близкое к эвакуации группы подростков. С увеличением числа эвакуируемых большое значение для времени эвакуации имеет площадь проекции людей разного возраста.

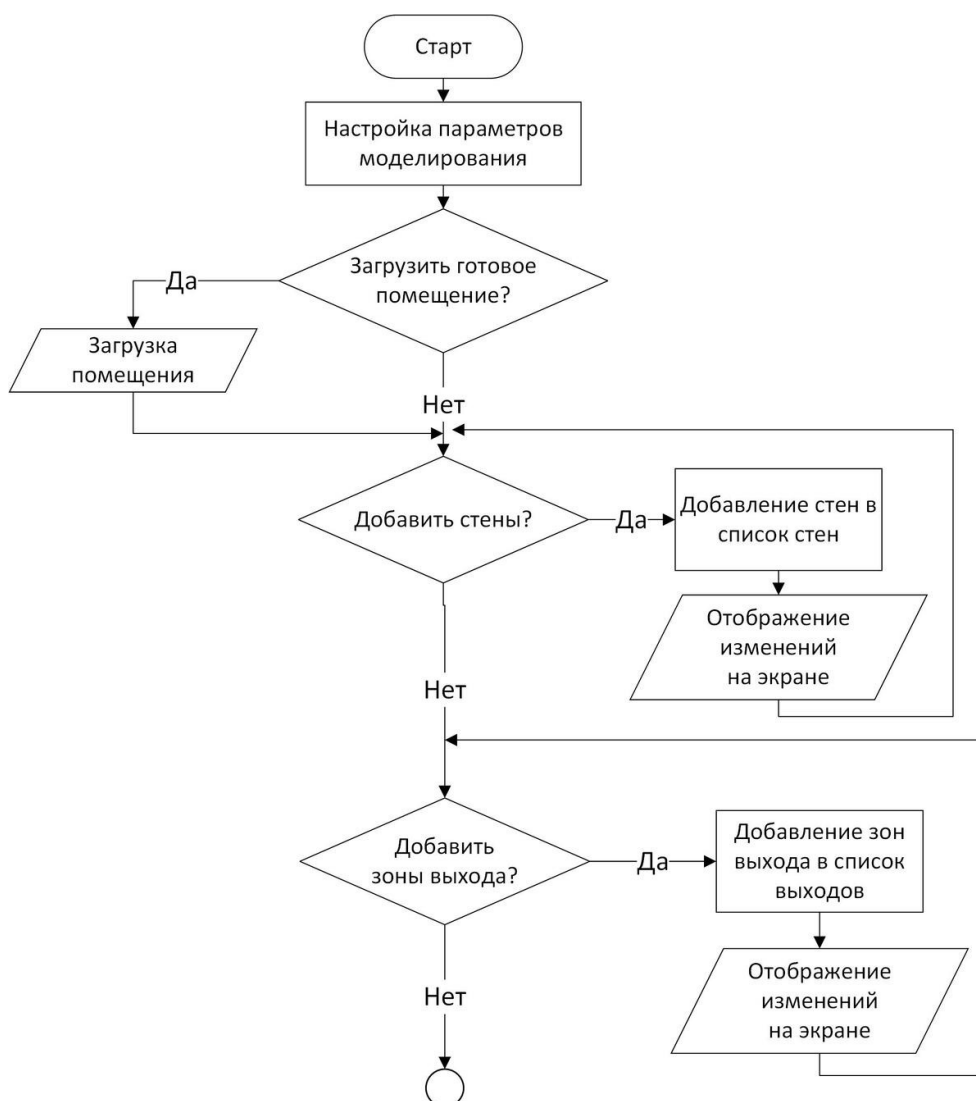
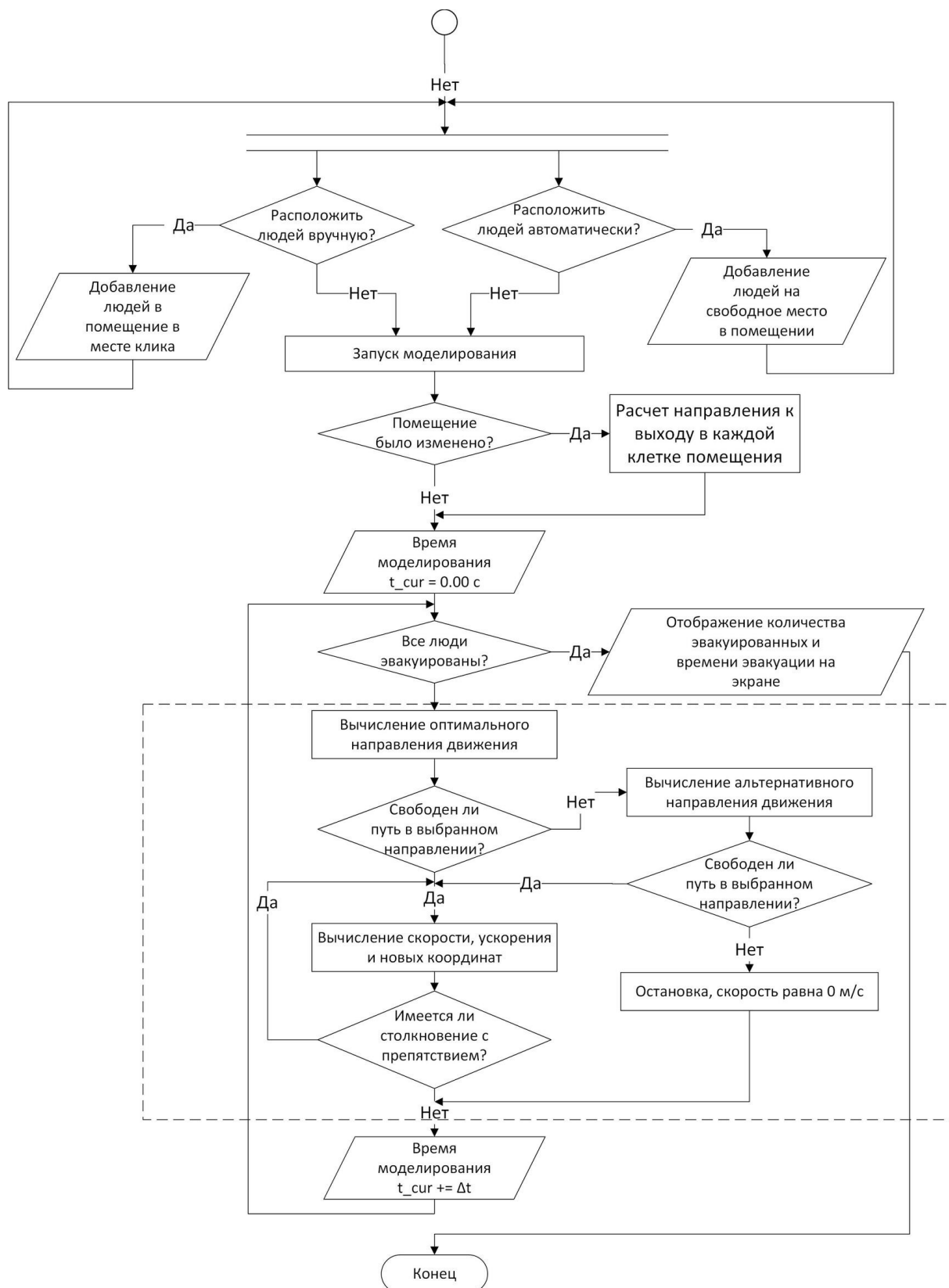


Рис. 1. Блок-схема разработанной программы
Fig. 1. Block diagram of the developed program



Окончание рис. 1 / Continuation of Fig. 1

В сравнении с результатами, полученными в [10] с помещением такого же типа, отметим следующее. Для 100 взрослых человек время эвакуации составило 224 с, для подростков — около 60 с, а для детей — 34 с. В данном эксперименте время, затрачиваемое на эвакуацию 100 человек, составило 94, 60 и 38 с для этих возрастных групп, рис. 4.

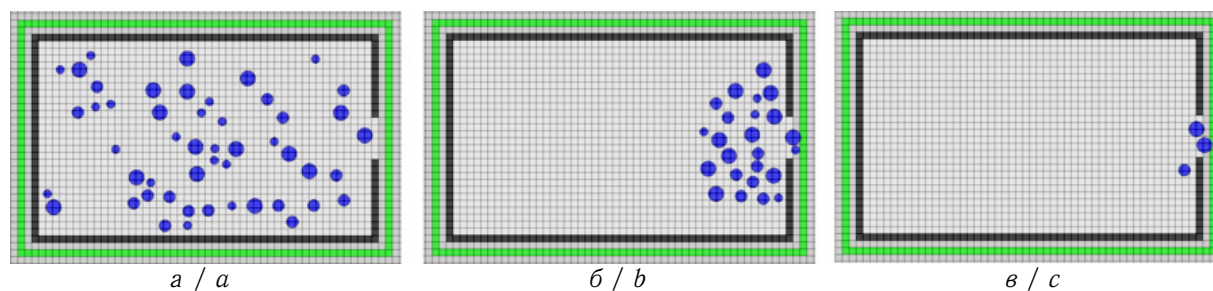


Рис. 2. Экран работы программы для смешанной группы из 50 эвакуируемых в моменты времени:
 $a - t = 1$ с; $b - t = 15$ с; $c - t = 30$ с (цвет онлайн)

Fig. 2. Screen of the program for a mixed group of 50 evacuees at times: $a - t = 1$ sec; $b - t = 15$ sec; $c - t = 30$ sec (color online)

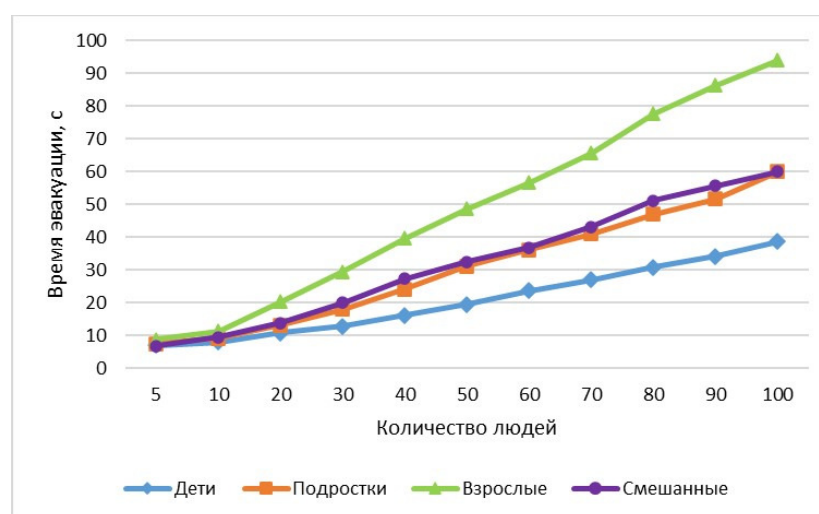


Рис. 3. Время полной эвакуации людей из рассматриваемого помещения
 (цвет онлайн)

Fig. 3. Time for complete evacuation of people from the premises in question
 (color online)

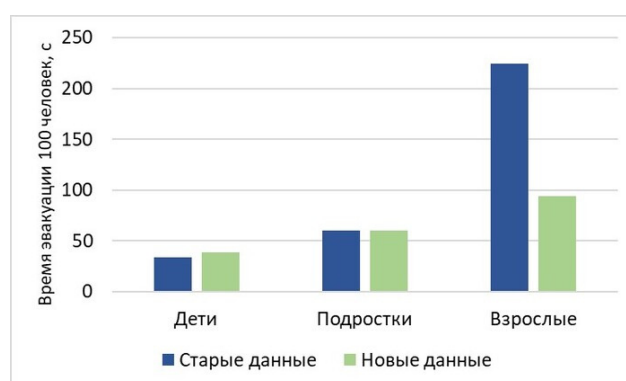


Рис. 4. Сравнение результатов моделирования
 Fig. 4. Comparison of simulation results

Значительное различие времени эвакуации для большого количества взрослых, как мы предполагаем, объясняется тем, что ожидание свободного пространства (аналог очереди) уменьшает хаотический характер движения толпы, придает ей большую организованность и поэтому скорее приближает эвакуацию к цели. У групп людей с меньшими проекциями (дети, подростки) данный эффект, как мы предполагаем, должен проявляться при большей численности и, возможно, в более больших помещениях.



Заключение

В работе предлагается развитая мультиагентная модель эвакуации людей из помещения с учетом столкновений и ее компьютерная реализация. Разработанная программа позволяет строить помещения различной конфигурации, располагать людей в помещении как вручную, так и случайным образом, задавая необходимое количество людей. Процесс эвакуации визуализируется, подсчитывается количество эвакуированных в каждый момент времени и определяется время полной эвакуации людей из помещения. Особенностью предлагаемой модели является способность агентов сменить направление движения для обхода других агентов и ожидания при отсутствии возможности для перемещения.

Был проведен эксперимент по моделированию эвакуации детей, подростков, взрослых и смешанных групп из пустого помещения прямоугольной формы. Произведено сравнение полученных усредненных значений времени эвакуации с аналогичными данными, представленными в более раннем источнике с использованием программы «Moving to exit» [10]. Выявлены отличия, которые свидетельствуют о положительном влиянии элементов организации на скорость эвакуации людей.

Список литературы

1. Самошин Д. А. Краткая история развития методов расчета процесса эвакуации людей в случае пожара // Ройтмановские чтения : сб. материалов 10-й науч.-практ. конф., г. Москва, 2022. Москва : Академия Государственной противопожарной службы МЧС России, 2022. С. 130–132. EDN: [EJYUIP](#)
2. Purser D. A. Assessment of pre-warning, pre-travel and travel behavior interactions with smoke and toxic gases during fire incidents // Fire Safety Journal. 2023. Vol. 141. Art. 103938. <https://doi.org/10.1016/j.firesaf.2023.103938>
3. Гусев М. С., Гвоздик М. И. Формулировка модели социальной силы при движении толпы в процессе эвакуации при пожарах в развлекательных учреждениях // Пожарная и техносферная безопасность: проблемы и пути совершенствования. 2020. № 1. С. 220–224. EDN: [XOOGKU](#)
4. Helbing D., Farkas I., Vicsek T. Simulating dynamical features of escape panic // Nature. 2000. Vol. 407. P. 487–490. <https://doi.org/10.1038/35035023>
5. Антуков А. М., Брацун Д. А., Люшин А. В. Моделирование поведения паникующей толпы в многоуровневом разветвленном помещении // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5, № 3. С. 491–508. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2013-5-3-491-508>, EDN: [RVBMIP](#)
6. Tong Y. Simulation investigation on crowd evacuation strategies for helping vulnerable pedestrians at different stages of egress // International Journal of Disaster Risk Reduction. 2023. Vol. 84. Art. 103479. <https://doi.org/10.1016/j.ijdrr.2022.103479>
7. Cao R. F., Lee E. W., M., Wei X., Gao D. L., Chen Q., Yuen A. C. Y., Yeoh G. H., Yuen R. Development of an agent-based indoor evacuation model for local fire risks analysis // Journal of Safety Science and Resilience. 2023. Vol. 4, № 1. P. 75–92. <https://doi.org/10.1016/j.jnlssr.2022.09.006>
8. Ding N., Chen T., Zhang H., Gao D. L., Chen Q., Yuen A. C. Y., Yeoh G. H., Yuen R. Simulation of high-rise building evacuation considering fatigue factor based on cellular automata: A case study in China // Building Simulation. 2016. Vol. 10, № 3. P. 407–418. <https://doi.org/10.1007/s12273-016-0337-9>
9. Lopez-Carmona M. A. Adaptive cell-based evacuation systems for leader-follower crowd evacuation // Transportation Research Part C: Emerging Technologies. 2022. Vol. 140. Art. 103699. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2022.103699>
10. Максимова М. З., Барбин Н. М. Моделирование эвакуации людей различных возрастных групп // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5, № 3. С. 483–490. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2013-5-3-483-490>, EDN: [RVBMIF](#)
11. Цвиркун А. Д., Резчиков А. Ф., Самарцев А. А., Иващенко В. А., Богомолов А. С., Кушников В. А., Филимонюк Л. Ю. Система интегрированного моделирования распространения опасных факторов пожара и эвакуации людей из помещений // Автоматика и телемеханика. 2022. № 5. С. 26–42. <https://doi.org/10.31857/S0005231022050038>, EDN: [ABHDTO](#)
12. Samartsev A. A., Ivashchenko V. A., Kushnikova E. V. Combined modeling of fire and evacuation from premises // 2019 International Science and Technology Conference «EastConf», EastConf



2019. Vladivostok : Institute of Electrical and Electronics Engineers Publ., 2019. Art. 8725394. <https://doi.org/10.1109/Eastonf.2019.8725394>, EDN: VZUZYG
13. Samartsev A., Ivashchenko V., Rezhnikov A., Kushnikov V., Filimonyuk L., Bogomolov A. Multiagent model of people evacuation from premises while emergency // *Advances in Systems Science and Applications*. 2019. Vol. 19, № 1. P. 98–115. <https://doi.org/10.25728/assa.2019.19.1.558>
14. Путилов К. А. Курс физики : в 3 т. Т. 1. Механика. Акустика. Молекулярная физика. Термодинамика. Москва : Физматгиз, 1963. 560 с.

References

1. Samoshin D. D. A brief history of the development of methods for calculating the process of evacuation of people in case of fire. *Roitmanovskie chteniya* [Roitman Readings]: Collection of materials of the 10th scientific and practical conference. Moscow, Academy of the State Fire Service of EMERCOM of Russia, 2022, pp. 130–132 (in Russian). EDN: EJYUIP
2. Purser D. A. Assessment of pre-warning, pre-travel and travel behavior interactions with smoke and toxic gases during fire incidents. *Fire Safety Journal*, 2023, vol. 141, art. 103938. <https://doi.org/10.1016/j.firesaf.2023.103938>
3. Gusev M. S., Gvozdik M. I. Formulation of a social force model at the time of crowd movement in the process of evacuation during fires in entertainment facilities. *Fire and Technospheric Safety: Problems and Ways of Improvement*, 2020, iss 1, pp. 220–224 (in Russian). EDN: XOOGKU
4. Helbing D., Farkas I., Vicsek T. Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*, 2000, vol. 407, pp. 487–490. <https://doi.org/10.1038/35035023>
5. Aptukov A. M., Bratsun D. A., Lyushnin A. V. Modeling of behavior of panicked crowd in multi-floor branched space. *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, iss. 3, pp. 491–508 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2013-5-3-491-508>, EDN: RVBMIP
6. Tong Y. Simulation investigation on crowd evacuation strategies for helping vulnerable pedestrians at different stages of egress. *International Journal of Disaster Risk Reduction*, 2023, vol. 84, art. 103479. <https://doi.org/10.1016/j.ijdrr.2022.103479>
7. Cao R. F., Lee E. W., M., Wei X., Gao D. L., Chen Q., Yuen A. C. Y., Yeoh G. H., Yuen R. Development of an agent-based indoor evacuation model for local fire risks analysis. *Journal of Safety Science and Resilience*, 2023, vol. 4, iss 1, pp. 75–92. <https://doi.org/10.1016/j.jnlssr.2022.09.006>
8. Ding N., Chen T., Zhang H., Gao D. L., Chen Q., Yuen A. C. Y., Yeoh G. H., Yuen R. Simulation of high-rise building evacuation considering fatigue factor based on cellular automata: A case study in China. *Building Simulation*, 2016, vol. 10, iss 3, pp. 407–418. <https://doi.org/10.1007/s12273-016-0337-9>
9. Lopez-Carmona M. A. Adaptive cell-based evacuation systems for leader-follower crowd evacuation. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2022, vol. 140, art. 103699. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2022.103699>
10. Maksimova M. Z., Barbin N. M. Modeling of evacuation of people of various age groups. *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, iss 3, pp. 483–490 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2013-5-3-483-490>, EDN: RVBMIF
11. Tsvirkun A. D., Rezhnikov A. F., Samartsev A. A., Ivashchenko V. A., Bogomolov A. S., Kushnikov V. A., Filimonyuk L. Yu. Integrated simulation system for the spread of fire hazards and evacuation of people from premises. *Automation and Remote Control*, 2022, iss 5, pp. 26–42 (in Russian). <https://doi.org/10.31857/S0005231022050038>, EDN: ABHDTO
12. Samartsev A. A., Ivashchenko V. A., Kushnikova E. V. Combined modeling of fire and evacuation from premises. *2019 International Science and Technology Conference "EastConf"*, *EastConf 2019*. Vladivostok, Institute of Electrical and Electronics Engineers Publ., 2019, art. 8725394. <https://doi.org/10.1109/Eastonf.2019.8725394>, EDN: VZUZYG
13. Samartsev A., Ivashchenko V., Rezhnikov A., Kushnikov V., Filimonyuk L., Bogomolov A. Multiagent model of people evacuation from premises while emergency. *Advances in Systems Science and Applications*, 2019, vol. 19, iss 1, pp. 98–115. <https://doi.org/10.25728/assa.2019.19.1.558>
14. Putilov K. A. *Kurs fiziki. T. 1. Mekhanika. Akustika. Molekulyarnaya fizika. Termodinamika* [Physics course. Vol. 1. Mechanics. Acoustics. Molecular physics. Thermodynamics]. Moscow, Fizmatgiz, 1963. 560 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 23.11.2023

Принята к публикации / Accepted 21.12.2023

Опубликована / Published 28.02.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 116–127

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 116–127

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-116-127>, EDN: UVLBKD

Научная статья

УДК 004.932

Разработка и анализ алгоритма обнаружения множественных экземпляров объекта на микроскопических изображениях с использованием численных методов

С. Ю. Ганигин, А. Н. Давыдов, А. С. Нечаев, В. В. Киященко[✉]

Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244

Ганигин Сергей Юрьевич, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Радиотехнические устройства», ganigin.s.yu@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5778-6516>, SPIN: 5725-6961, AuthorID: 159277

Давыдов Андрей Николаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика», davydov.an@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7061-5460>, SPIN: 7434-7987, AuthorID: 13419

Нечаев Александр Сергеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Радиотехнические устройства», nechaev-as@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0939-8292>, SPIN: 4564-7570, AuthorID: 740145

Киященко Виктория Витальевна, младший научный сотрудник лаборатории «Цифровые двойники материалов и технологических процессов их обработки», vv.kiyashchenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-9710-2860>, SPIN: 6752-8232, AuthorID: 1184376

Аннотация. В данной работе представлен метод обнаружения объектов на изображениях микроскопии, сфокусированный на поиске частиц. Основная цель исследования заключается в разработке алгоритма, способного эффективно находить множественные экземпляры объектов в различных сценариях, сохраняя при этом специфичность для структур интереса. Алгоритм базируется на использовании экстремальных областей в качестве кандидатов для обнаружения с последующей оценкой этих областей при помощи обученных параметров. Одним из ключевых элементов алгоритма является встроенное ограничение на перекрытие, что позволяет ему эффективно обрабатывать кластеризацию частиц. Результаты экспериментов на различных наборах микроскопических данных подтверждают устойчивость метода к изменениям в интенсивности изображений, плотности и размеров частиц. Данный алгоритм является полезным инструментом для разработки методов обнаружения объектов на изображениях микроскопии и может быть применен в научных и медицинских исследованиях.

Ключевые слова: обнаружение объектов, изображения микроскопии, частицы, экстремальные области, ограничение на перекрытие

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект № АААА-А12-2110800012-0).

Для цитирования: Ганигин С. Ю., Давыдов А. Н., Нечаев А. С., Киященко В. В. Разработка и анализ алгоритма обнаружения множественных экземпляров объекта на микроскопических изображениях с использованием численных методов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 116–127. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-116-127>, EDN: UVLBKD

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Development and analysis of an algorithm for detecting multiple instances of an object in microscopic images using numerical methods

S. Yu. Ganigin, A. N. Davydov, A. S. Nechaev, V. V. Kiyashchenko[✉]

Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia

Sergey Yu. Ganigin, ganigin.s.yu@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5778-6516>, SPIN: 5725-6961, AuthorID: 159277

Andrey N. Davydov, davydov.an@samgtu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7061-5460>, SPIN: 7434-7987, AuthorID: 13419

Alexander S. Nechaev, nechaev-as@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-0939-8292>, SPIN: 4564-7570, AuthorID: 740145

Victoria V. Kiyashchenko, vv.kiyashchenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-9710-2860>, SPIN: 6752-8232, AuthorID: 1184376

Abstract. This paper presents a method for object detection in microscopy images, focusing on particle detection. The main objective of the research is to develop an algorithm capable of efficiently detecting multiple instances of objects in various scenarios, while maintaining specificity for structures of interest. The algorithm is based on using extremal regions as candidates for detection, followed by evaluating these regions with trained parameters. A key element of the algorithm is its built-in non-overlapping constraint, which enables effective handling of particle clustering. Experimental results on various microscopy datasets confirm the method's robustness to changes in image intensity, particle density, and size. The proposed algorithm serves as a valuable tool in the development of object detection methods for microscopy images and can be applied in both scientific and medical research.

Keywords: object detection, microscopy images, particles, extreme regions, restriction on non-concealment

Acknowledgements: The research was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state task (project No. AAAA12-2110800012-0).

For citation: Ganigin S. Yu., Davydov A. N., Nechaev A. S., Kiyashchenko V. V. Development and analysis of an algorithm for detecting multiple instances of an object in microscopic images using numerical methods. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 116–127 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-116-127>, EDN: UVLBKD

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Микроскопические изображения являются важным инструментом во многих научных и медицинских исследованиях, позволяя исследователям изучать структуры и процессы на клеточном уровне. Однако анализ таких изображений представляет собой сложную задачу из-за их высокой разрешающей способности и сложной структуры. Проблемы анализа изображений, полученных с помощью микроскопа, описаны в работах [1–4].

Проблема обнаружения множественных экземпляров объектов на микроскопических изображениях является актуальной задачей в области компьютерного зрения и машинного обучения [5–7]. Она возникает в контексте разработки методов различных научных и медицинских исследований, таких как анализ клеток, тканей, биологических структур и других объектов микро- и наномасштаба.

Эффективное решение этой задачи принесет значительную пользу науке и медицине. Например, автоматизированные методы обнаружения и анализа микроскопических объектов



могут повысить скорость и точность исследований, а также помочь выявлять дефекты материалов или аномалии в биологических образцах с меньшим вмешательством человека.

В данной статье представлен алгоритм, основанный на машинном обучении, разработанный для обнаружения множественных экземпляров объекта на микроскопических изображениях. Этот метод достаточно универсален и может успешно работать в нескольких сценариях, таких как различные варианты микроскопии (например, СЭМ-микроскопия) или типы объектов на микроскопических изображениях (например, линии клеток или нерасплавленные частицы металла).

Недавние работы [8–10] показывают, что применение сверточных нейронных сетей может значительно улучшить результаты анализа изображений микроскопии. В данной работе процедура обучения разработана для того, чтобы научить модель распознавать объекты на изображениях с точечной аннотацией, где каждый объект интереса на обучающих изображениях аннотирован точкой (например, внутри каждой частицы). Используя только эту минимальную аннотацию, метод способен обучить модель таким образом, что объекты интереса могут быть обнаружены на других изображениях при условии сохранения аналогичной экспериментальной установки. Метод успешно протестирован на нескольких наборах данных микроскопии с точечными аннотациями и продемонстрировал превосходную точность обнаружения в нескольких сценариях, несмотря на различия между наборами данных.

1. Наборы данных

Микроскопические изображения играют критическую роль в научных исследованиях и медицинской диагностике. В данной работе используется четыре набора данных, охватывающих различные методы и условия визуализации.

Синтетическая микроскопия. Синтетический набор данных представляет собой эталон для сравнения методов обнаружения и подсчета объектов. Он состоит из 50 изображений частиц на флуоресцентной микроскопии, созданных с использованием генеративных моделей [11]. Этот набор данных содержит существенное перекрытие между объектами, что делает его сложным для методов обнаружения. Набор данных разделен на 30 изображений для обучения и 20 для тестирования, с несколькими случайными разбиениями для обучающего набора.

СЭМ-микроскопия поверхности покрытий из двухкомпонентных материалов. Этот набор данных представляет изображения, полученные с помощью сканирующего электронного микроскопа (СЭМ), сфокусированного на поверхности покрытий, состоящих из двухкомпонентных материалов, таких как никель и алюминий. Этот тип микроскопии широко используется в материаловедении и инженерии для изучения микроструктуры и характеристик поверхностей материалов. Набор данных содержит изображения с различными увеличениями и разрешениями, захватывающие различные аспекты структуры покрытий, такие как морфология поверхности, составные части и дефекты. Этот набор данных представляет интерес для оценки производительности алгоритмов обнаружения и сегментации объектов на микроскопических изображениях материалов.

Набор данных дифференциальной интерференционной контрастной микроскопии (DIC). Этот набор данных содержит изображения, полученные с помощью дифференциальной интерференционной контрастной микроскопии (DIC). DIC-микроскопия — это метод, который обеспечивает высокий контраст изображений путем измерения изменений в интерференции света, прошедшего через образец. Это позволяет визуализировать даже тончайшие детали структуры образца, делая DIC-микроскопию полезной для изучения мельчайших структурных особенностей. Набор данных содержит изображения образцов, таких как биологические препараты и материалы с разными уровнями контраста и разрешениями.

Слабая флуоресцентная молекулярная микроскопия. Набор данных молекулярной микроскопии состоит из изображений, полученных в результате генерации набора данных о микробных колониях [12]. Он содержит 78 изображений с шумом и низким контрастом,



характерными для слабой флуоресценции, что создает дополнительные трудности для методов обнаружения. Набор данных также разделен на обучающий и тестовый наборы.

На рис. 1 представлены примеры образцов из разных наборов данных после проведения аннотирования. Показаны образцы из набора данных изображений слабой флуоресцентной микроскопии и СЭМ-микроскопии поверхности покрытий двухкомпонентных материалов.

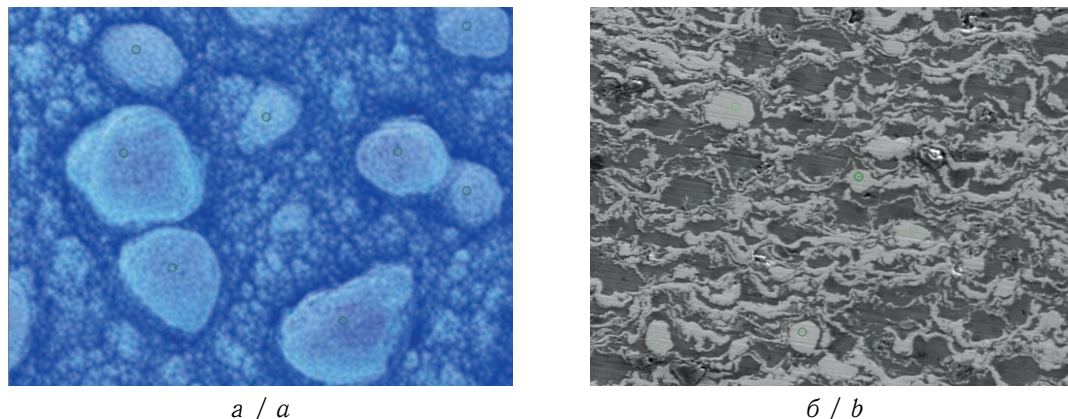


Рис. 1. Примеры аннотированных образцов из разных наборов данных: *a* — образец из набора слабой флуоресцентной молекулярной микроскопии; *б* — образец из набора СЭМ-микроскопии поверхности покрытий двухкомпонентных материалов (цвет онлайн)

Fig. 1. Examples of annotated samples from different datasets: *a* is the sample from a set of weak fluorescence molecular microscopy; *b* is the sample from a set of SEM microscopy of the surface of coatings of two-component materials (color online)

2. Постановка задачи и методология исследования

Метод обнаружения объектов на микроскопических изображениях начинается с создания набора перекрывающихся областей-кандидатов, которые затем подвергаются дальнейшему анализу для выбора подмножества наиболее подходящих областей на основе изученной оценки классификации и с учетом ограничения на перекрытие.

Для создания набора областей-кандидатов применяется алгоритм максимально стабильных экстремальных областей (MSER) к серому изображению. Этот алгоритм определяет экстремальные области как связные компоненты порогового изображения, где интенсивность всех пикселей внутри области ниже порогового значения. Пусть $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ представляют собой потенциальный набор из N экстремальных областей, обнаруженных на изображении.

Выбор подходящих областей для дальнейшего анализа является нетривиальной задачей из-за необходимости учета ограничений на перекрытие и определения подходящих оценок классификации для каждой области. Задача выбора подходящих областей сводится к задаче максимизации суммарной оценки для выбранных областей с учетом ограничений на перекрытие.

3. Вывод при наличии ограничения на перекрытие

Предположим, что каждой области R_i присваивается значение V_i , которое генерируется классификатором и указывает оценку соответствия этой области классу клеток, которые нужно обнаружить. Затем метод выбирает подмножество экстремальных областей таким образом, чтобы сумма оценок выбранных областей была максимальной, при условии, что выбранные области не перекрываются (ограничение на перекрытие).

Для формализации этой задачи оптимизации определяется набор бинарных индикаторных переменных $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, где $y_i = 1$ означает, что область R_i выбрана. Тогда задача

оптимизации состоит в максимизации следующего функционала:

$$F(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \sum_{i=1}^N y_i V_i, \quad (1)$$

где $\mathcal{Y}$ — это множество подмножеств областей, не имеющих перекрытия. Это означает, что выбранные области R_i не пересекаются между собой.

Максимизация функционала (1) является NP-трудной задачей, что означает, что алгоритмы, способные решить эту задачу точно и за разумное время, известны не для всех возможных случаев. NP-трудные задачи включают в себя широкий класс оптимизационных проблем, где вычислительная сложность возрастает экспоненциально с увеличением размера входных данных.

В данном контексте NP-трудность функционала (1) связана с тем, что для каждого подмножества областей нужно проверить все возможные комбинации, чтобы найти наилучшее решение. При увеличении числа областей это становится вычислительно затратной задачей, которая может потребовать значительного времени для выполнения. Однако ее можно выполнить точно и эффективно, используя свойство вложенности пула областей.

Предлагается модель с древовидной структурой, где каждый узел соответствует области, а связи родитель – потомок соответствуют отношению вложенности. Таким образом, пул областей может быть организован в виде набора деревьев (так называемый лес). Затем задача оптимизации (1) переписывается в виде задачи MRF с попарной древовидной структурой для вспомогательных переменных $\mathbf{z}$:

$$F(\mathbf{z}) = \max_{\mathbf{z}} \left(\sum_{i|p(i) \neq 0} W_i(z_i, z_{p(i)}) + \sum_{i|p(i)=0} V_i(z_i) \right), \quad (2)$$

где $p(i)$ отображает область R_i на ее родительскую область (0 для корневых областей в лесу), $W_i(1, 1) = 0$, $W_i(1, 0) = V_i$ и $W_i(0, 1) = -\infty$.

MRF — это статистическая модель, которая используется для моделирования случайных полей, где величины, связанные с узлами графа, представляют случайные переменные [13]. В случае задачи обнаружения объектов на изображениях каждой области изображения соответствует узел в графе, и случайные переменные связаны с решением о выборе или отбрасывании каждой области.

Попарная древовидная структура означает, что узлы графа соединены только соседними узлами по дереву. В данном случае деревья представляют собой древовидную структуру, где каждая область связана с родительской областью (если она есть) и ее дочерними областями.

Переписывание задачи оптимизации (1) в виде задачи MRF с попарной древовидной структурой включает в себя переформулировку функционала таким образом, чтобы он мог быть представлен в виде суммы по всем узлам графа, учитывая взаимодействие между соседними узлами (областями) в соответствии с их древовидной структурой.

Задача оптимизации (2) формулируется как задача выбора наиболее подходящих областей-кандидатов для обнаружения объектов на микроскопических изображениях. Для решения этой задачи предлагается использовать древовидное динамическое программирование. Этот метод позволяет эффективно и точно найти оптимальное решение, учитывая ограничения на перекрытие областей.

Древовидное динамическое программирование основано на принципе разбиения задачи на более мелкие подзадачи и последующем объединении их оптимальных решений для получения оптимального решения исходной задачи.

4. Процесс обучения модели

Метод обучения модели для обнаружения объектов на микроскопических изображениях базируется на машинном обучении, где каждая область изображения оценивается линейным



классификатором. Для получения этих оценок используются данные обучения с точечными аннотациями.

Обучение с использованием бинарной классификации

Простым подходом является обучение бинарного классификатора, например, с использованием алгоритма машины опорных векторов (SVM).

Для начала определим набор данных для обучения. Пусть $\mathbf{X}$ — матрица признаков, где каждая строка представляет собой признаковое описание одной области изображения, а $\mathbf{g}$ — вектор меток, где каждый элемент соответствует метке класса (1 — положительный класс, 0 — отрицательный класс).

В случае обучения SVM каждая область на обучающих изображениях рассматривается отдельно. Пусть n_{ji} обозначает количество пользовательских точек в области j изображения i . Области, у которых $n_{ji} = 1$, относятся к положительному классу, в то время как все остальные области относятся к отрицательному классу.

Обучение SVM заключается в поиске оптимальной гиперплоскости, разделяющей два класса, при этом максимизируется зазор между ними. Модель SVM затем определяет желаемый весовой вектор $\mathbf{w}$, который задает эту разделяющую гиперплоскость.

Структурированное обучение

Более обоснованным подходом является использование структурированной SVM, которая учитывает ограничение на непересекаемость областей. Этот подход позволяет учитывать взаимное расположение областей при обучении модели.

Структурированный метод SVM находит оптимальный весовой вектор $\mathbf{w}$ минимизацией функции потерь $L(\mathbf{w})$, которая включает в себя регуляризацию и максимизацию разделения между классами, а также минимизацию потерь, связанных с непересекающимися областями. Регуляризация используется для предотвращения переобучения модели и улучшения ее обобщающей способности, она заключается в добавлении штрафа за большие значения параметров модели.

Математически этот подход может быть представлен как задача оптимизации. Пусть $\mathbf{w}$ — вектор параметров модели, а $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Q}$ — матрицы признаков и меток соответственно. Тогда задача минимизации функции потерь $L(\mathbf{w})$ записывается следующим образом:

$$\min_{\mathbf{w}} L(\mathbf{w}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \max(0, 1 - q_i \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) + \lambda \|\mathbf{w}\|_2^2,$$

где m — количество обучающих примеров, λ — параметр регуляризации, а $\|\mathbf{w}\|_2$ — норма вектора параметров модели $\mathbf{w}$.

Слагаемое $\lambda \|\mathbf{w}\|_2^2$ штрафует модель за большие значения весовых коэффициентов, что способствует более устойчивой обученной модели.

При этом ограничения на непересекаемость областей могут быть инкорпорированы непосредственно в функцию потерь, что позволяет учитывать взаимное расположение областей при обучении модели. Предположим, что для каждой области R_i у нас есть бинарная переменная y_i , которая равна 1, если область R_i выбрана, и 0 в противном случае. Тогда модифицированная функция потерь может быть записана следующим образом:

$$L_{\text{mod}}(w, q) = L(w) + \alpha \sum_{i=1}^N (1 - q_i) L_{\text{mod}}(w, q),$$

где α — это коэффициент, который регулирует влияние штрафа на нарушение ограничения на пересечение областей, а N — общее количество областей.

Таким образом, метод обучения модели для обнаружения объектов на микроскопических изображениях учитывает как классификационную способность, так и ограничения на перекрытие областей, что позволяет получить более точные результаты.

5. Обсуждение результатов работы и область их применения

В экспериментах использовался вектор признаков f_{ji} , состоящий из различных дескрипторов, включающих размер, форму, цвет (или интенсивность) и информацию о локальном контексте областей.

Этот вектор признаков f_{ji} позволяет представить каждую область изображения численно, учитывая ее характеристики, такие как размер, форма и цвет, а также информацию о ее окружении.

На рис. 2 представлены примеры результатов обнаружения объектов для варианта DIC-микроскопии с различными уровнями зашумленности.

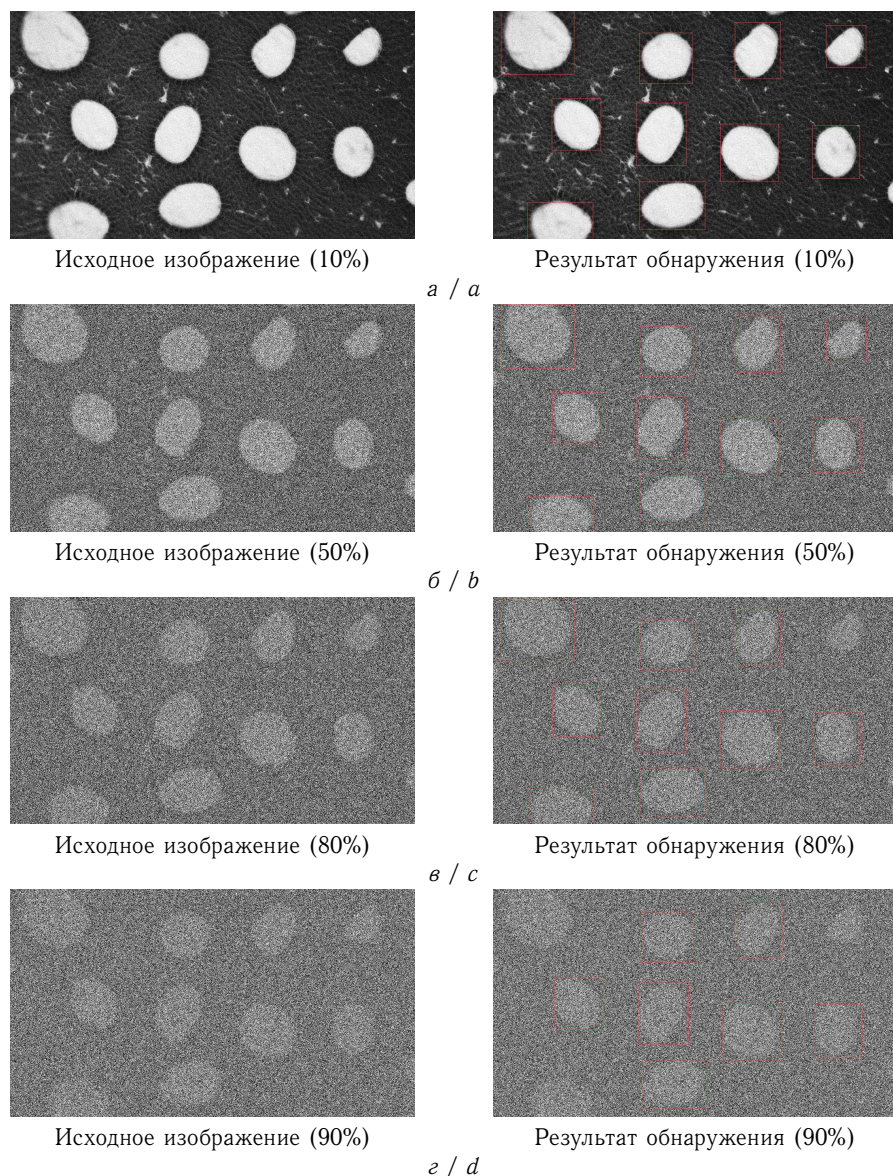


Рис. 2. Результаты обнаружения объектов на микроскопических изображениях с различным уровнем зашумленности: *а* — 10%; *б* — 50%; *в* — 80%; *г* — 90%. Слева представлены исходные изображения, справа — результаты обработки

Fig. 2. The results of detecting objects in microscopic images with different noise levels: *a* — 10%; *b* — 50%; *c* — 80%; *d* — 90%. On the left are the original images, on the right are the results of processing



Каждое изображение в левой части иллюстрирует исходное состояние, а справа — результаты после применения алгоритма. Метод демонстрирует свою эффективность даже при наличии значительного шума, однако при уровне зашумленности 90% наблюдается потеря некоторых экземпляров (рис. 2, *г*).

На рис. 3 показаны результаты обработки изображений СЭМ покрытий двухкомпонентных материалов с различной интенсивностью.

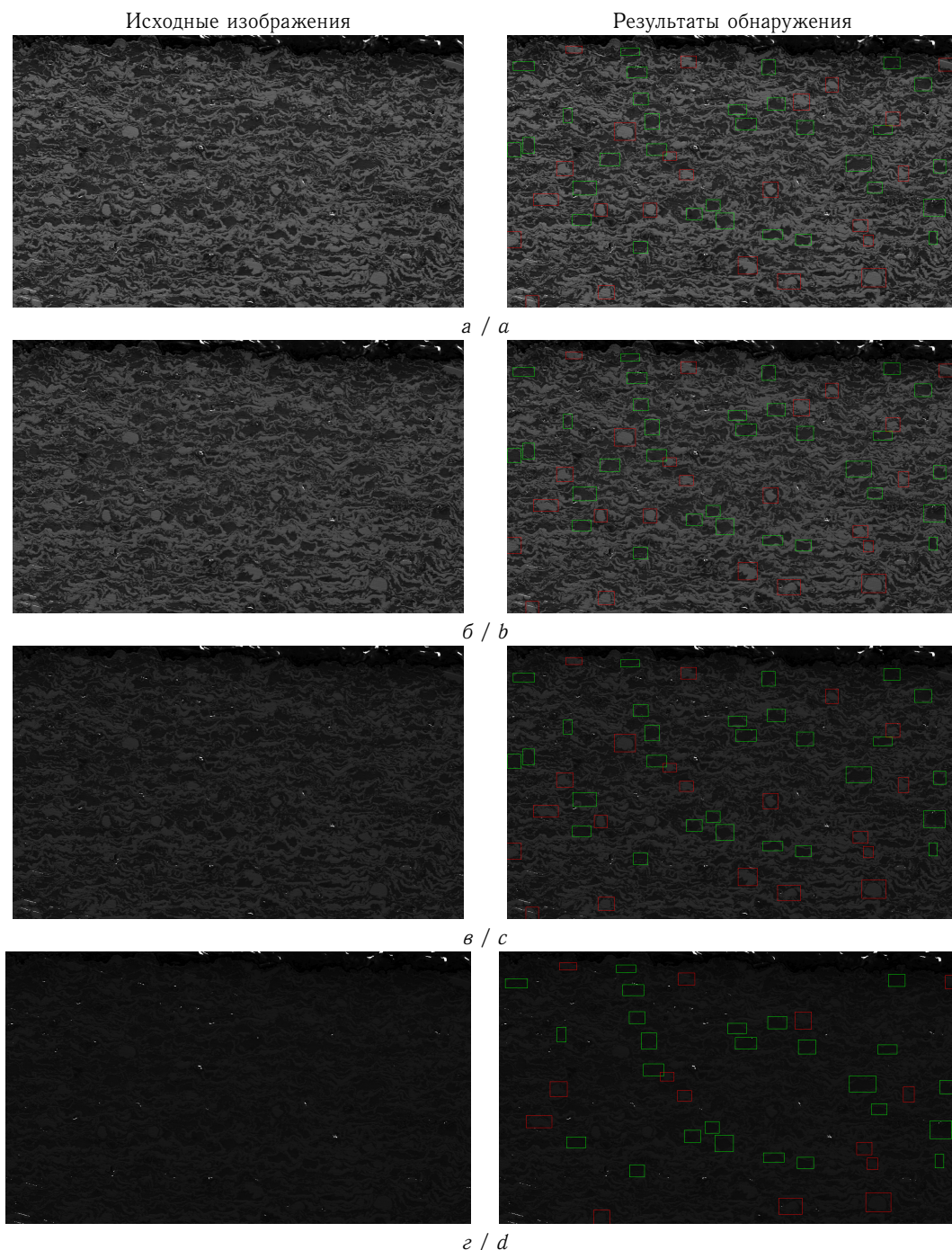


Рис. 3. Результаты обнаружения объектов на изображениях двухкомпонентных покрытий с различным уровнем интенсивности: *а* — 90%; *б* — 80%; *в* — 40%; *г* — 10%. Слева представлены исходные изображения, справа — результаты обработки (цвет онлайн)

Fig. 3. The results of detecting objects in microscopic images with different noise levels: *a* — 90%; *b* — 80%; *c* — 40%; *d* — 10%. On the left are the original images, on the right are the results of processing (color online)



Здесь отображены объекты двух групп: частицы никеля, которые обведены зеленым цветом, и частицы алюминия, обведенные красным цветом. В данном примере разработанный алгоритм применялся для поиска и подсчета нерасплавленных частиц компонентов. Эти результаты подтверждают, что разработанный алгоритм успешно классифицирует объекты с различной плотностью и размерами. Также алгоритм может быть адаптирован для работы с различными материалами путем изменения параметров обнаруживаемых объектов (ширина, высота, цвет и т. д.). С интенсивностью изображения менее 40% наблюдается потеря некоторых экземпляров из поля видимости алгоритма. Метод успешно обнаруживает отдельные объекты в простых случаях, кластеры обычно отбрасываются, так как кандидатские области в них не соответствуют отдельным объектам.

Алгоритм чувствителен к форме объектов: для частиц, чья форма сильно отличается от круговой, его точность может снижаться. Тем не менее, алгоритм изначально разрабатывался для поиска объектов, схожих с круговыми формами. Для поиска объектов с более сложной или специфичной геометрией может потребоваться дополнительное обучение алгоритма, используя наборы данных с соответствующими объектами. Неправильные кандидатские области увеличивают сложность обучения.

В табл. 1 и 2 представлено сравнение результатов разработанного алгоритма с методами, основанными на пороговом значении и SIFT (Scale-Invariant Feature Transform), на наборах данных синтетической микроскопии и DIC-микроскопии соответственно.

Таблица 1 / Table 1

Сравнение результатов разработанного алгоритма с другими методами
на наборе данных синтетической микроскопии
Comparison of the results of the developed algorithm with other methods
based on a set of synthetic microscopy data

Метод	Точность	Полнота	F-мера
Метод на основе порогового значения	0.82	0.90	0.86
Разработанный метод	0.89	0.92	0.87
Метод SIFT	0.86	0.85	0.86

Таблица 2 / Table 2

Сравнение результатов разработанного алгоритма с другими методами
на наборе данных DIC-микроскопии
Comparison of the results of the developed algorithm with other methods
based on the DIC microscopy dataset

Метод	Точность	Полнота	F-мера
Метод на основе порогового значения	0.83	0.89	0.84
Разработанный метод	0.90	0.92	0.88
Метод SIFT	0.88	0.90	0.85

Данные алгоритмы, как и разработанный алгоритм, были реализованы на языке программирования Java. Для реализации алгоритмов были использованы такие библиотеки Java, как OpenCV, JavaCV и JAI. В частности, для метода SIFT был использован модуль OpenCV, который позволяет идентифицировать и сопоставлять ключевые точки на изображениях, устойчивые к масштабированию и вращению. OpenCV также использовалась для выполнения базовых операций по обработке изображений, таких как фильтрация, пороговая обработка и морфологическая трансформация. JavaCV использовалась для взаимодействия с алгоритмами компьютерного зрения и для реализации методов пороговой обработки. Сравнение было проведено по классическим мерам, используемым в машинном обучении [14].

В тестовой выборке данных использовались наборы данных синтетической микроскопии и DIC-микроскопии, что в сумме составило 90 изображений. Для тестовой выборки были определены статистические меры, такие как точность, полнота и F-мера. Точность измеря-



ет долю правильно обнаруженных объектов среди всех объектов, которые были отмечены алгоритмом как обнаруженные. Полнота измеряет долю объектов, которые были правильно обнаружены, среди всех объектов, реально присутствующих на изображении. F-мера является гармоническим средним между точностью и полнотой, что позволяет получить сбалансированную оценку эффективности алгоритма. Экспериментальные результаты показывают значительное улучшение точности и полноты по сравнению с другими методами. Однако необходимо отметить, что производительность на некоторых наборах данных может быть затронута неточными метками классов или другими факторами.

Таким образом, предложенный метод демонстрирует хорошие результаты в обнаружении и сегментации частиц на изображениях микроскопии, особенно на наборах данных, где перекрытие объектов встречается редко.

Результаты исследования вносят значительный вклад в различные области применения:

- автоматический анализ биомедицинских образцов, таких как ткани или клетки;
- контроль качества продукции в различных отраслях промышленности, таких как фармацевтика, сельское хозяйство и производство электроники;
- исследования в различных научных областях, таких как биология, физика и материаловедение, ускоряя процесс анализа данных и обнаружения интересных объектов.

Заключение

Представленный метод обнаружения объектов на изображениях микроскопии, применяемый для обнаружения частиц, показывает хорошие результаты в различных сценариях. Экспериментальные данные демонстрируют его устойчивость к изменениям интенсивности изображения, плотности частиц и их размерам, что было подтверждено на различных наборах данных, включая синтетические изображения и данные DIC-микроскопии. Метод использует экстремальные области в качестве кандидатов для обнаружения и оценивает их с помощью обученных параметров. Встроенное ограничение на перекрытие позволяет эффективно обрабатывать кластеризацию частиц, что продемонстрировано в результатах на изображениях с высокой плотностью объектов.

Однако основным ограничением метода является необходимость наличия хотя бы одной кандидатской области, соответствующей каждому экземпляру объекта интереса. Это предположение может нарушаться в случае перекрытия объектов, что приводит к низкой производительности в наборах данных с существенным перекрытием экземпляров. Кроме того, улучшение процедур определения кандидатских областей на основе точечных аннотаций может повысить эффективность метода в дальнейших исследованиях.

Список литературы

1. Puchkov E. Image analysis in microbiology: A review // Journal of Computer and Communications. 2016. Vol. 4, iss. 15. P. 8–32. <https://doi.org/10.4236/jcc.2016.415002>
2. Spahn C., Gomez-de-Mariscal E., Laine R. F., Pereira P. M., Chamier L., Conduit M., Pinho M. G., Jacquemet G., Holden S., Heilemann M., Henriques R. DeepBacs for multi-task bacterial image analysis using open-source deep learning approaches // Communications Biology. 2022. Iss. 5. Art. 688. <https://doi.org/10.1038/s42003-022-03634-z>
3. Su P.-T., Liao C.-T., Roan J.-R., Wang S.-H., Chiou A., Syu W.-J. Bacterial colony from two-dimensional division to three-dimensional development // PloS ONE. 2023. Vol. 7, iss. 11. Art. e48098. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0048098>
4. Замятин Д. А., Поротников А. В., Шапова Ю. В., Вотяков С. Л. JPD-анализ микроскопических изображений в исследовании структурно-химической неоднородности зерен природного циркона // Минералы: строение, свойства, методы исследования. 2014. Вып. 6. С. 26–27. EDN: YMSLCU
5. Полищук С. В., Смехун Я. А. Анализ электронно-микроскопических изображений с использованием спектральных характеристик // Международный научно-исследовательский журнал. 2014. Вып. 4–1 (23). С. 65–67. EDN: SCQPCB
6. Беляева Л. А., Шурыгина О. В., Юхимец С. Н., Петрова А. А., Миронов С. Ю., Ратенкова Н. В., Кулакова О. В., Бовтунова С. С. Автоматизированный и ручной анализ спермы: сравнительная



- характеристика // Морфологические ведомости. 2022. Т. 30, вып. 4. С. 9–15. [https://doi.org/10.20340/mv-mn.2022.30\(4\).704](https://doi.org/10.20340/mv-mn.2022.30(4).704), EDN: JGHS AW
7. Wei X., Liu Yo., Song Q., Zou J., Wen Zh., Li J., Jie D. Microscopic hyperspectral imaging and an improved detection model based detection of *Mycogone perniciosa* chlamydospore in soil // *European Journal of Agronomy*. 2024. Vol. 152. Art. 127007. <https://doi.org/10.1016/j.eja.2023.127007>
 8. Khan S., Sajjad M., Abbas N., Escorcia-Gutierrez J., Gamarra M., Khan M. Efficient leukocytes detection and classification in microscopic blood images using convolutional neural network coupled with a dual attention network // *Computers in Biology and Medicine*. 2024. Vol. 174. Art. 108146. <https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2024.108146>
 9. Han Zh., Huang H., Lu D., Fan Q., Ma Ch., Chen X., Gu Q., Chen Q. One-stage and lightweight CNN detection approach with attention: Application to WBC detection of microscopic images // *Computers in Biology and Medicine*. 2023. Vol. 154. Art. 106606. <https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2023.106606>
 10. Ван Ц. И., Воронов В. И. Анализ результатов компьютерной томографии головного мозга с помощью сверточной нейронной сети // *DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов*. 2020. Т. 10, вып. 1. С. 32–40. EDN: OFBSS Y
 11. Sun M., Wang W., Zhu X., Liu J. Reparameterizing and dynamically quantizing image features for image generation // *Pattern Recognition*. 2024. Vol. 146. Art. 109962. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2023.109962>
 12. Pawlowski J., Majchrowska S., Zhu X., Golan T. Generation of microbial colonies dataset with deep learning style transfer // *Scientific Reports*. 2022. Vol. 12. Art. 5212. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-09264-z>
 13. Panic B., Borovinsek M., Vesenjajk M., Oman S., Nagode M. A guide to unsupervised image segmentation of mCT-scanned cellular metals with mixture modelling and Markov random fields // *Materials and Design*. 2024. Vol. 239. Art. 112750. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2024.112750>
 14. Franti P., Mariescu-Istodor R. Soft precision and recall // *Pattern Recognition Letters*. 2023. Vol. 167. P. 115–121. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2023.02.005>

References

1. Puchkov E. Image Analysis in Microbiology: A Review. *Journal of Computer and Communications*, 2016, vol. 4, iss. 15, pp. 8–32. <https://doi.org/10.4236/jcc.2016.415002>
2. Spahn C., Gomez-de-Mariscal E., Laine R. F., Pereira P. M., Chamier L., Conduit M., Pinho M. G., Jacquemet G., Holden S., Heilemann M., Henriques R. DeepBacs for multi-task bacterial image analysis using open-source deep learning approaches. *Communications Biology*, 2022, iss. 5, art. 688. <https://doi.org/10.1038/s42003-022-03634-z>
3. Su P.-T., Liao C.-T., Roan J.-R., Wang S.-H., Chiou A., Syu W.-J. Bacterial colony from two-dimensional division to three-dimensional development. *PloS ONE*, 2023, vol. 7, iss. 11, art. e48098. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0048098>
4. Zamyatin D. A., Porotnikov A. V., Shchapova Yu. V., Votyakov S. L. JPD-analysis of microscopic images in the study of structural and chemical heterogeneity of natural zircon grains. *Mineraly: stroenie, svoystva, metody issledovaniya* [Mineraly: Structure, Properties, Research Methods], 2014, iss. 6, pp. 26–27 (in Russian). EDN: YMSLCU
5. Polishchuk S. V., Smekhun Ya. A. Electron microscopic images analysis using spectral characteristics. *Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatel'skiy zhurnal* [International Scientific Research Journal], 2014, iss. 4–1 (23), pp. 65–67 (in Russian). EDN: SCQPCB
6. Belyaeva L. A., Shurygina O. V., Yukhimets S. N., Petrova A. A., Mironov S. Yu., Ratenkova N. V., Kulakova O. V., Bovtunova S. S. Automated and manual semen analysis: The comparative characteristics. *Morphological Newsletter*, 2022, vol. 30, iss. 4, pp. 9–15 (in Russian). [https://doi.org/10.20340/mv-mn.2022.30\(4\).704](https://doi.org/10.20340/mv-mn.2022.30(4).704), EDN: JGHS AW
7. Wei X., Liu Yo., Song Q., Zou J., Wen Zh., Li J., Jie D. Microscopic hyperspectral imaging and an improved detection model based detection of *Mycogone perniciosa* chlamydospore in soil. *European Journal of Agronomy*, 2024, vol. 152, art. 127007. <https://doi.org/10.1016/j.eja.2023.127007>
8. Khan S., Sajjad M., Abbas N., Escorcia-Gutierrez J., Gamarra M., Khan M. Efficient leukocytes detection and classification in microscopic blood images using convolutional neural network coupled with a dual attention network. *Computers in Biology and Medicine*, 2024, vol. 174, art. 108146. <https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2024.108146>
9. Han Zh., Huang H., Lu D., Fan Q., Ma Ch., Chen X., Gu Q., Chen Q. One-stage and lightweight CNN detection approach with attention: Application to WBC detection of microscopic images.



- Computers in Biology and Medicine*, 2023, vol. 154, art. 106606. <https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2023.106606>
10. Wang Ts. I., Voronov V. I. Analysis of the results of computed tomography of the brain using a convolutional neural network. *DSPA: Voprosy primeneniya tsifrovoy obrabotki signalov* [DSPA: Issues of Digital Signal Processing Application], 2020, vol. 10, iss. 1, pp. 32–40 (in Russian). EDN: OFBSSY
 11. Sun M., Wang W., Zhu X., Liu J. Reparameterizing and dynamically quantizing image features for image generation. *Pattern Recognition*, 2024, vol. 146, art. 109962. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2023.109962>
 12. Pawlowski J., Majchrowska S., Zhu X., Golan T. Generation of microbial colonies dataset with deep learning style transfer. *Scientific Reports*, 2022, vol. 12, art. 5212. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-09264-z>
 13. Panic B., Borovinsek M., Vesenjsek M., Oman S., Nagode M. A guide to unsupervised image segmentation of mCT-scanned cellular metals with mixture modelling and Markov random fields. *Materials and Design*, 2024, vol. 239, art. 112750. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2024.112750>
 14. Franti P., Mariescu-Istodor R. Soft precision and recall. *Pattern Recognition Letters*, 2023, vol. 167, pp. 115–121. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2023.02.005>

Поступила в редакцию / Received 10.04.2024

Принята к публикации / Accepted 15.11.2024

Опубликована / Published 28.02.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 128–139
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 128–139
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-128-139>, EDN: ULANGK

Научная статья

УДК 517.98

Метод формирования оптимальной маршрутной матрицы сетей массового обслуживания с групповым обслуживанием требований

Н. В. Сергеева^{1✉}, М. Пагано², И. Е. Тананко¹, Е. П. Станкевич¹

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²Пизанский университет, Италия, 56122, г. Пиза, ул. Дж. Карузо, д. 16

Сергеева Надежда Викторовна, старший преподаватель кафедры системного анализа и автоматического управления, sergeevanv@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6125-7078>, SPIN: 3960-0429, AuthorID: 785093

Пагано Микеле, PhD, профессор департамента информационной инженерии, michele.pagano@unipi.it, <https://orcid.org/0000-0003-1706-4994>

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой системного анализа и автоматического управления, tanankoie@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8960-9709>, SPIN: 8132-3706, AuthorID: 447915

Станкевич Елена Петровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, stankevichelena@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0630-4550>, SPIN: 4119-6338, AuthorID: 684128

Аннотация. Рассматривается открытая сеть массового обслуживания большой размерности. В сеть обслуживания из источника поступает пуассоновский поток требований одного класса. Связь между системами сети массового обслуживания определяется маршрутной матрицей. Каждая система сети состоит из одного прибора и очереди бесконечной длины. Прибор обслуживает требования только группами заданного размера. Длительность обслуживания группы требований является экспоненциально распределенной случайной величиной. После окончания обслуживания требования из обслуженной группы маршрутизируются между системами обслуживания по одному независимо друг от друга. Сеть обслуживания построена таким образом, что число систем обслуживания, в которые могут перейти требования после обслуживания группы требований, намного больше размера этой группы. Предполагается, что вероятности переходов требований между системами сети обслуживания сравнимы. Предлагается метод формирования оптимальной маршрутной матрицы, которая обеспечивает минимальные значения математических ожиданий длительностей пребывания требований в системах сети обслуживания. Приводятся условие для относительных интенсивностей потоков, при котором топология сети массового обслуживания является радиальной (звездообразной), и выражения для вычисления оптимальных интенсивностей входящих потоков требований в системы сети обслуживания. Приведены примеры формирования оптимальной маршрутной матрицы и применения предложенного метода формирования маршрутной матрицы для коррекции потоков в сети массового обслуживания с изменяющимся числом связей между системами сети обслуживания.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, групповое обслуживание, оптимальная маршрутная матрица

Благодарности: Данное исследование частично финансировалось Министерством образования и исследований Италии (MIUR) в рамках проекта FoReLab (Departments of Excellence) и Пизанским университетом в рамках проекта PRA_2022_64 “hOlistic Sustainable Management of distributed softWARE systems (OSMWARE)”.



Для цитирования: Сергеева Н. В., Пагано М., Тананко И. Е., Станкевич Е. П. Метод формирования оптимальной маршрутной матрицы сетей массового обслуживания с групповым обслуживанием требований // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 128–139. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-128-139>, EDN: ULANGK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

A novel method for generating the optimal routing matrix of queuing networks with batch service

N. V. Sergeeva^{1✉}, M. Pagano², I. E. Tananko¹, E. P. Stankevich¹

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

²University of Pisa, Via G. Caruso 16, 56122 Pisa, Italy

Nadezhda V. Sergeeva, sergeevanv@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-6125-7078>, SPIN: 3960-0429, AuthorID: 785093

Michele Pagano, michele.pagano@unipi.it, <https://orcid.org/0000-0003-1706-4994>,

Igor E. Tananko, tanankoie@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-8960-9709>, SPIN: 8132-3706, AuthorID: 447915

Elena P. Stankevich, stankevichelena@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0630-4550>, SPIN: 4119-6338, AuthorID: 684128

Abstract. In this paper, we consider a large-scale open queuing network. The arrival process in the queueing network is Poissonian. Customer transitions between nodes are described by the routing matrix. Each node consists of a single server and an infinite waiting queue. Customers are served as a unique batch of a given size with exponentially distributed service time. After the completion of service, customers are routed between nodes one at a time, independently of each other. We assume that, at any node, the number of destinations is much larger than the batch size. We also assume that the transition probabilities of customers between nodes are comparable. In this paper, we propose a method for generating the optimal routing matrix that provides the minimum average sojourn times in each node. We also provide a condition for relative arrival rates, under which the queuing network topology is radial (star-shaped), and expressions for optimal input rates to nodes. Finally, examples of the optimal routing matrix for different values of the overall input rate and in case of link failures are presented.

Keywords: queuing networks, batch service, optimal routing matrix

Acknowledgements: This research was partially funded by the Italian Ministry of Education and Research (MIUR) in the framework of the FoReLab project (Departments of Excellence) and by the University of Pisa in the framework of the PRA_2022_64 “hOlistic Sustainable Management of distributed softWARE systems (OSMWARE)” project.

For citation: Sergeeva N. V., Pagano M., Tananko I. E., Stankevich E. P. A novel method for generating the optimal routing matrix of queuing networks with batch service. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 128–139 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-128-139>, EDN: ULANGK

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Сети массового обслуживания [1–3] часто используются в качестве математических моделей систем передачи данных, информационно-вычислительных систем, систем распределенной информации, производственных, транспортных и многих других систем.



Для решения задач оптимизации и управления этими системами могут быть использованы системы и сети массового обслуживания с управлением [4–6].

В настоящее время все более широкое распространение получают системы с групповой обработкой, что позволяет обслуживать существенно больше объектов в единицу времени. При этом возникают задачи определения оптимального количества обрабатываемых объектов, оптимального времени пребывания объектов в системе, а также оптимальной загрузки системы [7–12]. Если система имеет сетевую структуру, то сложность задач анализа, управления и оптимизации многократно возрастает [13–18].

Задачи минимизации математического ожидания длительности пребывания требований в системе решены в [7, 9, 14, 18]. В работе [7] рассматривается задача формирования групп требований со сравнимыми длительностями обработки таким образом, чтобы минимизировать математическое ожидание длительности пребывания требований в системе с одним прибором и с групповым обслуживанием на долгосрочном интервале времени. Предполагается, что распределение длительности обслуживания всей группы равно распределению, полученному для требования с наибольшим математическим ожиданием длительности обслуживания в группе. Для тандемной сети массового обслуживания [14], используемой в качестве модели беспроводной сенсорной сети, определена оптимальная стратегия распределения интенсивностей обслуживания среди систем, которая минимизирует математическое ожидание длительности пребывания требований в сети обслуживания. Авторы [9] для модели последовательности станций транспортной системы с детерминированным потоком транспортных средств, перевозящих группы пассажиров между станциями, и пуассоновским входящим потоком пассажиров на станции показали, что сокращение времени пребывания пассажиров во всей системе возможно только за счет увеличения коэффициента использования предшествующей станции по сравнению с текущей станцией. В работе [18] для замкнутой сети массового обслуживания с несколькими параллельными системами, двумя классами требований и групповым обслуживанием определено выражение для оптимального размера обслуживаемых групп, при котором достигается максимум пропускной способности рассматриваемой сети обслуживания.

Поиску оптимального размера обслуживаемых групп требований посвящены работы [10, 12, 13]. В работе [13] с использованием анализа сетей массового обслуживания и генетического алгоритма решена задача оптимизации производственной системы, а именно, найден оптимальный размер партий. В [10] для одноприборной системы массового обслуживания с групповым обслуживанием получено необходимое и достаточное условие оптимального ограничения на размер группы обслуживаемых требований, которое минимизирует математическое ожидание длительности пребывания требований в очереди, и предлагается алгоритм поиска оптимального ограничения на размер группы обслуживаемых требований за полиномиальное время. В работе [12] для системы с групповым обслуживанием решается задача нахождения оптимального размера обслуживаемой группы требований, при которой эксплуатационные расходы системы минимальны.

Существенное влияние на характеристики систем массового обслуживания оказывают дисциплины группирования и обслуживания требований [11, 15]. Например, в [15] рассматривается система обслуживания, состоящая из параллельных очередей и одного прибора. Требования разных классов не могут одновременно обслуживаться в одной группе и ожидать обслуживания в одной очереди. Определяются стратегия выбора на обслуживание групп требований, которая максимизирует среднюю пропускную способность системы для случая бесконечного размера очередей и стратегия, которая минимизирует средние потери требований для случая ограниченного размера очередей. В работе [11] изучается стратегия присоединения требований к формируемой для обслуживания группе фиксированного размера в системе массового обслуживания с одним прибором и пуассоновским входящим потоком. Решение о том, присоединяться к группе или нет, зависит от размера вознаграждения требованию за присоединение и от затрат на его пребывание в очереди.

Другие задачи оптимизации систем и сетей массового обслуживания с групповым обслуживанием требований приведены в [16, 17]. В работе [16] автоматизированная система



обработки материалов моделируется открытой тандемной сетью массового обслуживания с блокировками. Предлагается итерационный алгоритм минимизации общего числа мест ожидания в очередях систем обслуживания при средней длительности пребывания групп требований в сети не выше заданного значения. В работе [17] представлена модель оценки производительности предприятия по производству полупроводников в виде сети массового обслуживания с учетом конкретной конфигурации предприятия. Построена процедура оптимизации для поиска наилучшей конфигурации.

Данная работа основана на результатах, полученных в работах [19–21], и состоит из четырех разделов. В первом разделе приведено описание структуры и функционирования сети массового обслуживания с групповым обслуживанием. Во втором разделе описан метод вычисления стационарного распределения вероятностей состояний рассматриваемой сети с групповым обслуживанием, которое эквивалентно стационарному распределению процесса размножения и гибели. Также приведены выражения для вычисления математического ожидания длительностей пребывания требований в системах, оптимальных интенсивностей входящих потоков требований и относительных интенсивностей потоков. В третьем разделе предложен метод формирования оптимальных маршрутных матриц, при которых математическое ожидание длительностей пребывания требований в системах минимально. В четвертом разделе приведены результаты численных экспериментов.

1. Описание сети массового обслуживания

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с одним классом требований и непрерывным временем, состоящая из L одноприборных систем массового обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, с очередью бесконечной длины. Входящий в сеть обслуживания из источника S_0 поток требований является пуассоновским с интенсивностью λ_0 . Связи между системами сети массового обслуживания и источником определяются матрицей смежности $W = (w_{ij})$, $i, j = 0, 1, \dots, L$, в которой $w_{ij} = 1$, если имеется связь из S_i в S_j , и $w_{ij} = 0$, если такой связи нет. Матрице W поставим в соответствие множество Θ^a маршрутных матриц $\Theta = (\theta_{ij})$, таких, что $\theta_{ij} \geq 0$, если $w_{ij} = 1$, и $\theta_{ij} = 0$, если $w_{ij} = 0$, $i, j = 0, 1, \dots, L$, с условием $\sum_{j=0}^L \theta_{ij} = 1$ для всех $i = 0, 1, \dots, L$.

Прибор системы S_i , $i = 1, \dots, L$, обслуживает требования группами размером $b_i \geq 0$. Длительность обслуживания группы является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром μ_i . Прибор начинает обслуживать группу требований только в том случае, если в очереди системы S_i находится как минимум b_i требований, иначе прибор этой системы будет простаивать до тех пор, пока в очередь не поступит, по крайней мере, b_i требований. После завершения обслуживания в системе S_i каждое требование независимо от остальных требований группы переходит в систему S_j с вероятностью θ_{ij} или в источник S_0 с вероятностью θ_{i0} , $i, j = 1, \dots, L$.

Полагаем, что в каждой системе S_i сети размер обслуживаемой группы требований b_i значительно меньше числа систем S_j , в которые могут перейти требования после завершения обслуживания в системе S_i , а также что вероятности переходов требований в смежные системы сравнимы. Следовательно, одновременное поступление двух или более требований в систему имеет вероятность, близкую к нулю, поэтому входящий поток в каждую систему обслуживания аппроксимируем пуассоновским потоком требований с интенсивностью, зависящей от λ_0 и маршрутной матрицы Θ .

Состояние сети обслуживания обозначим $s = (s_i)$, где s_i — число требований, находящихся в системе S_i , $i = 1, \dots, L$. Обозначим также $\bar{u} = (\bar{u}_i)$, где $\bar{u}_i$ — математическое ожидание длительности пребывания требований в системе S_i , $i = 1, \dots, L$.

Целью данной работы является разработка алгоритма формирования маршрутной матрицы, которая обеспечивает минимальные значения математического ожидания длительностей пребывания требований в системах сети обслуживания.

2. Анализ сети массового обслуживания с групповым обслуживанием

В данной постановке сеть массового обслуживания будем рассматривать как сеть Джексона. Потоки требований в системы обслуживания этой сети определим из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\lambda_j = \lambda_0 + \sum_{i=1}^L \lambda_i \theta_{ij}, \quad j = 1, \dots, L.$$

Далее отдельно рассмотрим систему обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, с интенсивностью потока λ_i , интенсивностью обслуживания μ_i групп требований, размером b_i .

Уравнения равновесия будут иметь вид [21]

$$\begin{cases} \lambda_i \pi_i(0) = \mu_i \pi_i(b_i), \\ \lambda_i \pi_i(n) = \lambda_i \pi_i(n-1) + \mu_i \pi_i(b_i + n), & 1 \leq n \leq b_i - 1, \\ (\lambda_i + \mu_i) \pi_i(n) = \lambda_i \pi_i(n-1) + \mu_i \pi_i(b_i + n), & n \geq b_i, \end{cases} \quad (1)$$

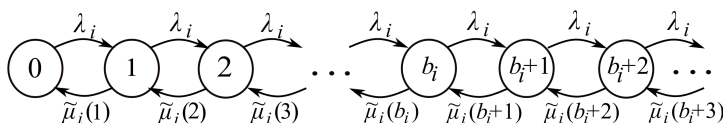
где $\pi_i(n)$ — стационарные вероятности состояний.

Коэффициент использования системы S_i определяется выражением

$$\psi_i = \frac{\lambda_i}{b_i \mu_i}. \quad (2)$$

Система S_i функционирует в стационарном режиме, если $\psi_i < 1$.

Эволюцию системы S_i можно описать с помощью процесса размножения и гибели [21], представленном на рисунке.



Процесс размножения и гибели
Figure. The birth-death process

В этом случае стационарные вероятности определяются формулами [2]

$$\pi_i(k) = \pi_i(0) \prod_{n=1}^k \frac{\lambda_i}{\tilde{\mu}_i(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где

$$\pi_i(0) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=1}^k \frac{\lambda_i}{\tilde{\mu}_i(n)} \right)^{-1}, \quad (4)$$

а интенсивности $\tilde{\mu}_i(n)$ имеют вид [21]

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_i(n) = \lambda_i - \mu_i \frac{\lambda_i^{b_i}}{\tilde{\mu}_i(n+1) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}_i(n+b_i)}, & 1 \leq n \leq b_i - 1, \\ \tilde{\mu}_i(n) = \lambda_i + \mu_i - \mu_i \frac{\lambda_i^{b_i}}{\tilde{\mu}_i(n+1) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}_i(n+b_i)}, & n \geq b_i. \end{cases} \quad (5)$$

Используя стационарные вероятности (3), (4), в работе [19] была получена формула для математического ожидания длительности пребывания требования в системе в виде

$$\bar{u}_i(\lambda_i) = \frac{b_i - 1}{2\lambda_i} + \frac{1}{M_i - \lambda_i}, \quad (6)$$



где $M_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_i(n)$ – корень уравнения

$$M_i^{b_i+1} - (\lambda_i + \mu_i)M_i^{b_i} + \lambda_i^{b_i}\mu_i = 0,$$

принадлежащий интервалу

$$\left(\frac{b_i(\lambda_i + \mu_i)}{b_i + 1}, \frac{(\lambda_i + \mu_i)^{b_i+1} - \lambda_i^{b_i}\mu_i}{(\lambda_i + \mu_i)^{b_i}} \right).$$

Далее в статье [20] было доказано, что (6) достигает минимального значения в некотором λ_i^* при фиксированном значении b_i и μ_i , причем это значение единственно

$$\bar{u}_i^* = \bar{u}_i(\lambda_i^*) = \min_{\lambda_i} \bar{u}(\lambda_i).$$

Также в работе [20] было получено выражение для вычисления приближенных значений оптимальных интенсивностей потоков в системы

$$\lambda_i^* = \mu_i \frac{1 - (1 + \alpha/b_i)^{-b_i}}{\alpha/b_i}, \quad (7)$$

где α – корень уравнения

$$e^\alpha - (\alpha + 3) = 0.$$

Определив оптимальные значения интенсивностей λ_i^* по формуле (7), можно вычислить оптимальные относительные интенсивности потоков

$$\omega_i^*(\lambda_0) = \frac{\lambda_i^*}{\lambda_0 + \sum_{j=1}^L \lambda_j^*}, \quad i = 0, \dots, L. \quad (8)$$

Заметим, что в стационарном режиме функционирования сети массового обслуживания относительная интенсивность потока не может быть больше суммы относительных интенсивностей потоков всех других систем обслуживания сети, включая источник требований, т. е.

$$\omega_i \leq \sum_{j=0}^L \omega_j - \omega_i, \quad i = 0, \dots, L. \quad (9)$$

Учитывая равенство $\sum_{j=0}^L \omega_j = 1$, соотношение (9) может быть представлено в виде $\omega_i \leq 1 - \omega_i$, $i = 0, \dots, L$. Следовательно,

$$\max_{i=0, \dots, L} \omega_i \leq \frac{1}{2}. \quad (10)$$

В случае, когда (10) имеет вид равенства $\omega_0 = 1/2$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^L \omega_i = \frac{1}{2},$$

то в матрице Θ сети обслуживания отличны от нуля только элементы нулевой строки и нулевого столбца. При этом все элементы нулевого столбца равны 1 за исключением $\theta_{00} = 0$. Топология такой сети определяет открытую сеть параллельных систем массового обслуживания. Интенсивность входящего потока в такую сеть определяется равенством

$$\lambda_0 = \sum_{j=1}^L \lambda_j^*.$$

Если же для некоторой системы S_l , $l \neq 0$, относительная интенсивность $\omega_l = 1/2$, то сеть массового обслуживания будет иметь радиальную (звездообразную) топологию с центральной системой S_l .



3. Метод формирования маршрутных матриц

Задача оптимизации состоит в нахождении маршрутной матрицы Θ^* , которая для заданного вектора относительных интенсивностей потоков ω^a обеспечивает вектор $\bar{u}^* = (\bar{u}_i^*)$, $i = 1, \dots, L$, и удовлетворяет условию

$$\omega^a \Theta^* = \omega^a, \quad \sum_{i=0}^L \omega^a = 1. \quad (11)$$

Обозначим R — число ненулевых элементов в матрице смежности W . Если $R = L + 1$ — минимальное значение, которое может принять число R , то сеть массового обслуживания будет иметь кольцевую топологию, в которой $\theta_{i-1,i} = 1$, $i = 1, \dots, L$, и $\theta_{L,0} = 1$. Остальные элементы маршрутной матрицы Θ равны нулю. В этом случае $\omega_i = 1/(L + 1)$, $i = 0, 1, \dots, L$. Сеть массового обслуживания с полносвязной топологией имеет максимально возможное число $R = L(L + 1)$ ненулевых элементов матрицы Θ . Если система уравнений (11) совместна и число неизвестных $R > 2(L + 1)$, то такая система в общем случае имеет бесконечное число решений.

Для нахождения допустимого решения системы уравнений (11) воспользуемся методом градиентного спуска. Введем целевую функцию для заданного вектора ω^a и матрицы $\Theta \in \mathcal{A}_W$

$$V(\Theta) = \sum_{i=0}^L \left(\omega_i^a - \sum_{j=0}^L \omega_j^a \theta_{ji} \right)^2.$$

Данная функция является выпуклой на выпуклом множестве $\mathcal{A}_W$.

Тогда определим задачу оптимизации:

$$V(\Theta) \rightarrow \min_{\Theta \in \mathcal{A}_W}$$

при ограничениях:

$$\theta_{ij} = \begin{cases} \theta_{ij}, & 0 \leq \theta_{ij} \leq 1, & w_{ij} = 1, \\ 0, & w_{ij} = 0, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, L,$$

$$\sum_{j=0}^L \theta_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \dots, L.$$

Движение в направлении наискорейшего спуска определяется выражением

$$\Theta^{(k+1)} = \Theta^{(k)} - \gamma^{(k)} \nabla V(\Theta^{(k)}),$$

где направление спуска задается антиградиентом $-\nabla V(\Theta^{(k)})$, γ — скорость градиентного спуска, $k = 0, 1, \dots$ — шаг итерации, $\Theta^{(0)}$ — начальная маршрутная матрица, для которой

$$\theta_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{k=0}^L w_{ik}}, & w_{ij} = 1, \\ 0, & w_{ij} = 0, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots, L.$$

Приближенным значением Θ^* будем считать маршрутную матрицу $\Theta^{(\cdot)} \in \mathcal{A}_W$, для которой $V(\Theta^{(\cdot)}) \leq \varepsilon$, где константа $\varepsilon > 0$ определяет точность решения.



4. Численные примеры

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания, состоящую из $L = 5$ систем массового обслуживания. Вектор интенсивностей обслуживания в системах сети равен $\mu = (1; 1.2; 1.3; 0.9; 1.1)$, вектор размеров групп требований $b = (3; 4; 3; 2; 3)$, начальная маршрутная матрица

$$\Theta^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 \\ 0.3333 & 0 & 0.3334 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 0.3334 & 0 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0.3334 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0 & 0.3333 & 0 & 0 & 0.3334 \\ 0.3333 & 0 & 0.3333 & 0.3334 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть интенсивность потока в сеть $\lambda_0 = 0.02$. Используя выражение (7), получим вектор $\lambda = (0.0200; 1.4046; 2.3002; 1.8260; 0.8065; 1.5450)$. Тогда относительные интенсивности потоков будут $\omega = (0.0025; 0.1777; 0.2911; 0.2311; 0.1021; 0.1955)$, а оптимальная маршрутная матрица

$$\Theta^* = \begin{pmatrix} 0 & 0.0050 & 0.3032 & 0.0007 & 0.4899 & 0.2011 \\ 0.0034 & 0 & 0.6844 & 0.3122 & 0 & 0 \\ 0.0035 & 0.6104 & 0 & 0.3861 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4365 & 0.5635 \\ 0.0023 & 0 & 0.3633 & 0 & 0 & 0.6344 \\ 0.0033 & 0 & 0.6733 & 0.3234 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В полученной маршрутной матрице вероятности выхода требований из сети обслуживания близки к нулю. За счет этого обеспечивается необходимое число требований в сети и, соответственно, оптимальные длительности формирования групп требований в системах перед началом обслуживания. При этом внутренние элементы маршрутной матрицы обеспечивают необходимые потоки требований между системами обслуживания S_i , $i = 1, \dots, 5$.

Увеличим интенсивность входного потока $\lambda_0 = 1.5$. Относительные интенсивности потоков станут равными $\omega = (0.1599; 0.1497; 0.2452; 0.1946; 0.0860; 0.1647)$, при этом интенсивности потоков $\lambda = (1.5; 1.4046; 2.3002; 1.8260; 0.8065; 1.5450)$ в системы обслуживания S_i , $i = 1, \dots, 5$, остались неизменными. Элементы θ_{i0} , $i = 1, \dots, 5$, оптимальной маршрутной матрицы

$$\Theta^* = \begin{pmatrix} 0 & 0.2890 & 0.2870 & 0.0901 & 0.1320 & 0.2019 \\ 0.2333 & 0 & 0.3334 & 0.4333 & 0 & 0 \\ 0.2642 & 0.4222 & 0 & 0.3136 & 0 & 0 \\ 0.1333 & 0 & 0 & 0 & 0.3335 & 0.5332 \\ 0.3334 & 0 & 0.3332 & 0 & 0 & 0.3334 \\ 0.0333 & 0 & 0.7333 & 0.2334 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

существенно больше по сравнению с соответствующими элементами оптимальной маршрутной матрицы при $\lambda_0 = 0.02$.

При $\lambda_0 = 4$ вектор относительных интенсивностей и оптимальная маршрутная матрица примут вид

$$\omega = (0.3366; 0.1182; 0.1936; 0.1537; 0.0679; 0.1300),$$

$$\Theta^* = \begin{pmatrix} 0 & 0.2112 & 0.2998 & 0.1121 & 0.1869 & 0.1900 \\ 0.4333 & 0 & 0.3344 & 0.2323 & 0 & 0 \\ 0.5233 & 0.2434 & 0 & 0.2333 & 0 & 0 \\ 0.7333 & 0 & 0 & 0 & 0.0324 & 0.2343 \\ 0.2234 & 0 & 0.3343 & 0 & 0 & 0.4423 \\ 0.4323 & 0 & 0.2343 & 0.3334 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Заметим, что при последовательном увеличении интенсивности входящего потока в сеть уменьшается необходимость удерживать требования в сети и видно, что вероятности выхода из сети увеличиваются, а вероятности перехода требований между системами уменьшаются.

При максимальной интенсивности входного потока $\lambda_0 = 7.88$, при которой еще обеспечивается условие существования стационарного режима в рассматриваемой сети массового обслуживания, вектор относительных интенсивностей и оптимальная маршрутная матрица примут вид

$$\omega = (0.5000; 0.0891; 0.1459; 0.1158; 0.0512; 0.0980),$$

$$\Theta^* = \begin{pmatrix} 0 & 0.1782 & 0.2918 & 0.2316 & 0.1024 & 0.1960 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При такой интенсивности входного потока топология сети обслуживания вырождается в топологию типа звезда, где центральной системой становится источник требований. Также сеть с такой топологией можно интерпретировать как сеть параллельных систем обслуживания.

Следует отметить, что все полученные в примере маршрутные матрицы обеспечивают неизменные минимальные математические ожидания длительностей пребывания требований в системах $\bar{u}^* = (2.131; 1.808; 1.639; 2.267; 1.937)$, а также математическое ожидание числа требований в системах обслуживания $\bar{s} = (2.993; 4.159; 2.993; 1.828; 2.992)$.

Предложенный метод формирования маршрутных матриц может быть также использован для коррекции потоков требований в сетях массового обслуживания с изменяющимся числом связей между системами обслуживания.

Рассмотрим пример открытой сети массового обслуживания с $L = 6$ одноприборными системами обслуживания. Вектор интенсивностей обслуживания в системах сети $\mu = (2.0; 2.1; 1.9; 2.0; 2.1; 1.9)$, вектор размеров групп требований $b = (2; 3; 2; 3; 4; 3)$, интенсивность потока требований из источника в сеть $\lambda_0 = 2$, матрица смежности

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Необходимо определить маршрутные матрицы, которые обеспечивают минимальные математические ожидания длительностей пребывания требований в системах сети обслуживания при двух различных матрицах смежностей ориентированного графа, отображающих топологии рассматриваемой сети массового обслуживания.

Используя выражение (7), получим вектор

$$\lambda = (1.7923; 2.9496; 1.7026; 2.8091; 4.0252; 2.6687).$$

Следовательно, вектор $\omega = (0.1114; 0.0999; 0.1643; 0.0949; 0.1565; 0.2243; 0.1487)$, вектор $\bar{u}^* =$



$= (1.0203; 1.0147; 1.0740; 1.0655; 1.0328; 1.1215)$, а оптимальная маршрутная матрица

$$\Theta^* = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.279 & 0.1111 & 0.1999 & 0.21 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2923 & 0 & 0 & 0.2323 & 0.4754 \\ 0.05 & 0.0409 & 0 & 0.161 & 0 & 0.7481 & 0 \\ 0.3434 & 0.3332 & 0 & 0 & 0.3234 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.251 & 0.3489 & 0 & 0 & 0.3501 & 0 \\ 0.0589 & 0 & 0 & 0.25 & 0.2399 & 0 & 0.4512 \\ 0.3333 & 0 & 0.3323 & 0 & 0.3344 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь в матрице W элементы $w_{25} = 0$ и $w_{53} = 0$. Тогда оптимальная маршрутная матрица примет вид

$$\Theta^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.0999 & 0.1991 & 0.001 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3354 & 0 & 0 & 0.5733 & 0.0913 \\ 0.223 & 0.3344 & 0 & 0.4426 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2343 & 0.4243 & 0 & 0 & 0.3414 & 0 & 0 \\ 0.049 & 0.03 & 0.352 & 0 & 0 & 0.569 & 0 \\ 0.0453 & 0 & 0 & 0 & 0.3324 & 0 & 0.6223 \\ 0.2333 & 0 & 0.4343 & 0 & 0.3324 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обе маршрутные матрицы обеспечивают оптимальный вектор $\bar{u}^*$.

Заключение

В данной работе разработан метод регулирования элементов маршрутной матрицы, которая обеспечивает минимальные математические ожидания длительностей пребывания требований в системах открытой сети массового обслуживания с групповым обслуживанием требований для всех допустимых λ_0 . Приводятся результаты численных экспериментов применения предложенного метода для вычисления стационарных характеристик сети с групповым обслуживанием требований. Метод может быть использован также для коррекции потоков требований в сетях массового обслуживания с групповым обслуживанием и изменяющимся числом связей между системами обслуживания.

Список литературы

1. Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А. Анализ очередей в вычислительных сетях: Теория и методы расчета. Москва : Наука, 1989. 334 с.
2. Вишневецкий В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. Москва : Техносфера, 2003. 506 с.
3. Митрофанов Ю. И. Анализ сетей массового обслуживания. Саратов : Научная книга, 2005. 175 с.
4. Рыков В. В. Управляемые системы массового обслуживания // Итоги науки и техники. Серия: Теория вероятностей. Математическая статистика. Теория кибернетики. 1975. Вып. 12. С. 43–153.
5. Papadimitriou C. H., Tsitsiklis J. N. The complexity of optimal queueing network control // Mathematics of Operations Research, 1999. Vol. 24, iss. 2. P. 293–305. <https://doi.org/10.1287/moor.24.2.293>
6. Neely M. J. Stochastic network optimization with application to communication and queueing systems. Cham : Springer, 2010. 199 p. <https://doi.org/10.2200/S00271ED1V01Y201006CNT007>
7. Neale J. J., Duenyas I. Control of a batch processing machine serving compatible job families // IIE Transactions. 2003. Vol. 35, iss. 8. P. 699–710. <https://doi.org/10.1080/07408170304347>
8. Makis V. Optimal control of a batch service queueing system with bounded waiting time // Kybernetika. 1985. Vol. 21, iss. 4. P. 262–271.
9. Grippa P., Schilcher U., Bettstetter C. On access control in cabin-based transport systems // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2019. Vol. 20, iss. 6. P. 2149–2156. <https://doi.org/10.1109/TITS.2018.2864551>



10. Zeng Y., Xia C. H. Optimal bulking threshold of batch service queues // *Journal of Applied Probability*. 2017. Vol. 54, iss. 2. P. 409–423. <https://doi.org/10.1017/jpr.2017.8>
11. Bountali O., Economou A. Equilibrium joining strategies in batch service queueing system // *European Journal of Operational Research*. 2017. Vol. 260, iss. 3. P. 1142–1151. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.01.024>
12. Deb R. K., Serfozo R. F. Optimal Control of Batch Service Queues // *Advances in Applied Probability*. 1973. Vol. 5, iss. 2. P. 340–361. <https://doi.org/10.2307/1426040>
13. Rabta B., Reiner G. Batch sizes optimisation by means of queueing network decomposition and genetic algorithm // *International Journal of Production Research*. 2012. Vol. 50, iss. 10. P. 2720–2731. <https://doi.org/10.1080/00207543.2011.588618>
14. Mitici M., Goseling J., van Ommeren J.-K., Graaf M., Boucherie R. J. On a tandem queue with batch service and its applications in wireless sensor networks // *Queueing Systems*. 2017. Vol. 87. P. 81–93. <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9534-1>
15. Xia C. H., Michailidis G., Bambos N., Glynn P. W. Optimal control of parallel queues with batch service // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 2002. Vol. 16, iss. 3. P. 289–307. <https://doi.org/10.1017/S0269964802163029>
16. Yu A.-L., Zhang H.-Y., Chen Q.-X., Mao N., Xi Sh.-H. Buffer allocation in a flow shop with capacitated batch transports // *Journal of the Operational Research Society*. 2022. Vol. 73, iss. 4. P. 888–904. <https://doi.org/10.1080/01605682.2020.1866957>
17. Hopp W. J., Spearman M. L., Chayet S., Donohue K. L., Gel E. S. Using an optimized queueing network model to support wafer fab design // *IIE Transactions*. 2002. Vol. 34, iss. 2. P. 119–130. <https://doi.org/10.1080/07408170208928855>
18. Kar S., Rehrmann R., Mukhopadhyay A., Alt B., Ciucu F., Koepl H., Binnig C., Rizk A. On the throughput optimization in large-scale batch-processing systems // *Performance Evaluation*. 2020. Vol. 144. Art. 102142. <https://doi.org/10.1016/j.peva.2020.102142>
19. Stankevich E., Tananko I., Pagano M. Optimization of open queueing networks with batch services // *Mathematics*. 2022. Vol. 10, iss. 16. Art. 3027. <https://doi.org/10.3390/math10163027>
20. Pagano M., Tananko I., Stankevich E.. On the optimal input rate in queues with batch service // *Axioms*. 2023. Vol. 12, iss. 7. Art. 656. <https://doi.org/10.3390/axioms12070656>
21. Станкевич Е. П., Тананко И. Е., Пагано М. Анализ системы массового обслуживания с групповым обслуживанием требований // *Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Междунар. науч. конф. (Саратов, 18–20 ноября 2021 г.) / под ред. В. А. Твердохлебова. Саратов : Научная книга, 2021. С. 148–151.*

References

1. Basharin G. P., Bocharov P. P., Kogan Ya. A. *Analiz ocheredey v vychislitel'nykh setyakh : Teoriya i metody rascheta* [Analysis of queues in computer networks: Theory and calculation methods]. Moscow, Nauka, 1989. 334 p. (in Russian).
2. Vishnevskiy V. M. *Teoreticheskie osnovy proektirovaniya komp'yuternykh setey* [Theoretical foundations of computer network design]. Moscow, Tekhnosfera, 2003. 506 p. (in Russian).
3. Mitrofanov Yu. I. *Analiz setey massovogo obsluzhivaniya* [Analysis of queueing networks]. Saratov, Nauchnaya kniga, 2005. 175 p. (in Russian).
4. Rykov V. V. Controlled queueing systems. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya: Teoriya Veroyatnostei. Matematicheskaya Statistika. Teoreticheskaya Kibernetika* [Results of Science and Technology. Series: Probability Theory. Mathematical Statistics. Theoretical Cybernetics], 1975, iss. 12, pp. 43–153 (in Russian).
5. Papadimitriou C. H., Tsitsiklis J. N. The complexity of optimal queueing network control. *Mathematics of Operations Research*, 1999, vol. 24, iss. 2, pp. 293–305. <https://doi.org/10.1287/moor.24.2.293>
6. Neely M. J. *Stochastic network optimization with application to communication and queueing systems*. Springer Cham, 2010. 199 p. <https://doi.org/10.2200/S00271ED1V01Y201006CNT007>
7. Neale J. J., Duenyas I. Control of a batch processing machine serving compatible job families. *IIE Transactions*, 2003, vol. 35, iss. 8, pp. 699–710. <https://doi.org/10.1080/07408170304347>
8. Makis V. Optimal control of a batch service queueing system with bounded waiting time. *Kybernetika*, 1985, vol. 21, iss. 4, pp. 262–271.
9. Grippa P., Schilcher U., Bettstetter C. On access control in cabin-based transport systems. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2019, vol. 20, iss. 6, pp. 2149–2156. <https://doi.org/10.1109/TITS.2018.2864551>



10. Zeng Y., Xia C. H. Optimal bulking threshold of batch service queues. *Journal of Applied Probability*, 2017, vol. 54, iss. 2, pp. 409–423. <https://doi.org/10.1017/jpr.2017.8>
11. Bountali O., Economou A. Equilibrium joining strategies in batch service queueing system. *European Journal of Operational Research*, 2017, vol. 260, iss. 3, pp. 1142–1151. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.01.024>
12. Deb R. K., Serfozo R. F. Optimal control of batch service queues. *Advances in Applied Probability*, 1973, vol. 5, iss. 2, pp. 340–361. <https://doi.org/10.2307/1426040>
13. Rabta B., Reiner G. Batch sizes optimisation by means of queueing network decomposition and genetic algorithm. *International Journal of Production Research*, 2012, vol. 50, iss. 10, pp. 2720–2731. <https://doi.org/10.1080/00207543.2011.588618>
14. Mitici M., Goseling J., van Ommeren J.-K., Graaf M., Boucherie R. J. On a tandem queue with batch service and its applications in wireless sensor networks. *Queueing Systems*, 2017, vol. 87, pp. 81–93. <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9534-1>
15. Xia C. H., Michailidis G., Bambos N., Glynn P. W. Optimal control of parallel queues with batch service. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2002, vol. 16, iss. 3, pp. 289–307. <https://doi.org/10.1017/S0269964802163029>
16. Yu A.-L., Zhang H.-Y., Chen Q.-X., Mao N., Xi Sh.-H. Buffer allocation in a flow shop with capacitated batch transports. *Journal of the Operational Research Society*, 2022, vol. 73, iss. 4, pp. 888–904. <https://doi.org/10.1080/01605682.2020.1866957>
17. Hopp W. J., Spearman M. L., Chayet S., Donohue K. L., Gel E. S. Using an optimized queueing network model to support wafer fab design. *IIE Transactions*, 2002, vol. 34, iss. 2, pp. 119–130. <https://doi.org/10.1080/07408170208928855>
18. Kar S., Rehrmann R., Mukhopadhyay A., Alt B., Ciucu F., Koepl H., Binnig C., Rizk A. On the throughput optimization in large-scale batch-processing systems. *Performance Evaluation*, 2020, vol. 144, art. 102142. <https://doi.org/10.1016/j.peva.2020.102142>
19. Stankevich E., Tananko I., Pagano M. Optimization of open queueing networks with batch services. *Mathematics*, 2022, vol. 10, iss. 16, art. 3027. <https://doi.org/10.3390/math10163027>
20. Pagano M., Tananko I., Stankevich E. On the optimal input rate in queues with batch service. *Axioms*, 2023, vol. 12, iss. 7, art. 656. <https://doi.org/10.3390/axioms12070656>
21. Stankevich E. P., Tananko I. E., Pagano M. Analysis of queueing system with batch service. In: Tverdokhlebov V. A. (ed.) *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii* [Computer Science and Information Technologies]: Proceedings of the International Scientific Conference. Saratov, November 18–20, 2021. Saratov, Nauchnaya kniga, 2021, pp. 148–151 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 18.01.2024

Принята к публикации / Accepted 07.02.2024

Опубликована / Published 28.02.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 140–149
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 140–149
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-140-149>, EDN: WVAEJQ

Научная статья
УДК 519.673

Математические модели для обработки и интерпретации сейсмических данных в новом методе сейсморазведки

А. А. Фонин , С. Г. Сучков, В. А. Николаевцев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Фонин Анатолий Александрович, ассистент кафедры геофизики, fonin.a@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5049-4243>, SPIN: 5154-4289, AuthorID: 1039847

Сучков Сергей Германович, доктор физико-математических наук, руководитель научно-технологического центра «Микро- и наноэлектроника», suchkov.s.g@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9159-3515>, SPIN: 5742-4500, AuthorID: 122657

Николаевцев Виктор Андреевич, кандидат физико-математических наук, ведущий инженер научно-технологического центра «Микро- и наноэлектроника», nikolaevcev@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1233-3983>, SPIN: 4078-1580, AuthorID: 723606

Аннотация. В настоящей работе для применения в новом методе сейсморазведки с вертикально расположенными сейсмоприемниками представлена полуаналитическая математическая модель, описывающая распространение акустического импульса по вертикали в слоистой среде с наклонными границами раздела сред, учитывающая основные параметры горных пород, такие как толщина слоев, плотность, скорость распространения акустических волн в породах, а также добротность этих сред и углы наклона границ. Проводится сравнение теоретической сейсмограммы по полуаналитической модели с результатами точного моделирования в программном комплексе Comsol Multiphysics. Построен алгоритм фильтрации сигналов в экспериментальных сейсмограммах для выделения сигналов, приходящих по вертикали. Для определения акустических и геологических параметров горных пород в автоматическом режиме (без участия геолога-интерпретатора) построен метод наименьших квадратов для поиска глобального минимума целевой функции, проверенный сравнением рассчитанных параметров с данными конкретного геологического разреза.

Ключевые слова: численное моделирование акустических полей, Comsol, Matlab, цифровая фильтрация сейсмограмм, интерпретация сейсмических данных

Для цитирования: Фонин А. А., Сучков С. Г., Николаевцев В. А. Математические модели для обработки и интерпретации сейсмических данных в новом методе сейсморазведки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 140–149. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-140-149>, EDN: WVAEJQ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Mathematical models for processing and interpreting seismic data in a new seismic survey method

A. A. Fonin , S. G. Suchkov, V. A. Nikolayevtsev

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Anatoly A. Fonin, fonin.a@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5049-4243>, SPIN: 5154-4289, AuthorID: 1039847



Sergey G. Suchkov, suchkov.s.g@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9159-3515>, SPIN: 5742-4500, AuthorID: 122657

Victor A. Nikolayevtsev, nikolaevcev@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1233-3983>, SPIN: 4078-1580, AuthorID: 723606

Abstract. In the present work, a semi-analytical mathematical model is presented for application in a new seismic survey method with vertically positioned seismic receivers. This model describes the propagation of an acoustic impulse vertically in a layered structure with inclined boundaries of layers, with consideration of the main parameters of rock formations such as layer thicknesses, densities, velocities of acoustic wave propagation in rocks, the quality factors of these layers and the angles of boundary inclination. A comparison is made between the theoretical seismogram based on the semi-analytical model and the results of exact modeling in the Comsol Multiphysics software package. An algorithm for signal filtering in experimental seismograms is developed to extract signals coming vertically. A method of least squares is produced for determining acoustic and geological parameters of rock formations automatically (without the participation of a geologist-interpreter) to search for the global minimum of the objective function, validated by comparing the calculated parameters with data from a specific geological section.

Keywords: numerical modeling of acoustic fields, Comsol, Matlab, digital filtering of seismograms, interpretation of seismic data

For citation: Fonin A. A., Suchkov S. G., Nikolayevtsev V. A. Mathematical models for processing and interpreting seismic data in a new seismic survey method. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 140–149 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-140-149>, EDN: WVAEJQ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Большинство современных геофизических методов исследования пород включает обработку значительного количества информации, анализ которого невозможно представить без применения численных алгоритмов и программных комплексов. В данной статье описано усовершенствование полуаналитической математической модели нового авторского метода сейсморазведки [1] и апробация этой модели сравнением с точным расчетом в программном комплексе Comsol Multiphysics, а также сравнением рассчитанных с использованием этой модели параметров пород геологического разреза с реальными.

Задачей нового метода сейсморазведки является определение таких характеристик слоев геологического разреза, как плотность пород, скорость и затухание звука в слоях, глубина залегания и наклон поверхностей раздела слоев. При этом интерпретация сейсмологических данных не требует непосредственного участия геолога-интерпретатора.

В работах [1–3] подробно изложены суть нового метода (вертикальное расположение приемников сейсмических волн), алгоритм цифровой фильтрации сейсмограмм, описание полуаналитической математической модели геологического разреза с горизонтальными границами раздела пород и результаты сравнения расчетных и измеренных параметров геологических сред.

Однако в природе слои в геологическом разрезе часто имеют наклон границ. Это увеличивает число определяемых параметров геологической структуры и усложняет процесс расчета вследствие учета рассеяния отраженных импульсов. Поэтому при работе с геофизическими данными необходимо учитывать геометрию границ раздела пород.

При цифровой фильтрации реальных сейсмограмм выделяются только сейсмосигналы, распространяющиеся по вертикали [1], заданной приемниками, так как при малых углах наклона слоев отличие времени приема сигналов также мало и уменьшается для более глубоких слоев. Поэтому при анализе будем учитывать только продольные волны, воспринимаемые приемниками, согласно схеме на рис. 1, а, б.

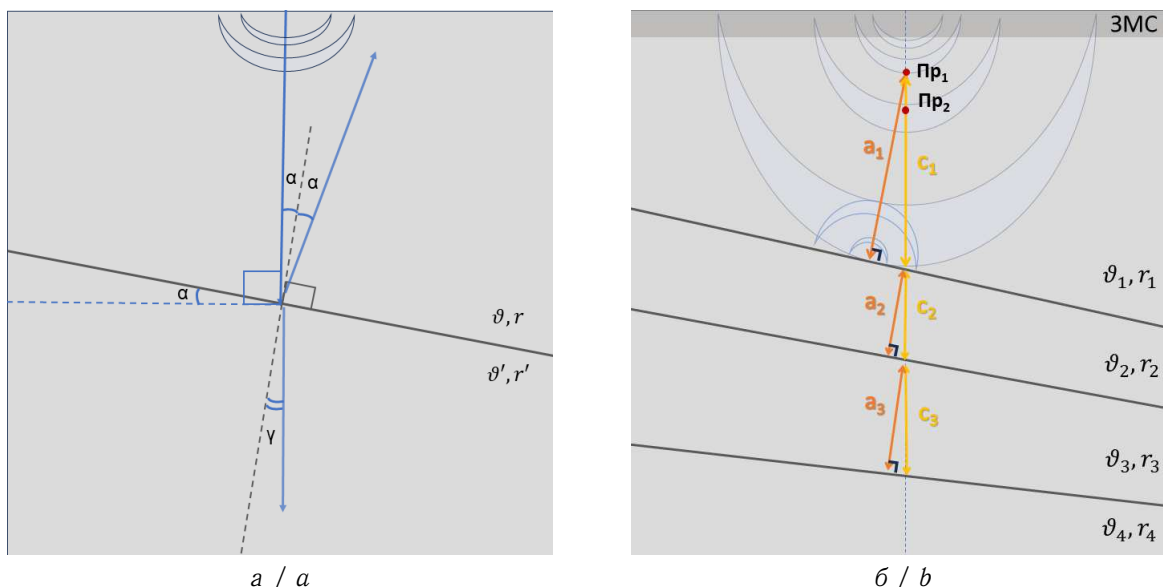


Рис. 1. Схема распространения акустической волны: а — через границу двух сред; б — в геологической структуре с наклонными границами слоев, где α — угол наклона границы и угол падения волны, γ — угол преломления, Пр1 и Пр2 — приемники акустического сигнала, c_1 — расстояние от приемника до границы по вертикали, c_2, c_3 — толщины соответствующих слоев на вертикали под приемниками, a_1 — кратчайшее расстояние от приемника до границы, a_2, a_3 — кратчайшие расстояния между границами под датчиком, r_n — плотности соответствующего слоя, ϑ_n — скорость продольной акустической волны в соответствующем слое, ЗМС (зона малых скоростей) верхний слой земли

Fig. 1. The diagram of acoustic wave propagation: а — across the boundary of two geological environments; б — in a geological structure with inclined layer boundaries, where α is the angle of inclination of the boundary and the dip angle of the wave, γ is the angle of refraction, Пр1 and Пр2 are acoustic signal receivers, c_1 is vertical distance from the receiver to the boundary, c_2, c_3 — thickness of the corresponding layers on the vertical under the receivers, a_1 — shortest distance from the receiver to the boundary, a_2, a_3 — shortest distances between the boundaries under the sensor, r_n — densities of the corresponding layer, ϑ_n — velocity of primary wave in the corresponding layer, LVZ (low velocity zone) upper layer of the earth

1. Полуаналитическая модель сейсмограммы геологического разреза

Рассмотрим принципы построения полуаналитической теоретической сейсмограммы для случая распространения по вертикали продольных волн в геологической структуре с наклоном границ слоев. При анализе волн на границах сред используется понятие *нормального акустического импеданса* [4]. Нормальные акустические импедансы для падающей (Z_p), отраженной (Z_o) и прошедшей (Z') волны равны

$$Z = Z_p = Z_o = \frac{r\vartheta}{\cos \alpha}, \quad Z' = \frac{r'\vartheta'}{\cos \gamma},$$

где r, r' — плотности в первом и во втором слое соответственно, ϑ и ϑ' — скорости продольной акустической волны в первом и во втором слое соответственно, α — угол падения, γ — угол преломления. Тогда коэффициент отражения (V) по амплитуде от границы при наклонном падении акустической волны

$$V = \frac{Z' - Z}{Z' + Z} = \frac{r'\vartheta' / \cos \gamma - r\vartheta / \cos \alpha}{r'\vartheta' / \cos \gamma + r\vartheta / \cos \alpha}. \quad (1)$$

Аналогично получаем выражение для коэффициента прохождения (W) по амплитуде:

$$W = \frac{2Z'}{Z' + Z} = \frac{2r'\vartheta' / \cos \gamma}{r'\vartheta' / \cos \gamma + r\vartheta / \cos \alpha}, \quad (2)$$



$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha \vartheta'}{\vartheta} \right)^2}. \quad (3)$$

Однако изменения в математических выкладках при учете наклона границ не ограничиваются учетом угла наклона в формулах коэффициентов отражения и преломления. Необходимо ввести поправку на пройденное волной расстояние в каждом слое, так как оно отличается от толщины слоя по вертикали (параметр c на рис. 1, б). На рис. 1, б видно, что сферическая акустическая волна в первую очередь достигнет наклонной границы в точке, удаленной от вертикали, находящейся на расстоянии a от приемника.

Целью модификации построенного ранее метода [2, 3] является расчет толщины слоев строго по вертикали (см. рис. 1, б) под датчиками, т. е.

$$c_n = \frac{a_n}{\cos \alpha_n}.$$

Таким образом в модели с наклонными границами для расчета теоретической сейсмограммы используются формулы для расчета коэффициентов отражения и прохождения (1) и (2), а также расстояния по вертикали между границами c_n . Для геологической структуры со многими слоями теоретическая модель, описывающая акустические процессы в трех слоях, применяется последовательно для более глубоких слоев, когда падающее акустическое поле принимается как поле акустической волны продольного типа, прошедшей выше расположенные слои.

Для проверки модифицированной полуаналитической теоретической модели геологической структуры с наклонными границами слоев аналогично [2, 3] была построена модель для точного вычисления «экспериментальной» сейсмограммы в программном комплексе Comsol Multiphysics. Был выбран физический интерфейс Elastic Waves, Time Explicit для моделирования распространения упругих волн в линейных упругих средах методом конечных элементов (МКЭ)¹. Интерфейс Elastic Waves, Time Explicit вычисляет скорость колебаний и деформацию в узлах сетки МКЭ. Основной задачей моделирования распространения акустического сигнала является вычисление смещений в точках приема (Пр1, Пр2) в различные моменты времени (сейсмограмма).

Параметр, который описывает затухание акустической волны в среде, называется «добротность» (Q -factor) [4]. В выбранном интерфейсе затухание может быть введено с использованием модели демпфирования Рэлея² и заданием относительного коэффициента демпфирования ζ в ней.

$$\zeta \approx \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{A(t)}{A(t+T)} \right),$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ — амплитуды в моменты времени, отличающиеся на период. Добротность Q связана с относительным коэффициентом демпфирования ζ следующим образом:

$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \approx \frac{1}{2\zeta}.$$

В моделируемой геологической структуре для каждого слоя указывались такие физические параметры, как плотность, скорости продольной и поперечной волн и добротность. Параметры модели, соответствующие геологическому разрезу [5], представлены в табл. 1.

¹Isotropic-Anisotropic Sample: Elastic Wave Propagation. Application Gallery. URL: <https://www.comsol.com/model/isotropic-anisotropic-sample-elastic-wave-propagation-78231> (дата обращения: 10.05.2020); Ground Motion After Seismic Event: Scattering off a Small Mountain. Application Gallery. URL: <https://www.comsol.com/model/ground-motion-after-seismic-event-scattering-off-a-small-mountain-78241> (дата обращения: 10.05.2020); Propagation of Seismic Waves Through Earth. Application Gallery. URL: <https://www.comsol.com/model/propagation-of-seismic-waves-through-earth-9038> (дата обращения: 10.05.2020).

²Теория и механизмы демпфирования в механике конструкций. Блог COMSOL. URL: <https://www.comsol.ru/blogs/damping-in-structural-dynamics-theory-and-sources/> (дата обращения: 14.05.2020); Акустика. COMSOL Multiphysics. URL: <https://www.comsol.ru/acoustics-module> (дата обращения: 29.04.2020).

Таблица 1 / Table 1

Параметры модели с наклонными границами
Model parameters with sloping boundaries

Толщина слоя, м	Скорость продольной волны, м/с	Скорость поперечной волны, м/с	Плотность, кг/м ³	Добротность	Угол наклона границы, °
15	1800	1058.8	1500	50	0.0
225	2200	1294.1	2150	100	5.7
205	4670	2747.1	2500	150	11.3
150	2950	1735.3	2400	170	13.5
105	6000	3529.4	2600	80	17.7

Параметр «толщина слоя», представленный в табл. 1, является расстоянием между границами строго по вертикали под датчиками (параметры c на рис. 1, б). Геометрия модели с наклонными границами и расположением приемников приведена на рис. 2.

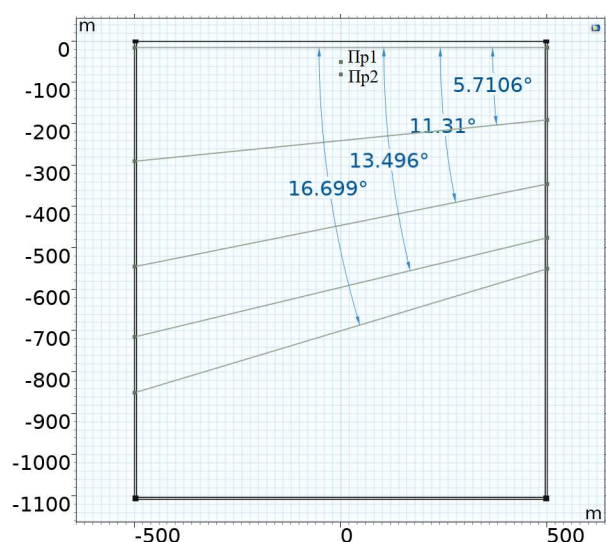


Рис. 2. Геометрия модели с указанными углами наклона границ. Точками указаны приемники акустического сигнала Пр1 на глубине 50 м и Пр2 на глубине 80 м

Fig. 2. Geometry of the model with specified boundary inclination angles. The receivers of the acoustic signal Пр1 at a depth of 50 m and Пр2 at a depth of 80 m are indicated by points

Одним из важнейших этапов численного моделирования является разбиение рассматриваемой области на конечные элементы. Разбиение на конечные элементы производилось в автоматическом режиме с добавлением узла Мapped, который используется, чтобы создать структурированную четырехугольную сетку.

2. Результаты и обсуждение

На рис. 3 приведены результаты моделирования в программном комплексе Comsol Multiphysics распространения акустической (сейсмической) волны при взрывном возбуждении в различные моменты времени в модели с наклонными границами.

На рис. 3 для разных моментов времени представлены картины распространяющихся волн в виде вертикальных колебательных скоростей частиц породы, причем густота цвета харак-

В модели глубина зоны малых скоростей (ЗМС) составляет 15 м. Для устранения отражений от границ рассматриваемой области боковые и нижняя границы моделировались в виде сильно поглощающих слоев.

Верхняя граница полупространства является свободной, а в начале системы координат расположен точечный источник акустических волн. Входной импульс, возбуждаемый этим источником, задается в виде силы F_{in} :

$$F_{in}(t) = F_0 \frac{1 - e^{-\frac{9t}{T_{imp}}}}{1 + e^{-9\left(\frac{t}{T_{imp}} - 1\right)}} \sin(2\pi f_{imp}t),$$

где t — время, T_{imp} — длительность входного импульса, f_{imp} — центральная частота источника. Это выражение получено на основе аппроксимации формы первого импульса в экспериментальных сейсмограммах.

Для численного эксперимента были выбраны следующие параметры входного импульса: $F_0 = 500$ кН, $T_{imp} = 0.01$ с, $f_{imp} = 100$ Гц.

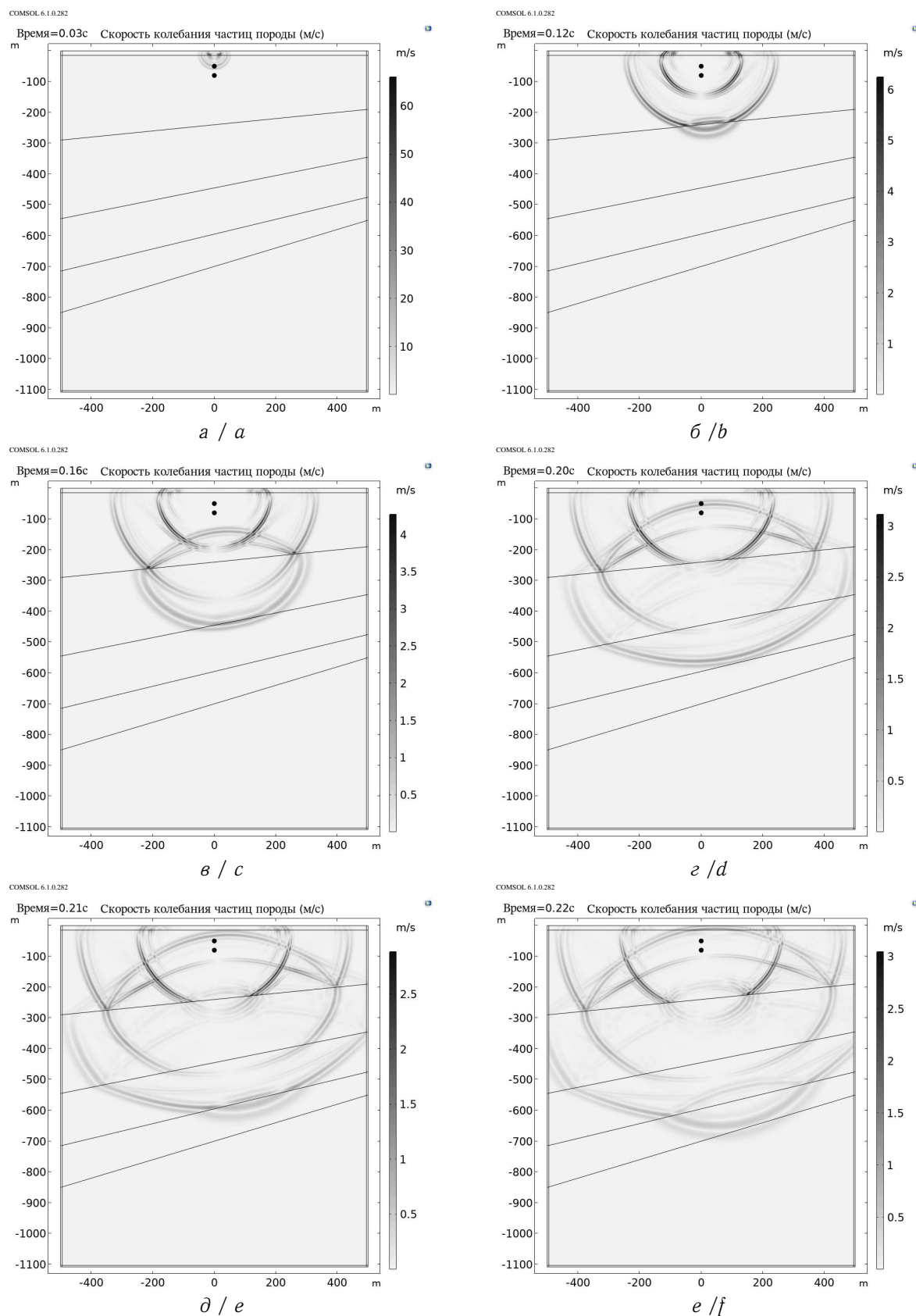


Рис. 3. Распространение акустических волн от точечного источника на поверхности в зоне малых скоростей и первых трех слоев геологической структуры в моменты времени 0.03 с (а), 0.12 с (б), 0.16 с (в), 0.20 с (г), 0.21 с (д), 0.22 с (е)

Fig. 3. Propagation of acoustic waves from a point source on the surface in the zone of low velocities and the first three layers of the geological structure at time 0.03 sec (a), 0.12 sec (b), 0.16 sec (c), 0.20 sec (d), 0.21 sec (e), 0.22 sec (f)

теризует амплитуду. В первые моменты времени видны две ярко выраженные волны, первая, распространяющаяся с большей скоростью, является продольной волной, а вторая — поперечной. Характерно, что на фронте поперечных волн в центре (вблизи вертикали) амплитуда мала, так как возбуждающая сила направлена по вертикали.

Модельные сейсмоимпульсы продольных волн, принятые в двух точках расположения приемников на глубине 50 и 80 м, были введены в программу цифровой фильтрации (на MatLab), произведена их обработка, результаты которой представлены на рис. 4.

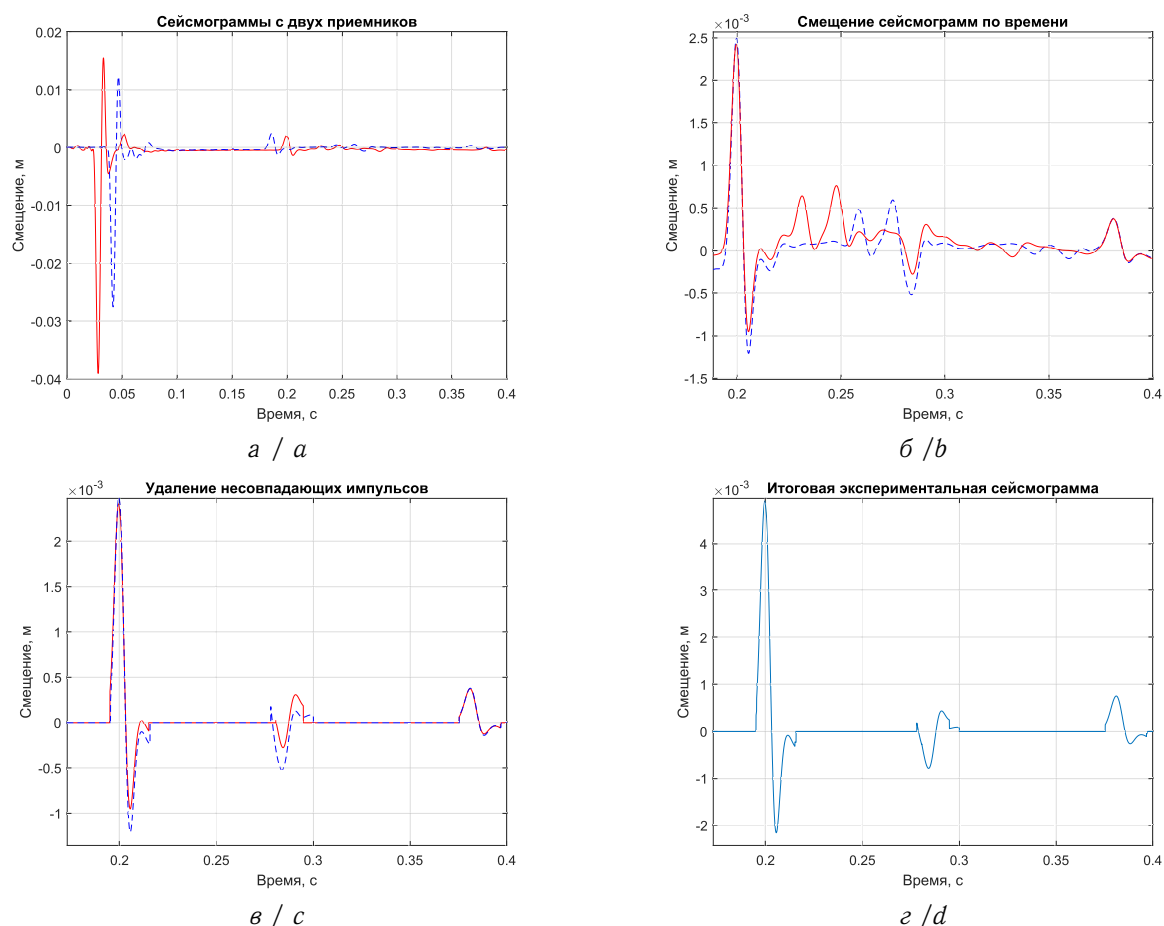


Рис. 4. Результат обработки «экспериментальных» сейсмограмм для структуры с наклонными границами. Штриховой линией обозначены сейсмограммы с нижнего приемника, сплошной линией — с верхнего приемника: *a* — исходные сейсмограммы; *b* — смещение по времени сейсмограммы нижнего приемника к сейсмограмме верхнего; *c* — исключение несовпадающих импульсов; *d* — итоговая сейсмограмма

Fig. 4. Processing results of experimental seismograms for a structure with sloping boundaries. Seismograms from the lower receiver are shown with dashed lines, while seismograms from the upper receiver are shown with solid lines: *a* — original seismograms; *b* — time shifting of the lower receiver seismogram to match the upper receiver seismogram; *c* — exclusion of non-matching impulses; *d* — final seismogram

Алгоритм цифровой фильтрации применяется для «очистки» экспериментальных сейсмограмм от посторонних сигналов и заключается в сравнении двух сейсмограмм, полученных с двух приемников, расположенных на одной вертикали друг под другом на некотором известном расстоянии. По разнице времени входных импульсов на этих сейсмограммах определяется время задержки сигнала, распространяющегося вертикально между датчиками. Затем производится смещение одной сейсмограммы на рассчитанное время задержки, что



позволяет получить две сейсмограммы, у которых импульсы, отраженные от границ под датчиками, совпадают, в то время как импульсы, отраженные от границ, удаленных от вертикали расположения приемников, будут смещены по времени относительно друг друга.

В результате обработки получается амплитудно-временная зависимость, полученная путем удаления несовпадающих сигналов и сложения сейсмограмм с двух приемников.

Для оценки адекватности введенных изменений для наклонных границ была рассчитана по полуаналитической модели теоретическая сейсмограмма, входные параметры которой соответствуют параметрам модели в Comsol.

Сравнение «экспериментальной» (построенной в Comsol) и теоретической сейсмограмм для модели с наклонными границами, свойства которой приведены в табл. 2, показано на рис. 5.

Таблица 2 / Table 2

Диапазоны значений варьируемых параметров, шаг цикла и найденные значения для первого слоя

Ranges of variable parameters, loop step, and found values for the first layer

Параметр	Диапазон значений	Шаг	Истинные значения	Найденные значения
Толщина, м	210–240	1	225	225
Скорость волны, м/с	2050–2350	1	2200	2199
Плотность, кг/м ³	1900–2400	10	2150	2120
Добротность	70–130	2	100	100
Угол наклона, °	0–7	0.2	5.71	6

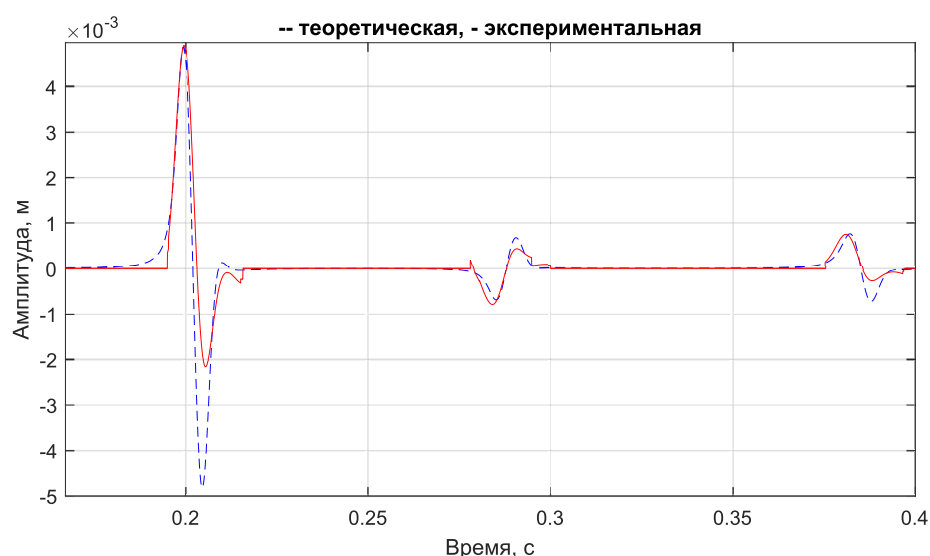


Рис. 5. «Экспериментальная» (сплошная) и теоретическая (штриховые) сейсмограммы, рассчитанные для модели с наклонными границами для первых трех границ, расположенных ниже приемников

Fig. 5. Experimental (solid) and theoretical (dashed) seismograms calculated for a model with inclined boundaries for the first three layers located below the receivers

Из рис. 5 видно, что при равенстве всех параметров модели время прихода и амплитуда импульсов «экспериментальной» и теоретической сейсмограмм совпадают, т. е. построенная модель является адекватной. Следовательно, разработанный математический аппарат может быть успешно применен для интерпретации сейсмических данных.

Основная цель нового метода сейсморазведки с двумя вертикальными приемниками заключается в расчете параметров, описывающих механические свойства пород геологического



разреза. Для этого на основе теоретической сейсмограммы $S_{th}(t)$ и экспериментальной сейсмограммы $S(t)$ строится целевая функция в виде суммы квадратов разностей расчетных и измеренных значений амплитуд сигналов [6, 7].

$$F(a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{i=1}^P (S_{th}(t_i) - S(t_i))^2, \quad (4)$$

где моменты времени t_i соответствуют максимумам экспериментальной сейсмограммы, $i = 1, 2, \dots, p$.

Глобальный минимум этой функции достигается при таком наборе значений указанных параметров, при которых расчетная сейсмограмма наиболее близка к экспериментальной. Следовательно, можно утверждать, что полученные в результате минимизации параметры соответствуют реальной геологической структуре.

Алгоритм поиска параметров многих слоев геологической структуры методом наименьших квадратов заключается в следующем: на первом этапе расчеты проводятся для первых двух-трех границ и определяются все акустические параметры, глубины границ раздела и толщин этих слоев; на втором этапе, исходя из формы и спектра акустического импульса, прошедшего эти слои, задача решается повторно для следующих двух-трех слоев в глубину.

Программа минимизации целевой функции (4) была написана в системе MatLab. В процессе поиска глобального минимума и получения достоверных значений параметров, соответствующих реальной геологической структуре, была выявлена необходимость отслеживания не одного, а как минимум трех импульсов для получения близких значений найденных параметров.

В результате работы программы получен набор параметров, отличающийся от истинных значений для пород рассматриваемого геологического разреза (см. табл. 1 и 2) менее чем на 1.5% и на 5% для значения угла наклона границы.

Таким образом, каждый из найденных наборов параметров геологического разреза с высокой точностью согласуется со значениями экспериментальной модели, и среди них отсутствуют значения параметров, далекие от истинных.

Заключение

В настоящей работе представлена полуаналитическая математическая модель, описывающая распространение акустической волны в слоистой среде с наклонными границами раздела сред. Согласно результатам настоящего исследования можно сделать вывод, что разработанная полуаналитическая модель позволяет построить теоретическую сейсмограмму, которая сходится в процессе поиска глобального минимума к очищенной от неинформативных импульсов экспериментальной сейсмограмме, полученной для реального разреза горных пород, что позволяет применить полуаналитическую модель для расчета параметров слоев геологического разреза, таких как толщина слоев, их плотность, скорость распространения акустических волн в них, а также добротность этих сред и углы наклона границ. Построенный алгоритм обеспечивает определение параметров геологического разреза в автоматическом режиме без участия геолога-интерпретатора.

Таким образом, разработанный алгоритм представляет собой эффективный инструмент для автоматизированного анализа геологических данных и определения параметров горных пород.

Список литературы

1. Фонин А. А., Сучков С. Г., Михеев С. И., Николаевцев В. А., Сучков Д. С. Новый метод определения акустических параметров геологического разреза // Акустика океана: доклады XVII школы-семинара им. акад. Л. М. Бреховских, совмещенной с XXXIII сессией Российского акустического общества. Москва : ИО РАН, 2020. С. 286–293. <https://doi.org/10.29006/978-5-9901449-5-8-46>, EDN: XFCZKQ



2. Фонин А. А., Сучков С. Г., Николаевцев В. А., Михеев С. И. Математическое моделирование нового метода обработки сейсмосигнала на примере разреза Саратовского Правобережья. Часть 1 // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2023. Т. 9, № 1 (33). С. 92–106. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-92-106>, EDN: LBNLCP
3. Фонин А. А., Сучков С. Г., Николаевцев В. А., Михеев С. И. Математическое моделирование нового метода обработки сейсмосигнала на примере разреза Саратовского Правобережья. Часть 2 // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2023. Т. 9, № 2 (34). С. 139–152. <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-2-139-152>, EDN: YNXBLY
4. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Москва : Наука, 1973. 343 с.
5. Конценебин Ю. П., Рыскин М. И., Балабанов В. Г., Михеев С. И., Коробова Л. А. Геофизическое моделирование ловушек нефти и газа. (Труды научно-исследовательского института геологии Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского). Саратов : Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1999. 142 с.
6. Симончик К. К., Тропченко А. Ю., Хитров М. В. Цифровая обработка сигналов : учеб. пособие. С. Петербург : СПбГУ ИТМО, 2012. 108 с.
7. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Москва : Физматгиз, 1958. 334 с.

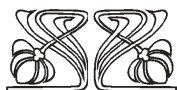
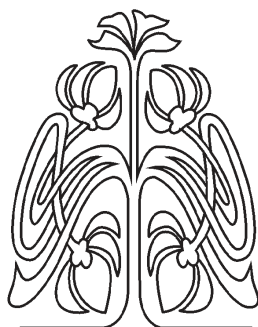
References

1. Fonin A. A., Suchkov S. G., Mikheyev S. I., Nikolayevtsev V. A., Suchkov D. S. New method of geological profile acoustic parameters determination. *Akustika okeana* [Ocean Acoustics]. Reports of the XVII School-Seminar named after. acad. L. M. Brekhovskikh, combined with the XXXIII session of the Russian Acoustical Society. Moscow, IO RAS, 2020, pp. 286–293 (in Russian). <https://doi.org/10.29006/978-5-9901449-5-8-46>, EDN: XFCZKQ
2. Fonin A. A., Suchkov S. G., Nikolayevtsev V. A., Mikheyev S. I. Mathematical modeling of a new method for processing a seismic signal on the example of a section of the Saratov right bank. Part 1. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 2023, vol. 9, iss. 1 (33), pp. 92–106 (in Russian). <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-92-106>, EDN: LBNLCP
3. Fonin A. A., Suchkov S. G., Nikolayevtsev V. A., Mikheyev S. I. Mathematical modeling of a new method for processing a seismic signal on the example of a section of the Saratov right bank. Part 2. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, 2023, vol. 9, iss. 2 (34), pp. 139–152 (in Russian). <https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-2-139-152>, EDN: YNXBLY
4. Brekhovskikh L. M. *Volny v sloistykh sredakh* [Waves in layered structures]. Moscow, Nauka, 1973. 343 p. (in Russian).
5. Kotsenebin Yu. P., Ryskin M. I., Balabanov V. G., Mikheyev S. I., Korobova L. A. *Geofizicheskoe modelirovaniye lovushek nefti i gaza* [Geophysical modeling of oil and gas traps]. Proceedings of the Research Institute of Geology Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. Saratov, Kolledzh, 1999. 142 p. (in Russian).
6. Simonchik K. K., Tropchenko A. Yu., Khitrov M. V. *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital signal processing]: Tutorial. St. Petersburg, St. Petersburg State University ITMO Publ., 2012. 108 p. (in Russian).
7. Linnik Yu. V. *Metod naimen'shikh kvadratov i osnovy matematiko-statisticheskoy teorii obrabotki nablyudeniya* [The least squares method and the fundamentals of the mathematical and statistical theory of observation processing]. Moscow, Fizmatgiz, 1958. 334 p. (in Russian).

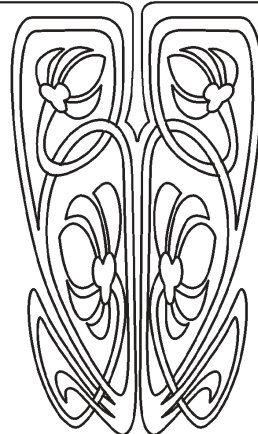
Поступила в редакцию / Received 06.03.2024

Принята к публикации / Accepted 20.06.2024

Опубликована / Published 28.02.2025



ПОДПИСКА



Подписка на печатную версию

Подписной индекс издания 36017.
Оформить подписку на печатную версию
можно в интернет-каталоге
ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru).
Журнал выходит 4 раза в год.
Цена свободная

Электронная версия журнала находится
в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Адрес издательства (редакции):

410012, Саратов, Астраханская, 83

Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89

Факс: +7(845-2) 27-85-29

E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,

СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru>



ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)
Известия Саратовского университета. Новая серия.
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025.
Том 25, выпуск 1

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития
Серия: История. Международные отношения

Серия: Математика. Механика. Информатика

Серия: Науки о Земле
Серия: Социология. Политология

Серия: Физика
Серия: Филология. Журналистика
Серия: Философия. Психология. Педагогика

Серия: Химия. Биология. Экология
Серия: Экономика. Управление. Право

