Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 57–62
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 57–62
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-57-62, EDN: LNJVVN

Научная статья
УДК 539.3

Асимптотический анализ осесимметричной задачи об обжатии тонкого упругого диска в случае смешанных граничных условий на лицевых поверхностях

Ю. Д. Каплунов[1✉], **Б. Зупанчич**[2], **А. В. Никонов**[3]

[1]Университет г. Киль, Великобритания, ST5 5BG, графство Стаффордшир, г. Киль
[2]Национальный институт химии, Словения, 1000, г. Любляна, Хайдрихова ул., д. 19
[3]Люблянский университет, Словения, 1000, г. Любляна, Конгресни трг, д. 12

Каплунов Юлий Давидович, доктор физико-математических наук, профессор Школы компьютерных наук и математики, j.kaplunov@keele.ac.uk, https://orcid.org/0000-0001-7505-4546, AuthorID: 6305
Зупанчич Барбара, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела теоретических исследований, barbara.zupancic@ki.si, https://orcid.org/0000-0001-7296-8086
Никонов Анатолий Викторович, доктор физико-математических наук, профессор факультета машиностроения, anatolij.nikonov@fs.uni-lj.si, https://orcid.org/0000-0003-3586-1401, AuthorID: 396401

Аннотация. Рассматривается осесимметричная задача о поперечном обжатии тонкого упругого диска при отсутствии проскальзывания. Построено асимптотическое решение для внутреннего напряженно-деформированного состояния. Намечен подход к определению плоского погранслоя, локализованного около внешнего контура диска.

Ключевые слова: асимптотические методы, асиптотическое решение, осесимметричная задача, задача обжатия, смешанные граничные условия, напряженно-деформированное состояние, плоский погранслой
Для цитирования: *Каплунов Ю. Д., Зупанчич Б., Никонов А. В.* Асимптотический анализ осесимметричной задачи об обжатии тонкого упругого диска в случае смешанных граничных условий на лицевых поверхностях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 57–62. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-57-62, EDN: LNJVVN

Article

Asymptotic analysis of the axisymmetric problem for the transverse compression of a thin elastic disk in the case of mixed boundary conditions along its faces

J. D. Kaplunov[1✉], **B. Zupančič**[2], **A. V. Nikonov**[3]

[1]Keele University, Keele, Staffordshire ST5 5BG, UK
[2]National Institute of Chemistry, 19 Hajdrihova, Ljubljana 1000, Slovenia
[3]University of Ljubljana, 12 Kongresni trg, Ljubljana 1000, Slovenia

Julius D. Kaplunov, j.kaplunov@keele.ac.uk, https://orcid.org/0000-0001-7505-4546, AuthorID: 6305
Barbara Zupančič, barbara.zupancic@ki.si, https://orcid.org/0000-0001-7296-8086
Anatolij V. Nikonov, anatolij.nikonov@fs.uni-lj.si, https://orcid.org/0000-0003-3586-1401, AuthorID: 396401

Abstract. The axisymmetric problem for the transverse compression of a thin elastic disk is considered in slip absence. An asymptotic solution for the interior stress-strain state is constructed. An approach to determining a plane boundary layer localized near the outer contour of the disk is outlined.

Keywords: asymptotic methods, asymptotic solution, axisymmetric problem, compression problem, mixed boundary conditions, stress-strain state, flat boundary layer

For citation: Kaplunov J. D., Zupančič B., Nikonov A. V. Asymptotic analysis of the axisymmetric problem for the transverse compression of a thin elastic disk in the case of mixed boundary conditions along its faces. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 57–62 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-57-62, EDN: LNJVVN

Введение

В основе общей математической теории тонких пластин и оболочек лежит универсальный асимптотический подход, позволяющий сводить исходные трехмерные уравнения теории упругости к двумерным [1–3]. Этот подход, в частности, позволяет учесть поперечное обжатие в рамках двумерной постановки [1–4]. При этом в подавляющем большинстве работ рассматриваются тонкие упругие тела с заданными напряжениями на лицевых поверхностях. Более общие граничные условия, включая смешанные, исследовались гораздо реже (см. например: [5–7]).

В данной статье смешанные граничные условия на лицевых поверхностях рассматриваются применительно к задачам обжатия. В качестве примера изучается осесимметричная деформация диска, сжимаемого нормальными напряжениями при пренебрежении проскальзывания. Таким образом, предполагается отсутствие касательных перемещений на лицевых поверхностях. Толщина диска считается малой по сравнению с его радиусом. Для определенности контур диска полагается свободным от напряжений.

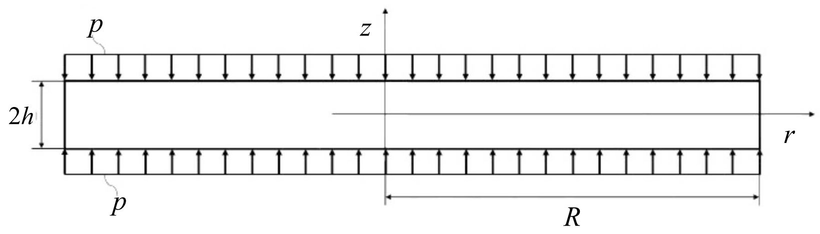
Сформулированная задача исследуется с помощью метода асимптотического интегрирования [1, 5]. Найдена асимптотика внутреннего напряженного состояния, которая кардинально отличается от аналогичной асимптотики для обжатия с проскальзыванием, т. е. при равенстве нулю касательных напряжений, а не перемещений [3]. В главном приближении получены простые алгебраические формулы, выражающие параметры напряженно-деформированного состояния через заданную обжимающую поперечную нагрузку. При этом формируется невязка в однородных граничных условиях на внешнем свободном контуре диска.

Показывается, что для снятия такой невязки следует построить так называемый плоский погранслой, локализующийся около внешнего контура [1]. Существенно, что изучаемые смешанные граничные условия на лицевых поверхностях как обеспечивают затухание погранслоя, так и позволяют представить погранслой в виде ряда Фурье, аналогично тому, как это было сделано при решении близких задач в [8, 9].

Ввиду ограниченности объема статьи за ее рамками остается вычисление погранслоя, так же как и построение асимптотических поправок к полученному внутреннему решению. Соответствующий анализ может быть легко осуществлен с помощью разработанной в статье методологии, которая также может быть распространена на диск с произвольным контуром.

1. Постановка задачи

Рассмотрим круглый диск постоянной толщины $2h$ и радиуса R, под воздействием обжимающих напряжений амплитуды p, заданных на его лицевых поверхностях (рисунок).



Поперечное сечение диска / Figure. The cross section of the disc

Предположим, что материал диска изотропный и линейный упругий. Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с началом координат в центре срединной плоскости диска, так что ось z направлена вдоль перпендикуляра к этой плоскости. Для определенности положим, что боковая поверхность диска свободна от нагрузок.

В осесимметричном случае, когда напряжения не зависят от полярного угла φ, уравнения равновесия записываются в виде

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0,$$

где σ_r, σ_φ, σ_z, $\tau_{r\varphi}$, τ_{rz}, $\tau_{\varphi z}$ являются компонентами тензора напряжений.

Определяющие соотношения для линейного изотропного упругого тела в цилиндрических координатах имеют вид

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \quad \tau_{r\varphi} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right),$$
$$\sigma_\varphi = (\lambda + 2\mu)\frac{u}{r} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \quad \tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right),$$
$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right), \quad \tau_{\varphi z} = \mu\frac{\partial v}{\partial z},$$

где λ и μ — постоянные Ламе, а u, v, w — компоненты вектора перемещений, которые также не зависят от угла φ. Ограничимся случаем, когда окружные перемещения равны нулю, т. е. $v = 0$.

Смешанные граничные условия на лицевых поверхностях диска $z = \pm h$, моделирующие поперечное обжатие при отсутствии проскальзывания, примем в виде

$$\sigma_z = -p, \quad u = 0. \tag{1}$$

Очевидно, что ввиду симметрии выписанных граничных условий относительно плоскости $z = 0$ перемещения u и w соответственно будут четными и нечетными функциями поперечной координаты z.

На свободном внешнем контуре диска $r = R$ имеем однородные граничные условия в напряжениях

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0. \tag{2}$$

2. Внутреннее решение

Введем малый геометрический параметр $\varepsilon = h/R \ll 1$ и масштабируем исходные переменные как

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \eta = \frac{z}{h}.$$

Определим также безразмерные величины

$$\begin{gathered} u^* = \frac{u}{h}, \quad w^* = \frac{w}{R}, \\ \sigma_r^* = \frac{\varepsilon}{\mu}\sigma_r, \quad \sigma_\varphi^* = \frac{\varepsilon}{\mu}\sigma_\varphi, \quad \sigma_z^* = \frac{\varepsilon}{\mu}\sigma_z, \quad \tau_{rz}^* = \frac{1}{\mu}\tau_{rz}, \quad p^* = \frac{\varepsilon}{\mu}p. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь и далее считается, что все величины со звездочкой имеют одинаковый асимптотический порядок.

Асимптотика напряженно-деформированного состояния диска, задаваемая этими формулами, отличается от аналогичной асимптотики в случае обжатия с проскальзыванием, когда однородное граничное условие принимает вид $\tau_{rz} = 0$.

Уравнения равновесия и определяющие соотношения в безразмерной форме теперь можно переписать в форме

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_r^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{rz}^*}{\partial \eta} + \frac{\sigma_r^* - \sigma_\varphi^*}{\xi} = 0,\\ \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \tau_{rz}^*}{\partial \xi} + \frac{\tau_{rz}^*}{\xi} \right) = 0\end{gathered} \tag{4}$$

и

$$\begin{gathered}\sigma_r^* = \alpha \frac{\partial w^*}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \left[(\alpha+2) \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \alpha \frac{u^*}{\xi} \right],\\ \sigma_\varphi^* = \alpha \frac{\partial w^*}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \left[(\alpha+2) \frac{u^*}{\xi} + \alpha \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right],\\ \sigma_z^* = (\alpha+2) \frac{\partial w^*}{\partial \eta} + \alpha \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{u^*}{\xi} \right),\\ \tau_{rz}^* = \frac{\partial u^*}{\partial \eta} + \frac{\partial w^*}{\partial \xi},\end{gathered} \tag{5}$$

где $\alpha = \lambda/\mu$.

Граничные условия принимают вид

$$\sigma_z^* = -p^*, \quad u^* = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \pm 1 \tag{6}$$

и

$$\sigma_r^* = 0, \quad \tau_{rz}^* = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1.$$

Теперь разложим перемещения и напряжения в асимптотические ряды по малому параметру ε:

$$\begin{pmatrix} u^* \\ w^* \\ \sigma_r^* \\ \sigma_\varphi^* \\ \sigma_z^* \\ \tau_{rz}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(0)} \\ w^{(0)} \\ \sigma_r^{(0)} \\ \sigma_\varphi^{(0)} \\ \sigma_z^{(0)} \\ \tau_{rz}^{(0)} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ w^{(1)} \\ \sigma_r^{(1)} \\ \sigma_\varphi^{(1)} \\ \sigma_z^{(1)} \\ \tau_{rz}^{(1)} \end{pmatrix} + \cdots$$

Подставив эти разложения в уравнения (4) и (5) и граничные условия (6), получим в главном приближении

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{rz}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\sigma_r^{(0)} - \sigma_\varphi^{(0)}}{\xi} = 0,\\ \frac{\partial \sigma_z^{(0)}}{\partial \eta} = 0, \quad \sigma_r^{(0)} = \alpha \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta}, \quad \sigma_\varphi^{(0)} = \alpha \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta},\\ \sigma_z^{(0)} = (\alpha+2) \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta}, \quad \tau_{rz}^{(0)} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi}\end{gathered} \tag{7}$$

и

$$\sigma_z^{(0)} = -p^*(\xi), \quad u^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \pm 1. \tag{8}$$

Интегрируя уравнения (7) с граничными условиями (8) по η, имеем

$$\begin{gathered}u^{(0)} = \frac{\alpha+1}{2(\alpha+2)} \frac{\partial p^*(\xi)}{\partial \xi} (\eta^2 - 1), \quad w^{(0)} = -\frac{\eta}{\alpha+2} p^*(\xi),\\ \sigma_r^{(0)} = \sigma_\varphi^{(0)} = -\frac{\alpha}{\alpha+2} p^*(\xi), \quad \sigma_z^{(0)} = -p^*(\xi), \quad \tau_{rz}^{(0)} = \frac{\alpha}{\alpha+2} \frac{\partial p^*(\xi)}{\partial \xi} \eta.\end{gathered} \tag{9}$$

3. Обсуждение

В размерных величинах асимптотическое решение (9) принимает вид

$$
\begin{gathered}
u = \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}(z^2-h^2)\frac{\partial p(r)}{\partial r}, \quad w = -\frac{z}{(\lambda+2\mu)}p(r), \\
\sigma_r = \sigma_\varphi = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}p(r), \quad \sigma_z = -p(r), \quad \tau_{rz} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}z\frac{\partial p(r)}{\partial r}.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Приведенные соотношения отражают специфику изучаемых смешанных граничных условий на лицевых поверхностях, задаваемых формулой (1). В частности, касательное перемещение u непостоянно по толщине диска, как в случае граничных условий в напряжениях [3]. Это обусловлено тем, что принятая неклассическая асимптотика (3) соответствует именно упомянутым смешанным граничным условиям.

Нетрудно заметить, что полученное решение (10) не удовлетворяет граничным условиям (2). При этом там образуется невязка

$$
\sigma_r = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}p(R), \quad \tau_{rz} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}z\frac{\partial p(r)}{\partial r}\bigg|_{r=R}.
$$

Для ее компенсации следует ввести в рассмотрение так называемый плоский погранслой [1], локализованный в малой окрестности (порядка толщины) контура диска. Он описывается уравнениями плоской задачи теории упругости в полуполосе толщиной $2h$ (см. рисунок), в декартовых координатах $(x = R - r, z)$. В этом случае ставятся однородные условия на лицевых поверхностях и следующие условия при $x = 0$:

$$
\sigma_x = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}p(0), \quad \tau_{xz} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}z\frac{\partial p(x)}{\partial x}\bigg|_{x=0}.
$$

Ввиду присутствия малого множителя $O(\varepsilon)$ $(z = h\eta,\ x = R(1-\xi))$ во втором из этих условий его в главном приближении можно считать однородным.

Отметим также, что при выбранных смешанных граничных условиях на лицевых поверхностях автоматически гарантируется экспоненциальное затухание погранслоя. Эти условия позволяют также разделение переменных в уравнениях плоской задачи теории упругости аналогично [8, 9].

Список литературы

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Москва : Наука, 1976. 512 с.
2. *Коссович Л. Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 176 с.
3. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Ju., Nolde E. V.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San-Diego : Academic Press, 1998. 226 p. https://doi.org/10.1016/c2009-0-20923-8
4. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Ju., Moukhomodiarov R. R.* Impact normal compression of an elastic plate: analysis utilising an advanced asymptotic 2D model // Mechanics Research Communications. 2000. Vol. 27, iss. 1. P. 117–122. https://doi.org/10.1016/S0093-6413(00)00070-7
5. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. Москва : Наука, 1997. 414 с.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Общая теория тонких упругих тел (оболочки, покрытия, прокладки) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1992. № 3. С. 5–17.
7. *Kaplunov J., Prikazchikov D., Sultanova L.* Justification and refinement of Winkler – Fuss hypothesis // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2018. Vol. 69. Art. 80. https://doi.org/10.1007/s00033-018-0974-1
8. *Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю.* Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. Москва : Физматлит, 2010. 280 с.
9. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Ju., Wilde M. V.* Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // The Journal of the Acoustical Society of America. 2000. Vol. 107, iss. 3. P. 1383–1393. https://doi.org/10.1121/1.428426

References

1. Goldenweiser A. L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of Elastic Thin Shells]. Moscow, Nauka, 1976. 512 p. (in Russian).
2. Kossovich L. Yu. *Nestatsionarnye zadachi teorii uprugikh tonkikh obolochek* [Nonstationary Problems in the Theory of Elastic Thin Shells]. Saratov, Saratov State University Publ., 1986. 176 p. (in Russian).
3. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. San-Diego, Academic Press, 1998. 226 p. https://doi.org/10.1016/c2009-0-20923-8
4. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Moukhomodiarov R. R. Impact normal compression of an elastic plate: analysis utilising an advanced asymptotic 2D model. *Mechanics Research Communications*, 2000, vol. 27, iss. 1, pp. 117–122. https://doi.org/10.1016/S0093-6413(00)00070-7
5. Agalovyan L. A. *Asimptoticheskaya teoriya anizotropnykh plastin i obolochek* [The Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1997. 414 p. (in Russian).
6. Goldenweiser A. L. General theory of thin elastic bodies (shells, coatings, and gaskets). *Mechanics of Solids*, 1992, vol. 3, pp. 5–17 (in Russian).
7. Kaplunov J., Prikazchikov D., Sultanova L. Justification and refinement of Winkler – Fuss hypothesis. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2018, vol. 69, art. 80. https://doi.org/10.1007/s00033-018-0974-1
8. Wilde M. V., Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu. *Kraevye i interfeysnye rezonansnye yavleniya v uprugikh telakh* [Edge and Interfacial Resonance Phenomena in Elastic Bodies]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 280 p. (in Russian).
9. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V. Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2000, vol. 107, iss. 3, pp. 1383–1393. https://doi.org/10.1121/1.428426

Поступила в редакцию / Received 05.12.2023
Принята к публикации / Accepted 28.12.2023
Опубликована / Published 01.03.2024