Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 498–511
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 498–511
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-498-511, EDN: HKTFOQ

Научная статья
УДК 517.988.63

Вопросы существования и единственности решения одного класса бесконечной системы нелинейных двумерных уравнений

А. С. Петросян[1✉], С. М. Андриян[1], Х. А. Хачатрян[2]

[1]Национальный аграрный университет Армении, Армения, 0009, г. Ереван, ул. Теряна, д. 74
[2]Ереванский государственный университет, Армения, 0025, г. Ереван, ул. А. Манукяна, д. 1

Петросян Айкануш Самвеловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, физики и прикладной механики, Haykuhi25@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7172-4730
Андриян Сильва Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, физики и прикладной механики, smandriyan@hotmail.com, https://orcid.org/0009-0000-6854-1127
Хачатрян Хачатур Агавардович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории функций и дифференциальных уравнений, khachatur.khachatryan@ysu.am, https://orcid.org/0000-0002-4835-943X, AuthorID: 589262

Аннотация. Работа посвящена исследованию одного класса бесконечных систем нелинейных двумерных уравнений с выпуклой и монотонной нелинейностью. Данный класс нелинейных систем уравнений имеет как теоретическую, так и практическую значимость, в частности, при изучении дискретных аналогов задач динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн, кинетической теории газов, математической биологии при исследовании пространственно-временного распределения эпидемии. Доказаны теоремы существования и единственности положительного решения в определённом классе неотрицательных и ограниченных матриц. Выявлены некоторые качественные свойства решения. Доказанные результаты дополняют и обобщают некоторые ранее полученные авторами утверждения. Приведены наглядные примеры соответствующих матриц и нелинейностей (в том числе и прикладного характера), удовлетворяющих всем условиям сформулированных теорем.

Ключевые слова: бесконечная матрица, нелинейность, выпуклость, последовательные приближения, монотонность, единственность
Благодарности: Работа третьего автора выполнена при финансовой поддержке Комитета по науке Республики Армения (проект № 23RL-1A027).
Для цитирования: *Петросян А. С., Андриян С. М., Хачатрян Х. А.* Вопросы существования и единственности решения одного класса бесконечной системы нелинейных двумерных уравнений // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 498–511. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-498-511, EDN: HKTFOQ

Article

Questions of existence and uniqueness of the solution of one class of an infinite system of nonlinear two-dimensional equations

H. S. Petrosyan[1✉], S. M. Andriyan[1], Kh. A. Khachatryan[2]

[1]Armenian National Agrarian University, 74 Teryan St., Yerevan 0009, Armenia
[2]Yerevan State University, 1 A. Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia

Haykanush S. Petrosyan, Haykuhi25@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7172-4730
Silva M. Andriyan, smandriyan@hotmail.com, https://orcid.org/0009-0000-6854-1127
Khachatur A. Khachatryan, khachatur.khachatryan@ysu.am, https://orcid.org/0000-0002-4835-943X, AuthorID: 589262

Abstract. The paper is devoted to the study of one class of infinite systems of nonlinear two-dimensional equations with convex and monotone nonlinearity. The studied class of nonlinear systems of algebraic equations has both theoretical and practical significance, in particular, in the study of discrete analogs of problems in dynamic theory of p-adic open-closed strings, in the kinetic theory of gases, in mathematical biology in the study of space-time distribution of epidemics. Existence and uniqueness theorems for a positive solution in a certain class of non-negative and bounded matrices are proved. Some qualitative properties of the solution are revealed. The obtained results supplement and generalize some of the previously obtained ones. Illustrative examples of the corresponding matrices and nonlinearities (including those of an applied nature) that satisfy all the conditions of the formulated theorems are given.
Keywords: infinite matrix, nonlinearity, convexity, successive approximations, monotonicity, uniqueness
Acknowledgements: The work of the third author was supported by the Science Committee of the Republic of Armenian (project No. 23RL-1A027).
For citation: Petrosyan H. S., Andriyan S. M., Khachatryan Kh. A. Questions of existence and uniqueness of the solution of one class of an infinite system of nonlinear two-dimensional equations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 498–511 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-4-498-511, EDN: HKTFOQ

Введение

Рассматривается следующая бесконечная система нелинейных двумерных уравнений:

$$Q(x_{mn}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} P_{ij}\, x_{ij}, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2 := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \tag{1}$$

относительно элементов бесконечной матрицы $X = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ в предположении, что

$$a_{\ell t} > 0, \quad (\ell, t) \in \mathbb{Z}^2, \quad \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_{\ell t} = 1, \tag{2}$$

$$a_{\ell t} = a_{t \ell}, \quad (\ell, t) \in \mathbb{Z}^2, \quad a_{-pt} = a_{pt}, \quad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

$$P_{ij} > 1, \quad P_{ij} = P_{ji}, \quad (i,j) \in \mathbb{Z}^2, \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1) < \infty, \tag{4}$$

$$Q(0) = 0, \quad Q \in C(\mathbb{R}^+), \quad \mathbb{R}^+ := [0, \infty), \tag{5}$$

$$Q \text{ — функция, строго выпуклая вниз и монотонно возрастающая на } \mathbb{R}^+, \tag{6}$$

$$\text{существует число } \eta > 0 \text{ такое, что } Q(\eta) = \eta. \tag{7}$$

Рассматриваемый класс систем уравнений (1) находит применение в различных областях математической физики и математической биологии. В приложениях этот класс наиболее часто встречается в дискретных аналогах задач динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн, кинетической теории газов, теории пространственно-временного моделирования эпидемии (см., например, [1–15] и ссылки в них). Изучению решения указанных задач в непрерывных случаях посвящены, например, работы [1, 4, 13, 16–18], в которых при определённых условиях доказаны теоремы существования и единственности положительного и ограниченного решения, а также изучены их асимптотические свойства.

Следует отметить, что решению систем бесконечных нелинейных алгебраических уравнений для отмеченных выше задач посвящены, например, работы [19–21].

Так, в работе [19] изучен один класс бесконечных систем алгебраических уравнений с монотонной и выпуклой вверх на $\mathbb{R}^+$ нелинейностью G и матрицами $A = (\tilde{a}_{n-j})_{n,j\in\mathbb{Z}}$ типа Теплица:

$$x_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_{n-j}(G(x_j) + h_j(x_j)), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

относительно искомого бесконечного вектора $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)^T$ (T — знак транспонирования), где последовательность монотонных непрерывных на $\mathbb{R}^+$ вещественных функций $(h_j(u))_{j\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет определённым условиям (см. [19]).

Ранее система уравнений (8) на $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ была исследована в [20], а в работе [21] при $h_j \equiv 0$ ($j \in \mathbb{Z}$) был изучен её двумерный аналог.

Отметим, что в [21], в отличие от настоящей работы, подробно исследован один класс системы вида (1) при

$$Q(X) = cX_{cube} + (1-c)X, \quad a_{m-i\,n-j} = \tilde{a}_{m-i} \cdot \tilde{b}_{n-j}, \quad P_{ij} \equiv 1, \quad m, n, i, j \in \mathbb{Z},$$

где $X_{cube} = \left(x^3_{mn}\right)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ — матрица с соответствующими элементами искомой матрицы $X = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$, возведёнными в куб, числовые последовательности $\{\tilde{a}_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ и $\{\tilde{b}_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}$, удовлетворяют определённым условиям, $c \in (0, 1]$ — числовой параметр.

Следует также отметить, что в линейном и одномерном случае система (1) достаточно подробно исследована в работах [22–25].

В настоящей работе исследуемый класс систем уравнений (1) рассматривается на всей плоскости целочисленной решётки $\mathbb{Z}^2$ с общей монотонной и выпуклой вниз нелинейностью Q и с общими матрицами $A = (a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ и $P = (P_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$, удовлетворяющими условиям (5)–(7) и (2)–(4) соответственно. Исследуются вопросы существования и единственности нетривиального решения нелинейной системы (1) в классе неотрицательных и ограниченных бесконечных матриц. Выявляются некоторые качественные свойства построенного решения. Применяя и развивая ранее предложенные методы, доказываются конструктивная теорема существования положительного решения, а также теорема единственности в указанном классе матриц. Результаты, полученные в этой статье, дополняют и обобщают некоторые ранее полученные факты авторов (см. [21]). В конце работы для иллюстрации важности полученных результатов приводятся конкретные примеры соответствующих матриц и нелинейностей, удовлетворяющих всем условиям сформулированных теорем и имеющих как прикладной, так и теоретический интерес.

1. Вспомогательные факты

Решение нелинейной системы уравнений (1) будем искать в следующем классе бесконечных матриц:

$$\mathrm{T} = \left\{(x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} : x_{mn} \geqslant 0, (m,n) \in \mathbb{Z}^2;\ \sup_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} x_{mn} < \infty \text{ и } \exists r \in \mathbb{N}\ s.t.\ c_r > 0\right\}, \tag{9}$$

где

$$c_r := \inf_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus B_r} x_{mn}; \quad B_r := \left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \ |m| \leqslant r,\ |n| \leqslant r\right\}.$$

Прежде чем переходить к решению системы (1), установим два вспомогательных результата, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Лемма 1. *При условиях* (2)–(7) *для любого решения* $X = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in \mathrm{T}$ *нелинейной системы вида* (1) *имеет место следующая оценка снизу:*

$$\chi := \inf_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} x_{mn} > Q^{-1}(\alpha_r), \quad \alpha_r := c_r \sum_{\ell=r+1}^{\infty} \sum_{t=r+1}^{\infty} a_{\ell t} > 0, \tag{10}$$

где Q^{-1} — *обратная функция к функции* Q.

Доказательство. По условиям леммы 1

$$Q(x_{mn}) \geqslant \sum_{i=-\infty}^{-(r+1)} \sum_{j=-\infty}^{-(r+1)} a_{m-i\,n-j} x_{ij} + \sum_{i=-\infty}^{-(r+1)} \sum_{j=r+1}^{\infty} a_{m-i\,n-j} x_{ij} + \sum_{i=r+1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{-(r+1)} a_{m-i\,n-j} x_{ij} +$$
$$+ \sum_{i=r+1}^{\infty} \sum_{j=r+1}^{\infty} a_{m-i\,n-j} x_{ij} \geqslant c_r \Bigg(\sum_{\ell=-\infty}^{-(m+r+1)} \sum_{t=-\infty}^{-(n+r+1)} a_{\ell t} + \sum_{\ell=-\infty}^{-(m+r+1)} \sum_{t=r+1-n}^{\infty} a_{\ell t} +$$
$$+ \sum_{\ell=r+1-m}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{-(n+r+1)} a_{\ell t} + \sum_{\ell=r+1-m}^{\infty} \sum_{t=r+1-n}^{\infty} a_{\ell t} \Bigg) := \sigma_{mn}, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Плоскость целочисленной решётки $\mathbb{Z}^2$ разобьём на четыре части:

$$\Pi_1 = \left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \ m \geqslant 0, \ n \geqslant 0\right\}, \quad \Pi_2 = \left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \ m < 0, \ n > 0\right\},$$
$$\Pi_3 = \left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \ m \leqslant 0, \ n \leqslant 0\right\}, \quad \Pi_4 = \left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \ m > 0, \ n < 0\right\}.$$

На каждом из множеств Π_i $(i = 1,2,3,4)$ оценим снизу вышеопределённые элементы бесконечной матрицы $(\sigma_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$:

- если $(m,n) \in \Pi_1$, то $\sigma_{mn} \geqslant c_r \sum\limits_{\ell=r+1}^{\infty} \sum\limits_{t=r+1}^{\infty} a_{\ell t} = \alpha_r > 0$;
- если $(m,n) \in \Pi_2$, то $\sigma_{mn} \geqslant c_r \sum\limits_{\ell=-\infty}^{-(r+1)} \sum\limits_{t=r+1}^{\infty} a_{\ell t} = c_r \sum\limits_{\ell=r+1}^{\infty} \sum\limits_{t=r+1}^{\infty} a_{\ell t} = \alpha_r$;
- если $(m,n) \in \Pi_3$, то $\sigma_{mn} \geqslant c_r \sum\limits_{\ell=-\infty}^{-(r+1)} \sum\limits_{t=-\infty}^{-(r+1)} a_{\ell t} = \alpha_r$;
- если $(m,n) \in \Pi_4$, то $\sigma_{mn} \geqslant c_r \sum\limits_{\ell=r+1}^{\infty} \sum\limits_{t=-\infty}^{-(r+1)} a_{\ell t} = \alpha_r$.

Так как $\bigcup\limits_{i=1}^{4} \Pi_i = \mathbb{Z}^2$, то для всех пар $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ имеем $\sigma_{mn} \geqslant \alpha_r > 0$. Принимая во внимание свойства (5) и (6) функции Q, описывающей нелинейность системы уравнений (1), получим $x_{mn} \geqslant Q^{-1}(\alpha_r) > 0 \ \forall \ (m,n) \in \mathbb{Z}^2$. Следовательно, по определению инфимума приходим к неравенству (10). Лемма доказана. □

Используя этот факт, мы докажем, что на самом деле для элементов матрицы $X = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ имеет место более точное неравенство.

Лемма 2. *При выполнении условий леммы 1 для любого решения* $X = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in \mathrm{T}$ *нелинейной системы* (1) *имеет место следующая оценка:*

$$\chi \geqslant \eta.$$

Доказательство. Действительно, согласно определению χ и условий (2), (4) из (1) получим

$$Q(x_{mn}) \geqslant \chi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} = \chi, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2,$$

откуда следует, что $x_{mn} \geqslant Q^{-1}(\chi)$ $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$. Тогда по определению инфимума получим $\chi \geqslant Q^{-1}(\chi)$ или

$$Q(\chi) \geqslant \chi. \tag{11}$$

Заметим, что из последнего неравенства следует, что $\chi \geqslant \eta$. Действительно, в противном случае с учётом монотонности функции $\frac{Q(u)}{u}$ на $(0,+\infty)$ будем иметь

$$\frac{Q(\chi)}{\chi} < \frac{Q(\eta)}{\eta} = 1,$$

что невозможно ввиду (11). Таким образом, лемма доказана. □

2. Существование решения систем уравнений вида (1)

Перейдём к построению решения и выявлению основных его свойств. Рассмотрим следующие итерации:

$$Q(x_{mn}^{(k+1)}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} P_{ij}\, x_{ij}^{(k)}, \tag{12}$$

$$x_{mn}^{(0)} \equiv \eta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2. \tag{13}$$

Установим несколько важных свойств, характеризующих итерационные матрицы. Сначала докажем *монотонность итераций* по k:

$$x_{mn}^{(k)} \uparrow \text{ по } k, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2. \tag{14}$$

С учётом (13), (4), (2) и (7) из (12) при $k = 0$ будем иметь

$$Q(x_{mn}^{(1)}) = \eta \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} P_{ij} \geqslant \eta = Q(x_{mn}^{(0)}), \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Предположим, что при некотором натуральном $k = s$ имеют место неравенства $x_{mn}^{(s)} \geqslant x_{mn}^{(s-1)}$ $\big((m,n) \in \mathbb{Z}^2\big)$. Тогда из (12) при $k = s+1$ получим

$$Q(x_{mn}^{(s+1)}) \geqslant \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} P_{ij}\, x_{ij}^{(s-1)} = Q(x_{mn}^{(s)}),$$
$$(m,n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Откуда ввиду условий (5) и (6) приходим к неравенствам $x_{mn}^{(s+1)} \geqslant x_{mn}^{(s)}$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$. Следовательно, монотонность итераций по k доказана.

Теперь докажем *ограниченность итераций по k*. С учётом (2) и (4) положим

$$M := \left(\sup_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}\right) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1). \tag{15}$$

Пусть ξ — абсцисса точки пересечения прямой $y = (1+M)u$ и кривой $y = Q(u)$, существование которой вытекает непосредственно из (5)–(7) (рис. 1):

$$Q(\xi) = (1+M)\xi. \tag{16}$$

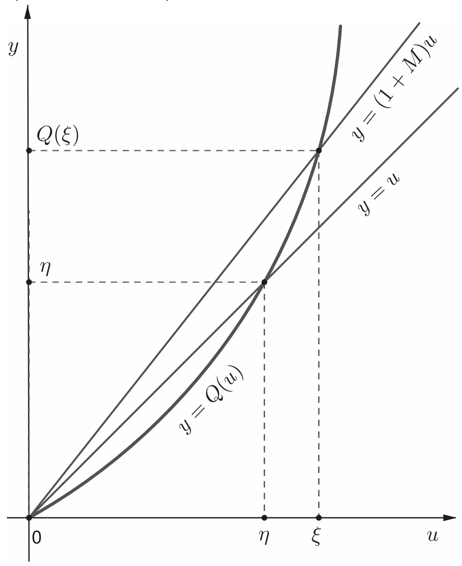


Рис. 1. Эскизы графиков функций $y = (1+M)u$ и $y = Q(u)$ на $\mathbb{R}^+$

Fig. 1. Sketches of function graphs $y = (1+M)u$ and $y = Q(u)$ on $\mathbb{R}^+$

Учитывая условия (5)–(7), несложно проверить, что $\xi > \eta$.

Применением индукции по k покажем, что

$$x_{mn}^{(k)} < \xi, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2, \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{17}$$

При $k = 0$ неравенства (17) выполняются автоматически. Пусть (17) имеет место при некотором $s \in \mathbb{N}$. Тогда, имея в виду индукционное предположение и (2), (4), (15), (16), из (12) будем иметь

$$Q(x_{mn}^{(s+1)}) < \xi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} P_{ij} =$$

$$= \xi\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j}(P_{ij}-1) + \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_{\ell t}\Big) \leqslant \xi(M+1) = Q(\xi), \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Применением обратной функции Q^{-1} приходим к утверждению (17) при $k = s+1$, откуда вытекает ограниченность итераций по k.

Следовательно, построенные посредством итераций (12) и (13) элементы матриц ограничены как снизу, так и сверху:

$$\eta \leqslant x_{mn}^{(k)} < \xi, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2, \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{18}$$

Таким образом, последовательность матриц $\left\{ (x_{mn}^{(k)})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \right\}_{k=0}^{\infty}$ при каждой фиксированной паре $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ имеет предел, когда $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} x_{mn}^{(k)} = x_{mn}, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Так как $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} P_{ij}\, x_{ij}^{(k)} \leqslant \xi(M+1)$ $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2$ и $Q \in C(\mathbb{R}^+)$, то предельная матрица $X = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ удовлетворяет нелинейной системе уравнений (1). Более того, в силу (18) имеют место двойные оценки:

$$\eta \leqslant x_{mn} \leqslant \xi, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2. \tag{19}$$

Замечание 1. На самом деле в левой части (19) имеют место строгие неравенства

$$x_{mn} > \eta, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2. \tag{20}$$

Действительно,

$$Q(x_{mn}) \geqslant \eta \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} P_{ij} > \eta, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2,$$

откуда имеем

$$x_{mn} > Q^{-1}(\eta) = \eta, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Таким образом, согласно (19) и (20) имеем

$$\eta < x_{mn} \leqslant \xi, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2. \tag{21}$$

Замечание 2. Отметим также, что для элементов последовательности матриц

$$\left\{ (x_{mn}^{(k)})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \right\}_{k=0}^{\infty},$$

начиная с номера $k = 1$, имеют место строгие неравенства

$$x_{mn}^{(k)} > \eta, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Действительно, ввиду монотонности $x_{mn}^{(k)}$ по k (см. (14)), (2), (4) и (5)–(7) имеем

$$x_{mn}^{(k)} \geqslant Q^{-1}\left(\eta \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} P_{ij}\right) > \eta, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Далее, покажем существование такого числа $C > 0$, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn}^{(k)} - \eta) \leqslant C, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{22}$$

Сначала индукцией по k докажем сходимость ряда

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn}^{(k)} - \eta) < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

При $k = 0$ утверждение (23) вытекает непосредственно из определения нулевого приближения (13). Пусть (23) имеет место при некотором $k \in \mathbb{N}$. Тогда, имея в виду (2), (4), (17) и индукционное предположение, из (12) при $k + 1$ будем иметь

$$0 < Q(x_{mn}^{(k+1)}) - \eta = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j}(P_{ij} - 1)x_{ij}^{(k)} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j}(x_{ij}^{(k)} - \eta) \leqslant$$

$$\leqslant \xi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j}(P_{ij} - 1) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j}\,(x_{ij}^{(k)} - \eta), \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \tag{24}$$

(неравенства $Q(x_{mn}^{(k)}) > \eta$ имеют место ввиду (21) и монотонности функции Q). Так как правая часть неравенства (24) является элементом сходящего ряда, то по признаку сравнения сходящихся рядов с учётом (2), (4) и индукционного предположения получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (Q(x_{mn}^{(k+1)}) - \eta) \leqslant \xi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (x_{ij}^{(k)} - \eta) < \infty. \tag{25}$$

С другой стороны, на основании замечания 2 и (5)–(7) для всякого $\varepsilon \in (0, 1)$ имеют место оценки (рис. 2):

$$\frac{Q(x_{mn}^{(k+1)}) - \eta}{x_{mn}^{(k+1)} - \eta} \geqslant \frac{\eta - Q(\varepsilon\eta)}{\eta - \varepsilon\eta} > 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2. \tag{26}$$

В результате использования оценки (26) неравенство (25) примет вид

$$\frac{\eta - Q(\varepsilon\eta)}{(1 - \varepsilon)\eta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn}^{(k+1)} - \eta) \leqslant \xi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (x_{ij}^{(k)} - \eta), \tag{27}$$

из которого следует сходимость ряда (23) при $k + 1$, а следовательно, справедливость (23).

Учитывая монотонность по k последовательности $\left\{(x_{mn}^{(k)})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}\right\}_{k=0}^{\infty}$, из (27) получим

$$\frac{\varepsilon\eta - Q(\varepsilon\eta)}{(1 - \varepsilon)\eta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn}^{(k+1)} - \eta) \leqslant \xi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1),$$

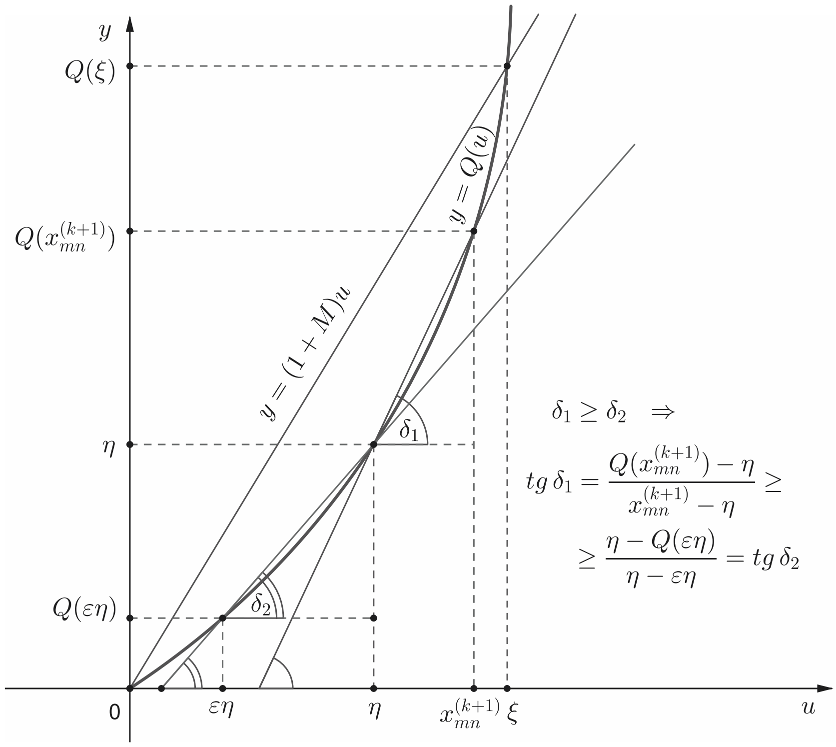


Рис. 2. Эскиз графика функции $y = Q(u)$ на $[0, \xi]$
Fig. 2. Sketch of function graph $y = Q(u)$ on $[0, \xi]$

откуда вытекает справедливость утверждения (22):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn}^{(k+1)} - \eta) \leqslant \frac{(1-\varepsilon)\eta\,\xi}{\varepsilon\eta - Q(\varepsilon\eta)} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1) := C < +\infty.$$

Устремляя $k \to \infty$, получаем главный вывод из вышеприведённых рассуждений: двойной ряд, составленный из разности элементов предельной матрицы $X = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ и числа η, удовлетворяет следующей оценке:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) \leqslant \frac{(1-\varepsilon)\eta\,\xi}{\varepsilon\eta - Q(\varepsilon\eta)} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (P_{ij} - 1), \tag{28}$$

и, следовательно, ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) < \infty \tag{29}$$

сходится.

Предварительно отметим, что основываясь на этом факте, ниже мы докажем теорему единственности решения.

Итак, на основании изложенного выше и утверждения леммы 2 справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *В условиях леммы 2 нелинейная система уравнений вида (1) имеет положительное решение $X = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$. Более того, элементы матрицы X обладают свойствами (21) и (28).*

3. Единственность решения системы уравнений (1)

Перейдём к изучению вопроса единственности решения системы уравнений (1) в классе T. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда в классе* T *нелинейная система уравнений вида* (1) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим обратное: пусть в классе T система (1) имеет два различных решения $X = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ и $\tilde{X} = (\tilde{x}_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$: $X, \tilde{X} \in \mathrm{T}$ и $X \not\equiv \tilde{X}$. Следовательно, для рассматриваемых матриц имеем следующее подмножество пар целых индексов:

$$\mathcal{E} := \left\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \ X = (x_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}, \tilde{X} = (\tilde{x}_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in \mathrm{T} \text{ и } x_{mn} \neq \tilde{x}_{mn}\right\} \neq \varnothing. \quad (30)$$

Согласно (1) имеем

$$\left|Q(x_{mn}) - Q(\tilde{x}_{mn})\right| \leqslant \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} P_{ij} \left|x_{ij} - \tilde{x}_{ij}\right|. \quad (31)$$

Покажем равномерную сходимость ряда правой части неравенства (31). Имея в виду (9), (2) и (15), будем иметь

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} P_{ij} \left|x_{ij} - \tilde{x}_{ij}\right| \leqslant \left(\sup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} x_{ij} + \sup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \tilde{x}_{ij}\right) \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} P_{ij} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} x_{ij} + \sup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \tilde{x}_{ij}\right) \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j}(P_{ij} - 1) + \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} x_{ij} + \sup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \tilde{x}_{ij}\right)(M+1) := C_0 < \infty. \quad (32)$$

Далее, покажем сходимость ряда $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta)P_{mn}$. Действительно, на основании (19), (4) и (29) имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta)P_{mn} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta)(P_{mn} - 1) + \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) \leqslant$$
$$\leqslant (\xi - \eta) \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (P_{mn} - 1) + \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta) < \infty,$$

откуда ввиду (32) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta)P_{mn} \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} P_{ij} \left|x_{ij} - \tilde{x}_{ij}\right| < +\infty. \quad (33)$$

Умножим обе части неравенства (31) на $(x_{mn} - \eta)P_{mn} > 0$ (или на $(\tilde{x}_{mn} - \eta)P_{mn} > 0$) и на основании (33) просуммируем по всем индексам m и n от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда с учётом (3), (1) и (2) получим следующую цепочку неравенств:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta)P_{mn}\left|Q(x_{mn}) - Q(\tilde{x}_{mn})\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_{mn} - \eta)P_{mn} \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{m-i\,n-j} P_{ij} \left|x_{ij} - \tilde{x}_{ij}\right| =$$
$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} P_{ij} \left|x_{ij} - \tilde{x}_{ij}\right| \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{i-m\,j-n} P_{mn}(x_{mn} - \eta) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_{ij}\, |x_{ij} - \tilde{x}_{ij}| \Big(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{i-m\, j-n} P_{mn} x_{mn} - \eta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{i-m\, j-n} \Big) =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_{ij}\, |x_{ij} - \tilde{x}_{ij}|\, (Q(x_{ij}) - \eta).$$

Отсюда имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{mn} \Big((x_{mn} - \eta) \big| Q(x_{mn}) - Q(\tilde{x}_{mn}) \big| - (Q(x_{mn}) - \eta)\, |x_{mn} - \tilde{x}_{mn}| \Big) \leqslant 0. \tag{34}$$

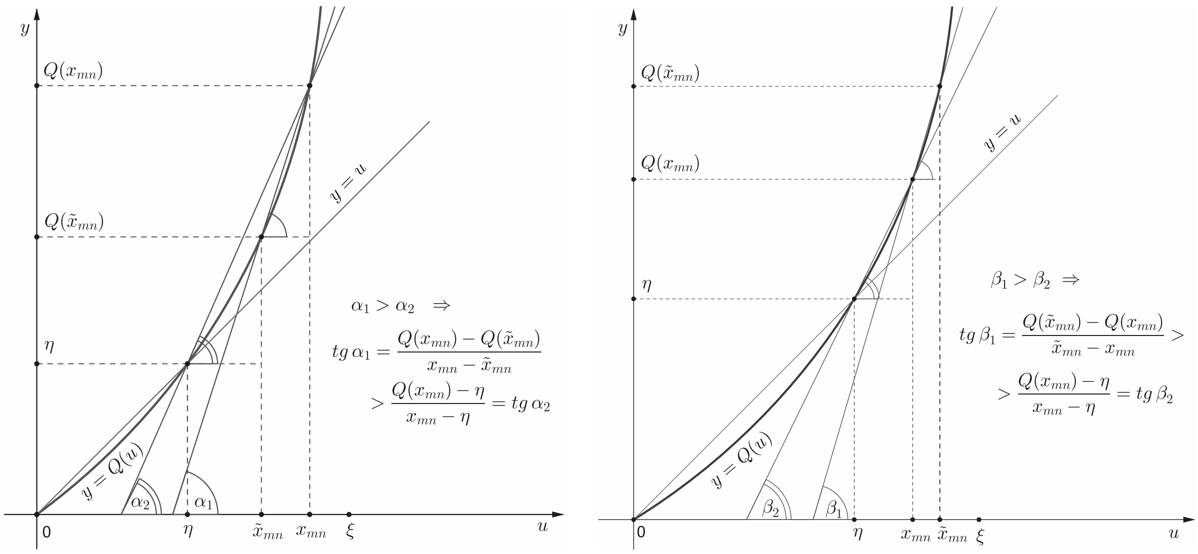
Следовательно, в силу определения множества $\mathcal{E}$ (см. (30)) и с учётом (20) можно (34) записать в виде

$$\sum_{(m,n)\in\mathcal{E}} P_{mn}\, (x_{mn} - \eta)\, |x_{mn} - \tilde{x}_{mn}| \left(\left| \frac{Q(x_{mn}) - Q(\tilde{x}_{mn})}{x_{mn} - \tilde{x}_{mn}} \right| - \frac{Q(x_{mn}) - \eta}{x_{mn} - \eta} \right) \leqslant 0. \tag{35}$$

Опираясь на свойства функции Q, несложно убедиться (рис. 3), что

$$\left| \frac{Q(x_{mn}) - Q(\tilde{x}_{mn})}{x_{mn} - \tilde{x}_{mn}} \right| - \frac{Q(x_{mn}) - \eta}{x_{mn} - \eta} > 0.$$

С учётом последнего неравенства в (35) приходим к противоречию. Следовательно, $X \equiv \tilde{X}$. □



а / a *б / b*

Рис. 3. Пересечение графика функции $y = Q(u)$ с прямыми, проходящими через точки $(x_{mn}, Q(x_{mn}))$, (η, η), $(\tilde{x}_{mn}, Q(\tilde{x}_{mn}))$: *а* — $x_{mn} > \tilde{x}_{mn}$; *б* — $x_{mn} < \tilde{x}_{mn}$

Fig. 3.The intersection of the graph of the function $y = Q(u)$ with straight lines passing through the points $(x_{mn}, Q(x_{mn}))$, (η, η), $(\tilde{x}_{mn}, Q(\tilde{x}_{mn}))$: *a* is $x_{mn} > \tilde{x}_{mn}$; *b* is $x_{mn} < \tilde{x}_{mn}$

4. Примеры

Действенность полученных теорем проиллюстрируем несколькими примерами матриц $A = (a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ и $P = (P_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ и функции Q, описывающей нелинейность системы уравнений (1), удовлетворяющих всем условиям сформулированных теорем.

• Примеры матрицы $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$:

(A_1). $a_{mn} = \frac{(e-1)^4}{4e^2} e^{-|m|-|n|}$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$;

(A_2). $a_{mn} = \left(\Theta_3\left(0, \frac{1}{e}\right)\right)^{-2} e^{-|m|^2-|n|^2}$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $\Theta_3(z,q) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2niz}$ $(|q| < 1)$ — тета-функция Якоби (рис. 4);

(A_3). $a_{mn} = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2 q^{|m|+|n|}$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $0 < q < 1$ — произвольное число;

(A_4). $a_{mn} = (2e^r - 1)^{-2} \frac{r^{|m|+|n|}}{|mn|!}$, $a_{mn} = (2\sqrt[r]{e} - 1)^{-2} \frac{r^{-|m|-|n|}}{|mn|!}$, $a_{mn} = (e^r + \sqrt[r]{e} - 1)^{-2} \frac{r^{m+n}}{|mn|!}$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $r > 0$ — произвольное число;

(A_5). $a_{mn} = \frac{\mathrm{th}^2(\pi)}{\pi^2} \frac{1}{(1+m^2)(1+n^2)}$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $\mathrm{th}(\pi) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{e^\pi + e^{-\pi}}$;

(A_6). $a_{mn} = (2\cdot\zeta(2k) - 1)^{-2}(1+|m|)^{-2k}(1+|n|)^{-2k}$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $k > \frac{1}{2}$ — произвольное число, ζ — дзета-функция Римана.

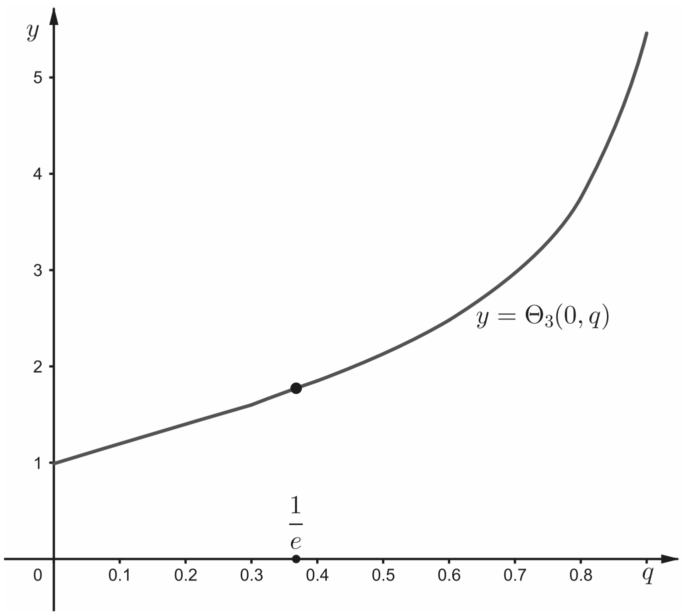


Рис. 4. График функции $y = \Theta_3(0,q)$ на $[0, 0.9)$
Fig. 4. Graph of the function $y = \Theta_3(0,q)$ on $[0, 0.9)$

Остановимся на примере (A_6). Первое условие в (2) и условия в (3) автоматически выполняются. Покажем, что имеет место и второе условие в (2). Для этого достаточно убедиться, что $\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|m|)^{2k}} = 2\zeta(2k) - 1$, $k > \frac{1}{2}$.

Действительно, при $k > \frac{1}{2}$ имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|m|)^{2k}} = 1 + 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+p)^{2k}} = 1 + 2\left(\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s^{2k}} - 1\right) = 2\zeta(2k) - 1.$$

• Примеры матрицы $(P_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$:

(P_1). $P_{ij} = 1 + |ij|^\alpha e^{-|i|-|j|}$, $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, $\alpha > 0$ — произвольное число;

(P_2). $P_{ij} = 1 + e^{-|i|^2-|j|^2}$, $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$;

(P_3). $P_{ij} = 1 + \frac{1}{(1+i^2)(1+j^2)}$, $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$;

(P_4). $P_{ij} = 1 + \frac{1}{(1+i^2+j^2)^\alpha}$, $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, $\alpha > 1$ — произвольное число;

(P_5). $P_{ij} = 1 + \frac{1}{|ij|!}$, $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$.

• Примеры нелинейности Q:

(Q_1). $Q(u) = u^p$, $u \in \mathbb{R}^+$, где $p \geqslant 2$ — произвольное число;

(Q_2). $Q(u) = cu^p + (1-c)u$, $u \in \mathbb{R}^+$, где $c \in (0,1]$ — числовой параметр и $p \geqslant 2$ — произвольное число;

(Q_3). $Q(u) = \delta^u - 1$, $u \in \mathbb{R}^+$, где $\delta > 1$ — произвольное число;

(Q_4). $Q(u) = u^p \ln(u+1)$, $u \in \mathbb{R}^+$, где $p \geqslant 2$ — произвольное число.

Список литературы

1. *Владимиров В. С., Волович Я. И.* О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // Теоретическая и математическая физика. 2004. Т. 138, № 3. С. 355–368. https://doi.org/10.4213/tmf36
2. *Владимиров В. С.* О нелинейных уравнениях p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн // Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 149, № 3. С. 354–367. https://doi.org/10.4213/tmf5522
3. *Жуковская Л. В.* Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 146, № 3. С. 402–409. https://doi.org/10.4213/tmf2043
4. *Diekmann O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // Journal of Mathematical Biology. 1978. Vol. 6, iss. 2. P. 109–130. https://doi.org/10.1007/BF02450783
5. *Danchenko V. I., Rubay R. V.* On integral equations of stationary distributions for biological systems // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 171, iss. 1. P. 34–45. https://doi.org/10.1007/s10958-010-0124-6
6. *Cercignani C.* Theory and application of the Boltzmann equation. Edinburgh : Scottish Academic Press ; London : Distributed by Chatto and Windus, 1975. 415 p.
7. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. Москва : Наука, 1967. 440 с.
8. *Villani C.* Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true // Communications in Mathematical Physics. 2003. Vol. 234, iss. 3, pp. 455–490. https://doi.org/10.1007/s00220-002-0777-1
9. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Аналитическое описание скин-эффекта в металле с использованием двухпараметрического кинетического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 10. С. 1861–1872. https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf767
10. *Barichello L. B., Siewert C. E.* The temperature-jump problem in rarefied gas dynamics // European Journal of Applied Mathematics. 2000. Vol. 11, iss. 4. P. 353–534. https://doi.org/10.1017/S0956792599004180
11. *Moeller N., Schnabl M.* Tachyon condensation in open-closed p-adic string theory // Journal of High Energy Physics. 2004. Vol. 2004, iss. 1. Art. 011. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/01/011
12. *Aref'eva I. Ya., Dragovic B. G.,Volovich I. V.* p-adic superstrings // Physics Letters B. 1988. Vol. 214, iss. 3. P. 339–349. https://doi.org/10.1016/0370-2693(88)91374-3
13. *Diekmann O., Kaper H. G.* On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 1978. Vol. 2, iss. 6. P. 721–737. https://doi.org/10.1016/0362-546X(78)90015-9
14. *Volovich I. V.* p-adic string // Classical Quantum Gravity. 1987. Vol. 4, iss. 4. P. L83–L87. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/4/4/003
15. *Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A.* On solvability of one infinite system of nonlinear functional equations in the theory of epidemics // Eurasian Mathematical Journal. 2020. Vol. 11, iss. 2. P. 52–64. https://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-2-52-64
16. *Хачатрян Х. А.* Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2020. Т. 84, № 4. С. 198–207. https://doi.org/10.4213/im8898
17. *Atkinson C., Reuter G. E. H.* Deterministic epidemic waves // Mathematical Proceeding of the Cambridge Philosophical Society. 1976. Vol. 80, iss. 2. P. 315–330. https://doi.org/10.1017/S0305004100052944
18. *Владимиров В. С.* К вопросу несуществования решений уравнений p-адических струн // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 174, № 2. С. 208–215. https://doi.org/10.4213/tmf8390
19. *Аветисян М. О., Хачатрян Х. А.* О качественных свойствах решения для одной системы нелинейных бесконечных алгебраических уравнений // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24, № 4. С. 5–18. https://doi.org/10.46698/z4764-9590-5591-k
20. *Khachatryan Kh. A., Broyan M. F.* One-parameter family of positive solutions for a class of nonlinear infinite algebraic systems with Teoplitz – Hankel type matrices // Journal of Contemporary Mathematical Analysis. 2013. Vol. 48, iss. 5. P. 209–220 https://doi.org/10.3103/S1068362313050026
21. *Хачатрян Х. А., Андриян С. М.* О разрешимости одного класса дискретных матричных уравне-

ний с кубической нелинейностью // Украинский математический журнал. 2019. Т. 71, № 12. С. 1667–1683.
22. *Арабаджян Л. Г.* Об одной бесконечной алгебраической системе в нерегулярном случае // Математические заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 3–11. https://doi.org/10.4213/mzm6578
23. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Серия: Математический анализ. 1984. Т. 22. С. 175–244. https://www.mathnet.ru/rus/intm72
24. *Суетин П. К.* Решение уравнений в дискретных свертках в связи с некоторыми задачами из радиотехники // Успехи математических наук. 1989. Т. 44, № 5 (269). С. 97–116. https://www.mathnet.ru/rus/rm1917
25. *Карапетянц Н. К., Самко С. Г.* О дискретных операторах Винера – Хопфа с осциллирующими коэффициентами // Доклады АН СССР. 1971. Т. 200, № 1. С. 17–20. https://www.mathnet.ru/rus/dan36384

References

1. Vladimirov V. S., Volovich Ya. I. Nonlinear dynamics equation in p-adic string theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 138, iss. 3, pp. 297–309. https://doi.org/10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29
2. Vladimirov V. S. Nonlinear equations for p-adic open, closed, and open-closed strings. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2006, vol. 149 iss. 3, pp. 1604–1616. https://doi.org/10.1007/s11232-006- 0144-z
3. Zhukovskaya L. V. Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2006, vol. 146, iss. 3, pp. 335–342. https://doi.org/10.1007/s11232-006-0043-3
4. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. *Journal of Mathematical Biology*, 1978, vol. 6, iss. 2, pp. 109–130. https://doi.org/10.1007/BF02450783
5. Danchenko V. I., Rubay R. V. On integral equations of stationary distributions for biological systems. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 171, iss. 1, pp. 34–45. https://doi.org/10.1007/s10958-010-0124-6
6. Cercignani C. *Theory and application of the Boltzmann equation*. Edinburgh, Scottish Academic Press; London, Distributed by Chatto and Windus, 1975. 415 p.
7. Kogan M. *Rarefied Gas Dynamics*. Springer, New York, 1969. 515 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-6381-9 (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1967. 440 p.).
8. Villani C. Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true. *Communications in Mathematical Physics*, 2003, vol. 234, iss. 3, pp. 455–490. https://doi.org/10.1007/s00220-002-0777-1
9. Latyshev A. V., Yushkanov A. A. An analytical description of the skin effect in a metal by using a two-parameter kinetic equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, iss. 10, pp. 1773–1783. https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf/v44/i10/p1861
10. Barichello L. B., Siewert C. E. The temperature-jump problem in rarefied gas dynamics. *European Journal of Applied Mathematics*, 2000, vol. 11, iss. 4, pp. 353–534. https://doi.org/10.1017/S0956792599004180
11. Moeller N., Schnabl M. Tachyon condensation in open-closed p-adic string theory. *Journal of High Energy Physics*, 2004, vol. 2004, iss. 1, art. 011. https://doi.org/10.1088/1126-6708/2004/01/011
12. Aref'eva I. Ya., Dragovic B. G.,Volovich I. V. p-adic superstrings. *Physics Letters B*, 1988, vol. 214, iss. 3, pp. 339–349. https://doi.org/10.1016/0370-2693(88)91374-3
13. Diekmann O., Kaper H. G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1978, vol. 2, iss. 6, pp. 721–737. https://doi.org/10.1016/0362-546X(78)90015-9
14. Volovich I. V. p-adic string. *Classical Quantum Gravity*, 1987, vol. 4, iss. 4, pp. L83–L87. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/4/4/003
15. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. On solvability of one infinite system of nonlinear functional equations in the theory of epidemics. *Eurasian Mathematical Journal*, 2020, vol. 11, iss. 2, pp. 52–64. https://doi.org/10.32523/2077-9879-2020-11-2-52-64
16. Khachatryan Kh. A. Existence and uniqueness of solution of a certain boundary-value problem for a convolution integral equation with monotone non-linearity. *Izvestiya: Mathematics*, 2020, vol. 84, iss. 4, pp. 807–815. https://doi.org/10.1070/IM8898
17. Atkinson C., Reuter G. E. H. Deterministic epidemic waves. *Mathematical Proceeding of the*

Cambridge Philosophical Society, 1976, vol. 80, iss. 2, pp. 315–330. https://doi.org/10.1017/S0305004100052944
18. Vladimirov V. S. Nonexistence of solutions of the p-adic strings. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2013, vol. 174, iss. 2, pp. 178–185. https://doi.org/10.1007/s11232-013-0015-3
19. Avetisyan M. O., Khachatryan Kh. A. On the qualitative properties of a solution for a system of infinite nonlinear algebraic equations. *Vladikavkaz Mathematical Journal*, vol. 24, iss. 4, pp. 5–18 (in Russian). https://doi.org/10.46698/z4764-9590-5591-k
20. Khachatryan Kh. A., Broyan M. F. One-parameter family of positive solutions for a class of nonlinear infinite algebraic systems with Teoplitz – Hankel type matrices. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2013, vol. 48, iss. 5, pp. 209–220. https://doi.org/10.3103/S1068362313050026
21. Khachatryan K. A., Andriyan S. M. On the solvability of a class of discrete matrix equations with cubic nonlinearity. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2020, vol. 71, pp. 1910–1928. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01755-4
22. Arabadzhyan L. G. An infinite algebraic system in the irregular case. *Mathematical Notes*, 2011, vol. 89, iss. 1, pp. 3–10. https://doi.org/10.1134/S0001434611010019
23. Arabadzhyan L. G., Engibaryan N. B. Convolution equations and nonlinear functional equations. *Journal of Soviet Mathematics*, 1987, vol. 36, iss. 6, pp. 745–791. https://doi.org/10.1007/BF01085507
24. Suetin P. K. Solution of discrete convolution equations in connection with some problems of radio engineering. *Russian Mathematical Surveys*, 1989, vol. 44, iss. 5, pp. 119–143. https://doi.org/10.1070/RM1989v044n05ABEH002206
25. Karapetjanc N. K., Samko S. G. The discrete Wiener – Hopf operators with oscillating coefficients. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1971, vol. 200, iss. 1, pp. 17–20 (in Russian). https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0287338

Поступила в редакцию / Received 20.04.2023
Принята к публикации / Accepted 03.07.2023
Опубликована / Published 29.11.2024