



Юбилей

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 442–453

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 442–453

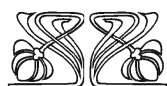
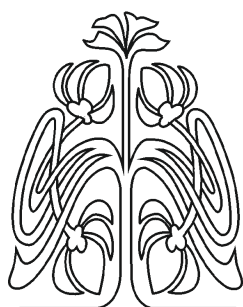
<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-442-453>

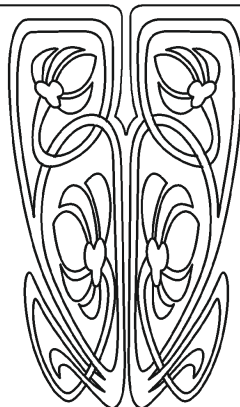
EDN: <https://elibrary.ru/EVXYVR>

Персоналия

УДК 51(092)



Приложение



Наследие Вагнера. К 90-летию кафедры геометрии Саратовского государственного университета

Д. А. Бредихин¹, Н. Н. Макеев², В. Б. Поплавский¹✉

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²Независимый исследователь, Россия, г. Саратов

Бредихин Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии, Bredikhin@mail.ru, ORCID: [0000-0003-3600-1294](https://orcid.org/0000-0003-3600-1294), SPIN: [2239-2268](https://orcid.org/2239-2268), AuthorID: [2925](https://orcid.org/2925)

Макеев Николай Николаевич, доктор физико-математических наук, nmakeyev@mail.ru, ORCID: [0000-0003-2807-977X](https://orcid.org/0000-0003-2807-977X), SPIN: [7373-7840](https://orcid.org/7373-7840), AuthorID: [374535](https://orcid.org/374535)

Поплавский Владислав Брониславович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой геометрии, poplavskivb@mail.ru, SPIN: [7571-1651](https://orcid.org/7571-1651), AuthorID: [628968](https://orcid.org/628968)

Аннотация. Статья посвящена 90-летию кафедры геометрии Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского, основанной выдающимся математиком, заслуженным деятелем науки Виктором Владимировичем Вагнером. Приводится краткое описание научного творчества В. В. Вагнера и основных достижений в области геометрии, алгебры и их применений. Отмечаются перспективы дальнейшего развития основанных им научных направлений исследования.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, история геометрии, Виктор Владимирович Вагнер, история математики в Саратовском государственном университете

Для цитирования: Бредихин Д. А., Макеев Н. Н., Поплавский В. Б. Наследие Вагнера. К 90-летию кафедры геометрии Саратовского государственного университета // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 442–453. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-442-453](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-442-453), EDN: [EVXYVR](https://orcid.org/EVXYVR)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Legacy of Viktor Wagner. On the 90th anniversary of the Department of Geometry of Saratov State University

D. A. Bredikhin¹, N. N. Makeev², V. B. Poplavski¹✉

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

²Independent researcher, Saratov, Russia

Dmitry A. Bredikhin, Bredikhin@mail.ru, ORCID: [0000-0003-3600-1294](https://orcid.org/0000-0003-3600-1294), SPIN: 2239-2268, AuthorID: 2925
Nikolay N. Makeev, nmakeyev@mail.ru, ORCID: [0000-0003-2807-977X](https://orcid.org/0000-0003-2807-977X), SPIN: 7373-7840, AuthorID: 374535
Vladislav B. Poplavski, poplavskivb@mail.ru, SPIN: [7571-1651](https://orcid.org/0000-0003-2807-977X), AuthorID: 628968

Abstract. The article is dedicated to the 90th anniversary of the Department of Geometry of Saratov State University, which was founded by the outstanding mathematician, honored scientist Viktor Vladimirovich Wagner. A brief description of the scientific work of V. V. Wagner and the main achievements in the field of geometry, algebra, and their applications is given. Prospects for further development of the scientific research areas founded by him are noted.

Keywords: differential geometry, history of geometry, Viktor Vladimirovich Wagner, history of mathematics at Saratov State University

For citation: Bredikhin D. A., Makeev N. N., Poplavski V. B. Legacy of Viktor Wagner On the 90th anniversary of the Department of Geometry of Saratov State University. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 442–453 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-442-453](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-442-453), EDN: EVXYVR

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

В далеком 1935 г. на базе кафедры высшей математики, входившей в состав физико-математического факультета Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (далее — Саратовский университет), невероятными усилиями ректора-реформатора Гавриила Кирилловича Хворостина было организовано пять новых математических кафедр, в том числе кафедра геометрии. Руководить кафедрой геометрии пригласили Виктора Владимировича Вагнера.

Название кафедры было выбрано кратким, но очень ёмким. Измерить Землю! Тем самым изначально закладывалось разнообразие научных направлений и методов исследования кафедры, что стало ее традицией.

Выдающуюся роль сыграл Виктор Владимирович Вагнер своими достижениями в науке, создав различные направления в дифференциальной геометрии, приложениях в механике, вариационном исчислении, общей и универсальной алгебре и логике. Огромна его роль и в подготовке квалифицированных кадров — студентов, кандидатов и докторов наук.

Целая плеяда выдающихся учеников Вагнера трудилась и трудится на поприще науки и преподавания, продолжая преемственность поколений. Как и прежде, научная и учебная деятельность сотрудников кафедры геометрии связана с разнообразными направлениями геометрии, топологии, алгебры и логики. Созданная в трудное для страны время усилиями выдающихся ученых и педагогов кафедра и сегодня выполняет свои задачи.

Юбилею кафедры и её создателю посвящается эта статья.

Виктор Владимирович Вагнер

Выдающийся деятель науки, основатель научной геометрической и алгебраической школ в Саратовском университете, лауреат Международной математической премии имени



Н. И. Лобачевского, автор ряда фундаментальных математических трудов, профессор Виктор Владимирович Вагнер (4.11.1908–15.08.1981) является основателем кафедры геометрии Саратовского университета, которой в 2025 г. исполняется 90 лет.

В. В. Вагнер относится к тем неординарным личностям, деятелям науки, чей талант, высокие нравственные качества и профессионализм формируют творческую личность, своим трудом вносящую весомый вклад в избранную им науку. Научные направления, творческие идеи, заложенные В. В. Вагнером, живут и успешно развиваются и в наши дни.

Творческая научно-педагогическая деятельность В. В. Вагнера в Саратовском университете началась осенью 1935 г., когда он в 27-летнем возрасте, завершив обучение в Институте математики МГУ имени М. В. Ломоносова, под руководством профессора В. Ф. Кагана защитил диссертацию на тему «*Sur la geometrie differentielle des multiplicities anholonomes*» («Дифференциальная геометрия неголономных многообразий») [1], представленную к защите как кандидатскую и в итоге на этом же заседании учёного совета успешно защищённую им (при единогласном голосовании) как докторскую диссертацию [2]. Это был первый случай подобного рода в стране; такое решение было принято ввиду исключительной важности, значимости и глубины научных результатов, полученных им в представленной работе [3]. В том же году ему было предложено возглавить вновь образованную кафедру геометрии на физико-математическом (впоследствии механико-математическом) факультете Саратовского университета. С тех пор вся трудовая деятельность В. В. Вагнера была связана с этой кафедрой, существующей и до настоящего времени. Более сорока лет (до 1978 г.) он являлся её бессменным руководителем, организатором научной и педагогической деятельности, внёс неоценимый вклад в обеспечение высокого научного уровня преподавания математических дисциплин в университете.

Научная деятельность В. В. Вагнера в Саратовском университете привела к созданию геометрической и алгебраической научных школ, получивших всеобщее мировое признание. На протяжении многих лет он вёл активную и разностороннюю творческую деятельность, выступал с научными докладами на международных математических конгрессах: в Эдинбурге (1958 г., Шотландия), в Стокгольме (1962 г., Швеция), в Варне (Болгарский математический конгресс, 1967 г., Болгария). При этом каждое своё выступление он проводил на языке той страны, в которой проходил конгресс [4].

В нашей стране В. В. Вагнер выступал на 15-м Международном математическом конгрессе (Москва, 1966 г.), а также на конференциях в Казани (юбилейные конференции: 1955 г.; 150 лет геометрии Лобачевского, 1976 г.), Москве (16-я Всесоюзная алгебраическая конференция, 1981 г.) и на Третьем Всесоюзном математическом съезде (Москва, 1962 г.). В течение ряда лет он читал лекции по приглашению университетов Франции, Австрии, Италии, Швеции, ГДР, Чехословакии [4].

Научные интересы В. В. Вагнера отличались разносторонностью, многообразием направлений и глубиной исследований. Это отражено в статьях, опубликованных в журнале «Успехи математических наук» в связи с его 50-летием [2] и 70-летием [3], а также в Большой советской энциклопедии, в «Биографическом словаре деятелей в области математики» (А. И. Бородин, А. С. Бугай, Киев, 1979 г.), а также в отечественных биографических литературных источниках (Бородин А. И. Советские математики. Донецк, 1978; Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики. Киев, 1987; Математика в СССР за сорок лет (1917–1957) : в 2 т. Москва, 1959. Т. 2; Математика в СССР, 1958–1967 : в 2 т. Москва, 1969–1970. Т. 2), в ряде отечественных и зарубежных книжных изданий [2, 3].

Дифференциальная геометрия

Теория неголономных многообразий — раздел геометрии, который избрал В. В. Вагнер для своей первой научной работы. Примечательно, что наглядным прообразом его исследования явился конкретный модельный объект теоретической механики — механическая си-



стема с неголономной стационарной двусторонней удерживающей связью. И в этом проявилась концептуальная логическая связь геометрии с рациональной механикой.

Завершив создание теории кривизны неголономных многообразий, построенной в период обучения в аспирантуре, В. В. Вагнер подробно исследует некоторые наиболее перспективные специальные неголономные многообразия. Методы неголономной геометрии он применяет к конкретной задаче динамики механических систем и находит её решение в компактной изящной форме. Рассмотренный им пример движения для механической модели специальной конструкции с неголономной связью описан в книге [5].

Первые научные работы В. В. Вагнера относятся к общей теории неголономных многообразий; в этих работах построена теория кривизны римановых неголономных многообразий и неголономных многообразий с аффинной связностью. Эта теория является математическим фундаментом решения многих принципиально важных задач классической рациональной механики, относящихся к системам с неголономными связями. В данной теории определяющее значение имеет построение адекватной теории кривизны такого рода пространств. В. В. Вагнер не только применил новый подход к построению теории кривизны неголономных многообразий, существенно усовершенствовав результаты выдающегося нидерландского геометра Я. А. Схоутена (1883–1981 гг.), но и рассмотрел некоторые интересные для приложений виды неголономных многообразий, а также применил развитые им методы для решения конкретных задач механики. Именно из этого цикла работ В. В. Вагнером были представлены две работы на VIII Международный конкурс, объявленный Казанским университетом в 1937 г., и обе работы были удостоены премии имени Н. И. Лобачевского [6]. Он — единственный из советских математиков, ставший лауреатом этой престижной премии.

Говоря об отражении идей В. В. Вагнера в работах современных геометров, мы имеем в виду три категории исследований. К первой категории относятся исследования, в которых делается попытка изложения полученных Вагнером результатов в инвариантной форме (без систематического использования координатного метода). Сюда же следует отнести работы, в которых полученная Вагнером конструкция построения тензора кривизны используется для исследования геометрии расслоенных пространств. Используя построения В. В. Вагнера, на тотальном пространстве такого расслоения определяется и изучается метрика, названная лифтом Вагнера римановой метрики.

В работах, относящихся ко второй категории, излагаются альтернативные теории кривизны неголономного многообразия. Дается общее определение неголономных аналогов тензора Римана и его конформно инвариантного аналога — тензора Вейля — в терминах когомологий алгебр Ли. В основе подходов Вагнера к определению инвариантов неголономной геометрии лежат не только разные инструменты математического исследования, но и разные постановки исследовательских задач. Для В. В. Вагнера основной интерес составлял поиск геометрических инвариантов, обращение в нуль которых позволяло осуществлять параллельный перенос допустимых векторов в малой окрестности точки неголономного многообразия независимо от выбора допустимой кривой перенесения. Вагнер решил задачу нахождения необходимых инвариантов построением тензора кривизны, названного позже тензором кривизны неголономного многообразия Вагнера.

Понятие внутренней геометрии неголономного многообразия было определено Схоутеном как совокупность тех свойств, которые зависят только от параллельного перенесения внутри самого неголономного многообразия и от его оснащения в объемлющем пространстве. Развивая внутреннюю геометрию неголономного многообразия, Вагнер определяет и исследует свойства тензора кривизны неголономного многообразия, обобщающего тензор кривизны Схоутена. Новый подход позволяет Вагнеру выделить новые типы пространств. Так, например, появляется определение эрмитова почти контактного метрического пространства. Известные уже результаты получают новое описание на языке внутренней геометрии.



Говоря об исследованиях третьей категории, мы имеем в виду работы по геометрии почти контактных метрических пространств и их приложениям, в которых результаты Вагнера используются неявно или «открываются заново». Важную роль в развиваемой Вагнером неголономной геометрии играют системы координат, названные им градиентными или полуголономными координатами. Уточняя понятие «градиентные координаты» для случая почти контактного метрического многообразия, вводится понятие «адаптированная система координат». Адаптированные координаты играют в геометрии неголономных многообразий ту же роль, что и голономные координаты на голономном многообразии. Там же введено понятие «допустимая тензорная структура». Допустимая тензорная структура является объектом внутренней геометрии неголономного многообразия. В работах по геометрии расщепленных пространств допустимые тензорные структуры называются полубазисными.

Важное место в исследованиях почти контактных метрических многообразий занимает изучение линейных связностей. Наиболее естественным представляется рассмотрение внутренних связностей, совместимых с допустимыми тензорными структурами. Исследованная Вагнером внутренняя связность оказывается наиболее естественной для описания характеристик и других изучаемых сегодня структур. Анализ геометрических работ, появившихся в последние десятилетия, свидетельствует о непреходящей ценности полученных В. В. Вагнером результатов. Более того, многие из идей выдающегося ученого только в наше время находят понимание в среде представителей мирового математического сообщества.

Аналитическая механика

Задачи динамики механических систем с неголономными связями рассматривались ещё с конца XIX в. Этими задачами занимались С. А. Чаплыгин, К. Нейман, Д. Кортевег, П. Аппель, П. В. Воронеж. Исследования по данному направлению были продолжены; в научной литературе появились примеры механических устройств (моделей), авторами которых были Л. Больцман (1902 г.), Г. К. Суслов и П. В. Воронеж, К. Каратеодори (1933 г.) («сани» Каратеодори). В примере К. Каратеодори имеется линейная неголономная связь первого порядка [7]. В. В. Вагнер применил построенную им теорию к решению задачи К. Каратеодори, чем и подтвердил его оригинальные результаты.

Упомянутые примеры неголономных механических систем описывают движения при наличии трения. Однако существует ряд примеров систем с нелинейными неголономными связями первого порядка без трения. Имеют место механизмы, реализующие нелинейные неголономные связи более высокого порядка [5].

В. В. Вагнеру принадлежит пример неголономной связи, основанный на построенной им модели, подробно описанной и проиллюстрированной в упомянутой книге В. В. Доброврова. Описание этой модели сводится к следующему.

Твёрдое тело находится внутри абсолютно твёрдой сферы. С телом жёстко скреплён твёрдый прямолинейный стержень, проходящий при движении тела через центр сферы. На концах стержня закреплены небольшие колёса (диски) с острыми краями, плоскости которых совпадают. Расстояние между двумя наиболее удалёнными точками колёс равно внутреннему диаметру твёрдой сферической оболочки. Колёса могут катиться и вертеться без скольжения по внутренней поверхности оболочки. Предполагается, что масса каждого колеса пренебрежимо мала по сравнению с массой присоединённого к сфере твёрдого тела.

Введём плоскость, проходящую через ось стержня и оси колёс. Поскольку заострённые края колёс препятствуют их боковому скольжению, то мгновенная ось вращения твёрдого тела расположена в данной плоскости. Это условие порождает неголономную связь, согласно которой проекция мгновенной угловой скорости тела на ось, расположенную в плоскости колёс и ортогональную стержню, в любой момент времени равна нулю. При специальном выборе системы осей координат, неизменно связанной с телом, уравнение неголономной связи, реализующейся в примере В. В. Вагнера, совпадает по форме с аналогичными уравнениями связей, имеющихся в примерах Г. К. Суслова и П. В. Воронца [7]. Построив специ-



альную систему локальных координат, В. В. Вагнер получил уравнения движения твёрдого тела с неголономной связью. Решая вопрос о допустимых траекториях данной динамической системы, он установил, что на заданном неголономном многообразии всегда существует траектория, соединяющая две любые его точки. При выборе метода интегрирования системы уравнений движения тела он показал, что всегда существует такая локальная система координат, при которой интегрирование данной системы уравнений существенно упрощается. В частности, при движении данного тела по инерции специальный выбор системы координат позволяет получить все первые алгебраические интегралы этой задачи из условия постоянности компонент вектора скорости, отнесённых к данной системе координат.

На основе созданной им конструктивной теории В. В. Вагнер исследовал свойства фазового пространства в эйлеровом случае движения твёрдого тела вокруг неподвижного полюса, а также рассмотрел новые задачи динамики твёрдого тела с неголономными связями [7].

Для механического устройства, описанного в примере В. В. Вагнера, в научной литературе употребляется термин «гироскоп Вагнера» [5, с. 266]. Это устройство является моделью более сложных по конструкции механизмов, реализующих программы движения, заданные неголономными связями. Задача, поставленная и успешно решённая В. В. Вагнером на основе предложенного им примера, является одной из немногих задач динамики механических систем с неголономными связями, которая полностью решена путём интегрирования системы уравнений движения в конечной форме [8]. Она является наглядным примером применения абстрактной геометрической теории к решению конкретной задачи классической механики, имеющей практическое значение. Это подтверждает слова выдающегося физика Л. Больцмана: «Нет ничего практичнее хорошей теории». В дальнейшем эта задача В. В. Вагнера была обобщена на случай гиростата; её точное аналитическое решение получено для некоторых важных (в прикладном смысле) частных случаев движения.

Следует подчеркнуть принципиальную важность модельной задачи В. В. Вагнера о движении твёрдого тела с неголономной связью. Она указывает на возможности применения геометрической теории неголономных многообразий к решению актуальных задач механики неголономных систем, важных с точки зрения их технического применения как моделей различного рода реальных машин, аппаратов и управляющих устройств. Действительно, в теории управляемых систем, в механике управляемого движения подвижных объектов законы управления могут выражаться в виде неинтегрируемых соотношений между компонентами скорости и координатами объекта. С аналитической точки зрения это равносильно наложению на подвижный объект стационарных неголономных связей. Примерами такого рода систем являются гироскопические системы и устройства, установленные на подвижном основании, управляемые летательные аппараты, программные управляемые системы и комплексы [5].

Как известно, большинство типов реальных технических устройств моделируется неголономными механическими системами. Помимо упомянутых выше гироскопических и управляющих устройств к ним относятся транспортные колёсные машины, моделируемые бициклом, трициклом и квадроциклом. Реальными прообразами бицикла являются двухколёсники — мотоциклы и велосипеды; трицикла — самолёт, трёхколесный автомобиль, грузовые колёсные тележки. Прообразом современного квадроцикла является четырёхколёсный автомобиль.

В дальнейшем В. В. Вагнер создал в теории неголономных многообразий значительные обобщения, позволяющие применять методы дифференциальной геометрии в задачах динамики механических систем с нелинейными связями [9].

Характерно, что все научные исследования В. В. Вагнера в геометрии отличаются стремлением создавать и разрабатывать те её разделы, которые связаны с применениями в других областях математики и механики, решая задачи в максимальной общности и с наиболее общих позиций.

Как известно, наиболее сложными в классическом вариационном исчислении являются



задачи Лагранжа. В. В. Вагнер в своих работах, основанных на построенной им теории гиперполос в центрально-аффинном пространстве, получил геометрическую интерпретацию общего уравнения Эйлера для вариационных задач Лагранжа [3]. Эти задачи широко применяются в динамике механических систем, в частности, при выделении из всего множества динамически возможных движений системы многообразия её стационарных состояний, а также при решении задач оптимального управления.

Основополагающие работы В. В. Вагнера по геометрии неголономных многообразий заложили плодотворную основу для дальнейшего развития актуального научного направления — динамики механических систем с неголономными связями. В результате в научной литературе в этой области появилось огромное количество публикаций, непрерывно возрастающее до настоящего времени. Это связано, прежде всего, с бурно развивающимся научным направлением — теорией управляемого движения различного рода механических объектов. Такие движения возникают «при наложении ... [заданных программных управляющих] связей, причём [управляющими] программами могут являться аналитические выражения условий, налагаемых на обобщённые координаты тела или на ... скорости. ... Эти связи могут быть неголономными ... Для реализации заданного движения в общем случае надо использовать сервосвязи». Кроме того, «аналитические выражения [управляющей] программы представляют собой уравнения неголономных связей. Для исследования такого движения необходимо применить методы неголономной механики» [5, с. 126].

При исследовании свойств управляемого движения механических объектов эти объекты рассматриваются как системы с неголономными связями [10], что позволяет применять в данных исследованиях методы и приёмы для неголономных систем.

Отметим следующий важный момент: в задачах динамики твёрдого тела первые алгебраические интегралы динамических уравнений представляются в виде квадратичных и линейных форм от компонент вектора угловой скорости тела. Это приводит к идее о представлении этих соотношений как условий наложенных неголономных связей. Такой подход открывает новые возможности применения аппарата неголономной механики для исследования динамических свойств неголономных многообразий.

Представляет интерес вопрос о построении моделей неголономных связей не только для механических систем абсолютно твёрдых тел, но и для некоторых отдельных видов сплошных сред [11].

Все приведённые здесь соображения подтверждают проявляющиеся в настоящее время тенденции к расширению и обобщению областей исследования и результатов, содержащихся в трудах В. В. Вагнера по неголономным многообразиям.

Алгебра

В начале 50-х гг. прошлого столетия исследования Виктора Владимировича в области дифференциальной геометрии привели к необходимости изучения частичных взаимно однозначных преобразований множеств. Аппарат теории групп, блестяще зарекомендовавший себя при исследовании полных взаимно однозначных преобразований, не был приспособлен для этих целей. Вагнером была предложена концепция обобщенной группы (в другой терминологии — инверсной полугруппы), представляющей собой полугруппу, удовлетворяющую некоторым дополнительным условиям. Им была доказана ставшая классической теорема, в дальнейшем определившая одно из центральных направлений общей теории полугрупп, о возможности изоморфного представления всякой обобщенной полугруппы полугруппой частичных взаимно однозначных преобразований некоторого множества с операцией умножения преобразований. Несколько позже этот результат был независимо получен австралийским математиком Г. Престоном.

Частичный порядок на полугруппе называется стабильным (или согласованным с умножением), если из неравенства $a \leq b$ для любой пары элементов a, b и любого элемента c полугруппы следует $ac \leq bc$ и $ca \leq cb$. Порой идемпотенты и полугрупповая операция по-



рождают частичные порядки на полугруппе. Такие порядки, если они стабильны, принято называть естественными. Первый такой естественный порядок был найден Вагнером [12] для инверсных полугрупп, перенося его с полугруппы взаимно однозначных частичных преобразований множества, играющих, как уже отмечалось, важную роль в теории гладких многообразий. С этой же позиции он рассмотрел задачу нахождения представлений упорядоченной полугруппы частичными преобразованиями [13], для которых заданному в полугруппе отношению порядка соответствует отношение включения частичных преобразований.

В контексте естественных порядков и идемпотентов последовал целый ряд работ первого аспиранта Вагнера, впоследствии профессора кафедры геометрии Александра Евгеньевича Либера. Ему принадлежит известный критерий инверсности полугруппы в форме коммутативности любой пары её идемпотентов, а также известные сегодня результаты, касающиеся представления полугрупп объединением групп [14; 15, гл. 7.1].

Идея Вагнера естественным образом упорядочить полугруппу вновь была поднята позже целой плеядой алгебраистов. Обсуждая частичные порядки, порождённые полугрупповой операцией, Митч писал [16], что только спустя 30 лет естественный порядок Вагнера был распространён Хартвигом [17] и Намбурипадом [18] на класс регулярных полугрупп. Однако даже для регулярных полугрупп такие порядки не всегда являются стабильными. Последовала серия работ, посвященных различным способам задания таких частичных порядков, эквивалентность которых была показана Митчем [16]. Это привело к появлению более универсального способа задания частичного порядка на полугруппе, вошедшего в литературу как «порядок Митча» [19]. Так, открытый Вагнером естественный порядок на инверсных полугруппах дал импульс исследованиям в направлении частично упорядоченных полугрупп.

Продолжают эти идеи Вагнера работы профессора кафедры геометрии В. Б. Поплавского, которому посчастливилось быть аспирантом В. В. Вагнера, к сожалению, последним. Идемпотентам и естественным порядкам полугрупп с единицей посвящена серия работ В. Б. Поплавского, в которых строится теория полугрупповых идемпотентов и естественных порядков [20].

В. В. Вагнером было замечено, что теорию частичных взаимно однозначных преобразований естественно рассматривать в рамках общей теории алгебр отношений, в развитие которой созданная им алгебраическая школа внесла немалый вклад. В настоящее время теория алгебр отношений представляет собой существенную составную часть алгебраической логики и современной общей алгебры и имеет многочисленные приложения в различных разделах математики.

Исследование операций над отношениями, начатое во второй половине девятнадцатого столетия в работах Ч. Пирса и Г. Фреге, было систематизировано Э. Шредером в третьем томе своей «Алгебры логики». Тесную взаимосвязь этих исследований с логикой иллюстрирует тот факт, что именно рассмотрение операции умножения отношений побудило Ч. Пирса ввести в логику понятие квантора. Дальнейшее развитие теория алгебр отношений получила в трудах А. Уайтхеда и Б. Рассела.

Новый этап в развитии теории связан с работами А. Тарского 40–50-х гг. XX в., в которых был предложен аксиоматический подход к изучению алгебр отношений. Этому способствовало активное развитие в это время теории моделей и алгебраических систем, в частности теории многообразий и квазимногообразий.

А. Тарским был рассмотрен класс алгебр отношений, в число операций которых наряду с булевыми входили операции умножения и обращения отношений (указанный класс является частным случаем класса булевых алгебр с дополнительными операциями). Он показал, что этот класс образует многообразие. Бесконечный базис тождеств этого многообразия был найден Р. Линдоном, а И. Манк установил, что оно не может быть охарактеризовано никакой конечной системой тождеств.



Эти исследования во многом определили основную проблематику дальнейшего развития теории алгебр отношений, сводящуюся к исследованиям аксиоматизируемости различных классов алгебр отношений, а также нахождению базисов тождеств и квазитожеств, порожденных этими классами многообразий и квазимногообразий.

Среди рассматриваемых классов особое место занимали классы так называемых подредуктов алгебр отношений А. Тарского, т.е. алгебр, операции которых входят в число операций алгебр отношений Тарского или выражимы через них, а также алгебр отношений специального вида.

Так, Б. Йонссон в 1959 г. рассмотрел класс алгебр отношений с операциями умножения, обращения и пересечения отношений; нашел бесконечную систему квазитожеств, характеризующих этот класс, и сформулировал проблему, является ли этот класс многообразием [21]. В том случае, если ограничиться лишь операциями умножения и обращения отношений, то мы приходим к классу инволютированных полугрупп отношений, который является естественным обобщением введенного В. В. Вагнером класса обобщенных групп частичных взаимно однозначных преобразований.

Задача нахождения аксиоматики класса инволютированных полугрупп отношений была поставлена Вагнером на одном из семинаров в 1953 г. и была решена в работах его учеников Б. М. Шайна и Д. А. Бредихина в 70-х гг. прошлого столетия. В 1994 г. Д. А. Бредихиным была решена упомянутая выше проблема Б. Йонссона [22].

Весьма плодотворной, в частности, в теории полугрупп, оказалась общая концепция алгебры отношений, введенная Б. М. Шайном. Им была доказана универсальная аксиоматизируемость классов алгебр отношений при условии, что все свойства рассматриваемых отношений и все операции над ними заданы с помощью формул логики предикатов первого порядка. Соответствующие результаты и их приложения в теории полугрупп были представлены в большой обзорной статье, опубликованной в первом номере международного журнала «Semigroup Forum» в 1970 г. [23].

К тематике алгебр отношений относится также весьма известная проблема о вложимости полугрупп в группы, решение которой содержится в работах А. И. Мальцева и И. Ламбека. Вагнером была сформулирована аналогичная проблема о вложимости полугрупп в обобщенные группы, решение которой было получено Б. М. Шайном с использованием разработанного им метода определяющих пар для представления полугрупп преобразованиями [24].

В. В. Вагнера также можно назвать родоначальником изучения так называемых релятивизированных полугрупп отношений, т.е. полугруппами, сигнатура которых обогащена отношениями включения, проекционного включения и рядом других отношений, несущих дополнительную информацию об исходных полугруппах. Основополагающими здесь являются работы Вагнера «Представление упорядоченных полугрупп» и «Трансформативные полугруппы», определившие исследования целого ряда авторов. В частности, В. Н. Салием была найдена аксиоматическая характеристика проекционных и трансформативных полугрупп частичных преобразований.

Отличительной особенностью стилистики всех работ В. В. Вагнера является широкое использование в них символики математической логики и теории отношений, популяризации которых он уделял особое внимание. Этому, в частности, посвящена его фундаментальная работа [25], где приводится современное подробное изложение общей теории отношений и операций над ними, а также строение и свойства отношений специального вида.

Научная школа В. В. Вагнера

Основатель кафедры геометрии Саратовского университета, учитель нескольких поколений геометров и алгебраистов В. В. Вагнер создал научную школу, которая внесла весомый вклад в отечественную и мировую науку, в развитие геометрического и алгебраического научных направлений [26]. Представители этой научной школы явились носителями



передовых научных идей и традиций, заложенных её основателем и руководителем прочно и на долгие годы. Всё это — результат выдающихся и плодотворных трудов Виктора Владимировича Вагнера.

Один из студентов В. В. Вагнера, вспоминая о нём, говорит о времени общения со своим учителем как о прекрасных и незабываемых моментах своей жизни, в которые он познавал для себя что-то новое, интересное, значительное, то, что невозможно узнать ни из каких учебников. И каждый раз после очередной встречи с ним он чувствовал необыкновенно высокий душевный подъём, прилив творческого вдохновения; получал ощущение, казалось бы, неограниченных возможностей в предстоящем познании науки. Это стимулировало активность научного творчества, обостряло интерес к новым, неизведанным научным проблемам. Такое яркое и незабываемое впечатление осталось у него на всю жизнь как счастливое время учёбы и свободного научного творчества.

Для нас, его студентов, он был по своим творческим и нравственным качествам живым образцом, с которого мы во всём старались брать пример. «Учитель прикасается к вечности: никто не может сказать, где оканчивается его влияние», — утверждал Г. Адамс, лауреат Пулитцеровской премии по литературе. Как правдиво и точно сказано!

Таков был наш учитель — Виктор Владимирович Вагнер. Такие учителя не забываются, о них помнят всю жизнь. Они живут в своих учениках, в учениках своих учеников и потому они бессмертны. То лучшее, что передано нам Учителем, — это не только знания и творческие навыки, но и воспитывающее нравственное начало, та внутренняя одухотворённость, тот идейный стержень, та прочная основа личности, которая помогает преодолевать творческие и жизненные трудности, успешно достигая поставленных благородных целей. Это то, что помогает ученикам быть достойными памяти своего Учителя.

Список литературы

1. Вагнер В. В. Sur la geometrie differentielle des multiplicities anholonomes // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1935. Вып. 2–3. С. 269–318.
2. Либер А. Е., Пензов Ю. Е., Рашевский П. К. Виктор Владимирович Вагнер (к 50-летию со дня рождения) // Успехи математических наук. 1958. Т. 13, № 6 (84). С. 221–227.
3. Ефимов Н. В., Либер А. Е., Ляпин Е. С., Рашевский П. К. Виктор Владимирович Вагнер (к 70-летию со дня рождения) // Успехи математических наук. 1979. Т. 34, № 4 (208). С. 227–229.
4. Виктор Владимирович Вагнер / под ред. В. В. Розена // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8. Отдельный оттиск. 41 с. (Профессора Саратовского университета).
5. Добронравов В. В. Основы механики неголономных систем. Москва : Высшая школа, 1970. 272 с.
6. Либер А. Е., Лосик М. В., Пензов Ю. Е. Виктор Владимирович Вагнер (к 70-летию со дня рождения) // Дифференциальная геометрия : межвуз. науч. сб. 1979. Вып. 4. С. 3–14.
7. Григорьян А. Т., Фрадлин Б. Н. История механики твердого тела. Москва : Наука, 1982. 294 с.
8. Вагнер В. В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1941. Вып. 5. С. 173–225.
9. Вагнер В. В. Теория поля локальных гиперполос в X_n и её приложения к механике системы с неголономными связями // Доклады Академии наук СССР. 1949. Т. 66, № 6. С. 1033–1036.
10. Добронравов В. В. Управляемые системы с неголономными связями // Механика : сб. науч. тр. Москва : Оборонгиз, 1961. № 104. С. 27–32.
11. Седов Л. И., Эглит М. Э. Построение неголономных моделей сплошных сред // Доклады Академии наук СССР. 1962. Т. 142, № 1. С. 54–57.
12. Вагнер В. В. Обобщенные группы // Доклады Академии наук СССР. 1952. Т. 84, № 6. С. 1119–1122.
13. Вагнер В. В. Представление упорядоченных полугрупп // Математический сборник. 1956. Т. 38, № 2. С. 203–240.
14. Либер А. Е. К теории обобщенных групп // Доклады Академии наук СССР. 1954. Т. 97, № 1. С. 25–28.



15. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. Т. 2. Москва : Мир, 1972. 422 с.
16. Mitsch H. A natural partial order for semigroups // Proceedings of the American Mathematical Society. 1986. Vol. 97, iss. 3. P. 384–388. DOI: [10.1090/S0002-9939-1986-0840614-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1986-0840614-0)
17. Hartwig R. How to partially order regular elements // Mathematica Japonica. 1980. Vol. 25, iss. 1. P. 1–13.
18. Nambooripad K. S. S. The natural partial order on a regular semigroup // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1980. Vol. 23, iss. 3. P. 249–260. DOI: [10.1017/S0013091500003801](https://doi.org/10.1017/S0013091500003801)
19. Mitsch H. Semigroups and their natural order // Mathematica Slovaca. 1986. Vol. 44, iss. 4. P. 445–462.
20. Поплавский В. Б. Частичные порядки и идемпотенты моноидов // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 4. С. 182–198. DOI: [10.22405/2226-8383-2021-22-4-182-198](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-4-182-198), EDN: [UZQNMWZ](https://www.edn.ru/uzqnmwz/)
21. Jonsson B. Representation of modular lattices and of relation algebras // Transactions of the American Mathematical Society. 1959. Vol. 92. P. 449–464. DOI: [10.1090/S0002-9947-1959-0108459-5](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1959-0108459-5)
22. Andréka H., Bredikhin D. A. The equational theory of union-free algebras of relations // Algebra Universalis. 1994. Vol. 33. P. 516–532. DOI: [10.1007/BF01225472](https://doi.org/10.1007/BF01225472)
23. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. Vol. 1. P. 1–62. DOI: [10.1007/BF02573019](https://doi.org/10.1007/BF02573019), EDN: [XLNTYL](https://www.edn.ru/xlntyyl/)
24. Шайн Б. М. Вмещение полугрупп в обобщенные группы // Математический сборник. 1961. Т. 55, № 4. С. 379–400.
25. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения : сб. ст. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.
26. Школа профессора Вагнера. Кафедра геометрии Саратовского университета / под ред. В. В. Розена. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2020. 328 с.

References

1. Wagner V. V. Sur la géométrie différentielle des multiplicities anholonomes. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proceedings of the Seminar on Vector and Tensor Analysis], 1935, iss. 2–3, pp. 269–318 (in French).
2. Liber A. E., Penzov Yu. E., Rashevsky P. K. Viktor Vladimirovich Wagner (on the 50th anniversary of his birth). *Russian Mathematical Surveys*, 1958, vol. 13, iss. 6 (84), pp. 221–227 (in Russian).
3. Efimov N. V., Liber A. E., Lyapin E. S., Rashevskii P. K. Viktor Vladimirovich Wagner (on his seventieth birthday). *Russian Mathematical Surveys*, 1979, vol. 34, iss. 4, pp. 209–212. DOI: [10.1070/RM1979v034n04ABEH003268](https://doi.org/10.1070/RM1979v034n04ABEH003268)
4. Rozen V. V. (ed.) Viktor Vladimirovich Wagner. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2008, vol. 8 (separate print). 41 p. (in Russian).
5. Dobronravov V. V. *Osnovy mekhaniki negolonomnykh sistem* [Fundamentals of mechanics of non-holonomic systems]. Moscow, Vysshaya shkola, 1970. 272 p. (in Russian).
6. Liber A. E., Losik M. V., Penzov Yu. E. Viktor Vladimirovich Wagner (on the 70th anniversary of his birth). *Differential Geometry*, 1979, iss. 4, pp. 3–14 (in Russian).
7. Grigoryan A. T., Fradlin B. N. *Istoriya mekhaniki tvyordogo tela* [History of Solid Mechanics]. Moscow, Nauka, 1982. 294 p. (in Russian).
8. Wagner V. V. Geometrical interpretation of motion of nonholonomic dynamic systems. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proceedings of the Seminar on Vector and Tensor Analysis], 1941, iss. 5, pp. 173–225 (in Russian).
9. Wagner V. V. The theory of a field of local hyperbands in X_n and its applications to the mechanics of a system with nonholonomic constraints. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1949, vol. 66, iss. 6, pp. 1033–1036. (in Russian).
10. Dobronravov V. V. Control systems with nonholonomic constraints. *Mekhanika* [Mechanics]. Collected papers. Moscow, Oborongiz, 1961, iss. 104, pp. 27–32 (in Russian).
11. Sedov L. I., Èglit M. È. Construction of nonholonomic models of continuous media with allowance for the finite nature of deformations and certain physico-chemical effects. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1962, vol. 142, iss. 1, pp. 54–57 (in Russian).
12. Wagner V. V. Generalized groups. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1952, vol. 84, iss. 6, pp. 1119–1122 (in Russian).
13. Wagner V. V. Representation of ordered semigroups. *Sbornik: Mathematics*, 1956, vol. 38, iss. 2, pp. 203–240 (in Russian).



14. Liber A. E. On the theory of generalized groups. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1954, vol. 97, iss. 1, pp. 25–28 (in Russian).
15. Clifford A., Preston G. *Algebraicheskaya teoriya polugrupp* [The algebraic theory of semigroups]. Vol. 2. Moscow, Mir, 1972. 422 p. (in Russian).
16. Mitsch H. A natural partial order for semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1986, vol. 97, iss. 3, pp. 384–388. DOI: [10.1090/S0002-9939-1986-0840614-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1986-0840614-0)
17. Hartwig R. How to partially order regular elements. *Mathematica Japonica*, 1980, vol. 25, iss. 1, pp. 1–13.
18. Nambooripad K. S. S. The natural partial order on a regular semigroup. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1980, vol. 23, iss. 3, pp. 249–260. DOI: [10.1017/S0013091500003801](https://doi.org/10.1017/S0013091500003801)
19. Mitsch H. Semigroups and their natural order. *Mathematica Slovaca*, 1986, vol. 44, iss. 4, pp. 445–462.
20. Poplavski V. B. Partial orders and idempotents of monoids. *Chebyshevskii Sbornik*, 2021, vol. 22, iss. 4, pp. 182–198 (in Russian). DOI: [10.22405/2226-8383-2021-22-4-182-198](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-4-182-198), EDN: [UZQNWZ](https://www.edn.ru/uzqnwz/)
21. Jonsson B. Representation of modular lattices and of relation algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1959, vol. 92, pp. 449–464. DOI: [10.1090/S0002-9947-1959-0108459-5](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1959-0108459-5)
22. Andréka H., Bredikhin D. A. The equational theory of union-free algebras of relations. *Algebra Universalis*, 1994, vol. 33, pp. 516–532. DOI: [10.1007/BF01225472](https://doi.org/10.1007/BF01225472)
23. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups. *Semigroup Forum*, 1970, vol. 1, pp. 1–62. DOI: [10.1007/BF02573019](https://doi.org/10.1007/BF02573019), EDN: [XLNTYL](https://www.edn.ru/xlnty/)
24. Shain B. M. Imbedding of semigroups in generalized groups. *Sbornik: Mathematics*, 1961, vol. 55, iss. 4, pp. 379–400 (in Russian).
25. Wagner V. V. Theory of relations and algebra of partial maps. In: *Teoriya polugrupp i ee prilozheniya* [Theory of Semigroups and Its Applications]. Saratov, Saratov State University Publ., 1965, iss. 1, pp. 3–178 (in Russian).
26. Rozen V. V. (ed.) Professor Wagner's School. Department of Geometry of Saratov University. Saratov, Saratov State University Publ., 2020. 328 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 28.05.2025

Принята к публикации / Accepted 05.06.2025

Опубликована / Published 29.08.2025