



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 366–379

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 366–379

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-366-379>

EDN: <https://elibrary.ru/HSKMLC>

Научная статья

УДК 539.3

Статика и динамика сетчатой нанопластины с электрическим приводом

Е. Ю. Крылова[✉], Д. А. Барышев, И. А. Трибис,
Д. К. Андрейченко, И. В. Папкина

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Крылова Екатерина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, kat.krylova@bk.ru, ORCID: [0000-0002-7593-0320](https://orcid.org/0000-0002-7593-0320), SPIN: [8951-1463](https://spiner.ru/8951-1463), AuthorID: [722982](https://authorid.ru/722982)

Барышев Дмитрий Андреевич, студент механико-математического факультета, baryshevaa@gmail.com, SPIN: [4533-7007](https://spiner.ru/4533-7007), AuthorID: [1292074](https://authorid.ru/1292074)

Трибис Инна Александровна, студент механико-математического факультета, innatribis8670@gmail.com, SPIN: [9971-3314](https://spiner.ru/9971-3314), AuthorID: [1177955](https://authorid.ru/1177955)

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, andreichenkodk@gmail.com, ORCID: [0000-0003-0525-984X](https://orcid.org/0000-0003-0525-984X), SPIN: [7323-1488](https://spiner.ru/7323-1488), AuthorID: [63805](https://authorid.ru/63805)

Папкина Ирина Владиславовна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, ikravzova@mail.ru, ORCID: [0000-0003-4062-1437](https://orcid.org/0000-0003-4062-1437), SPIN: [2999-6160](https://spiner.ru/2999-6160), AuthorID: [404435](https://authorid.ru/404435)

Аннотация. Объектом исследования является жестко заземленная по торцам гибкая пластина сетчатой структуры с электрическим приводом. К затвору, расположенному на некотором расстоянии под пластиной, и пластине подключен источник электродвижущей силы. Объемные ponderomotive силы электрического поля, действующие на пластину, моделируются силой Кулона. Уравнения движения элемента геометрически нелинейной пластины, граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Остроградского–Гамильтона на основании гипотез Кирхгофа. Рассматривается изотропный, однородный материал. Масштабные эффекты учтены посредством модифицированной моментной теории упругости. При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми. Геометрическая нелинейность учтена по теории Т. фон Кармана. Сетчатая структура пластины моделировалась посредством континуальной теории Г. И. Пшеничного, что позволило заменить регулярную систему ребер сплошным слоем. Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая нелинейные колебания рассматриваемой сетчатой пластины, сводилась к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей второго порядка точности. Задача Коши решалась методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Математическая модель, алгоритм решения и программный комплекс верифицированы путем сравнения результатов расчета с натурным экспериментом. Проведен анализ эффекта втягивания в зависимости от геометрии сетки, а также анализ появления зон неустойчивости в зависимости от амплитуды и частоты динамической части электрического напряжения.

Ключевые слова: НЭМС, сетчатая пластина, электрическое поле, потеря устойчивости, собственные колебания, углеродная нанопластина, математическое моделирование

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00331, <https://rscf.ru/project/22-21-00331/>).



Для цитирования: Крылова Е. Ю., Барышев Д. А., Трибис И. А., Андрейченко Д. К., Папкова И. В. Статика и динамика сетчатой нанопластины с электрическим приводом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 366–379. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-366-379](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-366-379), EDN: [HSKMLC](https://www.edn.ru/skmlc)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Statics and dynamics of an electrically driven mesh nanoplate

Е. Ю. Krylova[✉], D. A. Baryshev, I. A. Tribis, D. K. Andreichenko, I. V. Papkova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Ekaterina Yu. Krylova, kat.krylova@bk.ru, ORCID: [0000-0002-7593-0320](https://orcid.org/0000-0002-7593-0320), SPIN: [8951-1463](https://www.spin.ru/8951-1463), AuthorID: [722982](https://www.authorid.ru/722982)

Dmitriy A. Baryshev, baryshevaa@gmail.com, SPIN: [4533-7007](https://www.spin.ru/4533-7007), AuthorID: [1292074](https://www.authorid.ru/1292074)

Inna A. Tribis, innatribis8670@gmail.com, SPIN: [9971-3314](https://www.spin.ru/9971-3314), AuthorID: [1177955](https://www.authorid.ru/1177955)

Dmitry K. Andreichenko, andreichenkodk@gmail.com, ORCID: [0000-0003-0525-984X](https://orcid.org/0000-0003-0525-984X), SPIN: [7323-1488](https://www.spin.ru/7323-1488), AuthorID: [63805](https://www.authorid.ru/63805)

Irina V. Papkova, ikravzova@mail.ru, ORCID: [0000-0003-4062-1437](https://orcid.org/0000-0003-4062-1437), SPIN: [2999-6160](https://www.spin.ru/2999-6160), AuthorID: [404435](https://www.authorid.ru/404435)

Abstract. The study object is a flexible plate of a mesh structure with an electrical drive with clamped edges. A source of electromotive force is connected to the gate and the plate. The gate is located at some distance below the plate. The volumetric ponderomotive forces of the electric field acting on the plate are modeled by the Coulomb force. The motion equations of a geometrically nonlinear plate, boundary, and initial conditions are obtained from the Ostrogradsky–Hamilton variational principle based on Kirchhoff’s hypotheses. An isotropic, homogeneous material is considered. Scale effects are taken into account using modified couple stress theory. It is assumed that the fields of displacement and rotation are not independent. Geometric nonlinearity is taken into account according to the theory of T. von Karman. The mesh structure of the plate was modeled using the continuum theory of G. I. Pshenichny, which made it possible to replace the regular system of ribs with a continuous layer. The system of partial differential equations describing the nonlinear vibrations of the mesh plate under consideration was reduced to a system of ordinary differential equations using the finite difference method of second-order accuracy. The Cauchy problem was solved by the Runge–Kutta method of fourth-order accuracy. The mathematical model, solution algorithm, and software package were verified by comparing the calculation results with a full-scale experiment. An analysis of the static instability depending on the mesh geometry was carried out, as well as an analysis of the appearance of instability zones depending on the amplitude and frequency of the electrical voltage dynamic part.

Keywords: NEMS, mesh plate, electric field, loss of stability, natural oscillations, carbon nanoplate, mathematical modeling

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00331, <https://rscf.ru/project/22-21-00331/>).

For citation: Krylova E. Yu., Baryshev D. A., Tribis I. A., Andreichenko D. K., Papkova I. V. Statics and dynamics of an electrically driven mesh nanoplate. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 366–379 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-366-379](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-366-379), EDN: [HSKMLC](https://www.edn.ru/skmlc)

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

На сегодняшний момент круг применения наноразмерных электромеханических систем (НЭМС) очень широк. НЭМС становятся необходимы в оптике, радиоэлектронике, робототехнике, медицине и многих других областях. В частности, такие конструкционные

элементы, как углеродные нанопластины, ложатся в основу полевых транзисторов нового поколения [1–3], сверхчувствительных датчиков давления [4, 5] и масс [6, 7]. Наряду с требованием уменьшения размеров технический прогресс ставит перед наукой задачу разработки приборов высокой чувствительности, способных воспринимать объект на уровне аттоньютонов и методов исследования особенностей режимов их работы. НЭМС представляют собой чувствительный элемент — балку, пластину или оболочку размером несколько нанометров с электрическим приводом. Посредством электрического напряжения возбуждаются колебания чувствительного элемента на гигагерцовом уровне, что и обеспечивает высокую чувствительность прибора.

Широкое использование наноразмерных пластин как конструктивных элементов во многих стратегических областях приводит к необходимости глубокого понимания их поведения под действием различного рода факторов с позиции механики и нелинейной динамики. Основной особенностью НЭМС и микроэлектромеханических систем (МЭМС) является так называемый эффект втягивания, который для многих приложений рассматриваются как отказ и, следовательно, избегается. Поскольку в переключателях и различного рода датчиках электростатическая неустойчивость часто используется в качестве основного приводного механизма, ее намеренно запускают. Таким образом, для проектирования и использования высокопроизводительного НЭМС- или МЭМС-устройства необходимо серьезное изучение данного эффекта и влияние на него так называемых мультифизических факторов (электрического, магнитного, теплового воздействия).

Для моделирования статики и динамики элементов механических систем наноразмеров классических континуальных моделей не хватает из-за невозможности учета размернозависимого поведения подобных объектов. Одно из ведущих мест среди теорий, позволяющих учитывать масштабные эффекты, занимает микрополярная (моментная) теория упругости [8, 9]. Именно ее выбирают многие авторы для всесторонних исследований пластинчато-оболочечных элементов МЭМС и НЭМС [10–20].

Построению математических моделей и исследованию особенностей поведения сплошных микро- и нанопластин и оболочек с электрическим приводом посвящено много работ [21–28], в которых исследуется влияние эффекта масштаба, начальных неправильностей, внешнего давления, геометрической нелинейности на амплитудно-частотные характеристики и устойчивость чувствительных элементов под действием как статического, так и динамического электрического напряжения.

На сегодняшний момент работ, посвященных исследованию сетчатых пластин с учетом масштабных эффектов, немного [29–32]. В данной работе на основании модифицированной моментной теории упругости построена математическая модель колебаний геометрически нелинейной сетчатой пластины в поле действия одного неподвижного электрода.

1. Постановка задачи

Предметом исследования является сетчатая пластина прямоугольной формы, занимающая в пространстве $\mathbf{R}^3$ область $\Omega = \{0 \leq x \leq c, 0 \leq y \leq b, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\}$, на расстоянии g_0 находится электрод (рис. 1). К электроду и пластине подключен источник электродвижущей силы с разностью потенциалов $V(t)$. Пластина прогибается в нормальном к электроду

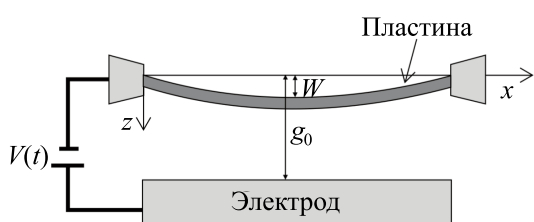


Рис. 1. Расчетная схема
Fig. 1. Calculation scheme

направлении и при достижении баланса между электрическими силами и силами упругости приходит в равновесное состояние.

В основу математической модели положены следующие гипотезы и предположения:

- материал изотропный, однородный, подчиняющийся закону Гука;
- геометрическая нелинейность принята по теории Теодора фон Кармана [33];



- объемные пандеромоторные силы электрического происхождения моделируются силой Кулона;
- масштабные эффекты учитываются посредством модифицированной моментной теории упругости [34];
- пластина состоит из нескольких семейств густо расположенных ребер, имеющих разную ориентацию; толщина всех ребер одинаковая и соответствует толщине пластины; сетчатая структура пластины учтена по модели Г. И. Пшеничного [35];
- рассматриваются кинематические гипотезы Кирхгофа.

Отличные от нуля компоненты симметричного тензора полных деформаций с учетом принятых гипотез примут вид

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где w — прогиб, u , v — осевые смещения срединной поверхности пластины в направлениях x , y соответственно.

В работе построена неклассическая континуальная модель пластины. Материал пластины рассматривается как псевдоконтинуум Коссера со стесненным вращением частиц, в предположении, что поля перемещений и вращений не являются независимыми [34]. Таким образом, компоненты тензора градиента кривизны будут иметь вид

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & \chi_{yy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & \chi_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \\ \chi_{yz} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right), & \chi_{xz} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), & \chi_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Определяющие соотношения для материала пластины с учетом модифицированной моментной теории упругости [34] примем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} [e_{xx} + \nu e_{yy}], & x \rightleftharpoons y, & & \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} e_{xy}, \\ m_{ij} &= \frac{El^2}{1+\nu} \chi_{ij}, & i, j &= x, y, z, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\sigma_{i,j}$ — компоненты тензора Коши, $m_{i,j}$ — компоненты симметричного тензора момента высшего порядка, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала пластины, l — дополнительный независимый материальный параметр длины.

Уравнения движения сплошной микрополярной пластины с учетом электрических воздействий, граничные и начальные условия получим из энергетического принципа Остроградского–Гамильтона [36]:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta U + \delta W) dt = 0, \quad (4)$$

здесь K — кинетическая энергия, U — потенциальная энергия, W — работа внешних сил. С учетом микрополярной теории потенциальная энергия U в упругом теле записывается в виде

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} e_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) d\Omega, \\ K &= \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega, \\ \delta W &= \delta W_{\varepsilon} + \delta W_q + \delta W_{coul}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\delta W_\varepsilon = \int_\Omega \rho \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} \delta w d\Omega$, $\delta W_q = \int_0^b \int_0^c q(x, y, t) \delta w dx dy$, $\delta W_{coul} = \int_0^b \int_0^c F_{coul} \delta w dx dy$, ε — коэффициент диссипации среды, в которой работает пластина, ρ — плотность материала пластины, $q(x, y, t)$ — внешняя нормальная распределенная нагрузка, $F_{coul} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2(t)}{2(g_0 - w)^2}$ — сила Кулона, моделирующая воздействие электрического поля, возникшего вследствие подключения к электроду и пластине источника электродвижущей силы с разностью потенциалов $V(t) = V_{st} + V_{din} \cos(\omega_p t)$, ω_p — частота динамической части электрического напряжения, V_{st} и V_{din} — интенсивность соответственно статической и динамической частей электрического воздействия, ε_r — диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 — электрическая постоянная.

Исходная пластина имеет сетчатую структуру. Предположим, что она состоит из нескольких семейств густо расположенных ребер. Ребра жестко соединены между собой. Толщина всех ребер одинаковая. Согласно континуальной теории Г. И. Пшеничного [35] можно заменить регулярную систему ребер сплошным слоем, вследствие чего напряжения, моменты и моменты высших порядков, возникающие в эквивалентной гладкой пластине, будут связаны с напряжениями, моментами и моментами высших порядков в ребрах следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j}, & \sigma_{yy} &= \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, & \sigma_{xy} &= \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \cos \varphi_j \sin \varphi_j}{a_j}, \\ m_{xx} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_{xx}^j \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j}, & m_{yy} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_{xx}^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, & m_{xz} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_{yx}^j \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j}, \\ m_{xy} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_{xx}^j \delta_j \cos^2 \varphi_j \sin \phi_j}{a_j}, & m_{yz} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_{yx}^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь n — количество семейств ребер в рассматриваемой сетчатой пластине, δ_j , a_j , φ_j , — расстояние между ребрами, ширина ребер, угол между осью и осью ребра j -семейства соответственно (рис. 2).

Дополнительные условия статической эквивалентности исходной сетчатой пластины и эквивалентной ей сплошной получим с помощью метода множителей Лагранжа из условия достижения функционалом стационарных значений.

При построении функционала использовались выражения для потенциальной энергии деформации, выраженные через напряжения и моменты высших порядков.

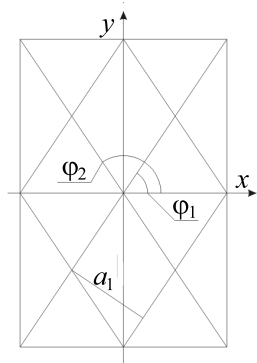


Рис. 2. Схема сетчатой структуры
Fig. 2. Grid structure diagram

$$\begin{aligned} \{\sigma_x^j, m_{xx}^j\} &= \{\sigma_{xx}, m_{xx}\} \cos^2 \varphi_j + \{\sigma_{yy}, m_{yy}\} \sin^2 \varphi_j + \\ &+ \{\sigma_{xy}, m_{xy}\} \cos \varphi_j \sin \varphi_j, \\ m_{xy}^j &= m_{xz} \cos \varphi_j + m_{yz} \sin \varphi_j. \end{aligned} \quad (7)$$

Вводя обозначения

$$A_{sk} = \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j \cos^s \varphi_j \sin^k \varphi_j}{a_j} \quad (8)$$

и учитывая (1)–(7), можно записать уравнения движения элемента пластины с учетом ее сетчатой структуры в перемещениях:

$$\begin{aligned} &\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[(A_{22}\nu + A_{04}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{3A_{22}}{2} + \nu A_{04} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{A_{13}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{31} + \nu A_{13}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\ &\left. + \left(A_{31}\nu + \frac{3A_{13}}{2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{A_{22}}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - \frac{Ehl^2}{4(1+\nu)} \left[\frac{A_{20}}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{A_{20}}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + A_{11} \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} - \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -A_{11} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{A_{02}}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{A_{02}}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} \Big] = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\
 & \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[(A_{40} + A_{22}\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{40}\nu + A_{22}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{A_{31} + A_{22}}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{A_{22}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right. \\
 & \quad \left. + (2A_{31}\nu + A_{13}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{Ehl^2}{4(1+\nu)} \left[A_{11} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} - A_{11} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + \frac{A_{02}}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{A_{02}}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{A_{20}}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} - \frac{A_{20}}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
 & -\frac{Eh}{1+\nu} \left[\frac{h^2(A_{40} + A_{22}\nu)}{12(1-\nu)} + \frac{A_{22}l^2}{2} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{Eh}{1+\nu} \left[\frac{h^2(A_{04} + A_{22}\nu)}{12(1-\nu)} + \frac{A_{22}l^2}{2} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \\
 & \quad - \frac{Eh}{1+\nu} \left[\frac{h^2(2A_{31} + A_{13}\nu)}{12(1-\nu)} - \frac{3(A_{31} - A_{13})l^2}{2} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} - \\
 & \quad - \frac{Eh}{1+\nu} \left[\frac{h^2(A_{40}\nu + 3A_{22} + A_{04}\nu)}{12(1-\nu)} - (3A_{22} - A_{40} - A_{04})l^2 \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \\
 & \quad - \frac{Eh}{1+\nu} \left[\frac{h^2(2A_{13} + A_{31}\nu)}{12(1-\nu)} - \frac{3(A_{13} - A_{31})l^2}{2} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{A_{31}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\
 & \quad + (A_{40} + A_{22}\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + (A_{40}\nu + A_{22}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{A_{31}}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \\
 & \quad + (A_{22} + A_{04}\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + (A_{22}\nu + A_{04}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{A_{13}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \\
 & \quad + \frac{A_{13}}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + 2(A_{31} + A_{13}\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + 2(A_{31}\nu + A_{13}) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \\
 & \quad + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + 2(A_{31}\nu + A_{13}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + 2(A_{31}\nu + A_{13}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \\
 & \quad + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{A_{22}}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (A_{31} + A_{13}\nu) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (A_{31}\nu + A_{13}) \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\
 & \quad \left. + \frac{A_{22}}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + q + F_{coul} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Обобщенные граничные условия, полученные из вариационного принципа, имеют вид

$$\begin{aligned}
 \delta w = 0 \quad \text{или} \quad & \left\{ \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial Y_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial Y_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial Y_{xy}}{\partial x} \right\}_{\Gamma_x} = 0, \\
 & \left\{ \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Y_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial Y_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial Y_{xy}}{\partial y} \right\}_{\Gamma_y} = 0; \\
 \frac{\partial \delta w}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad & \{M_{xx} - Y_{xy}\}_{\Gamma_x} = 0, \quad \{2H - Y_{xx} + Y_{yy}\}_{\Gamma_y} = 0; \\
 \frac{\partial \delta w}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad & \{2H - Y_{xx} + Y_{yy}\}_{\Gamma_x} = 0, \quad \{M_{yy} - Y_{xy}\}_{\Gamma_y} = 0; \\
 \delta u = 0 \quad \text{или} \quad & \left\{ N_{xx} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zx}}{\partial y} \right\}_{\Gamma_x} = 0, \quad \left\{ T - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zy}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zx}}{\partial x} \right\}_{\Gamma_y} = 0; \\
 \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad & \{Y_{xz}\}_{\Gamma_y} = 0; \quad \frac{\partial \delta u}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \{Y_{zx}\}_{\Gamma_x} = 0, \quad \{Y_{zy}\}_{\Gamma_y} = 0; \\
 \delta v = 0 \quad \text{или} \quad & \left\{ N_{xy} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zx}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zy}}{\partial y} \right\}_{\Gamma_x} = 0, \quad \left\{ N_{yy} - \frac{1}{2} \frac{\partial Y_{zy}}{\partial x} \right\}_{\Gamma_y} = 0; \\
 \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad & \{Y_{zx}\}_{\Gamma_x} = 0, \quad \{Y_{zy}\}_{\Gamma_y} = 0; \quad \frac{\partial \delta v}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \{Y_{zy}\}_{\Gamma_x} = 0. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Здесь моменты и усилия обозначены следующим образом:

$$\begin{aligned} \{N_{xx}, M_{xx}\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z^{\{0,1\}} dz, & Y_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{xx} dz, & Y_{zx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{zx} dz, & x &\leftrightarrow y, \\ \{T, H\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z^{\{0,1\}} dz, & Y_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{xy} dz. \end{aligned} \quad (11)$$

2. Методы решения

Рассматривалась пластина с граничными условиями жесткого закрепления:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= v(x, y, t) = w(x, y, t) = 0, \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, c; \\ u(x, y, t) &= v(x, y, t) = w(x, y, t) = 0, \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} &= \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} = \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b. \end{aligned} \quad (12)$$

Начальные условия брались нулевыми.

Система безразмеривалась посредством следующих параметров: $x = c\bar{x}$, $y = b\bar{y}$, $z = g_0\bar{z}$, $w = g_0\bar{w}$, $u = \frac{g_0^2}{c\bar{u}}$, $v = \frac{g_0^2}{b\bar{v}}$, $h = g_0\bar{h}$, $l = g_0\bar{l}$, $t = \frac{cb}{g_0\sqrt{\frac{E}{\rho}}}\bar{t}$, $\varepsilon = \frac{g_0}{cb\sqrt{\frac{E}{\rho}}}\bar{\varepsilon}$, здесь черточкой обозначается безразмерная величина.

Система дифференциальных уравнений в частных производных сводилась по пространственным переменным к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей второго порядка точности. Задача Коши решалась методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности.

При решении задачи статики использовался метод установления [37]. Следуя процедуре данного метода, было выбрано значение коэффициента диссипации $\varepsilon = 0,5$. Далее для ряда значений постоянного электрического напряжения V_{st_i} была получена последовательность прогибов w_i для центральной точки пластины. На основе этих данных строились зависимости $w(V_{st})$.

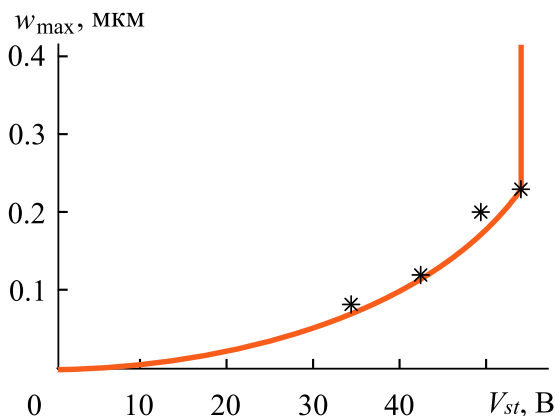


Рис. 3. Сравнение с натурным экспериментом
Fig. 3. Comparison with a natural experiment

При решении задач численными методами возникает необходимость обоснования достоверности получаемых результатов. В работе [38] экспериментально измерено отклонение центра квадратной кремниевой жестко закрепленной по торцам пластины под действием электростатической силы разной интенсивности. На рис. 3 приведены экспериментальные данные (звездочки) и график зависимости $w(V_{st})$ в центральной точке для кремниевой пластины с характеристиками: $\nu = 0.06$, $E = 169$ ГПа, $g_0 = 3$ мкм, $V_{st} = 60$ В, $c = b = 250$ мкм. График $w(V_{st})$ построен по результатам решения задачи (9), (12) в статической постановке без учета сетчатой структуры пластины методом конечных разностей с количеством точек разбиения $n = m = 80$. Результаты хорошо согласуются.

3. Численные результаты

Рассмотрим статическое поведение сетчатой линейной жестко закрепленной по торцам пластины в зависимости от интенсивности статического электрического напряжения в си-



ле Кулона. Все семейства ребер имеют одинаковую ширину, расстояние между ребрами всех семейств одинаковое, сетчатая структура имела вариации: 1) $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$; 2) $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, $\varphi_3 = 0^\circ$; 3) $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, $\varphi_3 = 0^\circ$, $\varphi_4 = 90^\circ$.

Параметры численного эксперимента: $\bar{h} = 0.34$, $\bar{\delta} = 0.154$, $\bar{a} = 0.123$, $\bar{c} = \bar{b}$, $\bar{g}_0 = 1$, $\bar{l} = \bar{h}$, $E = 1$ ГПа, $\varepsilon_r = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\varepsilon_0 = 1$, таким образом $F_{coul} = 0.708 \cdot V^2(t)$.

Увеличение количества семейств ребер в геометрии сетки приводит к увеличению жесткости пластины. С увеличением семейств ребер значение электрического напряжения, при котором происходит эффект втягивания, увеличивается. Эффект втягивания для пластины (рис. 4), состоящей из трех семейств ребер (кривая 2) наступает при меньшем прогибе, чем для сетчатой пластины, состоящей из двух (кривая 1) и четырех (кривая 3) семейств ребер.

Рассмотрим изменение максимального прогиба под действием силы Кулона, при этом напряжение будет складываться из статической и динамической составляющих: $V(t) = V_{st} + V_{din} \cos(\omega_p t)$.

На рис. 5 представлены зависимости максимального прогиба от частоты ω_p динамической части силы Кулона, $V_{st} = 1.5$ В, $V_{din} \in [0.0001; 0.7]$ В в случае сетки с четырьмя семействами ребер $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, $\varphi_3 = 0^\circ$, $\varphi_4 = 90^\circ$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0.154$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.123$. При совпадении значений частоты собственных колебаний плас-

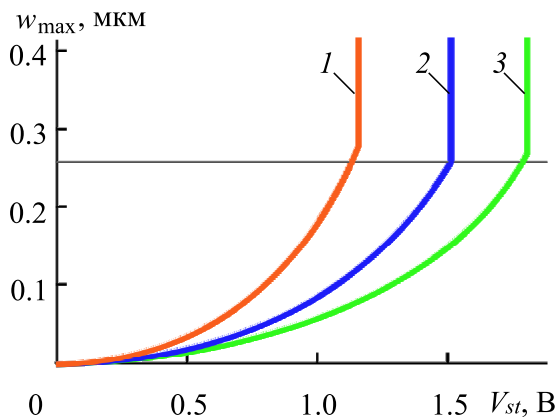


Рис. 4. Эффект втягивания пластины в зависимости от геометрии сетки: 1 — $45^\circ \times 135^\circ$; 2 — $45^\circ \times 135^\circ \times 0^\circ$; 3 — $45^\circ \times 135^\circ \times 0^\circ \times 90^\circ$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Plate retraction effect depending on mesh geometry: 1 stands for $45^\circ \times 135^\circ$; 2 stands for $45^\circ \times 135^\circ \times 0^\circ$; 3 stands for $45^\circ \times 135^\circ \times 0^\circ \times 90^\circ$ (color online)

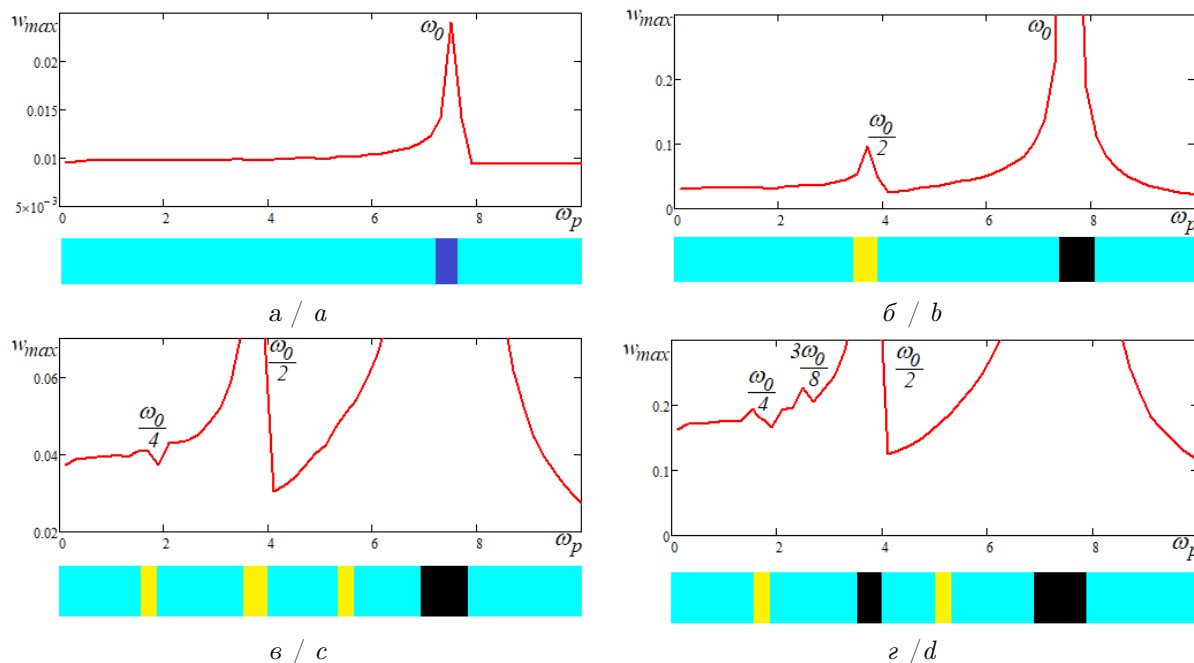


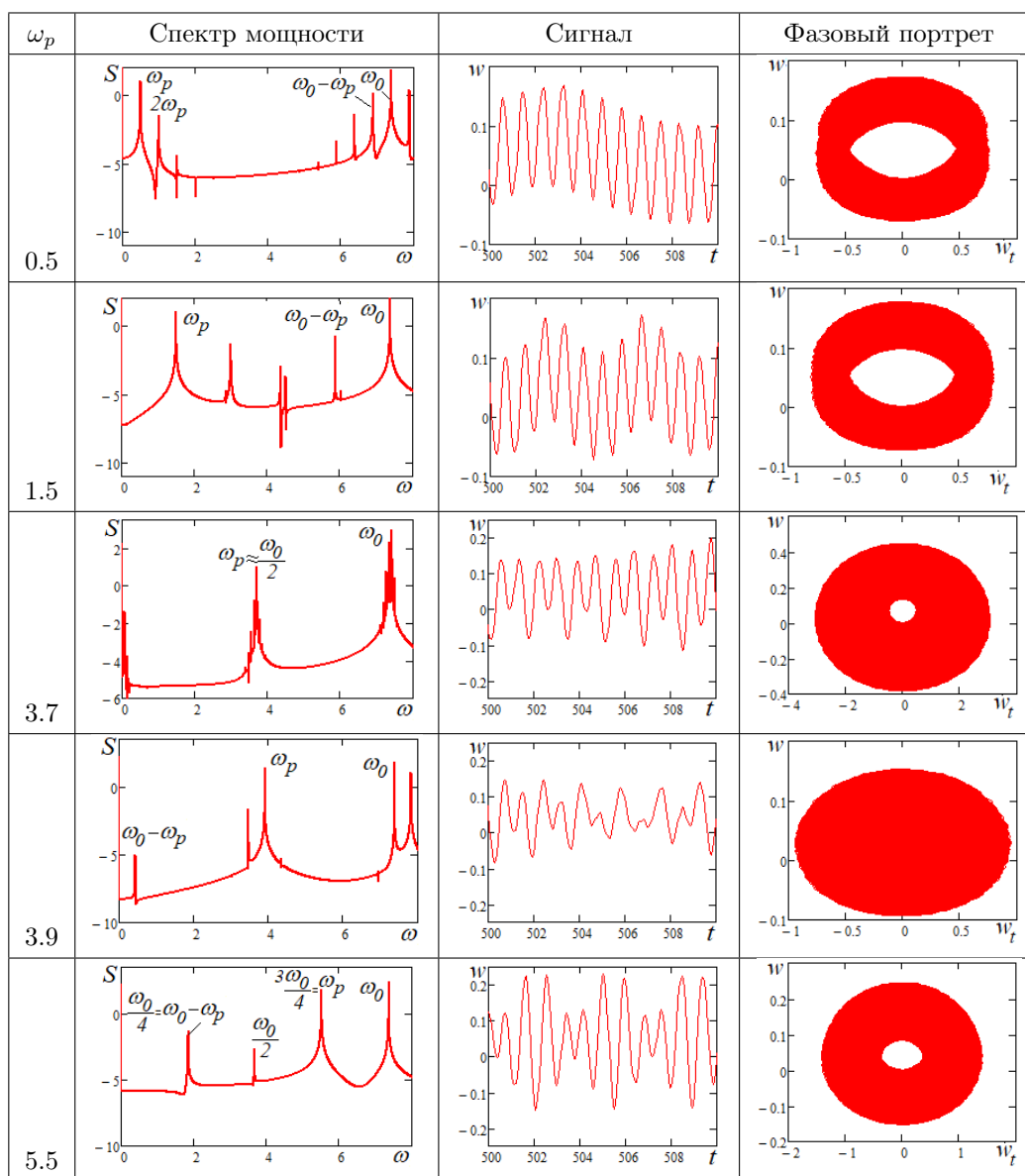
Рис. 5. Сценарий появления зон потери устойчивости $V_{st} = 1.5$ В: а — $V_{din} = 0.01$ В; б — $V_{din} = 0.4$ В; в — $V_{din} = 0.5$ В; г — $V_{din} = 0.7$ В (цвет онлайн)

Fig. 5. Scenario of occurrence of zones of loss of stability $V_{st} = 1.5$ В: а stands for $V_{din} = 0.01$ В; б stands for $V_{din} = 0.4$ В; в stands for $V_{din} = 0.5$ В; г stands for $V_{din} = 0.7$ В (color online)

тинки с частотой вынуждающей нагрузки максимальный прогиб резко увеличивается, что соответствует известному явлению резонанса. При увеличении значения напряжения динамической части нагрузки до $V_{din} = 0.4$ В на графике $w_{max}(V_{din})$ появляется еще одна зона, где происходит резкое увеличение прогиба. Данная зона соответствует частоте вынуждающих колебаний, равной половине частоты собственных колебаний ($\omega_0/2$). При дальнейшем увеличении значения напряжения динамической части нагрузки до $V_{din} = 0.7$ В на графике $w_{max}(V_{din})$ при $\omega_p = \omega_0/4$ и $\omega_p = 3\omega_0/4$ появляются зоны, где происходит резкое изменение прогиба. Этот сценарий появления зон неустойчивости аналогичен сценарию Фейгенбаума. На рис. 5 под графиками приведены шкалы характера колебаний. Голубым цветом обозначены колебания, в которых присутствуют гармоники на частоте возбуждения, частоте собственных колебаний и их линейные комбинации. Желтым цветом обозначены колебания на частотах $\omega_p/2^p$, где $p \in N$. Черным цветом обозначены зоны, где максимальный прогиб больше $0.25h$.

В таблице приведены характеристики колебаний при различных значениях частоты динамической части силы Кулона ω_p .

Характеристики колебаний $V_{st} = 1.5$ В, $V_{din} = 0.7$ В
Table. Oscillation characteristics $V_{st} = 1.5$ V, $V_{din} = 0.7$ V





Анализ сигналов ($V_{din} = 0.7B$) показывает, что при иррациональном отношении ω_0/ω_p или при отношении $\omega_0/\omega_p = k$, где k — нечетное число, спектр мощности демонстрирует две частоты, ω_0 и ω_p , и их линейные комбинации. Например, при $\omega_p = 0.5$ в спектре колебаний пластины присутствуют гармоники на частотах ω_0 , ω_p , $2\omega_p$, $3\omega_p$, $\omega_0 - \omega_p$, $\omega_0 - 2\omega_p$, $\omega_0 - 3\omega_p$ и т. д. Аналогичная картина наблюдается при других частотах $\omega_p = 1.5$; $\omega_p = 3.9$, причем максимальный прогиб при любой частоте из перечисленных равен $w = 0.173$.

В случае, когда частота вынуждающей нагрузки $\omega_p \approx \omega_0/2$, максимальный прогиб значительно превышает значение прогиба, полученного при других частотах возбуждения (см. таблицу при $\omega_p = 3.7$). Данный эффект хорошо виден на фазовом портрете. Аналогичный эффект получен при $\omega_p \approx \omega_0/4$ и при $\omega_p \approx 3\omega_0/4$ (см. таблицу при $\omega_p = 5.5$).

При дальнейшем увеличении интенсивности динамической части электрического воздействия ($V_{din} > 0.7B$) резкое увеличение прогиба можно наблюдать при частотах возбуждения, кратных частоте собственных колебаний ($\omega_p \approx \omega_0/8$, $\omega_p \approx \omega_0/16$ и т. д.).

Описанный сценарий появления зон динамической потери устойчивости качественно сохранялся для всех рассмотренных вариантов геометрий сеточной структуры пластины:

- 1) $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$;
- 2) $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$;
- 3) $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, $\varphi_3 = 0^\circ$;
- 4) $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, $\varphi_3 = 90^\circ$;
- 5) $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, $\varphi_3 = 0^\circ$, $\varphi_4 = 90^\circ$.

Заключение

В работе построена математическая модель колебаний изотропной гибкой сетчатой нанопластины в поле действия одного неподвижного электрода. Модель дает возможность исследовать пластины с различной геометрией сетки, что может быть полезным при проектировании конструктивных элементов НЭМС и МЭМС. На основании полученной модели проведен анализ эффекта втягивания для пластин с различными вариантами геометрии сетки в условиях статического электрического поля. Полученные результаты хорошо согласуются с натурным экспериментом. Также показано, что в условиях воздействия нестационарного электрического поля зоны неустойчивости появляются по определенному сценарию: с увеличением значения амплитуды динамической части электрического напряжения потеря устойчивости наблюдается на частотах вынуждающей нагрузки, кратных частоте собственных колебаний пластины ($\omega_p \approx \omega_0/2$, $\omega_p \approx \omega_0/4$, $\omega_p \approx \omega_0/8$ и т. д.).

Список литературы

1. Nazaria A., Faezb R., Shamlooa H. Modeling comparison of graphene nanoribbon field effect transistors with single vacancy defect // Superlattices and Microstructures. 2016. Vol. 97. P. 28–45. DOI: [10.1016/j.spmi.2016.06.008](https://doi.org/10.1016/j.spmi.2016.06.008)
2. Wong K. L., Chuan M. W., Hamzah A., Rusli S., Alias N. E., Sultan S. M., Lim C. S., Tan M. L. P. Performance metrics of current transport in pristine graphene nanoribbon field-effect transistors using recursive non-equilibrium Green's function approach // Superlattices and Microstructures. 2020. Vol. 145. Art. 106624. DOI: [10.1016/j.spmi.2020.106624](https://doi.org/10.1016/j.spmi.2020.106624)
3. Chuan M. W., Riyadi M. A., Hamzah A., Alias N. E., Sultan S. M., Lim C. S., Tan M. L. P. Impact of phonon scattering mechanisms on the performance of silicene nanoribbon field-effect transistors // Results in Physics. 2021. Vol. 29. Art. 104714. DOI: [10.1016/j.rinp.2021.104714](https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104714)
4. Liu Y., Li C., Shi X., Wu Z., Fan S., Wan Z., Han S. High-sensitivity graphene MOEMS resonant pressure sensor // ACS Applied Materials & Interfaces. 2023. Vol. 15, iss. 25. P. 30479–30485. DOI: [10.1021/acsami.3c04520](https://doi.org/10.1021/acsami.3c04520)
5. Chen Y., Liu S., Hong G., Zou M., Liu B., Luo J., Wang Y. Nano-optomechanical resonators for sensitive pressure sensing // ACS Applied Materials & Interfaces. 2022. Vol. 14, iss. 34. P. 39211–39219. DOI: [10.1021/acsami.2c09865](https://doi.org/10.1021/acsami.2c09865)
6. Shin D. H., Kim H., Kim S. H., Cheong H., Steeneken P. G., Joo C., Lee S. W. Graphene nano-



- electromechanical mass sensor with high resolution at room temperature // *iScience*. 2023. Vol. 26, iss. 2. Art. 105958. DOI: [10.1016/j.isci.2023.105958](https://doi.org/10.1016/j.isci.2023.105958)
7. Han G. R., Jiang J. W. Edge-mode-based graphene nanomechanical resonators for high-sensitivity mass sensor // *Europhysics Letters*. 2018. Vol. 123, iss. 3. Art. 36002. DOI: [10.1209/0295-5075/123/36002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/123/36002)
 8. Еремеев В. А., Зубов Л. М. Механика упругих оболочек. Москва : Наука, 2008. 286 с.
 9. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. Vol. 89, iss. 4. P. 242–256. DOI: [10.1002/zamm.200800207](https://doi.org/10.1002/zamm.200800207)
 10. Norouzzadeh A., Ansari R., Darvizeh M. Isogeometric dynamic analysis of shells based on the nonlinear micropolar theory // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2021. Vol. 135. Art. 103750. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103750](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103750)
 11. Carrera E., Zozulya V. V. Carrera unified formulation (CUF) for the micropolar plates and shells. I. Higher order theory // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 29, iss. 6. P. 773–795. DOI: [10.1080/15376494.2020.1793241](https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1793241)
 12. Sargsyan A., Sargsyan S. Geometrically nonlinear models of static deformation of micropolar elastic thin plates and shallow shells // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2021. Vol. 101, iss. 5. Art. e202000148. DOI: [10.1002/zamm.202000148](https://doi.org/10.1002/zamm.202000148)
 13. Zubov L. M., Kolesnikov A. M., Rudenko O. V. Exact solutions of nonlinear micropolar elastic theory for compressible solids // *Recent Developments in the Theory of Shells* / eds. H. Altenbach, J. Chróścielewski, V. Eremeyev, K. Wiśniewski. Cham : Springer, 2019. P. 771–798. (Advanced Structured Materials, vol. 110). DOI: [10.1007/978-3-030-17747-8_37](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_37)
 14. Varygina M. Numerical modeling of elastic waves in micropolar plates and shells taking into account inertial characteristics // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2020. Vol. 32, iss. 3. P. 761–774. DOI: [10.1007/s00161-018-0725-8](https://doi.org/10.1007/s00161-018-0725-8)
 15. Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Крысько В. А. Математическое моделирование сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых цилиндрических панелей // *Известия вузов. Физика*. 2019. Т. 62, вып. 9 (741). С. 101–105. DOI: [10.17223/00213411/62/9/101](https://doi.org/10.17223/00213411/62/9/101)
 16. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Papkova I. V., Krysko V. A. Chaotic vibrations of size-dependent flexible rectangular plates // *Chaos*. 2021. Vol. 31, iss. 4. Art. 043119. DOI: [10.1063/5.0044630](https://doi.org/10.1063/5.0044630)
 17. Mazur O., Kurpa L., Awrejcewicz J. Vibrations and buckling of orthotropic small-scale plates with complex shape based on modified couple stress theory // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2020. Vol. 100, iss. 11. Art. e202000009. DOI: [10.1002/zamm.202000009](https://doi.org/10.1002/zamm.202000009)
 18. Саркисян С. О. Модель тонких оболочек в моментной теории упругости с деформационной концепцией «Сдвиг плюс поворот» // *Физическая мезомеханика*. 2020. Т. 23, вып. 4. С. 13–19. DOI: [10.24411/1683-805X-2020-14002](https://doi.org/10.24411/1683-805X-2020-14002), EDN: USMFGI
 19. Саркисян С. О., Фарманян А. Ж. Термоупругость микрополярных ортотропных тонких оболочек // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2013. № 3. С. 222–237. DOI: [10.15593/perm.mech/2013.3.222-237](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.3.222-237), EDN: RDKNJH
 20. Partap G., Chugh N. Thermoelastic damping in microstretch thermoelastic rectangular plate // *Microsystem Technologies*. 2017. Vol. 23, iss. 12. P. 5875–5886. DOI: [10.1007/s00542-017-3350-8](https://doi.org/10.1007/s00542-017-3350-8)
 21. Ghayesh M. H., Farokhi H. Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2018. Vol. 109. P. 220–234. DOI: [10.1016/j.ymssp.2017.11.043](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.11.043)
 22. Saghir S., Younis M. I. An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation // *Acta Mechanica*. 2018. Vol. 229, iss. 7. P. 2909–2922. DOI: [10.1007/s00707-018-2141-3](https://doi.org/10.1007/s00707-018-2141-3)
 23. Лукин А. В., Попов И. А., Скубов Д. Ю. Нелинейная динамика и устойчивость элементов микросистемной техники // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2017. Т. 17, вып. 6. С. 1107–1115. DOI: [10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115](https://doi.org/10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115)
 24. Karami M., Kazemi A., Vatankeh R., Khosravifard A. Adaptive fractional-order backstepping sliding mode controller design for an electrostatically actuated size-dependent microplate // *Journal of Vibration and Control*. 2020. Vol. 27, iss. 11–12. P. 1353–1369. DOI: [10.1177/1077546320940916](https://doi.org/10.1177/1077546320940916)
 25. Karimipour I., Beni Y. T., Akbarzadeh A. H. Size-dependent nonlinear forced vibration and dynamic stability of electrically actuated micro-plates // *Communications in Nonlinear Science*



- and Numerical Simulation. 2019. Vol. 78. Art. 104856. DOI: [10.1016/j.cnsns.2019.104856](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104856)
26. Karimipour I., Beni Y. T., Zeighampour H. Vibration and dynamic behavior of electrostatic size-dependent micro-plates // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2020. Vol. 42. Art. 407. DOI: [10.1007/s40430-020-02490-4](https://doi.org/10.1007/s40430-020-02490-4)
27. Sajadi B., Alijani F., Goosen H., van Keulen F. Effect of pressure on nonlinear dynamics and instability of electrically actuated circular micro-plates // Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 91. P. 2157–2170. DOI: [10.1007/s11071-017-4007-y](https://doi.org/10.1007/s11071-017-4007-y)
28. Farokhi H., Ghayesh M. H. Nonlinear mechanics of electrically actuated microplates // International Journal of Engineering Science. 2018. Vol. 123. P. 197–213. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2017.08.017](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.08.017)
29. dell'Isola F., Steigman D. A two-dimensional gradient-elasticity theory for woven fabrics // Journal of Elasticity. 2015. Vol. 118, iss. 1. P. 113–125. DOI: [10.1007/s10659-014-9478-1](https://doi.org/10.1007/s10659-014-9478-1)
30. Eremeyev V. A. A nonlinear model of a mesh shell // Mechanics of Solids. 2018. Vol. 53, iss. 4. P. 464–469. DOI: [10.3103/S002565441804012](https://doi.org/10.3103/S002565441804012)
31. Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Салтыкова О. А., Крысько В. А. Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 48–59. DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59), EDN: MYYGLY
32. Крылова Е. Ю., Папкова И. В., Яковлева Т. В., Крысько В. А. Теория колебаний углеродных нанотрубок как гибких микрополярных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвига // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 305–316. DOI: [10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316), EDN: PFEDII
33. Kármán Th. V. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau // Mechanik / eds. F. Klein, C. Müller. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 1907. P. 311–385. DOI: [10.1007/978-3-663-16028-1_5](https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5)
34. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39, iss. 10. P. 2731–2743. DOI: [10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
35. Пшеничнов Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. Москва : Наука, 1982. 352 с.
36. Hamilton W. R. On conjugate functions, or algebraic couples // Report of the Fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science; held at Edinburgh in 1834. London : J. Murray, 1835. Vol. 4. P. 519–523.
37. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Komarov S. A. Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2005. Vol. 194, iss. 27–29. P. 3108–3126. DOI: [10.1016/j.cma.2004.08.005](https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.08.005)
38. Français O., Dufour I. Normalized abacus for the global behavior of diaphragm: Pneumatic, electrostatic, piezoelectric or electromagnetic actuation // Journal of Modeling and Simulation of Microsystems. 1999. Vol. 1, iss. 2. P. 149–160.

References

1. Nazaria A., Faezb R., Shamlooa H. Modeling comparison of graphene nanoribbon field effect transistors with single vacancy defect. *Superlattices and Microstructures*, 2016, vol. 97, pp. 28–45. DOI: [10.1016/j.spmi.2016.06.008](https://doi.org/10.1016/j.spmi.2016.06.008)
2. Wong K. L., Chuan M. W., Hamzah A., Rusli S., Alias N. E., Sultan S. M., Lim C. S., Tan M. L. P. Performance metrics of current transport in pristine graphene nanoribbon field-effect transistors using recursive non-equilibrium Green's function approach. *Superlattices and Microstructures*, 2020, vol. 145, art. 106624. DOI: [10.1016/j.spmi.2020.106624](https://doi.org/10.1016/j.spmi.2020.106624)
3. Chuan M. W., Riyadi M. A., Hamzah A., Alias N. E., Sultan S. M., Lim C. S., Tan M. L. P. Impact of phonon scattering mechanisms on the performance of silicene nanoribbon field-effect transistors. *Results in Physics*, 2021, vol. 29, art. 104714. DOI: [10.1016/j.rinp.2021.104714](https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104714)
4. Liu Y., Li C., Shi X., Wu Z., Fan S., Wan Z., Han S. High-sensitivity graphene MOEMS resonant pressure sensor. *ACS Applied Materials & Interfaces*, 2023, vol. 15, iss. 25, pp. 30479–30485. DOI: [10.1021/acsami.3c04520](https://doi.org/10.1021/acsami.3c04520)
5. Chen Y., Liu S., Hong G., Zou M., Liu B., Luo J., Wang Y. Nano-optomechanical resonators for sensitive pressure sensing. *ACS Applied Materials & Interfaces*, 2022, vol. 14, iss. 34, pp. 39211–39219. DOI: [10.1021/acsami.2c09865](https://doi.org/10.1021/acsami.2c09865)



6. Shin D. H., Kim H., Kim S. H., Cheong H., Steeneken P. G., Joo C., Lee S. W. Graphene nano-electromechanical mass sensor with high resolution at room temperature. *iScience*, 2023, vol. 26, iss. 2, art. 105958. DOI: [10.1016/j.isci.2023.105958](https://doi.org/10.1016/j.isci.2023.105958)
7. Han G. R., Jiang J. W. Edge-mode-based graphene nanomechanical resonators for high-sensitivity mass sensor. *Europhysics Letters*, 2018, vol. 123, iss. 3, art. 36002. DOI: [10.1209/0295-5075/123/36002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/123/36002)
8. Eremeev V. A., Zubov L. M. *Mekhanika uprugikh obolochek* [Mechanics of elastic shells]. Moscow, Nauka, 2008. 286 p. (in Russian).
9. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 89, iss. 4, pp. 242–256. DOI: [10.1002/zamm.200800207](https://doi.org/10.1002/zamm.200800207)
10. Norouzzadeh A., Ansari R., Darvizeh M. Isogeometric dynamic analysis of shells based on the nonlinear micropolar theory. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2021, vol. 135, art. 103750. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103750](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103750)
11. Carrera E., Zozulya V. V. Carrera unified formulation (CUF) for the micropolar plates and shells. I. Higher order theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2022, vol. 29, iss. 6, pp. 773–795. DOI: [10.1080/15376494.2020.1793241](https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1793241)
12. Sargsyan A., Sargsyan S. Geometrically nonlinear models of static deformation of micropolar elastic thin plates and shallow shells. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, vol. 101, iss. 5, art. e202000148. DOI: [10.1002/zamm.202000148](https://doi.org/10.1002/zamm.202000148)
13. Zubov L. M., Kolesnikov A. M., Rudenko O. V. Exact solutions of nonlinear micropolar elastic theory for compressible solids. In: Altenbach H., Chróścielewski J., Eremeyev V., Wiśniewski K. (eds.) *Recent Developments in the Theory of Shells*. Advanced Structured Materials, vol. 110. Springer, Cham, 2019, pp. 771–798. DOI: [10.1007/978-3-030-17747-8_37](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_37)
14. Varygina M. Numerical modeling of elastic waves in micropolar plates and shells taking into account inertial characteristics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2020, vol. 32, iss. 3, pp. 761–774. DOI: [10.1007/s00161-018-0725-8](https://doi.org/10.1007/s00161-018-0725-8)
15. Krylova E. Y., Papkova I. V., Krysko V. A. Mathematical modeling of complex oscillations of flexible micropolar mesh cylindrical panels. *Russian Physics Journal*, 2019, vol. 62, iss. 9, pp. 1649–1655. DOI: [10.1007/s11182-020-01887-x](https://doi.org/10.1007/s11182-020-01887-x), EDN: SSIMGX
16. Krysko V. A. Jr., Awrejcewicz J., Papkova I. V., Krysko V. A. Chaotic vibrations of size-dependent flexible rectangular plates. *Chaos*, 2021, vol. 31, iss. 4, art. 043119. DOI: [10.1063/5.0044630](https://doi.org/10.1063/5.0044630)
17. Mazur O., Kurpa L., Awrejcewicz J. Vibrations and buckling of orthotropic small-scale plates with complex shape based on modified couple stress theory. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, vol. 100, iss. 11, art. e202000009. DOI: [10.1002/zamm.202000009](https://doi.org/10.1002/zamm.202000009)
18. Sargsyan S. H. Discrete-continuous and continuous-moment models of graphene under in-plane deformation. *Physical Mesomechanics*, 2020, vol. 23, iss. 4, pp. 309–315. DOI: [10.1134/S1029959920040049](https://doi.org/10.1134/S1029959920040049), EDN: GTOCWT
19. Sargsyan S. H., Farmanyan A. J. Termouprugost' mikropolyarnykh ortotropnykh tonkikh obolochek. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, iss. 3, pp. 222–237 (in Russian). DOI: [10.15593/perm.mech/2013.3.222-237](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.3.222-237), EDN: RDKNJH
20. Partap G., Chugh N. Thermoelastic damping in microstretch thermoelastic rectangular plate. *Microsystem Technologies*, 2017, vol. 23, iss. 12, pp. 5875–5886. DOI: [10.1007/s00542-017-3350-8](https://doi.org/10.1007/s00542-017-3350-8)
21. Ghayesh M. H., Farokhi H. Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, vol. 109, pp. 220–234. DOI: [10.1016/j.ymssp.2017.11.043](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.11.043)
22. Saghir S., Younis M. I. An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, iss. 7, pp. 2909–2922. DOI: [10.1007/s00707-018-2141-3](https://doi.org/10.1007/s00707-018-2141-3)
23. Lukin A. V., Popov I. A., Skubov D. Yu. Nonlinear dynamics and stability of microsystems engineering elements. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, iss. 6, pp. 1107–1115 (in Russian). DOI: [10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115](https://doi.org/10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115)
24. Karami M., Kazemi A., Vatankeh R., Khosravifard A. Adaptive fractional-order backstepping sliding mode controller design for an electrostatically actuated size-dependent microplate. *Journal of Vibration and Control*, 2020, vol. 27, iss. 11–12, pp. 1353–1369. DOI: [10.1177/1077546320940916](https://doi.org/10.1177/1077546320940916)



25. Karimipour I., Beni Y. T., Akbarzadeh A. H. Size-dependent nonlinear forced vibration and dynamic stability of electrically actuated micro-plates. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, vol. 78, art. 104856. DOI: [10.1016/j.cnsns.2019.104856](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104856)
26. Karimipour I., Beni Y. T., Zeighampour H. Vibration and dynamic behavior of electrostatic size-dependent micro-plates. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2020, vol. 42, art. 407. DOI: [10.1007/s40430-020-02490-4](https://doi.org/10.1007/s40430-020-02490-4)
27. Sajadi B., Alijani F., Goosen H., van Keulen F. Effect of pressure on nonlinear dynamics and instability of electrically actuated circular micro-plates. *Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 91, pp. 2157–2170. DOI: [10.1007/s11071-017-4007-y](https://doi.org/10.1007/s11071-017-4007-y)
28. Farokhi H., Ghayesh M. H. Nonlinear mechanics of electrically actuated microplates. *International Journal of Engineering Science*, 2018, vol. 123, pp. 197–213. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2017.08.017](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.08.017)
29. dell’Isola F., Steigman D. A two-dimensional gradient-elasticity theory for woven fabrics. *Journal of Elasticity*, 2015, vol. 118, iss. 1, pp. 113–125. DOI: [10.1007/s10659-014-9478-1](https://doi.org/10.1007/s10659-014-9478-1)
30. Eremeyev V. A. A nonlinear model of a mesh shell. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, iss. 4, pp. 464–469. DOI: [10.3103/S002565441804012](https://doi.org/10.3103/S002565441804012)
31. Krylova E. Y., Papkova I. V., Saltykova O. A., Krysko V. A. Features of complex vibrations of flexible micropolar mesh panels. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 48–59 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59), EDN: [MYUGLY](https://www.edn.ru/1816-9791-2021-21-1-48-59)
32. Krylova E. Y., Papkova I. V., Yakovleva T. V., Krysko V. A. Theory of vibrations of carbon nanotubes like flexible micropolar mesh cylindrical shells taking into account shift. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 305–316 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316), EDN: [PFEDII](https://www.edn.ru/1816-9791-2019-19-3-305-316)
33. Kármán Th. V. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. In: Klein F., Müller C. (eds.) *Mechanik*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1907, pp. 311–385. DOI: [10.1007/978-3-663-16028-1_5](https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5)
34. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, iss. 10, pp. 2731–2743. DOI: [10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
35. Pshenichnov G. I. *Teoriya tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastinok* [Theory of thin elastic mesh shells and plates]. Moscow, Nauka, 1982. 352 p. (in Russian).
36. Hamilton W. R. On conjugate functions, or algebraic couples. *Report of the Fourth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*. London, J. Murray, 1835. Vol. 4, pp. 519–523.
37. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Komarov S. A. Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, vol. 194, iss. 27–29, pp. 3108–3126. DOI: [10.1016/j.cma.2004.08.005](https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.08.005)
38. Français O., Dufour I. Normalized abacus for the global behavior of diaphragm: Pneumatic, electrostatic, piezoelectric or electromagnetic actuation. *Journal of Modeling and Simulation of Microsystems*, 1999, vol. 1, iss. 2, pp. 149–160.

Поступила в редакцию / Received 13.11.2023

Принята к публикации / Accepted 11.12.2024

Опубликована / Published 29.08.2025