



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 345–365

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 345–365

<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-345-365>

EDN: <https://elibrary.ru/HRAHSM>

Обзорная статья

УДК 539.3

## Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования.

### Часть II. Алгоритмы исследования оболочечных конструкций

В. В. Карпов, П. А. Бакусов<sup>✉</sup>, А. М. Масленников, А. А. Семенов

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 190005, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4

**Карпов Владимир Васильевич**, доктор технических наук, профессор кафедры технологий информационного и математического моделирования, [vvkarpov@lan.spbgasu.ru](mailto:vvkarpov@lan.spbgasu.ru), ORCID: [0000-0001-7911-4067](https://orcid.org/0000-0001-7911-4067), SPIN: [7406-9199](https://spina.info/spin/7406-9199), AuthorID: [339002](https://authorid.ru/339002)

**Бакусов Павел Анатольевич**, старший преподаватель кафедры технологий информационного и математического моделирования, [bakusovpavel@gmail.com](mailto:bakusovpavel@gmail.com), ORCID: [0000-0003-1215-1183](https://orcid.org/0000-0003-1215-1183), SPIN: [5382-1252](https://spina.info/spin/5382-1252), AuthorID: [936766](https://authorid.ru/936766)

**Масленников Александр Матвеевич**, доктор технических наук, профессор кафедры строительной механики, [aleksmaslennikov@yandex.ru](mailto:aleksmaslennikov@yandex.ru), SPIN: [1464-6309](https://spina.info/spin/1464-6309), AuthorID: [541277](https://authorid.ru/541277)

**Семенов Алексей Александрович**, доктор технических наук, профессор кафедры технологий информационного и математического моделирования, [sw.semenov@gmail.com](mailto:sw.semenov@gmail.com), ORCID: [0000-0001-9490-7364](https://orcid.org/0000-0001-9490-7364), SPIN: [9057-9882](https://spina.info/spin/9057-9882), AuthorID: [648893](https://authorid.ru/648893)

**Аннотация.** Математические модели деформирования тонких оболочек, описанные в первой части статьи, представляют собой или вариационную задачу о минимуме функционала энергии деформации оболочки, или краевую задачу для дифференциальных уравнений равновесий оболочки. И в том, и в другом случае задаются еще краевые условия исходя из вида закрепления контура оболочек. Для решения поставленных задач рассмотрены различные методы. Применяя метод Ритца к вариационной задаче о минимуме функционала энергии деформации оболочки или метода Бубнова–Галеркина к краевой задаче для дифференциальных уравнений равновесий оболочки, получаются системы алгебраических уравнений линейных или нелинейных. Применение метода конечных элементов (МКЭ) к решению задач теории оболочек также приводит к системам алгебраических уравнений, порядок которых может быть очень большим. Для решения линейных систем алгебраических уравнений может быть применен метод Гаусса, если порядок системы не превышает  $10^3$ . Если же порядок системы линейных алгебраических уравнений превышает  $10^3$ , то для решения таких систем применяют итерационные методы. Для решения нелинейных задач теории оболочек применяют методы продолжения решения по параметру. Если за параметр принимается нагрузка, то это будет метод последовательных нагружений В. В. Петрова, который позволяет свести решение нелинейных задач к последовательному решению линейных задач с изменяющимися на каждом этапе нагружения коэффициентами. Для решения нелинейных задач теории оболочек рассмотрен также метод итераций, когда нелинейные члены переносятся в правую часть и последовательно изменяются на каждом этапе итерации. Для решения нелинейных задач теории оболочек рассмотрен еще метод наискорейшего спуска. А. Л. Гольденвейзером разработан специальный метод — метод асимптотического интегрирования уравнений теории оболочек, который также описан в предлагаемой статье. Если уравнение равновесия оболочек содержит разрывные функции (единичные функции, дельта-функции), то Г. Н. Белосточным разработан специальный метод решения таких



уравнений, который также описан в статье. Приводятся примеры применения описанных методов для решения конкретных задач теории оболочек.

**Ключевые слова:** упругие тонкие оболочки, математическая модель, алгоритмы решения нелинейных задач, численные методы, устойчивость оболочек

**Для цитирования:** Карпов В. В., Бакусов П. А., Масленников А. М., Семенов А. А. Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования. Часть II. Алгоритмы исследования оболочечных конструкций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 345–365. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-345-365](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-345-365), EDN: [HRAHSM](https://www.edn.ru/HRAHSM)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Review

## Simulation models and research algorithms of thin shell structures deformation. Part II. Algorithms for studying shell structures

V. V. Karpov, P. A. Bakusov<sup>✉</sup>, A. M. Maslennikov, A. A. Semenov

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 4 2nd Krasnoarmeiskaya St., Saint Petersburg 190005, Russia

**Vladimir V. Karpov**, [vvkarpov@lan.spbgasu.ru](mailto:vvkarpov@lan.spbgasu.ru), ORCID: [0000-0001-7911-4067](https://orcid.org/0000-0001-7911-4067), SPIN: [7406-9199](https://www.spin.ru/7406-9199), AuthorID: [339002](https://www.authorid.ru/339002)

**Pavel A. Bakusov**, [bakusovpavel@gmail.com](mailto:bakusovpavel@gmail.com), ORCID: [0000-0003-1215-1183](https://orcid.org/0000-0003-1215-1183), SPIN: [5382-1252](https://www.spin.ru/5382-1252), AuthorID: [936766](https://www.authorid.ru/936766)

**Alexander M. Maslennikov**, [aleksmaslennikov@yandex.ru](mailto:aleksmaslennikov@yandex.ru), SPIN: [1464-6309](https://www.spin.ru/1464-6309), AuthorID: [541277](https://www.authorid.ru/541277)

**Alexey A. Semenov**, [sw.semenov@gmail.com](mailto:sw.semenov@gmail.com), ORCID: [0000-0001-9490-7364](https://orcid.org/0000-0001-9490-7364), SPIN: [9057-9882](https://www.spin.ru/9057-9882), AuthorID: [648893](https://www.authorid.ru/648893)

**Abstract.** Mathematical models of a thin shell deformation, which are considered in the first part of the article, constitute either a variational problem of energy functional minimum in terms of shell deformation or a boundary problem for differential equations of shell equilibrium. In both cases, the boundary conditions are also introduced according to the type of shell fixation. To solve the specified tasks, the different methods are considered. Using either the Ritz method for the variational problem of energy functional minimum for shell deformation or the Bubnov–Galerkin method for the boundary problem for differential equations of shell equilibrium, we will get systems of linear or nonlinear equations. The finite element method (FEM) in application to shell theory problems also leads to systems of linear equations, and the order of the equations can be very large. It is possible to use the Gauss method to solve the linear systems of algebraic equations in case the system order is less than  $10^3$ . In another case, it is necessary to use iterative methods. For nonlinear tasks of thin shell theory, the parameter marching method is used. If the load is taken as a parameter, it is the V. V. Petrov’s sequential loading method. It allows transforming the nonlinear tasks into a consistent linear solution with coefficients varying at each stage of loading. For solving nonlinear problems of shell theory, we consider the iteration method, when the nonlinear terms are transferred to the right side and successively changed at each iteration stage. In the article, it is also considered the method of quickest descent. A. L. Goldenweiser developed the special method: The asymptotic-integration method of thin shell theory, which is described in the article. If the equilibrium equation of the shell contains the discontinuous function (unit functions, delta-functions), then for this case there is a special G. N. Bialystochny’s method, which is also specified in the article. Examples of the application of the described methods for solving specific problems of shell theory are also given.

**Keywords:** elastic thin shell, mathematical model, algorithms for solving nonlinear problems, numerical methods, stability of shells

**For citation:** Karpov V. V., Bakusov P. A., Maslennikov A. M., Semenov A. A. Simulation models and research algorithms of thin shell structures deformation. Part II. Algorithms for studying shell structures.



*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 345–365 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-345-365](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-345-365), EDN: HRAHSM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

*Окончание.* Начало см.: Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 370–410. DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410), EDN: YSOXDU

## Введение

В первой части данной публикации [1] приводятся сведения по истории развития теории тонких оболочек. Как и при разработке моделей деформирования пластин, при формировании основных соотношений теории оболочек применяются два подхода. Особенно широкое распространение получил подход, основанный на использовании определенных гипотез (например, гипотезы прямой нормали).

Изложение теории оболочек ведется на основе публикаций российских авторов (В. В. Новожилов [2], А. И. Лурье [3], А. Л. Гольденвейзер [4], Х. М. Муштари [5], В. З. Власов [6]). Рассматриваются ортогональная система координат и тонкие оболочки. Поэтому считается, что нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, малы по сравнению с другими напряжениями. Среда, заполняемая оболочкой, обладает свойством сплошности, поэтому деформации и напряжения являются непрерывными функциями. Поскольку изучаются малые перемещения (геометрически линейный вариант), то синусы и тангенсы углов заменяются самими углами, а косинусы — единицами.

Вначале излагается теория тонких оболочек, разработанная В. В. Новожиловым. Считается, что в слое, отстоящем на  $z$  от срединной поверхности оболочки, параметры Ляме и кривизны оболочки изменяются в зависимости от  $z$ . Деформации в слое, отстоящем на  $z$  от срединной поверхности, содержат члены при  $z$  в первой степени и во второй. Показано отличие соотношений теории оболочек, полученных А. Н. Лурье и А. Л. Гольденвейзером, когда их срединная поверхность отнесена к ортогональной системе координат. Приводятся соотношения теории тонких оболочек, полученные А. Л. Гольденвейзером, когда их срединная поверхность отнесена к произвольной косоугольной системе координат. Рассмотрены также соотношения для тонких оболочек в ортогональной системе координат, которая наиболее часто встречается при расчетах их напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости, когда в слое, отстоящем на  $z$  от срединной поверхности, параметры Ляме и кривизны оболочек остаются такими же, как и в срединной поверхности.

Так как главным недостатком оболочек является возможность потери устойчивости, то рассматривается вариант оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, что повышает их жесткость и позволяет избежать потери устойчивости. Х. М. Муштари и В. З. Власов разработали упрощенный вариант оболочек, особенно эффективный при исследовании пологих оболочек. В 30–40-е гг. прошлого столетия стала развиваться нелинейная теория оболочек. Появилась возможность исследовать устойчивость оболочек с учетом нелинейных факторов, определять местные и общие формы потери устойчивости.

Отмечены ученые, внесшие существенный вклад в теорию метода расчета исследования прочности и устойчивости оболочек. Все эти сведения необходимы для разработки алгоритмов исследования прочности, устойчивости и колебания оболочек.

## 1. Методы расчета оболочечных конструкций

### 1.1. Методика решения вариационных и краевых задач теории оболочек

При исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) и устойчивости оболочечных конструкций математическая модель может быть получена в виде краевой задачи для дифференциального уравнения равновесия и краевых условий или в виде вариационной задачи о минимуме функционала полной потенциальной энергии деформаций конструкции и краевых условий. Рассмотрим методы решения таких задач.

Самым распространенным методом решения задач механики является метод конечных элементов (МКЭ). Применяя его получается система алгебраических уравнений, порядок которой может быть очень большим. Для линейных систем это решение вполне реально, в то время как для нелинейных — нереально.

Пусть задан функционал полной потенциальной энергии деформации оболочки, представляющий собой разность потенциальной энергии деформации и работы внешних сил (поперечной нагрузки  $q$ ),

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \Phi(U, V, W, q) \, dx \, dy, \tag{1}$$

и краевых условий, т. е. условий закрепления контура оболочки. Если учитываются поперечные сдвиги, то в функционале еще будут присутствовать функции  $\Psi_x$  и  $\Psi_y$ . Необходимо найти при заданном значении нагрузки  $q$  функции  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ ,  $W(x, y)$ , удовлетворяющие заданным краевым условиям и дающие минимум функционалу (1).

Приближенное решение для функций  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ ,  $W(x, y)$  берется в виде суммы произведений неизвестных числовых параметров на известные функции, например,

$$U = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} U_{ij} X_1^i Y_1^j, \quad V = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} V_{ij} X_2^i Y_2^j, \quad W = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} W_{ij} X_3^i Y_3^j. \tag{2}$$

Здесь  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$  — неизвестные числовые параметры, которые умножаются на известные функции (аппроксимирующие функции), которые могут быть непрерывными и заданными на всей области, занимаемой оболочкой. В этом случае они должны удовлетворять заданным краевым условиям. Если область, занимаемая оболочкой, разбита на конечные элементы, то эти функции задаются на каждом конечном элементе, и в разложении (2) будут присутствовать еще знаки суммирования.

Если теперь (2) подставить в (1) и вычислить интегралы от известных функций, то функционал  $E_s$  сведется к функции  $E_{sf}$  от неизвестных числовых параметров и параметра нагрузки

$$E_{sf} = E_{sf}(U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, q), \quad i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{N}. \tag{3}$$

Теперь исходная вариационная задача свелась к нахождению минимума этой функции, т. е. нахождению чисел  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$ , при которых функция (3) имеет минимум. Для этого существует несколько способов.

Пожалуй, самый естественный способ — это найти частные производные этой функции по неизвестным числовым параметрам и приравнять их к нулю (метод Ритца):

$$\frac{\partial E_{sf}}{\partial U_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial E_{sf}}{\partial V_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial E_{sf}}{\partial W_{ij}} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{N}. \tag{4}$$

В результате получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$ , методы решения которой рассмотрим ниже.

Если решается краевая задача для дифференциальных уравнений, то, подставив в них (2), получим невязку. Интеграл по области, занимаемой оболочкой, от произведения невязки на аппроксимирующие функции должен обращаться в нуль (метод Бубнова–Галеркина). В результате получим систему (4).

Для нахождения минимума функции (3) можно применить метод наискорейшего спуска, или метод покоординатного спуска, и итерационным процессом вычислить значения числовых параметров  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$ , чтобы в дальнейшем получить значение функций  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ ,  $W(x, y)$  при значении  $q = q_k$ , именно при любом значении нагрузки  $q_k$ .

Суть метода наискорейшего спуска состоит в следующем. Пусть  $M_1(U_{ij1}, V_{ij1}, W_{ij1})$  — некоторая точка существования функции (3), минимум которой нужно найти (т. е. нужно



найти  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$  при  $q = q_k$ , при которых с учетом (2) функционал (1) имеет минимум). Градиентом этой функции в точке  $M_1$  является вектор с проекциями в виде частных производных, вычисляемых в точке  $M_1$ :

$$\frac{\partial E_{sf}}{\partial U_{ij}}(M_1), \quad \frac{\partial E_{sf}}{\partial V_{ij}}(M_1), \quad \frac{\partial E_{sf}}{\partial W_{ij}}(M_1).$$

Этот вектор указывает направление максимального роста функции  $E_{sf}(U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, q_k)$  в точке  $M_1$ . Луч с началом в точке  $M_1$ , целиком лежащий в области существования функции  $E_{sf}(U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, q_k)$  и направленный противоположно вектору-градиенту, и имеет следующие координаты:

$$U_{ij} = U_{ij1} - t \frac{\partial E_{sf}}{\partial U_{ij}}(M_1), \quad V_{ij} = V_{ij1} - t \frac{\partial E_{sf}}{\partial V_{ij}}(M_1), \quad W_{ij} = W_{ij1} - t \frac{\partial E_{sf}}{\partial W_{ij}}(M_1),$$

где  $t \geq 0$ .

Функция  $E_{sf}(U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, q_k)$  в точках этого луча будет сложной функцией одного аргумента  $t$

$$\varphi(t) = E_{sf} \left( U_{ij1} - t \frac{\partial E_{sf}}{\partial U_{ij}}(M_1), V_{ij1} - t \frac{\partial E_{sf}}{\partial V_{ij}}(M_1), W_{ij1} - t \frac{\partial E_{sf}}{\partial W_{ij}}(M_1), q_k \right).$$

Чтобы найти минимум этой функции, нужно получить корни уравнения  $\varphi'(t) = 0$ . Если  $t_1$  — один из этих корней, то можно перейти от точки  $M_1$  к точке  $M_2$  с координатами

$$U_{ij2} = U_{ij1} - t_1 \frac{\partial E_{sf}}{\partial U_{ij}}(M_1), \quad V_{ij2} = V_{ij1} - t_1 \frac{\partial E_{sf}}{\partial V_{ij}}(M_1), \quad W_{ij2} = W_{ij1} - t_1 \frac{\partial E_{sf}}{\partial W_{ij}}(M_1).$$

Далее, за исходную принимается точка  $M_2$ , и аналогично находят точку  $M_3$ , затем  $M_4, M_5, \dots, M_n$ . Так постепенно приходят к точке минимума функции  $E_{sf}(U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, q_k)$ , т.е. находят значения  $U_{ijn}, V_{ijn}, W_{ijn}$ , которые при  $q = q_k$  дают минимум функции (3). Следует заметить, что процесс нахождения корней уравнения  $\varphi'(t) = 0$  вызывает определенные трудности, но есть методы, позволяющие находить эти корни приближенно.

Такая методика нахождения минимума функции (3) на основе метода наискорейшего спуска описана в работе [7].

Существует современная модификация метода наискорейшего спуска.

Теперь рассмотрим методы решения нелинейной системы (4). Здесь может быть несколько способов, но начинать решение нужно с нулевого по нагрузке состояния оболочки (т.е. при  $q = 0, U = 0, V = 0, W = 0$ ). Далее все методы будут являться пошаговыми. Итак, при значении нагрузки  $q_k$  известны значения  $U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}$ . Нужно найти эти значения при нагрузке  $q_k + \Delta q_k = q_{k+1}$ .

Систему нелинейных уравнений (4) запишем в виде

$$F(X, q) = 0. \tag{5}$$

Здесь  $X = (U_{ij}, V_{ij}, W_{ij})^T$ ,  $F = (F_{1l}, F_{2l}, F_{3l})^T$ .

Система (5), если функционал имеет вид (1), — это система  $3N$  уравнений с  $3N$  неизвестными, которую более подробно можно записать в виде

$$\begin{aligned} F_{1l}(U_{11}, U_{12}, \dots, U_{nn}, V_{11}, V_{12}, \dots, V_{nn}, W_{11}, W_{12}, \dots, W_{nn}) &= 0, \\ F_{2l}(U_{11}, U_{12}, \dots, U_{nn}, V_{11}, V_{12}, \dots, V_{nn}, W_{11}, W_{12}, \dots, W_{nn}) &= 0, \\ F_{3l}(U_{11}, U_{12}, \dots, U_{nn}, V_{11}, V_{12}, \dots, V_{nn}, W_{11}, W_{12}, \dots, W_{nn}, q) &= 0, \quad l = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Здесь только в последних  $N$  уравнениях присутствует  $q$ . Система (5) содержит линейную часть уравнений и нелинейную, поэтому можно представить

$$F(X, q) = F^L(X) + F^N(X) + C_p \cdot q,$$

где  $F^L(X)$  — линейная часть уравнения, а  $F^N(X)$  — нелинейная его часть.

Самая простая методика решения нелинейных уравнений (5) основана на методе итераций. Нелинейные члены уравнений переносим в правую часть:

$$F^L(X) + C_p \cdot q = -F^N(X).$$

При  $q = q_k$  известно значение  $X_k$ , подставим эти значения в  $F^N(X)$  и решаем линейное уравнение

$$F^L(X_{k+1}) + C_p \cdot q_{k+1} = -F^N(X_k).$$

Найденное решение вновь подставляется в  $F^N(X)$ , и процесс продолжается до тех пор, пока, например, на  $k$ -й итерации прогиб  $W(x, y)$  не будет удовлетворять неравенству

$$\left| \frac{W^{k+1} - W^k}{W^{k+1}} \right| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — заданное значение погрешности.

Эта методика позволяет находить решение задачи до первой критической нагрузки потери устойчивости оболочки, а далее итерационный процесс будет расходиться. Такая методика может быть использована не только для решения линейно-упругих задач, но и для нелинейно-упругих, а также задач ползучести. Эта методика описана в работе [8].

Зачастую необходимо исследовать НДС оболочки не только в докритической области, но и в закритической, т.е. находить не только верхнюю критическую нагрузку, но и нижнюю и другие критические нагрузки, если они есть (исследовать местную и общую потери устойчивости оболочки).

Чтобы провести такие исследования, нужно для решения нелинейного уравнения (3) применять метод продолжения решения по параметру [9]. Сходимость этого метода устанавливает теорема о неявных функциях (см. [9]).

Пусть известно некоторое решение нелинейного уравнения (5) при  $q = q_0$   $X_0(U_{ij0}, V_{ij0}, W_{ij0})$ , т.е.

$$X_0(q_0) = 0. \tag{6}$$

Продифференцируем (5) по параметру  $q$ . В результате получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{dq} + \frac{\partial F}{\partial q} = 0. \tag{7}$$

Это уравнение с начальным условием (6) представляет собой начальную задачу для дифференциального уравнения первого порядка относительно  $\frac{dX}{dq}$ . Здесь  $\frac{\partial F}{\partial X} = J$  — матрица Якоби. Точки, где  $\det\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right) \neq 0$ , называются регулярными, а точки, где  $\det\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right) = 0$ , — особыми.

Применим для решения начальной задачи (7), (6) метод Эйлера, получим расчетную схему (при  $q = q_k$  решение известно)

$$X_{k+1} = X_k + \Delta X_k, \quad q_{k+1} = q_k + \Delta q_k,$$

где  $\Delta q_k$  задается, а  $\Delta X_k$  находится из решения линейного алгебраического уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X_k, q_k) \Delta X_k + \frac{\partial F}{\partial q}(X_k, q_k) \Delta q_k = 0. \tag{8}$$

Описанная методика составляет суть метода последовательных нагружений [10].

Для решения этой системы линейных алгебраических уравнений можно применить метод Гаусса. Решив эту систему, находим  $\Delta X_k$ , т.е. значения  $\Delta U_{ij}^{(k)}$ ,  $\Delta V_{ij}^{(k)}$ ,  $\Delta W_{ij}^{(k)}$  при  $q = q_{k+1}$ . После чего находим накопленные к этому этапу значения параметров

$$U_{ij}^{(k+1)} = U_{ij}^{(k)} + \Delta U_{ij}^{(k)}, \quad V_{ij}^{(k+1)} = V_{ij}^{(k)} + \Delta V_{ij}^{(k)}, \quad W_{ij}^{(k+1)} = W_{ij}^{(k)} + \Delta W_{ij}^{(k)}, \quad q_{k+1} = q_k + \Delta q_k.$$



Таким образом, продолжая процесс последовательного увеличения нагрузки и решая линейные уравнения с изменяющимися от этапа к этапу накопленными значениями  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$ ,  $W_{ij}$ , доходим до первой критической нагрузки. При этой нагрузке  $\det(J) = 0$ . После прохождения этой точки процесс может быть продолжен, только приращение нагрузки  $\Delta q$  должно сменить знак на противоположный.

Рассмотренная схема решения начальной задачи (8) имеет первый порядок точности, поэтому для достижения приемлемой точности приходится брать достаточно малый шаг  $\Delta q$ . По сути дела, кривая «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » заменяется ломаной, состоящей из отрезков, касательных к истинной кривой «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ ».

Для увеличения точности расчетов нужно вместо схемы Эйлера применить, например, схему метода Рунге – Кутты 4-го порядка точности. Применение более точных схем описано в работе [11].

Как уже было сказано ранее, точки, где  $\det(J) = 0$ , называются особыми. Особые точки соответствуют или предельным точкам (в них происходит резкий переход на новое равновесное состояние – потеря устойчивости оболочки), или точкам бифуркации (в этих точках появляется возможность разветвления решения).

Рассмотрим кроме матрицы Якоби  $J$  еще расширенную матрицу Якоби [12]

$$J_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} & \frac{\partial F}{\partial q} \end{pmatrix}$$

и набор, состоящий из матриц  $J_m$ , полученных из  $J_q$  вычеркиванием  $m$ -го столбца матрицы  $\frac{\partial F}{\partial X}$ .

В точке бифуркации, т. е. в точке ответвления нового решения [12] (рассматриваются поочередно случаи вычеркивания каждого столбца),  $\det(J) = 0$  и  $\det(J_m) = 0$ , а в предельной точке

$$\det(J) = 0, \quad \det(J_m) \neq 0.$$

Для обхода критических точек графика «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » можно или поменять параметр продолжения решения [13], или, не меняя параметр продолжения решения, применить следующую методику.

Начиная с нулевого ненагруженного состояния  $F(X_0, q_0) = 0$  за параметр продолжения решения принимается нагрузка, и на каждом этапе задается значение  $\Delta q_k$ . Решается линейное уравнение, вычисляются все неизвестные параметры и, кроме того, вычисляются  $\det(J)$  и наибольшее приращение прогиба

$$\Delta W^{(k)} = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \Delta W_{ij}^{(k)} X_3^i Y_3^j.$$

При подходе к критической точке графика «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ », когда при следующем шаге нагружения уже нагрузка  $q_k$  будет больше критической, касательная к кривой «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » меняет направление и происходит смена знака наибольшего приращения прогиба, т. е.  $\Delta W^{(k)} \Delta W^{(k-1)} < 0$  и  $\det(J)$  вблизи критической нагрузки будет близок к нулю. В этом случае необходимо изменить знак на противоположный и у  $\Delta q_k$ , и у  $\Delta X_k$ . Если же хотя бы одно из условий  $\Delta W^{(k)} \Delta W^{(k-1)} < 0$ ,  $\det(J) = 0$  не выполняется, процесс продолжается с прежним значением  $\Delta q_k$ .

Для обхода критических точек графика «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » при использовании метода продолжения решения по параметру нагрузки можно предложить следующий алгоритм, записанный в виде блок-схемы (рис. 1).

При  $\Delta q > 0$  в момент перехода через критическую точку графика  $W = W(q)$  касательная к графику кривой меняет свое направление (рис. 2).

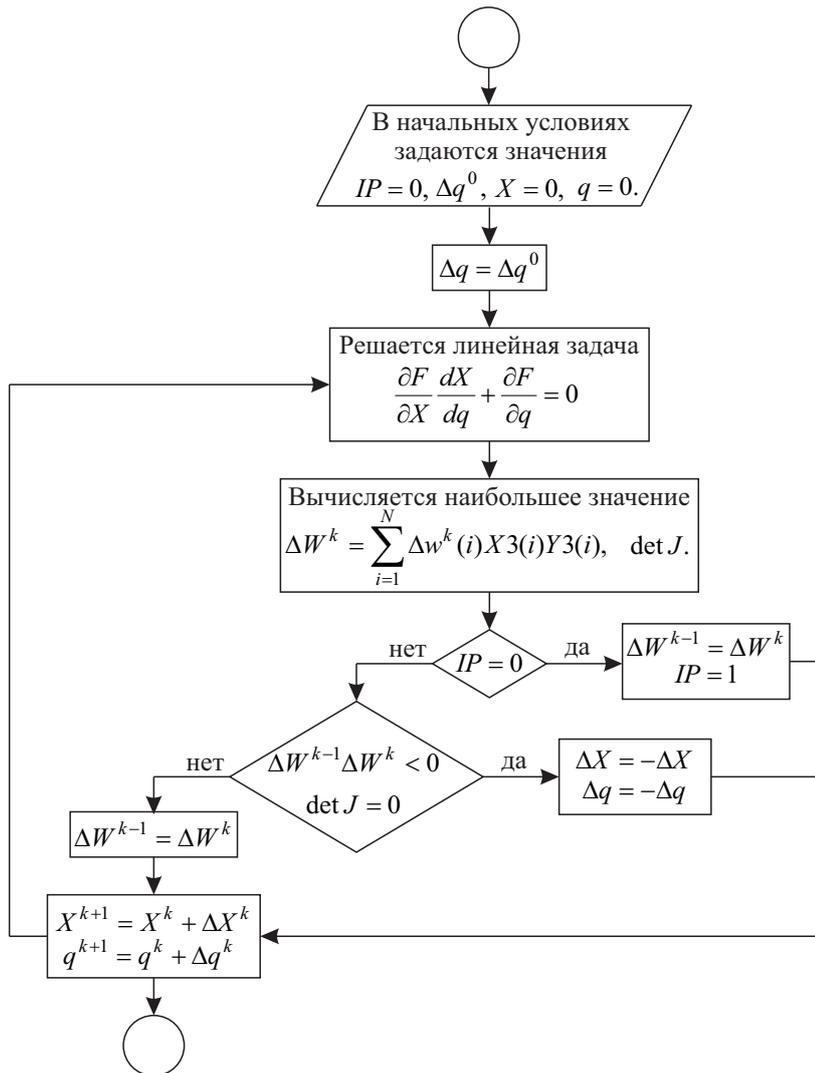


Рис. 1. Блок-схема обхода критических точек  
 Fig. 1. Flowchart for traversing critical points

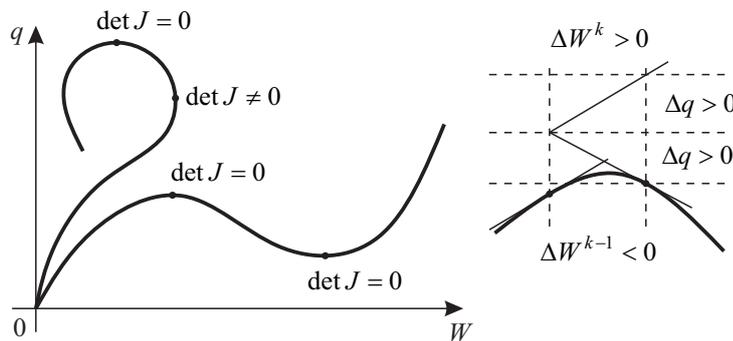


Рис. 2. Графическое изображение критических точек  
 Fig. 2. Graphical representation of critical points

В настоящее время для решения нелинейных задач разработан метод продолжения решения по наилучшему параметру [14], когда движение от точки графика «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » происходит не по касательной, а по некоторой кривой, т.е. наилучшим параметр-



ром продолжения решения является длина дуги, вычисляемая вдоль кривой, которая этим решением является. Для удобства дальнейших преобразований систему (5) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 F(X, q) &= F(\tilde{X}) = 0, \\
 X &= (U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}) = (X_1, X_2, \dots, X_{3N}), \quad i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{N}, \\
 \tilde{X} &= (U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, q) = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_{3N+1}), \quad i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{N}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Наряду с матрицей Якоби  $J = \left[ \frac{\partial F}{\partial X} \right]$ , будем рассматривать расширенную матрицу Якоби

$$J_q = \left[ J, \frac{\partial F}{\partial \tilde{X}_{3N+1}} \right].$$

Теперь выберем наилучший, в некотором смысле, параметр продолжения решения. Будем считать, что неизвестные в (9) зависят от некоторого параметра  $\lambda$ ,  $\tilde{X} = \tilde{X}(\lambda)$ . Фактически это равносильно введению нового неизвестного, которое не входило явно в уравнение (9). Чтобы определить этот параметр, необходимо дополнительное соотношение, устанавливающее связь между  $X_i$  и  $\lambda$ . Эта связь имеет вид

$$d\lambda^2 = d\tilde{X}_1^2 + d\tilde{X}_2^2 + \dots + d\tilde{X}_{3N+1}^2.$$

Введенный таким образом параметр  $\lambda$  требует совместного решения уравнения (9) и  $\sum_{i=1}^{3N+1} \frac{d\tilde{X}_i}{d\lambda} = 1$ . Продифференцировав уравнение (9) по параметру  $\lambda$ , получим уравнения

$$J_q \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} = 0, \quad J_q = \frac{\partial F}{\partial \tilde{X}}.$$

Рассмотрим алгоритм метода продолжения по наилучшему параметру на основе явной схемы метода Эйлера [14].

Итак, для решения нелинейной системы (9) при  $F(X_0) = 0$  методом продолжения решения по наилучшему параметру  $\lambda$  необходимо решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{bmatrix} J \\ \frac{d\tilde{X}_*}{d\lambda} \end{bmatrix} \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{X}(\lambda_0) = \tilde{X}_0, \quad \lambda_0 = 0. \tag{10}$$

На первом этапе  $q = 0$ ,  $U_{ij} = 0$ ,  $V_{ij} = 0$ ,  $W_{ij} = 0$ . Схема (8) принимает вид

$$\begin{bmatrix} J^{(k)} & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \frac{\Delta \tilde{X}}{\Delta \lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Система

$$\left[ J^{(k)} \right] \frac{\Delta \tilde{X}}{\Delta \lambda} = [0]$$

имеет вид (8). Решив ее методом Гаусса, находим  $\Delta \tilde{X}_i$ . Из последней строки этой системы следует

$$\Delta \tilde{X}_{3N+1} = \Delta \lambda (\Delta \tilde{X}_{3N+1} = \Delta q).$$

На  $k$ -м этапе решается задача (10). Опять  $\Delta \tilde{X}_i$  находится как ранее. Условие

$$\frac{d\tilde{X}_*}{d\lambda} = \left\| \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} \right\|$$

можно записать в виде

$$\frac{d\tilde{X}_i^*}{d\lambda} = \frac{\Delta\tilde{X}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3N} \Delta\tilde{X}_i \Delta\tilde{X}_i}}.$$

Теперь можно найти  $\tilde{X}_i^{(k+1)}$  по формуле

$$\tilde{X}_i^{(k+1)} = \tilde{X}_i^{(k)} + \frac{d\tilde{X}_i^*}{d\lambda} \Delta\lambda_k$$

(на 1-м этапе  $\Delta\lambda_k = \Delta q_0$ ,  $\lambda_0 = 0$ ), далее  $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda_k$ .

При использовании последней строки схемы (10) получим

$$\sum_{i=1}^{3N+1} \frac{d\tilde{X}_i^*}{d\lambda} \frac{d\tilde{X}_i}{d\lambda} = 1, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{3N+1} \Delta\tilde{X}_i^* \Delta\tilde{X}_i = \Delta\lambda^2,$$

откуда можно выразить  $\Delta\lambda_k$  и т.д.

В методе продолжения решения по наилучшему параметру параметр  $\lambda$  определен как сумма квадратов дифференциалов неизвестных  $\tilde{X}_i$ , поэтому все они должны иметь одну и ту же размерность. Так как  $U, V, W$  измеряются в метрах, а  $q$  — в МПа, то необходимо перед применением этого метода перейти к безразмерным параметрам так, чтобы все  $\tilde{X}_i$  были безразмерными.

При решении динамических задач теории оболочек перемещения будут зависеть не только от  $x$  и  $y$ , но и от  $t$ , т.е.  $U(x, y, t), V(x, y, t), W(x, y, t)$ . Поэтому в разложении (2)  $U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}$  будут неизвестными функциями переменной  $t$ . Применяя метод Власова – Канторовича к уравнениям движения, описанным в части I статьи, получим систему однородных дифференциальных уравнений, которая решается методом Рунге – Кутты. Такая методика описана в работах В. А. Крысько (см., например, [15]). Полученная система однородных дифференциальных уравнений относится к так называемым жестким системам уравнений, поэтому для решения таких систем используют специальные методы, в том числе неявные методы Рунге – Кутты.

*Примеры применения описанной методики для исследования устойчивости оболочек*

Теперь рассмотрим конкретные примеры применения различных алгоритмов для исследования устойчивости оболочек постоянной толщины. Везде нагрузка принималась равномерно распределенная и нормальная к срединной поверхности, и если это отдельно не оговаривается, то контур оболочки закреплен шарнирно неподвижно. Материал оболочки имеет характеристики:  $E = 2.1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 0.3$ . Везде, если это не оговорено специально, в разложении перемещений удерживалось девять членов:  $N = 9$ .

На рис. 3 представлены зависимости «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » для пологой оболочки двоякой кривизны, шарнирно-подвижно закрепленной по контуру, с параметрами  $a = b = 200h, R_1 = R_2 = 400h, h = 0.01$  м. Для решения нелинейной системы (4) применяется метод итераций, поэтому найдена только верхняя критическая нагрузка.

На рис. 4 для пологой оболочки двоякой кривизны с параметрами  $a = b = 60h, R_1 = R_2 = 225h, h = 0.09$  м представлены зависимости «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » (сплошной график).

Для решения нелинейной системы (4) применялся метод продолжения решения по параметру нагрузки с обходом критических точек. Тот же результат был получен и при использовании метода продолжения по наилучшему параметру. На рис. 4 также представлена зависимость « $\det J$  – прогиб  $W$ » (штриховой график). Нулевые значения  $\det J$  соответствуют верхней и нижней критической нагрузке оболочки (выделено прямыми вертикальными линиями).

На рис. 5 представлена зависимость «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » для пологой оболочки двоякой кривизны с параметрами  $a = b = 120h, R_1 = R_2 = 450h, h = 0.09$  м. Кривые 1

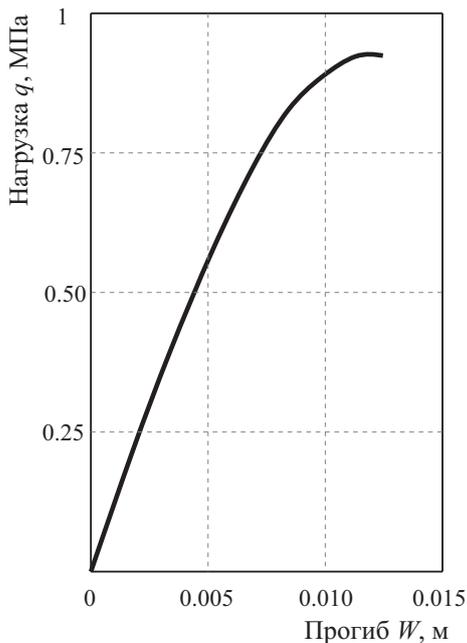


Рис. 3. График «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » для пологой оболочки двойкой кривизны, шарнирно-подвижно закрепленной по контуру, с параметрами  $a = b = 200h$ ,  $R_1 = R_2 = 400h$ ,  $h = 0.01$  м

Fig. 3. “Load  $q$  — deflection  $W$ ” graph for a shallow shell of double curvature, pivotally fixed along the contour, with parameters  $a = b = 200h$ ,  $R_1 = R_2 = 400h$ ,  $h = 0.01$  m

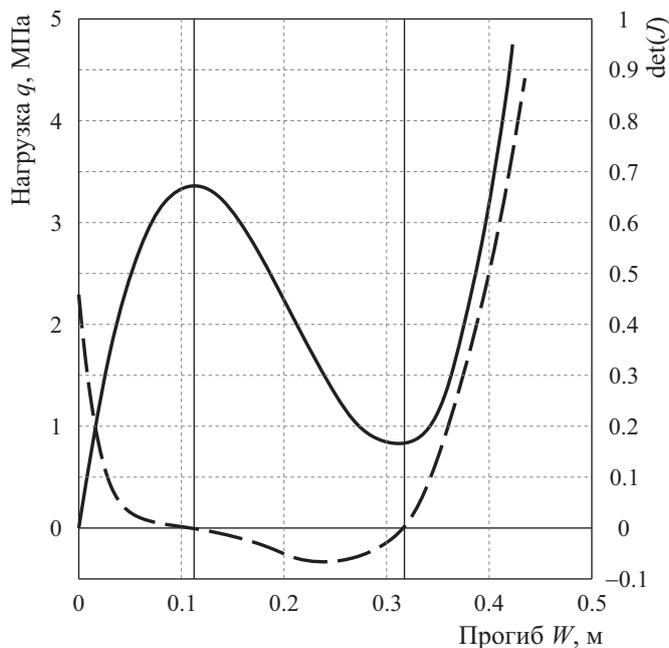


Рис. 4. График «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » (сплошной график) и «нагрузка  $q$  — определитель  $\det(J)$ » (штриховой график) для пологой оболочки двойкой кривизны с параметрами  $a = b = 60h$ ,  $R_1 = R_2 = 225h$ ,  $h = 0.09$  м

Fig. 4. “Load  $q$  — deflection  $W$ ” graph (continuous graph) and “Load  $q$  — determinant  $\det(J)$ ” graph (line graph) for a shallow shell of double curvature with parameters  $a = b = 60h$ ,  $R_1 = R_2 = 225h$ ,  $h = 0.09$  m

(прогиб в центре оболочки при  $x = a/2$ ,  $y = b/2$ ) и 2 (прогиб в четверти оболочки при  $x = a/4$ ,  $y = b/4$ ) получены применением метода продолжения решения по наилучшему параметру, а кривая 3 — методом продолжения решения по параметру нагрузки с обходом критической точки. Как видно из рис. 5, метод продолжения по наилучшему параметру позволяет выявить местную потерю устойчивости до общей потери устойчивости.

На рис. 6 приведены графики «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » для цилиндрической панели с параметрами  $a = 20$  м,  $R = 5.4$  м,  $h = 0.01$  м, угол разворота  $b = 1.57$  рад. Результаты получены применением для нахождения минимума функции (3) варианта метода покоординатного спус-

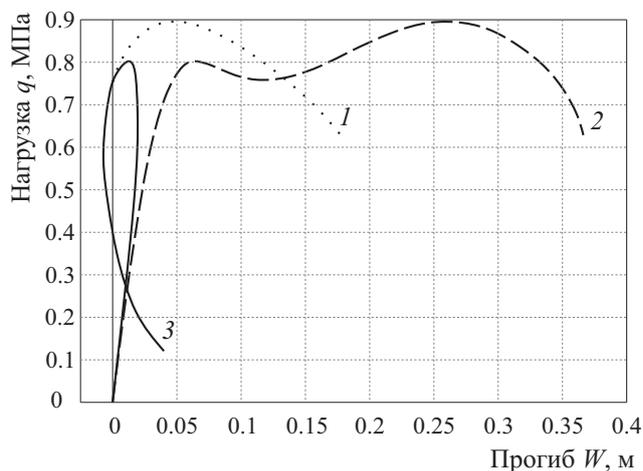


Рис. 5. График «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » для пологой оболочки двойкой кривизны с параметрами  $a = b = 120h$ ,  $R_1 = R_2 = 450h$ ,  $h = 0.09$  м

Fig. 5. “Load  $q$  — deflection  $W$ ” graph for a shallow shell of double curvature with parameters  $a = b = 120h$ ,  $R_1 = R_2 = 450h$ ,  $h = 0.09$  m

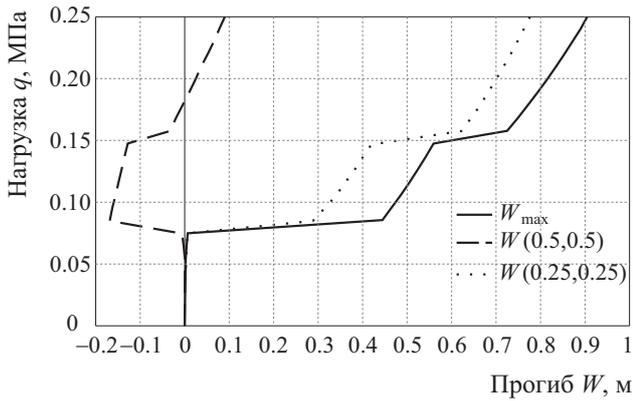


Рис. 6. График «нагрузка  $q$  — прогиб  $W$ » для цилиндрической панели с параметрами  $a = 20$  м,  $R = 5.4$  м,  $h = 0.01$  м, угол разворота  $b = 1.57$  рад  
 Fig. 6. “Load  $q$ —deflection  $W$ ” graph for a cylindrical panel with parameters  $a = 20$  m,  $R = 5.4$  m,  $h = 0.01$  m, turning angle  $b = 1.57$  rad

ка L-BFGS. Для аппроксимации перемещений использовались NURBS-поверхности (неоднородный рациональный В-сплайн) при дискретном разбиении области. Для достижения достаточной точности число точек разбиения области составило 440.

Метод конечных элементов для расчета оболочек используется в тех случаях, когда оболочка имеет сложную форму, например, подкреплена ребрами разной жесткости. При этом рассматривается геометрически линейная задача.

Рассматривается квадратная в плане оболочка со стороной  $a = 6$  и толщиной  $h = 0.005$  м, состоящая из 36 ребристых плит размером  $0.5 \times 2$  м (рис. 7).

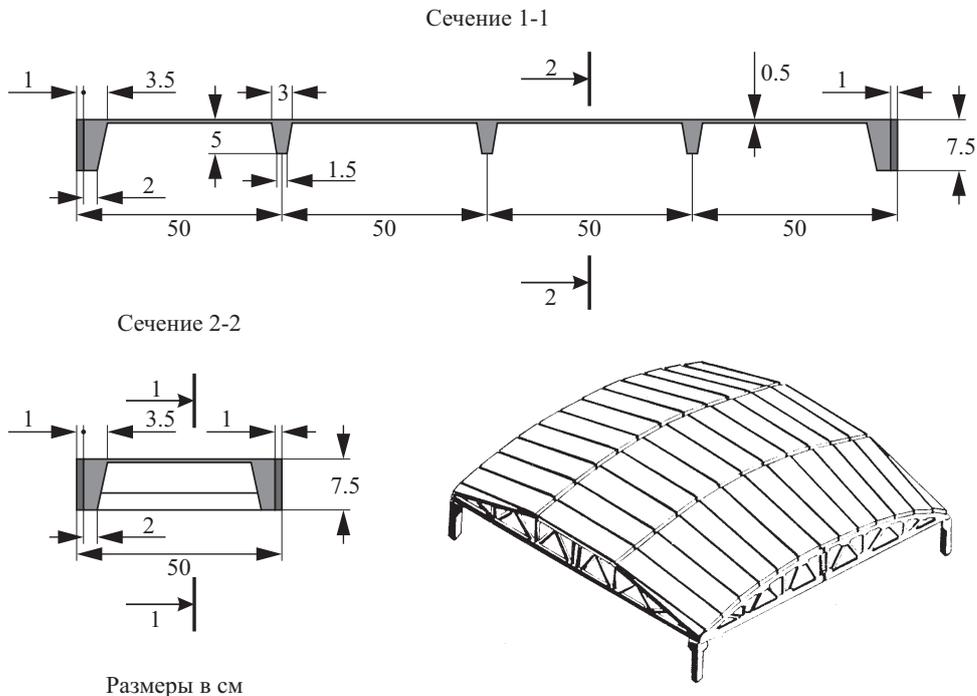


Рис. 7. Общий вид складчатой оболочки и сечения отдельных панелей, образующих оболочку  
 Fig. 7 General view of the folded shell and section of individual panels forming the shell

Вдоль оси  $y$  расположено три плиты длиной 2 м каждая, а вдоль оси  $x$  — 12 плит длиной 0.5 м каждая. Размеры всех элементов плиты и конструкции в целом показаны на рис. 7.

По контуру оболочка закреплена шарнирно-подвижно, поэтому для расчета ее напряженно-деформированного состояния используются уравнения в смешанной форме, так как в этом случае легко подобрать аппроксимирующие функции в методе Бубнова — Галеркина, удовлетворяющие заданным краевым условиям.

Укажем основные характеристики конструкции:

1) вдоль оси  $x$  находится 11 изломов срединной поверхности с одинаковым углом излома  $\theta_j = 0.06065$  рад, а вдоль оси  $y$  — 2 излома с углом  $\theta_i = 0.24391$  рад;



- 2) размеры ребер, приведенные к прямоугольному сечению, составляют: для окаймляющих плиту (больших) ребер высота равна 0.07 м, ширина — 0.045 м; для внутренних (малых) ребер высота равна 0.045 м, ширина — 0.0225 м;
- 3) характеристики материала конструкции: железобетон с  $E = 2.5 \cdot 10^4$  МПа и  $\mu = 0.167$ ;
- 4) нагрузка равномерно распределенная по площади оболочки, составляющая с собственным весом конструкции  $q = 4.3 \cdot 10^{-3}$  МПа.

Решение задачи методом конечных элементов, найденное А. М. Масленниковым и Р. А. Поповым [16], дает  $W(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = 0.00272$  м,  $\sigma = -3.22$  МПа. Эпюры полученных ими прогибов представлены на рис. 8. Здесь штрих-пунктиром показано решение, соответствующее жесткому контуру, когда на нем  $W = 0$ , пунктиром — решение, учитывающее податливость контура в направлении оси  $z$ , а сплошными линиями показано решение, полученное экспериментально.

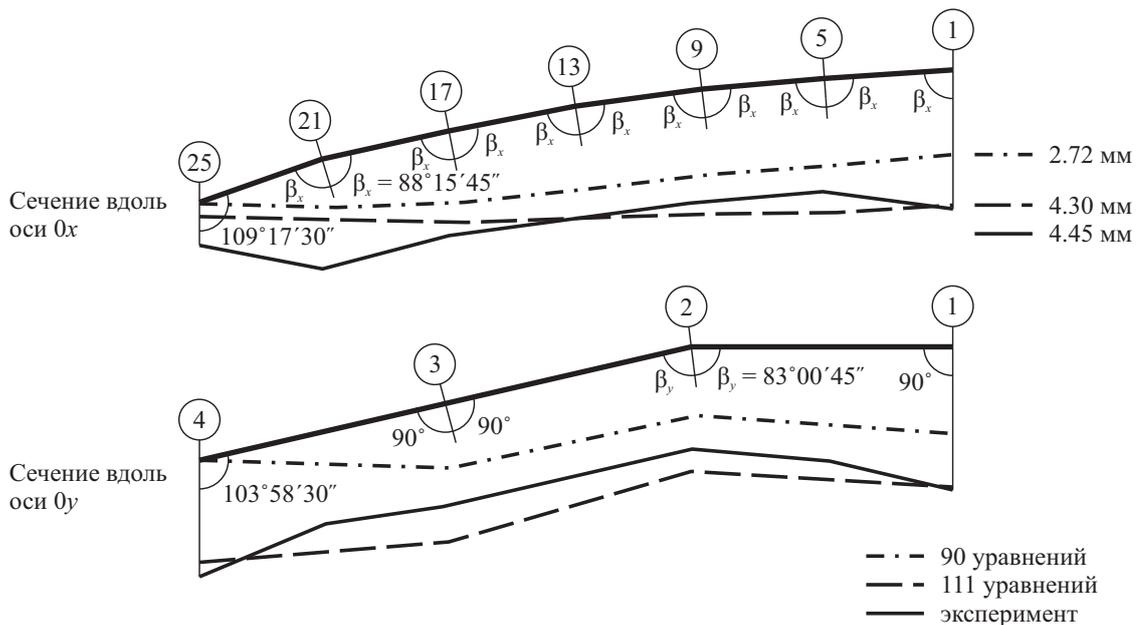


Рис. 8. Эпюры прогибов складчатой оболочки  
Fig. 8. Diagrams of deflections of a folded shell

## 1.2. Решение дифференциальных уравнений равновесия оболочек, содержащих разрывные параметры

Если в соотношениях теории оболочек встречаются разрывные функции в виде единичных функций Хевисайда или дельта-функций Дирака, то для решения уравнений равновесия в этом случае разработан Г. Н. Белосточным [17, 18] специальный метод.

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L^n[f(x)] = \sum_{i=1}^k b_i(x)H(x - x_i), \quad (11)$$

где  $L^n$  — линейный дифференциальный оператор порядка  $n$  с постоянными коэффициентами  $L^n = \sum_{j=1}^n a_j d^j / dx^j$  ( $a_n = 1$ ),  $b_i(x)$  — известные функции;  $H(x - x_i)$  — обобщенные функции Хевисайда. Если ввести в рассмотрение вспомогательные уравнения

$$L^n[f_i(x)] = b_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

частные интегралы которых известны, то функция

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{m=1}^n C_m^i \varphi_m(x) + \tilde{f}_i(x) \right) H(x - x_i)$$

является частным интегралом уравнения (11), где  $C_m^i$  — решения систем линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^n C_m^i \frac{d^l \varphi_m}{dx^l} \Big|_{x_i} = - \frac{d^l \tilde{f}_i}{dx^l} \Big|_{x_i}, \tag{12}$$

а система функций  $\{\varphi_m(x)\}$  — фундаментальная система решений уравнения (11), т.е. такая система линейно независимых функций, линейная комбинация которых дает общее решение соответствующего однородного уравнения.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (11):

$$f(x) = \sum_{m=1}^n C_m \varphi_m(x) + \sum_{i=1}^k \left( \sum_{m=1}^n C_m^i \varphi_m(x) + \tilde{f}_i(x) \right) H(x - x_i), \tag{13}$$

в чем нетрудно убедиться подстановкой (13) в (11). Здесь  $C_m$  — постоянные интегрирования.

Пусть дифференциальное уравнение содержит обобщенную дельта-функцию

$$L^n [f(x)] = b(x_i) \delta(x - x_i), \tag{14}$$

где  $b(x_i)$  — значение известной функции  $b(x)$  в точке  $x_i$ ;  $\delta(x - x_i)$  — дельта-функция.

Решением уравнения (14) является функция

$$f(x) = \sum_{m=1}^n C_m \varphi_m(x) + \sum_{m=1}^n C_m^i \varphi_m(x) H(x - x_i), \tag{15}$$

где  $C_m^i$  — решения системы линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^n C_m^i \frac{d^l \varphi_m}{dx^l} \Big|_{x_i} = \gamma_l, \quad \gamma_l = \begin{cases} 0, & \text{при } l = 0, 1, \dots, n - 2, \\ b(x_i), & \text{при } l = n - 1. \end{cases} \tag{16}$$

Если дифференциальное уравнение содержит производную от обобщенной дельта-функции

$$L^n [f(x)] = b(x) \frac{d\delta(x - x_i)}{dx},$$

правая его часть преобразуется к виду

$$b(x) \frac{d\delta}{dx} = b(x_i) \frac{d\delta}{dx} - \frac{db}{dx} \Big|_{x_i} \delta(x - x_i).$$

В этом случае интерес представляет решение, позволяющее определить частный интеграл уравнения

$$L^n [f(x)] = b(x_i) \frac{d\delta(x - x_i)}{dx}.$$

Общий интеграл этого уравнения также можно представить в виде (15), где  $C_m^i$  определяются как решения системы алгебраических уравнений (16), свободные члены которых

$$\gamma_l = \begin{cases} 0, & \text{при } l \leq n - 3, \\ b(x_i), & \text{при } l = n - 2, \\ -d_{n-1} b(x_i), & \text{при } l = n - 1. \end{cases}$$



В том случае, когда правая часть дифференциального уравнения содержит вторую производную от обобщенной дельта-функции, структура решения (15) не изменится. Свободные члены соответствующей системы алгебраических уравнений в этом случае

$$\gamma_l = \begin{cases} 0, & \text{при } l \leq n - 4, \\ b(x_i), & \text{при } l = n - 3, \\ -d_{n-1}b(x_i), & \text{при } l = n - 2, \\ (d_{n-1}^2 - d_{n-2})b(x_i), & \text{при } l = n - 1. \end{cases}$$

Метод определения замкнутых решений частично вырожденных дифференциальных уравнений распространяется и на уравнения, содержащие производные от дельта-функций третьего и выше порядков.

*Пример использования описанной методики*

Данный пример предоставлен Г. Н. Белосточным. Найти решение задачи о пластинке, находящейся в состоянии стационарного теплообмена с окружающей средой при одинаковых коэффициентах теплоотдачи  $\aleph$  с обеих поверхностей  $z = \pm h/2$ , где  $h$  — толщина пластинки. На линиях  $x = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), параллельных двум краям пластинки, допускается скачкообразное изменение температуры внешней среды  $T^+(x, y)$  со стороны  $z = h/2$ . Это возможно, например, при наличии термоизолирующих перегородок или фронтов ударных волн внешней среды у поверхности пластинки.

Пусть на краях  $y = 0$  и  $y = b$  поддерживается нулевая температура. Тогда решение уравнений теплопроводности

$$\begin{aligned} \lambda \nabla^2 \theta_m - 2 \frac{\aleph}{h} \theta_m &= -\frac{\aleph}{h} (T^+(x, y) + T^-(x, y)), \\ \lambda \nabla^2 (\Delta \theta) - \left( 6 \frac{\aleph}{h} + 12 \frac{\lambda}{h^2} \right) \Delta \theta &= -6 \frac{\aleph}{h} (T^+(x, y) - T^-(x, y)) \end{aligned}$$

для функций  $\theta_m(x, y)$  и  $\Delta \theta(x, y)$ , связанных с температурой  $\theta(x, y, z)$  равенством

$$\theta(x, y, z) = \theta_m(x, y) + \frac{z}{h} \Delta \theta(x, y),$$

сводится подстановкой

$$\theta_m(x, y) = \sum_k \varphi_k(x) \sin y_k, \quad \Delta \theta(x, y) = \sum_k \psi_k(x) \sin y_k$$

к интегрированию следующих дифференциальных уравнений относительно функций  $\varphi_k(x)$  и  $\psi_k(x)$ :

$$\frac{d^2 \varphi_k}{dx^2} - \frac{a_{11}^k}{b^2} \varphi_k = \frac{\aleph}{\lambda h} (T_k^+(x) + T_k^-(x)), \quad \frac{d^2 \psi_k}{dx^2} - \frac{a_{21}^k}{b^2} \psi_k = -6 \frac{\aleph}{\lambda h} (T_k^+(x) + T_k^-(x)). \quad (17)$$

Здесь  $a_{11}^k, a_{21}^k$  — постоянные, зависящие от  $\aleph, \lambda, h, /b$ ; и  $b$  — размеры пластинки в плане;  $T_k^\pm(x) = (2/b) (T^\pm(x, y), \sin y_k)$ ;  $y_k = k\pi y/b$ .

В случае одного температурного скачка со стороны плоскости  $z = h/2$

$$\begin{aligned} T^+ &= T_0^+ H(x - x_i), \quad T^- = \text{const}, \\ T_k^+ &= \frac{2}{k\pi} (1 - \cos k\pi) T_0^+ H(x - x_i); \quad T_k^- = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos k\pi) T^-. \end{aligned}$$

Общее решение уравнений (17) на основании (12) записываем в виде

$$\varphi_k(x) = C_k^1 e^{x_{11}} + C_k^2 e^{-x_{11}} + 2L_k^r T_0^+ \left( 1 - \text{ch} \frac{\sqrt{a_{11}^k} (x - x_i)}{b} \right) H(x - x_i) + 2L_k^r T^-,$$

$$\psi_k(x) = D_k^1 e^{x_{21}} + D_k^2 e^{-x_{21}} + 12L_k^s T_0^+ \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{\sqrt{a_{21}^k} (x - x_i)}{b} \right) H(x - x_i) - 12L_k^s T^-,$$

где  $C_k^j, D_k^j$  ( $j = 1, 2$ ) – постоянные интегрирования;  $L_k^r = \aleph_k^*/(k\pi a_{11}^k)$ ;  $L_k^s = \aleph_k^*/(k\pi a_{21}^k)$ ,  $\aleph_k^* = (b/h)^2 (\aleph b/\lambda)(1 - \cos k\pi)$ .

Если предположить, что края пластинки ( $x = 0, x = a$ ) теплоизолированы, т.е.

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \theta_m}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x} = 0,$$

то, например, функция  $\psi_k(x)$  примет вид

$$\begin{aligned} \psi_k(x) = & \frac{12L_k^s T_0^+ \operatorname{sh} \left( \sqrt{a_{21}^k} (a - x_i)/b \right)}{\operatorname{sh} \left( \sqrt{a_{21}^k} a/b \right)} \operatorname{ch} x_{21} + \\ & + 12L_k^s T_0^+ \left( 1 - \operatorname{ch} \frac{\sqrt{a_{21}^k} (x - x_i)}{b} \right) Y(x - x_i) - 12L_k^s T^-. \end{aligned}$$

### 1.3. Асимптотическое интегрирование уравнений теории оболочек

А. Л. Гольденвейзером разработан метод решения уравнений равновесия оболочек [19]. Рассмотрим суть этого метода.

Используются однородные уравнения равновесия в перемещениях и принимается, что срединная поверхность оболочки отнесена к ортогональным криволинейным координатам.

Уравнения равновесия в перемещениях кратко запишем в виде

$$\begin{aligned} L^{11}(u) + L^{12}(v) + L^{13}(w) + \tilde{h}^2 [N^{11}(u) + N^{12}(v) + N^{13}(w)] &= 0, \\ L^{21}(u) + L^{22}(v) + L^{23}(w) + \tilde{h}^2 [N^{21}(u) + N^{22}(v) + N^{23}(w)] &= 0, \\ L^{31}(u) + L^{32}(v) + L^{33}(w) + \tilde{h}^2 [N^{31}(u) + N^{32}(v) + N^{33}(w)] &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где  $\tilde{h} = \frac{h}{\eta}$ ;  $\eta$  – некоторый характерный линейный размер срединной поверхности;  $L^{ij}$  и  $N^{ij}$  – дифференциальные операторы. На первых этапах рассуждений будут важны только порядок оператора  $L^{ij}$  и порядок оператора  $N^{ij}$  (эти операторы записываются в таблицы).

Решения уравнений (18) задаются в виде

$$\begin{aligned} u &= k^{\lambda_1} u(x, y, k) e^{kf(x,y)}, \\ v &= k^{\lambda_2} v(x, y, k) e^{kf(x,y)}, \\ w &= k^{\lambda_3} w(x, y, k) e^{kf(x,y)}, \end{aligned}$$

где  $k = \tilde{h}^{-t}$  ( $t > 0$ ), и будем считать, что величина  $\frac{2}{t}$  может принимать только целые значения.

Примем, что функция изменяемости  $f(x, y)$  не зависит от параметра  $k$ , а функции интенсивности  $u, v, w$  могут быть представлены в виде асимптотических разложений

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{u_1(x, y)}{k} + \frac{u_2(x, y)}{k^2} + \dots, \\ v &= v_0 + \frac{v_1(x, y)}{k} + \frac{v_2(x, y)}{k^2} + \dots, \\ w &= w_0 + \frac{w_1(x, y)}{k} + \frac{w_2(x, y)}{k^2} + \dots, \end{aligned}$$

в которых  $u_0 \neq 0, v_0 \neq 0, w_0 \neq 0$ .



Дадим  $t$  некоторое положительное значение так, чтобы  $2/t$  было целым числом, представим левую часть каждого уравнения (18) в виде произведения экспоненциального множителя  $e^{kf}$  на ряд, расположенный по целым нисходящим степеням параметра  $k$ , и потребуем, чтобы в левых частях полученных соотношений исчезли коэффициенты при всех степенях  $k$ . Это приведет к бесконечной последовательности систем уравнений. Первая (головная) система из трех уравнений получается в результате приравнивания к нулю коэффициентов при степенях  $k$  — самых высоких степенях для каждого соотношения; вторая система из трех уравнений получится в результате приравнивания к нулю коэффициентов при степенях  $(k - 1)$  и т.д.

Операторы  $L^{ij}$  и  $N^{ij}$  по нисходящим степеням  $k$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} L^{i1}(u) &\sim k^{\lambda_1} (k^{ni1} L_0^{i1} u_0 + k^{ni1-1} [L_1^{i1}(u_0) + L_0^{i1}(u_1)] + \dots) e^{kf}, \\ L^{i2}(v) &\sim k^{\lambda_2} (k^{ni2} L_0^{i2} u_0 + k^{ni2-1} [L_1^{i2}(v_0) + L_0^{i2}(v_1)] + \dots) e^{kf}, \\ L^{i3}(w) &\sim k^{\lambda_3} (k^{ni3} L_0^{i3} u_0 + k^{ni3-1} [L_1^{i3}(w_0) + L_0^{i3}(w_1)] + \dots) e^{kf}, \\ N^{i1}(u) &\sim k^{\lambda_1} (k^{mi1} N_0^{i1} u_0 + k^{mi1-1} [N_1^{i1}(u_0) + N_0^{i1}(u_1)] + \dots) e^{kf}, \\ N^{i2}(v) &\sim k^{\lambda_2} (k^{mi2} N_0^{i2} v_0 + k^{mi2-1} [N_1^{i2}(v_0) + N_0^{i2}(v_1)] + \dots) e^{kf}, \\ N^{i3}(w) &\sim k^{\lambda_3} (k^{mi3} N_0^{i3} w_0 + k^{mi3-1} [N_1^{i3}(w_0) + N_0^{i3}(w_1)] + \dots) e^{kf}, \end{aligned} \quad (19)$$

где операторы  $L_p^{ij}$  и  $N_p^{ij}$  определенным образом связаны с  $L^{ij}$  и  $N^{ij}$ .

Если ограничиться составлением системы уравнений для определения  $u_0, v_0, w_0$  (головной системы), то в этих соотношениях достаточно сохранить только члены, содержащие параметр  $k$  в наивысшей для данного выражения степени. Если после этого подставить (19) в (18), заменить  $\tilde{h}^2$  через  $k^{-2/t}$  и провести некоторые преобразования, то в зависимости от значений числа  $t$  могут иметь место пять различных случаев.

1. При  $t < 1/2$  уравнения примут вид

$$\begin{aligned} k^{\lambda_1+2} L_0^{11} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{12} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{13} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{21} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{22} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{23} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{31} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{32} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{33} w_0 &= 0. \end{aligned}$$

2. При  $t = 1/2$  уравнения примут вид

$$\begin{aligned} k^{\lambda_1+2} L_0^{11} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{12} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{13} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{21} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{22} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{23} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{31} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{32} v_0 + k^{\lambda_3+1} (L_0^{33} + N_0^{33}) w_0 &= 0. \end{aligned}$$

3. При  $1/2 < t < 1$  уравнения примут вид

$$\begin{aligned} k^{\lambda_1+2} L_0^{11} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{12} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{13} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{21} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{22} v_0 + k^{\lambda_3+1} L_0^{23} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{31} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{32} v_0 + k^{\lambda_3+5-2/t} N_0^{33} w_0 &= 0. \end{aligned}$$

4. При  $t = 1$  уравнения примут вид

$$\begin{aligned} k^{\lambda_1+2} L_0^{11} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{12} v_0 + k^{\lambda_3+1} (L_0^{13} + N_0^{13}) w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{21} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{22} v_0 + k^{\lambda_3+1} (L_0^{23} + N_0^{23}) w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} (L_0^{31} + N_0^{31}) u_0 + k^{\lambda_2+2} (L_0^{32} + N_0^{32}) v_0 + k^{\lambda_3+3} N_0^{33} w_0 &= 0. \end{aligned}$$



5. При  $1 < t < \infty$  уравнения примут вид

$$\begin{aligned} k^{\lambda_1+2} L_0^{11} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{12} v_0 + k^{\lambda_3+3-2/t} N_0^{13} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+2} L_0^{21} u_0 + k^{\lambda_2+2} L_0^{22} v_0 + k^{\lambda_3+3-2/t} N_0^{23} w_0 &= 0, \\ k^{\lambda_1+4-2/t} N_0^{31} u_0 + k^{\lambda_2+4-2/t} N_0^{32} v_0 + k^{\lambda_3+5-2/t} N_0^{33} w_0 &= 0. \end{aligned}$$

Каждая из этих систем представляет собой систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $u_0, v_0, w_0$ .

Входящие в эти уравнения символы  $L_0^{ij}$  и  $N_0^{ij}$  с помощью таблиц получаются через  $L^{ij}$  и  $N^{ij}$ .

Решения этих систем должны быть нетривиальными, поэтому величины  $L_0^{ij}$  и  $N_0^{ij}$  обязаны удовлетворять дополнительным условиям, а так как эти величины зависят только от функции изменяемости  $f$ , то таким образом приходим к уравнениям для определения  $f(x, y)$ . Число таких уравнений существенно зависит от тех значений, которые даются показателям интенсивности  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Поэтому эти значения должны быть такими, которые приводят только к одному соотношению для определения функции изменяемости  $f(x, y)$ . Далее обсуждается, как могут быть найдены непротиворечивые значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Показывается, каким образом можно построить функции изменяемости, и приводятся правила для определения коэффициентов асимптотического разложения функций интенсивности для основных интегралов.

Теперь пусть оболочка нагружена и поверхностными силами с компонентами  $X, Y, Z$ , но свойства частного интеграла неоднородной системы (18) не рассматриваются, так что под полным напряженным состоянием подразумевается сумма напряженных состояний с интегралами однородных уравнений.

В качестве примеров применения описанного метода можно привести работы [20–22].

## Заключение

Практически все рассмотренные методы расчета оболочек в конечном виде приводят к системам алгебраических уравнений линейных или нелинейных. Число неизвестных в системе алгебраических уравнений может быть велико не только в МКЭ. Для достижения достаточной точности в методах наискорейшего спуска, Рунге и Бубнова – Галеркина неизвестных числовых параметров может быть несколько десятков (например, при нахождении критической нагрузки потери устойчивости оболочки). А если к тому же решается нелинейная задача, то системы линейных алгебраических уравнений решаются многократно. Поэтому рассмотренные методы решения задач определения напряженно-деформированного состояния, исследования прочности и устойчивости оболочек ориентированы на применение ЭВМ.

Следовательно, важным этапом в исследовании оболочек является разработка программных продуктов расчета оболочек. Существует ряд пакетов расчетных прикладных программ, таких как ЛИРА, ANSYS, SCAD и др. Однако они ориентированы на широкий круг задач строительной механики и поэтому используют упрощенные модели деформирования оболочек.

Приведенные в статье методы расчета оболочек позволяют достаточно полно провести исследования напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости оболочек.

## Список литературы

1. Карпов В. В., Бакусов П. А., Масленников А. М., Семенов А. А. Математические модели деформирования оболочечных конструкций и алгоритмы их исследования. Часть I. Модели деформирования оболочечных конструкций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 370–410. DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410), EDN: [YSOXDU](https://www.edn.ru/YSOXDU)



2. *Новожильов В. В.* Теория тонких оболочек. Ленинград : Оборонгиз, 1941. 344 с.
3. *Лурье А. И.* Исследования по теории упругих оболочек // Труды Ленинградского промышленного института. 1937. № 6, вып. 3. С. 37–52.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Уравнения теории оболочек // Прикладная математика и механика. 1940. Т. 4, вып. 2. С. 35–42.
5. *Муштари Х. М.* Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к решению задач устойчивости упругого равновесия // Прикладная математика и механика. 1939. Т. 2, вып. 4. С. 439–456. EDN: [SSSPJY](#)
6. *Власов В. З.* Основные дифференциальные уравнения общей теории оболочек // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8, вып. 2. С. 109–140.
7. *Баранова Д. А., Карпов В. В.* Алгоритмы исследования устойчивости оболочек, основанные на методе наискорейшего спуска // Математическое моделирование и краевые задачи : тр. Седьмой Всерос. науч. конф. с междунар. участием (Самара, 3–6 июня 2010 г.) / отв. ред. В. П. Радченко. Самара : Самарский гос. техн. ун-т, 2010. Т. 1. С. 47–50. EDN: [UHDVLR](#)
8. *Карпов В. В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения : в 2 ч. Ч. 2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. Москва : Физматлит, 2011. 248 с. EDN: [UHSUFJ](#)
9. *Григолюк Э. И., Шалашилин В. И.* Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. Москва : Наука, 1988. 232 с.
10. *Петров В. В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1975. 119 с.
11. *Карпов В. В., Петров В. В.* Уточнение решений при использовании шаговых методов в теории гибких пластинок и оболочек // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1975. № 5. С. 189–191. EDN: [UIEKJN](#)
12. *Андреев Л. В., Ободан Н. И., Лебедев А. Г.* Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. Москва : Наука, 1988. 208 с.
13. *Ильин В. П., Карпов В. В.* Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. Ленинград : Стройиздат, 1986. 168 с. EDN: [UGDTQF](#)
14. *Шалашилин В. Н., Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. Москва : Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.
15. *Крысько В. А.* Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1976. 216 с.
16. *Масленников А. М., Попов Р. А.* Расчет пологих складчатых оболочек из крупноразмерных плоских плит при помощи матрицы жесткости // Строительное проектирование промышленных предприятий. Информационный выпуск. 1968. № 3. С. 49–51.
17. *Белосточный Г. Н.* Аналитические методы интегрирования дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // Доклады Академии военных наук. Поволжское региональное отделение. 1999. № 1. С. 14–26.
18. *Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А.* Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной полой оболочки постоянного кручения в сверхзвуковом потоке газа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 397–408. DOI: [10.18500/1816-9791-2019-19-4-397-408](#), EDN: [DDFZPB](#)
19. *Гольденвейзер А. Л.* Теория тонких упругих оболочек. Москва : ГИИТЛ, 1953. 544 с.
20. *Бурмистров Е. Ф., Коссович Л. Ю., Маслов Н. М.* Асимптотическое интегрирование уравнений термоупругости цилиндрической оболочки переменной толщины // Прикладная механика. 1976. Т. 12, № 10. С. 113–117.
21. *Коссович Л. Ю.* Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений теории упругости для цилиндрической оболочки // Механика деформируемых сред. 1977. Вып. 3. С. 86–96. EDN: [UTEFDN](#)
22. *Вильде М. В., Коссович Л. Ю., Шевцова Ю. В.* Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 56–64. DOI: [10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64](#), EDN: [OYJJIZ](#)



## References

1. Karpov V. V., Bakusov P. A., Maslennikov A. M., Semenov A. A. Simulation models and research algorithms of thin shell structures deformation. Part I. Shell deformation models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 370–410 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-3-370-410), EDN: [YSOXDU](#)
2. Novozhilov V. V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of thin shells]. Leningrad, Oborongiz, 1941. 344 p. (in Russian).
3. Lurie A. I. Research on the theory of elastic shells. *Trudy Leningradskogo industrial'nogo instituta* [Proceedings of Leningrad Industrial Institute], 1937, vol. 6, iss. 3, pp. 37–52 (in Russian).
4. Goldenweiser A. L. Equations of shell theory. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1940, vol. 4, iss. 2, pp. 35–42 (in Russian).
5. Mushtari H. M. Some generalizations of the theory of thin shells with application to problems of stability of elastic equilibrium. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1939, vol. 2, iss. 4, pp. 439–456 (in Russian). EDN: [SSSPJY](#)
6. Vlasov V. Z. Basic differential equations of the general theory of shells. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1944, vol. 8, iss. 2, pp. 109–140. (in Russian).
7. Baranova D. A., Karpov V. V. Algorithms for studying shell stability based on the steepest descent method. *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi. Trudy Sed'moy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [Radchenko V. P. (ed.) Mathematical Modeling and Boundary Value Problems. Proceedings of the Seventh All-Russian Scientific Conference with International Participation]. Samara, 2010, vol. 1, pp. 47–50 (in Russian). EDN: [UHDVLR](#)
8. Karpov V. V. *The strength and stability of reinforced shells of revolution. In two parts. Part 2. Computational experiment in static mechanical action*. Moscow, Fizmatlit, 2011. 248 p. (in Russian). EDN: [UHSUFJ](#)
9. Grigolyuk E. I., Shalashilin V. I. *Problemy nelineynogo deformirovaniya: Metod prodolzheniya resheniya po parametru v nelineynykh zadachakh mekhaniki tverdogo deformiruemogo tela* [Problems of nonlinear deformation: Method of continuation of solution by parameter in nonlinear problems of mechanics of solid deformable body]. Moscow, Nauka, 1988. 232 p. (in Russian).
10. Petrov V. V. *Metod posledovatel'nykh nagruzheniy v nelineynoy teorii plastinok i obolochek* [Sequential loading method in the nonlinear theory of plates and shells]. Saratov, Saratov University Publ., 1975. 119 p. (in Russian).
11. Karpov V. V., Petrov V. V. Solutions refinement in the theory of flexible plates and shells using step methods. *Izvestiya of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of Solids*, 1975, iss. 5, pp. 189–191 (in Russian). EDN: [UIEKJN](#)
12. Andreev L. V., Obodan N. I., Lebedev A. G. *Ustoychivost' obolochek pri neosesimmetrichnoy deformatsii* [Shell stability under non-axisymmetric deformation]. Moscow, Nauka, 1988. 208 p. (in Russian).
13. Ilin V. P., Karpov V. V. *Stability of reinforced shells in the case of large displacements*. Leningrad, Stroyizdat, 1986. 168 p. (in Russian). EDN: [UGDTQF](#)
14. Shalashilin V. N., Kuznecov E. B. *Metod prodolzheniya resheniya po parametru i nailuchshaya parametrizatsiya* [Methods for continuing the solution by parameter and the best parameterization]. Moscow, Editorial URSS, 1999. 224 p. (in Russian).
15. Krysko V. A. *Nelineynaya statika i dinamika neodnorodnykh obolochek* [Nonlinear statics and dynamics of inhomogeneous shells]. Saratov, Saratov University Publ., 1976. 216 p. (in Russian).
16. Maslennikov A. M., Popov R. A. Calculation of shallow folded shells from large-sized flat plates using a stiffness matrix. *Construction Design of Industrial Enterprises. Informational issue*, 1968, iss. 3, pp. 49–51 (in Russian).
17. Belostochnyy G. N. Analytical methods for integrating differential equations of thermoelasticity of geometrically irregular shells. *Doklady Akademii voennykh nauk. Povolzhskoe regional'noe otделение* [Doklady of the Academy of Military Sciences. Volga Region Regional Office], 1999, iss. 1, pp. 14–26 (in Russian).
18. Belostochnyy G. N., Myltcina O. A. Dynamic stability of heated geometrically irregular shallow shell of constant torsion in supersonic gas flow. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 397–408 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2019-19-4-397-408](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-397-408), EDN: [DDFZPB](#)
19. Goldenweiser A. L. *Teoriya tonkikh uprugikh obolochek* [Theory of thin elastic shells]. Moscow, GITTL, 1953. 544 p. (in Russian).
20. Burmistrov E. F., Kossovich L. Yu., Maslov N. M. Asymptotic integration of the equations of



- thermoelasticity of a cylindrical shell of variable thickness. *Soviet Applied Mechanics*, 1976, vol. 12, pp. 1072–1075. DOI: [10.1007/BF00885058](https://doi.org/10.1007/BF00885058)
21. Kossovich L. Yu. Asymptotic integration of nonlinear equations of elasticity theory for a cylindrical shell. *Mekhanika deformiruemyykh sred* [Mechanics of Deformable Media], 1977, iss. 3, pp. 86–96 (in Russian). EDN: [UTEFDN](#)
  22. Wilde M. V., Kossovich L. Yu., Shevtsova Yu. V. Asymptotic integration of dynamic elasticity theory equations in the case of multilayered thin shell. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 56–64 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-2-56-64), EDN: [OYJJIZ](#)

Поступила в редакцию / Received 16.01.2023

Принята к публикации / Accepted 16.04.2023

Опубликована / Published 29.08.2025