



МЕХАНИКА

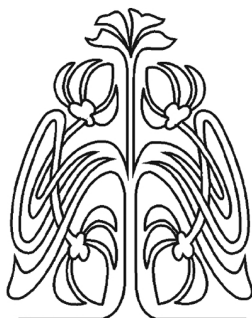
Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 332–344

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 332–344

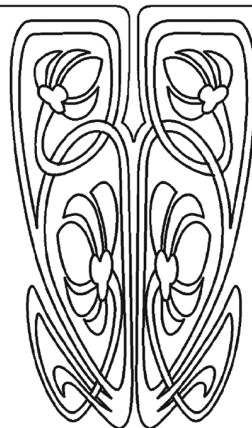
<https://mmi.sgu.ru>

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-332-344>

EDN: <https://elibrary.ru/GTSNSZ>



Научный
отдел



Научная статья

УДК 534.014

Колебания конечномерных моделей растяжимой цепной линии

Е. А. Дегилевич^{1,2✉}, А. С. Смирнов^{1,3}

¹Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Россия, 199178, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., д. 61

²ООО «Газпромнефть – Промышленные Инновации», Россия, 197350, г. Санкт-Петербург, дор. в Каменку, д. 74, лит. А, пом. часть, пом. 1-Н

³Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

Дегилевич Егор Алексеевич, ¹аспирант, ²руководитель направления по инжинирингу и конструированию оборудования, DegilevichEgor@gmail.com, ORCID: [0000-0003-0142-4561](https://orcid.org/0000-0003-0142-4561), SPIN: [2976-3360](https://elibrary.ru/2976-3360), AuthorID: [1076938](https://elibrary.ru/1076938)

Смирнов Алексей Сергеевич, ¹младший научный сотрудник лаборатории мехатроники; ³ассистент Высшей школы механики и процессов управления, smirnov.alexey.1994@gmail.com, ORCID: [0000-0002-6148-0322](https://orcid.org/0000-0002-6148-0322), SPIN: [5464-2279](https://elibrary.ru/5464-2279), AuthorID: [947771](https://elibrary.ru/947771)

Аннотация. Настоящая статья посвящена исследованию собственных частот колебаний конечномерных моделей растяжимой гибкой цепной линии. Приводятся аналитическое решение для двухгантельной и трехгантельной моделей, а также результаты компьютерного моделирования двадцатигантельной схемы растяжимой цепной линии. В случае аналитического подхода применяется координатный метод решения, при котором расписываются координаты сосредоточенных масс гантельных схем в отклоненном положении. В случае численного подхода используется программный комплекс MSC.ADAMS, позволяющий анализировать статику, кинематику и динамику многотельных систем. Полученные результаты для рассматриваемых моделей растяжимой цепной линии находятся в хорошем качественном соответствии между собой. Кроме того, при рассмотрении предельных переходов от растяжимого варианта к нерастяжимому также наблюдаются хорошая согласованность ожидаемых эффектов с найденными результатами. Для конечномерной двадцатигантельной модели нерастяжимой цепной линии с сосредоточенными параметрами проводится сопоставление первых трех безразмерных частот



с частотами непрерывной модели, значения которых были найдены ранее. Наблюдается отличная схожесть результатов, подтверждающих применимость двадцатигантельной схемы для описания динамики цепной линии на низших частотах колебаний. Помимо определения частот, привычных для классической нерастяжимой цепной линии, проводится анализ новых «мигрирующих» частот, которые появляются вследствие возникновения дополнительных степеней свободы из-за учета растяжимости. Строятся частотные зависимости от параметра, характеризующего податливость цепной линии, что позволяет оценить, как быстро «мигрирующие» частоты перемещаются из высокочастотного диапазона в зону низших частот по мере ослабления жесткости цепи. Полученные формулы и рассмотренные модели имеют как теоретическую ценность, так и хорошую применимость для прикладных задач.

Ключевые слова: цепная линия, частоты колебаний, растяжимость, конечномерная модель

Для цитирования: Дегилевич Е. А., Смирнов А. С. Колебания конечномерных моделей растяжимой цепной линии // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 332–344. DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-332-344](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-332-344), EDN: [GTSNSZ](https://gtsnsz.ru)

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Oscillations of finite-dimensional models of an extensible catenary

E. A. Degilevich^{1,2✉}, A. S. Smirnov^{1,3}

¹Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61 Bolshoy Pr. V. O., St. Petersburg 199178, Russia

²Gazpromneft Industrial Innovations LLC, 74 A Road to Kamenka, St. Petersburg 197350, Russia

³Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, 29 Polytechnicheskaya St., St. Petersburg 195251, Russia

Egor A. Degilevich, DegilevichEgor@gmail.com, ORCID: [0000-0003-0142-4561](https://orcid.org/0000-0003-0142-4561), SPIN: [2976-3360](https://spin.ru/2976-3360), AuthorID: [1076938](https://authorid.ru/1076938)

Alexey S. Smirnov, smirnov.alexey.1994@gmail.com, ORCID: [0000-0002-6148-0322](https://orcid.org/0000-0002-6148-0322), SPIN: [5464-2279](https://spin.ru/5464-2279), AuthorID: [947771](https://authorid.ru/947771)

Abstract. This article is devoted to the study of natural oscillation frequencies of finite-dimensional models of a stretchable flexible catenary. An analytical solution for two- and three-dumbbell models is presented, as well as the results of computer modeling of a twenty-dumbbell model of a stretchable catenary. In the case of an analytical approach, a coordinate solution method is used, in which the coordinates of the concentrated masses of dumbbell models in a deflected position are calculated. In the case of the numerical approach, the MSC.ADAMS software package is used, which allows analyzing the statics, kinematics, and dynamics of multibody systems. The results obtained for the considered stretchable catenary models are in good qualitative agreement with each other. Besides, when considering the limit transitions from the stretchable variant to the non-stretchable one, there is also a good consistency of the expected effects with the found results. For a finite-dimensional twenty-dumbbell model of a non-stretchable catenary with concentrated parameters, the first three dimensionless frequencies are compared with the frequencies of a continuous model, the values of which were found earlier. There is an excellent similarity of the results, confirming the applicability of the twenty-dumbbell scheme for describing the dynamics of catenary at low oscillation frequencies. In addition to determining the frequencies familiar to the classical non-stretchable catenary, an analysis of new “migrating” frequencies is carried out, which appear as a result of the emergence of additional degrees of freedom due to the consideration of stretchability. Frequency dependencies on the parameter characterizing the compliance of the catenary are constructed, which allows for estimating how quickly the “migrating” frequencies move from the high-frequency range to the low-frequency zone as the stiffness of the chain weakens. The formulas obtained and the models considered have both theoretical value and good applicability for applied tasks.



Keywords: catenary, oscillation frequencies, stretchability, finite-dimensional model

For citation: Degilevich E. A., Smirnov A. S. Oscillations of finite-dimensional models of an extensible catenary. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 332–344 (in Russian). DOI: [10.18500/1816-9791-2025-25-3-332-344](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-332-344), EDN: [GTSNSZ](https://gtsnsz.ru)

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Исследованию цепной линии (ЦЛ) [1], являющейся важным звеном различных конструкций и достаточно самобытным объектом, с помощью которого можно описать в том или ином приближении линии электропередач (ЛЭП), веревочные мосты и цепи, посвящено множество статей. Одним из самых популярных направлений изучения ЦЛ являются работы, связанные с численным моделированием ЛЭП под действием ветра. Так, например, в работах [2, 3] проводится вибрационный анализ с приложением нагрузок к модели ЦЛ, представляющей собой балку Бернулли – Эйлера. Стоит отметить, что зачастую приходится прибегать к упрощениям моделей ЦЛ, которые могут заключаться как в искажении ее формы, к примеру, представление ЦЛ в виде параболы [4] или дуги окружности [5], так и в переходе от непрерывных моделей с распределенными параметрами к конечномерным моделям с сосредоточенными параметрами [6]. Одним из самых эффективных способов исследования ЦЛ является именно разделение цепи на звенья с применением метода конечных элементов (МКЭ), что позволяет анализировать цепи в различных конфигурациях, к примеру, выполнять модальный расчет разновысотных ЦЛ [7], учитывать специфические свойства цепей и прикладывать нестандартные нагрузки [8].

Классическая модель ЦЛ нерастяжима, однако в реальности цепные системы, провода, звенья, соединенные упругими элементами, и другие объекты, которые могут в некотором приближении описываться уравнениями ЦЛ, обладают упругостью, способной вносить тот или иной вклад в динамические характеристики системы. В связи с этим целесообразно провести оценку того, как сильно будет влиять увеличение податливости цепи на частоты малых колебаний системы, а также проследить за появлением и значениями новых частот, возникающих вследствие растяжимости. Поскольку аналитическое решение непрерывной модели растяжимой ЦЛ весьма трудоемко, разумно рассмотреть модели ЦЛ с сосредоточенными параметрами, которые отлично себя зарекомендовали и при динамическом [6], и при силовом [8] анализе, показывая достаточно хорошее качественное и количественное приближение к непрерывной ЦЛ даже при небольшом количестве конечных элементов, из которых строится модель.

Программный комплекс MSC.ADAMS весьма хорошо себя зарекомендовал в задачах, связанных с моделированием многотельных систем для оценки их кинематики и динамики, что делает его мощным инструментом как в инженерном деле, так и в научной деятельности. В частности, можно найти работы, посвященные анализу цепных систем с применением MSC.ADAMS, к примеру, описание квазистатического поведения троса в системе цепных канатных дорог [9]. Кроме того, результаты симуляций дают достаточно близкие результаты к реальным экспериментам, как это было проверено в статье [10], где объектом исследования выступала система цепного привода конвейера. Прикладные пакеты дают возможность не только получить решение в случае громоздких систем, для которых аналитическое решение может быть весьма затруднено из-за нелинейностей и обилия параметров, но и выполнить расчеты для более простых систем с целью проверки аналитики.

В рамках настоящего исследования рассматриваются двух-, трех- и двадцатигантельные конечномерные модели растяжимой гибкой ЦЛ. Для первых двух гантельных схем приводятся строгие аналитические выкладки, а для последней осуществляются численные симуляции при помощи прикладных пакетов.



1. Двухгантельная модель

Рассмотрим простейшую конечномерную модель растяжимой ЦЛ с длиной L_0 в недеформированном состоянии, состоящей из двух упругих гантелей длины $l_0 = L_0/2$ и точечными грузами массы $m/2$ на концах. Два точечных груза массы $m/2$, расположенные в шарнирах, не участвуют в движении, а центральный груз массы m , получаемый в результате слияния двух концевых грузов гантелей, совершает колебания. Гантели являются упругими и представляют собой пружины с жесткостью c каждая. Длина пролета для удобства принимается равной $2a$. Расчетные схемы рассматриваемой системы в ненагруженном состоянии и в равновесном нагруженном состоянии приведены на рис. 1, а.

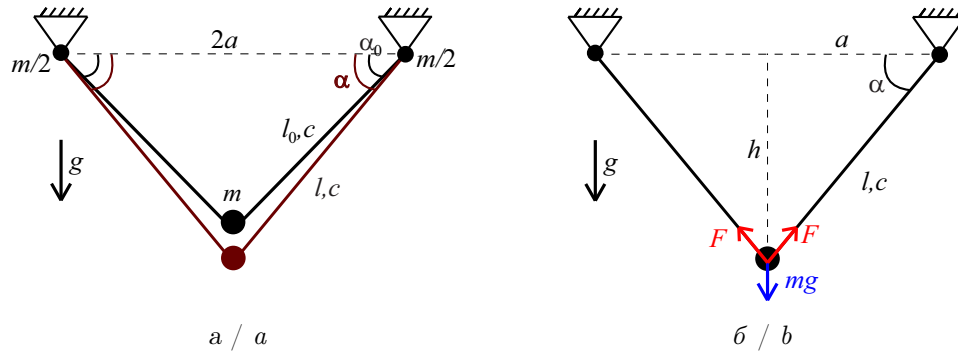


Рис. 1. Расчетные схемы двухгантельной модели целевой линии: а — в ненагруженном состоянии и в равновесном нагруженном состоянии; б — силы упругости и тяжести в равновесном нагруженном состоянии (цвет онлайн)

Fig. 1. Calculation schemes of two-dumbbell model of a catenary: а is in an unloaded state and in equilibrium loaded state; б is forces of elasticity and gravity in equilibrium loaded state (color online)

Сила упругости, действующая в равновесном нагруженном состоянии на груз со стороны каждой упругой гантели, очевидно, равна $F = mg/(2 \sin \alpha)$, где α — угол между гантелью и горизонталью в этом состоянии (рис. 1, б). Чтобы связать угол α с аналогичным углом α_0 в недеформированном состоянии, следует учесть, что

$$l_0 = l - \Delta l = \frac{a}{\cos \alpha} - \frac{mg}{2c \sin \alpha} = \frac{2ac \sin \alpha - mg \cos \alpha}{c \sin 2\alpha}, \quad (1)$$

где l — это длина растянувшейся гантели, а $\Delta l = F/c$ — ее деформация. На основе рис. 1 и формулы (1) нетрудно получить связь между указанными углами α и α_0 :

$$\cos \alpha_0 = \frac{a}{l_0} = \frac{ac \sin 2\alpha}{2ac \sin \alpha - mg \cos \alpha}.$$

Двухгантельная модель растяжимой ЦЛ обладает двумя степенями свободы, в отличие от модели ЦЛ, состоящей из двух жестких гантелей, у которой отсутствуют степени свободы. Принятой схеме свойственны симметричная и антисимметричная формы колебаний, которые целесообразно рассмотреть по отдельности. Ясно, что при движении по симметричной форме колебаний груз массы m будет совершать вертикальные перемещения вдоль оси x (рис. 2, а), тогда как при движении по антисимметричной форме колебаний — горизонтальные смещения вдоль оси y (рис. 2, б). В первом случае в качестве обобщенной координаты следует принять вертикальное смещение груза Δx , а во втором случае — его горизонтальное смещение Δy .

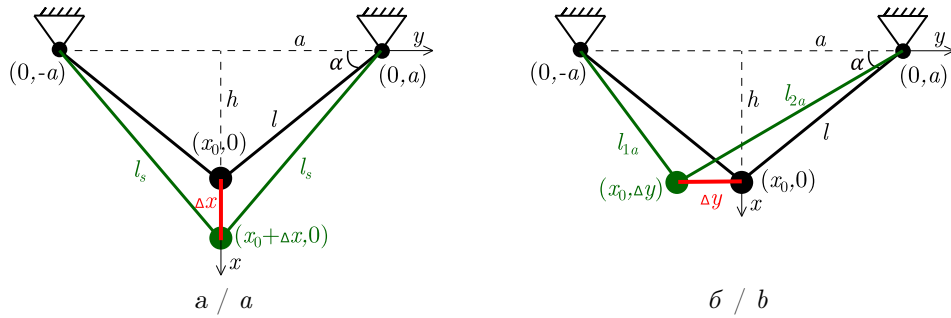


Рис. 2. Симметричные (а) и антисимметричные (б) колебания (цвет онлайн)

Fig. 2. Symmetrical (a) and antisymmetrical (b) oscillations (color online)

Используя координатный метод, можно вычислить длины упругих гантелей в равновесном и отклоненном положениях. Имеем:

$$\begin{aligned} l^2 &= x_0^2 + a^2, \quad l_s^2 = (x_0 + \Delta x)^2 + a^2 = l^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2, \\ l_{1a}^2 &= x_0^2 + (\Delta y + a)^2 = l^2 + 2a\Delta y + (\Delta y)^2, \\ l_{2a}^2 &= x_0^2 + (\Delta y - a)^2 = l^2 - 2a\Delta y + (\Delta y)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где индекс s относится к длинам обеих гантелей при симметричных колебаниях, а индексы $1a$ и $2a$ — к левой и правой гантелям соответственно при антисимметричных колебаниях. Выражая из (2) длины l_s , l_{1a} и l_{2a} и раскладывая их в ряд Тейлора, находим деформации упругих гантелей с точностью до слагаемых второго порядка малости:

$$\begin{aligned} \Delta_s &= l_s - l \approx \frac{x_0}{l} \Delta x + \frac{l^2 - x_0^2}{2l^3} (\Delta x)^2, \\ \Delta_{1a} &= l_{1a} - l \approx \frac{a}{l} \Delta y + \frac{l^2 - a^2}{2l^3} (\Delta y)^2, \quad \Delta_{2a} = l_{2a} - l \approx -\frac{a}{l} \Delta y + \frac{l^2 - a^2}{2l^3} (\Delta y)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Кинетическая энергия системы при движении по симметричной и антисимметричной формам колебаний соответственно равна:

$$T_s = \frac{1}{2} m (\Delta \dot{x})^2, \quad T_a = \frac{1}{2} m (\Delta \dot{y})^2, \quad (4)$$

а потенциальная энергия в случае малых колебаний с учетом формул (3) и очевидных равенств $x_0 = l \sin \alpha$, $a = l \cos \alpha$ будет:

$$\begin{aligned} \Pi_s &= -mg\Delta x + 2 \left(F\Delta_s + \frac{1}{2} c \Delta_s^2 \right) = \left(c \sin^2 \alpha + \frac{mg \cos^3 \alpha}{2a \sin \alpha} \right) (\Delta x)^2, \\ \Pi_a &= F(\Delta_{1a} + \Delta_{2a}) + \frac{1}{2} c (\Delta_{1a}^2 + \Delta_{2a}^2) = \left(c \cos^2 \alpha + \frac{mg \sin 2\alpha}{4a} \right) (\Delta y)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где линейные по Δx и Δy слагаемые сокращаются, как это и должно быть. Инерционный и квазиупругий коэффициенты с учетом выражений (4) и (5) будут равны:

$$a_s = a_a = m, \quad c_s = 2c \sin^2 \alpha + \frac{mg \cos^3 \alpha}{a \sin \alpha}, \quad c_a = 2c \cos^2 \alpha + \frac{mg \sin 2\alpha}{2a},$$

и, следовательно, частоты малых колебаний примут вид

$$k_s = \sqrt{\frac{c_s}{a_s}} = \sqrt{\frac{2c}{m} \sin^2 \alpha + \frac{g \cos^3 \alpha}{a \sin \alpha}}, \quad k_a = \sqrt{\frac{c_a}{a_a}} = \sqrt{\frac{2c}{m} \cos^2 \alpha + \frac{g}{2a} \sin 2\alpha}. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что в случае $\alpha = \pi/4$ частоты k_s и k_a совпадают. Также из (6) следует, что при $c \rightarrow \infty$ эти частоты при прочих заданных параметрах будут неограниченно возрастать, так что рассматриваемая модель будет переходить в двухгантельную модель нерастяжимой ЦЛ, которая не имеет степеней свободы. При уменьшении же жесткости c частоты, напротив, будут уменьшаться.



2. Трехгантельная модель

Рассмотрим теперь конечномерную модель растяжимой ЦЛ с длиной L_0 в недеформированном состоянии, состоящую уже из трех упругих гантелей длины $l_0 = L_0/3$. При отсутствии деформаций боковые гантели образуют с горизонтальной прямой угол α_0 . Нетрудно понять, что в этом случае в движении участвуют два центральных груза массы m , получившиеся в результате слияния концевых грузов соседних гантелей. Расчетные схемы рассматриваемой системы в ненагруженном состоянии и в равновесном нагруженном состоянии приведены на рис. 3, а.

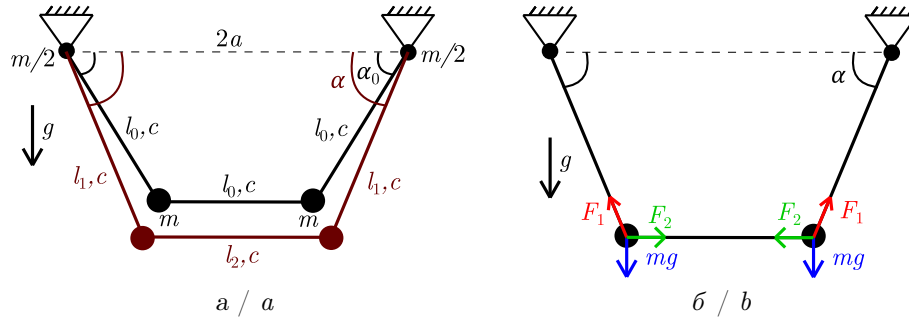


Рис. 3. Расчетные схемы трехгантельной модели цепной линии: а — в ненагруженном состоянии и в равновесном нагруженном состоянии; б — силы упругости и тяжести в равновесном нагруженном состоянии (цвет онлайн)
Fig. 3. Calculation schemes of three-dumbbell model of a catenary: а is in an unloaded state and in equilibrium loaded state; б is forces of elasticity and gravity in equilibrium loaded state (color online)

Записывая условие баланса сил в нагруженном равновесном положении в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси, находим упругие силы, действующие в этом положении на грузы со стороны упругих гантелей: $F_1 = mg/\sin \alpha$ — со стороны боковых гантелей, и $F_2 = mg \operatorname{ctg} \alpha$ — со стороны центральной гантели, причем α — угол между боковыми гантелями и горизонталью (рис. 3, б). Ясно, что удлинения упругих гантелей в рассматриваемом состоянии равновесия определяются выражениями

$$\Delta l_1 = \frac{F_1}{c} = \frac{mg}{c \sin \alpha}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_2}{c} = \frac{mg}{c} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (7)$$

где индекс 1 относится к боковым гантелям, а индекс 2 — к центральной гантели. Длины гантелей l_1 и l_2 в равновесном нагруженном состоянии определяются выражениями $l_1 = l_0 + \Delta l_1$, $l_2 = l_0 + \Delta l_2$. Дополняя их еще одним очевидным геометрическим соотношением $2l_1 \cos \alpha + l_2 = 2a$ и принимая во внимание формулы (7), получим в результате следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2l_1 \cos \alpha + l_2 = 2a, \\ l_2 - \frac{mg}{c} \operatorname{ctg} \alpha = l_0, \\ l_1 - \frac{mg}{c \sin \alpha} = l_0, \end{cases} \quad (8)$$

решая которую, можно определить неизвестные величины: длины l_1 , l_2 и угол α .

Рассматриваемая система обладает четырьмя степенями свободы, в то время как в рамках трехгантельной модели ЦЛ с жесткими гантелями имеется лишь одна степень свободы. Нетрудно понять, что для этой модели также можно изучить в отдельности симметричные (рис. 4, а) и антисимметричные (рис. 4, б) колебания и найти соответствующие им частоты колебаний (по две для каждого типа колебаний). Ясно, что при симметричных колебаниях для перемещений левого и правого точечного грузов в проекциях на координатные оси x и y справедливы соотношения $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$, $\Delta y_1 = -\Delta y_2 = -\Delta y$, тогда как при антисимметричных колебаниях — соотношения $\Delta x_1 = -\Delta x_2 = \Delta x$, $\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y$. Это означает,

что в каждом случае в качестве обобщенных координат естественно принять величины Δx и Δy .

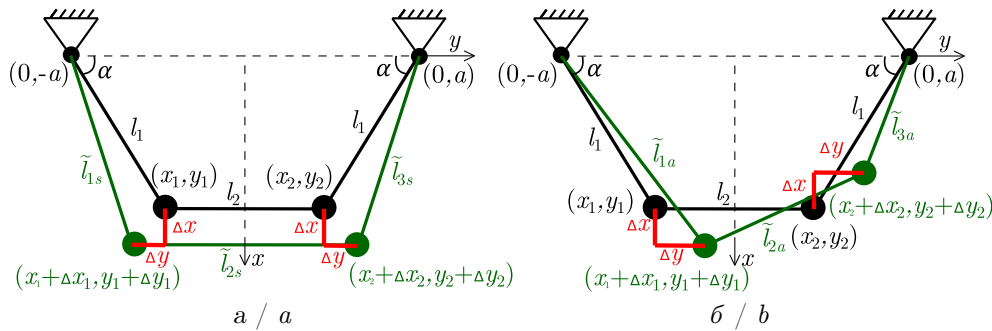


Рис. 4. Колебания трехгантельной модели: а — симметричные; б — антисимметричные (цвет онлайн)

Fig. 4. Three-dumbbell model oscillations: a — symmetrical; b — antisymmetrical (color online)

Для определения собственных частот малых колебаний будем по-прежнему использовать координатный метод. С этой целью выпишем выражения для квадратов длин гантелей в равновесном и отклоненном положениях:

$$\begin{aligned} l_1^2 &= x_1^2 + (y_1 + a)^2 = x_1^2 + y_1^2 + a^2 + 2ay_1, & l_2^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 4y_1^2, \\ \tilde{l}_{1s}^2 &= \tilde{l}_{3s}^2 = (x_1 + \Delta x)^2 + (y_1 - \Delta y + a)^2 = l_1^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + 2x_1\Delta x - 2\Delta y(y_1 + a), \\ \tilde{l}_{2s}^2 &= (x_2 + \Delta x - x_1 - \Delta x)^2 + (y_2 + \Delta y - y_1 + \Delta y)^2 = l_2^2 - 8y_1\Delta y + 4(\Delta y)^2, \\ \tilde{l}_{1a}^2 &= (x_1 + \Delta x)^2 + (y_1 + \Delta y + a)^2 = l_1^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + 2x_1\Delta x + 2\Delta y(y_1 + a), \\ \tilde{l}_{3a}^2 &= (x_2 - \Delta x)^2 + (y_2 + \Delta y - a)^2 = l_1^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - 2x_1\Delta x - 2\Delta y(y_1 + a), \\ \tilde{l}_{2a}^2 &= (x_2 - \Delta x - x_1 - \Delta x)^2 + (y_2 + \Delta y - y_1 - \Delta y)^2 = l_2^2 + 4(\Delta x)^2, \end{aligned}$$

где учтено, что $x_2 = x_1$, $y_2 = -y_1$. Здесь индекс 1 у длин означает ее принадлежность к левой гантели, 2 — к центральной, 3 — к правой, а буквы s и a показывают, что отвечающие им выражения относятся к симметричным и антисимметричным колебаниям соответственно. Записывая выражения для деформаций гантелей и раскладывая их в ряд Тейлора, можно получить следующие формулы с точностью до величин второго порядка малости:

$$\begin{aligned} \Delta_{1s} &\approx \frac{x_1}{l_1}\Delta x - \frac{a + y_1}{l_1}\Delta y + \frac{l_1^2 - x_1^2}{2l_1^3}(\Delta x)^2 + \frac{l_1^2 - (a + y_1)^2}{2l_1^3}(\Delta y)^2 + \frac{x_1(a + y_1)}{l_1^3}\Delta x\Delta y, \\ \Delta_{1a} &\approx \frac{x_1}{l_1}\Delta x + \frac{a + y_1}{l_1}\Delta y + \frac{l_1^2 - x_1^2}{2l_1^3}(\Delta x)^2 + \frac{l_1^2 - (a + y_1)^2}{2l_1^3}(\Delta y)^2 - \frac{x_1(a + y_1)}{l_1^3}\Delta x\Delta y, \\ \Delta_{3a} &\approx -\frac{x_1}{l_1}\Delta x - \frac{a + y_1}{l_1}\Delta y + \frac{l_1^2 - x_1^2}{2l_1^3}(\Delta x)^2 + \frac{l_1^2 - (a + y_1)^2}{2l_1^3}(\Delta y)^2 - \frac{x_1(a + y_1)}{l_1^3}\Delta x\Delta y, \\ \Delta_{2s} &= -2\Delta y, & \Delta_{2a} &\approx \frac{2}{l_2}(\Delta x)^2, & \Delta_{3s} &= \Delta_{1s}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выпишем теперь потенциальную энергию системы при симметричных и антисимметричных колебаниях:

$$\begin{aligned} \Pi_s &= -2mg\Delta x + \frac{1}{2}c(2\Delta_{1s}^2 + \Delta_{2s}^2) + 2F_1\Delta_{1s} + F_2\Delta_{2s}, \\ \Pi_a &= \frac{1}{2}c(\Delta_{1a}^2 + \Delta_{2a}^2 + \Delta_{3a}^2) + F_1(\Delta_{1a} + \Delta_{3a}) + F_2\Delta_{2a}, \end{aligned}$$



и после подстановки формул (9), а также учета того, что $x_1 = l_1 \sin \alpha$, $y_1 = -l_2/2$, $F_1 = mg/\sin \alpha$ и $F_2 = mg \operatorname{ctg} \alpha$, она в квадратичной аппроксимации примет вид

$$\begin{aligned} \Pi_s &= \left(mg \frac{\cos^2 \alpha}{l_1 \sin \alpha} + c \sin^2 \alpha \right) (\Delta x)^2 + 2 \left(\frac{c \sin \alpha}{l_1} - \frac{mg}{l_1^2} \right) \left(a - \frac{l_2}{2} \right) \Delta x \Delta y + \\ &\quad + \left[mg \frac{l_1^2 - (a - l_2/2)^2}{l_1^3 \sin \alpha} + c \left(\frac{(a - l_2/2)^2}{l_1^2} + 2 \right) \right] (\Delta y)^2, \\ \Pi_a &= \left[mg \left(\frac{\cos^2 \alpha}{l_1 \sin \alpha} + 2 \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{l_2} \right) + c \sin^2 \alpha \right] (\Delta x)^2 + 2 \left(\frac{c \sin \alpha}{l_1} - \frac{mg}{l_1^2} \right) \left(a - \frac{l_2}{2} \right) \Delta x \Delta y + \\ &\quad + \left[mg \frac{l_1^2 - (a - l_2/2)^2}{l_1^3 \sin \alpha} + c \frac{(a - l_2/2)^2}{l_1^2} \right] (\Delta y)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Что же касается кинетической энергии системы, то она, очевидно, как для симметричных, так и для антисимметричных колебаний равна

$$T = m [(\Delta \dot{x})^2 + (\Delta \dot{y})^2]. \quad (11)$$

Из (10) и (11) вытекает, что матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{xy} & C_{yy} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где элементы матрицы квазиупругих коэффициентов для симметричных и антисимметричных колебаний будут такими:

$$\begin{aligned} C_{xx_s} &= 2 \left(mg \frac{\cos^2 \alpha}{l_1 \sin \alpha} + c \sin^2 \alpha \right), \quad C_{xy_s} = 2 \left(\frac{c \sin \alpha}{l_1} - \frac{mg}{l_1^2} \right) \left(a - \frac{l_2}{2} \right), \\ C_{yy_s} &= 2 \left[mg \frac{l_1^2 - (a - l_2/2)^2}{l_1^3 \sin \alpha} + c \left(\frac{(a - l_2/2)^2}{l_1^2} + 2 \right) \right], \\ C_{xx_a} &= 2 \left[mg \left(\frac{\cos^2 \alpha}{l_1 \sin \alpha} + 2 \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{l_2} \right) + c \sin^2 \alpha \right], \quad C_{xy_a} = C_{xy_s}, \\ C_{yy_a} &= 2 \left[mg \frac{l_1^2 - (a - l_2/2)^2}{l_1^3 \sin \alpha} + c \frac{(a - l_2/2)^2}{l_1^2} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Записывая частотное уравнение $\det(\mathbf{C} - k^2 \mathbf{A}) = 0$ и подставляя в него матрицы (12), получим после развертывания определителя следующее биквадратное уравнение:

$$k^4 - \frac{1}{2m} (C_{xx} + C_{yy}) k^2 + \frac{1}{4m^2} (C_{xx} C_{yy} - C_{xy}^2) = 0,$$

из которого можно найти частоты симметричных и антисимметричных колебаний:

$$\begin{aligned} k_{1s,2s} &= \sqrt{\frac{1}{4m} \left[C_{xx_s} + C_{yy_s} \pm \sqrt{(C_{xx_s} - C_{yy_s})^2 + 4C_{xy_s}^2} \right]}, \\ k_{1a,2a} &= \sqrt{\frac{1}{4m} \left[C_{xx_a} + C_{yy_a} \pm \sqrt{(C_{xx_a} - C_{yy_a})^2 + 4C_{xy_a}^2} \right]}, \end{aligned} \quad (14)$$

где также следует принять во внимание выражения (13).

Рассмотрим частный случай, когда жесткость упругих гантелей будет бесконечно большой, т. е. выполним предельный переход $c \rightarrow \infty$. Тогда из формул (8) легко видеть, что $l_1 \rightarrow l_0$, $l_2 \rightarrow l_0$, $\alpha \rightarrow \alpha_0$, при этом $l_0(2 \cos \alpha_0 + 1) = 2a$. Ясно, что в этой ситуации обе симметричные частоты и большая антисимметричная частота будут неограниченно возрастать



при $c \rightarrow \infty$, тогда как низшая антисимметричная частота будет стремиться к конечному пределу, равному

$$k_1 = \sqrt{\frac{1 + 2 \cos^3 \alpha_0}{\sin \alpha_0}} \sqrt{\frac{g}{l_0}}.$$

Этот результат полностью совпадает с единственной частотой колебаний модели ЦЛ, состоящей из трех жестких гантелей [6], как этого и следовало ожидать.

Таким образом, на основе рассмотренных моделей ЦЛ с двумя и тремя упругими гантелями можно сделать вывод, что учет упругости приводит к появлению новых частот колебаний, которые отсутствовали у классической нерастяжимой модели ЦЛ, и они будут мигрировать из высокочастотного диапазона в низкочастотную область по мере увеличения податливости.

3. Двадцатигантельная модель

Наконец, проведем исследование модели растяжимой ЦЛ с длиной L_0 в недеформированном состоянии, состоящей из n упругих гантелей длины $l_0 = L_0/n$, с применением программного комплекса MSC.ADAMS. Для определенности примем, что $n = 20$, т. е. будем рассматривать двадцатигантельную модель ЦЛ. Если двухгантельная модель растяжимой ЦЛ имела 2 степени свободы, а трехгантельная модель — 4 степени свободы, то двадцатигантельная модель растяжимой ЦЛ имеет уже 38 степеней свободы, в то время как нерастяжимая модель с двадцатью жесткими гантелями — только 18 степеней свободы. Обобщая на произвольный случай, можно заключить, что количество степеней свободы, а значит, и собственных частот, в зависимости от числа гантелей n , из которых состоит ЦЛ, будет равно $2n - 2$ для модели растяжимой ЦЛ и $n - 2$ для модели нерастяжимой ЦЛ, т. е. при учете растяжимости каждой гантели число степеней свободы возрастает на n единиц.

Начальное расположение всех точечных грузов определяется с использованием метода, детально описанного в [8], где для поиска равновесных углов гантельной схемы проводится минимизация потенциальной энергии системы с учетом связей. Каждая гантель представляет собой безынерционную пружину с двумя точечными грузами массы $m/2$ на ее концах, и тем самым получается, что в местах шарнирного соединения гантелей располагаются точечные грузы массы m , которые представляют собой слившиеся воедино концевые грузы смежных гантелей. Рассматриваемая модель определяется 14 параметрами: длиной пролета $2a$, длиной одной недеформированной гантели l_0 , ее массой m , ее жесткостью c и десятью углами, которые гантели составляют с горизонталью в ненагруженном состоянии. Первым этапом расчета собственных частот двадцатигантельной модели растяжимой ЦЛ является статический анализ, в результате которого система переходит из недеформированного состояния в равновесное нагруженное, когда гантели удлиняются из-за деформаций, вызванных силой тяжести. На втором этапе уже проводится модальный анализ для конфигурации системы, получившейся на первом этапе расчета.

Введем в рассмотрение следующие величины:

$$\delta = \frac{L_0}{2a} - 1, \quad \varkappa = \beta q_0 a, \quad q_0 = \rho S g, \quad \beta = \frac{1}{ES}, \quad c = \frac{ES}{l_0}, \quad (15)$$

где безразмерный параметр δ характеризует изменение длины ЦЛ L_0 по отношению к длине пролета $2a$, безразмерный параметр $\varkappa$ характеризует податливость ЦЛ, причем q_0 — сила тяжести на единицу длины еще нерастянутой ЦЛ, ρ — плотность материала ЦЛ, S — площадь ее сечения, β — удельное относительное удлинение ЦЛ, E — модуль упругости материала ЦЛ, c — жесткость на растяжение упругой гантели длины l_0 [11]. Поскольку масса одной гантели равна $m = \rho S l_0$, а $l_0 = 2a(1 + \delta)/n$, то с учетом выражений (15) можно получить формулу для c через безразмерные параметры $\varkappa$ и δ :

$$c = \frac{mgn^2}{4\varkappa a(1 + \delta)^2}. \quad (16)$$



Отметим, что соотношение (16) также потребуется при сравнении двух-, трех- и двадцатигантельной конечномерных моделей ЦЛ. Поскольку гантельные модели необходимо сопоставлять между собой при одинаковых значениях $\varkappa$, то жесткости гантелей s должны быть вычислены согласно конкретному количеству гантелей n рассматриваемой модели, что и отражено в формуле (16).

Двадцатигантельная конечномерная модель растяжимой ЦЛ приведена на рис. 5. Расчет собственных частот проводился при $\delta = 0.3$ и при $\delta = 0.05$, а параметр $\varkappa$ варьировался от 0 до 0.15.

На рис. 6 даны зависимости первых трех безразмерных частот модели $p = k/k_0$, где $k_0 = \sqrt{g/2a}$, а также две (первая симметричная и первая антисимметричная) «мигрирующие» частоты от величины $\varkappa$.

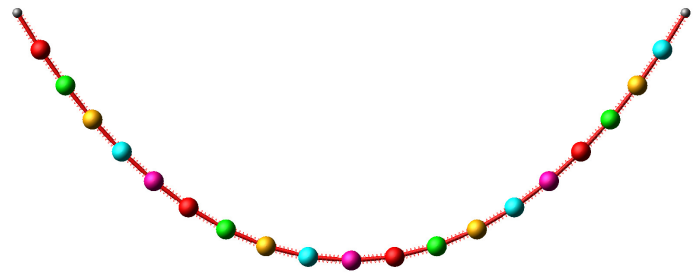


Рис. 5. Двадцатигантельная модель растяжимой цепной линии при $\delta = 0.3$ (цвет онлайн)

Fig. 5. A twenty-dumbbell model of a stretchable catenary at $\delta = 0.3$ (color online)

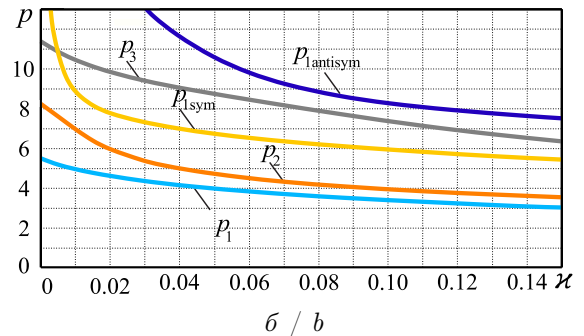
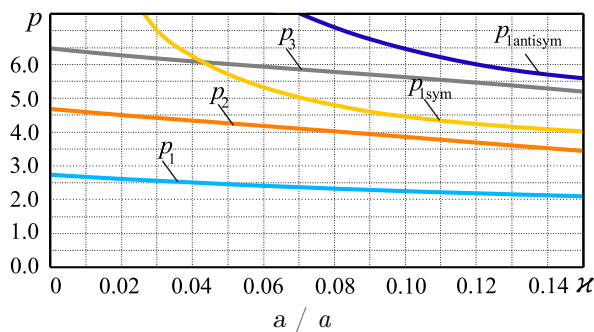


Рис. 6. Частоты колебаний двадцатигантельной модели растяжимой цепной линии от $\varkappa$: а — при $\delta = 0.3$; б — при $\delta = 0.05$ (цвет онлайн)

Fig. 6. The oscillation frequencies of a twenty-dumbbell model of stretchable catenary depending on $\varkappa$: а is for $\delta = 0.3$; б is for $\delta = 0.05$ (color online)

Из построенных графиков видно, как кривые, отвечающие «мигрирующим» частотам, с ростом параметра $\varkappa$, т. е. с ростом податливости, постепенно убывают, опускаясь в область низких частот, причем они могут пересекать кривые, соответствующие исходным частотам — тем частотам, которые имели конечные значения в случае нерастяжимости ЦЛ (т. е. когда $\varkappa = 0$). При этом кривая для первой «мигрирующей» частоты с симметричной формой колебаний остается выше кривой для второй исходной частоты с симметричной формой, а кривая для второй «мигрирующей» частоты с антисимметричной формой колебаний располагается выше кривой для третьей исходной частоты с антисимметричной формой. Отметим, что чем меньше δ , тем раньше «мигрирующие» частоты опускаются в область низких частот с ростом параметра $\varkappa$. Что касается исходных частот, то при увеличении параметра $\varkappa$ они также уменьшаются, хотя это происходит и менее ощутимо по сравнению с убыванием «мигрирующих» частот, которые при малых $\varkappa$ являются весьма большими, а при постепенном увеличении $\varkappa$ начинают резко падать.

Подчеркнем, что значения исходных частот колебаний двадцатигантельной конечномерной модели ЦЛ при $\varkappa = 0$, которые также можно увидеть на рис. 6, достаточно близки к частотам колебаний ЦЛ при рассмотрении ее как модели с распределенными параметрами [6]. Так, для случая $\delta = 0.05$ первая безразмерная частота колебаний двадцатигантельной модели нерастяжимой ЦЛ $p_1 = 5.521$ отличается от аналогичной частоты непрерывной модели, равной 5.522, на 0.02%; вторая безразмерная частота $p_2 = 8.275$ конечномерной

модели ниже второй частоты непрерывной модели, равной 8.345, на 0.8%; а третья частота $p_3 = 11.42$ конечномерной модели ниже частоты непрерывной модели, равной 11.60, на 1.6%. При $\delta = 0.3$ также наблюдается хорошее согласие между безразмерными частотами конечномерной и непрерывной моделей нерастяжимой ЦЛ: для первой частоты 2.737 против 2.745 (расхождение 0.3%), для второй частоты 4.680 против 4.718 (расхождение 0.8%), а для третьей частоты 6.483 против 6.587 (расхождение 1.6%).

На рис. 7 приведены графики зависимости безразмерной исходной первой частоты и двух «мигрирующих» частот для двадцатигантельной модели, а также для двух- и трехгантельной моделей, построенных на основе полученных ранее аналитических выражений (6) и (14) с учетом соотношения (16), от параметра κ .

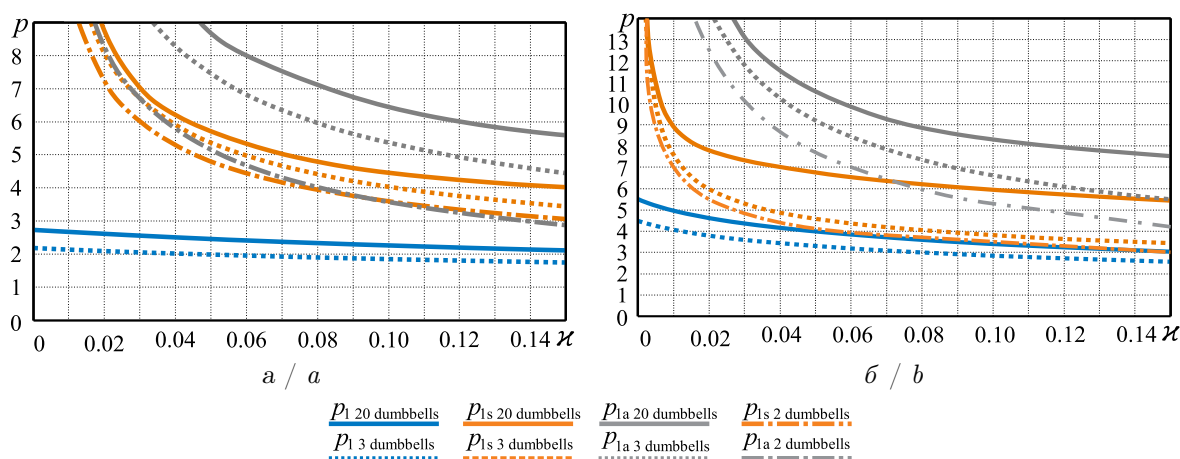


Рис. 7. Сравнение частот колебаний гантельных моделей целевой линии от κ : а — при $\delta = 0.3$; б — при $\delta = 0.05$ (цвет онлайн)

Fig. 7. Comparison of oscillation frequencies of dumbbell models of catenary depending on κ : а is for $\delta = 0.3$; b is for $\delta = 0.05$ (color online)

На рис. 7, а видно, как кривые, отвечающие «мигрирующим» частотам двухгантельной схемы, пересекаются, поскольку при $\delta = 0.3$ угол α_0 оказывается чуть меньше $\pi/4$, и при увеличении податливости угол α пересекает значение $\pi/4$, так что частоты колебаний меняются в последовательности, как это и оговаривалось ранее. Также стоит отметить хорошее приближение частот колебаний гантельных моделей с малым количеством звеньев к соответствующим частотам двадцатигантельной модели, которую уже можно считать в некоторой степени непрерывной моделью, по крайней мере, в отношении низших частот.

Заключение

Проведенные в данной статье аналитический и численный расчеты колебаний растяжимой ЦЛ находятся в полном качественном соответствии друг с другом. Было показано влияние растяжимости ЦЛ на динамику системы, которое заключается не только в количественном уменьшении частот колебаний, но и в появлении новых «мигрирующих» в низкочастотную область частот. Рассмотренные конечномерные модели растяжимой ЦЛ могут быть полезны при продолжении статических и динамических исследований, посвященных не только ЦЛ, но и другим, более сложным цепным системам.

Список литературы

1. Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. Москва : Наука, 1980. 240 с.
2. Chen G., Yang Y., Yang Y., Li P. Study on Galloping Oscillation of Iced Catenary System under Cross Winds // Shock and Vibration. 2017. Art. 1634292. DOI: [10.1155/2017/1634292](https://doi.org/10.1155/2017/1634292)
3. Liu Z., Song Y., Wang Y., Wang H., Gao S. The catenary vibration response of high-speed



- electrified railway considering horizontal wind // Proceedings of the 2013 International Conference on Electrical and Information Technologies for Rail Transportation (EITRT2013)-Volume I. Lecture Notes in Electrical Engineering. Berlin, Heidelberg : Springer, 2014. Vol. 287. P. 45–54. DOI: [10.1007/978-3-642-53778-3_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-53778-3_5)
4. Hatibovic A., Kádár P. An algorithm for the parabolic approximation of the catenary applicable in both inclined and level spans // 2018 International IEEE Conference and Workshop in Óbuda on Electrical and Power Engineering (CANDO-EPE). Budapest, Hungary, 2018. P. 217–222. DOI: [10.1109/CANDO-EPE.2018.8601137](https://doi.org/10.1109/CANDO-EPE.2018.8601137)
5. Rawlins C. B. Effect of non-linearity in free large oscillations of a shallow catenary // Journal of Sound and Vibration. 2004. Vol. 273, iss. 4–5. P. 857–874. DOI: [10.1016/S0022-460X\(03\)00646-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00646-1)
6. Смирнов А. С., Дегилевич Е. А. Колебания цепных систем. Санкт-Петербург : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. 246 с. EDN: [XIOEBN](https://www.edn.ru/XIOEBN)
7. Klaycham K., Nguantud P., Athisakul C., Chucheeprasakul S. Free vibration analysis of large sag catenary with application to catenary jumper // Ocean Systems Engineering. 2020. Vol. 10, iss. 1. P. 67–86. DOI: [10.12989/ose.2020.10.1.067](https://doi.org/10.12989/ose.2020.10.1.067)
8. Дегилевич Е. А., Смирнов А. С. Моделирование цепной линии и ее модификаций // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2021–2022 гг. Санкт-Петербург : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. С. 24–41. EDN: [QSUXMG](https://www.edn.ru/QSUXMG)
9. Mwape C. J., Hong T. S., Wu W. B. Static Studies of a steel chain ropeway section using Msc Adams // Advanced Materials Research. 2011. Vol. 328–330. P. 1031–1036. DOI: [10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031)
10. Suwanjumat C., Suwannahong W., Thongkom S. Implementation of multi-body dynamics simulation for the conveyor chain drive system // The 3rd International Conference on Mechatronics and Mechanical Engineering (ICMME 2016). 2017. Vol. 95. Art. 06006. DOI: [10.1051/mateconf/20179506006](https://doi.org/10.1051/mateconf/20179506006)
11. Исполнов Ю. Г. Вычислительные методы в теории колебаний. Санкт-Петербург : Изд-во Политехнического ун-та, 2008. 124 с. DOI: [10.18720/SPBPU/2/si20-160](https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/si20-160), EDN: [QJUVVH](https://www.edn.ru/QJUVVH)

References

1. Merkin D. R. *Vvedenie v mekhaniku gibkoy niti* [Introduction to the mechanics of flexible thread]. Moscow, Nauka, 1980. 240 p. (in Russian).
2. Chen G., Yang Y., Yang Y., Li P. Study on galloping oscillation of iced catenary system under cross winds. *Shock and Vibration*, 2017, art. 1634292. DOI: [10.1155/2017/1634292](https://doi.org/10.1155/2017/1634292)
3. Liu Z., Song Y., Wang Y., Wang H., Gao S. The catenary vibration response of high-speed electrified railway considering horizontal wind. *Proceedings of the 2013 International Conference on Electrical and Information Technologies for Rail Transportation (EITRT2013)-Volume I. Lecture Notes in Electrical Engineering*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2014, vol. 287, pp. 45–54. DOI: [10.1007/978-3-642-53778-3_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-53778-3_5)
4. Hatibovic A., Kádár P. An algorithm for the parabolic approximation of the catenary applicable in both inclined and level spans. *2018 International IEEE Conference and Workshop in Óbuda on Electrical and Power Engineering (CANDO-EPE)*. Budapest, Hungary, 2018, pp. 217–222. DOI: [10.1109/CANDO-EPE.2018.8601137](https://doi.org/10.1109/CANDO-EPE.2018.8601137)
5. Rawlins C. B. Effect of non-linearity in free large oscillations of a shallow catenary. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, vol. 273, iss. 4–5, pp. 857–874. DOI: [10.1016/S0022-460X\(03\)00646-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00646-1)
6. Smirnov A. S., Degilevich E. A. *Kolebaniya tsepykh sistem* [Oscillations of chain systems]. St. Petersburg, POLYTECH-PRESS, 2021. 246 p. (in Russian). EDN: [XIOEBN](https://www.edn.ru/XIOEBN)
7. Klaycham K., Nguantud P., Athisakul C., Chucheeprasakul S. Free vibration analysis of large sag catenary with application to catenary jumper. *Ocean Systems Engineering*, 2020, vol. 10, iss. 1, pp. 67–86. DOI: [10.12989/ose.2020.10.1.067](https://doi.org/10.12989/ose.2020.10.1.067)
8. Degilevich E. A., Smirnov A. S. Modeling of a catenary and its modifications. In: *Trudy seminar «Komp'yuternye metody v mekhanike sploshnoy sredy» 2021–2022 gg.* [Proceedings of the seminar “Computer methods in continuum mechanics”. 2021–2022]. St. Petersburg, POLYTECH-PRESS, 2022, pp. 24–41 (in Russian). EDN: [QSUXMG](https://www.edn.ru/QSUXMG)
9. Mwape C. J., Hong T. S., Wu W. B. Static studies of a steel chain ropeway section using Msc Adams.



Advanced Materials Research, 2011, vol. 328–330, pp. 1031–1036. DOI: [10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031)

10. Suvanjumrat C., Suwannahong W., Thongkom S. Implementation of multi-body dynamics simulation for the conveyor chain drive system. *The 3rd International Conference on Mechatronics and Mechanical Engineering (ICMME 2016)*, 2017, vol. 95, art. 06006. DOI: [10.1051/mateconf/20179506006](https://doi.org/10.1051/mateconf/20179506006)
11. Ispolov Y. G. *Vychislitel'nye metody v teorii kolebaniy* [Computational methods in the theory of oscillations]. St. Petersburg, Polytechnic University Press, 2008. 124 p. (in Russian). DOI: [10.18720/SPBPU/2/si20-160](https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/si20-160), EDN: QJUVVH

Поступила в редакцию / Received 10.09.2024

Принята к публикации / Accepted 12.10.2024

Опубликована / Published 29.08.2025