Научный отдел

# МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 306–315
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 306–315
https://mmi.sgu.ru
DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-3-306-315
EDN: https://elibrary.ru/AWFIHL

Научная статья
УДК 512

## О кратностях некоторых градуированных кохарактеров матричной супералгебры $M^{(2,2)}(F)$

**С. Ю. Антонов**[1✉], **А. В. Антонова**[2]

[1]Казанский инновационный университет имени В. Г. Тимирясова (ИЭУП), Россия, 420111, г. Казань, ул. Московская, д. 42
[2]Казанский государственный энергетический университет, Россия, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51

**Антонов Степан Юрьевич**, преподаватель кафедры высшей математики, antonovst-vm@rambler.ru, ORCID: 0000-0003-1705-3929, AuthorID: 110936

**Антонова Алина Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, antonovakazan@rambler.ru, ORCID: 0000-0001-7047-7275, SPIN: 4476-9689, AuthorID: 279836

**Аннотация.** Пусть $F$ — произвольное поле характеристики нуль, $M^{(m,k)}(F)$ — матричная супералгебра над $F$. Из теории алгебр с полиномиальными тождествами известно, что супералгебра $M^{(m,k)}(F)$ имеет конечный базис $Z_2$-градуированных тождеств. Поэтому естественным образом возникает задача описания этого базиса. На данный момент времени такого описания нет. Прежде всего, это связано с тем, что отсутствуют какие-либо эффективные методы нахождения обычных или $Z_2$-градуированных тождеств супералгебры $M^{(m,k)}(F)$. Тем не менее при некоторых значениях $m, k$ такие тождества найти все же удается. Для этого используют либо компьютерные вычисления, либо хорошо развитый аппарат теории представлений симметрической группы $S_n$ и общей линейной группы $GL_p$. Более точно для нахождения $Z_2$-градуированных тождеств супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ при малых значениях $m, k$ изучают последовательность $\{\chi_n\}$ характеров представлений либо групп $S_r \times S_{n-r}$, либо группы $GL_p \times GL_p$. Для каждой такой группы строят свое векторное $F$-пространство в свободной алгебре $F\{Y \bigcup Z\}$. При этом относительно действия группы $S_r \times S_{n-r}$ $(GL_p \times GL_p)$ на свое векторное пространство оно имеет структуру левого $S_r \times S_{n-r}$ $(GL_p \times GL_p)$ модуля. Однако оказывается, что с вычислительной точки зрения работать с последовательностью характеров представлений группы $GL_p \times GL_p$ предпочтительнее. В данной работе изучается последовательность $GL_p \times GL_p$-характеров $\{\chi_n\}$ матричной супералгебры $M^{(2,2)}(F)$. При этом используется тот факт, что между парами разбиений $(\lambda, \mu)$, где $\lambda \vdash r$, $\mu \vdash n - r$, и неприводимыми $GL_p \times GL_p$-модулями между парами разбиений $(\lambda, \mu)$, где $\lambda \vdash r$, $\mu \vdash n-r$, и неприводимыми $GL_p \times GL_p$-модулями существует взаимнооднозначное соответствие. Кроме того, мы исследуем только те кратности в разложении характера $\chi_n$, которые связаны с неприводимыми $GL_p \times GL_p$-модулями, находящимися в соответствии с парами разбиений $(\lambda, \mu)$ вида $(0, \mu)$. Показано, что если высота $h(\mu)$ диаграммы Юнга $D_\mu$ разбиения $\mu$, участвующего в разложении характера $\chi_n$, не больше пяти, то кратность $m_{(0,\mu)}$ неприводимого $GL_p \times GL_p$-характера отлична от нуля.

**Ключевые слова:** стандартный многочлен, супералгебра, неприводимый характер, диаграмма Юнга, симметрическая группа, общая линейная группа

**Для цитирования:** *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* О кратностях некоторых градуированных кохарактеров матричной супералгебры $M^{(2,2)}(F)$ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 3. С. 306–315. DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-3-306-315, EDN: AWFIHL



Article

# Multiplicities of some graded cocharacters of the matrix superalgebra $M^{(2,2)}(F)$

**S. Yu. Antonov**[1]✉, **A. V. Antonova**[2]

[1]Kazan Innovative University, 42 Moskovskaya St., Kazan 420111, Russia

[2]Kazan State Power Engineering University, 51 Krasnoselskaya St., Kazan 420066, Russia

**Stepan Yu. Antonov**, antonovst-vm@rambler.ru, ORCID: 0000-0003-1705-3929, AuthorID: 110936

**Alina V. Antonova**, antonovakazan@rambler.ru, ORCID: 0000-0001-7047-7275, SPIN: 4476-9689, AuthorID: 279836

**Abstract.** Let $F$ be an arbitrary field of characteristic zero, and let $M^{(m,k)}(F)$ be a matrix superalgebra over $F$. It is known from the theory of algebras with polynomial identities that the superalgebra $M^{(m,k)}(F)$ has a finite basis of $Z_2$-graded identities. Therefore, the problem of describing such a basis arises naturally. At the present moment of time, there is no such description. First of all, this is due to the fact that there are no effective methods for finding the usual or $Z_2$-graded identities of a superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. Nevertheless, for some values of $m$, $k$, such identities can still be found. For this purpose, one uses either computer computations or the well-developed apparatus of the representation theory of the symmetric group $S_n$ and the general linear group $GL_p$. More precisely, to find $Z_2$-graded identities of a superalgebra $M^{m,k)}(F)$ for small values of $m, k$, one studies the sequence $\{\chi_n\}$ of characters of representations of either groups $S_r \times S_{n-r}$ or group $GL_p \times GL_p$. For each such group, one constructs a vector $F$-space in the free algebra $F\{Y \bigcup Z\}$. At the same time, with respect to the action of group $S_r \times S_{n-r}$ $(GL_p \times GL_p)$ on its vector space, it has the structure of a left $S_r \times S_{n-r}$ $(GL_p \times GL_p)$ module. However, it turns out that it is computationally preferable to work with the characters representation sequence of the group $GL_p \times GL_p$. In this paper, we study the sequence of $GL_p \times GL_p$-characters $\{\chi_n\}$ of matrix superalgebra $M^{(2,2)}(F)$. This uses the fact that between pairs of partitions $(\lambda, \mu)$, where $\lambda \vdash r$, $\mu \vdash n-r$ and irreducible $GL_p \times GL_p$-modules, there is a one-to-one correspondence. Moreover, we investigate only those multiplicities in the decomposition of the character $\chi_n$ that are associated with irreducible $GL_p \times GL_p$-modules corresponding to pairs of partitions $(\lambda, \mu)$ of the form $(0, \mu)$. It is shown that if the height $h(\mu)$ of the Young diagram $D_\mu$ for a pair $(0, \mu)$ is no more than five, then the multiplicity $m_{0,\mu}$ of the irreducible $GL_p \times GL_p$-character $\chi_n$ is different from zero.

**Keywords:** standard polynomial, superalgebra, irreducible character, Young diagram, symmetric group, general linear group

**For citation:** Antonov S. Yu., Antonova A. V. Multiplicities of some graded cocharacters of the matrix superalgebra $M^{(2,2)}(F)$. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 3, pp. 306–315 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-3-306-315, EDN: AWFIHL


## Введение

Пусть $F$ — произвольное поле характеристики нуль, $m$, $k$ — какие-нибудь натуральные числа, $M_{m+k}(F)$ — алгебра всех $(m+k)\times(m+k)$-матриц над полем $F$, $M^{(m,k)}(F) = (M_{m+k}(F), M_0^{(m,k)}(F), M_1^{(m,k)}(F))$ — матричная супералгебра, градуированная подпространствами

$$M_0^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{m\times m}(F) & 0_{m\times k} \\ 0_{k\times m} & D_{k\times k}(F) \end{pmatrix} \right\}, \quad M_1^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & B_{m\times k}(F) \\ A_{k\times m}(F) & 0_{k\times k} \end{pmatrix} \right\},$$

$n_i(m,k,F)$ — наименьшая степень ненулевых тождеств подпространства $M_i^{(m,k)}(F)$.

Одной из задач теории $PI$-алгебр является описание базиса $\mathbf{Z}_2$-градуированных тождеств супералгебры $M^{(m,k)}(F)$. В настоящее время такое описание дано лишь для супералгебр $M^{(1,1)}(F)$ и $M^{(2,1)}(F)$ (см. [1,2]). В общем случае решение этой задачи неизвестно. Тем не менее, из монографии [3] следует, что базис $\mathbf{Z}_2$-градуированных тождеств супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ конечен. В [4] доказано, что $n_1(m,k,F) = 4\min\{m,k\} - \delta_{mk} + \operatorname{sgn}|m-k|$, там же (см. также [5]) приведены соответсвующие минимальные тождества подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$. Кроме того, из теоремы Амицура–Левицкого [6] вытекает, что $n_0(m,k,F) = 2\max\{m,k\}$, а стандартный многочлен $St_{n_0}$ является минимальным тождеством подпространства $M_0^{(m,k)}(F)$. Отметим также, что в работах [7–10] найдены базисы $Z_2$-градуированных тождеств некоторых верхнетреугольных матричных супералгебр (см. также работу [11]).

На данный момент нет каких-то эффективных методов нахождения $\mathbf{Z}_2$-градуированных тождеств супералгебры $M^{(m,k)}(F)$. В некоторых случаях (см. [12]) удается найти такие тождества путем изучения последовательности $\{\bar\chi_n^{gr}(M^{(m,k)}(F))\}_{n\in\mathbf{N}}$ ее градуированных кохарактеров.

Цель данной работы — исследование последовательности $\{\bar\chi_n^{gr}(M^{(2,2)}(F))\}_{n\in\mathbf{N}}$ градуированных кохарактеров супералгебры $M^{(2,2)}(F)$. Следуя структуре работы [12], в первом разделе мы приводим необходимые сведения о некоторых модулях, которые используем в дальнейшем. Основной результат нашей работы приведен в следующем разделе.

## 1. Некоторые сведения о $\mathbf{F(GL_m \times GL_m)}$-модулях

Пусть $F$ — произвольное поле характеристики нуль, $\mathbf{Z}_2$ — группа вычетов по модулю 2, $A$ — какая-либо ассоциативная $\mathbf{Z}_2$-градуированная алгебра над $F$, $F\{X\}$ — свободная ассоциативная алгебра над $F$, порожденная счетным множеством $X = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, которое представим в виде $X = Y\bigcup Z$, где $Y = \{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $Z = \{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ и $Y\bigcap Z = \varnothing$. После чего стандартным способом (см. [13]) построим совокупность $(F_0\{X\}, F_1\{X\})$ векторных подпространств алгебры $F\{X\}$, относительно которой $F\{X\}$ будет $\mathbf{Z_2}$-градуированной алгеброй, обозначаемой символом $F\{X|\mathbf{Z_2}\}$.

Далее, положим $V_n^{\mathbf{Z}_2} = Span_F\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)} \,|\, \sigma \in S_n,\ x_i \in \{y_i, z_i\}\}$, $V_n^{\mathbf{Z}_2}(A) = V_n^{\mathbf{Z}_2}\bigcap T_2(A)$, где $T_2(A)$ — идеал $\mathbf{Z}_2$-градуированных тождеств супералгебры $A$, $S_n$ — симметрическая группа степени $n$, $n\in\mathbf{N}$. Кроме того, пусть $m\in\mathbf{N}$, $Y_m = \{y_1,\dots,y_m\}$, $Z_m = \{z_1,\dots,z_m\}$, $F\{Y_m\bigcup Z_m\}$ — подалгебра алгебры $F\{X\}$, порожденная конечным множеством $Y_m\bigcup Z_m$, $F\{Y_m\bigcup Z_m|\,\mathbf{Z_2}\}$ — $\mathbf{Z}_2$-градуированная подалгебра супералгебры $F\{X|\,\mathbf{Z}_2\}$, $F\{Y_m\bigcup Z_m\}(A) = F\{Y_m\bigcup Z_m\}\bigcap T_2(A)$, $B_m^{(n)}$ — векторное подпространство пространства $F\{Y_m\bigcup Z_m\}$, порожденное всеми полиоднородными многочленами степени $n$. Далее, пусть $B_m^{(n)}(A) = B_m^{(n)}\bigcap F\{Y_m\bigcup Z_m\}(A)$, $GL_m = GL(m,F)$ — полная линейная матричная группа, $GL_m\times GL_m$ — прямое произведение групп.

Определим левое действие группы $GL_m \times GL_m$ на элементы векторного пространства $F\{Y_m \bigcup Z_m\}$, положив для любой пары $(a,b) \in GL_m \times GL_m$, где $a=(a_{ij})$, $b=(b_{ij})$, и всякого монома $M = M(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_m) \in F\{Y_m \bigcup Z_m\}$

$$(a,b)M(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_m) = M\left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\,y_j,\ldots,\sum_{j=1}^{m} a_{mj}\,y_j,\sum_{k=1}^{m} b_{1k}z_k,\ldots,\sum_{k=1}^{m} b_{mk}z_k\right),$$

которое затем продолжим до действия групповой алгебры $F(GL_m \times GL_m)$.

Нетрудно видеть, что так определенное действие превращает векторное пространство $F\{Y_m \bigcup Z_m\}$ в левый $F(GL_m \times GL_m)$-модуль, а его векторные подпространства $B_m^{(n)}$ и $B_m^{(n)}(A)$ — в $F(GL_m \times GL_m)$-подмодули ${}_{F(GL_m\times GL_m)}B_m^{(n)}$ и ${}_{F(GL_m\times GL_m)}B_m^{(n)}(A)$ модуля ${}_{F(GL_m\times GL_m)}F\{Y_m \bigcup Z_m\}$, причем ${}_{F(GL_m\times GL_m)}B_m^{(n)}(A) \leqslant {}_{F(GL_m\times GL_m)}B_m^{(n)}$. Тогда определен фактор-модуль ${}_{F(GL_m\times GL_m)}\bar{B}_m^{(n)}(A) = {}_{F(GL_m\times GL_m)}B_m^{(n)} / {}_{F(GL_m\times GL_m)}B_m^{(n)}(A)$.

Так как модуль ${}_{F(GL_m\times GL_m)}\bar{B}_m^{(n)}(A)$ является конечномерным, то он вполне приводим. Пусть ${}_{F(GL_m\times GL_m)}N$ — какой-нибудь неприводимый $F(GL_m \times GL_m)$-подмодуль модуля ${}_{F(GL_m\times GL_m)}\bar{B}_m^{(n)}(A)$. Из теории представлений группы $GL_m \times GL_m$ известно, что существует биективное соответствие между неприводимыми $F(GL_m \times GL_m)$-модулями и парами разбиений $(\lambda,\mu)$ чисел $r$ и $n-r$ соответственно, где $r=0,1,\ldots,n$, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_q)$, $p,q \leqslant m$. Приведем соответствующее описание неприводимых $F(GL_m \times GL_m)$-модулей.

Пусть $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \vdash r$, $p \leqslant m$, $D_\lambda$ — диаграмма Юнга, отвечающая разбиению $\lambda$ с длинами столбцов $(l_1,\ldots,l_k)$, здесь $l_1 = p \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_k$, $k=\lambda_1$, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_q) \vdash (n-r)$, $q \leqslant m$, $D_\mu$ — диаграмма Юнга, отвечающая разбиению $\mu$ с длинами столбцов $(t_1,\ldots,t_b)$, где $t_1 = q \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_b$, $b=\mu_1$, $h(\mu)$ — высота диаграммы Юнга $D_\mu$, $St_h(x_1,\ldots,x_h) = \sum_{\sigma\in S_h} \operatorname{sgn}\sigma\, x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(h)}$ — стандартный многочлен. Справедливы следующие теоремы (см. [14, 15]).

**Теорема 1.** *Для любого неприводимого подмодуля ${}_{F(GL_m\times GL_m)}N_{\lambda,\mu}$ левого модуля ${}_{F(GL_m\times GL_m)}B_m^{(n)}$, соответствующего паре разбиений $(\lambda,\mu)$, справедливы следующие утверждения:*

1) *модуль ${}_{F(GL_m\times GL_m)}N_{\lambda,\mu}$ порождается некоторым ненулевым многочленом*

$$f_{\lambda,\mu} = f(y_1,\ldots,y_{l_1},z_1,\ldots,z_{t_1}) = \left(\prod_{i=1}^{k} St_{l_i}(y_1,\ldots,y_{l_i}) \prod_{j=1}^{b} St_{t_j}(z_1,\ldots,z_{t_j})\right) \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma\,\sigma,$$

*где $\alpha_\sigma \in F$, а группа $S_n$ действует на элементы векторного пространства $B_m^{(n)}$ справа, т. е. $(x_{i_1}\cdots x_{i_n})\sigma = x_{i_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots x_{i_{\sigma^{-1}(n)}}$, здесь $1 \leqslant i_1,\ldots,i_n \leqslant m$;*

2) *всякий ненулевой многочлен*

$$f_{\lambda,\mu} = f(y_1,\ldots,y_{l_1},z_1,\ldots,z_{t_1}) = \left(\prod_{i=1}^{k} St_{l_i}(y_1,\ldots,y_{l_i}) \prod_{j=1}^{b} St_{t_j}(z_1,\ldots,z_{t_j})\right) \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma\,\sigma,$$

*где $\alpha_\sigma \in F$, порождает некоторый неприводимый $F(GL_m \times GL_m)$-подмодуль ${}_{F(GL_m\times GL_m)}N_{\lambda,\mu}$ левого модуля ${}_{F(GL_m\times GL_m)}B_m^{(n)}$;*

3) *имеет место модульный изоморфизм ${}_{F(GL_m\times GL_m)}N_{\lambda,\mu} \cong {}_{FGL_m}N_\lambda \otimes_F {}_{FGL_m}N_\mu$, где ${}_{FGL_m}N_\lambda$, ${}_{FGL_m}N_\mu$ — неприводимые $FGL_m$-модули для разбиений $\lambda$ и $\mu$.*

Из этой теоремы и сказанного выше вытекает следующая теорема.

**Теорема 2.** *Для любого неприводимого $F(GL_m \times GL_m)$-подмодуля ${}_{F(GL_m \times GL_m)}N$ модуля ${}_{F(GL_m \times GL_m)}\bar{B}_m^{(n)}(A)$ справедлив изоморфизм ${}_{F(GL_m \times GL_m)}N \cong {}_{F(GL_m \times GL_m)}N_{\lambda,\mu}$, где $(\lambda,\, \mu)$ — некоторая пара разбиений чисел $r$ и $n-r$ соответственно.*

Пусть $\bar{\psi}_m^{(n)}(A)$ — характер представления группы $GL_m \times GL_m$ на левом модуле ${}_{F(GL_m \times GL_m)}\bar{B}_m^{(n)}(A)$, $\bar{\psi}_{m,\,i}^{(n)}(A)$ — характер неприводимого представления группы $GL_m \times GL_m$. Тогда в силу теоремы 2 мы можем записать, что

$$\bar{\psi}_m^{(n)}(A) = \sum_{i=1}^{k} \bar{m}_i\, \bar{\psi}_{m,\,i}^{(n)}(A) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash (n-r)}} \bar{m}_{\lambda,\,\mu}\, \bar{\psi}_{m,\,(\lambda,\,\mu)}^{(n)} = \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} \bar{m}_{\lambda,\,\mu}\, \bar{\psi}_{m,\,(\lambda,\,\mu)}^{(n)},$$

где $\bar{\psi}_{m,\,(\lambda,\,\mu)}^{(n)}$ — характер неприводимого представления группы $GL_m \times GL_m$, соответствующий паре $(\lambda,\, \mu)$, $0 \leqslant \bar{m}_{\lambda,\,\mu}$ — кратность $\bar{\psi}_{m,\,(\lambda,\,\mu)}^{(n)}$ в разложении характера $\bar{\psi}_m^{(n)}(A)$.

Пусть

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_{l_1+1} & \vdots & \vdots & a_r \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \cline{1-3} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cline{1-3} \vdots & \vdots \\ \cline{1-2} \vdots & a_{l_1+l_2} \\ \cline{1-2} \vdots \\ \cline{1-1} a_{l_1} \\ \cline{1-1} \end{array}\,, \qquad T_\mu = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline b_1 & b_{t_1+1} & \vdots & \vdots & b_{n-r} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \cline{1-3} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cline{1-3} \vdots & \vdots \\ \cline{1-2} \vdots & b_{t_1+t_2} \\ \cline{1-2} \vdots \\ \cline{1-1} b_{t_1} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad —$$

произвольные таблицы, элементы которых удовлетворяют следующим условиям:

1) $\{a_1, \ldots, a_r\}$, $\{b_1, \ldots, b_{n-r}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} = I_n$;

2) $\{a_1, \ldots, a_r\} \bigcap \{b_1, \ldots, b_{n-r}\} = \varnothing$.

Поставим в соответствие паре $(T_\lambda, T_\mu)$ подстановку

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & l_1 & \ldots & r & r+1 & r+2 & \ldots & r+t_1 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{l_1} & \ldots & a_r & b_1 & b_2 & \ldots & b_{t_1} & \ldots & b_{n-r} \end{pmatrix}$$

и рассмотрим многочлен

$$f_{T_\lambda, T_\mu} = f(y_1, \ldots, y_{l_1}, z_1, \ldots, z_{t_1}) = \left( \prod_{i=1}^{k} St_{l_i}(y_1, \ldots, y_{l_i}) \prod_{j=1}^{b} St_{t_j}(z_1, \ldots, z_{t_j}) \right) \tau.$$

Нетрудно видеть, что справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** *Кратность $\bar{m}_{\lambda,\mu}$ в разложении характера*

$$\bar{\psi}_m^{(n)}(A) = \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} \bar{m}_{\lambda,\mu}\, \bar{\psi}_{m,(\lambda,\mu)}^{(n)}$$

*супералгебры $A$ тогда и только тогда не равна нулю, когда существует такая пара таблиц $(T_\lambda, T_\mu)$, для которой многочлен $f_{T_\lambda, T_\mu}$ не является $\mathbf{Z}_2$-градуированным тождеством супералгебры $A$.*

## 2. О градуированных кохарактерах супералгебры $\mathbf{M}^{(2,2)}(\mathbf{F})$

Пусть $A = M^{(2,2)}(F) = (M_4(F), M_0^{(2,2)}(F), M_1^{(2,2)}(F))$ — матричная супералгебра. Поскольку $\dim M_0^{(2,2)}(F) = 8$, $\dim M_1^{(2,2)}(F) = 8$, то в силу работы [14] мы можем записать, что

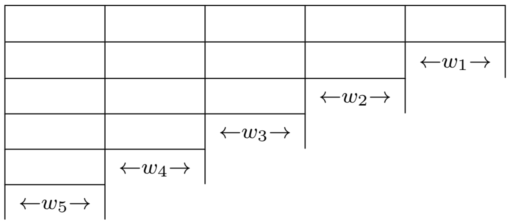
$$\bar{\psi}_m^{(n)}(M^{(2,2)}(F)) = \sum_{\substack{|\lambda|+|\mu|=n,\\ h(\lambda)\leqslant 8, h(\mu)\leqslant 8}} \bar{m}_{\lambda,\mu}\, \bar{\psi}_{m,(\lambda,\mu)}^{(n)}.$$

В данной статье рассмотрен случай, когда $(\lambda,\mu) = (0,\mu)$, $h(\mu) \leqslant 5$, где $\mu$ — произвольное разбиение числа $n$, имеющее вид

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5) = \left(\sum_{i=1}^{5} w_i, \sum_{i=2}^{5} w_i, \sum_{i=3}^{5} w_i, \sum_{i=4}^{5} w_i, w_5\right).$$

Здесь $w_5 = \mu_5 \geqslant 0$, $w_i = \mu_i - \mu_{i+1} \geqslant 0$ для $i = \overline{1,4}$ (в терминах диаграмм Юнга целое число $w_i$ означает количество столбцов высоты $i$ ($i \in I_5$) в диаграмме $D_\mu$, разбиения $\mu$). Тогда соответствующая разбиению $\mu$ диаграмма $D_\mu$ имеет вид

$$D_\mu =$$




Пусть $e_{11}, \ldots, e_{44}$ — матричные единицы алгебры $M_4(F)$, $N_1 = e_{13} + e_{31}$, $N_2 = e_{31} + e_{32}$, $N_3 = e_{32} + e_{23}$, $N_4 = e_{23}$, $N_5 = \alpha_{13}e_{13} + \alpha_{23}e_{23} + \alpha_{31}e_{31} + \alpha_{32}e_{32} + \alpha_{14}e_{14} + \alpha_{24}e_{24} + \alpha_{41}e_{41} + {} + \alpha_{42}e_{42}$, где $\alpha_{13}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{42}$ — произвольные ненулевые элементы поля $F$. Непосредственно проверяется справедливость следующих двух лемм.

**Лемма 1.** *Для любого числа* $w_1 \in \mathbf{N}$ *справедливы равенства*

$$St_1^{w_1}(N_1) = N_1^{w_1} = \begin{cases} e_{13} + e_{31}, & \text{если } w_1 = 2k-1,\ k \in \mathbf{N}, \\ e_{11} + e_{33}, & \text{если } w_1 = 2k,\ k \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

**Лемма 2.** *Для любого числа* $w_2 \in \mathbf{N}$ *справедливо равенство*

$$St_2^{w_2}(N_1, N_2) = e_{11} + e_{12} + (-1)^{w_2} e_{33}.$$

**Лемма 3.** *Для любого числа* $w_3 \in \mathbf{N}$ *справедливы равенства*

$$St_3^{w_3}(N_1, N_2, N_3) = \begin{cases} 2^{(w_3-1)/2}(N_1 - N_3), & \text{если } w_3 = 2k-1,\ k \in \mathbf{N}, \\ 2^{(w_3-2)/2}U, & \text{если } w_3 = 2k,\ k \in \mathbf{N}, \end{cases} \tag{1}$$

*где* $U = e_{11} - e_{12} - e_{21} + e_{22} + 2e_{33}$, $N_1 - N_3 = e_{13} + e_{31} - e_{23} - e_{32}$.

**Доказательство.** Для каждой подстановки $\sigma \in S_3$ найдем произведение $N_{\sigma(1)}N_{\sigma(2)} \times {} \times N_{\sigma(3)}$. Выписывая только индексы и опуская букву $N$, будем иметь:

$$123 = (e_{13} + e_{31})(e_{31} + e_{32})(e_{32} + e_{23}) = (e_{13} + e_{31})e_{33} = e_{13}; \tag{2}$$

$$132 = (e_{13} + e_{31})(e_{32} + e_{23})(e_{31} + e_{32}) = e_{12}(e_{31} + e_{32}) = 0; \tag{3}$$

$$231 = (e_{31} + e_{32})(e_{32} + e_{23})(e_{13} + e_{31}) = e_{33}(e_{13} + e_{31}) = e_{31}; \tag{4}$$

$$213 = (e_{31} + e_{32})(e_{13} + e_{31})(e_{32} + e_{23}) = e_{33}(e_{32} + e_{23}) = e_{32}; \tag{5}$$

$$312 = (e_{32} + e_{23})(e_{13} + e_{31})(e_{31} + e_{32}) = e_{21}(e_{31} + e_{32}) = 0; \tag{6}$$
$$321 = (e_{32} + e_{23})(e_{31} + e_{32})(e_{13} + e_{31}) = (e_{32} + e_{23})e_{33} = e_{23}. \tag{7}$$

Из равенств (2)–(7) следует, что $St_3(N_1, N_2, N_3) = e_{13} + e_{31} - e_{32} - e_{23} = N_1 - N_3$.

Далее последовательно находим

$$St_3^2(N_1, N_2, N_3) = (e_{13} + e_{31} - e_{32} - e_{23})(e_{13} + e_{31} - e_{32} - e_{23}) =$$
$$= e_{11} - e_{12} + e_{33} + e_{33} - e_{21} + e_{22} = e_{11} - e_{12} - e_{21} + e_{22} + 2e_{33} = U; \tag{8}$$
$$St_3^3(N_1, N_2, N_3) = U \cdot St_3(N_1, N_2, N_3) = (e_{11} - e_{12} - e_{21} + e_{22} + 2e_{33})(e_{13} + e_{31} - e_{32} - e_{23}) =$$
$$= 2(e_{13} + e_{31} - e_{23} - e_{32}) = 2St_3(N_1, N_2, N_3); \tag{9}$$
$$St_3^4(N_1, N_2, N_3) = 2St_3^2(N_1, N_2, N_3) = 2U; \tag{10}$$
$$St_3^5(N_1, N_2, N_3) = 2USt_3(N_1, N_2, N_3) = 4St_3(N_1, N_2, N_3). \tag{11}$$

Из равенств (8)–(11) по индукции получаем равенства (1). □

**Лемма 4.** *Для любого числа* $w_4 \in \mathbf{N}$ *справедливо равенство*

$$St_4^{w_4}(N_1, N_2, N_3, N_4) = e_{11} + e_{22} + (-2)^{w_4} e_{33}.$$

**Доказательство.** Для каждой подстановки $\sigma \in S_4$ найдем произведение $N_{\sigma(1)} N_{\sigma(2)} \times \times N_{\sigma(3)} N_{\sigma(4)}$. Выписывая только нижние индексы у этого произведения и учитывая равенства (2)–(7), будем иметь:

$$1234 = e_{13}e_{23} = 0;$$
$$1243 = (e_{13} + e_{31})(e_{31} + e_{32})e_{23}(e_{32} + e_{23}) = (e_{11} + e_{12})e_{22} = e_{12};$$
$$1324 = 0;$$
$$1423 = (e_{13} + e_{31})e_{23}(e_{31} + e_{32})(e_{32} + e_{23}) = 0;$$
$$1342 = (e_{13} + e_{31})(e_{32} + e_{23})e_{23}(e_{31} + e_{32}) = e_{12}(e_{21} + e_{22}) = e_{11} + e_{12};$$
$$1432 = (e_{13} + e_{31})e_{23}(e_{32} + e_{23})(e_{31} + e_{32}) = 0;$$
$$2314 = e_{31}e_{23} = 0;$$
$$2341 = (e_{31} + e_{32})(e_{32} + e_{23})e_{23}(e_{13} + e_{31}) = e_{33}e_{21} = 0;$$
$$2134 = e_{32}e_{23} = e_{33};$$
$$2143 = (e_{31} + e_{32})(e_{13} + e_{31})e_{23}(e_{32} + e_{23}) = 0;$$
$$2413 = (e_{31} + e_{32})e_{23}(e_{13} + e_{31})(e_{32} + e_{23}) = e_{33}e_{12} = 0;$$
$$2431 = (e_{31} + e_{32})e_{23}(e_{32} + e_{23})(e_{13} + e_{31}) = e_{33}e_{21} = 0;$$
$$3124 = 0;$$
$$3142 = (e_{32} + e_{23})(e_{13} + e_{31})e_{23}(e_{31} + e_{32}) = 0;$$
$$3214 = e_{23}e_{23} = 0;$$
$$3241 = (e_{32} + e_{23})(e_{31} + e_{32})e_{23}(e_{13} + e_{31}) = (e_{21} + e_{22})e_{21} = e_{21};$$
$$3421 = (e_{32} + e_{23})e_{23}(e_{31} + e_{32})(e_{13} + e_{31}) = e_{33}e_{33} = e_{33};$$
$$3412 = (e_{32} + e_{23})e_{23}(e_{13} + e_{31})(e_{31} + e_{32}) = e_{33}(e_{11} + e_{12}) = 0;$$
$$4123 = e_{23}e_{13} = 0;$$
$$4132 = 0;$$
$$4231 = e_{23}e_{31} = e_{21};$$
$$4213 = e_{23}e_{32} = e_{22};$$
$$4312 = 0;$$
$$4321 = e_{23}e_{23} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$St_4(N_1, N_2, N_3, N_4) = -e_{12} + e_{11} + e_{12} - e_{33} + e_{21} - e_{33} - e_{21} + e_{22} = e_{11} + e_{22} - 2e_{33}.$$

Далее последовательно находим

$$St_4^2(N_1, N_2, N_3, N_4) = (e_{11} + e_{22} - 2e_{33})(e_{11} + e_{22} - 2e_{33}) = e_{11} + e_{22} + 4e_{33}; \quad (12)$$
$$St_4^3(N_1, N_2, N_3, N_4) = (e_{11} + e_{22} + 4e_{33})(e_{11} + e_{22} - 2e_{33}) = e_{11} + e_{22} - 8e_{33}. \quad (13)$$

Из (12), (13) заключаем, что

$$St_4^{w_4}(N_1, N_2, N_3, N_4) = e_{11} + e_{22} + (-2)^{w_4} e_{33}.$$ □

По аналогии с леммой 4 доказывается следующая лемма.

**Лемма 5.** *Справедливы равенства:*

$$N_1 St_4(\bar{N}_{\hat{1}}) = 2\alpha_{13}e_{13} + \alpha_{14}e_{14} - \alpha_{13}e_{31};$$
$$N_2 St_4(\bar{N}_{\hat{2}}) = (\alpha_{31} - \alpha_{13})e_{31} + (\alpha_{31} - \alpha_{13})e_{32};$$
$$N_3 St_4(\bar{N}_{\hat{3}}) = (\alpha_{31} - \alpha_{13} - \alpha_{32})e_{32} + 2(\alpha_{13} - \alpha_{31} + \alpha_{32})e_{23} + \alpha_{14}e_{24};$$
$$N_4 St_4(\bar{N}_{\hat{4}}) = 2(\alpha_{13} + \alpha_{32} - \alpha_{23} - \alpha_{31})e_{23} + (\alpha_{14} - \alpha_{24})e_{24};$$
$$N_5 St_4(\bar{N}_{\hat{5}}) = -2\alpha_{13}e_{13} - 2\alpha_{23}e_{23} + \alpha_{31}e_{31} + \alpha_{32}e_{32} + \alpha_{41}e_{41} + \alpha_{42}e_{42},$$

*где* $\bar{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5)$, *а* $\bar{N}_{\hat{i}}$ *означает, что индекс* $i$ *в* $\bar{N}$ *пропущен.*

**Лемма 6.** *Справедливо равенство*

$$St_5(\bar{N}) = \alpha_{14}e_{14} + \alpha_{24}e_{24} + \alpha_{41}e_{41} + \alpha_{42}e_{42}.$$

**Доказательство.** Учитывая лемму 5 и свойства стандартного многочлена, получаем

$$St_5(\bar{N}) = \sum_{i=1}^{5}(-1)^{i+1} N_i St_4(\bar{N}_{\hat{i}}) = 2\alpha_{13}e_{13} + \alpha_{14}e_{14} - \alpha_{13}e_{31} - (\alpha_{31} - \alpha_{13})e_{31} -$$
$$-(\alpha_{31} - \alpha_{13})e_{32} + (\alpha_{31} - \alpha_{13} - \alpha_{32})e_{32} + 2(\alpha_{13} - \alpha_{31} + \alpha_{32})e_{23} + \alpha_{14}e_{24} -$$
$$-2(\alpha_{13} + \alpha_{32} - \alpha_{23} - \alpha_{31})e_{23} - (\alpha_{14} - \alpha_{24})e_{24} - 2\alpha_{13}e_{13} - 2\alpha_{23}e_{23} + \alpha_{31}e_{31} +$$
$$+\alpha_{32}e_{32} + \alpha_{41}e_{41} + \alpha_{42}e_{42} = \alpha_{14}e_{14} - (\alpha_{13} + \alpha_{31} - \alpha_{13} - \alpha_{31})e_{31} +$$
$$+(\alpha_{31} - \alpha_{13} - \alpha_{32} - \alpha_{31} + \alpha_{13} + \alpha_{32})e_{32} +$$
$$+(2\alpha_{13} - 2\alpha_{31} + 2\alpha_{32} - 2\alpha_{13} - 2\alpha_{32} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} - 2\alpha_{23})e_{23} +$$
$$+\alpha_{24}e_{24} + \alpha_{41}e_{41} + \alpha_{42}e_{42} = \alpha_{14}e_{14} + \alpha_{24}e_{24} + \alpha_{41}e_{41} + \alpha_{42}e_{42}.$$

□

**Следствие 1.** *При* $\alpha_{14} = \alpha_{24} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = 1$ *верно равенство*

$$St_5(\bar{N}) = e_{14} + e_{24} + e_{41} + e_{42}.$$

**Лемма 7.** *Для любого числа* $w_5 \in \mathbf{N}$ *справедливы равенства*

$$St_5^{w_5}(\bar{N}) = \begin{cases} 2^{(w_5-1)/2} N_5, & \text{если } w_5 = 2k-1,\ k \in \mathbf{N}, \\ 2^{(w_5-2)/2} M_0, & \text{если } w_5 = 2k,\ k \in \mathbf{N}, \end{cases} \quad (14)$$

*где* $N_5 = e_{14} + e_{24} + e_{41} + e_{42}$, $M_0 = e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22} + 2e_{44}$.

**Доказательство.** Учитывая лемму 6 и следствие 1, получаем

$$St_5^2(\bar{N}) = (e_{14}+e_{24}+e_{41}+e_{42})(e_{14}+e_{24}+e_{41}+e_{42}) = e_{11}+e_{12}+e_{21}+e_{22}+e_{44}+e_{44} = M_0;$$

$$St_5^3(\bar{N}) = M_0 St_5(\bar{N}) = (e_{11}+e_{12}+e_{21}+e_{22}+2e_{44})(e_{14}+e_{24}+e_{41}+e_{42}) =$$
$$= 2(e_{14}+e_{24}+e_{41}+e_{42}) = 2St_5(\bar{N}) = 2N_5;$$
$$St_5^4(\bar{N}) = 2St_5^2(\bar{N}) = 2M_0.$$

Отсюда методом индукции приходим к равенствам (14). □

**Лемма 8.** *Для произвольного разбиения $\mu$ числа $n$ такого, что $h(\mu) \leqslant 5$, и любых $w_1, \ldots, w_{h(\mu)} \in \mathbf{N}_0$ справедливо неравенство $f_{D^*_\mu}(N_1, \ldots, N_{h(\mu)}) \neq 0$.*

**Доказательство.** Учитывая леммы 1–3, 7 и полагая $St_i^{w_i}(N_1, \ldots, N_i) = 1$ при $w_i = 0$, нетрудно видеть, что

$$f_{D^*_\mu}(N_1, \ldots, N_{h(\mu)}) = \prod_{i=h(\mu)}^{1} St_i^{w_i}(N_1, \ldots, N_i) \neq 0.$$

□

**Теорема 3.** *В разложении $\bar{\psi}_m^{(n)}(M^{(2,2)}(F)) = \sum_{\substack{|\lambda|+|\mu|=n,\\ h(\lambda)\leqslant 8, h(\mu)\leqslant 8}} \bar{m}_{\lambda,\mu}\, \bar{\psi}^{(n)}_{m,(\lambda,\mu)}$ кратность $\bar{m}_{0,\mu} \neq 0$ для всякого $\mu \vdash n$ такого, что $h(\mu) \leqslant 5$.*

**Доказательство.** Вытекает из леммы 8 и утверждения 1. □

## Список литературы


1. *Di Vincenzo O. M.* On the graded identities of $M_{1,1}(E)$ // Israel Journal of Mathematics. 1992. Vol. 80, iss. 3. P. 323–335. DOI: 10.1007/BF02808074
2. *Аверьянов И. В.* Базис градуированных тождеств супералгебры $M_{1,2}(F)$ // Математические заметки. 2009. Т. 85, вып. 4. С. 483–501. DOI: 10.4213/mzm4298, EDN: RLRASB
3. *Kemer A. R.* Ideals of identities of associative algebras. Providence, RI : American Mathematical Society, 1991. 81 p. (Translations of Mathematical Monographs, vol. 87).
4. *Антонов С. Ю.* Наименьшая степень тождеств подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 11. С. 3–19. EDN: PCOHZL
5. *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* О квазимногочленах Капелли III // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 142–150. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150, EDN: HMVRSQ
6. *Amitsur A. S., Levitzki J.* Minimal identities for algebras // Proceedings of the American Mathematical Society. 1950. Vol. 1, iss. 4. P. 449–463. DOI: 10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9
7. *Di Vincenzo O. M., Drensky V.* The basis of the graded polynomial identities for superalgebras of triangular matrices // Communications in Algebra. 1996. Vol. 24, iss. 2. P. 727–735. DOI: 10.1080/00927879608825595
8. *Centrone L., Silva V. R. T.* On $Z_2$-graded identities of $UT_2(E)$ and their growth // Linear Algebra and its Applications. 2015. Vol. 471. P. 469–499. DOI: 10.1016/j.laa.2014.12.035
9. *Giambruno A., La Mattina D., Misso P.* Polynomial identities on superalgebras: Classifying linear growth // Journal of Pure and Applied Algebra. 2006. Vol. 207, iss. 1. P. 215–240. DOI: 10.1016/j.jpaa.2005.09.006
10. *Valenti A.* The graded identities of upper triangular matrices of size two // Journal of Pure and Applied Algebra. 2002. Vol. 172, iss. 2–3. P. 325–335. DOI: 10.1016/S0022-4049(01)00169-4
11. *Di Vincenzo O. M.* $Z_2$-graded polynomial identities for superalgebras of block-triangular matrices // Serdica Mathematical Journal. 2004. Vol. 30. P. 111–134.
12. *La Mattina D.* On the graded identities and cocharacters of the algebra of $3 \times 3$ matrices // Linear Algebra and its Applications. 2004. Vol. 384. P. 55–75. DOI: 10.1016/S0024-3795(04)00034-5, EDN: LAUZWJ

13. *Giambruno A., Zaicev M.* Polynomial identities and asymptotic methods. Providence, RI : American Mathematical Society, 2005. 352 p. (AMS Mathematical Surveys and Monographs, vol. 122).
14. *Drensky V., Giambruno A.* Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for $2 \times 2$ matrices with involution // Canadian Journal of Mathematics. 1994. Vol. 46, iss. 4. P. 718–733. DOI: 10.4153/CJM-1994-040-6
15. *Giambruno A.* $GL \times GL$-representations and $*$-polynomial identities // Communications in Algebra. 1986. Vol. 14, iss. 5. P. 787–796. DOI: 10.1080/00927878608823335

## References

1. Di Vincenzo O. M. On the graded identities of $M_{1,1}(E)$. *Israel Journal of Mathematics*, 1992, vol. 80, iss. 3, pp. 323–335. DOI: 10.1007/BF02808074
2. Aver'yanov I. V. Basis of graded identities of the superalgebra $M_{1,2}(F)$. *Mathematical Notes*, 2009, vol. 85, iss. 3-4, pp. 467–483. DOI: 10.1134/S0001434609030195, EDN: MWWJGX
3. Kemer A. R. *Ideals of identities of associative algebras*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 87. Providence, RI, American Mathematical Society, 1991. 81 p.
4. Antonov S. Yu. The least degree of identities in the subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ of the matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, iss. 11, pp. 1–16. DOI: 10.3103/S1066369X12110011, EDN: RGLOQZ
5. Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-polynomials of Capelli. III. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 142—150 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150, EDN: HMVRSQ
6. Amitsur A. S., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1950, vol. 1, iss. 4, pp. 449–463. DOI: 10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9
7. Di Vincenzo O. M., Drensky V. The basis of the graded polynomial identities for superalgebras of triangular matrices. *Communications in Algebra*, 1996, vol. 24, iss. 2, pp. 727–735. DOI: 10.1080/00927879608825595
8. Centrone L., Silva V. R. T. On $Z_2$-graded identities of $UT_2(E)$ and their growth. *Linear Algebra and its Applications*, 2015, vol. 471, pp. 469–499. DOI: 10.1016/j.laa.2014.12.035
9. Giambruno A., La Mattina D., Misso P. Polynomial identities on superalgebras: Classifying linear growth. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2006, vol. 207, iss. 1, pp. 215–240. DOI: 10.1016/j.jpaa.2005.09.006
10. Valenti A. The graded identities of upper triangular matrices of size two. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2002, vol. 172, iss. 2–3, pp. 325–335. DOI: 10.1016/S0022-4049(01)00169-4
11. Di Vincenzo O. M. $Z_2$-graded polynomial identities for superalgebras of block-triangular matrices. *Serdica Mathematical Journal*, 2004, vol. 30, pp. 111–134.
12. La Mattina D. On the graded identities and cocharacters of the algebra of $3 \times 3$ matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 2004, vol. 384, pp. 55–75. DOI: 10.1016/S0024-3795(04)00034-5, EDN: LAUZWJ
13. Giambruno A., Zaicev M. *Polynomial identities and asymptotic methods*. AMS Mathematical Surveys and Monographs, vol. 122. Providence, RI, American Mathematical Society, 2005. 352 p.
14. Drensky V., Giambruno A. Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for $2 \times 2$ matrices with involution. *Canadian Journal of Mathematics*, 1994, vol. 46, iss. 4, pp. 718–733. DOI: 10.4153/CJM-1994-040-6
15. Giambruno A. $GL \times GL$-representations and $*$-polynomial identities. *Communications in Algebra*, 1986, vol. 14, iss. 5, pp. 787–796. DOI: 10.1080/00927878608823335

Поступила в редакцию / Received 17.11.2024
Принята к публикации / Accepted 19.03.2025
Опубликована / Published 29.08.2025