Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 128–139
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 128–139
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-128-139, EDN: ULANGK

Научная статья
УДК 517.98

Метод формирования оптимальной маршрутной матрицы сетей массового обслуживания с групповым обслуживанием требований

Н. В. Сергеева[1]✉, М. Пагано[2], И. Е. Тананко[1], Е. П. Станкевич[1]

[1]Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83
[2]Пизанский университет, Италия, 56122, г. Пиза, ул. Дж. Карузо, д. 16

Сергеева Надежда Викторовна, старший преподаватель кафедры системного анализа и автоматического управления, sergeevanv@info.sgu.ru, https://orcid.org/0000-0001-6125-7078, SPIN: 3960-0429, AuthorID: 785093

Пагано Микеле, PhD, профессор департамента информационной инженерии, michele.pagano@unipi.it, https://orcid.org/0000-0003-1706-4994

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой системного анализа и автоматического управления, tanankoie@info.sgu.ru, https://orcid.org/0000-0001-8960-9709, SPIN: 8132-3706, AuthorID: 447915

Станкевич Елена Петровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления, stankevichelena@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-0630-4550, SPIN: 4119-6338, AuthorID: 684128

Аннотация. Рассматривается открытая сеть массового обслуживания большой размерности. В сеть обслуживания из источника поступает пуассоновский поток требований одного класса. Связь между системами сети массового обслуживания определяется маршрутной матрицей. Каждая система сети состоит из одного прибора и очереди бесконечной длины. Прибор обслуживает требования только группами заданного размера. Длительность обслуживания группы требований является экспоненциально распределенной случайной величиной. После окончания обслуживания требования из обслуженной группы маршрутизируются между системами обслуживания по одному независимо друг от друга. Сеть обслуживания построена таким образом, что число систем обслуживания, в которые могут перейти требования после обслуживания группы требований, намного больше размера этой группы. Предполагается, что вероятности переходов требований между системами сети обслуживания сравнимы. Предлагается метод формирования оптимальной маршрутной матрицы, которая обеспечивает минимальные значения математических ожиданий длительностей пребывания требований в системах сети обслуживания. Приводятся условие для относительных интенсивностей потоков, при котором топология сети массового обслуживания является радиальной (звездообразной), и выражения для вычисления оптимальных интенсивностей входящих потоков требований в системы сети обслуживания. Приведены примеры формирования оптимальной маршрутной матрицы и применения предложенного метода формирования маршрутной матрицы для коррекции потоков в сети массового обслуживания с изменяющимся числом связей между системами сети обслуживания.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, групповое обслуживание, оптимальная маршрутная матрица

Благодарности: Данное исследование частично финансировалось Министерством образования и исследований Италии (MIUR) в рамках проекта FoReLab (Departments of Excellence) и Пизанским университетом в рамках проекта PRA_2022_64 “hOlistic Sustainable Management of distributed softWARE systems (OSMWARE)”.

Для цитирования: *Сергеева Н. В., Пагано М., Тананко И. Е., Станкевич Е. П.* Метод формирования оптимальной маршрутной матрицы сетей массового обслуживания с групповым обслуживанием требований // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 128–139. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-128-139, EDN: ULANGK

Article

A novel method for generating the optimal routing matrix of queuing networks with batch service

N. V. Sergeeva[1]✉, M. Pagano[2], I. E. Tananko[1], E. P. Stankevich[1]

[1]Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

[2]University of Pisa, Via G. Caruso 16, 56122 Pisa, Italy

Nadezhda V. Sergeeva, sergeevanv@info.sgu.ru, https://orcid.org/0000-0001-6125-7078, SPIN: 3960-0429, AuthorID: 785093

Michele Pagano, michele.pagano@unipi.it, https://orcid.org/0000-0003-1706-4994,

Igor E. Tananko,tanankoie@info.sgu.ru, https://orcid.org/0000-0001-8960-9709, SPIN: 8132-3706, AuthorID: 447915

Elena P. Stankevich, stankevichelena@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-0630-4550, SPIN: 4119-6338, AuthorID: 684128

Abstract. In this paper, we consider a large-scale open queuing network. The arrival process in the queueing network is Poissonian. Customer transitions between nodes are described by the routing matrix. Each node consists of a single server and an infinite waiting queue. Customers are served as a unique batch of a given size with exponentially distributed service time. After the completion of service, customers are routed between nodes one at a time, independently of each other. We assume that, at any node, the number of destinations is much larger than the batch size. We also assume that the transition probabilities of customers between nodes are comparable. In this paper, we propose a method for generating the optimal routing matrix that provides the minimum average sojourn times in each node. We also provide a condition for relative arrival rates, under which the queuing network topology is radial (star-shaped), and expressions for optimal input rates to nodes. Finally, examples of the optimal routing matrix for different values of the overall input rate and in case of link failures are presented.

Keywords: queuing networks, batch service, optimal routing matrix

Acknowledgements: This research was partially funded by the Italian Ministry of Education and Research (MIUR) in the framework of the FoReLab project (Departments of Excellence) and by the University of Pisa in the framework of the PRA_2022_64 "hOlistic Sustainable Management of distributed softWARE systems (OSMWARE)" project.

For citation: Sergeeva N. V., Pagano M., Tananko I. E., Stankevich E. P. A novel method for generating the optimal routing matrix of queuing networks with batch service. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 128–139 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-128-139, EDN: ULANGK

Введение

Сети массового обслуживания [1–3] часто используются в качестве математических моделей систем передачи данных, информационно-вычислительных систем, систем распределенной информации, производственных, транспортных и многих других систем.

Для решения задач оптимизации и управления этими системами могут быть использованы системы и сети массового обслуживания с управлением [4–6].

В настоящее время все более широкое распространение получают системы с групповой обработкой, что позволяет обслуживать существенно больше объектов в единицу времени. При этом возникают задачи определения оптимального количества обрабатываемых объектов, оптимального времени пребывания объектов в системе, а также оптимальной загрузки системы [7–12]. Если система имеет сетевую структуру, то сложность задач анализа, управления и оптимизации многократно возрастает [13–18].

Задачи минимизации математического ожидания длительности пребывания требований в системе решены в [7, 9, 14, 18]. В работе [7] рассматривается задача формирования групп требований со сравнимыми длительностями обработки таким образом, чтобы минимизировать математическое ожидание длительности пребывания требований в системе с одним прибором и с групповым обслуживанием на долгосрочном интервале времени. Предполагается, что распределение длительности обслуживания всей группы равно распределению, полученному для требования с наибольшим математическим ожиданием длительности обслуживания в группе. Для тандемной сети массового обслуживания [14], используемой в качестве модели беспроводной сенсорной сети, определена оптимальная стратегия распределения интенсивностей обслуживания среди систем, которая минимизирует математическое ожидание длительности пребывания требований в сети обслуживания. Авторы [9] для модели последовательности станций транспортной системы с детерминированным потоком транспортных средств, перевозящих группы пассажиров между станциями, и пуассоновским входящим потоком пассажиров на станции показали, что сокращение времени пребывания пассажиров во всей системе возможно только за счет увеличения коэффициента использования предшествующей станции по сравнению с текущей станцией. В работе [18] для замкнутой сети массового обслуживания с несколькими параллельными системами, двумя классами требований и групповым обслуживанием определено выражение для оптимального размера обслуживаемых групп, при котором достигается максимум пропускной способности рассматриваемой сети обслуживания.

Поиску оптимального размера обслуживаемых групп требований посвящены работы [10, 12, 13]. В работе [13] с использованием анализа сетей массового обслуживания и генетического алгоритма решена задача оптимизации производственной системы, а именно, найден оптимальный размер партий. В [10] для однοприборной системы массового обслуживания с групповым обслуживанием получено необходимое и достаточное условие оптимального ограничения на размер группы обслуживаемых требований, которое минимизирует математическое ожидание длительности пребывания требований в очереди, и предлагается алгоритм поиска оптимального ограничения на размер группы обслуживаемых требований за полиномиальное время. В работе [12] для системы с групповым обслуживанием решается задача нахождения оптимального размера обслуживаемой группы требований, при которой эксплуатационные расходы системы минимальны.

Существенное влияние на характеристики систем массового обслуживания оказывают дисциплины группирования и обслуживания требований [11, 15]. Например, в [15] рассматривается система обслуживания, состоящая из параллельных очередей и одного прибора. Требования разных классов не могут одновременно обслуживаться в одной группе и ожидать обслуживания в одной очереди. Определяются стратегия выбора на обслуживание групп требований, которая максимизирует среднюю пропускную способность системы для случая бесконечного размера очередей и стратегия, которая минимизирует средние потери требований для случая ограниченного размера очередей. В работе [11] изучается стратегия присоединения требований к формируемой для обслуживания группе фиксированного размера в системе массового обслуживания с одним прибором и пуассоновским входящим потоком. Решение о том, присоединяться к группе или нет, зависит от размера вознаграждения требованию за присоединение и от затрат на его пребывание в очереди.

Другие задачи оптимизации систем и сетей массового обслуживания с групповым обслуживанием требований приведены в [16, 17]. В работе [16] автоматизированная система обработки материалов моделируется открытой тандемной сетью массового обслуживания с блокировками. Предлагается итерационный алгоритм минимизации общего числа мест ожидания в очередях систем обслуживания при средней длительности пребывания групп требований в сети не выше заданного значения. В работе [17] представлена модель оценки производительности предприятия по производству полупроводников в виде сети массового обслуживания с учетом конкретной конфигурации предприятия. Построена процедура оптимизации для поиска наилучшей конфигурации.

Данная работа основана на результатах, полученных в работах [19–21], и состоит из четырех разделов. В первом разделе приведено описание структуры и функционирования сети массового обслуживания с групповым обслуживанием. Во втором разделе описан метод вычисления стационарного распределения вероятностей состояний рассматриваемой сети с групповым обслуживанием, которое эквивалентно стационарному распределению процесса размножения и гибели. Также приведены выражения для вычисления математического ожидания длительностей пребывания требований в системах, оптимальных интенсивностей входящих потоков требований и относительных интенсивностей потоков. В третьем разделе предложен метод формирования оптимальных маршрутных матриц, при которых математическое ожидание длительностей пребывания требований в системах минимально. В четвертом разделе приведены результаты численных экспериментов.

1. Описание сети массового обслуживания

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с одним классом требований и непрерывным временем, состоящая из L однориборных систем массового обслуживания S_i, $i = 1, ..., L$, с очередью бесконечной длины. Входящий в сеть обслуживания из источника S_0 поток требований является пуассоновским с интенсивностью λ_0. Связи между системами сети массового обслуживания и источником определяются матрицей смежности $W = (w_{ij})$, $i, j = 0, 1, ..., L$, в которой $w_{ij} = 1$, если имеется связь из S_i в S_j, и $w_{ij} = 0$, если такой связи нет. Матрице W поставим в соответствие множество Θ^a маршрутных матриц $\Theta = (\theta_{ij})$, таких, что $\theta_{ij} \geqslant 0$, если $w_{ij} = 1$, и $\theta_{ij} = 0$, если $w_{ij} = 0$, $i, j = 0, 1, ...L$, с условием $\sum\limits_{j=0}^{L} \theta_{ij} = 1$ для всех $i = 0, 1, ..., L$.

Прибор системы S_i, $i = 1, ..., L$, обслуживает требования группами размером $b_i \geqslant 0$. Длительность обслуживания группы является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром μ_i. Прибор начинает обслуживать группу требований только в том случае, если в очереди системы S_i находится как минимум b_i требований, иначе прибор этой системы будет простаивать до тех пор, пока в очередь не поступит, по крайней мере, b_i требований. После завершения обслуживания в системе S_i каждое требование независимо от остальных требований группы переходит в систему S_j с вероятностью θ_{ij} или в источник S_0 с вероятностью θ_{i0}, $i, j = 1, ..., L$.

Полагаем, что в каждой системе S_i сети размер обслуживаемой группы требований b_i значительно меньше числа систем S_j, в которые могут перейти требования после завершения обслуживания в системе S_i, а также что вероятности переходов требований в смежные системы сравнимы. Следовательно, одновременное поступление двух или более требований в систему имеет вероятность, близкую к нулю, поэтому входящий поток в каждую систему обслуживания аппроксимируем пуассоновским потоком требований с интенсивностью, зависящей от λ_0 и маршрутной матрицы Θ.

Состояние сети обслуживания обозначим $s = (s_i)$, где s_i — число требований, находящихся в системе S_i, $i = 1, ..., L$. Обозначим также $\overline{u} = (\overline{u}_i)$, где $\overline{u}_i$ — математическое ожидание длительности пребывания требований в системе S_i, $i = 1, ..., L$.

Целью данной работы является разработка алгоритма формирования маршрутной матрицы, которая обеспечивает минимальные значения математического ожидания длительностей пребывания требований в системах сети обслуживания.

2. Анализ сети массового обслуживания с групповым обслуживанием

В данной постановке сеть массового обслуживания будем рассматривать как сеть Джексона. Потоки требований в системы обслуживания этой сети определим из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\lambda_j = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{L} \lambda_i \theta_{ij}, \quad j = 1, \dots, L.$$

Далее отдельно рассмотрим систему обслуживания S_i, $i = 1, ..., L$, с интенсивностью потока λ_i, интенсивностью обслуживания μ_i групп требований, размером b_i.

Уравнения равновесия будут иметь вид [21]

$$\begin{cases} \lambda_i \pi_i(0) = \mu_i \pi_i(b_i), & \\ \lambda_i \pi_i(n) = \lambda_i \pi_i(n-1) + \mu_i \pi_i(b_i + n), & 1 \leqslant n \leqslant b_i - 1, \\ (\lambda_i + \mu_i)\pi_i(n) = \lambda_i \pi_i(n-1) + \mu_i \pi_i(b_i + n), & n \geqslant b_i, \end{cases} \tag{1}$$

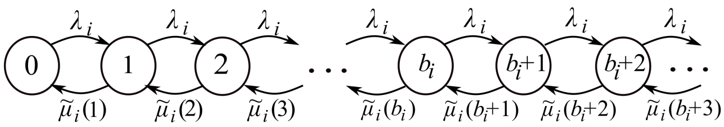
где $\pi_i(n)$ — стационарные вероятности состояний.

Коэффициент использования системы S_i определяется выражением

$$\psi_i = \frac{\lambda_i}{b_i \mu_i}. \tag{2}$$

Система S_i функционирует в стационарном режиме, если $\psi_i < 1$.

Эволюцию системы S_i можно описать с помощью процесса размножения и гибели [21], представленном на рисунке.



Процесс размножения и гибели
Figure. The birth-death process

В этом случае стационарные вероятности определяются формулами [2]

$$\pi_i(k) = \pi_i(0) \prod_{n=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\tilde{\mu}_i(n)}, \quad k = 1, 2, ..., \tag{3}$$

где

$$\pi_i(0) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\tilde{\mu}_i(n)} \right)^{-1}, \tag{4}$$

а интенсивности $\tilde{\mu}_i(n)$ имеют вид [21]

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_i(n) = \lambda_i - \mu_i \dfrac{\lambda_i^{b_i}}{\tilde{\mu}_i(n+1) \cdot \ldots \cdot \tilde{\mu}_i(n+b_i)}, & 1 \leqslant n \leqslant b_i - 1, \\ \tilde{\mu}_i(n) = \lambda_i + \mu_i - \mu_i \dfrac{\lambda_i^{b_i}}{\tilde{\mu}_i(n+1) \cdot \ldots \cdot \tilde{\mu}_i(n+b_i)}, & n \geqslant b_i. \end{cases} \tag{5}$$

Используя стационарные вероятности (3), (4), в работе [19] была получена формула для математического ожидания длительности пребывания требования в системе в виде

$$\overline{u}_i(\lambda_i) = \frac{b_i - 1}{2\lambda_i} + \frac{1}{M_i - \lambda_i}, \tag{6}$$

где $M_i = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\mu}_i(n)$ – корень уравнения

$$M_i^{b_i+1} - (\lambda_i + \mu_i)M_i^{b_i} + \lambda_i^{b_i}\mu_i = 0,$$

принадлежащий интервалу

$$\left(\frac{b_i(\lambda_i+\mu_i)}{b_i+1}, \frac{(\lambda_i+\mu_i)^{b_i+1} - \lambda_i^{b_i}\mu_i}{(\lambda_i+\mu_i)^{b_i}}\right).$$

Далее в статье [20] было доказано, что (6) достигает минимального значения в некотором λ_i^* при фиксированном значении b_i и μ_i, причем это значение единственно

$$\overline{u}_i^* = \overline{u}_i(\lambda_i^*) = \min_{\lambda_i} \overline{u}(\lambda_i).$$

Также в работе [20] было получено выражение для вычисления приближенных значений оптимальных интенсивностей потоков в системы

$$\lambda_i^* = \mu_i \frac{1-(1+\alpha/b_i)^{-b_i}}{\alpha/b_i}, \tag{7}$$

где α — корень уравнения

$$e^\alpha - (\alpha+3) = 0.$$

Определив оптимальные значения интенсивностей λ_i^* по формуле (7), можно вычислить оптимальные относительные интенсивности потоков

$$\omega_i^*(\lambda_0) = \frac{\lambda_i^*}{\lambda_0 + \sum\limits_{j=1}^{L}\lambda_j^*}, \quad i = 0,\ldots,L. \tag{8}$$

Заметим, что в стационарном режиме функционирования сети массового обслуживания относительная интенсивность потока не может быть больше суммы относительных интенсивностей потоков всех других систем обслуживания сети, включая источник требований, т. е.

$$\omega_i \leqslant \sum_{j=0}^{L}\omega_j - \omega_i, \quad i = 0,\ldots,L. \tag{9}$$

Учитывая равенство $\sum\limits_{j=0}^{L}\omega_j = 1$, соотношение (9) может быть представлено в виде $\omega_i \leqslant 1-\omega_i$, $i = 0,\ldots,L$. Следовательно,

$$\max_{i=0,\ldots,L} \omega_i \leqslant \frac{1}{2}. \tag{10}$$

В случае, когда (10) имеет вид равенства $\omega_0 = 1/2$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{L}\omega_i = \frac{1}{2},$$

то в матрице Θ сети обслуживания отличны от нуля только элементы нулевой строки и нулевого столбца. При этом все элементы нулевого столбца равны 1 за исключением $\theta_{00} = 0$. Топология такой сети определяет открытую сеть параллельных систем массового обслуживания. Интенсивность входящего потока в такую сеть определяется равенством

$$\lambda_0 = \sum_{j=1}^{L}\lambda_j^*.$$

Если же для некоторой системы S_l, $l \neq 0$, относительная интенсивность $\omega_l = 1/2$, то сеть массового обслуживания будет иметь радиальную (звездообразную) топологию с центральной системой S_l.

3. Метод формирования маршрутных матриц

Задача оптимизации состоит в нахождении маршрутной матрицы Θ^*, которая для заданного вектора относительных интенсивностей потоков ω^a обеспечивает вектор $\overline{u}^* = (\overline{u}_i^*)$, $i = 1, ..., L$, и удовлетворяет условию

$$\omega^a \Theta^* = \omega^a, \quad \sum_{i=0}^{L} \omega^a = 1. \tag{11}$$

Обозначим R — число ненулевых элементов в матрице смежности W. Если $R = L+1$ — минимальное значение, которое может принять число R, то сеть массового обслуживания будет иметь кольцевую топологию, в которой $\theta_{i-1,i} = 1$, $i = 1, \ldots, L$, и $\theta_{L,0} = 1$. Остальные элементы маршрутной матрицы Θ равны нулю. В этом случае $\omega_i = 1/(L+1)$, $i = 0, 1, \ldots, L$. Сеть массового обслуживания с полносвязной топологией имеет максимально возможное число $R = L(L+1)$ ненулевых элементов матрицы Θ. Если система уравнений (11) совместна и число неизвестных $R > 2(L+1)$, то такая система в общем случае имеет бесконечное число решений.

Для нахождения допустимого решения системы уравнений (11) воспользуемся методом градиентного спуска. Введем целевую функцию для заданного вектора ω^a и матрицы $\Theta \in \mathcal{A}_W$

$$V(\Theta) = \sum_{i=0}^{L} \left(\omega_i^a - \sum_{j=0}^{L} \omega_j^a \theta_{ji} \right)^2 .$$

Данная функция является выпуклой на выпуклом множестве $\mathcal{A}_W$.

Тогда определим задачу оптимизации:

$$V(\Theta) \to \min_{\Theta \in \mathcal{A}_W}$$

при ограничениях:

$$\theta_{ij} = \begin{cases} \theta_{ij},\ 0 \leqslant \theta_{ij} \leqslant 1, & w_{ij} = 1, \\ 0, & w_{ij} = 0, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \ldots, L,$$

$$\sum_{j=0}^{L} \theta_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \ldots, L.$$

Движение в направлении наискорейшего спуска определяется выражением

$$\Theta^{(k+1)} = \Theta^{(k)} - \gamma^{(k)} \bigtriangledown V(\Theta^{(k)}),$$

где направление спуска задается антиградиентом $- \bigtriangledown V(\Theta^{(k)})$, γ — скорость градиентного спуска, $k = 0, 1, \ldots$ — шаг итерации, $\Theta^{(0)}$ — начальная маршрутная матрица, для которой

$$\theta_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{k=0}^{L} w_{ik}}, & w_{ij} = 1, \\ 0, & w_{ij} = 0, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \ldots, L.$$

Приближенным значением Θ^* будем считать маршрутную матрицу $\Theta^{(\cdot)} \in \mathcal{A}_W$, для которой $V(\Theta^{(\cdot)}) \leqslant \varepsilon$, где константа $\varepsilon > 0$ определяет точность решения.

4. Численные примеры

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания, состоящую из $L = 5$ систем массового обслуживания. Вектор интенсивностей обслуживания в системах сети равен $\mu = (1; 1.2; 1.3; 0.9; 1.1)$, вектор размеров групп требований $b = (3; 4; 3; 2; 3)$, начальная маршрутная матрица

$$\Theta^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 & 0.2000 \\ 0.3333 & 0 & 0.3334 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 0.3334 & 0 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 0 & 0 & 0 & 0.3334 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0 & 0.3333 & 0 & 0 & 0.3334 \\ 0.3333 & 0 & 0.3333 & 0.3334 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть интенсивность потока в сеть $\lambda_0 = 0.02$. Используя выражение (7), получим вектор $\lambda = (0.0200; 1.4046; 2.3002; 1.8260; 0.8065; 1.5450)$. Тогда относительные интенсивности потоков будут $\omega = (0.0025; 0.1777; 0.2911; 0.2311; 0.1021; 0.1955)$, а оптимальная маршрутная матрица

$$\Theta^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 0.0050 & 0.3032 & 0.0007 & 0.4899 & 0.2011 \\ 0.0034 & 0 & 0.6844 & 0.3122 & 0 & 0 \\ 0.0035 & 0.6104 & 0 & 0.3861 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4365 & 0.5635 \\ 0.0023 & 0 & 0.3633 & 0 & 0 & 0.6344 \\ 0.0033 & 0 & 0.6733 & 0.3234 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В полученной маршрутной матрице вероятности выхода требований из сети обслуживания близки к нулю. За счет этого обеспечивается необходимое число требований в сети и, соответственно, оптимальные длительности формирования групп требований в системах перед началом обслуживания. При этом внутренние элементы маршрутной матрицы обеспечивают необходимые потоки требований между системами обслуживания S_i, $i = 1, \dots, 5$.

Увеличим интенсивность входного потока $\lambda_0 = 1.5$. Относительные интенсивности потоков станут равными $\omega = (0.1599; 0.1497; 0.2452; 0.1946; 0.0860; 0.1647)$, при этом интенсивности потоков $\lambda = (1.5; 1.4046; 2.3002; 1.8260; 0.8065; 1.5450)$ в системы обслуживания S_i, $i = 1, \dots, 5$, остались неизменными. Элементы θ_{i0}, $i = 1, \dots, 5$, оптимальной маршрутной матрицы

$$\Theta^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2890 & 0.2870 & 0.0901 & 0.1320 & 0.2019 \\ 0.2333 & 0 & 0.3334 & 0.4333 & 0 & 0 \\ 0.2642 & 0.4222 & 0 & 0.3136 & 0 & 0 \\ 0.1333 & 0 & 0 & 0 & 0.3335 & 0.5332 \\ 0.3334 & 0 & 0.3332 & 0 & 0 & 0.3334 \\ 0.0333 & 0 & 0.7333 & 0.2334 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

существенно больше по сравнению с соответствующими элементами оптимальной маршрутной матрицы при $\lambda_0 = 0.02$.

При $\lambda_0 = 4$ вектор относительных интенсивностей и оптимальная маршрутная матрица примут вид

$$\omega = (0.3366; 0.1182; 0.1936; 0.1537; 0.0679; 0.1300),$$

$$\Theta^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2112 & 0.2998 & 0.1121 & 0.1869 & 0.1900 \\ 0.4333 & 0 & 0.3344 & 0.2323 & 0 & 0 \\ 0.5233 & 0.2434 & 0 & 0.2333 & 0 & 0 \\ 0.7333 & 0 & 0 & 0 & 0.0324 & 0.2343 \\ 0.2234 & 0 & 0.3343 & 0 & 0 & 0.4423 \\ 0.4323 & 0 & 0.2343 & 0.3334 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при последовательном увеличении интенсивности входящего потока в сеть уменьшается необходимость удерживать требования в сети и видно, что вероятности выхода из сети увеличиваются, а вероятности перехода требований между системами уменьшаются.

При максимальной интенсивности входного потока $\lambda_0 = 7.88$, при которой еще обеспечивается условие существование стационарного режима в рассматриваемой сети массового обслуживания, вектор относительных интенсивностей и оптимальная маршрутная матрица примут вид

$$\omega = (0.5000; 0.0891; 0.1459; 0.1158; 0.0512; 0.0980),$$

$$\Theta^* = \begin{pmatrix} 0 & 0.1782 & 0.2918 & 0.2316 & 0.1024 & 0.1960 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При такой интенсивности входного потока топология сети обслуживания вырождается в топологию типа звезда, где центральной системой становится источник требований. Также сеть с такой топологией можно интерпретировать как сеть параллельных систем обслуживания.

Следует отметить, что все полученные в примере маршрутные матрицы обеспечивают неизменные минимальные математические ожидания длительностей пребывания требований в системах $\overline{u}^* = (2.131; 1.808; 1.639; 2.267; 1.937)$, а также математическое ожидание числа требований в системах обслуживания $\bar{s} = (2.993; 4.159; 2.993; 1.828; 2.992)$.

Предложенный метод формирования маршрутных матриц может быть также использован для коррекции потоков требований в сетях массового обслуживания с изменяющимся числом связей между системами обслуживания.

Рассмотрим пример открытой сети массового обслуживания с $L = 6$ одноприборными системами обслуживания. Вектор интенсивностей обслуживания в системах сети $\mu = (2.0; 2.1; 1.9; 2.0; 2.1; 1.9)$, вектор размеров групп требований $b = (2; 3; 2; 3; 4; 3)$, интенсивность потока требований из источника в сеть $\lambda_0 = 2$, матрица смежности

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Необходимо определить маршрутные матрицы, которые обеспечивают минимальные математические ожидания длительностей пребывания требований в системах сети обслуживания при двух различных матрицах смежностей ориентированного графа, отображающих топологии рассматриваемой сети массового обслуживания.

Используя выражение (7), получим вектор

$$\lambda = (1.7923; 2.9496; 1.7026; 2.8091; 4.0252; 2.6687).$$

Следовательно, вектор $\omega = (0.1114; 0.0999; 0.1643; 0.0949; 0.1565; 0.2243; 0.1487)$, вектор $\overline{u}^* =$

$= (1.0203; 1.0147; 1.0740; 1.0655; 1.0328; 1.1215)$, а оптимальная маршрутная матрица

$$\Theta^* = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.279 & 0.1111 & 0.1999 & 0.21 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2923 & 0 & 0 & 0.2323 & 0.4754 \\ 0.05 & 0.0409 & 0 & 0.161 & 0 & 0.7481 & 0 \\ 0.3434 & 0.3332 & 0 & 0 & 0.3234 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.251 & 0.3489 & 0 & 0 & 0.3501 & 0 \\ 0.0589 & 0 & 0 & 0.25 & 0.2399 & 0 & 0.4512 \\ 0.3333 & 0 & 0.3323 & 0 & 0.3344 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь в матрице W элементы $w_{25} = 0$ и $w_{53} = 0$. Тогда оптимальная маршрутная матрица примет вид

$$\Theta^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.0999 & 0.1991 & 0.001 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3354 & 0 & 0 & 0.5733 & 0.0913 \\ 0.223 & 0.3344 & 0 & 0.4426 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2343 & 0.4243 & 0 & 0 & 0.3414 & 0 & 0 \\ 0.049 & 0.03 & 0.352 & 0 & 0 & 0.569 & 0 \\ 0.0453 & 0 & 0 & 0 & 0.3324 & 0 & 0.6223 \\ 0.2333 & 0 & 0.4343 & 0 & 0.3324 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обе маршрутные матрицы обеспечивают оптимальный вектор $\overline{u}^*$.

Заключение

В данной работе разработан метод регулирования элементов маршрутной матрицы, которая обеспечивает минимальные математические ожидания длительностей пребывания требований в системах открытой сети массового обслуживания с групповым обслуживанием требований для всех допустимых λ_0. Приводятся результаты численных экспериментов применения предложенного метода для вычисления стационарных характеристик сети с групповым обслуживанием требований. Метод может быть использован также для коррекции потоков требований в сетях массового обслуживания с групповым обслуживанием и изменяющимся числом связей между системами обслуживания.

Список литературы

1. *Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А.* Анализ очередей в вычислительных сетях: Теория и методы расчета. Москва : Наука, 1989. 334 с.
2. *Вишневский В. М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. Москва : Техносфера, 2003. 506 с.
3. *Митрофанов Ю. И.* Анализ сетей массового обслуживания. Саратов : Научная книга, 2005. 175 с.
4. *Рыков В. В.* Управляемые системы массового обслуживания // Итоги науки и техники. Серия: Теория вероятностей. Математическая стататистика. Теория кибернетики. 1975. Вып. 12. С. 43–153.
5. *Papadimitriou C. H., Tsitsiklis J. N.* The complexity of optimal queueing network control // Mathematics of Operations Research, 1999. Vol. 24, iss. 2. P. 293–305. https://doi.org/10.1287/moor.24.2.293
6. *Neely M. J.* Stochastic network optimization with application to communication and queueing systems. Cham : Springer, 2010. 199 p. https://doi.org/10.2200/S00271ED1V01Y201006CNT007
7. *Neale J. J., Duenyas I.* Control of a batch processing machine serving compatible job families // IIE Transactions. 2003. Vol. 35, iss. 8. P. 699–710. https://doi.org/10.1080/07408170304347
8. *Makis V.* Optimal control of a batch service queueing system with bounded waiting time // Kybernetika. 1985. Vol. 21, iss. 4. P. 262–271.
9. *Grippa P., Schilcher U., Bettstetter C.* On access control in cabin-based transport systems // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2019. Vol. 20, iss. 6. P. 2149–2156. https://doi.org/10.1109/TITS.2018.2864551

10. *Zeng Y., Xia C. H.* Optimal bulking threshold of batch service queues // Journal of Applied Probability. 2017. Vol. 54, iss. 2. P. 409–423. https://doi.org/10.1017/jpr.2017.8
11. *Bountali O., Economou A.* Equilibrium joining strategies in batch service queueing system // European Journal of Operational Research. 2017. Vol. 260, iss. 3. P. 1142–1151. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.01.024
12. *Deb R. K., Serfozo R. F.* Optimal Control of Batch Service Queues // Advances in Applied Probability. 1973. Vol. 5, iss. 2. P. 340–361. https://doi.org/10.2307/1426040
13. *Rabta B., Reiner G.* Batch sizes optimisation by means of queueing network decomposition and genetic algorithm // International Journal of Production Research. 2012. Vol. 50, iss. 10. P. 2720–2731. https://doi.org/10.1080/00207543.2011.588618
14. *Mitici M., Goseling J., van Ommeren J.-K., Graaf M., Boucherie R. J.* On a tandem queue with batch service and its applications in wireless sensor networks // Queueing Systems. 2017. Vol. 87. P. 81–93. https://doi.org/10.1007/s11134-017-9534-1
15. *Xia C. H., Michailidis G., Bambos N., Glynn P. W.* Optimal control of parallel queues with batch service // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2002. Vol. 16, iss. 3. P. 289–307. https://doi.org/10.1017/S0269964802163029
16. *Yu A.-L., Zhang H.-Y., Chen Q.-X., Mao N., Xi Sh.-H.* Buffer allocation in a flow shop with capacitated batch transports // Journal of the Operational Research Society. 2022. Vol. 73, iss. 4. P. 888–904. https://doi.org/10.1080/01605682.2020.1866957
17. *Hopp W. J., Spearman M. L., Chayet S., Donohue K. L., Gel E. S.* Using an optimized queueing network model to support wafer fab design // IIE Transactions. 2002. Vol. 34, iss. 2. P. 119–130. https://doi.org/10.1080/07408170208928855
18. *Kar S., Rehrmann R., Mukhopadhyay A., Alt B., Ciucu F., Koeppl H., Binnig C., Rizk A.* On the throughput optimization in large-scale batch-processing systems // Performance Evaluation. 2020. Vol. 144. Art. 102142. https://doi.org/10.1016/j.peva.2020.102142
19. *Stankevich E., Tananko I., Pagano M.* Optimization of open queuing networks with batch services // Mathematics. 2022. Vol. 10, iss. 16. Art. 3027. https://doi.org/10.3390/math10163027
20. *Pagano M., Tananko I., Stankevich E.*. On the optimal input rate in queues with batch service // Axioms. 2023. Vol. 12, iss. 7. Art. 656. https://doi.org/10.3390/axioms12070656
21. *Станкевич Е. П., Тананко И. Е., Пагано М.* Анализ системы массового обслуживания с групповым обслуживанием требований // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы Междунар. науч. конф. (Саратов, 18–20 ноября 2021 г.) / под ред. В. А. Твердохлебова. Саратов : Научная книга, 2021. С. 148–151.

References

1. Basharin G. P., Bocharov P. P., Kogan Ya. A. *Analiz ocheredey v vychislitel'nykh setyakh : Teoriya i metody rascheta* [Analysis of queues in computer networks: Theory and calculation methods]. Moscow, Nauka, 1989. 334 p. (in Russian).
2. Vishnevskiy V. M. *Teoreticheskie osnovy proektirovaniya komp'yuternykh setey* [Theoretical foundations of computer network design]. Moscow, Tekhnosfera, 2003. 506 p. (in Russian).
3. Mitrofanov Yu. I. *Analiz setey massovogo obsluzhivaniya* [Analysis of queuing networks]. Saratov, Nauchnaya kniga, 2005. 175 p. (in Russian).
4. Rykov V. V. Controlled queuing systems. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya: Teoriya Veroyatnostei. Matematicheskaya Statistika. Teoreticheskaya Kibernetika* [Results of Science and Technology. Series: Probability Theory. Mathematical Statistics. Theoretical Cybernetics], 1975, iss. 12, pp. 43–153 (in Russian).
5. Papadimitriou C. H., Tsitsiklis J. N. The complexity of optimal queueing network control. *Mathematics of Operations Research*, 1999, vol. 24, iss. 2, pp. 293–305. https://doi.org/10.1287/moor.24.2.293
6. Neely M. J. *Stochastic network optimization with application to communication and queueing systems*. Springer Cham, 2010. 199 p. https://doi.org/10.2200/S00271ED1V01Y201006CNT007
7. Neale J. J., Duenyas I. Control of a batch processing machine serving compatible job families. *IIE Transactions*, 2003, vol. 35, iss. 8, pp. 699–710. https://doi.org/10.1080/07408170304347
8. Makis V. Optimal control of a batch service queueing system with bounded waiting time. *Kybernetika*, 1985, vol. 21, iss. 4, pp. 262–271.
9. Grippa P., Schilcher U., Bettstetter C. On access control in cabin-based transport systems. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2019, vol. 20, iss. 6, pp. 2149–2156. https://doi.org/10.1109/TITS.2018.2864551

10. Zeng Y., Xia C. H. Optimal bulking threshold of batch service queues. *Journal of Applied Probability*, 2017, vol. 54, iss. 2, pp. 409–423. https://doi.org/10.1017/jpr.2017.8
11. Bountali O., Economou A. Equilibrium joining strategies in batch service queueing system. *European Journal of Operational Research*, 2017, vol. 260, iss. 3, pp. 1142–1151. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.01.024
12. Deb R. K., Serfozo R. F. Optimal control of batch service queues. *Advances in Applied Probability*, 1973, vol. 5, iss. 2, pp. 340–361. https://doi.org/10.2307/1426040
13. Rabta B., Reiner G. Batch sizes optimisation by means of queueing network decomposition and genetic algorithm. *International Journal of Production Research*, 2012, vol. 50, iss. 10, pp. 2720–2731. https://doi.org/10.1080/00207543.2011.588618
14. Mitici M., Goseling J., van Ommeren J.-K., Graaf M., Boucherie R. J. On a tandem queue with batch service and its applications in wireless sensor networks. *Queueing Systems*, 2017, vol. 87, pp. 81–93. https://doi.org/10.1007/s11134-017-9534-1
15. Xia C. H., Michailidis G., Bambos N., Glynn P. W. Optimal control of parallel queues with batch service. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2002, vol. 16, iss. 3, pp. 289–307. https://doi.org/10.1017/S0269964802163029
16. Yu A.-L., Zhang H.-Y., Chen Q.-X., Mao N., Xi Sh.-H. Buffer allocation in a flow shop with capacitated batch transports. *Journal of the Operational Research Society*, 2022, vol. 73, iss. 4, pp. 888–904. https://doi.org/10.1080/01605682.2020.1866957
17. Hopp W. J., Spearman M. L., Chayet S., Donohue K. L., Gel E. S. Using an optimized queueing network model to support wafer fab design. *IIE Transactions*, 2002, vol. 34, iss. 2, pp. 119–130. https://doi.org/10.1080/07408170208928855
18. Kar S., Rehrmann R., Mukhopadhyay A., Alt B., Ciucu F., Koeppl H., Binnig C., Rizk A. On the throughput optimization in large-scale batch-processing systems. *Performance Evaluation*, 2020, vol. 144, art. 102142. https://doi.org/10.1016/j.peva.2020.102142
19. Stankevich E., Tananko I., Pagano M. Optimization of open queuing networks with batch services. *Mathematics*, 2022, vol. 10, iss. 16, art. 3027. https://doi.org/10.3390/math10163027
20. Pagano M., Tananko I., Stankevich E. On the optimal input rate in queues with batch service. *Axioms*, 2023, vol. 12, iss. 7, art. 656. https://doi.org/10.3390/axioms12070656
21. Stankevich E. P., Tananko I. E., Pagano M. Analysis of queueing system with batch service. In: Tverdokhlebov V. A. (ed.) *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii* [Computer Science and Information Technologies]: Proceedings of the International Scientific Conference. Saratov, November 18–20, 2021. Saratov, Nauchnaya kniga, 2021, pp. 148–151 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 18.01.2024
Принята к публикации / Accepted 07.02.2024
Опубликована / Published 28.02.2025