Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 46–52
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 46–52
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-46-52, EDN: HZNJHM

Научная статья
УДК 517.544.8

Об одном методе решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в круговых областях

К. М. Расулов, Т. Р. Нагорная✉

Смоленский государственный университет, Россия, 214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4

Расулов Карим Магомедович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, kahrimanr@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-2040-8447, AuthorID: 531506

Нагорная Татьяна Романовна, старший преподаватель кафедры математического анализа, tani7n@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-5976-7391, AuthorID: 935182

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача типа задачи Пуанкаре для одного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка, порождающего класс обобщенных гармонических функций. Устанавливается, что в случае круговых областей решение рассматриваемой краевой задачи, по сути, сводится к решению дифференциальной краевой задачи типа Римана в классах аналитических функций комплексного переменного. Кроме того, получены необходимые и достаточные условия разрешимости исследуемой задачи, а также установлена ее нетеровость.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, обобщенная гармоническая функция, краевая задача Пуанкаре, дифференциальная краевая задача типа Римана, интегральное уравнение, круговая область

Для цитирования: *Расулов К. М., Нагорная Т. Р.* Об одном методе решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в круговых областях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 1. С. 46–52. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-46-52, EDN: HZNJHM

Article

A method for solving the Poincare boundary value problem for generalized harmonic functions in circular domains

K. M. Rasulov, T. R. Nagornaya✉

Smolensk State University, 4 Przhevalskogo St., Smolensk 214000, Russia

Karim M. Rasulov, kahrimanr@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-2040-8447, AuthorID: 531506

Tatyana R. Nagornaya, tani7n@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-5976-7391, AuthorID: 935182

Abstract. The paper considers a Poincare-type boundary value problem for a second-order elliptic differential equation that generates a class of generalized harmonic functions. It is established that in the case of circular domains the solution of the considered boundary value problem reduces to the solution of a Riemann-type differential boundary value problem in the classes of analytic functions of a complex variable. In addition, necessary and sufficient conditions for the solvability of the problem are obtained.

Keywords: differential equation, generalized harmonic function, Poincare boundary value problem, differential boundary value problem of the Riemann type, integral equation, circular domain

For citation: Rasulov K. M., Nagornaya T. R. A method for solving the Poincare boundary value problem for generalized harmonic functions in circular domains. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 1, pp. 46–52 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-1-46-52, EDN: HZNJHM

1. Постановка задачи и вспомогательные утверждения

Пусть T^+ — односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, лежащая внутри единичного круга $U_1^+ = \{z : |z| < 1\}$. Будем считать, что границей области T^+ служит простая замкнутая кривая Ляпунова L. В области T^+ рассматривается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n+1)}{(1-z\bar{z})^2} W = 0, \tag{1}$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, n — некоторое неотрицательное целое число, $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ — неизвестная функция.

В работах [1, 2] было установлено, что всякое регулярное решение уравнения (1) в области T^+ представляется в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k} + \overline{\sum_{k=0}^{n} B_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k f^+(z)}{dz^k}}, \tag{2}$$

где $B_k^n = \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ — аналитические в области T^+ функции.

Так как при $n = 0$ решения уравнения (1) являются гармоническими функциями в области T^+, то, следуя [3–5], в дальнейшем в случае $n \geqslant 1$ решения дифференциального уравнения (1) в области $T^+ \subset U_!^+$ будем называть обобщенными гармоническими функциями порядка n в области T^+, а функции $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$, входящие в правую часть представления (2), назовем соответственно первой и второй аналитическими компонентами обобщенной гармонической функции $W(z)$. Класс всех обобщенных гармонических функций порядка n в области T^+ будем обозначать символом $G_n(T^+)$, а через $G_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ обозначим класс обобщенных гармонических функций порядка n в области T^+, для которых в представлении (2) аналитические компоненты $\varphi^+(z), f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т. е. $\varphi^+(z), f^+(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаются на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно.

Рассматривается следующая краевая задача: требуется найти все обобщенные гармонические функции $W(z)$ порядка n $(n \geqslant 1)$ в области T^+, принадлежащие классу $G_n(T^+) \cap$ $\cap H^{(n+1)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$a(t)\frac{\partial W(t)}{\partial x} + b(t)\frac{\partial W(t)}{\partial y} + c(t)W(t) = q(t), \quad t \in L, \tag{3}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $q(t)$ — заданные на контуре L комплекснозначные функции из класса $H(L)$ (т. е. удовлетворяющие на L условию Гельдера).

Следуя [6, с. 80], сформулированную выше задачу будем называть краевой задачей Пуанкаре для обобщенных гармонических функций порядка n или, короче, задачей GP_n, а соответствующую GP_n однородную задачу $(q(t) \equiv 0)$ — задачей GP_n^0.

В работах [3–5] были построены явные решения задачи GP_1 в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, при следующих предположениях относительно коэффициентов $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ краевого условия (3):

1) $a(t) \equiv b(t) \equiv 0$, $c(t) \equiv 1$;

2) $a(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{r^2}{t})$, $b(t) = \frac{1}{2i}(t - \frac{r^2}{t})$, $c(t) \equiv 0$;
3) $a(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{r^2}{t})$, $b(t) = \frac{1}{2i}(t - \frac{r^2}{t})$, $c(t) \equiv -1$.

Настоящая статья в основном посвящена построению общего конструктивного метода решения задачи GP_n в случае, когда $n = 1$, $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, а $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — произвольные функции, удовлетворяющие на L_r условию Гельдера, где $L_r = \{t : |t| = r\}$ — граница круга T_r^+. Но прежде чем изложить метод решения задачи GP_n, установим одно интегральное представление для кусочно-аналитических функций комплексного переменного.

Применяя лемму 2.1 из монографии [7] к аналитическим функциям $f^+(z) = \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz}$ и $f^-(z) = \frac{d^2\varphi^-(z)}{dz}$, где $\varphi^+(z)$ — функция, аналитическая в T_r^+ и непрерывная в замкнутой области $T_r^+ \cup L_r$, а функция $\varphi^-(z)$ — аналитическая в $T_r^- = \{z : |z| > r\} \cup \{\infty\}$ и непрерывная в $T_r^- \cup L_r$, несложно доказать следующее утверждение (см. также [8, с. 372; 9]).

Теорема 1. *Пусть $G_*(t)$ — заданная на L_r функция, принадлежащая классу $H(L_r)$, причем $G_*(t) \neq 0$, а $\chi_* = \operatorname{Ind} G_*(t) = \frac{1}{2\pi}[ArgG_*(t)]_{L_r}$ — индекс Коши функции $G_*(t)$ вдоль окружности L_r. Тогда:*

1) если $\chi_* < 0$, то имеют место представления

$$\varphi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{L_r} \mu(\tau) \cdot (\tau - z) \ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) d\tau + \varphi^+(0), \tag{4}$$

$$\varphi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{L_r} \frac{\mu(\tau)}{\tau^2 G_*(t)} \cdot \left[(\tau - z) \ln\left(1 - \frac{\tau}{z}\right) - \tau\right] d\tau + \varphi^-(\infty), \tag{5}$$

где $\mu(\tau)$ — комплекснозначная функция, удовлетворяющая на L_r условию Гельдера и определяемая по заданным $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ с точностью до выражения, линейно зависящего от $|\chi_*|$ произвольных комплексных постоянных;

2) если же $\chi_* \geqslant 0$, то имеют место представления

$$\varphi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{L_r} \mu(\tau) \cdot (\tau - z) \ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) d\tau + \sum_{k=0}^{\chi_*+1} \alpha_k z^k, \tag{6}$$

$$\varphi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{L_r} \frac{\mu(\tau)}{\tau^2 G_*(t)} \cdot \left[(\tau - z) \ln\left(1 - \frac{\tau}{z}\right) - \tau\right] d\tau + \varphi^-(\infty), \tag{7}$$

где $\mu(\tau)$ — комплекснозначная функция, удовлетворяющая на L_r условию Гельдера, а α_k $(k = 0, 1, ..., \chi_* + 1)$ — комплексные постоянные, вполне определяемые по заданным функциям $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$. Здесь под $\ln(1 - \frac{z}{\tau})$ понимается ветвь, исчезающая при $z = 0$, а под $\ln(1 - \frac{\tau}{z})$ — ветвь, исчезающая при $z = \infty$.

2. Метод решения задачи GP_1 в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$ в случае, когда $a(t), b(t), c(t) \in H(L_r)$

Пусть выполняется условие

$$[a(t)]^2 + [b(t)]^2 \neq 0, \quad t \in L_r. \tag{8}$$

В силу (2) при $n = 1$ и $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ всякая обобщенная гармоническая функция $W(z)$ из класса $G_1(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$ задается так:

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1 - z\bar{z}}\varphi^+(z) + \overline{\frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1 - z\bar{z}} f^+(z)}, \quad z \in T^+, \tag{9}$$

где $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ — аналитические в круге T_r^+ функции, принадлежащие классу $A(T_r^+) \cap$ $\cap H^{(2)}(L_r)$.

С учетом (9) и соотношений $\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar z}$, $\frac{\partial}{\partial y}=i\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)$ краевое условие (3) при $n=1$ можно записать в виде

$$a(t)\left\{\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2}+\frac{2\bar t}{1-t\bar t}\frac{d\varphi^+(t)}{dt}+\frac{2(\bar t)^2+2}{(1-t\bar t)^2}\varphi^+(t)\right\}+$$
$$+a(t)\left\{\overline{\frac{d^2f^+(t)}{dt^2}+\frac{2\bar t}{1-t\bar t}\frac{df^+(t)}{dt}+\frac{2(\bar t)^2+2}{(1-t\bar t)^2}f^+(t)}\right\}+$$
$$+ib(t)\left\{\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2}+\frac{2\bar t}{1-t\bar t}\frac{d\varphi^+(t)}{dt}+\frac{2(\bar t)^2-2}{(1-t\bar t)^2}\varphi^+(t)\right\}-$$
$$-ib(t)\left\{\overline{\frac{d^2f^+(t)}{dt^2}+\frac{2\bar t}{1-t\bar t}\frac{df^+(t)}{dt}+\frac{2(\bar t)^2-2}{(1-t\bar t)^2}f^+(t)}\right\}+$$
$$+c(t)\left\{\frac{d\varphi^+(t)}{dt}+\frac{2\bar t}{1-t\bar t}\varphi^+(t)+\overline{\frac{df^+(t)}{dt}+\frac{2\bar t}{1-t\bar t}f^+(t)}\right\}=q(t),\quad t\in L_r. \tag{10}$$

Далее, с учетом (8), разделив обе части (10) на $[a(t)+ib(t)]$, получаем

$$\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2}+\left(\frac{2\bar t}{1-t\bar t}+\frac{c(t)}{[a(t)+ib(t)]}\right)\frac{d\varphi^+(t)}{dt}+$$
$$+\frac{2(\bar t)^2[a(t)+ib(t)]+2[a(t)-ib(t)]+2\bar t(1-t\bar t)c(t)}{[a(t)+ib(t)](1-t\bar t)^2}\varphi^+(t)+$$
$$+\frac{[a(t)-ib(t)]}{[a(t)+ib(t)]}\overline{\frac{d^2f^+(t)}{dt^2}}+\left(\frac{[a(t)-ib(t)]}{[a(t)+ib(t)]}\frac{2t}{1-t\bar t}+\frac{c(t)}{[a(t)+ib(t)]}\right)\overline{\frac{df^+(t)}{dt}}+$$
$$+\frac{2t^2[a(t)-ib(t)]+2[a(t)+ib(t)]+2t(1-t\bar t)c(t)}{[a(t)+ib(t)](1-t\bar t)^2}\overline{f^+(t)}=\frac{q(t)}{[a(t)+ib(t)]},t\in L_r. \tag{11}$$

Теперь, построив аналитическую в области $T_r^-=\bar C\setminus(T_r^+\cup L_r)$ функцию $\varphi^-(z)$ по формуле

$$\varphi^-(z)=\overline{f^+}\left(\frac{r^2}{z}\right),\quad z\in T_r^-, \tag{12}$$

и учитывая (см., например, [8, с. 290]), что на окружности $L_r=\{t:|t|=r\}$ выполняются следующие условия «симметрии»:

$$\overline{\frac{d^2f^+(t)}{dt^2}}=\frac{t^4}{r^4}\frac{d^2\varphi^-(t)}{dt^2}+\frac{2t^3}{r^4}\frac{d\varphi^-(t)}{dt},\qquad \overline{\frac{df^+(t)}{dt}}=-\frac{t^2}{r^2}\frac{d\varphi^-(t)}{dt},\qquad \overline{f^+(t)}=\varphi^-(t),\quad t\in L_r,$$

равенство (11) можно переписать в виде

$$\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2}+A_1(t)\frac{d\varphi^+(t)}{dt}+A_0(t)\varphi^+(t)-$$
$$-G(t)\frac{d^2\varphi^-(t)}{dt^2}-G_1(t)\frac{d\varphi^-(t)}{dt}-G_0(t)\varphi^-(t)=Q(t),\quad t\in L_r, \tag{13}$$

где

$$A_1(t)=\frac{2\bar t}{1-t\bar t}+\frac{c(t)}{a(t)+ib(t)},\quad A_0(t)=\frac{2(\bar t)^2[a(t)+ib(t)]+2[a(t)-ib(t)]+2\bar t(1-t\bar t)c(t)}{[a(t)+ib(t)](1-t\bar t)^2},$$
$$G(t)=-\frac{[a(t)-ib(t)]}{[a(t)+ib(t)]}\frac{t^4}{r^4},\quad G_1(t)=-\left\{\frac{[a(t)-ib(t)]}{[a(t)+ib(t)]}\left(\frac{2t^3}{r^4}-\frac{2t^3}{(1-t\bar t)r^2}\right)-\frac{t^2}{r^2}\frac{c(t)}{[a(t)+ib(t)]},\right\},$$
$$G_0(t)=-\frac{2t^2[a(t)-ib(t)]+2[a(t)+ib(t)]+2t(1-t\bar t)c(t)}{[a(t)+ib(t)](1-t\bar t)^2},\quad Q(t)=\frac{q(t)}{a(t)+ib(t)},\quad t\in L_r.$$

Легко заметить, что при выполнении условия (8) будем иметь

$$G(t) = -\frac{[a(t) - ib(t)]}{[a(t) + ib(t)]} \frac{t^4}{r^4} \neq 0, \quad t \in L_r, \tag{14}$$

причем $G(t) \in H(L_r)$. В силу (14) равенство (13) представляет собой краевое условие хорошо известной невырожденной дифференциальной задачи типа Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно-аналитической функции $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ (см., например, [8, с. 365] или [7, с. 142]).

Предположим, что задача типа Римана (13) разрешима и уже найдены ее решения $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$. Тогда на основании (12) находим аналитическую в круге T_r^+ функцию $f^+(z)$ по формуле

$$f^+(z) = \overline{\varphi^-} \left(\frac{r^2}{z} \right), \quad z \in T_r^+.$$

Подставляя значения найденных аналитических в T_r^+ функций $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ в правую часть равенства (9), получаем решение исходной задачи GP_1.

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$ и выполняется условие* (8). *Тогда решение краевой задачи GP_1 сводится к решению невырожденной дифференциальной задачи Римана* (13) *относительно ограниченной на бесконечности кусочно-аналитической функции $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$. Для разрешимости краевой задачи GP_1 в круге T_r^+ необходимо и достаточно, чтобы была разрешимой дифференциальная задача Римана* (13).

В заключение получим условия разрешимости задачи GP_1 и установим ее нетеровость при выполнении условия (8).

В силу (14) имеем: $\chi = \operatorname{Ind} G(t) = 2m+4$, где $m = Ind[a(t)-ib(t)]$. Введем в рассмотрение функцию $G_*(t) = G(t) \cdot t^{-2}$. Тогда $\chi_* = \operatorname{Ind} G_*(t) = \chi - 2$.

В дальнейшем число $\chi = \operatorname{Ind} G(t)$ будем называть индексом задачи типа Римана (13), а число $\chi_* = \operatorname{Ind} G_*(t)$ — приведенным индексом этой задачи.

С учетом теоремы 1 при $\chi_* = \operatorname{Ind} G_*(t) < 0$ (т. е. при $\chi < 2$) решение краевой задачи (13) будем искать в виде (4) и (5). Подставляя в равенство (13) вместо $\frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k}$ и $\frac{d^k \varphi^-(t)}{dt^k}$ $(k = 0, 1, 2)$ граничные значения аналитических функций (4), (5) и их производных, получаем следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$(\mathbf{K}\mu)(t) \equiv \mu(t) + \int_{L_r} K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = Q_1(t), \quad t \in L_r, \tag{15}$$

где

$$K(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{G(\tau) - G(t)}{G(\tau)} \right) \frac{1}{\tau - t} + K_1(t,\tau), \quad Q_1(t) = Q(t) - \varphi^+(0)A_0(t) + \varphi^-(\infty)G_0(t),$$

а $K_1(t,\tau)$ — фредгольмово ядро (т. е. $K_1(t,\tau) \in H_*(L_r \times L_r)$), которое вполне определенным образом выражается через коэффициенты краевого условия (13). Но так как $\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{G(\tau) - G(t)}{G(\tau)} \right) \frac{1}{\tau - t} \in$ $\in H_*(L_r \times L_r)$ (см., например, [7, с. 29]), то ядро $K(t,\tau) \in H_*(L_r \times L_r)$.

Таким образом, при $\chi < 2$ решение краевой задачи GP_1, по сути, сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма (15).

Из теории интегральных уравнений Фредгольма второго рода известно (см., например, [8, с. 175]), что для разрешимости неоднородного уравнения (15) (а значит, и задачи GP_1 в случае $\chi < 2$) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_{L_r} Q_1(t)\omega_k(t)d\tau = 0, \quad k = 1, 2, ..., \nu, \tag{16}$$

где $\omega_1(t), \omega_2(t), ..., \omega_\nu(t)$ — полная система линейно независимых над полем C решений однородного уравнения, союзного с уравнением

$$(\mathbf{K}\mu)(t) = 0. \tag{17}$$

При выполнении условий (16) общее решение неоднородного уравнения (15) задается формулой

$$\mu(t) = Q_1(t) + \int_{L_r} R(t,\tau)Q_1(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k\omega_k(t), \tag{18}$$

где $R(t,\tau)$ — обобщенная резольвента ядра $K(t,\tau)$, а $\sum_{k=1}^{\nu}\beta_k\omega_k(t)$ — общее решение однородного уравнения (17), т. е. $\beta_1, \beta_2, ...\beta_\nu$ — произвольные комплексные постоянные.

Подставляя в правые части (4) и (5) вместо $\mu(t)$ ее значение из (18), получаем решение исходной задачи GP_1 в случае $\chi < 2$.

Пусть теперь индекс $\chi \geqslant 2$. В этом случае решения задачи GP_1 будем искать в виде (6) и (7). Подставляя в равенство (13) вместо $\frac{d^k\varphi^+(t)}{dt^k}$ и $\frac{d^k\varphi^-(t)}{dt^k}$ $(k = 0, 1, 2)$ граничные значения аналитических функций (6), (7) и их производных, получаем следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$(\mathbf{K}\mu)(t) \equiv \mu(t) + \int_{L_r} K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = Q_2(t), \quad t \in L_r, \tag{19}$$

где ядро $K(t,\tau)$ такое же, как в (15),

$$Q_2(t) = Q(t) - A_0(t)\sum_{k=0}^{\chi_*+1}\alpha_k t^k - A_1(t)\sum_{k=1}^{\chi_*+1}k\alpha_k t^{k-1} - \sum_{k=2}^{\chi_*+1}k\alpha_k t^k + \varphi^-(\infty)G_0(t). \tag{20}$$

Итак, в случае $\chi \geqslant 2$ исходная краевая задача GP_1 эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма (19).

Замечание. Здесь важно отметить, что так как в выражение для функции $Q_2(t)$, задаваемой формулой (20), линейно входят $\chi_* + 1 = \chi - 1$ произвольных комплексных постоянных α_k $(k = 0, 1, ..., \chi_* + 1)$, некоторые из условий разрешимости вида (16) для неоднородного уравнения Фредгольма (19) можно удовлетворять за счет определенного выбора значений этих постоянных.

С учетом данного замечания при $\chi \geqslant 2$ условия разрешимости задачи GP_1 можно записать так:

$$\int_{L_r} Q_2(t)\tilde{\omega}_k(t)d\tau = 0, \quad k = 1, 2, ..., \nu - s, \tag{21}$$

где $\tilde{\omega}_1(t), \tilde{\omega}_2(t), ..., \tilde{\omega}_{\nu-s}(t)$ — некоторые линейно независимые над полем C решения однородного уравнения, союзного с уравнением (17), причем $0 \leqslant s \leqslant \min(\nu, \chi - 1)$.

Резюмируя изложенное выше, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполняется условие* (8). *Если* $\chi = \operatorname{Ind} G(t) < 2$, *то для разрешимости краевой задачи* GP_1 *в круге* T_r^+ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (16). *Если же* $\chi = \operatorname{Ind} G(t) \geqslant 2$, *то для разрешимости краевой задачи* GP_1 *в круге* T_r^+ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (21).

Поскольку число p условий разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма второго рода (вида (15) или вида (19)) является конечным и число l линейно независимых над полем C решений однородного уравнения, союзного с уравнением (17), также является конечным, то из теорем 2 и 3 вытекает, что при выполнении условия (8) краевая задача GP_1 будет нетеровой.

Список литературы

1. *Bauer K. W.* Über eine der Differentialgleichung $(1 + z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete funktionentheorie // Bonner Mathematische Schriften. 1965. № 23. S. 1–98.
2. *Bauer K. W., Ruscheweyh S.* Differential operators for partial differential equations and function theoretic applications. Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 1980. 253 p. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 791). https://doi.org/10.1007/BFb0103468
3. *Нагорная Т. Р., Расулов К. М.* О краевой задаче Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в круговых областях // Научно-технический вестник Поволжья. 2022. № 7. С. 32–35. EDN: FCWCDP
4. *Нагорная Т. Р., Расулов К. М.* Алгоритм явного решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций второго порядка в круговых областях // Научно-технический вестник Поволжья. 2022. № 11. С. 24–27. EDN: KIPYRE
5. *Расулов К. М., Нагорная Т. Р.* О решении в явном виде краевой задачи Неймана для дифференциального уравнения Бауэра в круговых областях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 326–335. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-326-335, EDN: DIKXIA
6. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1976. 295 с.
7. *Расулов К. М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск : Изд-во СГПУ, 1998. 344 с.
8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. Москва : Наука, 1977. 640 с.
9. *Рогожин В. С.* Новое интегральное представление кусочно-аналитической функции и его приложения // Доклады АН СССР. 1960. Т. 135, № 4. С. 791–793.

References

1. Bauer K. W. Über eine der Differentialgleichung $(1 + z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie. *Bonner Mathematische Schriften*, 1965, iss. 23, pp. 1–98 (in Germany).
2. Bauer K. W., Ruscheweyh S. *Differential operators for partial differential equations and function theoretic applications*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 791. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1980. 264 p. https://doi.org/10.1007/BFb0103468
3. Nagornaya T. R., Rasulov K. M. On the Poincaré boundary value problem for generalized harmonic functions in circular domains. *Scientific and Technical Volga Region Bulletin*, 2022, iss. 7, pp. 32–35 (in Russian). EDN: FCWCDP
4. Nagornaya T. R., Rasulov K. M. A solution algorithm of the Poincare boundary value problem for the second-order generalized harmonic functions in circular domains. *Scientific and Technical Volga Region Bulletin*, 2022, iss. 11, pp. 24–27 (in Russian). EDN: KIPYRE
5. Rasulov K. M., Nagornaya T. R. The explicit solution of the Neumann boundary value problem for Bauer differential equation in circular domains. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 326–335 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-326-335, EDN: DIKXIA
6. Bitsadze A. V. Equations of mathematical physics. Moscow, Mir Publishers, 1980. 300 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1976. 295 p.).
7. Rasulov K. M. *Kraevye zadachi dlya polianaliticheskikh funktsiy i nekotorye ikh prilozheniya* [Boundary value problems for polyanalytic functions and some of their applications]. Smolensk, SSPU Publ., 1998. 344 p. (in Russian).
8. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary value problem]. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (in Russian).
9. Rogozhin V. S. A new integral representation of a sectionally-analytic function and its application. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1960, vol. 135, iss. 4, pp. 791–793 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 21.06.2023
Принята к публикации / Accepted 23.07.2023
Опубликована / Published 28.02.2025