

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 456–471
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 456–471

mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-456-471>

EDN: POZOJY

Научная статья
УДК 539.3

Идентификация двумерных полей предварительных напряжений в неоднородных пластинах

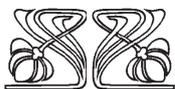
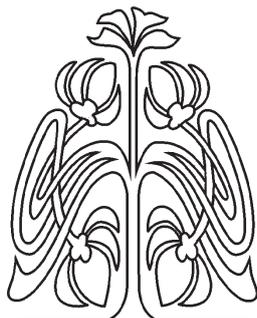
И. В. Богачев[✉], Р. Д. Недин

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

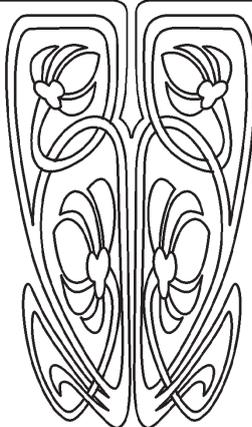
Богачев Иван Викторович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, bogachev89@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4725-5102>, AuthorID: 879750

Недин Ростислав Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории упругости, rdn90@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4366-9591>, AuthorID: 805678

Аннотация. На основе модели планарных колебаний сплошных и имеющих отверстия или включения неоднородных предварительно напряженных пластин рассмотрены новые обратные задачи идентификации компонент тензора предварительных напряжений (ПН), являющихся функциями двух координат, при анализе акустического отклика в процессе зондирования. ПН задавались как результат решения вспомогательных задач о статическом нагружении пластин некоторой начальной нагрузкой. Для решения основной и вспомогательных задач расчета функций смещения пластин разработана конечно-элементная (КЭ) схема на основе выведенных соответствующих слабых постановок задач, реализованная в виде программных комплексов в КЭ-пакете FreeFem++. Были рассмотрены защемленные по одной грани прямоугольные пластины, как сплошные, так и имеющие отверстие или жесткую вставку. Сформулированы обратные задачи идентификации трех функций ПН, зависящих от двух координат, на основе дополнительной информации об акустическом отклике на нез защемленных гранях пластин в результате рассмотрения нескольких наборов зондирующих нагрузок на нескольких



Научный
отдел





частотах. Ввиду нелинейности обратных задач для их решения был разработан итерационный подход, сочетающий на каждой итерации решение прямых задач для текущих приближений искомых функций и определение поправок к ним из построенного операторного уравнения. Для решения операторного уравнения разработан проекционный метод, позволяющий представить поправки в виде разложений по заданным системам функций и свести решение к исследованию плохо обусловленных СЛАУ относительно наборов коэффициентов разложений с помощью метода А. Н. Тихонова. Приведены результаты вычислительных экспериментов по одновременной идентификации двумерных полей ПН, соответствующих различным видам начальных воздействий на рассмотренные пластины.

Ключевые слова: предварительные напряжения, упругие пластины, неоднородность, включения, двумерные обратные задачи, акустический метод

Благодарности: Авторы благодарят профессора А. О. Ватульяна за значительный вклад в развитие методов решения обратных задач, которые применяются в данной работе.

Исследование выполнено в Южном федеральном университете при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>).

Для цитирования: Богачев И. В., Недин Р. Д. Идентификация двумерных полей предварительных напряжений в неоднородных пластинах // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 4. С. 456–471. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-456-471>, EDN: POZOJY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Identification of two-dimensional prestress fields in inhomogeneous plates

I. V. Bogachev[✉], R. D. Nedin

I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, 8A Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

Ivan V. Bogachev, bogachev89@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4725-5102>, AuthorID: 879750

Rostislav D. Nedin, rdn90@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4366-9591>, AuthorID: 805678

Abstract. Based on the model of in-plane oscillations of inhomogeneous prestressed plates, the new inverse problems of identifying the components of the prestress tensor via acoustic response probing are considered for the plates with and without holes and inclusions; the prestress components are assumed to be functions of two coordinates. Prestresses were set as a result of solving auxiliary problems of static loading of plates by some initial mechanical load. To solve the main and auxiliary problems of calculating the plates' displacement functions, a finite element (FE) scheme was developed based on the derived corresponding weak problem statements, implemented in the form of software systems in the FE package FreeFem++. Rectangular plates clamped along one face, both solid and having a hole or a rigid insert, were considered. Inverse problems of identification of three prestress functions depending on two coordinates are formulated on the basis of additional data about the acoustic response on the non-clamped edges of the plates as a result of considering several sets of probing loads at several frequencies. In view of the nonlinearity of the inverse problems under study, an iterative approach was developed to solve them, which combines solving the direct problems for current approximations of the desired functions and the determination of the corresponding corrections from the operator equation built



at each iteration. To solve the operator equation, a projection method has been employed that allows one to present the corrections in the form of expansions in terms of some smooth given functions and reduce the problem solution to the study of ill-conditioned SLAEs with respect to sets of the expansion coefficients using the A. N. Tikhonov method. The results of computational experiments on the simultaneous identification of two-dimensional prestress fields corresponding to various types of initial actions on the considered plates are discussed.

Keywords: residual stress state, elastic plates, inhomogeneity, inclusions, two-dimensional inverse problems, acoustic method

Acknowledgements: The authors thank Professor A. O. Vatulyan for his significant contribution to the development of methods for solving inverse problems, which are used in this paper.

The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>), in the Southern Federal University.

For citation: Bogachev I. V., Nedin R. D. Identification of two-dimensional prestress fields in inhomogeneous plates. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 456–471 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-4-456-471>, EDN: POZOJY

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Поля предварительных (остаточных, внутренних) напряжений (ПН) [1] являются характерным следствием многих технологических процессов, применяемых при изготовлении объектов и конструкций из новых материалов со сложными неоднородными физико-механическими свойствами, таких как функционально-градиентные материалы (ФГМ). При производстве ФГМ часто применяется термическая обработка [2], в частности наплавка, спекание, нагартовка и другие, затем в процессе остывания полученных образцов в них могут сохраняться остаточные напряжения. Наличие ПН в образцах должно учитываться в производственных процессах, так как они зачастую оказывают существенное влияние на эксплуатационные характеристики изготовленных узлов и деталей. Также ПН могут присутствовать в деталях, используемых в промышленных конструкциях, имеющих технологические вырезы и отверстия [3]. В их окрестностях возникает значительная концентрация остаточных напряжений, из-за которой могут появляться трещины и деформированные зоны, что повлечет за собой потерю работоспособности деталей. В связи с этим весьма актуальными являются построение адекватных моделей объектов и конструкций из новых материалов, позволяющих учесть их неоднородность, форму и наличие предварительно напряженного состояния (ПНС), а также разработка эффективных неразрушающих методик идентификации уровня и распределения ПН в них, которые могут быть применимы как в процессе изготовления, так и при эксплуатации.

Разработка методов измерения ПН является достаточно востребованной тематикой, ей посвящено большое количество исследований, при этом интерес к ней значительно возрос в последнее время (см., например, обзорные работы [4, 5]). Существенную практическую значимость имеет изучение задач по определению ПН, возникающих в процессе сварочных операций. Статья [6] посвящена построению и сравнению с экспериментальными данными трехмерной модели «деформация-ползучесть» с учетом распределения ПН в сварных швах жаропрочных сплавов на основе никеля, используемых в разработке компонентов авиадвигателей. В работе [7] метод глухих отверстий (the blind-hole method) использовался для проверки распределения оста-



точного напряжения в сварном шве кольцевой конструкции. Сравнение результатов испытаний с расчетами методом конечных элементов позволило сформулировать рекомендации по оптимальному режиму сварки кольцевых конструкций. В [8] представлена методика измерения растягивающих остаточных напряжений, возникших на границах соединения материалов в двух образцах композитных трехслойных пластин при использовании газовой вольфрамовой дуговой сварки.

Также важное значение имеет создание схем идентификации ПН на этапе проектирования и при их текущем мониторинге. Статья [9] посвящена построению модели прогнозирования ПН при экспериментальном исследовании авиационных тонкостенных рам, получаемых фрезерованием из алюминиевых пластин, в которых из-за низкой жесткости существенное влияние на деформацию оказывают остаточные напряжения. Построение неразрушающего подхода к определению ПН в тонких пластинах представлено в работе [10]. Подход основан на параметризации ПНС с помощью функции напряжений Эри, что позволило определять эти параметры из задачи нелинейной оптимизации.

Стоит отметить, что ряд смежных задач идентификации неоднородных полей ПНС в пластинах был изучен ранее. В статье [11] исследованы обратные задачи идентификации полей ПН при анализе изгибных колебаний пластин в рамках гипотез Тимошенко с помощью нескольких методик, основанных на акустическом подходе. В работе [12] рассмотрена задача в аналогичной постановке для перфорированной двухфазной пластины из ФГМ. Модели круглых сплошной и кольцевой неоднородных по радиальной координате предварительно напряженных пластин Тимошенко разработаны в статье [13]. Рассмотрены одномерные обратные задачи идентификации ПН, решение которых производится с помощью проекционного подхода, позволяющего определять искомые ПН в заданных классах функций.

Основной целью данной работы является использование ранее разработанных моделей и подходов для построения эффективной методики идентификации реальных двумерных законов изменения полей ПНС, возникающих в сплошных, а также имеющих отверстия и включения пластинах, при исследовании акустического отклика с использованием нескольких режимов зондирования. При этом восстанавливаемые поля ПН должны являться решением некоторых вспомогательных задач о неизвестном в рамках обратной задачи начальном воздействии на пластины.

1. Общая постановка задачи

Рассмотрим установившиеся колебания неоднородной предварительно напряженной изотропной тонкой пластины толщины h , занимающей область $S \times [-h/2, h/2]$ (S — область срединного сечения), в которой могут иметься отверстия либо включения. Будем рассматривать случай плоского напряженного состояния, когда на площадках, перпендикулярных оси x_3 , отсутствуют напряжения: отличными от нуля являются две компоненты вектора перемещений: $u_1(x_1, x_2)$ и $u_2(x_1, x_2)$. Линеаризованная постановка задачи в таком случае имеет вид [14, 15]:

$$\begin{aligned} T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ T_{ij} &= \sigma_{ij} + u_{i,m} \sigma_{mj}^0, \\ \sigma_{ij} &= \lambda^* \delta_{ij} u_{m,m} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}), \\ u_i|_{l_u} &= 0, \quad T_{ij} n_j|_{l_\sigma} = P_i, \quad i, j, m = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь T_{ij} — компоненты несимметричного тензора напряжений Пиолы, σ_{ij} — компоненты классического тензора напряжений, σ_{mj}^0 — компоненты тензора ПН, ω —



частота установившихся колебаний, $\lambda^* = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}$ — параметр Ламе плоского напряженно-деформированного состояния, который, как и параметры Ламе $\lambda(x_1, x_2)$, $\mu(x_1, x_2)$, и плотность $\rho(x_1, x_2)$, является функцией двух координат. Три компоненты симметричного тензора ПН $\sigma_{11}^0(x_1, x_2)$, $\sigma_{12}^0(x_1, x_2)$, $\sigma_{22}^0(x_1, x_2)$, удовлетворяющие уравнениям равновесия $\sigma_{ij,j}^0 = 0$, также зависят от двух координат. При записи постановки (1) и далее для компактности представления сумм с повторяющимися индексами использовано соглашение Эйнштейна; для записи производных принято обозначение $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$.

Применяемая модель позволяет описывать неоднородные материалы, в том числе ФГМ, используя представление характеристик пластин (параметров Ламе и плотности) в виде функциональных зависимостей от координат.

Будем считать, что на части границы $l_u \times [-h/2, h/2]$ пластина жестко закреплена, на другой части границы $l_\sigma \times [-h/2, h/2]$ к ней приложена механическая нагрузка, задаваемая компонентами P_i .

Запишем слабую постановку [14] задачи (1), которая получается на основе проектирования уравнений движения на поле возможных перемещений v_i , удовлетворяющих главным граничным условиям $v_i|_{l_u} = 0$:

$$\begin{aligned} & \int_S (\sigma_{11}^0 u_{i,1} v_{i,1} + \sigma_{12}^0 (u_{i,1} v_{i,2} + u_{i,2} v_{i,1}) + \sigma_{22}^0 u_{i,2} v_{i,2}) dS + \\ & + \int_S (\lambda u_{i,i} v_{j,j} + 2\mu \varepsilon_{ij}^u \varepsilon_{ij}^v - \omega^2 \rho u_i v_i) dS - \int_{l_\sigma} P_i v_i dl = 0, \quad (2) \\ & \varepsilon_{ij}^u \varepsilon_{ij}^v = u_{1,1} v_{1,1} + \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) (v_{1,2} + v_{2,1}) + u_{2,2} v_{2,2}. \end{aligned}$$

Слабая постановка задачи в виде (2) позволяет построить эффективные конечно-элементные (КЭ) схемы расчета колебаний пластин.

В качестве модельных объектов исследования далее рассматриваются прямоугольные пластины, как сплошные, так и имеющие круглое отверстие, либо круговое включение (вставку), серединные сечения которых ограничены областью $\{x_1 \in [0, l], x_2 \in [-a/2, a/2]\}$ (рис. 1). Одна из граней $x_1 = 0$ каждой из пластин считается жестко закрепленной, колебания вызываются приложенными к другим граням нормальными и касательными нагрузками. В рамках разработанной модели могут быть рассмотрены пластины другой формы, а также имеющие большее число отверстий либо включений или их комбинации.

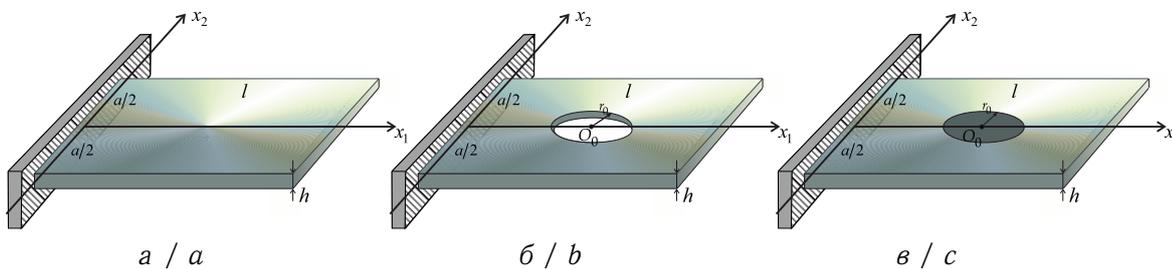


Рис. 1. Общий вид рассматриваемых пластин: а — сплошная; б — с круглым отверстием; в — с круговым включением (вставкой)

Fig. 1. General view of the considered plates: a — solid; b — with round hole; c — with circular inclusion (insert)



2. Вспомогательные задачи расчета полей ПН

В данной работе основной задачей является идентификация реалистичных законов изменения полей ПН, возникающих в сплошных, а также имеющих отверстия и включения пластинах. В таком случае двумерные функции ПН могут задаваться как результат решения вспомогательных задач о приложении к границам заземленных пластин некоторой начальной статической нагрузки P_i^0 . В такой постановке равновесие пластин описывается уравнениями

$$\sigma_{11,1}^0 + \sigma_{12,2}^0 = 0, \quad \sigma_{21,1}^0 + \sigma_{22,2}^0 = 0. \quad (3)$$

Слабую постановку задачи в таком случае можно записать в виде

$$\int_S \left(\lambda u_{i,i}^0 v_{j,j}^0 + 2\mu \left(u_{1,1}^0 v_{1,1}^0 + \frac{1}{2} (u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0) (v_{1,2}^0 + v_{2,1}^0) + u_{2,2}^0 v_{2,2}^0 \right) \right) dS - \int_{l_\sigma} P_i^0 v_i^0 dl = 0. \quad (4)$$

Здесь v_i^0 — начальные пробные функции, удовлетворяющие главным начальным граничным условиям.

Тогда из решения задачи (4) определяются функции начального смещения u_i^0 , затем по формуле обобщенного закона Гука для них вычисляются функции напряжений $\sigma_{ij}^0 = \lambda^* \delta_{ij} u_{m,m}^0 + \mu (u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0)$, используемые в качестве законов изменения полей ПН в постановках задачи (1) и (2).

Для решения записанных в слабых постановках основной (2) и вспомогательной (4) задач разработаны КЭ схемы решения, реализованные в пакете FreeFem++ [15]. При расчетах была использована КЭ сетка с квадратичной аппроксимацией с разбиением не менее 100×60 . При этом для пластин с отверстиями и включениями в этих областях использовалось локальное сгущение сетки для увеличения точности расчетов. Начальная нагрузка выбиралась таким образом, чтобы значения полученных полей ПН относительно модуля Юнга E рассматриваемого материала пластин лежали в диапазоне изменения $\max |\sigma_{ij}^0/E| = 10^{-6} \div 10^{-3}$, соответствующем наиболее часто встречающимся ПН на практике.

Ниже представлены результаты нескольких экспериментов по расчету полей ПН, возникающих в случае приложения разных видов начальных нагрузок, с помощью разработанной КЭ-схемы решения. Размеры рассматриваемых пластин: $l = 1.3$ м, $a = 0.5$ м, радиус отверстия или вставки составляет $r_0 = 0.2$ м. Основной материал пластин — сталь, имеющая характеристики $E = 198$ ГПа, $\nu = 0.28$, $\rho = 7.88$ т/м³. Рассматривался случай вставки из жесткого материала — кубического нитрида бора, с характеристиками $E = 706$ ГПа, $\nu = 0.26$, $\rho = 3.44$ т/м³. Рассмотренные виды предварительных статических нагружений для сплошных и имеющих отверстие и включение пластин, вызывающих ПН, изображены на рис. 2.

Эксперимент 1. Рассмотрено поле ПН для сплошной пластины, вызванное начальной растягивающей вдоль оси x_1 нагрузкой, изображенной на рис. 2, а. На рис. 3 представлены соответствующие трехмерные графики рассчитанных с помощью разработанной КЭ-схемы компонент σ_{11}^0 , σ_{12}^0 , σ_{22}^0 , измеряемых в Па. Здесь и далее трехмерные изображения повернуты таким образом, чтобы передать наиболее характерные части исследуемых функций.

Заметим, что в этом и следующем экспериментах компонента $\sigma_{22}^0(x_1, x_2)$ близка к нулю везде, кроме окрестностей областей жесткой заделки и нагружения (это связано с видом прикладываемых начальных нагрузок).

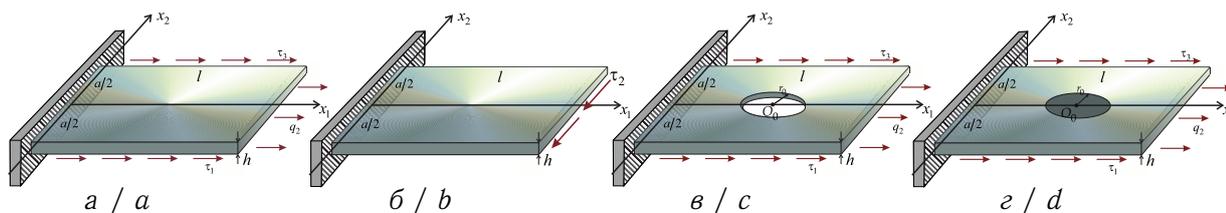


Рис. 2. Рассмотренные виды статических нагрузок, вызывающих поля ПН, в экспериментах по расчету ПН в сплошных (а, б) и имеющих отверстие (в) или включение (г) пластинах
 Fig. 2. Considered types of static loads that cause PS fields in experiments on calculating ST in solid (a, b) and having a hole (c) or an inclusion (d) plates

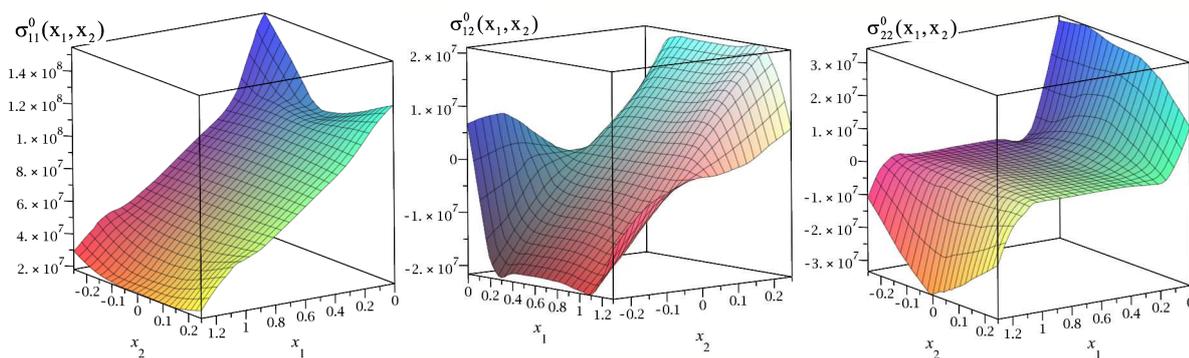


Рис. 3. Рассчитанные поля ПН в сплошной пластине, вызванные растягивающей нагрузкой (цвет онлайн)
 Fig. 3. Calculated PS fields in a solid plate caused by a tensile load (color online)

Эксперимент 2. Рассмотрено поле ПН для сплошной пластины, вызванное начальной сдвиговой нагрузкой, изображенной на рис. 2, б. Трехмерные графики рассчитанных компонент σ_{11}^0 , σ_{12}^0 , σ_{22}^0 представлены на рис. 4.

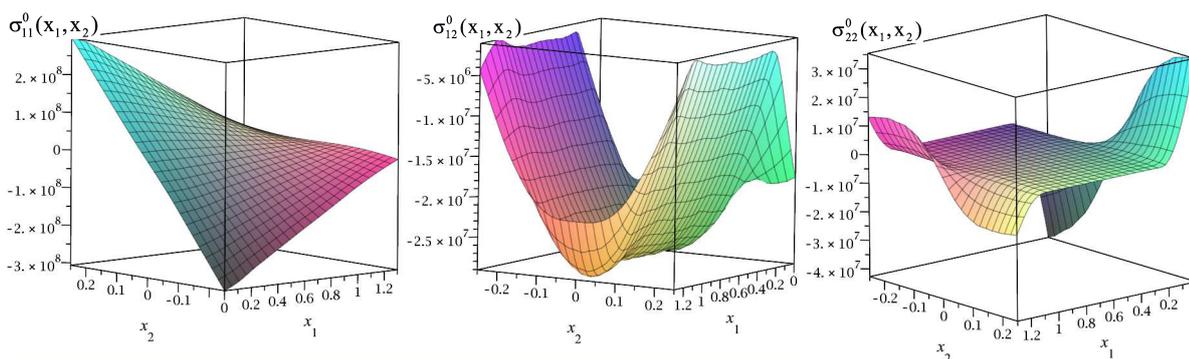


Рис. 4. Рассчитанные поля ПН в сплошной пластине, вызванные сдвиговой нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 4. Calculated PS fields in a solid plate caused by shear load (color online)

Эксперимент 3. Рассмотрено поле ПН для пластины с отверстием, вызванное начальной растягивающей нагрузкой, изображенной на рис. 2, в. Трехмерные графики рассчитанных компонент σ_{11}^0 , σ_{12}^0 , σ_{22}^0 представлены на рис. 5.

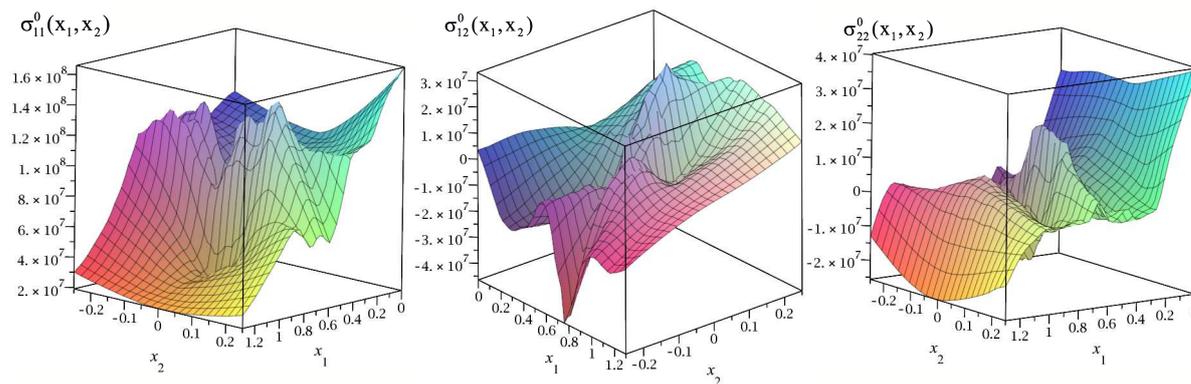


Рис. 5. Рассчитанные поля ПН в пластине с отверстием, вызванные растягивающей нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 5. Calculated PS fields in a plate with a hole caused by tensile load (color online)

Эксперимент 4. Рассмотрено поле ПН для пластины с жесткой вставкой, вызванное начальной растягивающей нагрузкой, изображенной на рис. 2, *г*. Трехмерные графики рассчитанных компонент σ_{11}^0 , σ_{12}^0 , σ_{22}^0 представлены на рис. 6.

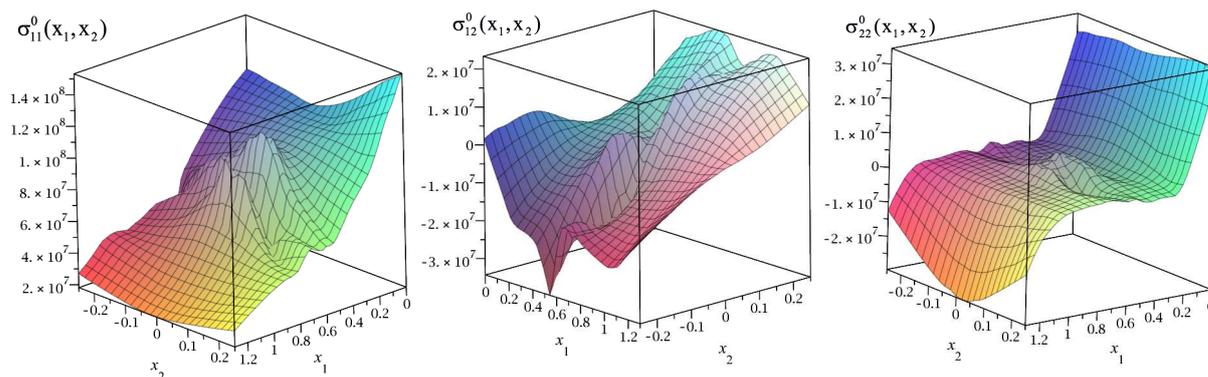


Рис. 6. Рассчитанные поля ПН в пластине с жесткой вставкой, вызванные растягивающей нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 6. Calculated PS fields in a plate with a rigid insert caused by a tensile load (color online)

Замечание. На рис. 5 и 6 видно, что в окрестности отверстия и вставки имеются локальные возмущения функций ПН (концентраторы ПН), однако общий характер этих функций, а также уровни ПН соответствуют функциям на рис. 5 для начального растяжения сплошной пластины.

3. Обратные задачи идентификации рассчитанных двумерных полей ПН

На практике, при проведении мониторинга состояния пластин, функции $\sigma_{ij}^0(x_1, x_2)$, описывающие распределение ПН, возникших в результате некоторого начального воздействия на пластину (см., например, эксперименты из раздела 2), являются неизвестными, и актуальной проблемой становится решение обратных задач (ОЗ) их идентификации [16]. Для этого применяются различные методики, в частности неразрушающий акустический подход, в рамках которого в качестве дополнительной



информации для ОЗ используется акустический отклик, измеренный в некоторых точках объекта в процессе проведения экспериментов по зондированию в различных частотных диапазонах. На его основе *обратные задачи* для рассматриваемых пластин можно сформулировать следующим образом.

Определить три функции-компоненты тензора ПН $\sigma_{11}^0(x_1, x_2)$, $\sigma_{12}^0(x_1, x_2)$, $\sigma_{22}^0(x_1, x_2)$, входящие в состав слабой постановки (2), из экспериментов по зондированию пластин под действием наборов нагрузок вида

$$(T_{11}n_1 + T_{12}n_2)|_{l_\sigma} = P_1, \quad (T_{21}n_1 + T_{22}n_2)|_{l_\sigma} = P_2, \quad (5)$$

с использованием полученной при их проведении дополнительной информации об измеренных на части границы амплитудах перемещений вида

$$u_i|_{l_\sigma} = f_i(\omega), \quad i = 1, 2, \quad \omega \in [\omega_-, \omega_+]. \quad (6)$$

Другие механические параметры пластин при этом считались известными.

Заметим, что сформулированная ОЗ об отыскании поля ПН представляет собой нелинейную коэффициентную обратную задачу, решение которой требует использования специальных методов. Для решения ОЗ в данной работе построен итерационный процесс, подобный разработанным ранее для решения других ОЗ [11, 17, 18], на каждом шаге которого определяются приближения искомым функциям ПН, его схема представлена ниже.

Этап 0. Для искомым функций $\sigma_{ij}^0(x_1, x_2)$ выбираются начальные приближения $\sigma_{ij}^{0(0)}(x_1, x_2)$ на основе априорной информации об их ограниченности. В качестве начальных приближений могут также выбираться нулевые значения ПН, как это сделано в данной работе.

Этап 1. Для текущих приближений ПН с помощью построенной КЭ-схемы рассчитываются поля перемещений $u_i^{(n)}(x_1, x_2)$. Здесь n — номер текущей итерации.

Этап 2. Поправки $\delta\sigma_{ij}^0(x_1, x_2)$ определяются из операторного соотношения, построенного на основе полученного ранее в работе [14] соотношения в общем виде, с использованием дополнительной информации ОЗ (6):

$$\int_S \delta\sigma_{kj}^0 u_{i,j}^{(n)} u_{i,k}^{(n)} dS + \int_{l_\sigma} P_i (f_i - u_i^{(n)}) dl = 0, \quad \omega \in [\omega_-, \omega_+]. \quad (7)$$

Оно представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, решение которого является некорректной задачей и требует использования регуляризационных методов [19].

Этап 3. Поправки, найденные на втором этапе, используются для вычисления следующих приближений искомым функциям ПН:

$$\sigma_{ij}^{0(n)} = \sigma_{ij}^{0(n-1)} + \delta\sigma_{ij}^0. \quad (8)$$

Затем на третьем этапе проверяются условия выхода из итерационного процесса: либо величина функционала невязки станет меньше некоторого заданного малого числа ε_0 , либо число итераций превысит заданное значение N , либо величина поправок станет несущественной. Повторение этапов 1–3 продолжается до выполнения одного из этих условий.

В данной работе также произведена доработка второго этапа описанного выше итерационного процесса с помощью использования основ проекционных подходов,



предложенных ранее в работах [11, 20], позволяющих определять поправки к искомым функциям ПН в заданных классах функций. В рамках проекционного подхода функции поправок были представлены в виде разложений по некоторым системам линейно независимых базисных функций вида

$$\delta\sigma_{ij}^0(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^M C_{ij}^m \psi_m(x_1, x_2). \quad (9)$$

Далее подставим разложения (9) в соотношение (7):

$$\sum_{m=1}^M \left(C_{kj}^m \int_S \psi_m u_{i,j}^{(n)} u_{i,k}^{(n)} dS \right) + \int_{l_\sigma} P_i (f_i - u_i^{(n)}) dl_\sigma = 0. \quad (10)$$

Затем, выбирая набор из K_ω частот ω_k , на которых производится зондирование, с использованием K_{exp} видов зондирующих нагрузок будем проводить $K = K_\omega \times K_{\text{exp}}$ испытаний. Для каждого t -го испытания, соответственно, обозначим P_i^t — компоненты прикладываемой при его проведении нагрузки, f_i^t — дополнительную информацию ОЗ, U_i^t — рассчитанные компоненты поля перемещений $u_i^{(n)}(x_1, x_2)$ для текущей итерации. Тогда данный этап итерационного процесса сводится к решению системы K линейных алгебраических уравнений относительно $3M$ коэффициентов C_{kj}^m разложения (9), которую можно записать в виде

$$\sum_{m=1}^M J_{kj}^{tm} C_{kj}^m = F^t, \quad t = \overline{1, K}, \quad (11)$$

$$J_{kj}^{tm} = \int_S \psi_m U_{i,j}^t U_{i,k}^t dS, \quad F^t = \int_{l_\sigma} P_i^t (f_i^t - U_i^t) dl_\sigma.$$

Полученная СЛАУ (11) решается с помощью метода А. Н. Тихонова [19], затем по формулам (9) определяются искомые поправки к функциям ПН.

Замечание. Количество K уравнений СЛАУ (10), определяемое количеством частот, на которых производится зондирование, и количеством экспериментов по зондированию, вообще говоря, может не быть равно числу $3M$ неизвестных коэффициентов разложения C_{ij}^m . В таком случае СЛАУ (11) является прямоугольной, и для ее решения метод Тихонова также применим. При этом, если известно, что поле ПН самоуравновешено, то в силу взаимосвязи компонент ПН друг с другом, которые в таком случае можно выразить через одну функцию напряжений Эри [17], число неизвестных коэффициентов можно сократить.

Также стоит учитывать, что поскольку в рассматриваемой постановке ОЗ необходимо определять одновременно три функции-компоненты тензора ПН, число экспериментов по зондированию (отличающихся видом нагружения) должно быть не меньше трех.

4. Вычислительные эксперименты по решению ОЗ

На основе предложенного в разделе 4 итерационного процесса был проведен ряд вычислительных экспериментов по идентификации функций двумерного распределения трех компонент ПН в рассмотренных пластинах. При этом искомые функции ПН в экспериментах являлись решением соответствующих вспомогательных задач о



действии начальных нагрузок на пластины, результаты для которых представлены в разделе 2.

Для зондирования в каждом примере было использовано по три вида нагрузок. Для всех рассмотренных пластин применялись серии экспериментов по сжатию вдоль оси x_2 , растяжению вдоль оси x_1 и приложению сдвиговой нагрузки (касательных нагрузок вдоль всех незащемленных граней). В каждом эксперименте зондирование проводилось на четырех выбранных частотах, расположенных в окрестностях первых четырех резонансных частот или вблизи какой-либо одной из них.

В проекционном методе, применяемом на 2-м этапе каждого шага итерационного процесса, число базисных функций в каждом разложении (9) было выбрано равным $M = 6$, при этом в качестве них были выбраны следующие полиномы: $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = x_1$, $\psi_3 = x_2$, $\psi_4 = x_1x_2$, $\psi_5 = x_1^2$, $\psi_6 = x_2^2$. Разложение (9) в таком случае приняло вид

$$\delta\sigma_{ij}^0(x_1, x_2) = C_{ij}^1 + C_{ij}^2x_1 + C_{ij}^3x_2 + C_{ij}^4x_1x_2 + C_{ij}^5x_1^2 + C_{ij}^6x_2^2. \quad (12)$$

В СЛАУ (11) при этом входит $3M = 18$ неизвестных коэффициентов, и она состоит из $K = K_\omega \times K_{\text{exp}} = 4 \times 3 = 12$ уравнений. Как уже отмечалось выше, в таком случае она являлась прямоугольной и плохо обусловленной, и для ее решения применялся регуляризационный метод Тихонова.

Во всех экспериментах в качестве начального приближения было выбрано нулевое поле ПН $\sigma_{ij}^{0(0)}(x_1, x_2) = 0$, что является достаточно удобным с практической точки зрения и позволяет не проводить дополнительные исследования перед основной итерационной процедурой идентификации.

Для каждого эксперимента результаты идентификации представлены в виде трехмерных изображений, на которых график точного решения отображается в виде сплошной поверхности с градиентной заливкой, начальное приближение — в виде синих кубиков, восстановленное решение — в виде черных точек. Также для каждого результата восстановления рассчитаны средние по площади пластин значения погрешности, вычисляемые по формуле

$$\bar{\gamma}_{ij} = \frac{1}{S} \int_S \frac{|\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^{0(n)}|}{\max_{x_1, x_2} |\sigma_{ij}^0|} dx_1 dx_2 \cdot 100\%, \quad (13)$$

позволяющие оценить погрешность реконструкции без учета локальных особенностей восстанавливаемых функций в области заделки, отверстия или вставки. В формуле (13) σ_{ij}^0 — точные значения функций ПН, $\sigma_{ij}^{0(n)}$ — восстановленные на n -й итерации.

Эксперимент 1. Сплошная пластина. Восстановление поля ПН, вызванного растягивающей в направлении x_1 начальной нагрузкой (эксперимент 1 из раздела 2). Были выбраны частоты $\omega_1 = 190$, $\omega_2 = 990$, $\omega_3 = 1900$, $\omega_4 = 2500$ (Гц) в окрестностях первых четырех резонансов. Для восстановления потребовалось 10 итераций. Результаты представлены на рис. 7. Средние погрешности, вычисленные по формуле (13), составили $\bar{\gamma}_{11} = 3.48\%$, $\bar{\gamma}_{12} = 8.81\%$, $\bar{\gamma}_{22} = 7.29\%$.

Результаты эксперимента показывают, что функции σ_{11}^0 и σ_{12}^0 , являющиеся существенно неоднородными, восстанавливаются достаточно точно. Функция σ_{22}^0 , близкая к нулю из-за вида начальной нагрузки (что уже отмечалось в разделе 2), восстанавливается также достаточно хорошо везде, кроме области жесткой заделки. Это связано с тем, что в данной области ядра операторного уравнения (7) могут обращаться в нуль. Однако для решения практических задач идентификации подобный результат

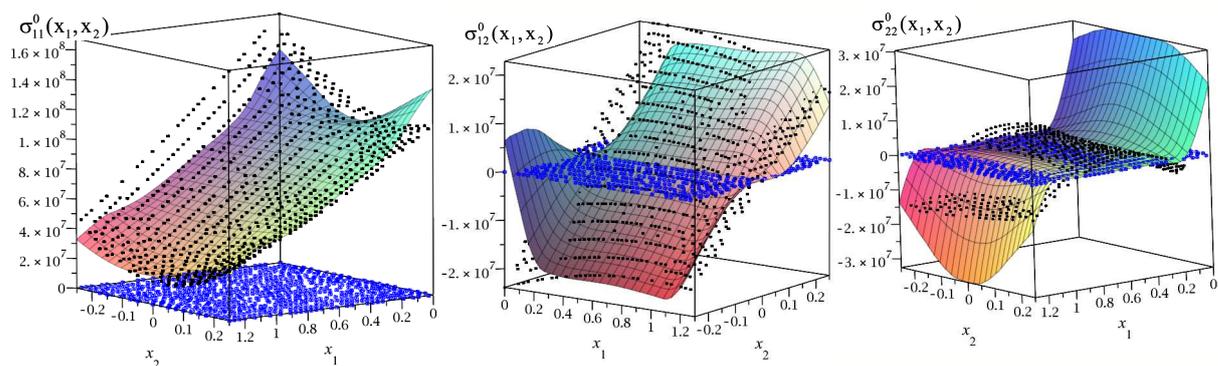


Рис. 7. Результат идентификации рассчитанных полей ПН в сплошной пластине, вызванных растягивающей начальной нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 7. The result of identification of the calculated PS fields in a solid plate caused by a tensile initial load (color online)

(качественное восстановление уровня и характера искомой функции вне области заделки) является вполне удовлетворительным. Заметим, что данное явление для σ_{22}^0 проявлялось и в последующих экспериментах.

Эксперимент 2. Сплошная пластина. Восстановление поля ПН, вызванного сдвиговой начальной нагрузкой (эксперимент 2 из раздела 2). Частоты зондирования: $\omega_1 = 230$, $\omega_2 = 980$, $\omega_3 = 2040$, $\omega_4 = 2800$ (Гц). Для восстановления потребовалось 12 итераций. Результаты представлены на рис. 8. Средние погрешности: $\bar{\gamma}_{11} = 1.05\%$, $\bar{\gamma}_{12} = 2.02\%$, $\bar{\gamma}_{22} = 1.81\%$.

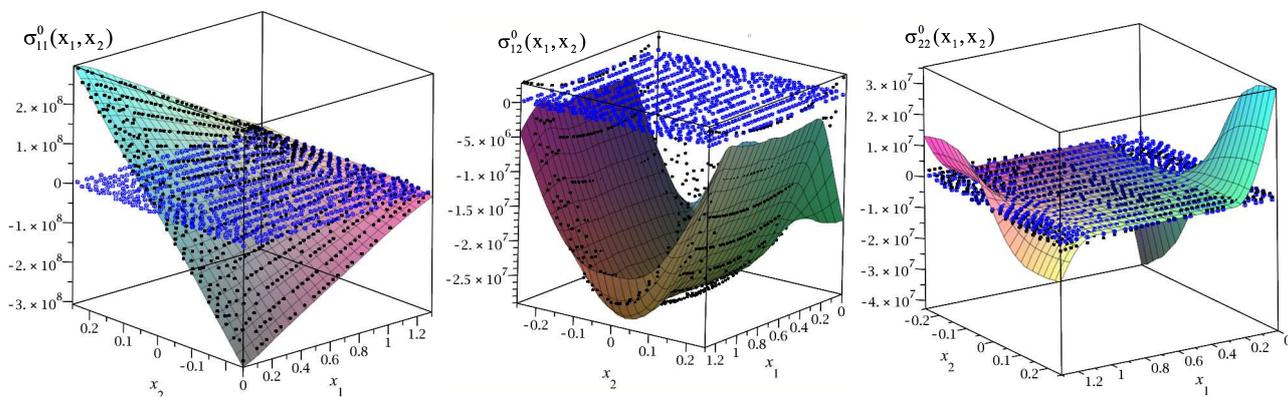


Рис. 8. Результат идентификации рассчитанных полей ПН в сплошной пластине, вызванных сдвиговой начальной нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 8. The result of identification of the calculated PS fields in a solid plate caused by a shear initial load (color online)

Заметим, что достаточно точно восстановился существенно немонотонный закон изменения функции σ_{12}^0 .

Эксперимент 3. Восстановление поля ПН в пластине с отверстием, вызванного растягивающей в направлении x_1 начальной нагрузкой (эксперимент 3 из раздела 2). Частоты зондирования: $\omega_1 = 120$, $\omega_2 = 130$, $\omega_3 = 140$, $\omega_4 = 150$ (Гц) (расположенные слева от первого резонанса). Для восстановления потребовалось 5 итераций; поправки, вычисляемые на последующих итерациях, были близки к нулю. Результаты представлены на рис. 9. Средние погрешности: $\bar{\gamma}_{11} = 5.93\%$, $\bar{\gamma}_{12} = 1.03\%$, $\bar{\gamma}_{22} = 7.01\%$.

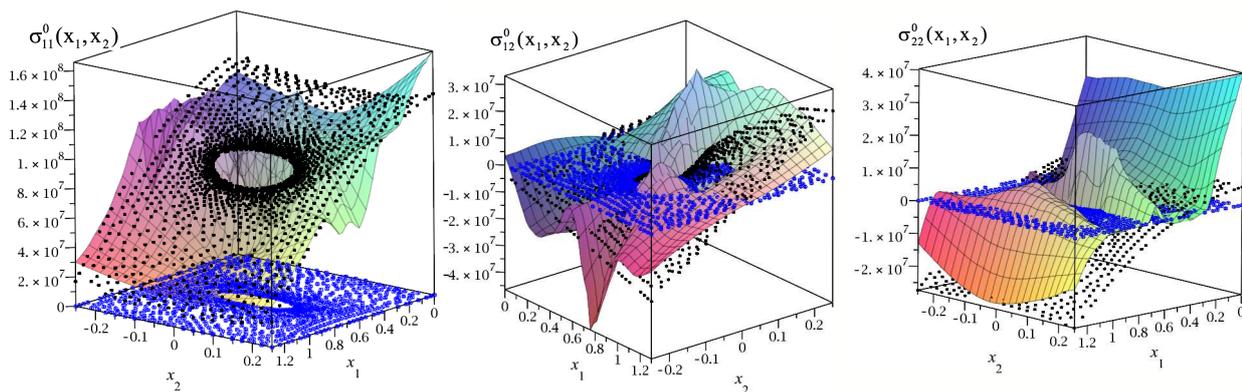


Рис. 9. Результат идентификации рассчитанных полей ПН в пластине с отверстием, вызванных растягивающей начальной нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 9. The result of identification of the calculated PS fields in a plate with a hole caused by a tensile initial load (color online)

Эксперимент 4. Восстановление поля ПН в пластине с жесткой вставкой, вызванного растягивающей в направлении x_1 начальной нагрузкой (эксперимент 4 из раздела 2). Частоты зондирования: $\omega_1 = 120$, $\omega_2 = 130$, $\omega_3 = 140$, $\omega_4 = 150$ (Гц). Для восстановления потребовалось 18 итераций. Результаты представлены на рис. 10. Средние погрешности: $\bar{\gamma}_{11} = 2.31\%$, $\bar{\gamma}_{12} = 4.26\%$, $\bar{\gamma}_{22} = 5.73\%$.

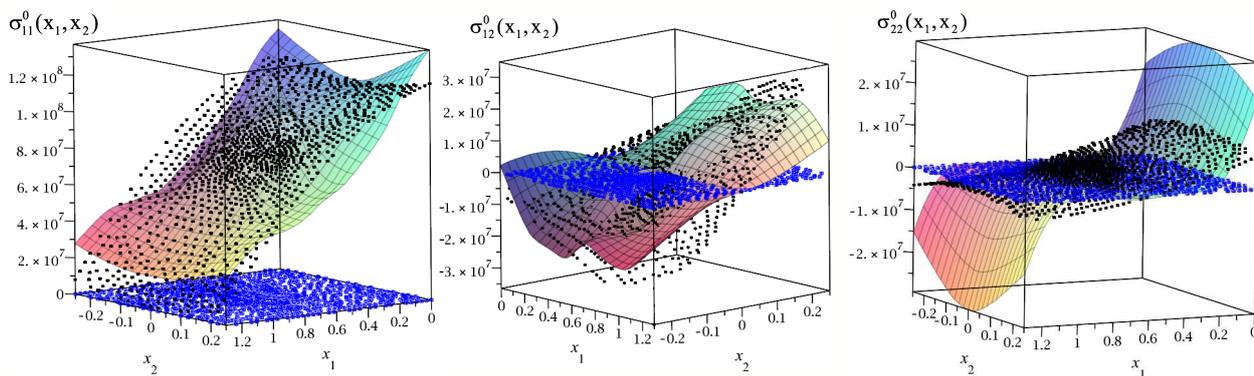


Рис. 10. Результат идентификации рассчитанных полей ПН в пластине с жесткой вставкой, вызванных растягивающей начальной нагрузкой (цвет онлайн)

Fig. 10. The result of identification of the calculated PS fields in a plate with a rigid insert caused by a tensile initial load (color online)

Результаты экспериментов 3 и 4 по восстановлению ПН в пластинах с отверстием и вставкой показывают, что разработанная методика позволяет определять уровень и общий характер распределения ПН в рассмотренных пластинах без учета локальных особенностей вблизи отверстия или вставки. При необходимости более точной идентификации ПН в окрестности отверстия или вставки могут быть применены иные специализированные методы, в которых решение, полученное с помощью данного подхода, может быть использовано в качестве начального приближения.

Также отметим, что поскольку идентификация проводится в общем виде и поправки к неизвестным функциям ищутся в произвольных классах функций, разработанная схема позволяет проводить идентификацию полей ПН любого характера вне



зависимости от природы их возникновения (ПН могут быть следствием произвольных начальных нагрузок, вызывающих упругие или пластические деформации, термических воздействий и других процессов). Также к преимуществам предложенного подхода следует отнести то, что восстановление достаточно эффективно производится для нулевого начального приближения, что является существенным фактором при решении практических задач.

Заключение

Построенная модель планарных колебаний предварительно напряженных пластин позволяет рассматривать пластины различной формы, в том числе при наличии в них отверстий и вставок; учитывать неоднородность свойств в плоскости пластин, а также задавать распределение предварительных напряжений в них как аналитически, так и численно — в виде решений вспомогательных задач о воздействии начальных нагрузок, реализуемых в разработанных конечно-элементных схемах расчета. Для исследования поставленных новых обратных задач идентификации ПН на основе акустического зондирования разработана итерационная схема, на каждом шаге которой применяется проекционный подход для поиска поправок к искомым функциям. В результате ее использования при проведении нескольких экспериментов по зондированию удается достаточно эффективно восстанавливать одновременно три компоненты двумерного поля ПН, что было проиллюстрировано наборами вычислительных экспериментов. Методика также оказалась применимой для пластин, имеющих отверстия либо включения, и позволила определить общий уровень и характер распределения ПН (без учета локальных особенностей в зонах концентраторов), что дает возможность использовать ее для широкого спектра объектов.

Список литературы

1. Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Ростов-на-Дону : Изд-во ЮФУ, 2015. 206 с.
2. Carpinteri A., Pugno N. Thermal loading in multi-layer and/or functionally graded materials: Residual stress field, delamination, fatigue and related size effects // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43, iss. 3–4. P. 828–841. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.05.009>
3. Дородов П. В., Поспелова И. Г. Исследование напряженного состояния в пластине, ослабленной концентратором напряжений // Достижения науки и техники АПК. 2013. № 8. С. 67–70.
4. Schajer G. S. Practical Residual Stress Measurement Methods. Wiley, 2013. 560 p.
5. Guo J., Fu H., Pan B., Kang R. Recent progress of residual stress measurement methods: A review // Chinese Journal of Aeronautics. 2021. Vol. 34, iss. 2. P. 54–78. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2019.10.010>
6. Uzun F., Korsunsky A. M. The use of eigenstrain theory and fuzzy techniques for intelligent modeling of residual stress and creep relaxation in welded superalloys // Materials Today: Proceedings. 2020. Vol. 33, iss. 4. P. 1880–1883. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.04.910>
7. Ma W., Zhang H., Zhu W., Xu F., Yang C. Study on Residual Stress of Welded Hoop Structure // Applied Sciences. 2021. Vol. 10, iss. 8. Art. 2838. <https://doi.org/10.3390/app10082838>
8. Li N., Zhang M., Ye J.-L., Liu C. Experimental investigation on residual stress distribution in zirconium/titanium/steel tri-metal explosively welded composite plate after cutting and welding of a cover plate // Journal of Manufacturing Processes. 2021. Vol. 64. P. 55–63. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2021.01.034>



9. Yi S., Wu Y., Gong H., Peng C., He Y. Experimental Analysis and Prediction Model of Milling-Induced Residual Stress of Aeronautical Aluminum Alloys // *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11, iss. 13. Art. 5881. <https://doi.org/10.3390/app11135881>
10. Huang C., Wang L., Wang K. Residual stress identification in thin plates based on modal data and sensitivity analysis // *International Journal of Solids and Structures*. 2022. Vol. 236–237, iss. 4. Art. 111350. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111350>
11. Nedin R. D., Vatulyan A. O., Bogachev I. V. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2018. Vol. 41, iss. 4. P.1600–1618. <https://doi.org/10.1002/mma.4688>
12. Nedin R. D. Modeling and frequency analysis of prestressed functionally graded plates with holes // *Computational Continuum Mechanics*. 2019. Vol. 12, iss. 2. P. 192–201. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.17>
13. Bogachev I. V. Determination of Prestress in Circular Inhomogeneous Solid and Annular Plates in the Framework of the Timoshenko Hypotheses // *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11, iss. 21. Art. 9819. <https://doi.org/10.3390/app11219819>
14. Nedin R. D., Vatulyan A. O. Inverse Problem of Non-homogeneous Residual Stress Identification in Thin Plates // *International Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 50, iss. 13. P. 2107–2114. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.03.008>
15. Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии : учеб. пособие. Ростов-на-Дону : Изд-во ЮФУ, 2008. 256 с.
16. Ватульян А. О. Коэффициентные обратные задачи механики. Москва : Физматлит, 2019. 272 с.
17. Богачев И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В., Лапина П. А., Недин Р. Д. Идентификация свойств неоднородной пластины в рамках модели Тимошенко // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 419–430. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430>
18. Nedin R. D., Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Bogachev I. V. Detection of nonuniform residual strain in a pipe // *International Journal of Solids and Structures*. 2018. Vol. 139–140. P. 121–128. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.01.026>
19. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1986. 288 с.
20. Ватульян А. О., Богачев И. В. О проекционном методе идентификации характеристик неоднородных тел // *Доклады Академии наук*. 2018. Т. 478, № 5. С. 532–535. <https://doi.org/10.7868/S0869565218050079>, EDN: YPEEZO

References

1. Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Nedin R. D. *Predvaritel'nye napriazheniia: modelirovanie i identifikatsiia* [Prestresses: Modeling and Identification]. Rostov-on-Don, Southern Federal University Publ., 2015. 206 p. (in Russian).
2. Carpinteri A., Pugno N. Thermal loading in multi-layer and/or functionally graded materials: Residual stress field, delamination, fatigue and related size effects. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, iss. 3–4, pp. 828–841. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.05.009>
3. Dorodov P. V., Pospelova I. G. Investigation of the stress state in a plate weakened by a stress concentrator. *Dostizheniya nauki i tekhniki APK* [Achievements of Science and Technology of the Agro-industrial Complex], 2013, vol. 8, pp. 67–70 (in Russian).
4. Schajer G. S. *Practical Residual Stress Measurement Methods*. Wiley, 2013. 560 p.
5. Guo J., Fu H., Pan B., Kang R. Recent progress of residual stress measurement methods: A review. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2021, vol. 34, iss. 2, pp. 54–78. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2019.10.010>



6. Uzun F., Korsunsky A. M. The use of eigenstrain theory and fuzzy techniques for intelligent modeling of residual stress and creep relaxation in welded superalloys. *Materials Today: Proceedings*, 2020, vol. 33, iss. 4, pp. 1880–1883. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.04.910>
7. Ma W., Zhang H., Zhu W., Xu F., Yang C. Study on Residual Stress of Welded Hoop Structure. *Applied Sciences*, 2021, vol. 10, iss. 8, art. 2838. <https://doi.org/10.3390/app10082838>
8. Li N., Zhang M., Ye J.-L., Liu C. Experimental investigation on residual stress distribution in zirconium/titanium/steel tri-metal explosively welded composite plate after cutting and welding of a cover plate. *Journal of Manufacturing Processes*, 2021, vol. 64, pp. 55–63. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2021.01.034>
9. Yi S., Wu Y., Gong H., Peng C., He Y. Experimental Analysis and Prediction Model of Milling-Induced Residual Stress of Aeronautical Aluminum Alloys. *Applied Sciences*, 2021, vol. 11, iss. 13, art. 5881. <https://doi.org/10.3390/app11135881>
10. Huang C., Wang L., Wang K. Residual stress identification in thin plates based on modal data and sensitivity analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 2022, vol. 236–237, art. 111350. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111350>
11. Nedin R. D., Vatulyan A. O., Bogachev I. V. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018, vol. 41, iss. 4, pp. 1600–1618. <https://doi.org/10.1002/mma.4688>
12. Nedin R. D. Modeling and frequency analysis of prestressed functionally graded plates with holes. *Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, iss. 2, pp. 192–201. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.17>
13. Bogachev I. V. Determination of Prestress in Circular Inhomogeneous Solid and Annular Plates in the Framework of the Timoshenko Hypotheses. *Applied Sciences*, 2021, vol. 11, iss. 21, art. 9819. <https://doi.org/10.3390/app11219819>
14. Nedin R. D., Vatulyan A. O. Inverse Problem of Non-homogeneous Residual Stress Identification in Thin Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, vol. 50, iss. 13, pp. 2107–2114. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.03.008>
15. Zhukov M. Yu., Shiryayeva E. V. *Ispol'zovanie paketa konechnykh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii* [Using the FreeFem++ Finite Element Package for Problems in Fluid Dynamics, Electrophoresis and Biology]. Rostov-on-Don, Southern Federal University Publ., 2008. 256 p. (in Russian).
16. Vatulyan A. O. *Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki* [Coefficient inverse problems of mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2019. 272 p. (in Russian).
17. Bogachev I. V., Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Lapina P. A., Nedin R. D. Identification of Properties of Inhomogeneous Plate in the Framework of the Timoshenko Model. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 419–430 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430>
18. Nedin R. D., Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Bogachev I. V. Detection of nonuniform residual strain in a pipe. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 139–140, pp. 121–128. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.01.026>
19. Tihonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of ill-posed problems solving]. Moscow, Nauka, 1986. 288 p. (in Russian).
20. Vatulyan A. O., Bogachev I. V. The projection method for identification of the characteristics of inhomogeneous solids. *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, iss. 2, pp. 82–85. <https://doi.org/10.1134/S1028335818020088>, EDN: XYCLQT

Поступила в редакцию / Received 24.10.2022

Принята к публикации / Accepted 27.01.2023

Опубликована / Published 30.11.2023