



МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 195–206
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 195–206

mmi.sgu.ru

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-195-206>

EDN: ZXRJRF

Научная статья
УДК 539.31

Сравнение аналитического и численного решений задачи о цилиндрической оболочке с круговым отверстием под действием различных нагрузок

С. В. Каштанова^{1✉}, А. В. Ржонницкий²

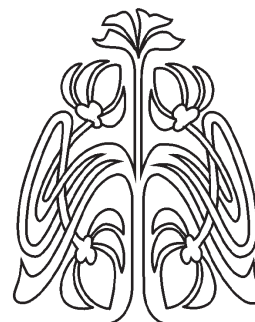
¹Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Россия, 199178, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., д. 61

²Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), Россия, 190013, г. Санкт-Петербург, Московский пр., д. 26

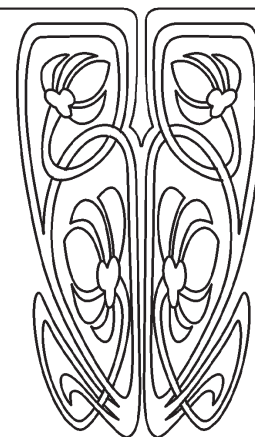
Каштанова Станислава Викторовна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, kastasya@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1090-0320>, AuthorID: 934447

Ржонницкий Алексей Викторович, старший преподаватель кафедры математики, rzhonsnitskiy@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5825-5036>

Аннотация. Представлены результаты вычислений поля напряжений цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием и находящейся под воздействием различных нагрузок: одноосного растяжения, внутреннего давления и кручения. Шесть упрощенных уравнений теории цилиндрических оболочек с большим показателем изменчивости (совпадающие с уравнениями теории пологих оболочек) сводятся к уравнению математической физики относительно потенциала напряжений, которое решается методом Фурье. Основным препятствием к получению ответа является необходимость поиска коэффициентов в разложении решения в сумму базисных функций, при которых это решение удовлетворяет граничным условиям. Также это уравнение зависит от параметра β , ответственного за отношение между геометрическими характеристиками оболочки и отверстия. С механической точки зрения для малых и средних отверстий этот параметр имеет ограничения $\beta \leq 4$, так как при больших значениях



Научный
отдел





отверстие считается большим, и для описания напряженно-деформированного состояния применяются общие уравнения теории цилиндрических оболочек. При этом детальное изучение классических работ привело к пониманию того, что ни один из до сих пор предложенных методов поиска коэффициентов нельзя считать окончательно удачным, а результаты, полученные этими методами, разнятся. Среди разнообразия работ советских и западных ученых 60–70-х гг. XX в. выделяются численные результаты инженера Ван Дайка, которые он получил методом коллокаций. В отличие от своих современников, раскладывающих решение в ряд по малому параметру β и оттого получающих только результаты, близкие к плоскому случаю, Ван Дайк впервые опубликовал численные результаты для всего рабочего диапазона параметра β в рамках рассмотрения малых и средних отверстий. В данной статье предложен новый подход, основанный на разложении базисных функций в ряд Фурье. Впервые удалось составить бесконечную систему линейно независимых уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов. Существенно, что предложенный метод, в отличие от известного метода малого параметра, не имеет математических ограничений и может применяться не только для значений параметра β , близких к нулю, а для любых значений. Ограничения вплоть до $\beta = 4$ наложены механической моделью. Составлены системы для нахождения неизвестных коэффициентов при базисных функциях для трех типов нагрузок, проведено сравнение результатов, полученных авторами, с результатами, полученными численным методом. При этом если в большинстве источников приводятся только результаты вычисления окружных напряжений на границе отверстия, то в предлагаемой работе найдено поле напряжений для всей цилиндрической оболочки, возникающее ввиду наличия отверстия, в зависимости от полярных координат (r, θ) .

Ключевые слова: цилиндрические оболочки, оболочки с отверстиями, растяжение, внутреннее давление, кручение, поле напряжений, аналитический подход

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-60008).

Для цитирования: *Каштанова С. В., Ржонсницкий А. В.* Сравнение аналитического и численного решений задачи о цилиндрической оболочке с круговым отверстием под действием различных нагрузок // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 2. С. 195–206. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-195-206>, EDN: ZXRJRF

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Cylindrical shell with a circular hole under various loads: Comparison of analytical and numerical solutions

S. V. Kashtanova^{1✉}, A. V. Rzhonsnitskiy²

¹Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61 Bolshoi prospect V.O., St. Petersburg 199178, Russia

²Saint-Petersburg State Institute of Technology, 26 Moskovski Ave., St. Petersburg 190013, Russia

Stanislava V. Kashtanova, kastasya@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1090-0320>, AuthorID: 934447

Alexey V. Rzhonsnitskiy, rzhonsnitskiy@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5825-5036>



Abstract. In this paper, the authors present the results of calculations of the stress field of a cylindrical shell weakened by a circular hole and under the influence of various loads: uniaxial tension, internal pressure and torsion. Six simplified equations of the theory of cylindrical shells with a high variability index (coinciding with the equations of the theory of shallow shells) are reduced to an equation of mathematical physics with respect to the stress potential, which is solved by the Fourier method. The main obstacle to obtaining an answer is the need to search for coefficients in the decomposition of the solution into the sum of the basis functions for which this solution satisfies the boundary conditions. Also, this equation depends on the parameter β , which is responsible for the relationship between the geometric characteristics of the shell and the hole. From a mechanical point of view, for small and medium holes, this parameter has limitations of $\beta \leq 4$, because for large values, the hole is considered large, and the general equations of the theory of cylindrical shells are used to describe the stress-strain state. At the same time, a detailed study of classical works has led to the understanding that none of the previously proposed methods for finding coefficients can be considered definitively successful, and the results obtained by these methods vary. Among the variety of works by Soviet and Western scientists of the 1960-70s years of the twentieth century, the numerical results of engineer Van Dyke, which he obtained by collocation, stand out. Unlike his contemporaries, who lay out the solution in a row for a small parameter β and therefore get results only close to the flat case, Van Dyke first published results for the entire working range of the parameter β in the framework of considering small and medium holes. The authors proposed a new approach based on the decomposition of basic functions into a Fourier series. For the first time, it was possible to compose an infinite system of linearly independent equations for finding unknown coefficients. It is essential that the proposed method, unlike the well-known small parameter method, has no mathematical limitations and can be used not only for the values of the parameter β close to zero, but for any values. Restrictions up to $\beta = 4$ are imposed by the mechanical model. In this paper, systems for finding unknown coefficients for basic functions for three types of loads are compiled, and the results obtained by the authors are compared with the results obtained by the numerical method. At the same time, if in most sources only the results of calculating the circumferential stresses at the boundary of the hole are given, in the proposed work the stress field for the entire cylindrical shell is found, arising due to the presence of the hole, depending on the polar coordinates (r, θ) .

Keywords: cylindrical shells, shell with cutouts, axial tension, inner pressure, torsion, stress field, analytical approach

Acknowledgements: The work was supported by Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-31-60008).

For citation: Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V. Cylindrical shell with a circular hole under various loads: Comparison of analytical and numerical solutions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 2, pp. 195–206 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-195-206>, EDN: ZXRJRF

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В недавних работах авторов статьи [1, 2] был пересмотрен классический подход к решению задачи об осевом растяжении цилиндрической оболочки с круглым вырезом. Главным параметром этой задачи является некоторый геометрический параметр β , содержащий соотношение между радиусом отверстия, радиусом цилиндрической оболочки и толщиной оболочки. Если этот параметр равен нулю, то получается плоская



задача (и, в частности, задача Кирша в случае, когда граничным условием является осевое растяжение). Необходимость пересмотреть классический подход возникла по целому ряду причин: малая область применимости решения (близкая к задаче Кирша), отсутствие общей системы для поиска неизвестных базисных коэффициентов решения, отсутствие исследования линейной зависимости некоторых уравнений, связывающих эти коэффициенты, отсутствие явных формул для поля напряжений и возможности проведения аналитического анализа. Классический способ, предложенный в [3], заключался в разложении в степенной ряд решения и коэффициентов по малому параметру β , что сразу накладывало ограничения на область применимости. Активные попытки реализовать эту идею предпринимались в 1960-е гг. XX в., что отражено в работах [4–7], однако аналитические формулы для напряжений так и не были получены. Далее к этой задаче подходили только численно, а теперь уже методами конечных элементов [8–14]. Подробная история вопроса и анализ имеющихся подходов изложены в [15].

Авторы настоящей работы предложили разложить базисные функции решения в ряды Фурье и разделить переменные [1]. Это позволило впервые получить бесконечную линейную систему для поиска неизвестных коэффициентов. Затем было предложено найти и исключить линейно зависимое уравнение и после некоторой замены переменных доказать редуцируемость системы [2]. Этот метод позволяет получить результаты для любых механически допустимых β (от 0 до 4). В данной работе эта идея, помимо осевого растяжения, применяется к другим граничным условиям: внутреннему давлению и кручению. Приведено сравнение аналитических результатов авторов и численных результатов, полученных Ван Дайком [16] методом коллокаций.

1. Постановка задачи

Рассматривается цилиндрическая оболочка радиуса R и толщины h , ослабленная круговым отверстием радиуса r_0 , под воздействием различных нагрузок. Основным параметром, ответственным за отношение между геометрическими характеристиками оболочки и отверстия, является

$$\beta^2 = r_0^2 \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4Rh},$$

где ν — коэффициент Пуассона. Заметим, что предельный переход при $\beta \rightarrow 0$ приводит к плоской задаче.

Уравнение, выведенное Лурье [3], для такой оболочки имеет вид

$$\Delta\Delta\Phi + 8i\beta^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

и содержит функцию $\Phi = \frac{Eh}{8\beta^2 R} w - iU$, зависящую от нормального прогиба w , функции напряжений U и модуля Юнга E .

Связь функции U с тензором напряжений T задается соотношением

$$\begin{pmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\sigma = T/h$ — срединное поверхностное напряжение.



Уравнение (1) рассматривается с тремя типами граничных условий:

I) растяжение на бесконечности вдоль координаты x нагрузкой p :

– на бесконечности $T_x = p, T_{xy} = 0, T_y = 0, w = 0$;

– на границе отверстия в полярных координатах (r, θ) – свободный край

$$T_{rr}|_{r=r_0} = 0, \quad T_{r\theta}|_{r=r_0} = 0, \quad M_r|_{r=r_0} = 0, \quad Q_r|_{r=r_0} = 0; \quad (3)$$

II) равномерное внутреннее давление q_0 ($q = q_0 r_0 / 2$):

– на бесконечности $T_x = q, T_y = 2q, T_{xy} = 0$, или в полярных координатах

$$2T_r = q(3 - \cos 2\theta), \quad 2T_{r\theta} = q \sin 2\theta, \quad 2T_\theta = q(3 + \cos 2\theta);$$

– на границе отверстия в полярных координатах

$$T_{rr}|_{r=r_0} = 0, \quad T_{r\theta}|_{r=r_0} = 0, \quad M_r|_{r=r_0} = 0, \quad Q_r|_{r=r_0} = -\frac{q_0 r_0}{2}; \quad (4)$$

III) кручение:

– на бесконечности $T_x = 0, T_{xy} = \tau, T_y = 0, \tau = M/2\pi R^2$, или в полярных координатах

$$T_r = \tau \sin 2\theta, \quad T_\theta = -\tau \sin 2\theta, \quad T_{r\theta} = \tau \cos 2\theta;$$

– на границе отверстия в полярных координатах условия (3).

Решение, предложенное авторами в [1, 2] и основанное на разложении базисных функций в ряд Фурье, может быть записано в следующей форме (для случаев I, II и III соответственно):

$$\Phi_I = -i \frac{py^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) f_n, \quad (5)$$

$$\Phi_{II} = -i \frac{qy^2}{2} - i \frac{2qx^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) f_n, \quad (6)$$

$$\Phi_{III} = -i\tau xy + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) f_n. \quad (7)$$

При этом для I и II типов граничных условий, ввиду симметричности, функция $f_n(r, \theta)$ раскладывается в ряд по косинусам:

$$f_n(r, \theta) = \frac{g(r, n, 0)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} g(r, n, l) \cos 2l\theta, \quad (8)$$

а для III типа, ввиду антисимметричности, – по синусам:

$$f_n(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{g}(r, n, l) \sin 2l\theta. \quad (9)$$

В свою очередь,

$$g(n, r, l) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l} \frac{H_n^{(1)}((1+i)\beta r)}{H_n^{(1)}((1+i)\beta)} (J_{n+2l}((1+i)\beta r) + J_{n-2l}((1+i)\beta r)),$$



$$n = 1, \dots, \infty, \quad l = 0, 1, \dots, \infty, \quad (10)$$

$$\tilde{g}(n, r, l) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l} \frac{H_n^{(1)}((1+i)\beta r)}{H_n^{(1)}((1+i)\beta)} (J_{n-2l}((1+i)\beta r) - J_{n+2l}((1+i)\beta r)),$$

$$n = 1, \dots, \infty, \quad l = 1, \dots, \infty. \quad (11)$$

Здесь $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ — целая часть числа, $H_n^{(1)}(\cdot)$ — функции Ханкеля I рода, а $J_{n\pm 2l}(\cdot)$ — функции Бесселя.

При любых константах a_n и b_n функции Φ , определенные равенствами (5)–(7) и (8)–(11), удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям на бесконечности. Для всех трех случаев коэффициенты a_n и b_n могут быть найдены из условия (3) или (4) на границе отверстия. Тем самым функции Φ для всех типов граничных условий будут полностью определены, а с ними из соотношений (2) будут найдены и напряжения цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием под воздействием различных нагрузок.

2. Системы

Удачное представление (5)–(7) решения уравнения (1) позволило впервые получить в явном виде бесконечную систему линейных уравнений для поиска коэффициентов a_n и b_n . В работе [1] такая система была получена для граничных условий I типа. При этом авторами было доказано, что одно из уравнений является линейной комбинацией четырех других, а потому его следовало исключить из дальнейшего решения. Из настоящей работы видно, что задача с граничными условиями II типа сохраняет почти все свойства системы с I типом граничных условий, в то время как для случая кручения система значительно меняется ввиду антисимметрии. В работе [2] доказана редуцируемость всех полученных бесконечных систем. Для всех типов граничных условий получены матричные формы систем при помощи подстановки решения (5) в (3) для I типа, (6) в (4) для II и (7) в (3) для III типа. Как видно ниже, подходящая замена $t_i(n, l)$ на $\tilde{t}_i(n, l)$ и $g(n, l)$ на $\tilde{g}(n, l)$ в третьем случае позволяет сохранить одинаковую структуру матриц всех систем (табл. 1, 2):

$$t_3(n, l) = i(-4l^2 \nu g(n, l) + \nu g'(n, l) + g''(n, l)),$$

$$t_4(n, l) = i(12l^2 g(n, l) - (1 + \nu + 4l^2(2 - \nu))g'(n, l) + g'''(n, l)),$$

$$\tilde{t}_3(n, l) = i(-4l^2 \nu \tilde{g}(n, l) + \nu \tilde{g}'(n, l) + \tilde{g}''(n, l)),$$

$$\tilde{t}_4(n, l) = i(12l^2 \tilde{g}(n, l) - (1 + \nu + 4l^2(2 - \nu))\tilde{g}'(n, l) + \tilde{g}'''(n, l)).$$

3. Результаты вычислений

На рис. 1 представлены графики напряжений $\sigma_{\theta\theta}/p$ для I, II и III типов граничных условий, полученные аналитическим методом, рассмотренным в данной работе (рис. 1, а, в, д соответственно), и полученные Ван Дайком в 1965 г. методом коллокаций [16] (рис. 1, б, г, е соответственно).

На рис. 2, а, б, в представлены поля напряжений $\sigma_{\theta\theta}/p$ соответственно для I, II, III типов граничных условий при $\beta = 0.1, 1, 4$.



Таблица 1 / Table 1

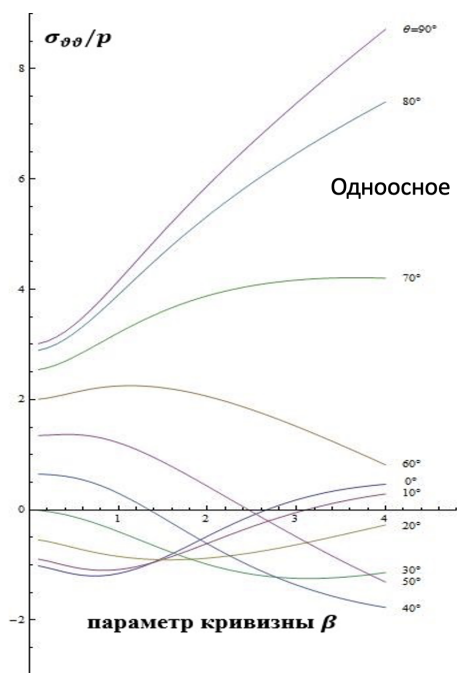
Система для I и II типов граничных условий (ГУ)
System for the I and II types of boundary conditions

n	0		1		2		3		Неизв.коэфф	Св. столбец I тип ГУ	Св. столбец II тип ГУ
	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re			
0	$t_3(0,0)$	$t_3(0,0)$	$t_3(1,0)$	$t_3(1,0)$	$t_3(2,0)$	$t_3(2,0)$	$t_3(3,0)$	$t_3(3,0)$	a_0	0	0
0	$t_4(0,0)$	$t_4(0,0)$	$t_4(1,0)$	$t_4(1,0)$	$t_4(2,0)$	$t_4(2,0)$	$t_4(3,0)$	$t_4(3,0)$	b_0	0	$16\beta^2 q$
1	$g(0,1)$	$g(0,1)$	$g(1,1)$	$g(1,1)$	$g(2,1)$	$g(2,1)$	$g(3,1)$	$g(3,1)$	a_1	$-\frac{p}{4}$	$\frac{q}{4}$
1	$g'(0,1)$	$g'(0,1)$	$g'(1,1)$	$g'(1,1)$	$g'(2,1)$	$g'(2,1)$	$g'(3,1)$	$g'(3,1)$	b_1	$-\frac{p}{2}$	$\frac{q}{2}$
									\vdots		
1	$t_3(0,1)$	$t_3(0,1)$	$t_3(1,1)$	$t_3(1,1)$	$t_3(2,1)$	$t_3(2,1)$	$t_3(3,1)$	$t_3(3,1)$	a_2	0	0
1	$t_4(0,1)$	$t_4(0,1)$	$t_4(1,1)$	$t_4(1,1)$	$t_4(2,1)$	$t_4(2,1)$	$t_4(3,1)$	$t_4(3,1)$	b_2	0	0
2	$g(0,2)$	$g(0,2)$	$g(1,2)$	$g(1,2)$	$g(2,2)$	$g(2,2)$	$g(3,2)$	$g(3,2)$	a_3	0	0
2	$g'(0,2)$	$g'(0,2)$	$g'(1,2)$	$g'(1,2)$	$g'(2,2)$	$g'(2,2)$	$g'(3,2)$	$g'(3,2)$	b_3	0	0
...											

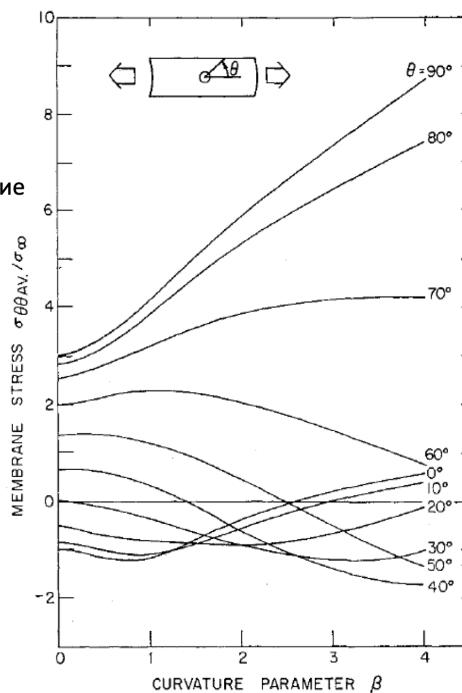
Таблица 2 / Table 2

Система для III типа граничных условий (ГУ)
System for the III type of boundary conditions

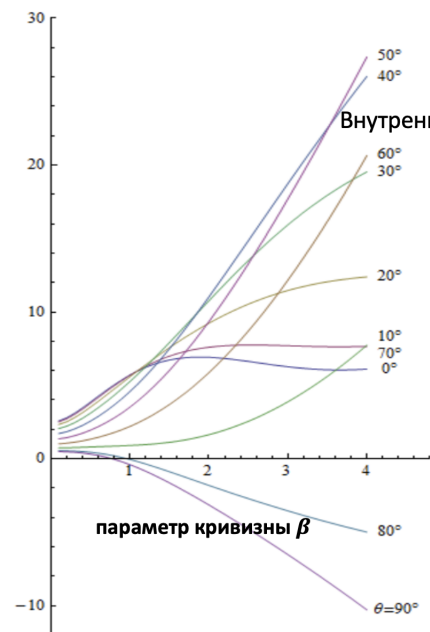
n	1		2		3		4		Неизв.коэфф	Св. столбец III тип ГУ
	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re		
1	$\tilde{t}_3(1,1)$	$\tilde{t}_3(1,1)$	$\tilde{t}_3(2,1)$	$\tilde{t}_3(2,1)$	$\tilde{t}_3(3,1)$	$\tilde{t}_3(3,1)$	$\tilde{t}_3(4,1)$	$\tilde{t}_3(4,1)$	a_1	0
1	$\tilde{t}_4(1,1)$	$\tilde{t}_4(1,1)$	$\tilde{t}_4(2,1)$	$\tilde{t}_4(2,1)$	$\tilde{t}_4(3,1)$	$\tilde{t}_4(3,1)$	$\tilde{t}_4(4,1)$	$\tilde{t}_4(4,1)$	b_1	0
1	$\tilde{g}(1,1)$	$\tilde{g}(1,1)$	$\tilde{g}(2,1)$	$\tilde{g}(2,1)$	$\tilde{g}(3,1)$	$\tilde{g}(3,1)$	$\tilde{g}(4,1)$	$\tilde{g}(4,1)$	a_2	$-\frac{\tau}{2}$
1	$\tilde{g}'(1,1)$	$\tilde{g}'(1,1)$	$\tilde{g}'(2,1)$	$\tilde{g}'(2,1)$	$\tilde{g}'(3,1)$	$\tilde{g}'(3,1)$	$\tilde{g}'(4,1)$	$\tilde{g}'(4,1)$	b_2	$-\tau$
									\vdots	
2	$\tilde{t}_3(1,2)$	$\tilde{t}_3(1,2)$	$\tilde{t}_3(2,2)$	$\tilde{t}_3(2,2)$	$\tilde{t}_3(3,2)$	$\tilde{t}_3(3,2)$	$\tilde{t}_3(4,2)$	$\tilde{t}_3(4,2)$	a_3	0
2	$\tilde{t}_4(1,2)$	$\tilde{t}_4(1,2)$	$\tilde{t}_4(2,2)$	$\tilde{t}_4(2,2)$	$\tilde{t}_4(3,2)$	$\tilde{t}_4(3,2)$	$\tilde{t}_4(4,2)$	$\tilde{t}_4(4,2)$	b_3	0
2	$\tilde{g}(1,2)$	$\tilde{g}(1,2)$	$\tilde{g}(2,2)$	$\tilde{g}(2,2)$	$\tilde{g}(3,2)$	$\tilde{g}(3,2)$	$\tilde{g}(4,2)$	$\tilde{g}(4,2)$	a_4	0
2	$\tilde{g}'(1,2)$	$\tilde{g}'(1,2)$	$\tilde{g}'(2,2)$	$\tilde{g}'(2,2)$	$\tilde{g}'(3,2)$	$\tilde{g}'(3,2)$	$\tilde{g}'(4,2)$	$\tilde{g}'(4,2)$	b_4	0
...										



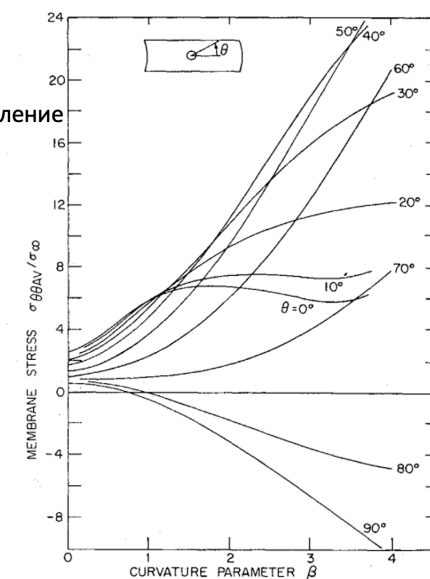
а / а



б / б



в / с

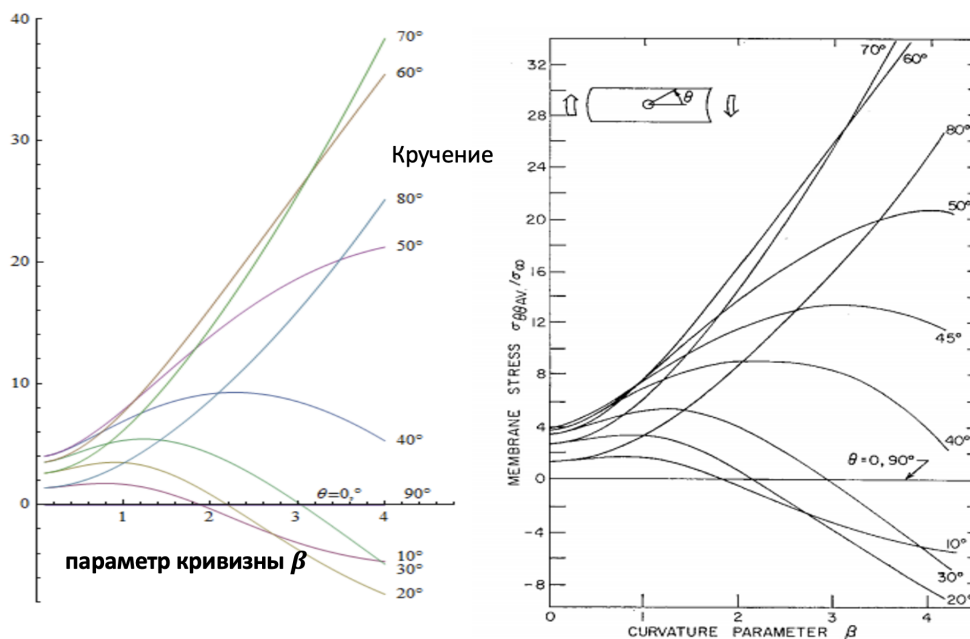


9 Membrane stress at the hole under pressure loading.

г / д

Рис. 1. Сравнение напряжений $\sigma_{\theta\theta}/p$ для I (а, б) и II (в, г) типов условий, полученных аналитическим методом, представленным в данной работе, и методом коллокаций из работы Ван Дайка [16]

Fig. 1. Comparison of $\sigma_{\theta\theta}/p$ for the type I (a, b), and II (c, d) boundary conditions, obtained by the analytical method in this paper and by the collocation method in Van Dyke's paper [16]

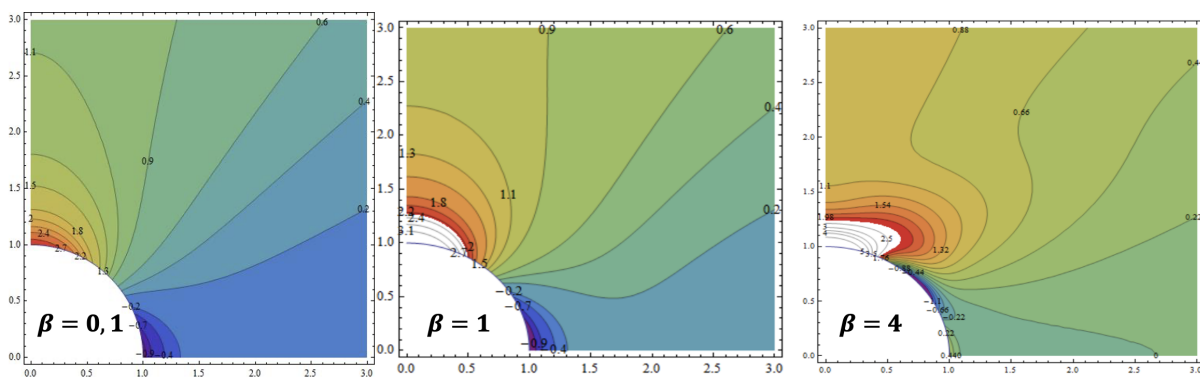


∂ / e

e / f

Окончание рис. 1. Сравнение напряжений $\sigma_{\theta\theta}/p$ для III (∂, e) типа условий, полученных аналитическим методом, представленным в данной работе, и методом коллокаций из работы Ван Дайка [16]

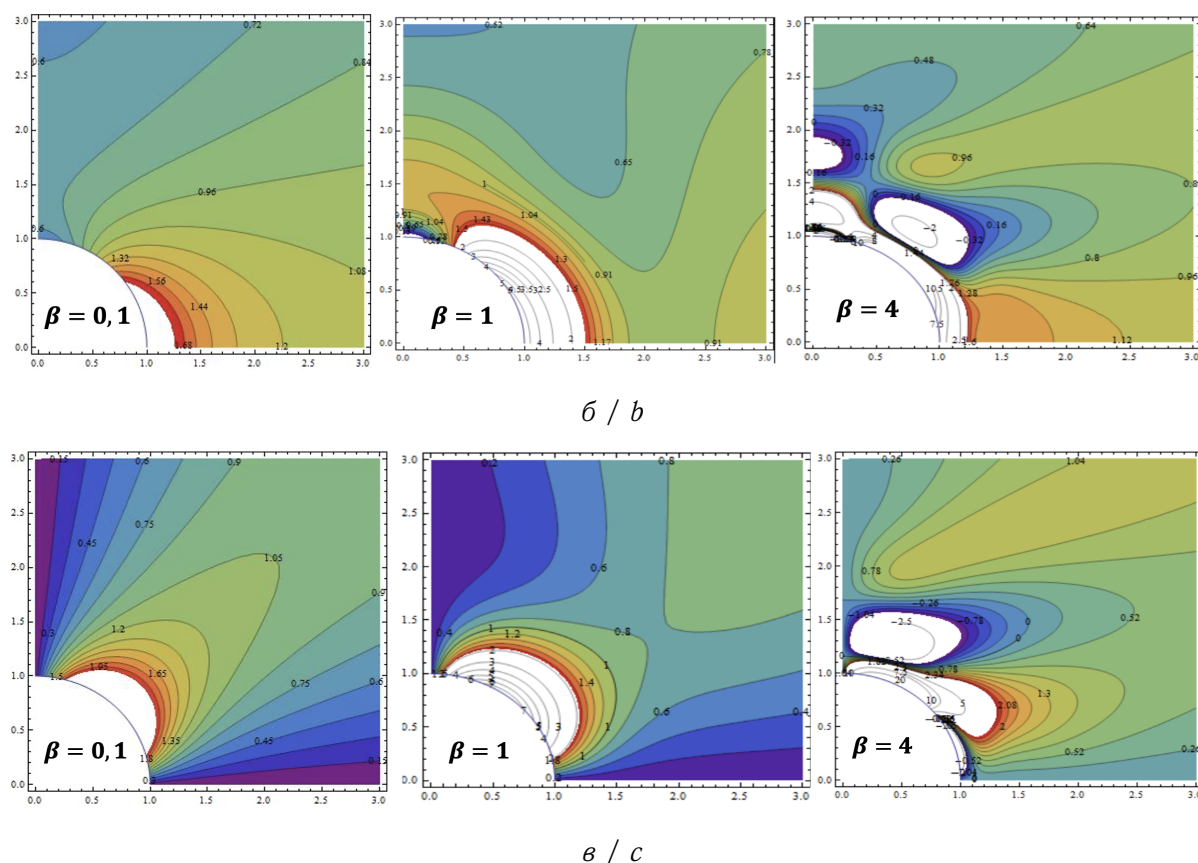
Continuation of Fig. 1. Comparison of $\sigma_{\theta\theta}/p$ for the type III (e, f) boundary conditions, obtained by the analytical method in this paper and by the collocation method in Van Dyke's paper [16]



a / a

Рис. 2. Поле напряжений $\sigma_{\theta\theta}/p$ при $\beta = 0.1, 1, 4$ для разных типов граничных условий: a — тип I (растяжение) (цвет онлайн)

Fig. 2. Stress field $\sigma_{\theta\theta}/p$ at $\beta = 0.1, 1, 4$ for different types of boundary conditions: a — type I (axial tension) (color online)



Окончание рис. 2. Поле напряжений $\sigma_{\theta\theta}/p$ при $\beta = 0.1, 1, 4$ для разных типов граничных условий: b — тип II (внутреннее давление); c — тип III (кручение) (цвет онлайн)

Continuation of Fig. 2. Stress field $\sigma_{\theta\theta}/p$ at $\beta = 0.1, 1, 4$ for different types of boundary conditions: b — type II (internal pressure); c — type III (torsion) (color online)

Выводы

Результаты, полученные авторами статьи аналитическим путем, абсолютно совпадают с численными результатами из работы [16], которые были получены методом коллокаций для всех трех типов граничных условий в 1965 г. (см. рис. 1). На тот момент Ван Дайк единственный получил результаты до $\beta = 4$, так как другие ученые использовали разложение по малому параметру, не позволяющее работать в таком диапазоне. Более того, результаты, полученные ранее в работах других авторов, различались, а в некоторых решениях были допущены ошибки. Представленная в данной работе модель не имеет математических ограничений. При этом, в отличие от большинства известных работ, где приводятся только результаты вычисления окружных напряжений на границе отверстия, в предлагаемой работе найдено поле напряжений для всей цилиндрической оболочки, возникающее в силу наличия отверстия, в зависимости от полярных координат (r, θ) (см. рис. 2).

Список литературы

1. Каштанова С. В., Ржонсницкий А. В. Аналитический подход к выводу поля напряжений цилиндрической оболочки с круговым отверстием при растяжении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 2. С. 64–75. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.07>
2. Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V. Investigation of systems of the stress field problem



- of a cylindrical shell with a circular cutout under various boundary conditions // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2022. Vol. 44. Art. 259. <https://doi.org/10.1007/s40430-022-03534-7>
3. Лурье А. И. Концентрации напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра // Прикладная математика и механика. 1946. Т. 10. С. 397–406.
 4. Гузь А. Н. Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. Киев : Наукова думка, 1974. 271 с.
 5. Lekkerkerker J. G. On the Stress Distribution in Cylindrical Shells Weakened by a Circular Hole. Delft : Uitgeverij Waltman, 1965. 99 p.
 6. Naghdi A. K., Eringen A. C. Stress distribution in a circular cylindrical shell with a circular cutout // Archive of Applied Mechanics. 1965. Vol. 34, iss. 3. P. 161–172. <https://doi.org/10.1007/BF00532170>
 7. Eringen A. C., Naghdi A. K., Thiel C. C. State of Stress in a Circular Cylindrical Shell With a Circular Hole. Welding Research Council, 1965. 21 p. (Welding Research Council Bulletin, vol. 102).
 8. Foo S. S. B. On the limit analysis of cylindrical shells with a single cutout // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 1992. Vol. 49, iss. 1. P. 1–16. [https://doi.org/10.1016/0308-0161\(92\)90069-R](https://doi.org/10.1016/0308-0161(92)90069-R)
 9. Кабанов В. В., Железнов Л. П. Применение метода конечных элементов к расчету на прочность круговых цилиндрических оболочек с вырезами // Ученые записки ЦАГИ. 1985. Т. 16, № 3. С. 92–99. EDN: MWFNGB
 10. Shariati M., Akbarpour A. Ultimate strength analysis of combined loaded stainless steel circular tubes with hole // Journal of Basic and Applied Scientific Research. 2012. iss. 2 (8). P. 8457–8465.
 11. Lee S. E., Sahin S., Rigo P. Ultimate strength of cylindrical shells with cutouts // Ships and Offshore Structures. 2017. Vol. 12, iss. S1. P. 151–173. <https://doi.org/10.1080/17445302.2016.1271592>
 12. Kolodiazhnyi A., Mednikova M. The Influence of the deformation nonlinearity on stress concentration in cylindrical shells with holes under torsion // Materials Science Forum. 2019. Vol. 968. P. 548–559. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.548>
 13. Chawla K., Ray-Chaudhuri S. Stress and strain concentration factors in orthotropic composites with hole under uniaxial tension // Curved and Layered Structures. 2018. Vol. 5, iss. 1. P. 213–231. <https://doi.org/10.1515/cls-2018-0016>
 14. Silpa V. J. K., Raghu Vamsi B. V. S., Gowtham Kumar K. Structural analysis of thin isotropic and orthotropic plates using finite element analysis // Indian Journal of Medical Ethics. 2017. Vol. 4, iss. 6. P. 17–27. <https://doi.org/10.14445/23488360/IJME-V4I6P104>
 15. Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V., Gruzdkov A. A. On the issue of analytical derivation of stress state in a cylindrical shell with a circular hole under axial tension // Materials Physics and Mechanics. 2021. Vol. 47. P. 186–195. https://doi.org/10.18149/MPM.4722021_3
 16. Van Dyke P. Stresses about a circular hole in a cylindrical shell // AIAA Journal. 1965. Vol. 3, iss. 9. P. 1733–1742. <https://doi.org/10.2514/3.3234>

References

1. Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V. An analytical approach to obtaining the stress field of a cylindrical shell with a circular hole under tension. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, iss. 2, pp. 64–75 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.07>
2. Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V. Investigation of systems of the stress field problem of a cylindrical shell with a circular cutout under various boundary conditions. *Journal of*



- the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2022, vol. 44, Art. 259. <https://doi.org/10.1007/s40430-022-03534-7>
3. Lurie A. I. Concentration of stresses in the vicinity of an aperture in the surface of a circular cylinder. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1946, vol. 10, pp. 397–406 [English transl. by N. Brunswick, New York University, Inst. of Math. Sci., 1960].
 4. Guz A. N. *Tsilindricheskie obolochki, oslablennye otverstiyami* [Cylindrical Shells with Cutouts]. Kiev, Naukova dumka, 1974. 271 p. (in Russian).
 5. Lekkerkerker J. G. *On the Stress Distribution in Cylindrical Shells Weakened by a Circular Hole*. Delft, Uitgeverij Waltman, 1965. 99 p.
 6. Naghdi A. K., Eringen A. C. Stress distribution in a circular cylindrical shell with a circular cutout. *Archive of Applied Mechanics*, 1965, vol. 34, iss. 3, pp. 161–172. <https://doi.org/10.1007/BF00532170>
 7. Eringen A. C., Naghdi A. K., Thiel C. C. *State of Stress in a Circular Cylindrical Shell With a Circular Hole*. Welding Research Council Bulletin, vol. 102. Welding Research Council, 1965. 21 p.
 8. Foo S. S. B. On the limit analysis of cylindrical shells with a single cutout. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 1992, vol. 49, iss. 1, pp. 1–16. [https://doi.org/10.1016/0308-0161\(92\)90069-R](https://doi.org/10.1016/0308-0161(92)90069-R)
 9. Kabanov V. V., Zheleznov L. P. Application of the Finite-Elements method to the strength analysis of circular cylindrical shells with cutouts. *TsAGI Notes*, 1985, vol. 16, iss. 3, pp. 92–99 (in Russian). EDN: [MWFNGB](https://www.edn.net/MWFNGB)
 10. Shariati M., Akbarpour A. Ultimate strength analysis of combined loaded stainless steel circular tubes with hole. *Journal of Basic and Applied Scientific Research*, 2012, iss. 2 (8), pp. 8457–8465.
 11. Lee S. E., Sahin S., Rigo P. Ultimate strength of cylindrical shells with cutouts. *Ships and Offshore Structures*, 2017, vol. 12, iss. S1, pp. 151–173. <https://doi.org/10.1080/17445302.2016.1271592>
 12. Kolodiaznyi A., Mednikova M. The Influence of the deformation nonlinearity on stress concentration in cylindrical shells with holes under torsion. *Materials Science Forum*, 2019, vol. 968, pp. 548–559. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.548>
 13. Chawla K., Ray-Chaudhuri S. Stress and strain concentration factors in orthotropic composites with hole under uniaxial tension. *Curved and Layered Structures*, 2018, vol. 5, iss. 1, pp. 213–231. <https://doi.org/10.1515/cls-2018-0016>
 14. Silpa V. J. K., Raghu Vamsi B. V. S., Gowtham Kumar K. Structural analysis of thin isotropic and orthotropic plates using finite element analysis. *Indian Journal of Medical Ethics*, 2017, vol. 4, iss. 6, pp. 17–27. <https://doi.org/10.14445/23488360/IJME-V4I6P104>
 15. Kashtanova S. V., Rzhonsnitskiy A. V., Gruzdkov A. A. On the issue of analytical derivation of stress state in a cylindrical shell with a circular hole under axial tension. *Materials Physics and Mechanics*, 2021, vol. 47, pp. 186–195. https://doi.org/10.18149/MPM.4722021_3
 16. Van Dyke P. Stresses about a circular hole in a cylindrical shell. *AIAA Journal*, 1965, vol. 3, iss. 9, pp. 1733–1742. <https://doi.org/10.2514/3.3234>

Поступила в редакцию / Received 21.03.2022

Принята к публикации / Accepted 01.11.2022

Опубликована / Published 31.05.2023