Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 48–57
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 48–57
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-48-57, EDN: GENWZC

Научная статья
УДК 517.927.21:517.911.5:51-73

О приложении качественной теории дифференциальных уравнений к одной задаче тепломассопереноса

Д. В. Туртин[1,2], М. А. Степович[3]✉, В. В. Калманович[3]

[1]Ивановский государственный университет, Россия, 153025, г. Иваново, ул. Ермака, д. 39
[2]Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, Ивановский филиал, Россия, 153025, г. Иваново, ул. Дзержинского, д. 53
[3]Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского, Россия, 248023, г. Калуга, ул. Степана Разина, д. 26

Туртин Дмитрий Витальевич, кандидат физико-математических наук, [1]доцент кафедры фундаментальной математики; [2]доцент кафедры менеджмента, технологий бизнеса и гуманитарных дисциплин, turtin@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1789-0823, AuthorID: 790840
Степович Михаил Адольфович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики и математики, m.stepovich@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0002-6456-4644, AuthorID: 149370
Калманович Вероника Валерьевна, старший преподаватель кафедры физики и математики, v572264@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-0682-353X, AuthorID: 771691

Аннотация. Изучены возможности приложения качественной теории дифференциальных уравнений к одной задаче тепломассопереноса в многослойных планарных полупроводниковых структурах. Исследование проведено на примере математической модели стационарного процесса диффузии неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных широким источником возбуждения. Использование широкого источника внешнего воздействия позволяет свести задачи моделирования к одномерным и описать эти математические модели обыкновенными дифференциальными уравнениями. Таковыми являются процессы в различных наносистемах при воздействии на них широких пучков заряженных частиц или электромагнитного излучения. В работе проведен обзор результатов исследований подобных моделей за последнее время. Основным объектом изучения явились вопросы корректности рассматриваемых математических моделей, особое внимание уделено математической оценке влияния внешних факторов на состояние изучаемого объекта. Ранее методы качественной теории дифференциальных уравнений (в нашем случае — оценка влияния внешнего воздействия на распределение неравновесных неосновных носителей заряда в результате их диффузии в полупроводнике) в сочетании с рассмотрением единственности решения дифференциальных уравнений тепломассопереноса и корректности используемых математических моделей изучались весьма редко, а для широких электронных пучков количественный анализ подобных задач ранее не проводился вовсе. В настоящей работе основное внимание уделяется влиянию правой части дифференциального уравнения, функции возбуждения неосновных носителей заряда, на решение дифференциального уравнения диффузии, которое описывает распределение неравновесных носителей заряда, диффундировавших в каждом слое такой структуры. Доказаны единственность решения рассматриваемой задачи и непрерывная зависимость решения от правой части дифференциального уравнения. Получены оценки влияния внешних факторов на диффузию генерированных носителей в каждом слое многослойной планарной полупроводниковой структуры.

Ключевые слова: математическое моделирование, тепломассоперенос, дифференциальные уравнения, качественные оценки

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-03-00271).

Для цитирования: *Туртин Д. В., Степович М. А., Калманович В. В.* О приложении качественной теории дифференциальных уравнений к одной задаче тепломассопереноса // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 48–57. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-48-57, EDN: GENWZC

Article

On the application of the qualitative theory of differential equations to a problem of heat and mass transfer

D. V. Turtin[1,2], M. A. Stepovich[3✉], V. V. Kalmanovich[3]

[1]Ivanovo State University, 39 Yermak St., Ivanovo 153025, Russia

[2]Plekhanov Russian University of Economics, Ivanovo branch, 53 Dzerzhinsky St., Ivanovo 153025, Russia

[3]Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovski, 26 Stepan Razin St., Kaluga 248023, Russia

Dmitry V. Turtin, turtin@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-1789-0823, AuthorID: 790840

Mikhail A. Stepovich, m.stepovich@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0002-6456-4644, AuthorID: 149370

Veronika V. Kalmanovich, v572264@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-0682-353X, AuthorID: 771691

Abstract. The possibilities of applying the qualitative theory of differential equations to one problem of heat and mass transfer in multilayer planar semiconducting structures are studied. The consideration is carried out on the example of a mathematical model of a stationary process of diffusion of nonequilibrium minority charge carriers generated by a wide excitation source. The use of a wide source of external influence makes it possible to reduce modeling problems to one-dimensional ones and describe these mathematical models by ordinary differential equations. These are the processes in various nanosystems exposed to wide beams of charged particles or electromagnetic radiation. The paper reviews the results of recent studies of such models. The main object of study was the questions of the correctness of the considered mathematical models, special attention is paid to the mathematical assessment of the influence of external factors on the state of the object under study. Previously, the methods of the qualitative theory of differential equations, in our case, the assessment of the influence of external influence on the distribution of nonequilibrium minority charge carriers as a result of their diffusion in a semiconductor, in combination with the consideration of the uniqueness of the solution of differential equations of heat and mass transfer and the correctness of the mathematical models used, were considered very rarely, and for wide electron beams, a quantitative analysis of such problems has not previously been carried out at all. In the present work, the main attention is paid to the influence of the right side of the differential equation, the excitation function of minority charge carriers, on the solution of the differential diffusion equation, which describes the distribution of nonequilibrium charge carriers that have diffused in each layer of such a structure. The uniqueness of the solution of the problem under consideration and the continuous dependence of the solution on the right side of the differential equation are proved. Estimates are obtained for the influence of external factors on the diffusion of generated carriers in each layer of a multilayer planar semiconductor structure.

Keywords: mathematical modeling, heat and mass transfer, differential equations, qualitative estimates

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-03-00271).

For citation: Turtin D. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V. On the application of the qualitative theory of differential equations to a problem of heat and mass transfer. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, iss. 1, pp. 48–57 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-48-57, EDN: GENWZC

Введение

Задача поиска корректных краевых задач для уравнений смешанного типа в многослойных областях приводит к краевым задачам со смещением [1–4]. Среди подобных задач задачи тепломассопереноса являются одними из наиболее востребованных классов задач, имеющих различные практические приложения. При этом особое значение имеет математическая оценка влияния внешних факторов на состояние изучаемого объекта, поскольку далеко не всегда имеется возможность их экспериментального контроля. Таковыми являются процессы в различных наносистемах при воздействии на них пучков заряженных частиц или электромагнитного излучения. В настоящей работе качественная теория дифференциальных уравнений [5] использована для анализа математических моделей стационарной диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) [6, 7], генерированных широким внешним источником в многослойных полупроводниковых материалах. Использование такого внешнего воздействия, например широких электронных пучков, позволяет свести задачи моделирования к одномерным и описать эти математические модели обыкновенными дифференциальными уравнениями [8, 9]. Ранее методы качественной теории дифференциальных уравнений (в нашем случае — оценка влияния внешнего воздействия на распределение ННЗ в результате их диффузии в полупроводнике) в сочетании с рассмотрением единственности решения дифференциальных уравнений тепломассопереноса и корректности используемых математических моделей [10, 11] изучались весьма редко. Наиболее подробно такие задачи исследовались для остро сфокусированных пучков электронов: моделировалась нестационарная диффузия неравновесных ННЗ в методе времяпролетной катодолюминесценции полупроводников, проводилась оценка влияния изменений во внешнем воздействии на распределение ННЗ и доказательство корректности рассматриваемой модели [12, 13]. Однако для широких электронных пучков количественный анализ подобных задач ранее не проводился, пожалуй, за исключением рассмотрения некоторых аспектов диффузии ННЗ в однородной полупроводниковой мишени [14]. Что касается диффузии ННЗ в многослойных планарных структурах, то для таких объектов обсуждались лишь некоторые частные возможности такого анализа [15].

Изучение информативных возможностей качественной теории дифференциальных уравнений применительно к диффузии ННЗ в многослойных планарных структурах конечной толщины и составляет предмет рассмотрения в настоящей работе.

1. Постановка задачи

Пусть оси X и Y декартовой прямоугольной системы координат находятся на плоской поверхности полупроводника, а ось Z направлена в объем полупроводниковой мишени. Для рассматриваемой многослойной структуры обозначим: $z_1 = 0$, $z_{n+1} = l$ — координаты внешних границ полупроводниковой структуры, $z_2, z_3, \ldots, z_n$ — координаты границ раздела слоев. Пусть номер слоя будет совпадать с номером его левой границы — таким образом, структура будет состоять из следующих слоев: первый слой $[z_1, z_2]$, второй слой $[z_2, z_3]$ и т. д., последний, n-й слой, $[z_n, z_{n+1}]$. У параметров, характеризующих каждый слой, номер слоя будем указывать в верхнем индексе в скобках. С учетом этого обозначим как $D^{(i)}$, $L^{(i)}$, $\tau^{(i)}$ электрофизические параметры: коэффициент диффузии, диффузионную длину и время жизни ННЗ в i-м слое соответственно, при этом $L^{(i)} = \left[D^{(i)}\tau^{(i)}\right]^{1/2}$ и все параметры — положительные величины [6, 7]. На границах полупроводника (при $z = z_1 = 0$ и при $z = z_{n+1} = l$) приведенные скорости поверхностной рекомбинации $S^{(1)} = L^{(1)}\nu_s^{(1)} \Big/ D^{(1)}$, $S^{(n)} = L^{(n)}\nu_s^{(n)} \Big/ D^{(n)}$, где $\nu_s^{(1)}$ и $\nu_s^{(n)}$ — скорости поверхностной рекомбинации ННЗ на поверхности первого слоя (при $z = z_1 = 0$) и на поверхности n-го слоя (при $z = z_{n+1} = l$) соответственно [8, 9].

Тогда в случае одномерной диффузии в конечный полупроводник вдоль оси Z, перпендикулярной поверхности планарной n-слойной полупроводниковой структуры (координата $z \in [0, l]$), распределение ННЗ, генерированных в i-м слое и продиффундировавших в этом слое, $\Delta p^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, находится как решение следующего дифференциального уравнения (см. [15] и библиографию к этой статье):

$$\frac{d}{dz}\left(D^{(i)}(z)\frac{d\Delta p^{(i)}(z)}{dz}\right) - \frac{\Delta p^{(i)}(z)}{\tau^{(i)}(z)} = -\rho^{(i)}(z), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$D^{(1)}\frac{d\Delta p^{(1)}(z)}{dz}\bigg|_{z=0} = \nu_s^{(1)}\Delta p^{(1)}(0), \quad D^{(n)}\frac{d\Delta p^{(n)}(z)}{dz}\bigg|_{z=l} = -\nu_s^{(n)}\Delta p^{(n)}(l). \tag{2}$$

Правая часть дифференциального уравнения (1) — $\rho^{(i)}(z)$ — зависимость от координаты скорости генерации ННЗ в i-м слое полупроводниковой мишени, $\rho^{(i)}(z) > 0$ $\forall\ z \in [0, l]$ и $i = \overline{1, n}$. Для широкого электронного пучка $\rho^{(i)}(z)$ может быть найдена из выражения для плотности энергии электронного пучка $\rho^{*(i)}(z)$, выделяемой в мишени в единицу времени до начала процесса диффузии, делением $\rho^{*(i)}(z)$ на энергию образования электронно-дырочной пары (см. [15] и библиографию к этой статье).

Решение дифференциального уравнения (1), функция $\Delta p^{(i)}(z)$, описывает в i-м слое распределение по глубине неравновесных ННЗ, генерированных внешним энергетическим воздействием $\rho^{(i)}(z)$, после их диффузии в полупроводнике. С учетом непрерывности распределений ННЗ по глубине всей структуры и зависимости коэффициентов уравнения от номера слоя распределение $\Delta p(z)$ будет являться непрерывной и кусочно-дифференцируемой функцией.

В настоящей работе методами математического моделирования продолжено исследование диффузионного процесса, обусловленного взаимодействием широкого электронного пучка с планарной полупроводниковой структурой. Основное внимание уделяется влиянию правой части дифференциального уравнения, функции возбуждения ННЗ $\rho^{(i)}(z)$, на решение дифференциального уравнения диффузии $\Delta p^{(i)}(z)$, описывающего распределение продиффундировавших неравновесных ННЗ в i-м слое $(i=\overline{1,n})$ такой структуры.

2. О решении дифференциального уравнения одномерной диффузии

Рассмотрим диффузию ННЗ в многослойной мишени, в которой внутри каждого слоя коэффициент диффузии $D^{(i)}$ и время жизни ННЗ $\tau^{(i)}$, $i=\overline{1,n}$ — величины постоянные. В этом случае дифференциальное уравнение диффузии ННЗ в i-м слое примет вид

$$D^{(i)}(z)\frac{d^2\Delta p^{(i)}(z)}{dz^2}-\frac{\Delta p^{(i)}(z)}{\tau^{(i)}(z)}=-\rho^{(i)}(z), \quad i=\overline{1,n}.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2\Delta p^{(i)}(z)}{dz^2}-\frac{1}{\tau^{(i)}(z)D^{(i)}(z)}\Delta p^{(i)}(z)=-\frac{1}{D^{(i)}(z)}\rho^{(i)}(z), \quad i=\overline{1,n}.$$

или

$$y_i''(z)-b_i^2y_i(z)=f_i(z), \quad i=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где $y_i(z)\equiv\Delta p^{(i)}(z)$, а постоянные b_i^2 и f_i равны:

$$b_i^2=\frac{1}{\tau^{(i)}(z)D^{(i)}(z)}>0, \ f_i(z)=-\frac{\rho^{(i)}(z)}{D^{(i)}(z)}<0,$$

причем $b_i=\mathrm{const}>0\ \forall i=\overline{1,n}$.

Для первой производной граничные условия запишем в виде

$$\begin{cases} y_i'(z_i)=a_iy_i(z_i), \quad i=\overline{1,n},\\ y_n'(z_{n+1})=a_{n+1}y_n(z_{n+1}). \end{cases} \tag{4}$$

Отметим, что граничному условию на поверхности первого слоя при $z=z_1=0$ (см. первую формулу из (2)) отвечает первое соотношение из (4) при $i=1$. А вторая формула из (4) отвечает второму граничному условию из (2) при $z=z_{n+1}=l$. Что касается соотношений, получаемых из первой формулы (4) при $i=\overline{2,n}$, то эти соотношения могут быть учтены исходя из физической природы многослойной структуры [6, 7] и здесь не рассматриваются.

В силу непрерывности $y(z)$ на границе слоев

$$y_i\left(z_{i+1}\right)=y_{i+1}\left(z_{i+1}\right), \quad i=\overline{1,n-1} \tag{5}$$

и из физических соображений добавим условие

$$y_1(0)=g_1, \tag{6}$$

где $g_1=\mathrm{const}\geqslant 0$.

В формулах (3) и (4) a_i и b_i — постоянные, $i=\overline{1,n}$. Для рассматриваемой задачи b_i определено выше, два значения постоянной a_i определяются из граничных условий (2), а $0=z_1<z_2<\ldots<z_n=l$ — точки разбиения отрезка $[0,l]$.

Теорема 1. *Решениями уравнения* (3) *являются функции*

$$y_i(z) = a_{1i}\exp(b_i z) + a_{2i}\exp(-b_i z) + \frac{1}{b_i}\int\limits_{z_i}^{z} f_i(t)\mathrm{sh}\left[b_i\left(z-t\right)\right]dt, \quad i=\overline{1,n}, \tag{7}$$

где a_{1i} *и* a_{2i} $(i=\overline{1,n})$ — *произвольные постоянные.*

Доказательство. Для нахождения решений (3) используем метод вариации произвольной постоянной. Решение будем искать в виде

$$y_i(z) = C_{1i}(z)\exp(b_i z) + C_{2i}(z)\exp(-b_i z), \tag{8}$$

где $C_{1i}(z)$ и $C_{2i}(z)$ — искомые функции, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} C'_{1i}(z)\exp(b_i z) + C'_{2i}(z)\exp(-b_i z) = 0, \\ C'_{1i}(z)b_i\exp(b_i z) - C'_{2i}(z)b_i\exp(-b_i z) = f_i(z). \end{cases} \tag{9}$$

Из (9) получим $C'_{1i}(z) = f_i(z)\exp(-b_i z)/2b_i$ и $C'_{2i}(z) = -f_i(z)\exp(b_i z)/2b_i$, откуда

$$C_{1i}(z) = \frac{1}{2b_i}\int\limits_{z_i}^{z} f_i(t)\exp(-b_i t)\,dt + a_{1i}, \quad i=\overline{1,n},$$

$$C_{2i}(z) = -\frac{1}{2b_i}\int\limits_{z_i}^{z} f_i(t)\exp(b_i t)\,dt + a_{2i}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Подставив найденные функции $C_{1i}(z)$ и $C_{2i}(z)$ в (8), получим формулу (7).

Теорема 1 доказана. □

3. О единственности решения

Подставив функцию (7) в граничные условия (4)–(6), получим систему рекурсивных уравнений для нахождения постоянных a_{1i} и a_{2i}, $i=\overline{1,n}$. Используя формулу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом, при вычислении производной от функции $y_i(z)$, $i=\overline{1,n}$ получим

$$y'_i(z) = a_{1i}b_i\exp(b_i z) - a_{2i}b_i\exp(-b_i z) + \frac{1}{b_i}f_i(z)\mathrm{sh}(0) + \frac{1}{b_i}\int\limits_{z_i}^{z} f_i(t)b_i\mathrm{ch}\left[b_i\left(z-t\right)\right]dt =$$

$$= a_{1i}b_i\exp(b_i z) - a_{2i}b_i\exp(-b_i z) + \int\limits_{z_i}^{z} f_i(t)\mathrm{ch}\left[b_i\left(z-t\right)\right]dt, \quad i=\overline{1,n}.$$

Подставив $y_i(z)$ и $y'_i(z)$, $i=\overline{1,n}$, последовательно в (6), (4), (5), получим:

1) из (6)

$$a_{11} + a_{21} = g_1,$$

2) из (4)

$$a_{1i}b_i\exp(b_i z) - a_{2i}b_i\exp(-b_i z) = a_i\left[a_{1i}\exp\left(b_i z_i\right) + a_{2i}\exp\left(-b_i z_i\right)\right],$$

откуда
$$a_{1i}\,(b_i - a_i)\exp(b_i z) = a_{2i}\,(a_i + b_i)\exp(-b_i z),$$

3) из (5)

$$a_{1i}\exp(b_i z) + a_{2i}\exp(-b_i z) =$$
$$= a_{1,i+1}\exp\left(b_{i+1} z_i\right) + a_{2,i+1}\exp\left(-b_{i+1} z_i\right) + \frac{1}{b_i}\int\limits_{z_{i+1}}^{z_i} f_{i+1}(t)\operatorname{sh}\left[b_{i+1}\left(z_i - t\right)\right]dt.$$

Теорема 2. *Решение задачи* (3)–(6) *единственно.*

Доказательство. Пусть $u_i(z)$ и $v_i(z)$, $i = \overline{1,n}$ — два различных решения задачи (3)–(6). Рассмотрим функцию $w_i(z) = u_i(z) - v_i(z)$, которая удовлетворяет однородному уравнению
$$w_i''(z) - b_i^2 w = 0 \tag{10}$$
с граничными условиями

$$w_1(0) = 0, \tag{11}$$
$$w_i'(z_i) = a_i w_i(z_i), \quad i = \overline{1,n}, \tag{12}$$
$$w_i(z_i) = w_{i+1}(z_i), \quad i = \overline{1,n-1}. \tag{13}$$

Решением уравнения (10) является функция

$$w_i(z) = C_{1i}\exp(b_i z) + C_{2i}\exp(-b_i z), \quad i = \overline{1,n}.$$

Из (12), (13) имеем

$$\begin{cases} C_{1i} b_i \exp(b_i z_i) - C_{2i} b_i \exp((-b_i z_i) = a_i\left[C_{1i}\exp(b_i z_i) + C_{2i}\exp((-b_i z_i)\right], \ i = \overline{1,n}, \\ C_{1i}\exp(b_i z_i) + C_{2i}\exp((-b_i z_i) = C_{1,\,i+1}\exp(b_i z_i) + C_{2,\,i+1}\exp((-b_i z_i), \ i = \overline{1,n-1}. \end{cases} \tag{14}$$

Положив в (14) $i = 1$ и учтя, что $z_1 = 0$ и $b_1 = \mathrm{const} \neq 0$, получим

$$\begin{cases} b_1(C_{11} - C_{21}) = a_1(C_{11} + C_{21}), \\ C_{11} + C_{21} = C_{12} + C_{22}. \end{cases}$$

Из (11) получим, что $C_{11} + C_{21} = 0$. Тогда, с учетом $a_1 = \mathrm{const}$ и $b_1 = \mathrm{const} \neq 0$, получим $C_{11} = C_{21} = 0$, откуда следует $w_1(z) = 0$. Повторив аналогичные рассуждения для $i = \overline{2,n}$, получим $w_i(z) = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$. Отсюда следует, что $u_i(z) = v_i(z)$ для всех $i = \overline{1,n}$. Полученное противоречие доказывает единственность решения задачи (3)–(6).

Теорема 2 доказана. □

4. О непрерывной зависимости решения от правой части дифференциального уравнения

Теорема 3. *Пусть в i-м слое, $i = \overline{1,n}$, $y_i^{(1)}(z)$ — решение дифференциального уравнения*
$$[y_i^{(1)}(z)]'' - b_i^2 y_i(z) = f_i^{(1)}(z)$$

с граничными условиями (4)–(6), $y_i^{(2)}(z)$ — *решение в том же слое дифференциального уравнения*

$$[y_i^{(2)}(z)]'' - b_i^2 y_i(z) = f_i^{(2)}(z)$$

с теми же граничными условиями (4)–(6) *и для всех* $z : z_i \leqslant z \leqslant z_{i+1}$, $i = \overline{1,n}$, *выполняется*

$$\left| f_i^{(2)}(z) - f_i^{(1)}(z) \right| \leqslant \delta. \tag{15}$$

Тогда $\forall\ z : z_i \leqslant z \leqslant z_{i+1}$ *в* i*-м слое справедлива оценка*

$$\left| y_i^{(2)}(z) - y_i^{(1)}(z) \right| \leqslant C_i \delta,$$

где $C_i = \left\{ \operatorname{ch}\left[b_i \left(z_{i+1} - z_i \right) \right] - 1 \right\} / b_i^2$.

Доказательство. Из теоремы 1 для i-го слоя, $i = \overline{1,n}$, получим

$$y_i^{(2)}(z) = a_{1i} \exp(b_i z) + a_{2i} \exp(-b_i z) + \frac{1}{b_i} \int\limits_{z_i}^{z} f_i^{(2)}(t) \operatorname{sh}\left[b_i \left(z - t \right) \right] dt,$$

$$y_i^{(1)}(z) = a_{1i} \exp(b_i z) + a_{2i} \exp(-b_i z) + \frac{1}{b_i} \int\limits_{z_i}^{z} f_i^{(1)}(t) \operatorname{sh}\left[b_i \left(z - t \right) \right] dt.$$

Отсюда

$$y_i^{(2)}(z) - y_i^{(1)}(z) = \frac{1}{b_i} \int\limits_{z_i}^{z} \left[f_i^{(2)}(t) - f_i^{(1)}(t) \right] \operatorname{sh}\left[b_i \left(z - t \right) \right] dt.$$

С учетом оценки (15) получим

$$\left| y_i^{(2)}(z) - y_i^{(1)}(z) \right| = \frac{1}{|b_i|} \left| \int\limits_{z_i}^{z} \left[f_i^{(2)}(t) - f_i^{(1)}(t) \right] \operatorname{sh}\left[b_i \left(z - t \right) \right] dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|b_i|} \left| \int\limits_{z_i}^{z} \delta \operatorname{sh}\left[b_i \left(z - t \right) \right] dt \right| = \frac{\delta}{b_i^2} \left\{ -1 + \operatorname{ch}\left[b_i \left(z - z_i \right) \right] \right\} \leqslant \delta \times \left\{ \operatorname{ch}\left[b_i \left(z_{i+1} - z_i \right) \right] - 1 \right\} / b_i^2.$$

Теорема 3 доказана. □

Заключение

Рассмотрены проблемы математического моделирования и качественного анализа процессов взаимодействия источника внешнего воздействия с многослойными планарными полупроводниковыми структурами. Использование широкого источника внешнего воздействия позволило свести задачу моделирования к одномерной и описать математическую модель в каждом слое структуры обыкновенным дифференциальным уравнением. Использование методов качественной теории дифференциальных уравнений позволило оценить влияние правой части дифференциального уравнения, функции возбуждения неосновных носителей заряда в многослойной полупроводниковой структуре, на решение дифференциального уравнения диффузии, описывающего распределение продиффундировавших неравновесных носителей заряда в каждом слое такой структуры. Доказаны единственность решения рассматриваемой задачи и непрерывная зависимость решения от правой части дифференциального уравнения. Получены оценки влияния внешних факторов на диффузию генерированных носителей в каждом слое многослойной планарной полупроводниковой структуры. Обобщая этот результат на произвольное, но конечное число слоев, получено, что малому изменению правой части дифференциального уравнения диффузии отвечает малое изменение его решения, что позволяет говорить о корректности рассматриваемой задачи для многослойной структуры.

Список литературы

1. *Нахушев А. М.* О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 44–59.
2. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Доклады АН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 736–739.
3. *Нахушев А. М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 92–101.
4. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. Москва : Наука, 2006. 287 с.
5. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1947. 448 с.
6. *Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г.* Физика полупроводников: учебное пособие. Москва : Наука, 1990. 686 с.
7. *Смит Р.* Полупроводники. Москва : Мир, 1982. 560 с.
8. *Wittry D. B., Kyser D. F.* Measurements of diffusion lengths in direct-gap semiconductors by electron beam excitation // Journal of Applied Physics. 1967. Vol. 38, iss. 1. P. 375–382. https://doi.org/10.1063/1.1708984
9. *Rao-Sahib T. S., Wittry D. B.* Measurements of diffusion lengths in p-type gallium arsenide by electron beam excitation // Journal of Applied Physics. 1969. Vol. 40, iss. 9. P. 3745–3750. https://doi.org/10.1063/1.1658265
10. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Наука, 1964. 272 с.
11. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва : Наука, 1965. 332 с.
12. *Polyakov A. N., Smirnova A. N., Stepovich M. A., Turtin D. V.* Mathematical model of qualitative properties of exciton diffusion generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, iss. 2. P. 259–262. https://doi.org/10.1134/S199508021802021X
13. *Turtin D. V., Seregina E. V., Stepovich M. A.* Qualitative analysis of a class of differential equations of heat and mass transfer in a condensed material // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2020. Vol. 259, iss. 1. P. 166–174. https://doi.org/10.1007/s10958-020-05008-4
14. *Туртин Д. В., Степович М. А., Калманович В. В., Картанов А. А.* О корректности математических моделей диффузии и катодолюминесценции // Таврический вестник информатики и математики. 2021. № 1 (50). С. 81–100. https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-1-81-100, EDN: CJKSHG
15. *Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А.* Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупроводниковыми структурами // Известия РАН. Серия физическая. 2020. Т. 84, № 7. С. 1020–1026. https://doi.org/10.31857/S0367676520070133

References

1. Nakhushev A. M. On some new boundary value problems for hyperbolic equations and mixed type equations. *Differential Equations*, 1969, vol. 5, iss. 1, pp. 44–59 (in Russian).
2. Nakhushev A. M. New boundary value problem for one degenerate hyperbolic equation. *Doklady Mathematics*, 1969, vol. 187, iss. 4, pp. 736–739 (in Russian).
3. Nakhushev A. M. On Nonlocal Boundary Value Problems with Displacement and Their Relationship with Loaded Equations. *Differential Equations*, 1985, vol. 21, iss. 1, pp. 92–101 (in Russian).
4. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shifts for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006. 287 p. (in Russian).
5. Nemitskii V. V., Stepanov V. V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravneniy* [Qualitative Theory of Differential Equations]. Moscow, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1947. 448 p. (in Russian).
6. Bonch-Bruevich V. L., Kalashnikov S. G. *Fizika poluprovodnikov* [The Physics of Semiconductors]. Moscow, Nauka, 1990. 686 p. (in Russian).
7. Smith R. A. *Semiconductors*. 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1978. 523 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1982. 560 p.).
8. Wittry D. B., Kyser D. F. Measurements of diffusion lengths in direct-gap semiconductors by electron beam excitation. *Journal of Applied Physics*, 1967, vol. 38, iss. 1, pp. 375–382. https://doi.org/10.1063/1.1708984
9. Rao-Sahib T. S., Wittry D. B. Measurements of diffusion lengths in p-type gallium arsenide by electron beam excitation. *Journal of Applied Physics*, 1969, vol. 40, iss. 9, pp. 3745–3750. https://doi.org/10.1063/1.1658265
10. Petrovskii I. G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1964. 272 p. (in Russian).
11. Pontryagin L. S. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1965. 332 p. (in Russian).
12. Polyakov A. N., Smirnova A. N., Stepovich M. A., Turtin D. V. Mathematical model of qualitative properties of exciton diffusion generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, vol. 39, iss. 2, pp. 259–262. https://doi.org/10.1134/S199508021802021X
13. Turtin D. V., Seregina E. V., Stepovich M. A. Qualitative Analysis of a Class of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in a Condensed Material. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 2020, vol. 259, iss. 1, pp. 166–174. https://doi.org/10.1007/s10958-020-05008-4
14. Turtin D. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V., Kartanov A. A. On the correctness of mathematical models of diffusion and cathodoluminescence. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2021, iss. 1 (50), pp. 81–100 (in Russian). https://doi.org/10.37279/1729-3901-2021-20-1-81-100, EDN: CJKSHG
15. Kalmanovich V. V., Seregina E. V., Stepovich M. A. Mathematical modeling of heat and mass transfer phenomena caused by interaction between electron beams and planar semiconductor multilayers. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2020, vol. 84, iss. 7, pp. 844–850. https://doi.org/10.3103/S1062873820070138

Поступила в редакцию / Received 26.02.2022
Принята к публикации / Accepted 11.07.2022
Опубликована / Published 01.03.2023