УДК 519.61
DOI 10.18822/byusu20250360-68

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

Шергин Сергей Николаевич
кандидат физико-математических наук,
доцент Инженерной школы цифровых технологий,
Югорский государственный университет,
Ханты-Мансийск, Россия
E-mail: ssn@ugrasu.ru

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема: «Аналитическое и численное исследование обратных задач об определении параметров источников атмосферного или водного загрязнения и (или) параметров среды», код темы: FENG-2023-0004).

Предмет исследования: математическая модель теплопередачи.

Цель исследования: разработать алгоритм численного решения обратной задачи об определении коэффициента теплопередачи на границе двух сред.

Методы исследования: в работе применяется метод конечных элементов, алгоритм базируется на специальной итерационной схеме.

Объект исследования: процесс теплопередачи на границе раздела двух сред при неидеальном контакте.

Основные результаты исследования: в работе описан алгоритм, позволяющий производить расчет коэффициента теплопередачи на границе двух сред, когда контакт не является идеальным. Алгоритм основывается на методе конечных элементов и специальной итерационной схеме, в которой решение ищется в виде конечного отрезка ряда. Представлен ряд экспериментов, полученные результаты проанализированы, и сделаны выводы по использованию алгоритма.

Ключевые слова: обратная задача, численные методы, коэффициент теплопередачи, точечный источник, тепломассоперенос.

NUMERICAL DETERMINATION OF THE HEAT TRANSFER COEFFICIENT AT THE BOUNDARY BETWEEN TWO MEDIA

Sergei N. Shergin
Candidate of Physics and Mathematics,
Associate Professor of the Engineering School
of Digital Technologies,
Yugra State University,
Khanty-Mansiysk, Russia
E-mail: ssn@ugrasu.ru

The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FENG-2023-0004, "Analytical and numerical study of inverse problems on recovering parameters of atmosphere or water pollution sources and (or) parameters of media").

Subject of research: mathematical model of heat transfer.

Purpose of research: to develop an algorithm for the numerical solution of the inverse problem of determining the heat transfer coefficient at the boundary of two media.

Research methods: the finite element method is used in the work, the algorithm is based on a special iterative scheme.

Object of research: the process of heat transfer at the interface of two media with imperfect contact.

Research findings: the work describes an algorithm that allows calculating the heat transfer coefficient at the boundary of two media when the contact is not ideal. The algorithm is based on the finite element method and a special iterative scheme, in which the solution is sought in the form of a finite segment of a series. A number of experiments are presented, the results are analyzed and conclusions are made on the use of the algorithm.

Keywords: inverse problem, numerical methods, heat transfer coefficient, point source, heat and mass transfer.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается уравнение

$$\begin{gathered} Mu = u_t - Lu = u_t - div\,(c(x,t)\nabla u) + b(x,t)\nabla u + a(x,t)u = f, \\ b(x,t) = (b_1(x,t), \dots, b_n(x,t))^T, \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial x_n}\right)^T, n = 2,3 \end{gathered} \tag{1}$$

в области $Q=(0,T)\times G$. Считаем, что пространственная область имеет вид $G=\Omega\times(0,Z)$ в случае $n=3$ и G – прямоугольник в случае $n=2$, т. е. $\Omega=(0,X)$. Считаем, что область G разделена на две части $G^\pm$, $G^+=\Omega\times(l,Z)$, $G^-=\Omega\times(0,l)$, $0<l<Z$. На плоскости $x_3=l_0$ (прямой $x_2=l$ в двумерном случае), т. е. на множестве $\Gamma_0=\{(x',l_0),\ x'\in\Omega\}$ заданы условия сопряжения типа неидеального контакта

$$c_n^+ u_{x_n}^+ = \beta(u^+ - u^-) + g, c_n^+ u_{x_n}^+ = c_n^- u_{x_n}^-, x_n = l_0\,, \tag{2}$$

где $c_n u_{x_n}^\pm(t,x_0) = lim_{x\in G^\pm, x\to x_0\in\Gamma_0} u^\pm = lim_{x\in G^\pm, x\to x_0\in\Gamma_0} u(t,x)$. Далее иногда используем обозначение $u^\pm=u|_{G\pm}$ и записываем функцию u в виде вектора $u=(u^+,u^-)$. К условиям сопряжения мы добавляем условия переопределения вида

$$u^+(t,y_i) = \psi_i(t)(i = 1,2,\dots,r_1),\ u^-(t,y_i) = \psi_i(t)(i = r_1+1,\dots,r), \tag{3}$$

где $y_i\in\overline{G}^\pm(i=1,2,\dots,r)$, т. е. возможен случай $y_i\in\Gamma_0$. На $S=(0,T)\times\partial G$ задаем какие-либо краевые условия: Дирихле, Робина или смешанные условия. Например, варианты:

$$\begin{gathered} c_3 u_{x_1}(t,x',Z) = g_1(t,x'), c_3 u_{x_3}(t,x',0) = g_0(t,x'), \\ u|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0, u|_{t=0} = u_0(x), \end{gathered} \tag{4}$$

$$u(t,x',Z) = 0, u(t,x',0) = 0\ u|_{(0,T)\times\partial\Omega} = 0, u|_{t=0} = u_0(x). \tag{5}$$

Условия могут быть как однородными, так и неоднородными. Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)–(4) и неизвестной функции β вида $\beta=\sum_{j=1}^{r}\beta_j(t)\Phi_j(t,x')$, где функции Φ заданы, а функции β_j считаются неизвестными. Условия сопряжения (2) совпадают с известными в теории тепломассопереноса условиями на границе двух сред, когда контакт не является идеальным. В этом случае β – коэффициент теплообмена.

Обратные задачи нахождения неизвестных граничных режимов, в частности задачи конвективного теплообмена, являются классическими. Они возникают в самых различных задачах математической физики: управление процессами теплообмена и проектирование тепловой защиты, диагностика и идентификация теплопередачи в сверхзвуковых гетерогенных потоках, идентификация и моделирование теплопереноса в теплозащитных материалах и покрытиях, моделирование свойств и тепловых режимов многоразовой тепловой защиты аэрокосмических аппаратов, исследование композитных материалов и т. п. (см. [1], [5]).

В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных численному решению задач типа (1)–(5) в различных постановках, возникающих в приложениях; как правило, ищутся коэффициенты β, зависящие от времени или, наоборот, от пространственных переменных, точки β_j в (4) чаще всего являются внутренними точками областей G^+, G^-. Отметим, например, работы [4], [7], [8], [10]–[14]. В качестве метода почти во всех работах используется сведение обратной задачи к некоторой задаче управления и минимизация соответствующего квадратичного функционала ([4], [8], [10], [11], [13], [14]). Опишем некоторые рассмотренные задачи. В работе [3] рассматриваются задачи определения коэффициента теплообмена на границе раздела сред. Полученные результаты и методы позволяют подойти к построению численных методов, но в работе получены теоретические результаты. В случае одной пространственной переменной зависящий от температуры коэффициент теплообмена по точечным условиям переопределения численно определяется в статье [8]. Двумерная обратная задача определения коэффициентов теплообмена (зависящих специальным образом от дополнительных параметров, которые и подлежат определению) по набору значений решений в заданных точках численно решается в работе [10]. В работах [7], [12] рассматриваются и численно решаются обратные задачи определения коэффициента теплообмена, зависящего от двух пространственных переменных с помощью метода Монте-Карло. В качестве условий переопределения берется значение решения на части границы области. Одновременное определение коэффициента, входящего в параболическое уравнение, и коэффициента теплообмена осуществляется в работе [13]. В качестве условий переопределения используются значения замеров температур в точках на границе раздела слоев (как и в условии (4). Точечные условия переопределения также используются в [4] и [11], в последней была рассмотрена одномерная обратная задача одновременного определения теплового потока на одной из боковых поверхностей цилиндра и термического контактного сопротивления на границе раздела сред. Численное определение коэффициента теплообмена по данным замеров на доступной части внешней границы рассматриваемой области осуществляется в работе [14]. Задачи численного определения точечных источников в обратных задачах тепломассопереноса рассмотрены в работе [6], где источники задаются в виде суммы дельта-функций Дирака с коэффициентами, зависящими от времени и характеризующими мощность соответствующего источника.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В ходе работы будем основываться на результатах, полученных в работах [2] и [9], в которых получены и доказаны теоремы о существовании и единственности решения.

Рассмотрим случай $n=2$, $G=(0,X)\times(0,Z)$. Положим $\Gamma=\partial G$, $\Gamma_0=\{(x_1,l_0) : x_1\in(0,X)\}$ $S=(0,T)\times\Gamma$, $S_0=(0,T)\times\Gamma_0$.

Условия согласования данных имеют вид:

$$u_0(x_1,0) = u_0(x_1,Z) = 0,\ u_0(y_k) = \psi_k(0). \quad (6)$$

Опишем метод в случае $n=2$. Для численного решения используем метод конечных элементов. Далее для простоты рассматриваем условия (3) с условиями согласования (6).

Ищем функцию β в виде $\beta=\sum_{j=1}^{r}\beta_j(t)\Phi_j(x_1)$, где функции β_j подлежат определению, а функции Φ_j, g_0 известны. Считаем, что точки y_i с $i\le r_1$ лежат во множестве $G^+\cup\Gamma_0$, соответственно точки y_i с $i\ge r_1+1$ во множестве $G^-\cup\Gamma_0$.

Опишем метод решения прямой задачи. Задана триангуляция областей $G^\pm$ и соответствующие базисы метода конечных элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{S}$, $\{\varphi_i\}_{i=s+1}^{N}$. Узлы сетки обозначим через $\{b_i\}$.

Ищем приближенное решение в виде

$$v=\sum_{i=1}^{N} C_i(t)\varphi_i.$$

Для удобства далее считаем, что точки $y_i (i\le r_1)$ совпадают с узлами сетки $b_1,\ldots,b_{r_1}$, а точки $y_i (r_1+1<i\le r)$ совпадают с узлами сетки $b_{s+1},\ldots,b_{s+r-r_1}$. Функции C_i определяем из системы

$$R_0\vec{C}_t + R_1(t)\vec{C} = \vec{F} + \vec{f},\ \vec{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_N)^T, \quad (7)$$

где координаты $\vec{f}$ имеют вид

$$f_i=\int_{G^+} f(t,x)\varphi_i(x)\,dx+\int_0^X g_1(t,x_1)\varphi_i(x_1,Z)\,dx_1-\int_0^X g(t,x_1)\varphi_i(x_1,l_0)\,dx_1,$$

при $i\leq s$ и при $i>s$

$$f_i=\int_{G^-} f(t,x)\varphi_i(x)\,dx-\int_0^X g_0(t,x_1)\varphi_i(x_1,0)\,dx_1+\int_0^X g(t,x_1)\varphi_i(x_1,l_0)\,dx_1,$$

R_0 – матрица с элементами $r_{ij}=(\varphi_i,\varphi_j)=\int_{G^+}\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$ при $i,j\leq s$, $r_{ij}=(\varphi_i,\varphi_j)=\int_{G^-}\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$ при $i,j>s$, $r_{ij}=0$, если $i\leq s$ и $j>s$ или $i>s$ и $j\leq s$.

R_1 – матрица с элементами:

$$R_{jk}=(c_1(t,x)\varphi_{kx_1},\varphi_{jx_1})_\pm+(c_2(t,x)\varphi_{kx_2},\varphi_{jx_2})_\pm+(b(t,x)\nabla\varphi_k,\varphi_j)_\pm+(a(t,x)\varphi_k,\varphi_j)_\pm,\ (u,v)_\pm=\int_{G^\pm}uv\,dx, \quad (8)$$

при $j,k\leq s$ (в этом случае интегралы берутся по G^+) или $k,j>s$ (в этом случае интегралы берутся по G^-), считаем, что $R_{kj}=0$, если $k\leq s$ и $j>s$ или $k>s$ и $j\leq s$. Имеем, что $\vec{C}(0)=\vec{C}_0=(u_0(b_1),\dots,u_0(b_N))$. Координаты вектора $\vec{F}$ имеют вид

$$F_i=-\int_0^X\beta(t,x_1)(v^+(t,x_1,l_0)-v^-(t,x_1,l_0))\varphi_i(x_1,l_0)\,dx_1 \text{ при } i\leq s$$

$$F_i=\int_0^X\beta(t,x_1)(v^+(t,x_1,l_0)-v^-(t,x_1,l_0))\varphi_i(x_1,l_0)\,dx_1 \text{ при } i>s.$$

Здесь $v^\pm(t,x,l_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}v(t,x_1,l_0\pm\varepsilon)$. Решение системы ищем методом конечных разностей. Пусть $\tau=T/M$ – шаг по времени. Заменим уравнение (7) системой

$$R_0\frac{\vec{C}_{i+1}-\vec{C}_i}{\tau}+A_{i+1}\vec{C}_{i+1}=\vec{F}_{i+1}+\vec{f}_{i+1},\ \vec{C}_i=(C_i^1,\dots,C_i^N)^T,\ i=0,1,2,\dots,M-1, \quad (9)$$

где $C_i^k\approx C_k(\tau i)$, $\vec{F}_i\approx\vec{F}(\tau i)$, $\vec{f}i=\vec{f}(\tau i)$, $A_i=R_1(\tau i)$. Пусть $\vec{\Psi}=(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_r)^T$, $\vec{\Psi}_i=\vec{\Psi}(\tau i)$. Положим $\psi_i^k=\psi_k(\tau i)$. $\vec{\beta}_i=(\beta_i^1,\dots,\beta_i^r)^T$, $\vec{\beta}_i\approx\vec{\beta}(\tau i)$, $\beta_i^k=\beta_k(i\tau)$.

Запишем координаты вектора $\vec{F}_{i+1}$. Возьмем

$$F_{i+1}^k=-\sum_{j=1}^r\beta_{i+1}^j\Big(\sum_{l=1}^{r_1}\psi_i^l\int_0^X\Phi_j(x_1)\varphi_l(x_1,l_0)\varphi_k(x_1,l_0)\,dx_1+\sum_{l=r_1+1}^{s}C_i^l\int_0^X\Phi_j(x_1)\varphi_l(x_1,l_0)\varphi_k(x_1,l_0)dx_1-\sum_{l=s+1}^{s+r-r_1}\psi_i^{l-s+r_1}\int_0^X\Phi_j(x_1)\varphi_l(x_1,l_0)\varphi_k(x_1,l_0)dx_1-\sum_{l=s+r-r_1+1}^{N}C_i^l\int_0^X\Phi_j(x_1)\varphi_l(x_1,l_0)\varphi_k(x_1,l_0)\,dx_1\Big),\ k=1,2,\dots,s,$$

$$F_{i+1}^k=\sum_{j=1}^r\beta_{i+1}^j\Big(\sum_{l=1}^{r_1}\psi_i^l\int_0^X\Phi_j(x_1)\varphi_l(x_1,l_0)\varphi_k(x_1,l_0)\,dx_1+\sum_{l=r_1+1}^{s}C_i^l\int_0^X\Phi_j(x_1)\varphi_l(x_1,l_0)\varphi_k(x_1,l_0)\,dx_1-\sum_{l=s+1}^{s+r-r_1}\psi_i^{l-s+r_1}\int_0^X\Phi_j(x_1)\varphi_l(x_1,l_0)\varphi_k(x_1,l_0)dx_1-\sum_{l=s+r-r_1+1}^{N}C_i^l\int_0^X\Phi_j(x_1)\varphi_l(x_1,l_0)\varphi_k(x_1,l_0)\,dx_1\Big),\ k=s+1,s+2,\dots,N.$$

Опишем ситуацию более подробно. Положим

$$a_{kj}^{i+1}=-\sum_{l=1}^{s}C_i^l\int_0^X\Phi_j(x_1)\varphi_l(x_1,l_0)\varphi_k(x_1,l_0)\,dx_1+\sum_{l=s+1}^{N}C_i^l\int_0^X\Phi_j(x_1)\varphi_l(x_1,l_0)\varphi_k(x_1,l_0)\,dx_1$$

при $k\leq s$ и

$$a_{kj}^{i+1}=\sum_{l=1}^{s}C_i^l\int_0^X\Phi_j(x_1)\varphi_l(x_1,l_0)\varphi_k(x_1,l_0)\,dx_1-\sum_{l=s+1}^{N}C_i^l\int_0^X\Phi_j(x_1)\varphi_l(x_1,l_0)\varphi_k(x_1,l_0)\,dx_1$$

при $k>s$.

Здесь $C_i^l=\psi_i^l(l\leq r_1), C_i^l=\psi_i^{l-s+r_1}(l=s+1,\dots,s+r-r_1)$. Тогда

$$F_{i+1}^k=\sum_{j=1}^r\beta_{i+1}^j a_{kj}^{i+1}\ (k=1,\dots,r_1,s+1,\dots,s+r-r_1),\ \vec{F}_{i+1}=A^{i+1}\vec{\beta}_{i+1},$$

где матрица A^{i+1} имеет размерность N×r. Перепишем равенство (9) в виде

$$F_{i+1}^k=\sum_{j=1}^r\beta_{i+1}^j a_{kj}^{i+1}\ (k=1,\dots,r_1,s+1,\dots,s+r-r_1),\ \vec{F}_{i+1}=A^{i+1}\vec{\beta}_{i+1}, \quad (10)$$

Построим r×N матрицу D_0 такую, что $d_{ii}=1$ при $i=1,\dots,r_1$, $d_{ii+s-r_1}=1$ при $i=r_1+1,\dots,r$, а остальные элементы матрицы D_0 равны нулю. Обращая матрицу R_{i+1} из (10), получим

$$\vec{C}_{i+1}=\tau R_{i+1}^{-1}A^{i+1}\vec{\beta}_{i+1}+\tau R_{i+1}^{-1}\vec{f}_{i+1}+R_{i+1}^{-1}R_0\vec{C}_i,\ i=0,1,2,\dots,M-1, \quad (11)$$

Применив матрицу D_0 и используя условия переопределения, получим

$$\vec{\Psi}_{i+1}=\tau D_0R_{i+1}^{-1}A^{i+1}\vec{\beta}_{i+1}+\tau D_0R_{i+1}^{-1}\vec{f}_{i+1}+D_0R_{i+1}^{-1}R_0\vec{C}_i,\ i=0,1,2,\dots,M-1. \quad (12)$$

Обозначим $B_{i+1}=D_0R_{i+1}^{-1}A^{i+1}$ (матрица имеет размерность r×r).

Отсюда, из равенства (12), находим вектор β_{i+1}:

$$\tau\vec{\beta}_{i+1}=B_{i+1}^{-1}\vec{\Psi}_{i+1}-\tau B_{i+1}^{-1}D_0R_{i+1}^{-1}\vec{f}_{i+1}-B_{i+1}^{-1}D_0R_{i+1}^{-1}R_0\vec{C}_i,\ i=0,1,\dots,M-1. \quad (13)$$

Определим начальные данные. Имеем $C_0^k=u_0(b_k)$. При i=0 правая часть системы (13) известна, тем самым найдем $\vec{\beta}_1$, используя равенство (11), найдем вектор $\vec{C}_1$. Далее повторяем рассуждения: на i-м шаге известны $\vec{\beta}_i$, $\vec{C}_i$. Используя равенство (13), найдем $\vec{\beta}_{i+1}$, затем из (11) найдем вектор $\vec{C}_{i+1}$. Матрица B_{i+1} может быть сингулярной, поэтому для улучшения сходимости используем регуляризацию и заменяем в формуле (13) матрицу B_{i+1}^{-1} матрицей $(B_{i+1}B_{i+1}^{*}+\varepsilon)^{-1}B_{i+1}^{*}$.

Сходимость алгоритма. Исходя из построения, легко увидеть, что система (8) эквивалентна системе:

$$\int_{G^+}\sum_{k=1}^{s}\frac{(C_i^k-C_{i-1}^k)}{\tau}\varphi_k(x)\varphi_l(x)dx+\int_{G^+}\sum_{m=1}^{2}c_m\sum_{k=1}^{s}C_i^k\varphi_{kx_m}(x)\varphi_{lx_m}(x)dx+$$
$$\int_{G^+}\sum_{k=1}^{s}C_i^k(\vec{b}\nabla\varphi_k+a\varphi_k)\varphi_l(x)dx=\int_{G^+}f\varphi_l\,dx+ \qquad (14)$$
$$\int_0^X g_1(t,x_1)\varphi_l(x_1,Z)dx_1-\int_0^X g(t,x_1)\varphi_l(x_1,l_0)dx_1-$$
$$\int_0^X \tilde{\beta}_i^N\Big(\sum_{k=1}^{s}C_{i-1}^k\varphi_k(x_1,l_0)-\sum_{k=1+s}^{N}C_{i-1}^k\varphi_k(x_1,l_0)\Big)\varphi_l(x_1,l_0)\,dx_1$$

$$\int_{G^-}\sum_{k=1+s}^{N}\frac{(C_i^k-C_{i-1}^k)}{\tau}\varphi_k(x)\varphi_l(x)dx+$$
$$\int_{G^-}\sum_{m=1}^{2}c_m\sum_{k=1+s}^{N}C_i^k\varphi_{kx_m}(x)\varphi_{lx_m}(x)dx+=$$
$$\int_{G^-}\sum_{k=1+s}^{N}C_i^k(\vec{b}\nabla\varphi_k+a\varphi_k)\varphi_l(x)dx-\int_0^X g_0(t,x_1)\varphi_l(x_1,0)dx_1+ \qquad (15)$$
$$\int_0^X g(t,x_1)\varphi_l(x_1,l_0)dx_1+\int_{G^-}f\varphi_l\,dx+$$
$$\int_0^X \tilde{\beta}_i^N\left(\sum_{k=1}^{s}C_{i-1}^k\varphi_k(x_1,l_0)-\sum_{k=1+s}^{N}C_{i-1}^k\varphi_k(x_1,l_0)\right)\varphi_l(x_1,l_0)dx_1,$$

где $\tilde{\beta}_i^N=\sum_{k=1}^{r}\beta_{Ni}^k\Phi_k(x_1)$ (мы добавили индекс N в определении функции $\beta_i=\sum_{k=1}^{r}\beta_i^k\,\Phi_k(x_1)$). Кроме того, здесь $C_{i-1}^l=\psi_{i-1}^l(l\le r_1)$ $C_{i-1}^l=\psi_{i-1}^{l-s+r_1}$ $(l=s+1,\dots,s+r-r_1)$. Положим также, что $\tilde{\beta}_N(t,x)=\tilde{\beta}_i^N$ при $x\in G$, $t\in[(i-1)\tau,i\tau)$, $i=1,2,\dots,M$. Умножим равенства (14), (15) на постоянные v_i^l и суммируем по l (в соответствующих диапазонах). Получим

$$\int_{G^+}\sum_{k=1}^{s}\frac{(C_i^k-C_{i-1}^k)}{\tau}\varphi_k(x)v_i^+\,dx+\int_{G^+}\sum_{m=1}^{2}c_m\sum_{k=1}^{s}C_i^k\varphi_{kx_m}(x)v_{ix_m}^+(x)\,dx+$$
$$\int_{G^+}\sum_{k=1}^{s}C_i^k(\vec{b}\nabla\varphi_k+a\varphi_k)v_i^+(x)dx=\int_0^X g_1(t,x_1)v_i^+(x_1,Z)dx_1-$$
$$\int_0^X g(t,x_1)v_i^+(x_1,l_0)\,dx_1+\int_{G^+}fv_i^+\,dx-\int_0^X\tilde{\beta}_i^N\Big(\sum_{k=1}^{s}C_{i-1}^k\varphi_k(x_1,l_0)- \qquad (16)$$
$$\sum_{k=1+s}^{N}C_{i-1}^k\varphi_k(x_1,l_0)\Big)v_i^+(x_1,l_0)\,dx_1,$$

$$\int_{G^-}\sum_{k=1+s}^{N}\frac{(C_i^k-C_{i-1}^k)}{\tau}\varphi_k(x)v_i^-(x)dx+$$
$$\int_{G^-}\sum_{m=1}^{2}c_m\sum_{k=1+s}^{N}C_i^k\varphi_{kx_m}(x)v_{ix_m}^-(x)dx+$$
$$\int_{G^-}\sum_{k=1+s}^{N}C_i^k(\vec{b}\nabla\varphi_k+a\varphi_k)v_i^-(x)\,dx=-\int_0^X g_0(t,x_1)v_i^-(x_1,0)\,dx_1+ \qquad (17)$$
$$\int_0^X g(t,x_1)v_i^-(x_1,l_0)\,dx_1+\int_{G^-}fv_i^-\,dx+\int_0^X\tilde{\beta}_i^N\Big(\sum_{k=1}^{s}C_{i-1}^k\varphi_k(x_1,l_0)-$$
$$\sum_{k=1+s}^{N}C_{i-1}^k\varphi_k(x_1,l_0)\Big)v_i^-(x_1,l_0)\,dx_1,$$

где $v_i^+=\sum_{l=1}^{s}v_i^l\varphi_l$, $v_i^-=\sum_{l=1+s}^{N}v_i^l\varphi_l$. Суммируя равенства (16), (17) по i и меняя суммирование в первом слагаемом (используем равенства

$$\sum_{i=1}^{M}(a_i-a_{i-1})b_i=\sum_{i=1}^{r}a_i(b_i-b_{i+1})-a_Mb_{M+1}+a_0b_1,$$

где полагаем $b_{M+1}=0$), получим

$$\sum_{i=1}^{M}\Big[\int_{G^+}\sum_{k=1}^{s}C_i^k\varphi_k(x)\frac{(v_i^+-v_{i+1}^+)}{\tau}\,dx+\int_{G^+}\sum_{m=1}^{2}c_m\sum_{k=1}^{s}C_i^k\varphi_{kx_m}(x)v_{ix_m}^+(x)\,dx+$$
$$\int_{G^+}\sum_{k=1}^{s}C_i^k(\vec{b}\nabla\varphi_k+a\varphi_k)v_i^+(x)\,dx\Big]=\int_{G^+}\sum_{k=1}^{s}C_0^k\varphi_k(x)v_1^+\,dx+ \qquad (18)$$
$$\int_0^X g_1(t,x_1)v_i^+(x_1,Z)\,dx_1-\int_0^X g(t,x_1)v_i^+(x_1,l_0)\,dx_1\sum_{i=1}^{M}\Big[\int_{G^+}f\varphi_l\,dx-$$
$$\int_0^X\tilde{\beta}_i^N\Big(\sum_{k=1}^{s}C_{i-1}^k\varphi_k(x_1,l_0)-\sum_{k=1+s}^{N}C_{i-1}^k\varphi_k(x_1,l_0)\Big)v_i^+(x_1,l_0)\,dx_1\Big],$$

$$\sum_{i=1}^{M}\Big[\int_{G^-}\sum_{k=1+s}^{N}C_i^k\varphi_k(x)\frac{(v_i^--v_{i+1}^-)}{\tau}dx+\int_{G^-}\sum_{m=1}^{2}c_m\sum_{k=1+s}^{N}C_i^k\varphi_{kx_m}(x)v_{ix_m}^-(x)dx$$
$$+\int_{G^-}\sum_{k=1+s}^{N}C_i^k(\vec{b}\nabla\varphi_k+a\varphi_k)v_i^-(x)\,dx\Big]=$$
$$-\int_0^X g_0(t,x_1)v_i^-(x_1,0)\,dx_1+\int_0^X g(t,x_1)v_i^-(x_1,l_0)\,dx_1+ \qquad (19)$$
$$\sum_{k=1+s}^{N}C_0^k\varphi_k(x)v_1^-\,dx+\sum_{i=1}^{M}\Big[\int_{G^-}fv_i^-\,dx+$$
$$\int_0^X\tilde{\beta}_i^N\Big(\sum_{k=1}^{s}C_{i-1}^k\varphi_k(x_1,l_0)-\sum_{k=1+s}^{N}C_{i-1}^k\varphi_k(x_1,l_0)\Big)v_i^-(x_1,l_0)\,dx_1\Big].$$

Положим $\bar{v}_N^+(t,x)=\sum_{l=1}^{s}\big(v_{i-1}^l\frac{(\tau i-t)}{\tau}+v_i^l\frac{(t-\tau(i-1))}{\tau}\big)\varphi_l(x)$ при $x\in G$, $t\in[(i-1)\tau,i\tau)$, $i=1,2,\dots,M$. $\tilde{v}_N^+(t,x)=\sum_{l=1}^{s}v_i^l\varphi_l(x)$

при $x\in G$, $t\in[(i\text{-}1)\tau,i\tau)$, $i=1,2,\dots,M$, $\bar{v}_N^-(t,x)=\sum_{l=1+s}^{N}\left(v_{i-1}^l\frac{(\tau i-t)}{\tau}+v_i^l\frac{(t-\tau(i-1))}{\tau}\right)\varphi_l(x)$ при $x\in G$, $t\in[(i\text{-}1)\tau,i\tau)$, $i=1,2,\dots,$M, $\tilde{v}_N^-(t,x)=\sum_{l=1+s}^{N}v_i^l\varphi_l(x)$ при $x\in G$, $t\in[(i\text{-}1)\tau,i\tau)$, $i=1,2,\dots,$M. Аналогичным образом определяем функции $\tilde{u}_N^+$, $\tilde{u}_N^-$, например, $\tilde{u}_N^-(t,x)=\sum_{l=1+s}^{N}C_i^l\ \varphi_l(x)$ при $x\in G$, $t\in[(i\text{-}1)\tau,i\tau)$, $i=1,2,\dots,M$. Используя эти определения, можно переписать равенства (19), (18) в виде:

$$\int_0^T[\int_{G^+}\tilde{u}_N^+\bar{v}_{Nt}^+\,dx+\int_{G^+}\sum_{m=1}^{2}c_m\tilde{u}_{Nx_m}^+\tilde{v}_{Nx_m}^+(t,x)\,dx+$$
$$\int_{G^+}(\vec{b}\nabla\tilde{u}_N^++a\tilde{u}_N^+)\tilde{v}_N^+(t,x))\,dx]\,dt=\int_0^T\int_0^X g_1(t,x_1)v_N^+(t,x_1,Z)\,dx_1- \tag{20}$$
$$\int_0^X g(t,x_1)v_N^+(t,x_1,l_0)\,dx_1\,dt+\int_{G^+}u_{0N}^+(x)\bar{v}_N^+(\tau,x)\,dx+\int_0^T[\int_{G^+}fv_N^+\,dx-$$
$$\int_0^X\tilde{\beta}^N(u_N^+(t-\tau,x_1,l_0)-u_N^-(t-\tau,x_1,l_0))\tilde{v}_N^+(t,x_1,l_0)\,dx_1]\,dt,$$

$$\int_0^T[\int_{G^-}\tilde{u}_N^-\bar{v}_{Nt}^-\,dx+\int_{G^-}\sum_{m=1}^{2}c_m\tilde{u}_{Nx_m}^-(x)\tilde{v}_{Nx_m}^-(x)\,dx+$$
$$\int_{G^-}(\vec{b}\nabla u_N^-+au_N^-)\tilde{v}_N^-(x)\,dx]\,dt=-\int_0^T(\int_0^X g_0(t,x_1)v_N^-(x_1,0)\,dx_1+ \tag{21}$$
$$\int_0^X g(t,x_1)v_N^-(x_1,l_0)\,dx_1)\,dt+\int_{G^-}u_{0N}^-(x)\bar{v}_N^-(\tau,x)\,dx+\int_0^T[\int_{G^-}fv_N^-\,dx+$$
$$\int_0^X\tilde{\beta}_i^N\left(u_N\left(t-\tau,x_1,l_0\right)^+-u_N^-(t-\tau,x_1,l_0)\right)\tilde{v}_N^-(t,x_1,l_0)dx_1\Big]dt,$$

где $u_{0N}^+=\sum_{k=1}^{s}C_0^k\varphi_k$, $u_{0N}^-=\sum_{k=1+s}^{N}C_0^k\varphi_k$.

Предполагаем, что найдутся постоянные $c_i>0$ такие, что

$$c_1\|u\|_{W_2^1(G)}^2\le(Au,u)\le c_2\|u\|_{W_2^1(G)}^2\ \forall u\in W_2^1(G),\ u|_\Gamma=0.$$

Также предположим, что найдется постоянная C_1, не зависящая от сетки по пространственным переменным и времени, такая, что

$$\max_t\|\tilde{u}_N\|_{L_2(G)}+\|\tilde{u}_N\|_{L_2(0,T;W_2^1(G))}\le C_1,\ \|\beta_N\|_{L_2(0,T;L_2(0,X))}\le C_1. \tag{22}$$

Считаем, что функции Φ_i линейно независимы. Тогда найдется постоянная C_2, не зависящая от N, такая, что

$$\tau\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{r}|\beta_{Ni}^k|^2\le C_2\|\beta_N\|_{L_2(0,T;L_2(0,X))}^2\le(C_1)^2C_2. \tag{23}$$

Поскольку число r фиксировано, то оценка (23) влечет также оценку вида

$$\|\beta_N\|_{L_2(0,T;W_2^s(0,X))}\le C_3, \tag{24}$$

где s определяется из условия $\Phi_i\in W_2^s(0,X)$. Оценка (22) гарантирует также оценку

$$\|\tilde{u}_N(t,x_1,l_0)\|_{L_2(0,T;W_2^{1/2}(0,X))}\le C_3. \tag{25}$$

Фиксируем $s>0$ и предположим, что $\Phi_i\in W_2^s(0,X)$ для всех i. Оценки (22)–(25) влекут, что найдутся подпоследовательности u_{N_k}, β_{N_k} такие, что

$$\tilde{u}_{N_k}\to u\in L_2\left(0,T;W_2^1(G)\right),\ \tilde{u}_{N_k}\to u\in L_\infty\left(0,T;L_2(G)\right),$$
$$\tilde{u}_{N_k}(t,x_1,l_0)\to u(t,x_1,l_0)\in L_2\left(0,T;W_2^{\frac{1}{2}}(0,X)\right),$$
$$\tilde{\beta}_{N_k}\to\tilde{\beta}\in L_2((0,T;W_2^s(0,X))$$

слабо, *-слабо и по норме.

Если мы дополнительно предположим, что у нас есть оценка вида

$$\|\tilde{u}_N(x_1,l_0)\|_{W_2^{s_0}(0,T;W_2^{s_1}(0,X))}\le C_4 \tag{26}$$

или вида

$$\|\beta_N\|_{W_2^{s_0}\left(0,T;W_2^{s_1}(0,X)\right)}\le C_5, \tag{27}$$

где s_1 произвольно (в том числе возможно, что $s_1<0$) и $s_0>0$, то стандартные утверждения о компактности влекут, что существует подпоследовательность u_{N_k} такая, что $u_{N_k}(t,x_1,l_0)\to u(t,x_1,l_0)$, или $\beta_{N_k}\to\beta$ сильно в $L_2(0,T;L_2(0,X))$.

При выполнении этих оценок можно сформулировать следующее утверждение:

Лемма 1. Пусть имеют место оценки (22)–(25) и одна из оценок (26), (27). Тогда в равенствах (30), (31) можно перейти к пределу по N, и предельное решение есть обобщенное решение задачи сопряжения из класса $u\in L_2(\mathrm{Q})$, $u_t\in L_2(0,T,W_2^{-1}(G))$, $u^\pm\in L_2(0,T;W_2^1(G^\pm))$.

Доказательство. Рассмотрим равенства (20), (21). Взяв $N=N_k$, фиксировав функции $v_N^\pm$ и переходя к пределу по k, получим равенства:

$$\int_0^T[\int_{G^+}u^+\bar{v}_{Nt}^+\,dx+\int_{G^+}\sum_{m=1}^{2}c_mu_{x_m}^+\tilde{v}_{Nx_m}^+(t,x)\,dx+$$
$$\int_{G^+}(\vec{b}\nabla u^++au^+)\tilde{v}_N^+(t,x))\,dx]\,dt=\int_{G^+}u_0^+(x)\bar{v}_N^+(\tau,x)\,dx+ \tag{28}$$
$$\int_0^T\left[\int_{G^+}f\tilde{v}_N^+\,dx-\int_0^X\tilde{\beta}\left(u^+(t,x_1,l_0)-u^-(t,x_1,l_0)\right)\tilde{v}_N^+(t,x_1,l_0)dx_1\right]dt,$$

$$\int_0^T[\int_{G^-}\tilde{u}^-\bar{v}_{Nt}^-\,dx+\int_{G^-}\sum_{m=1}^{2}c_m\tilde{u}_{x_m}^-(x)\tilde{v}_{Nx_m}^-(x)\,dx+$$
$$\int_{G^-}(\vec{b}\nabla u^-+au^-)\tilde{v}_N^-(x)\,dx]\,dt=\int_{G^-}u_0^-(x)\bar{v}_N^-(\tau,x)\,dx+\int_0^T[\int_{G^-}f\tilde{v}_N^-\,dx+ \tag{29}$$
$$\int_0^X\tilde{\beta}\left(u\left(t,x_1,l_0\right)^+-u^-(t,x_1,l_0)\right)\tilde{v}_N^-(t,x_1,l_0)dx_1\Big]dt.$$

Далее берем произвольную функцию $v\in W_2^1(\mathrm{Q}^\pm)\cap L_2(\mathrm{Q})$, удовлетворяющую однородным условиям Дирихле на боковой поверхности области G и такую, что $v|_{t=T}=0$. Построив приближение функции v в норме $W_2^1(\mathrm{Q}^{\pm})$, перейдем к пределу и из (28), (29) получим равенства:

$$\int_0^T [\int_{G^+} u^+ v_t^+ \, dx + \int_{G^+} \sum_{m=1}^{2} c_m u_{x_m}^+ v_{x_m}^+(t,x)\, dx + \int_{G^+} (\vec{b}\nabla u^+ + au^+) v^+(t,x)\, dx]\, dt = \int_{G^+} u_0^+(x) v^+(0,x)\, dx + \int_0^T [\int_{G^+} f v^+ \, dx - \int_0^X \tilde{\beta}(u^+(t,x_1,l_0) - u^-(t,x_1,l_0)) v^+(t,x_1,l_0)\, dx_1]\, dt, \quad (30)$$

$$\int_0^T [\int_{G^-} u^- v_t^- \, dx + \int_{G^-} \sum_{m=1}^{2} c_m u_{x_m}^-(x) v_{x_m}^-(t,x)\, dx + \int_{G^-} (\vec{b}\nabla u^- + au^-) v^-(t,x)\, dx]\, dt = \int_{G^-} u_0^-(x) v^-(0,x)\, dx + \int_0^T [\int_{G^-} f v^- \, dx + \int_0^X \tilde{\beta}\big(u(t,x_1,l_0)^+ - u^-(t,x_1,l_0)\big) v^-(t,x_1,l_0) dx_1\big] dt, \quad (31)$$

справедливые для всех $v^{\pm} \in W_2^1(\mathrm{Q}^{\pm})$, таких, что $v^{\pm}(T,x)=0$, и удовлетворяющих условиям Дирихле в (4). Используя определение обобщенной производной, получим, что существуют обобщенные производные $u_t^{\pm} \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\mathrm{G}^{\pm}))$ и $u^{\pm}(0,x)=u_0^{\pm}(x)$. Таким образом, мы пришли к определению обобщенного решения задачи сопряжения из класса $u \in \mathrm{L}L_2(\mathrm{Q})$, $u_t \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\mathrm{G}))$, $u^{\pm} \in L_2(0,T; W_2^1(\mathrm{G}^{\pm}))$.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Перейдем к рассмотрению численных экспериментов и анализу их результатов. Полученный программный комплекс был зарегистрирован, и получено соответствующее свидетельство. Получаемые результаты вычислений напрямую зависят от характеристик производительности компьютера. Характеристики компьютера, на котором были получены описываемые далее данные, следующие: процессор Intel(R) Core(TM) i5-9500F CPU @ 3.00GHz 3.00GHz, 16.00 GB RAM.

В описываемом эксперименте τ – время выполнения расчета в секундах, ε_0 – рассчитанная точность полученных вычислений, δ – уровень случайного шума, r, функции Φ:

$$\Phi_1 = x^2 - 2x$$

$$\Phi_2 = x * \sin\left(3 * \frac{x}{4}\right) - 2$$

$$\Phi_3 = x^3 - 2x^2 \, .$$

В следующей таблице представлены результаты расчетов при $\varepsilon=10^{-3}$.

Таблица 1. Расчеты при $\varepsilon=10^{-3}$

No exp.	Φ	r	δ	ε_0	τ
1	Φ_1	3	0	0,0107	6,95
2	Φ_1	4	0	0,0136	7,39
3	Φ_1	5	0	0,0166	7,2
4	Φ_2	3	0	0,0094	7,15
5	Φ_2	4	0	0,0126	6,2
6	Φ_2	5	0	0,0165	7,18
7	Φ_3	3	0	0,01	6,07
8	Φ_3	4	0	0,0135	8,35
9	Φ_3	5	0	0,0171	6,07

Далее представлены результаты при $\varepsilon=10^{-4}$.

Таблица 2. Расчеты при $\mathcal{E}=10^{-4}$

No exp.	Φ	r	δ	ε_0	τ
1	$Ф_1$	3	0	0,00102	9,75
2	$Ф_1$	4	0	0,00124	9,79
3	$Ф_1$	5	0	0,00154	10,52
4	$Ф_2$	3	0	0,00099	9,61
5	$Ф_2$	4	0	0,00121	9,71
6	$Ф_2$	5	0	0,00159	8,22
7	$Ф_3$	3	0	0,00091	10,42
8	$Ф_3$	4	0	0,012	9,78
9	$Ф_3$	5	0	0,0164	11,77

И результаты при увеличении точности до $\varepsilon=10^{-5}$.

Таблица 3. Расчеты при $\mathcal{E}=10^{-5}$

No exp.	Φ	r	δ	ε_0	τ
1	$Ф_1$	3	0	0,000099	13,9
2	$Ф_1$	4	0	0,000135	12,14
3	$Ф_1$	5	0	0,000166	13,32
4	$Ф_2$	3	0	0,000109	11,56
5	$Ф_2$	4	0	0,000121	13,03
6	$Ф_2$	5	0	0,000163	13,53
7	$Ф_3$	3	0	0,0001	12,91
8	$Ф_3$	4	0	0,000119	12,36
9	$Ф_3$	5	0	0,000165	11,96

Также для проверки устойчивости решения на условия переопределения накладывались случайные возмущения данных. $\psi_{new}\ (0)=\psi(x)(1+\delta(2\sigma\text{-}1))$, где $\sigma\in[0,1]$, а δ задается пользователем. В ходе экспериментов случайный шум был равен 5 и 10 %, соответственно δ=5 или δ=10.

Далее были произведены расчеты при различных ε при добавлении случайного шума в 5 и 10 %, в таблице 4 приведены расчеты при $\varepsilon=10^{-3}$.

Таблица 4. Расчеты при изменениях δ при ε=10^{-3}

No exp.	Φ	r	δ	ε_0	τ
2	Φ_1	3	5	0,0103	11,04
3	Φ_1	3	10	0,015	10,54
5	Φ_1	4	5	0,0155	11,98
6	Φ_1	4	10	0,015	14,57
8	Φ_1	5	5	0,0171	11,63
9	Φ_1	5	10	0,0187	18,63
11	Φ_2	3	5	0,013	8,8
12	Φ_2	3	10	0,0117	11,19
14	Φ_2	4	5	0,0153	9,88
15	Φ_2	4	10	0,0148	12,79
17	Φ_2	5	5	0,0166	11,92
18	Φ_2	5	10	0,0186	18,79
20	Φ_3	3	5	0,0127	10,69
21	Φ_3	3	10	0,0134	13,03
23	Φ_3	4	5	0,016	13,46
24	Φ_3	4	10	0,0169	12,82
26	Φ_3	5	5	0,0186	12,13
27	Φ_3	5	10	0,0188	17,16

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В результате вычислений отчетливо видно увеличение времени работы программы при повышении точности и при достаточно серьезных изменениях входных данных (при увеличении ошибки до 15 и 20 % расчеты могут выполняться с ошибками или занять кратно больше времени). Также стоит отметить, что увеличение времени работы при $\varepsilon=10^{-5}$ не так заметно повышает точность вычислений, соответственно для большей эффективности и дальнейших вычислений и проверки алгоритма было решено остановиться на $\varepsilon=10^{-4}$ в связи с небольшими временными потерями, но достаточно точных вычислениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов, О. М. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, А. В. Ненарокомов. – Москва : Янус-К, 2009. – 299 с.
2. Белоногов, В. А. О некоторых классах обратных задач определения коэффициента теплообмена в слоистых средах / В. А. Белоногов, С. Г. Пятков // Сибирский математический журнал. – 2022. – Т. 63, № 2(372). – С. 252–271. – DOI 10.33048/smzh.2022.63.202.
3. Белоногов, В. А. О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта / В. А. Белоногов, С. Г. Пятков // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2020. – № 7. – С. 18–32. – DOI 10.26907/0021-3446-2020-7-18-32.
4. К решению нестационарных нелинейных граничных обратных задач теплопроводности / Ю. М. Мацевитый, А. О. Костиков, Н. А. Сафонов, В. В. Ганчин // Проблемы машиностроения. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 15–23.
5. Ткаченко, В. Н. Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов / В. Н. Ткаченко. – Киев : Наукова думка, 2008. – 243 с.
6. Шморган, С. А. Об определении точечных источников в обратных задачах тепломассопереноса / С. А. Шморган, Л. В. Неустроева // Вестник Югорского государственного университета. – 2024. – Т. 20, № 4. – С. 82–91. – DOI 10.18822/byusu20240482-91.
7. A comparison of two inverse problem techniques for the identification of contact failures in multi-layered composites / L. A. S. Abreu, M. J. Colaco, C. J. S. Alves [et al.] // 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013) November 3–7. – Ribeirao Preto, Brasil : ABCM 2013. – С. 5422–5432.
8. Artyukhin, E. A. Deriving the thermal contact resistance from the solution of the incerce heat-conduction problem /

E. A. Artyukhin, A. V. Nenarokomov // Journal of Engineering Physics. – 1984. – Т. 46, № 4. – С. 495–499.

9. Belonogov, V. A. On solvability of Some Classes of Transmission Problems in a Cylindrical Space Domain / V. A. Belonogov, S. G. Pyatkov // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2021. – Vol. 18, No. 1. – P. 176–206. – DOI 10.33048/semi.2021.18.015.
10. Drenchev, L. B. Inverse heat conduction problems and application to estimate of heat paramters in 2-D experiments / L. B. Drenchev, J. Sobczak // Proc. Int. Conf. High Temperature Capillarity, Cracow, Poland, 29 June – 2 July 1997. – Krakow (Poland) : Foundry Research Institute, 1998. – С. 355–361.
11. Huang, C. An inverse problem of simultaneously estimating contact conductance and heat transfer coefficient of exhaust gases between engine's exhaust valve and seat / C. Huang, T. Ju // International journal for numerical methods in engineering. – 1995. – № 38. – С. 735–754.
12. Identification of contact failures in multi-layered composites / A. Abreu, H. R. B. Orlande, C. P. Naveira-Cotta [et al.] // Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2011 August 28–31. – Washington, DC, USA : ASME, 2011. – С. 1–9.
13. Loulou, T. An inverse heat conduction problem with heat flux measurements / T. Loulou, E. Scott // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2006. – Т. 67, № 11. – С. 1587–1616.
14. Zhuo, L. Reconstruction of the heat transfer coefficient at the interface of a bi-material / L. Zhuo, D. Lesnic // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2020. – Т. 28, № 3. – С. 374–401.