



ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ ПО ТОЧЕЧНЫМ ДАННЫМ

Тукмачева Юлия Андреевна

аспирант 2 года обучения направления
«Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ»
Инженерной школы цифровых технологий,
Югорский государственный университет,
Ханты-Мансийск, Россия
E-mail: y_tukmacheva@ugrasu.ru

Пятков Сергей Григорьевич

доктор физико-математических наук, профессор
Инженерной школы цифровых технологий,
Югорский государственный университет,
Ханты-Мансийск, Россия
E-mail: s_pyatkov@ugrasu.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Правительства Ханты-Мансийского автономного округа – Югры (грант № 25-11-20026).

Предмет исследования: обратные задачи определения коэффициента поглощения в параболическом уравнении по точечным данным.

Цель исследования: установление корректности задачи определения младшего коэффициента в параболическом уравнении по точечным условиям переопределения, доказательство существования и единственности решения в пространствах Соболева.

Методы исследования: априорные оценки, теорема Шаудера, теория параболических операторов.

Объекты исследования: параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения, представляемым в виде линейной комбинации известных функций с неизвестными коэффициентами.

Основные результаты исследования: доказана теорема существования и единственности решений в пространствах Соболева, получены априорные оценки. Метод носит конструктивный характер и может служить основой для построения численного алгоритма приближённого решения обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, коэффициент поглощения, параболическое уравнение, перенос, пространство Соболева.

DETERMINATION OF THE ABSORPTION COEFFICIENT FROM DISCRETE DATA

Julia A. Tukmacheva

Postgraduate student,
Engineering School of Digital Technologies,
Yugra State University,
Khanty-Mansiysk, Russia
E-mail: y_tukmacheva@ugrasu.ru

Sergey G. Pyatkov

Doctor of Physics and Mathematics, Professor
Engineering School of Digital Technologies,
Yugra State University,
Khanty-Mansiysk, Russia
E-mail: s_pyatkov@ugrasu.ru

This work was supported by the Russian Science Foundation and the Government of the Khanty-Mansiysk Autonomous Okrug – Yugra (Grant no. 25-11-20026).

Subject of research: inverse problems concerning the determination of an absorption coefficient in a parabolic equation from discrete (pointwise) data.

Purpose of research: establishing the well-posedness of the problem of determining the lower-order coefficient in a parabolic equation from pointwise overdetermination conditions; proving the existence and uniqueness of a solution in Sobolev spaces.

Research methods: a priori estimates, Schauder's fixed-point theorem, and the theory of parabolic operators.

Objects of research: parabolic equations with an unknown absorption coefficient represented as a linear combination of known functions with unknown coefficients.

Research findings: a theorem on the existence and uniqueness of solutions in Sobolev spaces is proven, and a priori estimates are derived. The method is constructive and can serve as a foundation for developing a numerical algorithm for the approximate solution of the inverse problem.

Keywords: inverse problem, absorption parameter, parabolic equation, heat and mass transfer, Sobolev spaces.

ВВЕДЕНИЕ

Мы исследуем обратные задачи об определении неизвестного коэффициента поглощения – младшего коэффициента в параболическом уравнении вида

$$Lu + g(t, x)u = u_t - L_0 u + g(t, x)u = f(t, x), \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times G, \quad (1)$$

где $L_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^n a_i(t, x) u_{x_i} - a_0(t, x) u$, $G \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей Γ . Функция g имеет вид $g(t, x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \Phi_i(t, x)$, где α_i – неизвестные постоянные и $\{\Phi_i\}$ – некоторый набор линейно независимых функций. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Bu|_S = g_0(t, x) \quad (S = (0, T) \times \Gamma), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad (2)$$

где $Bu = \sum_{i=1}^n \gamma_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(t, x)u$ или $Bu = u$ и $\vec{\gamma}(t, x) -$

некасательное к Γ векторное поле, направленное вне области G и условиями переопределения,

$$u(t_i, y_i) = \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (3)$$

где $(t_i, y_i) \in \bar{Q}$, $y_i \in G$, $0 < t_i \leq T$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)–(3) и неизвестных параметров α_i , функции Φ_i считаются заданными.

Коэффициентные обратные задачи являются классическими. Они возникают в самых различных задачах математической физики: описание различных процессов переноса [1]–[4], фильтрации, экологии (определение потоков парниковых газов [5]–[7], описание процессов поглощения метана в



почвах [8]–[10] и др.). В частности, в работах [8]–[10] функция $g=g(x)$ – скорость поглощения метана в почвах. Соответствующая модель предложена в работе [8]. В работах [9], [10] рассмотрен вопрос о численном определении скорости поглощения в стационарном случае. Отметим, что изучение величин потребления (удельных потоков) CH_4 , понимание процессов, обуславливающих его временную и пространственную динамику, а также моделирование потребления необходимы для построения обоснованных климатических прогнозов. Как известно, потребление метана в почве за счет окисления метанотрофными бактериями в автоморфных почвах – единственный известный биологический механизм стока для атмосферного метана [11].

В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных исследованию обратных задач об определении младшего коэффициента в параболическом уравнении в различных постановках, возникающих в приложениях. Прежде всего отметим работу [12], где рассмотрена задача об определении коэффициента $g=g(x)$ по условию финального переопределения, т. е. условие (3) заменяется на условие $u(T, x) = \varphi(x)$. Эта задача совпадает с классической задачей управления: перевести систему из заданного состояния u_0 в состояние $u(T, x)$ за счет изменения параметров системы. В этой работе получена теорема существования и единственности классических решений задачи. Доказательства основаны на принципе максимума, и коэффициент g ищется знакоопределенным. Эти результаты также изложены в монографии [4]. Теорема существования и единственности решений задачи об определении коэффициента $g=g(x)$ в случае финального переопределения имеется также в работе [15] (см. также [14]). В работе [16] требуется выполнение некоторых неравенств, связывающих между собой нормы данных, фактически эти условия – условия малости данных. Аналогичные условия требуются и в работе [17], где коэффициент g ищется в виде $g(t, x) = \sum_{i=1}^r g_i(x) \Phi_i(t, x)$ с неизвестными функциями $g_i(x)$ и дополнительно задаются значения решения $u(t_i, x)$ в некотором наборе точек $t=t_i$ ($i=1, \dots, r$). Здесь также получены теоремы существования и единственности решений. В работе [18] рассматривается одномерная задача, где коэффициент $g(x)$ определяется по данным Коши на боковой стороне прямоугольника. Отметим также работы [19; 13], [20], где рассматриваются вопросы корректности задачи определения функции $g(x)$ с использованием интегральных условий переопределения. Гораздо больше работ посвящено определению младшего коэффициента g , зависящего от времени. Мы сошлемся

только на работы [21]–[24], где можно найти библиографию. Сошлемся на работы [25]–[26], где коэффициент $g=g(t)$ определяется численно, хотя можно отметить, что таких работ очень много. Условия переопределения вида (3) использовались в ряде работ для определения различных параметров в уравнении (см., например, [27]).

Мы не нашли теоретических результатов, посвященных задаче (1)–(3), в литературе. Наши результаты наиболее близки к результатам работы [17]. В работе основное внимание посвящено условиям существования решения задачи (1)–(3) в классах Соболева. Полученные результаты допускают обобщение в том числе и на квазилинейный случай и могут послужить основой для создания численного алгоритма.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Определения и вспомогательные результаты. Пусть E – банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ (G – область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство сильно измеримых функций, определенных на G со значениями в E и конечной нормой $\|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ [28]. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ и т. д. стандартные (см. [28], [34]). Если $E=\mathbb{R}$ или $E=\mathbb{R}^n$, то последнее пространство обозначаем просто через $W_p^s(Q)$. Определения пространств Гельдера $C^{\alpha, \beta}(\bar{Q})$, $C^{\alpha, \beta}(\bar{S})$ могут быть найдены, например, в [29]. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) мы считаем вещественными. Под нормой вектор-функции понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J=(0, T)$ положим $W_p^{s, r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$. Соответственно, $W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$. Пусть $(u, v) = \int_G u(x)v(x)dx$. Определение границы класса C^s , $s \geq 1$ имеется в [29, гл. 1]. Рассматривая задачу (1)–(3), мы предполагаем, что $\Gamma \in C^2$.

Оператор L_0 считается эллиптическим, т. е. для некоторой постоянной $\delta_0 > 0$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (t, x) \in Q.$$

Приведем условия на исходные данные. Считаем, что выполнены условия

$$a_i \in L_q(Q) \quad (q > n + 2), \quad a_{kl} \in C(\bar{Q}), \quad \sigma, \gamma_k \in W_{q_0}^{s_0, 2s_0}(S), \quad a_0 \in L_p(Q), \quad (4)$$

где

$$q_0 > 2(n+1)p/(p-1), \quad p > (n+2)/2, \quad s_0 = 1/2 - 1/2p, \quad i = 1, \dots, r, \quad k, l = 1, \dots, n;$$

$$u_0(x) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G), \quad f \in L_p(Q), \quad \Phi_i(t, x) \in L_p(Q), \quad i = 1, \dots, r, \quad g_0 \in W_p^{k_0, 2k_0}(S), \quad (5)$$

где $k_0 = 1/2 - 1/2p$, если $Bu \neq u$ и $k_0 = 1 - 1/2p$, в противном случае;

$$g_0(0, x) = u_0|_{\Gamma}, \text{ если } Bu = u, \quad g_0(0, x) = B(0, x, D)u_0|_{\Gamma}, \text{ если } Bu \neq u, \quad p > 3. \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4)–(6). Тогда существует единственное решение задачи (1)–(2) такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q)$, причем справедлива оценка

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq c_0 (\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S)}).$$

Доказательство. Существование и единственность решений задачи (1), (2) вытекает из известных результатов о разрешимости параболических задач. Мы можем сослаться, например, на теоремы 2.1 в [30, 31] и на теорему 5.3 в [32]. Отметим, что стандартные результаты (см., например, теорему 10.4 параграфа 10 гл. 7 в [29]) не дают утверждения теоремы, поскольку там требуется, чтобы в последнем включении в (4) пространство Соболева было заменено на пространства Гельдера.

Обозначим через Φ решение задачи (1)–(2), где $\vec{\alpha} = 0$, а соответствующую постоянную c_0 в этом случае обозначим через C_0 .

Основные результаты. Вначале приведем некоторые построения. Сделаем замену $v = u + \Phi$ в уравнении (1). Функция v есть решение эквивалентной задачи

$$v_t - L_0 v + g(t, x)(v + \Phi) = 0, \quad Bv|_S = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

$$v(t_i, y_i) = \tilde{\psi}_i = \psi_i - \Phi(t_i, y_i), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (8)$$

Пусть u решение задачи (1)–(2) из класса, указанного в теореме 1. Тогда $v \in W_p^{1,2}(Q)$ и в силу теорем вложения $v \in C^{1-(n+2)/2p, 2-(n+2)/p}(\bar{Q}) \subset C(\bar{Q})$ (см. теоремы вложения в [34, теорема 2.6.6]). Обозначим через L^{-1} оператор, сопоставляющий функции $f \in L_p(Q)$ решения задачи $Lv = f$, $Bv|_S = 0$, $v|_{t=0} = 0$. Аналогичным образом определим оператор $(L+g)^{-1}f$.

Преобразуем уравнение (7). Выражая функцию v , придем к равенству $v = -(L+g)^{-1}g\Phi$. Далее имеем

$$v = -(L+g)^{-1}g\Phi = -L^{-1}L(L+g)^{-1}g\Phi = -L^{-1}g\Phi + L^{-1}g(L+g)^{-1}g\Phi. \quad (9)$$

Воспользовавшись определением функции g , получим, что $L^{-1}g\Phi = \sum_{i=1}^r \alpha_i L^{-1}\Phi_i \Phi$. Построим матрицу B с элементами $b_{ji} = L^{-1}\Phi_i \Phi(t_j, y_j)$. Взяв равенство (9) в точке (t_j, y_j) , придем к системе

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i b_{ji} = -v(t_j, y_j) + L^{-1}g(L+g)^{-1}g\Phi(t_j, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (10)$$

Если v есть решение обратной задачи (7), (8), то система (10) может быть записана в виде

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i b_{ji} = -\tilde{\psi}_j + L^{-1}g(L+g)^{-1}g\Phi(t_j, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (11)$$

В матричном виде эти равенства имеют вид

$$B\vec{\alpha} = \vec{\psi} + R(\alpha), \quad (12)$$

где $\vec{\psi} = (-\tilde{\psi}_1, -\tilde{\psi}_2, \dots, -\tilde{\psi}_r)^T$, $R = (R_1, \dots, R_r)^T$ с $R_j = L^{-1}g(L+g)^{-1}g\Phi(t_j, y_j)$, $j = 1, 2, \dots, r$. Тогда можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (4)–(6). Если $\vec{\alpha}$ есть решение системы (12), то функция v , определяемая равенством (9), есть решение обратной задачи (7), (8). Наоборот, если v есть решение обратной задачи (7), (8), то $\vec{\alpha}$ есть решение системы (12).

Доказательство. Утверждение леммы в обратную сторону мы уже получили, выводя систему (12). Предположим, что $\vec{\alpha}$ есть решение системы (12). Построим функцию v как функцию, определяемую равенством (9). Как и ранее, после преобразований получим равенство (10). Покоординатная запись системы (12) имеет вид (11). Вычитая равенства (10), (11), получим, что $v(t_j, y_j) = \tilde{\psi}_j$. Таким образом, равенство (9) выполнено. Кроме того, по определению функция v есть решение задачи (7).

Чтобы исследовать разрешимость задачи (7), (8), мы наложим дополнительное условие корректности

$$\det B \neq 0. \quad (13)$$

Далее в качестве нормы числового вектора $\vec{e}$ используем максимум моделей координат, а в качестве нормы вектор-функции используем сумму норм координат. В частности, $\|\vec{\alpha}\| = \max_j |\alpha_j|$, $\|\Phi\|_{L_p(Q)} = \sum_{j=1}^r \|\Phi_j\|_{L_p(Q)}$. Тогда обозначим норму матрицы B^{-1} через C_1 .

Для удобства далее будем считать, что $T \leq 1$.

Лемма 2. Пусть $v \in W_p^{1,2}(Q)$ удовлетворяет начальным и краевым условиям (7). Тогда справедливо неравенство

$$\|v\|_{C(\bar{Q})} \leq C_2 T^{1-s} \|v\|_{W_p^{1,2}(Q)},$$

где постоянная C_2 не зависит от $T \in (0, 1]$ и $s \in (0, 1 - (n+2)/2p)$ произвольно.

Доказательство. Пусть $s < 1 - (n+2)/2p$. Мы имеем $v \in W_p^{s, 2s}(Q) \subset C(\bar{Q})$ при $s > (n+2)/2$ (см. [34, теорема 2.6.6]). Тогда, используя интерполяционные неравенства ([34, следствие 5.7.3, гл. 7]), получим оценку

$$\|v\|_{C(\bar{Q})} \leq c_1 \|v\|_{W_p^{s, 2s}(Q)} \leq c_1 c_2 \|v\|_{W_p^{1,2}(Q)} \|v\|_{L_p(Q)}^{1-s}.$$

Используя формулу Ньютона – Лейбница, получим неравенство

$\|v\|_{L_p(0, T; E)} \leq T \|v_t\|_{L_p(0, T; E)}$, где E – произвольное банахово пространство. Тогда предыдущее неравенство гарантирует оценку

$$\|v\|_{L_p(0, T; E)} \leq T \|v_t\|_{L_p(0, T; E)},$$

Таким образом, $C_2 = c_1 c_2$. Отметим, что обе постоянные c_1, c_2 ограничены при $T \rightarrow 0$. Последнее вытекает из того простого факта, что функцию v можно продолжить нулем при $t < 0$

на произвольный интервал, например, на интервал $(-1, T)$ с сохранением класса.

Положим $\vec{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_r)^T$ и потребуем выполнения неравенств

$$\|B^{-1}\vec{\psi}\| \leq \max(M_1, M_2), \quad M_1 = \frac{1}{2C_0C_2T^{1-s}\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}},$$

$$M_2 = \frac{1}{4C_0^2C_1C_2^2T^{2-2s}\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}^2\|\Phi\|_{L_\infty(Q)}}. \quad (14)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (4)–(6), (13), (14). Тогда существует решение $(u, \vec{\alpha})$ задачи (1)–(3) такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q)$.

Доказательство. Мы будем исследовать разрешимость системы (12), используя теорему Шаудера. Оценим норму оператора $B^{-1}R + B^{-1}\vec{\psi}$ и покажем, что он переводит некоторый шар $B_{R_0} = \{\vec{\alpha}: \|\vec{\alpha}\| \leq R_0\}$ в себя. Имеем, используя лемму 2 и теорему 1, что

$$\|B^{-1}R(\alpha)\| \leq C_3T^{1-s}\|g(L+g)^{-1}g\Phi\|_{L_p(Q)} \leq C_3T^{1-s}\|g\|_{L_p(Q)}\|$$

$$(L+g)^{-1}g\Phi\|_{C(\bar{Q})} \leq C_3T^{1-s}\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}\|(L+g)^{-1}g\Phi\|_{C(\bar{Q})}, \quad C_3 = C_0C_1C_2. \quad (15)$$

Оценим $\|(L+g)^{-1}g\Phi\|_{C(\bar{Q})}$. Пусть $(L+g)^{-1}f_0 = w$, где $f_0 \in L_p(Q)$. Тогда $w - L_0^{-1}w + gw = f_0$. Это равенство можно записать в виде

$$w = -L^{-1}gw + L^{-1}f_0. \quad (16)$$

Оценим норму

$$\|L^{-1}gw\|_{C(\bar{Q})} \leq C_0C_2T^{1-s}\|gw\|_{L_p(Q)} \leq C_0C_2T^{1-s}\|g\|_{L_p(Q)}\|w\|_{C(\bar{Q})} \leq$$

$$C_0C_2T^{1-s}\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}\|w\|_{C(\bar{Q})}.$$

Тогда, если

$$C_0C_2T^{1-s}\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)} \leq 1/2, \quad (17)$$

то уравнение (16) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\|w\|_{C(\bar{Q})} \leq 2\|L^{-1}f_0\|_{C(\bar{Q})} \leq 2C_0C_2T^{1-s}\|f_0\|_{L_p(Q)}. \quad (18)$$

Если мы возьмем $f_0 = g\Phi$, то получим оценку

$$\|(L+g)^{-1}g\Phi\|_{C(\bar{Q})} \leq 2C_0C_2T^{1-s}\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}\|\Phi\|_{L_\infty(Q)}.$$

Окончательно из (15), (18) имеем оценку

$$\|B^{-1}R(\alpha)\| \leq 2C_0^2C_1C_2^2T^{2-2s}\|\vec{\alpha}\|^2\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}^2\|\Phi\|_{L_\infty(Q)}.$$

Положим, $R_0 = 2\|B^{-1}\vec{\psi}\|$, и пусть $\vec{\alpha} \in B_{R_0}$. Тогда при условии (17) и условии

$$C_0^2C_1C_2^2T^{2-2s}\|\vec{\alpha}\|^2\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}^2\|\Phi\|_{L_\infty(Q)} \leq R_0/4$$

множество значений оператора $B^{-1}\vec{\psi} + B^{-1}R(\vec{\alpha})$ лежит в B_{R_0} . Как следствие (17), (19), для того, чтобы оператор $B^{-1}\vec{\psi} + B^{-1}R(\vec{\alpha})$ переводил шар B_{R_0} в себя, необходимо потребовать, чтобы

$$R_0 \leq \frac{1}{2C_0C_2T^{1-s}\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}} = M_1, \quad R_0 \leq \frac{1}{4C_0^2C_1C_2^2T^{2-2s}\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}^2\|\Phi\|_{L_\infty(Q)}} = M_2.$$

Кроме того, в силу конечномерности шара этот оператор будет и вполне непрерывным (просто непрерывность оператора очевидна). Тогда по теореме Шаудера уравнение (12) имеет решение в этом шаре. Функция v найдется затем как решение задачи (7).

Следствие 1. Анализируя условие (14), легко заметить, что при выполнении условия (13) теорема существования 1 имеет место, если параметр T достаточно мал.

Далее мы приведем некоторые замечания по поводу условия корректности (13).

Вообще говоря, если мы строим приближение функции $g(t, x)$, используя данные (3), то систему линейно независимых функций Φ_i мы выбираем сами, исходя из каких-то соображений. Например, предположим, что функция $\Phi(t, x)$ обладает свойством:

найдется окрестность U множества точек $\{(t_i, y_i)\}$ такая, что

$$|\Phi| \geq \delta_1 > 0 \quad \text{для всех } (t, x) \in U \cap Q. \quad (19)$$

Не так трудно построить систему функций $\varphi_i \in C^2(Q)$ такую, что $\varphi_i(t_j, y_j) = \delta_{ij}$ – символ Кронекера, φ_i удовлетворяют однородным граничным и начальным условиям (2), $\text{supp } \varphi_i \subset U$ для всех i . Тогда система

$$\Phi_{1i} = \frac{1}{\Phi} L\varphi_i, \quad L^{-1}\Phi_{1i}\Phi = \varphi_i,$$

обладает тем свойством, что $\det\{L^{-1}\Phi_{1i}\Phi(t_j, y_j)\} = 1$, и таким образом условие корректности (13) выполнено.

Более того, справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. Пусть выполнены условия (4)–(6), (19), и система функций $\{\Phi_i\}$ такова, что $\det\{L^{-1}\Phi_i\Phi(t_j, y_j)\} = 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, r$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется система $\Phi_{0i} \in L_p(Q)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) такая, что $\|\vec{\Phi} - \vec{\Phi}_0\|_{L_p(Q)} < \varepsilon$ и $\det\{L^{-1}\Phi_{0i}\Phi(t_j, y_j)\} \neq 0$. Здесь $\vec{\Phi}_0 = (\Phi_{01}, \Phi_{02}, \dots, \Phi_{0r})^T$.

Доказательство. Рассмотрим систему функций $\Phi_{0i} = \Phi_i + \delta\Phi_{1i}$, где функции Φ_{1i} определены равенством (22). Тогда функция $\psi(\delta) = \det\{L^{-1}\Phi_{0i}\Phi(t_j, y_j)\}$ есть многочлен по параметру δ , и, более того, коэффициент перед старшей степенью равен $\det\{L^{-1}\Phi_{1i}\Phi(t_j, y_j)\} = 1$. Выберем $\delta_0 > 0$ так, чтобы $\|\vec{\Phi} - \vec{\Phi}_0\|_{L_p(Q)} < \varepsilon$ для всех $|\delta| < \delta_0$. Поскольку число нулей многочлена конечно, то в любой окрестности точки $\delta = 0$ найдутся точки, где $\psi(\delta) \neq 0$.

Рассмотрим вопрос о единственности решений задачи. Естественно утверждать, что теорема единственности имеет место в некотором шаре $\vec{\alpha} \in B_{R_1}$. Приведем условия единственности:

$$C_1(6C_0^2C_2^2T^{2-2s}R_1\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}^2\|\Phi\|_{L_\infty(Q)}+2C_0C_2T^{1-s}\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}\|\Phi\|_{L_\infty(Q)})<1, \quad (20)$$

$$R_1C_0C_2T^{1-s}\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}\leq 1/2. \quad (21)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (4)–(6), (13), (14), (20), (21). Тогда если $(u_i, \vec{a}_i)$ ($i=1,2$) два решения задачи (1)–(3) и $\alpha_i \in B_{R_1}$, то $u_1=u_2$, $\alpha_1=\alpha_2$.

Доказательство. Мы предположим, что $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in B_{R_1}$ два различных решения системы (12), и v_1, v_2 – соответствующие решения задачи (7). Вычитая соответствующие уравнения системы (12), получим равенство

$$B(\vec{a}_1 - \vec{a}_2) = R(\vec{a}_1) - R(\vec{a}_2).$$

Отсюда имеем оценку

$$\|\vec{a}_0\| \leq C_1 \|R(\vec{a}_1) - R(\vec{a}_2)\|, \quad \vec{a}_0 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2. \quad (22)$$

Имеет место представление

$$R_j(\vec{a}_1) - R_j(\vec{a}_2) = -L^{-1}g_1v_1(t_j, y_j) + L^{-1}g_2v_2(t_j, y_j) =$$

$$-\frac{1}{2}L^{-1}(g_1 - g_2)(v_1 + v_2)(t_j, y_j) - \frac{1}{2}L^{-1}(g_1 + g_2)(v_1 - v_2)(t_j, y_j) = I_{1j} + I_{2j},$$

пусть $\vec{I}_1 = (I_{11}, \dots, I_{1r})^T$, $\vec{I}_2 = (I_{21}, \dots, I_{2r})^T$. Оценим каждое из слагаемых, считая, что выполнено условие (24). Для первого слагаемого имеем

$$\|\vec{I}_1\| \leq C_0C_2T^{1-s}\|\alpha_0\|\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}\|v_1 + v_2\|_{C(\bar{Q})}/2.$$

По определению, $v_i = -(L+g)^{-1}g_i\Phi$. Используя оценку (18), получим

$$\|v_i\| \leq 2C_0C_2T^{1-s}\|g_i\Phi\|_{L_p(Q)} \leq 2C_0C_2T^{1-s}R_1\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}\|\Phi\|_{L_\infty(Q)}. \quad (23)$$

Таким образом,

$$\|\vec{I}_1\| \leq 2C_0^2C_2^2T^{2-2s}R_1\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}^2\|\Phi\|_{L_\infty(Q)}\|\alpha_0\|. \quad (24)$$

Оценим второе слагаемое

$$\|\vec{I}_2\| \leq C_0C_2T^{1-s}R_1\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}\|v_1 - v_2\|_{C(\bar{Q})}. \quad (25)$$

Функция $v_1 - v_2$ удовлетворяет уравнению

$$L(v_1 - v_2) + \frac{g_1 + g_2}{2}(v_1 - v_2) = -(g_1 - g_2)(\Phi + \frac{v_1 + v_2}{2}).$$

Используя оценку (23), получим

$$\|v_1 - v_2\|_{C(\bar{Q})} \leq 2C_0C_2T^{1-s}\|\vec{a}_0\|(\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}\|\Phi\|_{L_\infty(Q)} + 2C_0C_2T^{1-s}R_1\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}^2\|\Phi\|_{L_\infty(Q)}).$$

Из этой оценки и оценок (24), (25) выводим

$$\|\vec{I}_1\| + \|\vec{I}_2\| \leq (6C_0^2C_2^2T^{2-2s}R_1\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}^2\|\Phi\|_{L_\infty(Q)} + 2C_0C_2T^{1-s}\|\vec{\Phi}\|_{L_p(Q)}\|\Phi\|_{L_\infty(Q)})\|\vec{a}_0\|.$$

Это неравенство и (22) гарантируют, что $\vec{a}_0=0$. Тогда $v_1=v_2$ и, соответственно, $u_1=u_2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОODY

В настоящей работе рассмотрена обратная задача определения коэффициента поглощения в параболическом уравнении, представленного в виде линейной комбинации известных функций с неизвестными параметрами. Проведен анализ корректности задачи в пространствах Соболева, доказаны теоремы существования и единственности решения задачи, получены априорные оценки решения. Предложенный подход может служить основой для построения численного алгоритма приближенного решения обратной задачи. Полученные результаты также допускают обобщение на более широкий класс задач, включая квазилинейные уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов, О. М. Обратные задачи сложного теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхов, А. В. Ненароков. – Москва : Янус-К, 2009. – 299 с.
2. Ozisik, M. N. Inverse Heat Transfer / M. N. Ozisik, H. R. B. Orlande. – New York : Taylor & Francis, 2000. – 350 p.
3. Marchuk, G. I. Mathematical Models in Environmental Problems / G. I. Marchuk. – Amsterdam : Elsevier Science Publishers, 1986. – Vol. 16. – 216 p.
4. Prilepko, A. I. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. – New-York : Marcel Dekker, Inc., 1999. – 744 p.
5. Glagolev, M. V. Determination of gas exchange on the border between ecosystem and atmosphere: inverse modeling / M. V. Glagolev, A. F. Sabrekov // Mathematical Biology and Bioinformatics. – 2012. – Vol. 7, № 1. – P. 81–101.
6. Sabrekov, A. F. Determination of the specific flux of methane from soil using inverse modeling based on conjugate equations / A. F. Sabrekov, M. V. Glagolev, I. E. Terentyeva // Reports of the International Conference «Mathematical Biology and Bioinformatics» / ed. V. D. Lakhno. – Pushchino : IMPB RAS, 2018. – Vol. 7. – P. e94.
7. Assessment of methane emission from measured concentrations in the atmospheric surface layer / A. I. Borodulin, B. D. Desyatkov, G. A. Makhov, S. R. Sarmanov // Russian meteorology and hydrology. – 1997. – № 1. – P. 49–55.
8. Soil Methanotrophy Model (MeMo v1.0): a process-based model to quantify global uptake of atmospheric methane by soil / F. Murguia-Flores, S. Arndt, A. L. Ganesan [et al.] // Geoscientific Model Development. – 2018. – Vol. 11. – P. 2009–2032.
9. Identification of the methane consumption rate in soils by the inverse problem method / A. F. Sabrekov, M. V. Glagolev, I. E. Terentyeva, S. Yu. Mochenov // Reports

- of the International Conference «Mathematical Biology and Bioinformatics» / ed. V. D. Lakhno. – Pushchino : IMPB RAS, 2018. – Vol. 7. – P. 951–955.
10. Идентификация скорости потребления метана в почвах методом обратной задачи / А. Ф. Сабреков, М. В. Глаголев, И. Е. Терентьева, С. Ю. Моченов // Материалы VI конференции «Математическое моделирование в экологии». – Пущино, 2019. – С. 179–180.
11. Prather, M. J. Overexplaining or underexplaining methane's role in climate change / M. J. Prather, C. D. Holmes // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 2017. – Vol. 114. – P. 5324–5326.
12. Прилепко, А. И. О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении / А. И. Прилепко, В. В. Соловьев // *Дифференциальные уравнения*. – 1987. – Т. 23, № 1. – С. 136–143.
13. Prilepko, A. I. Inverse Source and Coefficient Problems for Elliptic and Parabolic Equations in Holder and Sobolev Spaces / A. I. Prilepko, A. B. Kostin, V. V. Solov'ev // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2019. – Vol. 237, № 3. – P. 576–594.
14. Choulli, M. Generic well-posedness of an inverse parabolic problem – the Hölder-space approach / M. Choulli, M. Yamamoto // *Inverse Problems*. – 1996. – Vol. 12. – P. 195–205.
15. Choulli, M. Inverse problem for a semilinear parabolic equation / M. Choulli // *Inverse Problems*. – 1994. – Vol. 10. – P. 1123–1132.
16. Kozhanov, A. I. Parabolic Equations with an Unknown Absorption Coefficient / A. I. Kozhanov // *Doklady Mathematics*. – 2006. – Vol. 74, № 1. – P. 573–576.
17. Кожанов, А. И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения / А. И. Кожанов // Вестник Челябинского государственного университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 13. – С. 5–19.
18. Hao, D. N. A noncharacteristic Cauchy problem for linear parabolic equation and related inverse problems / D. N. Hao // *Inverse Problems*. – 1994. – Vol. 10. – P. 295–315.
19. Beretta, E. Identifying a space dependent coefficient in a reaction-diffusion equation / E. Beretta // *Inverse Problems and Imaging*. – 2011. – Vol. 5, № 2. – P. 285–296.
20. Kamynin, V. L. The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation / V. L. Kamynin // *Mathematical Notes*. – 2013. – Vol. 94, № 2. – P. 205–213.
21. Pyatkov, S. G. Identification of thermophysical parameters in mathematical models of heat and mass transfer / S. G. Pyatkov // *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. – 2022. – Vol. 9, № 2. – P. 52–66.
22. Пятков, С. Г. О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений / С. Г. Пятков, Е. И. Сафонов // Сибирские электронные известия. – 2014. – Т. 11. – С. 777–799. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v11/p777-799.pdf> (дата обращения: 15.08.2025).
23. Pyatkov, S. G. Inverse problems of recovering lower-order coefficients from boundary integral data / S. G. Pyatkov, O. A. Soldatov // *Axioms*. – 2025. – Vol. 14, № 2. – P. 116.
24. Pyatkov, S. Coefficient inverse problems of identification of thermophysical parameters from boundary integral data / S. Pyatkov, T. Pronkina // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2024. – Vol. 282, № 2. – P. 241–252.
25. Вабищевич, П. Н. Вычислительная идентификация младшего коэффициента параболического уравнения / П. Н. Вабищевич, В. И. Васильев // Доклады академии наук. Математика. – 2014. – Т. 455, № 3. – С. 258–260.
26. Hussein, M. S. Simultaneous determination of time-dependent coefficients and heat source / M. S. Hussein, D. Lesnic // *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. – 2016. – Vol. 17, № 5-6. – P. 401–411.
27. Mamonov, A. V. Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems / A. V. Mamonov, Y-H. R. Tsai // *Inverse Problems*. – 2013. – Vol. 29, № 3. – P. 1–26.
28. Triebel, H. Interpolation theory. Functional spaces. Differential Operators / H. Triebel. – Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978. – 532 p.
29. Ladyzhenskaya, O. A. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type / O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Uraltseva, V. A. Solonnikov. – Providence : American Mathematical Society, 1968. – 648 p.
30. Denk, R. Optimal L_p - L_q -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data / R. Denk, M. Hieber, J. Prüss // *Mathematische Zeitschrift*. – 2007. Vol. 257, № 1. – P. 193–224.
31. Meyries, M. Maximal regularity with temporal weights for parabolic problems with inhomogeneous boundary conditions / M. Meyries, R. Schnaubert // *Mathematische Nachrichten*. – 2012. – Vol. 285, № 8-9. – P. 1032–1051.
32. Hummel, F. Elliptic and parabolic boundary value problems in weighted function spaces / F. Hummel, N. Lindemulder // *Potential Analysis*. – 2022. – Vol. 57. – P. 601–669.
33. Lieberman, G. M. Second order parabolic differential equations / G. M. Lieberman. – Singapore : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005. – 452 p.
34. Linear and Quasilinear Parabolic Problems : Vol. II: Function Spaces / H. Amann. – Cham : Springer Nature Switzerland AG, 2019. – 462 p.