

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

2025 Том 21 № 2

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-2

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (открытый доступ)

Издается с 2005 г.

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС 77-19706 от 13 апреля 2005 г.

выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Периодичность: 6 выпусков в год.

Языки: русский, английский.

Журнал индексируют: РИНЦ, RSCI, Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

Включен в Перечень ведущих научных журналов и изданий ВАК при Минобрнауки России по группе научных специальностей 2.1.1. Строительные конструкции, здания и сооружения (технические науки), 2.1.2. Основания и фундаменты, подземные сооружения (технические науки), 2.1.9. Строительная механика (технические науки).

Международный научно-технический журнал «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений» знакомит читателей с достижениями отечественных и зарубежных ученых в области геометрии пространственных конструкций, сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и расчета строительных и машиностроительных конструкций, освещает вопросы научно-технического прогресса в строительстве и машиностроении, публикует аналитические обзоры по теме журнала.

Сайт журнала содержит полную информацию о журнале, его редакционной политике и этических принципах, требования к подготовке и условия публикации статей, а также полные выпуски журнала с 2008 г. (в рамках политики свободного доступа).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ватин Н.И., д-р техн. наук, проф., РУДН, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Ерофеев В.Т., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия

Колчунов В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Агапов В.П., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Абдильхаджаев А.И., д-р техн. наук, проф., ТГТУ, Ташкент, Узбекистан

Базаров Д.Р., д-р техн. наук, проф., ТИИМ, Ташкент, Узбекистан

Ванин В.В., д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

Варум У., д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия

Войцкицкий З., проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша

Волосухин В.А., д-р техн. наук, проф., Кубанский ГАУ, Краснодар, Россия

Галишикова В.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Дуцев М.В., д-р архитектуры, проф., ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия

Евкин А.Ю., д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада

Какоев С., д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия

Карпенко Н.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия

Козлов Д.В., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Красич С., канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия

Кудрявцев С.А., чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф., ДВГУПС, Хабаровск, Россия

Курбацкий Е.Н., д-р техн. наук, проф., МИИТ, Москва, Россия

Лазарев Ю.Г., д-р техн. наук, проф., СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия

Магуле Ф., проф., Высшая инженерная школа «Централь Сюпелек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция

Мендонка П., д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия

Пенькова М.В., д-р архитектуры, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия

Сантос Р., исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия

Травуш В.И., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия

Федюк Р.С., д-р техн. наук, доцент, ДВФУ, Владивосток, Россия

Якутов Н.М., чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

- Маркович А.С., Агапов В.П., Голишевская Д.А.* Конечный элемент для расчета неоднородно-армированных сталефибробетонных балок 83
- Миронов В.В., Иванович Ю.А., Миронов Д.В.* Расчет фильтрации воды внутри вакуумного анкера при воздействии выдергивающего усилия ... 96

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

- Kirsanov M.N.* Natural Frequency Spectrum and Fundamental Frequency Formula for Plane Periodic Lattice Truss (Спектр собственных частот и формула для основной частоты плоской регулярной фермы решетчатого типа) 108
- Kiseleva R.Z., Ryabukha V.V., Kirsanova N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P.* Two-Field Prismatic Finite Element Under Elasto-Plastic Deformation (Двупольный конечный элемент при упругопластическом деформировании твердого тела) 118
- Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С.* Динамическое нагружение стержневых систем с конечным числом степеней свободы 128

РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

- Карпов В.В.* Системы аппроксимирующих функций при использовании вариационных методов для расчета тонкостенных строительных конструкций 138
- Krivoshapko S.N.* Torsors with Two Curves in Intersecting Planes and with Parallel Axes (Торсы с двумя кривыми в пересекающихся плоскостях и с параллельными осями) 155

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ

- Chernyaev A.A., Marfin K.V.* Variant Design of Girder-Slab Structure with Different Geometric Cells Under Flexural Vibrations (Вариантное проектирование пластинчато-стержневой конструкции с различной геометрической ячейкой при изгибных колебаниях) 167

Редактор И.Л. Панкратова
Редактор англоязычных текстов С.Л. Шамбина
Дизайн обложки Ю.Н. Ефремовой
Компьютерная верстка Н.В. Маркеловой

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru, i_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 24.04.2025. Выход в свет 26.04.2025. Формат 60х84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 11,39. Тираж 250 экз. Заказ № 783. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»
Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2025 VOLUME 21 No. 2

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-2

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI, Russian Index of Science Citation, Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

International scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illuminates the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.

The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

Nikolai I. Vatin, DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITORS-IN-CHIEF

Vladimir T. Erofeev, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

Vitaly I. Kolchunov, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Iraida A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

Anvar I. Adylkhodzhaev, DSc, Professor, TSTU, Tashkent, Uzbekistan

Vladimir P. Agapov, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Dilshod R. Bazarov, DSc, Professor, TIAME, Tashkent, Uzbekistan

Mikhail V. Dutsev, Dr. of Architecture, NNGASU, Nizhny Novgorod, Russia

Alexander Yu. Evkin, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

Roman S. Fedyuk, DSc, Associate Professor, FEPU, Vladivostok, Russia

Vera V. Galishnikova, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Saeid Kakooei, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

Nikolay I. Karpenko, member of the RAACS, DSc, Professor, NIIF RAACS, Moscow, Russia

Dmitriy V. Kozlov, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

Sergey A. Kudryavtsev, corresponding member of the RAACS, DSc, Professor, FESTU, Khabarovsk, Russia

Evgeniy N. Kurbatskiy, DSc, Professor, MIIT, Moscow, Russia

Yuriy G. Lazarev, DSc, Professor, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France

Paulo Mendonça, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

Margarita V. Perkova, Dr. of Architecture, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Ricardo Santos, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

Vladimir I. Travush, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

Vladimir V. Vanin, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

Humberto Varum, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

Viktor A. Volosukhin, DSc, Professor, KubSAU, Krasnodar, Russia

Zbigniew Wójcicki, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

Nukh M. Yakupov, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

CONTENTS

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

- Markovich A.S., Agapov V.P., Golishevskaya D.A.* Finite Element for the Analysis of Reinforced Concrete Beams with Non-Uniform Steel Fiber Reinforcement 83
- Mironov V.V., Ivanyushin Yu.A., Mironov D.V.* Analysis of Water Seepage into Vacuum Anchor Subjected to Pull-Out Load 96

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL

ANALYSIS

- Kirsanov M.N.* Natural Frequency Spectrum and Fundamental Frequency Formula for Plane Periodic Lattice Truss 108
- Kiseleva R.Z., Ryabukha V.V., Kirsanova N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P.* Two-Field Prismatic Finite Element Under Elasto-Plastic Deformation 118
- Ivanov S.P., Ivanov O.G., Ivanova A.S.* Dynamic Loading of Bar Systems with a Finite Number of Degrees of Freedom 128

ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS

- Karpov V.V.* Systems of Approximating Functions when Using Variational Methods for Calculating Thin-Walled Building Structures 138
- Krivoshapko S.N.* Torsors with Two Curves in Intersecting Planes and with Parallel Axes 155

DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

- Chernyaev A.A., Marfin K.V.* Variant Design of Girder-Slab Structure with Different Geometric Cells Under Flexural Vibrations 167

Copy Editor I.L. Pankratova

English Texts' Editor S.L. Shambina

Graphic Designer Iu.N. Efremova

Layout Designer N.V. Markelova

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru, i_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University

3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

© Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, 2025

© Mamedova S.R., photo on the cover of the journal (Museum of Islamic Art, Doha, Qatar), 2025

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-2-83-95

EDN: MOLUMW

Научная статья / Research article

Конечный элемент для расчета неоднородно-армированных сталефибробетонных балок

А.С. Маркович^{1,2}, В.П. Агапов¹, Д.А. Голишевская¹✉¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ miloserdova-da@rudn.ru

Поступила в редакцию: 3 января 2025 г.

Доработана: 24 марта 2025 г.

Принята к публикации: 3 апреля 2025 г.

Аннотация. Разработана методика расчета и построения физически нелинейного конечного элемента балки многослойного армирования, позволяющего вычислять значения перемещений, деформаций и напряжений в характерном слое. Для установки действительного напряженно-деформированного состояния изгибаемых неоднородных дисперсно-армированных бетонных элементов проведено экспериментальное исследование сталефибробетонной балки с неравномерным по высоте сечения фибровым армированием (от 0,5 до 2,0 %). Определены деформации и перемещения балки в характерных точках, а также получены нормальные растягивающие и сжимающие напряжения. Полученные экспериментальные данные были использованы для верификации конечного элемента балки многослойного армирования. Разработанный конечный элемент балки основан на модифицированной теории расчета многослойных балок, предложенной П.М. Варваком. Модель многослойной балки учитывает искривление поперечного сечения при действии касательных напряжений за счет включения в функционал полной потенциальной энергии обобщенного компонента деформации сдвига. В дополнение к экспериментальным данным выполнены нелинейные расчеты многослойной балки в программном комплексе Ansys. Расхождение результатов расчета при использовании разработанного конечного элемента с экспериментальными данными составило от 6 до 11 %, а с результатами расчетов, полученных в Ansys, — от 11 до 15 %. Разработанный конечный элемент интегрирован в вычислительный комплекс ПРИНС, и в составе этой программы может быть использован для расчета неоднородных дисперсно-армированных элементов.

Ключевые слова: метод конечных элементов, сталефибробетон, многослойная балка, неравномерное армирование, напряженно-деформированное состояние

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов: Маркович А.С. — научное руководство, концепция исследования; Агапов В.П. — научное рецензирование и редактирование; Голишевская Д.А. — обзор литературы, проведение эксперимента, разработка конечного элемента, написание текста.

Для цитирования: Маркович А.С., Агапов В.П., Голишевская Д.А. Конечный элемент для расчета неоднородно-армированных сталефибробетонных балок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 2. С. 83–95. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-83-95>

Маркович Алексей Семенович, доктор технических наук, доцент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; доцент кафедры фундаментального образования, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 9203-1434, ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovvp@mail.ru

Голишевская Дарья Александровна, кандидат технических наук, ассистент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов; eLIBRARY SPIN-код: 1276-6516, ORCID: 0000-0003-0835-528X; e-mail: miloserdova-da@rudn.ru

© Маркович А.С., Агапов В.П., Голишевская Д.А., 2025

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Finite Element for the Analysis of Reinforced Concrete Beams with Non-Uniform Steel Fiber Reinforcement

Alexey S. Markovich^{1,2} , Vladimir P. Agapov¹ , Darya A. Golishevskaya¹  

¹ RUDN University, Moscow, Russian Federation

² National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

✉ miloserdova-da@rudn.ru

Received: January 3, 2025

Revised: March 24, 2025

Accepted: April 3, 2025

Abstract. A method has been developed for calculating and constructing a physically nonlinear finite element of a multilayer reinforcement beam, which allows to calculate the values of displacements, strains and stresses in a characteristic layer. To establish the actual stress-strain state of bent heterogeneous fiber reinforced concrete elements, an experimental study of a steel-fiber-concrete beam with non-uniform fiber reinforcement along the cross-section height (from 0.5 to 2.0%) was carried out. Strains and displacements of the beam at characteristic points are determined, and normal tensile and compressive stresses are obtained. The experimental data obtained were used to verify the finite element of the multilayer reinforcement beam. The developed finite element of the beam was based on the modified theory of calculation of multilayer beams proposed by P.M. Varvak. The multilayer beam model takes into account the curvature of the cross section under the action of shear stresses by including the generalized component of shear strain in the functional of the total potential energy. In addition to the experimental data, nonlinear analysis of a multilayer beam was performed in the Ansys software package. The discrepancy between the calculation results using the developed finite element and the experimental data ranged from 6 to 11%, and from 11 to 15% with the calculation results obtained in Ansys. The developed finite element is integrated into the PRINCE computing complex, and as part of this program it can be used to calculate heterogeneous fiber-reinforced elements.

Keywords: finite element method, multi-layered beam, non-uniform reinforcement, stress-strain state

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution: Markovich A.S. — supervision, conceptualization; Agapov V.P. — review and editing; Golishevskaya D.A. — literature review, experimental investigation, finite element development, writing the text.

For citation: Markovich A.S., Agapov V.P., Golishevskaya D.A. Finite element for the analysis of reinforced concrete beams with non-uniform steel fiber reinforcement. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(2):83–95. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-83-95>

1. Введение

При проектировании бетонных конструкций на основе дисперсного армирования возникает необходимость учета неоднородного распределения армирующего материала по высоте сечения элемента. Данная задача может быть решена при использовании объемных конечных элементов, в своей основе реализующих те или иные критерии прочности и (или) пластичности бетона и армирующего материала. Для решения этой задачи можно воспользоваться указанными объемными конечными элементами в таких расчетных комплексах, как Ansys и Abaqus¹. Однако данные программные комплексы могут быть недоступны широкому кругу инженеров-проектировщиков ввиду их высокой стоимости. Кроме того, использование объемных конечных элементов зачастую ведет к увеличению размерности решаемых задач, что приводит к существенным временным затратам и повышенным требованиям к производительности используемых компьютеров. В связи с этим проблема разработки

Alexey S. Markovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Associate professor of the Department of Fundamental Education, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9203-1434, ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

Vladimir P. Agapov, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovpb@mail.ru

Darya A. Golishevskaya, Candidate of Technical Sciences, Assistant of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 1276-6516, ORCID: 0000-0003-0835-528X; e-mail: miloserdova-da@rudn.ru

¹ ANSYS Theory Reference. Release 5.6. PA: ANSYS Inc. Canonsburg; 1999. ABAQUS 6.11. Theory manual. DS Simulia; 2011.

простых в реализации и доступных широкому кругу пользователей конечных элементов остается актуальной задачей [1–4].

В ряде исследований, проведенных отечественными и зарубежными учеными, рассматриваются случаи однородного распределения дисперсной арматуры по сечению элемента [5–7], в то время как практика проектирования требует более гибкого подхода [8]. Существуют методики расчета, которые не учитывают возможность создания зон с различной концентрацией армирующих волокон в пределах одного конструктивного элемента [9; 10]. Некоторые ученые рассматривают влияние на прочность и деформативность различных комбинаций армирующих волокон, но равномерно распределенных в сечении элемента [12–14]. Однако именно неоднородное армирование позволяет оптимизировать расход материалов и повысить несущую способность конструкции [15]. Отсутствие комплексного подхода к расчету дисперсно-армированных элементов с учетом неоднородного армирования по высоте сечения элемента затрудняет их широкое применение, несмотря на очевидные технико-экономические и прочностные преимущества.

В связи с этим крайне важным является исследование напряженно-деформированного состояния многослойных балок, имеющих неоднородное дисперсное армирование. Авторами работы поставлена задача разработать методику расчета неоднородно-армированных элементов и в качестве примера для исследования была выбрана сталефибробетонная балка, имеющая неоднородное армирование.

2. Материалы и методы

Объектом исследования является сталефибробетонная балка размером $65 \times 250 \times 1400$ мм ($b \times h \times L$), имеющая неоднородное армирование по высоте сечения волокном анкерного типа (рис. 1). Балка была условно поделена на 10 слоев: в нижней части было выполнено максимальное дисперсное армирование, равное 2,0 %, а в верхней части минимальное — 0,5 %. Для изготовления указанной балки использовался мелкозернистый бетон, позволяющий обеспечить высокую степень насыщения волокнами и высокую дисперсность армирования. В качестве дисперсного армирования применялась стальная фибра анкерного профиля (длина волокна 30 мм, диаметр волокна 0,3 мм).

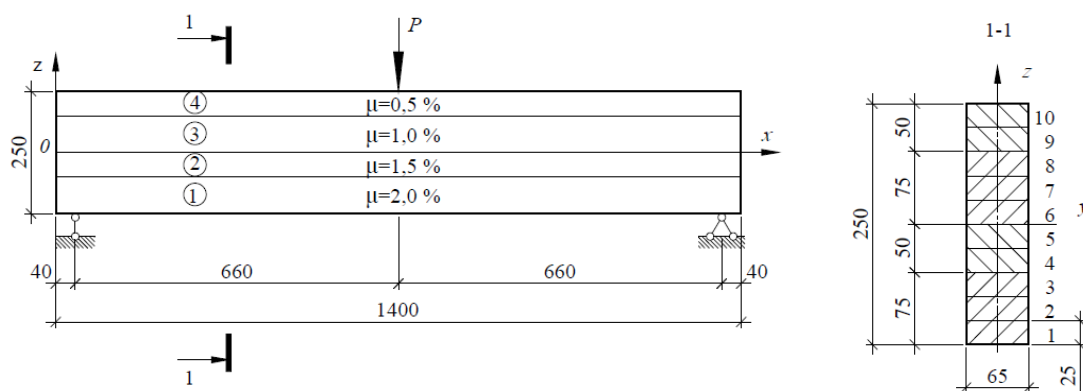


Рис. 1. Распределение содержания стального волокна анкерного типа по высоте сталефибробетонной балки

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Голишевской

Figure 1. Distribution of hooked-end steel fiber content along the height of the steel fiber-reinforced concrete beam

S o u r c e: made by D.A. Golishevskaya

Для исследования напряженно-деформированного состояния неоднородно-армированной сталефибробетонной балки были использованы средства тензометрии. Для этого на контрольный образец балки был наклеен 21 тензорезистор ВХ 120-20АА в направлении главных деформаций. Тензорезисторы были подключены к многоканальной тензометрической станции Zetlab ZET 017-T32 по

полной мостовой схеме. Испытания балки проводились на специальной установке Matest (рис. 2), позволяющей проводить испытания крупноразмерных элементов на изгиб. В процессе испытаний в реальном времени синхронно с нагрузкой регистрировались деформации и перемещения балки.

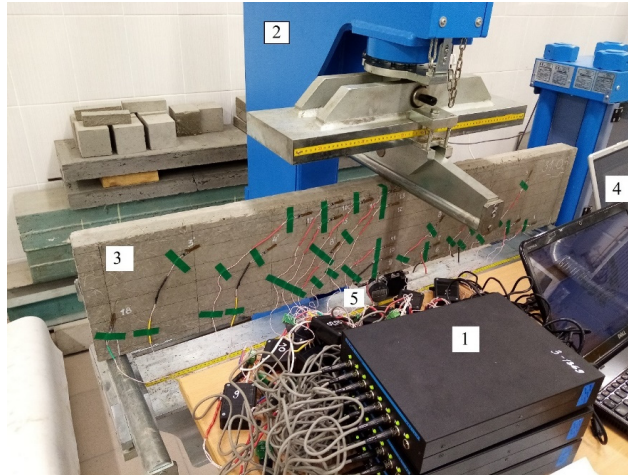


Рис. 2. Экспериментальная неоднородно-армированная сталефибробетонная балка и используемое оборудование:

- 1 — тензометрическая станция Zetlab ZET 017-T32; 2 — гидравлический пресс Matest;
3 — образец-балка с тензорезисторами BX 120-20AA;
4 — персональный компьютер для обработки данных; 5 — цифровой прогибомер

Источники: фото Д.А. Голишевской

Figure 2. Experimental non-uniformly reinforced steel fiber-reinforced concrete beam and the equipment used:

- 1 — Zetlab ZET 017-T32 strain gauge station; 2 — Matest hydraulic press;
3 — beam specimen with BX 120-20AA strain gauges;
4 — personal computer for data processing; 5 — digital deflectometer

Source: photo by D.A. Golishevskaya

Для построения конечного элемента балки неоднородного армирования была использована теория расчета многослойных балок, приведенная в работе П.М. Варвака¹. Данная теория была модифицирована авторами в соответствии с общими положениями и принципами метода конечных элементов.

Для модели многослойной балки (рис. 3, 4), в которой полагается, что поперечные сечения искривляются за счет влияния касательных напряжений, принимается следующая формула (2), которая следует из условия (1) равновесия части F элемента dx балки:

$$\tau_k \cdot b_k + \int_F \frac{\partial \sigma_k}{\partial x} dF = 0; \quad (1)$$

$$\tau_k = -\frac{d\kappa}{dx} \frac{1}{b_k} \int_{-\delta_2}^z E_k b_k z dz, \quad (2)$$

где $\kappa(x) = \frac{d^2 w}{dx^2}$ — кривизна нейтрального слоя балки при изгибе; $E_k = E_k(z)$ — модуль упругости в направлении оси x .

¹ Варвак П.М., Бузун И.М., Городецкий А.С., Пискунов В.Г., Толокнов Ю.Н. Метод конечных элементов : учебное пособие для вузов. Киев : Головное издательство издательского объединения «ВИЦА ШКОЛА», 1981. 176 с.

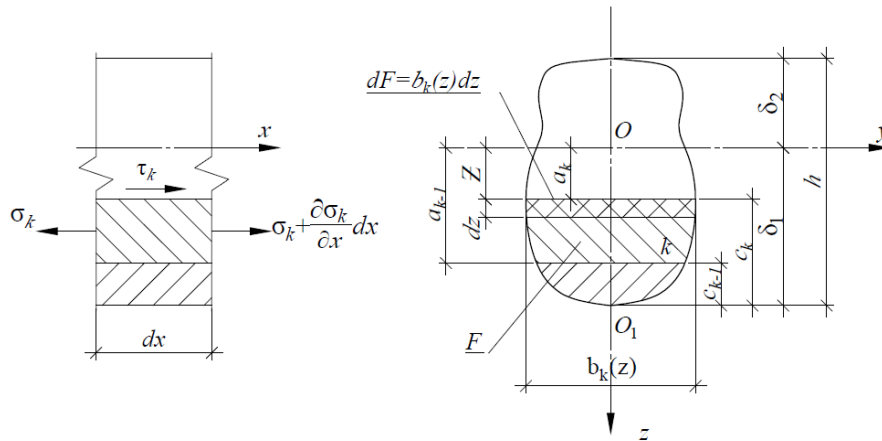


Рис. 3. Поперечное сечение многослойной балки

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Голишевской

Figure 3. Cross-section of a multi-layered beam

S o u r c e: made by D.A. Golishevskaja

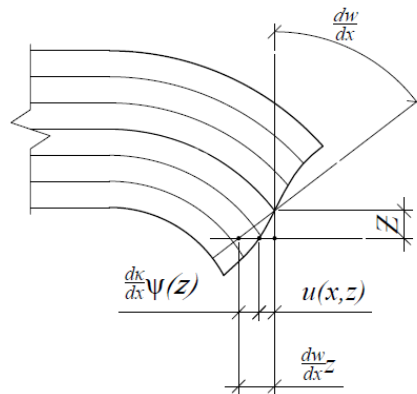


Рис. 4. Схема смещения слоев многослойной балки при изгибе

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Голишевской

Figure 4. Diagram of layer displacement in a multi-layered beam under bending

S o u r c e: made by D.A. Golishevskaja

Продольные деформации и деформации поперечного сдвига для k -го слоя определяются следующими уравнениями:

$$\varepsilon_k = \frac{\partial u_k}{\partial x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} Z + \frac{d^2 \kappa}{dx^2} \psi_k(z); \quad (3)$$

$$\gamma_k = \frac{\partial u_k}{\partial z} + \frac{\partial w_k}{\partial x} = \frac{\tau_k}{G_k} = \frac{d\kappa}{dx} \frac{d\psi_k(z)}{dz};$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial z} = -\frac{\partial w_k}{\partial x} + \frac{d\kappa}{dx} \frac{d\psi_k(z)}{dz}, \quad (4)$$

где $G_k = G_k(z)$ — модуль сдвига; функция $\psi_k(z) = \int_0^z \frac{1}{G_k b_k} \left(\int_{-\delta_1}^z E_k b_k \tilde{z} d\tilde{z} \right) dz$ учитывает компонент сдвига;

u_k — горизонтальное перемещение; w_k — вертикальное перемещение, которое принимается постоянным по высоте.

Согласно закону Гука, с учетом выражений (3) и (4) напряжения будут иметь вид

$$\sigma_k = -E_k \left[\frac{d^2 w}{dx^2} Z - \frac{d^2 \kappa}{dx^2} \psi_k(z) \right]; \quad (5)$$

$$\tau_k = G_k \frac{d\kappa}{dx} \frac{d\psi_k(z)}{dz}. \quad (6)$$

Выражение для потенциальной энергии деформации многослойной балки можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_k \varepsilon_k + \tau_k \gamma_k) dV = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \int_F \sigma_k \left[-\frac{d^2 w}{dx^2} z + \frac{d^2 \kappa}{dx^2} \psi_k(z) \right] dF + \int_F \tau_k \frac{d\kappa}{dx} \frac{d\psi_k(z)}{dz} dF \right\} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^l \left(M \frac{d^2 w}{dx^2} - \bar{M} \frac{d^2 \kappa}{dx^2} - \bar{Q} \frac{d\kappa}{dx} \right) dx, \end{aligned} \quad (7)$$

где l — длина балки; F — площадь поперечного сечения; M — изгибающий момент; $\bar{Q}$ — поперечная сила; $\bar{M}$ и $\bar{Q}$ — обобщенные изгибающий момент и поперечная сила, возникающие вследствие деформации сдвига поперечных сечений и отвечающие принятым выражениям для деформаций.

Тогда функционал полной потенциальной энергии многослойной балки с учетом искривления сечения за счет действия касательных напряжений записывается следующим образом:

$$\Pi = W - A = \frac{1}{2} \int_0^l \left(M \kappa - \frac{\bar{M}}{c_1} \bar{\kappa} + \frac{\bar{Q}}{c_1} \bar{\varphi} \right) dx - \int_0^l q w dx, \quad (8)$$

где $q = q_z(x)$ — интенсивность распределенной поперечной нагрузки, нормальной к оси x .

Аппроксимация перемещений по области КЭ обусловлена функционалом полной потенциальной энергии (8), который учитывает кривизны изгиба κ и сдвига $\bar{\kappa}$. Выражения моментов M и $\bar{M}$ также записаны через кривизны κ и $\bar{\kappa}$.

Так, в каждом i -м узле КЭ ($i = 1, 2$) назначаются по две независимые группы степеней свободы (изгибная и сдвиговая) (рис. 5):

$$\{z_{i,l}\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{z}_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\varphi}_i \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

где $w(x)$ — перемещение; $\bar{w}(x) = c_1 \kappa(x)$ — обобщенное перемещение, связанное с учетом поперечного сдвига; $\varphi = \frac{dw}{dx}$ — угол поворота сечения; $\bar{\varphi} = \frac{d\bar{w}}{dx}$ — аналог угла поворота сечения, связанный с учетом поперечного сдвига.

С учетом принятых обозначений выражения для изгибающих моментов и поперечных сил записываются в следующем виде:

$$M = D_{11}(\kappa + \bar{\kappa}); \quad \bar{M} = -D_{11}(c_1 \kappa + c_2 \bar{\kappa}); \quad Q = -\frac{D_{11}}{c_1} \bar{\varphi}; \quad \bar{Q} = D_{11} \bar{\varphi}. \quad (10)$$

Жесткости D_{11} , D_{12} , D_{22} определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \int_F E_k z^2 dF = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} E_k b_k z^2 dz; \quad D_{12} = -\int_F E_k \psi_k(z) z dF = -\sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} E_k b_k \psi_k(z) z dz; \\ D_{22} &= \int_F E_k \psi_k^2(z) dF = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} E_k b_k \psi_k^2(z) dz; \quad c_1 = \frac{D_{12}}{D_{11}}; \quad c_2 = \frac{D_{22}}{D_{12}}. \end{aligned} \quad (11)$$

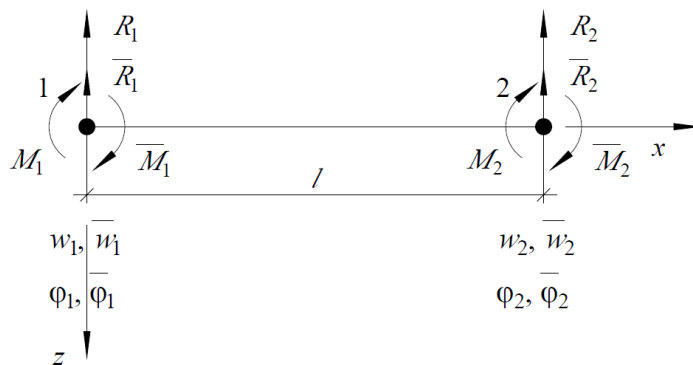


Рис. 5. Конечный элемент многослойной балки

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Голишевской

Figure 5. Finite element of a multi-layered beam

S o u r c e: made by D.A. Golishevskaya

Матрица жесткости конечного элемента получена на основании вариационного принципа Лагранжа. Коэффициенты матрицы в общем случае равны

$$r_{ij} = \int_0^l \sigma_k(x) \epsilon_k(x) dx = \int_0^l \left[M_k \kappa_k - \frac{\overline{M}_k}{c_1} \overline{\kappa}_k + \frac{\overline{Q}_k}{c_1} \overline{\varphi}_k \right] dx. \quad (12)$$

Система уравнений равновесия МКЭ имеет следующий вид:

$$[R]\{z\} = \{P\}, \quad (13)$$

где $\{P\}$ — вектор внешней узловой нагрузки; $\{z\}$ — вектор узловых перемещений.

$$\{z\} = \{w_1 \quad \varphi_1 \quad w_2 \quad \varphi_2 \quad \overline{w}_1 \quad \overline{\varphi}_1 \quad \overline{w}_2 \quad \overline{\varphi}_2\}^T. \quad (14)$$

Матрица жесткости конечного элемента $[R]$ имеет размерность 8×8 и формируется следующим образом:

$$[R] = \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_2] & [r_3] \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где подматрицы $[r_1]$ и $[r_3]$ отвечают состоянию изгиба и сдвига, а подматрица $[r_2]$ определяет взаимовлияние этих состояний.

$$[r_1] = \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \end{bmatrix}$$

$$[r_2] = \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \end{bmatrix}$$

$$[r_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} \left(\frac{12c_2}{l^3} + \frac{6}{5l} \right) & \frac{1}{c_1} \left(\frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) & -\frac{1}{c_1} \left(\frac{12c_2}{l^3} + \frac{6}{5l} \right) & \frac{1}{c_1} \left(\frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) \\ \frac{1}{c_1} \left(\frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) & \frac{1}{c_1} \left(\frac{4c_2}{l} + \frac{2l}{15} \right) & -\frac{1}{c_1} \left(\frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) & \frac{1}{c_1} \left(\frac{2c_2}{l} + \frac{l}{30} \right) \\ -\frac{1}{c_1} \left(\frac{12c_2}{l^3} + \frac{6}{5l} \right) & -\frac{1}{c_1} \left(\frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) & \frac{1}{c_1} \left(\frac{12c_2}{l^3} + \frac{6}{5l} \right) & -\frac{1}{c_1} \left(\frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) \\ \frac{1}{c_1} \left(\frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) & \frac{1}{c_1} \left(\frac{2c_2}{l} + \frac{l}{30} \right) & -\frac{1}{c_1} \left(\frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) & \frac{1}{c_1} \left(\frac{4c_2}{l} + \frac{2l}{15} \right) \end{bmatrix}$$

3. Результаты и обсуждение

Для выполнения физически нелинейных расчетов использовался модифицированный метод Ньютона — Рафсона, позволяющий повысить сходимость результатов за счет энергетической коррекции вектора приращения перемещений.

На основании приведенного выше алгоритма разработан конечный элемент многослойной балки, интегрированный в вычислительный комплекс ПРИНС [16].

В целях отладки предложенного конечного элемента были использованы результаты эксперимента, проведенного авторами в лаборатории строительных конструкций и материалов инженерной академии РУДН им. Патриса Лумумбы.

Для этого была рассмотрена неоднородно армированная сталефибробетонная балка. Геометрические размеры, количество армирующих слоев и их физико-механические характеристики соответствовали параметрам экспериментальной балки (см. рис. 1). Основные результаты расчета представлены на рис. 6 и 7.

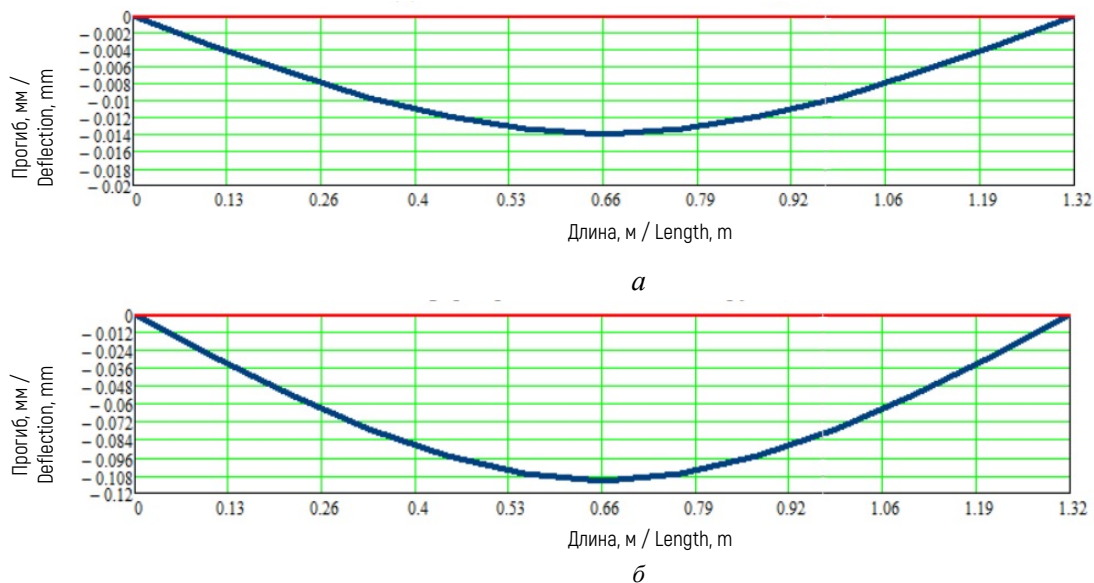


Рис. 6. Деформированная схема исследуемой балки:
а — прогибы при нагрузке $P = 1,2$ кН; б — прогибы при нагрузке $P = 9,6$ кН
И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Голишевской

Figure 6. Deformed shape of the investigated beam:
а — deflections at load $P = 1.2$ kN; б — deflections at load $P = 9.6$ kN
S o u r c e: made by D.A. Golishevskaya

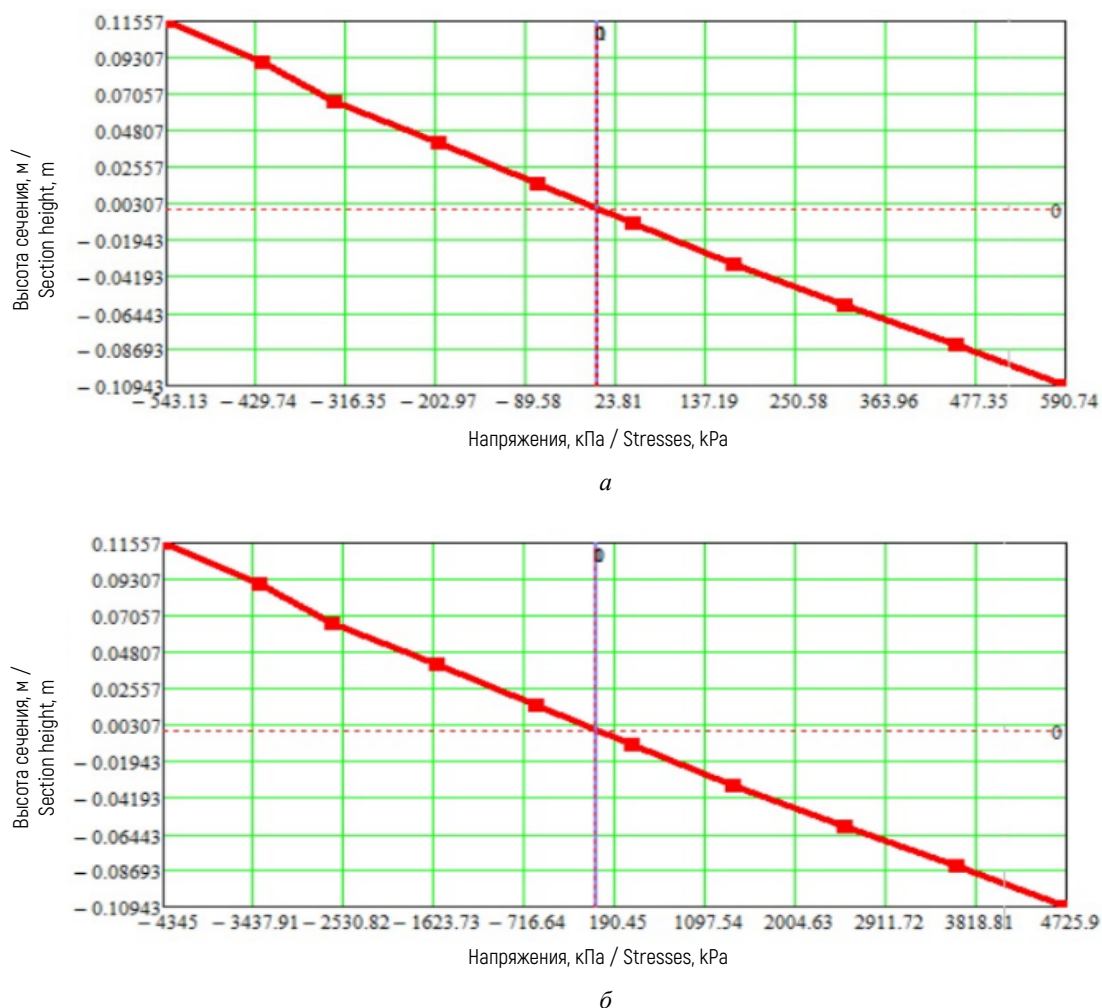


Рис. 7. Эпюры максимальных нормальных напряжений:

а — при нагрузке $P = 1,2$ кН; б — при нагрузке $P = 9,6$ кН

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Голишевской

Figure 7. Diagram of maximum normal stresses:

а — at load $P = 1,2$ кН; б — at load $P = 9,6$ кН

S o u r c e: made by D.A. Golishevskaya

Для верификации полученных результатов (рис. 6, 7) в дополнение к экспериментальным данным были выполнены нелинейные расчеты исследуемой балки в программном комплексе Ansys. Конечно-элементная модель балки состояла из 3920 объемных восьмиузловых элементов и имела 31 360 узловых неизвестных. Для моделирования сталефибробетона применялся объемный восьмиузловой КЭ Conс65, использующий в своей основе трехосный критерий прочности бетона Виллама и Варнке [17].

Основные результаты расчета в программном комплексе Ansys представлены на рис. 8 и 9.

Сопоставление экспериментальных данных и результатов расчетов балки по разработанному КЭ и с применением программы Ansys приведено в таблице.

Расхождения в значениях, полученных по результатам конечно-элементных расчетов и экспериментальных данных, не превышают 6 % при нагрузке 1,2 кН и 11 % при нагрузке 9,6 кН. Результаты конечно-элементных расчетов расходятся между собой на 11 % при величине нагрузки 1,2 кН и 15,1 % при значении нагрузки 9,6 кН.

Сводные данные результатов неоднородно-армированной сталефибробетонной балки

Полученные результаты	Значение прогиба балки в середине пролета (мм) при нагрузке, кН		Нормальные растягивающие напряжения σ_{fb} , кПа при нагрузке, кН		Нормальные сжимающие напряжения σ_{fb} , кПа при нагрузке, кН	
	1,2	9,6	1,2	9,6	1,2	9,6
Результаты эксперимента	0,0132	0,102	+555,13	+4265,0	-511,84	-3938,4
Результаты расчета по разработанному КЭ балки многослойного армирования	0,0140	0,112	+590,74	+4725,9	-543,13	-4345
Результаты расчета в программе Ansys	0,0155	0,132	+539,49	+4315,6	-522,7	-4036,1
Расхождение, %	$\frac{6,0}{10,7}$	$\frac{9,8}{15,1}$	$\frac{6,4}{9,5}$	$\frac{10,8}{9,5}$	$\frac{5,8}{3,9}$	$\frac{10,3}{7,7}$

Источники: выполнено Д.А. Голишевской

Summary data of results for the non-uniformly reinforced steel fiber-reinforced concrete beam

Obtained results	Beam deflection value at mid-span (mm) under load		Normal tensile stresses σ_{fb} , kPa under load		Normal compressive stresses σ_{fb} , kPa under load	
	1.2 kN	9.6 kN	1.2 kN	9.6 kN	1.2 kN	9.6 kN
Experimental results	0.0132	0.102	+555.13	+4265.0	-511.84	-3938.4
Calculation results using the developed FE model for a multi-layer reinforced beam	0.0140	0.112	+590.74	+4725.9	-543.13	-4345
Calculation results in Ansys	0.0155	0.132	+539.49	+4315.6	-522.7	-4036.1
Discrepancy, %	$\frac{6.0}{10.7}$	$\frac{9.8}{15.1}$	$\frac{6.4}{9.5}$	$\frac{10.8}{9.5}$	$\frac{5.8}{3.9}$	$\frac{10.3}{7.7}$

Source: made by D.A. Golishevskaya

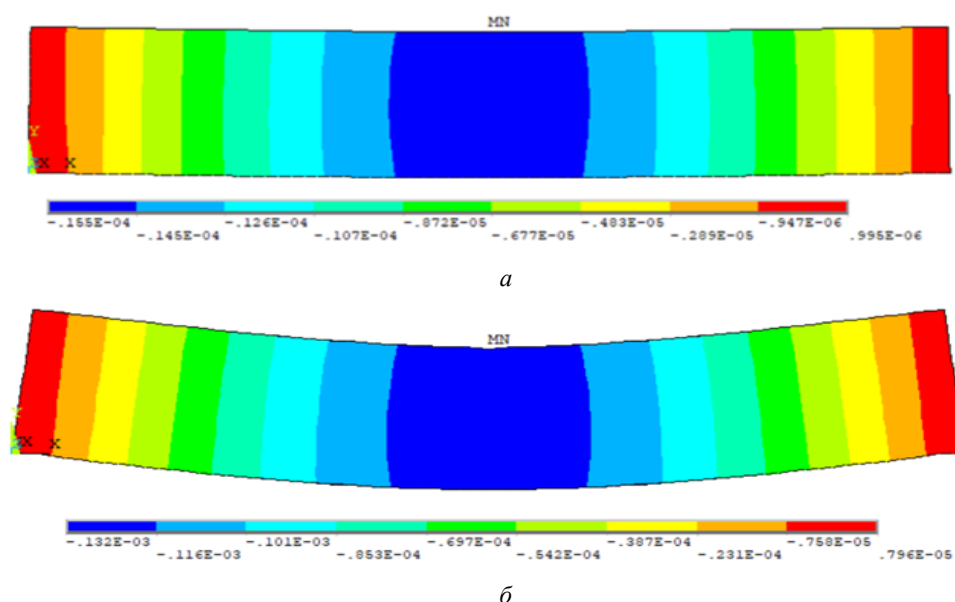


Рис. 8. Поля вертикальных перемещений [мм], полученные для нагрузки:
 а — 1,2 кН; б — 9,6 кН

Источники: выполнено Д.А. Голишевской

Figure 8. Vertical displacement distribution [mm] obtained for the following loads:
 а — 1.2 kN; б — 9.6 kN

Source: made by D.A. Golishevskaya

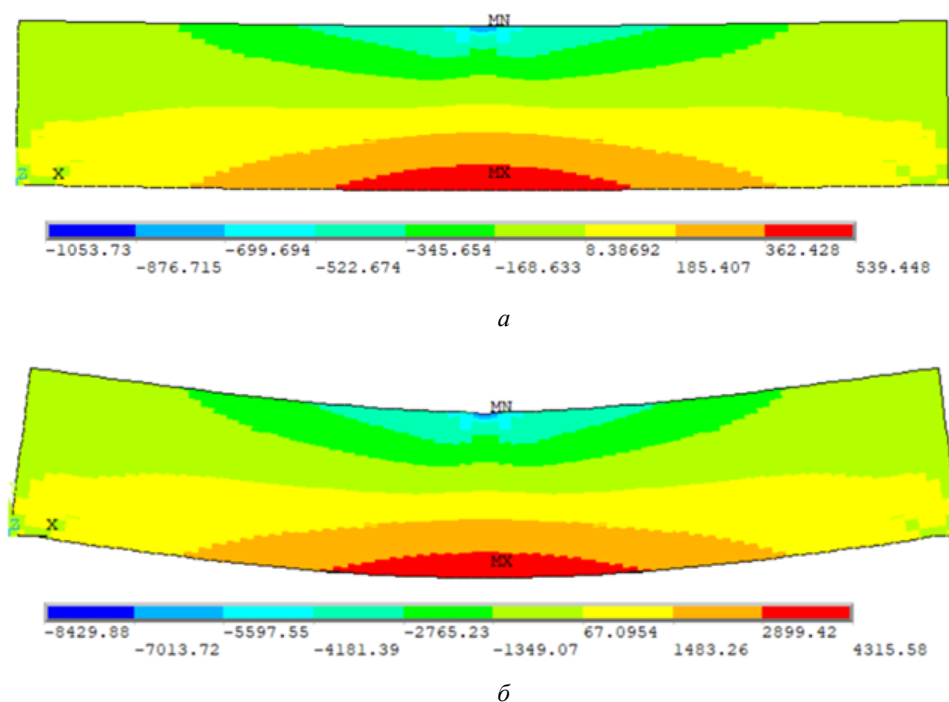


Рис. 9. Поля нормальных напряжений [кПа], полученные для нагрузки:

a — 1,2 кН; *б* — 9,6 кН

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Голишевской

Figure 9. Normal stress distribution [kPa] obtained for the following loads:

a — 1.2 kN; *б* — 9.6 kN

S o u r c e: made by D.A. Golishevskaja

4. Заключение

В результате проведенной работы авторами разработан физически нелинейный стержневой конечный элемент балки многослойного армирования. Для верификации предложенного конечного элемента многослойной балки были использованы экспериментальные данные неоднородно-армированной сталефибробетонной балки и результаты физически нелинейного расчета аналогичной балки в программном комплексе Ansys, выполненные авторами. Полученные результаты позволяют сформулировать следующие выводы:

1. Разработан физически нелинейный метод расчета неоднородно-армированных сталефибробетонных элементов, на основании которого разработана методика численного расчета и построен конечный элемент неоднородно-армированной балки.
2. Точность разработанного конечного элемента неоднородно-армированной балки подтверждается приемлемой сходимостью результатов расчета с экспериментальными данными и результатами верификационного расчета в программе Ansys.
3. Данный конечный элемент адаптирован к ВК ПРИНС и в составе этого вычислительного комплекса может быть использован сотрудниками научных и проектных организаций для расчета сталефибробетонных конструкций.

Список литературы

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. McGraw-Hill, 2005. 631 p. <http://doi.org/10.1016/B978-075066431-8/50186-7>
2. Bathe K.J., Wilson E.L. Numerical methods in finite element analysis. N.J. : Prentice-Hall, 1976. 528 p. ISBN 0136271901, 9780136271901

3. *Crisfield M.A.* Non-linear finite element analysis of solids and structures. John Wiley & Sons, 2012. 544 p. ISBN 1118376013, 9781118376010
4. *Oden J.T.* Finite elements in nonlinear continua. New York : McGraw, Hill Book Company, 1972. 464 p. URL: <https://archive.org/details/finiteelementsof0000oden/page/n3/mode/2up> (accessed: 12.01.2025)
5. *Hassanvand P., Rezaie F., Kioumarsi M.* Experimental Investigation of the Effect of Steel Fibers on the Flexural Behavior of Corroded Prestressed Reinforced Concrete Beams // *Materials*. 2023. Vol. 16. No. 4. Article no. 1629. <http://doi.org/10.3390/ma16041629> EDN: DJMEES
6. *Siddika A., Al Mamun M.A., Alyousef R., Amran Y.H.M.* Strengthening of reinforced concrete beams by using fiber-reinforced polymer composites: A review // *Journal of Building Engineering*. 2019. Vol. 25. Article no. 100798. <http://doi.org/10.1016/j.jobe.2019.100798>
7. *Ashour S.A., Wafa F.F., Kamal M.I.* Effect of the concrete compressive strength and tensile reinforcement ratio on the flexural behavior of fibrous concrete beams // *Engineering Structures*. 2000. Vol. 22. Issue 9. P. 1145–1158. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(99\)00052-8](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(99)00052-8)
8. *Çankaya M.A., Akan Ç.* An experimental and numerical investigation on the bending behavior of fiber reinforced concrete beams // *Technical Journal of Turkish Chamber of Civil Engineers*. 2023. Vol. 34. No. 1. P. 59–78. <http://doi.org/10.18400/tjce.1209152> EDN: ZFPRNR
9. *Пухаренко Ю.В., Жаворонков М.И., Пантелеев Д.А.* Совершенствование методов определения силовых и энергетических характеристик трещиностойкости фибробетона // *Вестник МГСУ*. 2019. Т. 14. № 3. С. 301–310. <http://doi.org/10.22227/1997-0935.2019.3.301-310> EDN: VOUYOL
10. *Travush V.I., Konin D.V., Krylov A.S.* Strength of reinforced concrete beams of high-performance concrete and fiber reinforced concrete // *Magazine of Civil Engineering*. 2018. No. 1 (77). P. 90–100. <http://doi.org/10.18720/MCE.77.8> EDN: XPKZNN
11. *Пухаренко Ю.В., Пантелеев Д.А., Морозов В.И., Магдеев У.Х.* Прочность и деформативность полиармированного фибробетона с применением аморфной металлической фибры // *Academia. Архитектура и строительство*. 2016. № 1. С. 107–111. EDN: VNRSEL
12. *Пухаренко Ю.В., Аубакирова И.У.* Полидисперсное армирование строительных композитов // *Строительные материалы, оборудование, технологии 21 века*. 2011. № 2. С. 25–26. EDN: TGRYPX
13. *Mailyan L.R., Beskopylny A.N., Meskhi B., Shilov A.V., Stel'makh S.A., Shcherban' E.M., Smolyanichenko A.S., El'shaeva D.* Improving the Structural Characteristics of Heavy Concrete by Combined Disperse Reinforcement // *Appl. Sci*. 2021. Vol. 11. Article no. 6031. <https://doi.org/10.3390/app11136031> EDN: LMMNFR
14. *Клюев С.В., Лесовик Р.В., Клюев А.В., Бондаренко Д.О.* К вопросу применения нескольких видов фибр для дисперсно армированных бетонов // *Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова*. 2012. № 4. С. 81–83. EDN: PKRWEL
15. *Попов В.М., Кондратюк В.В.* Особенности расчета изгибаемых элементов сталефибробетонных конструкций по нормальным сечениям // *Жилищное строительство*. 2022. № 4. С. 46–54. <https://doi.org/10.31659/0044-4472-2022-4-46-54> EDN: RXQTVY
16. *Агапов В.П.* Программа для статических и динамических расчетов конструкций методом конечных элементов (ПРИНС) / Российское агентство по патентам и товарным знакам. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. № 2000610429. Москва, 2000.
17. *Willam K.J., Warnke E.P.* Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete // *Proceedings of IABSE, Structural Engineering Report 19, Section III*, 1975. P. 1–30. URL: <https://bechtel.colorado.edu/~willam/constitutivemodel.pdf> (accessed: 12.01.2025).

References

1. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* *The Finite Element for Solid and Structural Mechanics*. Sixth edition. McGraw-Hill; 2005. <http://doi.org/10.1016/B978-075066431-8/50186-7>
2. *Bathe K.J., Wilson E.L.* *Numerical methods in finite element analysis*. N.J.: Prentice-Hall; 1976. ISBN 0136271901, 9780136271901
3. *Crisfield M.A.* *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons, 2012. ISBN 1118376013, 9781118376010
4. *Oden J.T.* *Finite elements in nonlinear continua*. New York: McGraw, Hill Book Company; 1972. Available from: <https://archive.org/details/finiteelementsof0000oden/page/n3/mode/2up> (accessed: 12.01.2025)
5. *Hassanvand P., Rezaie F., Kioumarsi M.* Experimental Investigation of the Effect of Steel Fibers on the Flexural Behavior of Corroded Prestressed Reinforced Concrete Beams. *Materials*. 2023;16(2):1629. <http://doi.org/10.3390/ma16041629> EDN: DJMEES
6. *Siddika A., Al Mamun M.A., Alyousef R., Amran Y.H.M.* Strengthening of reinforced concrete beams by using fiber-reinforced polymer composites: A review. *Journal of Building Engineering*. 2019;25:100798. <http://doi.org/10.1016/j.jobe.2019.100798>

7. Ashour S.A., Wafa F.F., Kamal M.I. Effect of the concrete compressive strength and tensile reinforcement ratio on the flexural behavior of fibrous concrete beams. *Engineering Structures*. 2000;22:1145–1158. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(99\)00052-8](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(99)00052-8)
8. Çankaya M.A., Akan Ç. An experimental and numerical investigation on the bending behavior of fiber reinforced concrete beams. *Technical Journal of Turkish Chamber of Civil Engineers*. 2023;34(1):59–78. <http://doi.org/10.18400/tjce.1209152> EDN: ZFPRNR
9. Pukhareenko Yu.V., Zhavoronkov M.I., Pantelev D.A. Improvement of methods for determining power and energy characteristics of fibre-reinforced concrete crack resistance. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2019;14(3):301–310. (In Russ.) <http://doi.org/10.22227/1997-0935.2019.3.301-310> EDN: VOUYOL
10. Travush V.I., Konin D.V., Krylov A.S. Strength of reinforced concrete beams of high-performance concrete and fiber reinforced concrete. *Magazine of Civil Engineering*. 2018;1:90–100. <http://doi.org/10.18720/MCE.77.8> EDN: XPKZNZ
11. Pukhareenko Yu.V., Pantelev D.A., Morozov V.I., Magdeev U.H. The strength and deformability of poly-reinforcement with amorphous metallic fiber. *Academia. Architecture and construction*. 2016;(1):107–111. (In Russ.) EDN: VNRSEL
12. Pukhareenko Yu.V. Aubakirova I.U. The polydisperse reinforcing of the building composites. *Construction materials, equipment, technologies of the 21st century*. 2011;(2):25–26. (In Russ.) EDN: TGRYPX
13. Mailyan L.R., Beskopylny A.N., Meskhi B., Shilov A.V., Stel'makh S.A., Shcherban E.M., Smolyanichenko A.S., El'shaeva D. Improving the structural characteristics of heavy concrete by combined disperse reinforcement. *Appl. Sci*. 2021;11:6031. <https://doi.org/10.3390/app11136031> EDN: LMMNFR
14. Klyuev S.V., Lesovik R.V., Klyuev A.V., Bondarenko D.O. On the issue of using several types of fibers for dispersed reinforced concrete. *Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*. 2012;(4):81–83. (In Russ.) EDN: PKRWEL
15. Kurbatov L.G., Kopansky G.V., Khagai O.N. Flexural strength of steel fiber reinforced concrete with uneven distribution of fibers along the height of the section. *LenZNIIEP*. 1976:18–21. (In Russ.) <https://doi.org/10.31659/0044-4472-2022-4-46-54> EDN: RXQTVY
16. Agapov V.P. Program for static and dynamic calculations of structures using the finite element method (PRINS). Russian Agency for Patents and Trademarks. Certificate of official registration of a computer program. No. 2000610429. Moscow; 2000.
17. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *Proceedings of IABSE. Structural Engineering Report 19, Section III*. 1975:1–30. Available from: <https://bechtel.colorado.edu/~willam/constitutivemodel.pdf> (accessed: 12.01.2025).

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-2-96-107

EDN: NESMQL

Научная статья / Research article

Расчет фильтрации воды внутрь вакуумного анкера при воздействии выдергивающего усилия

В.В. Миронов¹, Ю.А. Иванюшин¹, Д.В. Миронов²¹ Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Российская Федерация² ООО «ЭЛЕКТРОРАМ», Тюмень, Российская Федерация ivanjushinja@tyuiu.ru

Поступила в редакцию: 4 февраля 2025 г.

Доработана: 4 апреля 2025 г.

Принята к публикации: 14 апреля 2025 г.

Аннотация. При сооружении морских объектов требуется надежное закрепление их на донной поверхности. В мире разработано множество решений по фиксации с донной поверхностью (грузы, анкеры, якоря). Для решения данной задачи применена конструкция вакуумного анкера. Представлены принципиальные схемы вакуумных анкеров, устраиваемых в слабых грунтах. Цель исследования — обоснование работоспособности вакуумных анкеров с учетом влияния инфильтрационных процессов. Для достижения цели применялись математический аппарат, поиск и анализ отечественных и зарубежных источников с сопоставлением данных. Определение положения линий фильтрационного тока воды в проницаемом грунте выполнено методом электрогидродинамической аналогии. Произведен расчет фильтрации воды к анкеру под выдергивающей нагрузкой; определен фильтрационный расход воды в зависимости от глубины акватории в месте установки, мощности слоя водопроницаемого грунта и его коэффициента фильтрации, геометрических параметров вакуумных анкеров. Описана технология погружения воздействием вакуумных анкеров в слабый донный грунт, выполнен расчет условия погружения анкера в донный грунт и условия его выдергивания из грунта. Установлено, что вакуумные анкеры для применения в слабых донных грунтах обладают значительной удерживающей способностью при относительно небольших размерах. При этом мощность водопроницаемого слоя донного грунта, превышающая пять длин заглубления вакуумного анкера в донный грунт, практически не влияет на значение фильтрационного расхода воды внутрь вакуумного анкера при воздействии выдергивающей нагрузки на анкер. Прогнозируется снижение затрат при внедрении вакуумных анкеров в практику морского строительства.

Ключевые слова: донный грунт, инфильтрация, электрогидродинамическая аналогия, вакуумная фиксация, морские сооружения, удерживающая способность, гидротехническое строительство

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов: Авторы сделали эквивалентный вклад в проведение исследования и подготовку публикации.

Для цитирования: Миронов В.В., Иванюшин Ю.А., Миронов Д.В. Расчет фильтрации воды внутрь вакуумного анкера при воздействии выдергивающего усилия // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 2. С. 96–107. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-96-107>

Миронов Виктор Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры инженерных систем и сооружений, Тюменский индустриальный университет (ТИУ), Российская Федерация, 625000, г. Тюмень, ул. Володарского, д. 38; eLIBRARY SPIN-код: 2433-2178, ORCID: 0000-0001-8939-850X; e-mail: vvmironov@list.ru

Иванюшин Юрий Андреевич, кандидат технических наук, доцент кафедры инженерных систем и сооружений, Тюменский индустриальный университет (ТИУ), Российская Федерация, 625000, г. Тюмень, ул. Володарского, д. 38; eLIBRARY SPIN-код: 9869-3687, ORCID: 0000-0002-4470-6967; e-mail: ivanjushinja@tyuiu.ru

Миронов Дмитрий Викторович, кандидат технических наук, ведущий инженер; ООО «ЭЛЕКТРОРАМ», Российская Федерация, 625023, г. Тюмень, ул. Пржевальского, д. 33, корп. 1, кв. 79; eLIBRARY SPIN-код: 4565-8012, ORCID: 0009-0004-0765-5816; e-mail: dvmironov@yandex.ru

© Миронов В.В., Иванюшин Ю.А., Миронов Д.В., 2025

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Analysis of Water Seepage into Vacuum Anchor Subjected to Pull-Out Load

Victor V. Mironov¹, Yuriy A. Ivanyushin¹✉, Dmitriy V. Mironov²

¹ Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

² LLC “ELECTRORAM”, Tyumen, Russian Federation

✉ ivanjushinja@tyuiu.ru

Received: February 4, 2025

Revised: April 4, 2025

Accepted: April 14, 2025

Abstract. When constructing offshore facilities, their reliable fixation to the bottom surface is required. Many solutions for fixing to the bottom surface (weights and anchors) have been developed in the world. To solve this problem, it is proposed to use a vacuum anchor design. Conceptual diagrams of vacuum anchors installed in soft soils are presented. The purpose of the study is to substantiate the operability of vacuum anchors taking into account the influence of infiltration processes. To achieve this goal, mathematical techniques, search and analysis of Russian and international sources with data comparison were used. The position of the water seepage lines in permeable soil is determined by the electrohydrodynamic analogy method. Water seepage into the anchor subjected to a pull-out load was calculated; the seepage discharge of water was determined depending on the depth of the water body at the installation site, the thickness of the permeable soil layer and its permeability coefficient, and the geometric parameters of the vacuum anchors. The technology of driving vacuum anchors into soft bottom soil is described, the conditions of driving the anchor into the bottom soil and the conditions of it pulling out from the soil are calculated. It is established that vacuum anchors used for soft bottom soils have a significant retaining capacity with relatively small dimensions. At the same time, the thickness of the permeable layer of the bottom soil, exceeding five embedment lengths of the vacuum anchor into the bottom soil, practically does not affect the value of water seepage inside the vacuum anchor when subjected to a pull-out load. A reduction in costs is predicted when introducing vacuum anchors into the practice of marine construction.

Keywords: bottom soil, infiltration, electrohydrodynamic analogy, vacuum fixation, marine structures, retaining capacity, hydraulic engineering

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution: The authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

For citation: Mironov V.V., Ivanyushin Yu.A., Mironov D.V. Analysis of water seepage into vacuum anchor subjected to pull-out load. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(2):96–107. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-96-107>

1. Введение

В морской акватории широко применяются строительные объекты с различным функциональным назначением. К таким объектам, в числе прочих, относятся платформы для добычи нефти и газа на морском шельфе, причальные сооружения, широкая номенклатура плавучих комплексов по преобразованию энергии морских волн в полезную мощность, включая сопутствующие сооружения. При этом для удержания морских сооружений сегодня используют различные конструкции креплений, обеспечивающих устойчивость и закрепление к морскому дну.

Так, в [1] представлено техническое решение по преобразованию энергии морских волн для производства пресной воды, тепловой и электрической энергии с основным элементом системы – сильфонным насосом-компрессором. Для работы системы требуется крепление сильфонного насоса-компрессора ко дну морской акватории. В [2] авторы пришли к выводу, что среди препятствий технического характера, ограничивающих развитие и повсеместное внедрение объектов морской энергетики, является потребность в повышении степени надежности применяемых конструкций и меха-

Victor V. Mironov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Engineering Systems and Structures, Industrial University of Tyumen (IUT), 38 Volodarskogo St, Tyumen, 625000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2433-2178, ORCID: 0000-0001-8939-850X; e-mail: vvmironov@list.ru

Yuriy A. Ivanyushin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Engineering Systems and Structures, Industrial University of Tyumen (IUT), 38 Volodarskogo St, Tyumen, 625000, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9869-3687, ORCID: 0000-0002-4470-6967; e-mail: ivanjushinja@tyuiu.ru

Dmitriy V. Mironov, Candidate of Technical Sciences, lead engineer; LLC “ELECTRORAM”, 33 build. 1, ap. 79, Przhhevskogo St, Tyumen, 625023, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4565-8012, ORCID: 0009-0004-0765-5816; e-mail: dvmironov@yandex.ru

низмов съема мощности. Как следствие, имеются высокие капитальные и эксплуатационные затраты в сложных условиях акватории. Среди рассмотренных [2; 3] технических решений, требующих крепления к морскому дну, выделяются в первую очередь технические решения на принципе колеблющегося водяного столба (OWC — oscillating water columns) и устройства по принципу «перелива» (overtopping devices), а также ряд решений поплавкового типа (floating system). Shengjie Rui и соавторами исследования [4] отмечена и изучена совокупность факторов, требующих учета при проектировании и устройстве оснований морских сооружений различного назначения, включая донные и морские течения, свойства донного грунта, влияние циклической нагрузки, взаимодействие с биотой и прочие факторы.

Если упоминать технические решения по съему энергии морских волн, как правило, они включают в себя буй, генератор полезной мощности и донный груз. Так, в обзоре способов производства пресной воды с использованием энергии волн [5] рассмотрен ряд технических решений по преобразованию волновой энергии. Строительство морского объекта, работающего по принципу OWC, в прибрежной деревне Vizhinjam (Индия) потребовало устройства донного груза весом 3 000 тонн. В состав установок, действующих по принципу WABRO (тела, активируемые волной — обратный осмос), также входят плавучий буй, генератор и крепление к донной поверхности. Примерами таких технических решений являются системы Delbuoy в Пуэрто-Рико (1982), Oyster в Шотландии (2009), CETO Freshwater в Австралии, проект преобразователя, разработанный в Университете Уппсала и другие решения. Аналогичные по составу основных элементов технические решения представлены в обзоре современных достижений в области преобразования энергии волн, основанных на различных системах передачи мощности [6]. Большинство рассмотренных в статье решений также включают в своем составе донный груз или другой способ крепления к донному грузу. В Тюменском индустриальном университете разработаны технические решения [7; 8] по использованию технологии обратного осмоса на основе энергии морских волн. Разработанные решения предполагают фиксацию донным грузом. В качестве фиксации может использоваться не только тяжелый груз, но и кессон (вакуумный анкер).

Применению конструкций креплений, обеспечивающих устойчивость за счет собственного веса (мертвых якорей [9]; динамически устанавливаемых анкеров, в том числе торпедных якорей [10], и прочих классических конструкций закрепления), на этапе закрепления основания сопутствуют существенные транспортные, погрузочно-разгрузочные, земляные, трудовые и, как следствие, финансовые затраты. Затраты смежного характера возникают при закреплении линейных сооружений — магистральных трубо- и газопроводов на участках со слабой несущей способностью [11]. Для обеспечения устойчивого положения трубопровода в продольном и поперечном направлениях в [11] предложено использовать классические конструкции анкеров.

В связи с этим интересно применение вакуумных технологий при организации свайных фундаментов и оснований как источника повышения технико-экономической эффективности, производительности труда и надежности работы применяемых устройств. В [12] отмечено, что в состав сваявдавливающего оборудования, например, работающего по принципу, описанному в [13], могут входить вакуумные анкерные устройства. В авторском свидетельстве [14] описано устройство для погружения анкеров вдавливанием включает вакуум-камеру и преимущественно может использоваться в водонасыщенных грунтах. В данном случае в вакуум-камере создаются периодические циклы разрежения и избыточного давления, а за счет имеющейся перегородки нажимное усилие передается в противоположные стороны при необходимости. Авторами изобретения [15] разработано решение по временному закреплению конструкций на поверхности грунта, в котором за счет создания разрежения возникает дополнительное прижимающее усилие, способствующее погружению клиновидных стенок в грунт. По окончании работ вакуумное воздействие прекращается, позволяя облегчить демонтаж временной конструкции.

Таким образом, альтернативой применению донных грузов в строительстве выступают конструкции вакуумных анкеров [7; 8; 15–19]. Вакуумный анкер, как и донный груз, фиксирует корпус генератора энергии в неподвижном состоянии, а подвижный рабочий орган генератора полезной

мощности связан с плавучим бумом, совершающим колебательные движения, вызванные волновым воздействием. Использование вакуумных анкеров предпочтительнее, чем использование тяжелых донных грузов. Вакуумные анкеры легко устанавливаются без применения тяжелой техники и также легко демонтируются в случае необходимости. Вакуумные донные анкеры помимо фиксации поплавковых устройств, снимающих энергию морских волн, нашли применение в гидротехническом строительстве и трубопроводном транспорте, судоходстве в качестве удерживающих устройств и в нефтегазовой промышленности для фиксации плавучих буровых платформ.

В [16] дана конструкция вакуумных анкеров и приведено ее обоснование для использования в качестве основной удерживающей силы магистральных трубопроводов на обводненных и болотистых грунтах. Установлено, что их характеристики зависят от конкретных условий строительства. Ряд численных расчетов показал, что изменение угла внутреннего трения грунта оказывает незначительное влияние на удерживающую способность. Однако влияние на несущую способность и надежность вакуумных анкеров оказывает размыв донного грунта. Так, в [17] исследовано влияние потери донного грунта на несущую способность вакуумных анкеров в условиях песчаного дна Южно-Китайского моря. Установлено, что учет геометрии поверхности морского дна и характера взаимодействия между грунтом и анкерами является критически важным фактором при проектировании и оценке безопасности глубоководных морских сооружений. В [18] установлено еще одно из достоинств применения вакуумных свай. Демонтаж морских платформ может осуществляться с применением контролируемых взрывов (около 35 % от общего количества демонтируемых платформ). В случае применения на платформах вакуумных герметичных свай (вакуумных анкеров), энергия взрыва направляется внутрь анкера, а не в окружающее пространство. Кроме того, ударная волна гасится внутри герметичной полости с недостаточным давлением. В изобретении [19] предлагается устройство донных креплений в виде вертикальных труб с винтовыми ребрами (в противоположных направлениях) на внешней стороне. После размещения труб вода удаляется из них посредством насоса, создавая внутри вакуум. За счет абсолютного давления оказывается давление на верхнюю заглушенную часть труб, заставляя их постепенно углубляться в грунт. Наличие винтового профиля на трубах обеспечивает дополнительное вращательное движение, которое способствует лучшему проникновению в грунт. Трубы связываются между собой жесткой перемычкой, предотвращающей их обратный поворот при воздействии выдергивающей нагрузки.

Вакуумные технологии могут использоваться и в классических технологических строительных процессах, например для консолидации грунтов оснований технологических сооружений. В [20] отмечено, что вакуумное уплотнение требует меньших энергозатрат в сравнении с электроосмотическим уплотнением. Изобретением [21] в котловане, выполненном в несвязном грунте, предлагается сформировать герметичную емкость из непроницаемой геомембраны и заполнить ее несвязным грунтом. За счет создания в полости образованной емкости отрицательного давления происходит уплотнение грунта. В данном случае вакуумное уплотнение обеспечивает ускорение и срабатывание фильтрационной консолидации (первичная фильтрационная осадка) до начала практической эксплуатации строительных объектов.

Кроме того, вакуумные технологии нашли применение в качестве методов водопонижения при защите зданий и сооружений от грунтовых и подземных вод [22; 23]. Как правило, метод вакуумного водопонижения применяется в грунтах с коэффициентом фильтрации 0,1–2,0 м/сут при условии водопонижения до 70 м и в зависимости от строения толщи грунта [22].

Таким образом, объектом исследования является вакуумный анкер как устройство крепления морских строительных объектов, в том числе для фиксации малых объектов возобновляемой волновой энергетики. При этом особый интерес вызывает поддержание несущей способности в условиях притока придонных грунтовых вод в тело анкера.

В связи с этим целью данного исследования является обоснование работоспособности вакуумных анкеров с учетом инфильтрационных процессов. Для этого необходимо установить условия, необходимые для надежного погружения анкера в грунт и его выдергивания; установить расположе-

ние линий фильтрационного тока воды и выполнить расчет фильтрационных расходов воды внутрь вакуумного анкера. Сравнивая полученные результаты расчета, можно сделать вывод о степени влияния условий погружения на величину фильтрационного расхода воды.

2. Материалы и методы

Для вдавливания вакуумных анкеров в донный грунт, в сравнении с традиционными методами организации оснований морских сооружений, используется минимум оборудования и техники. Основным элементом является насос, откачивающий воду из тела полого вакуумного анкера, создавая в нем разрежение. За счет атмосферного давления и гидростатического давления столба жидкости вакуумный анкер погружается в донный грунт. Для демонтажа вакуумного анкера достаточно создать избыточное давление внутри него, которое поднимет анкер из донного грунта [15; 18]. Вакуумные анкеры предназначены для работы на выдергивающее усилие.

На рис. 1 представлены схемы предлагаемых вакуумных анкеров, устанавливаемых в слабых и плотных осадочных донных грунтах.

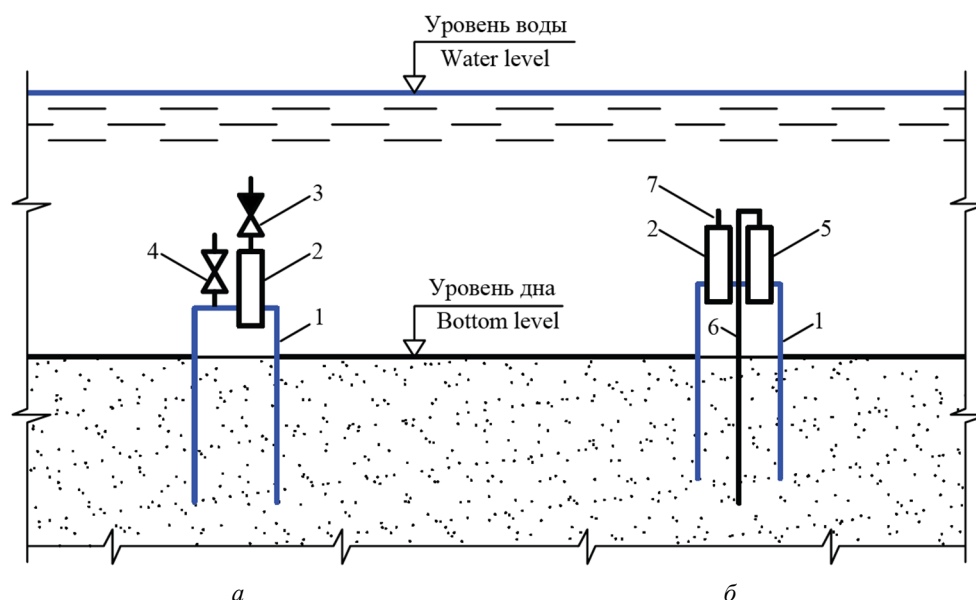


Рис. 1. Схемы вакуумных анкеров, устанавливаемых:

- a* — в слабый песчаный донный грунт; *б* — в плотный песчаный грунт с предварительным размывом;
 1 — тело вакуумного анкера; 2 — насос для откачки воды из полости вакуумного анкера; 3 — обратный клапан;
 4 — запорная арматура, используемая для создания избыточного давления в теле анкера при его демонтаже;
 5 — насос для размыва плотного донного грунта; 6 — трубопровод для размыва плотного донного грунта;
 7 — патрубок для откачки воды и пульпы из полости вакуумного анкера

Источники: выполнено В.В. Мироновым, Ю.А. Иванюшиным, Д.В. Мироновым

Figure 1. Designs of vacuum anchors installed:

- a* — in soft bottom soil; *b* — in dense sandy soil with preliminary erosion;
 1 — vacuum anchor body; 2 — pump for pumping water out of the vacuum anchor cavity; 3 — check valve;
 4 — shut-off valve used to create excess pressure in the anchor body during its dismantling;
 5 — pump for eroding dense bottom soil; 6 — pipeline for eroding dense bottom soil;
 7 — branch pipe for pumping water and pulp out of the vacuum anchor cavity

Source: made by V.V. Mironov, Yu.A. Ivanyushin, D.V. Mironov

Предложен расчет фильтрации воды внутрь вакуумного анкера при прикладывании к нему выдергивающей нагрузки. Выдергивающая нагрузка снижает абсолютное давление внутри анкера, которое в пределе не должно быть меньше давления насыщенных паров воды при заданной температуре. Снижение абсолютного давления ниже давления насыщенных паров приведет к вскипанию воды, срыву потока и кавитации внутри вакуумного анкера. При циклическом воздействии выдергива-

ющей нагрузки на вакуумный анкер фильтрация воды внутрь вакуумного анкера приведет к постепенному выходу его из донного грунта и снижению его удерживающей способности. Если толщина слоя слабого грунта достаточно большая или силы трения грунта о тело анкера при его вдавливании в грунт не позволяют достичь при погружении анкера водоупорного слоя, то при прикладывании выдергивающего усилия с образованием разрежения внутри тела анкера будет происходить фильтрация воды в полость анкера, что снижает его удерживающую способность. В этом случае профильтрованную воду необходимо удалять из полости анкера. Для этого предлагается использовать циклически работающий насос с приводом от энергии морских волн, установленный на плавучем бье.

Проведение экспериментальных исследований путем осуществления замеров непосредственно гидравлических характеристик фильтрационных потоков внутрь вакуумного анкера трудоемко и затратно в реализации, особенно в условиях реальной акватории. Поэтому в работе был использован метод электрогидродинамической аналогии (ЭГДА) [24; 25], первоначально примененный для расчетов плотин академиком, проф. Н.Н. Павловским и впоследствии усовершенствованный многими учеными для решения фильтрационных задач [24; 26; 27].

При этом сфера применения метода достаточно обширна. Так, В.И. Щуров применил метод ЭГДА для изучения влияния степени и характера вскрытия пласта на дебит скважины, построив графики, широко используемые в практике и теории разведки и разработки месторождений. Исследования по применению метода ЭГДА для разработки нефтяных и газовых месторождений проводили П.М. Белаш, А.П. Крылов, М.М. Максимов, У. Карплюс и другие известные ученые и специалисты. Н.П. Петров выполнил расчеты линий тока в грунте под непроницаемым флютбетом плотины, а П.И. Фильчаков и В.И. Панчишин построили линии равного напора для областей фильтрации произвольной формы. А.Б. Котюков под руководством В.Е. Саитова использовал электрогидродинамическую аналогию для совершенствования процессов фильтрации и конструкций фильтров очистки воды в животноводческих комплексах. И.И. Дуоба изучал условия питания горизонтального дренажа и формирования дренажного стока с применением метода ЭГДА.

На рис. 2 представлена схема фильтрационного расчета морской воды в тело вакуумного анкера, погруженного в осадочный донный грунт с известным коэффициентом фильтрации.

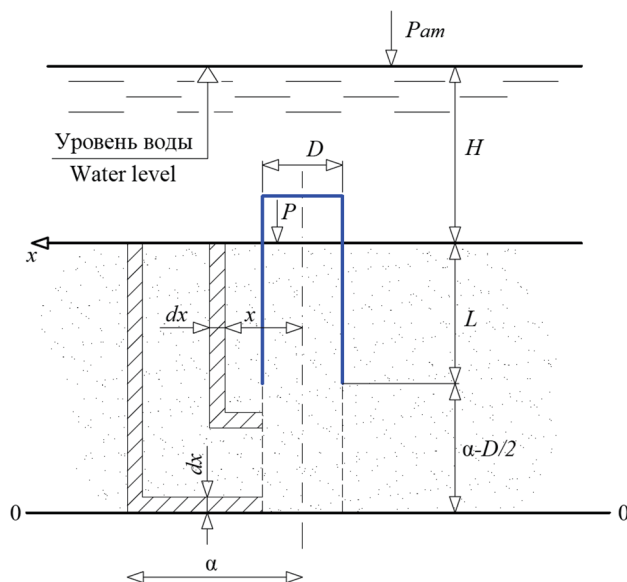


Рис. 2. Расчетная схема фильтрации морской воды в тело вакуумного анкера

Источники: выполнено В.В. Мироновым, Ю.А. Иванюшиным, Д.В. Мироновым

Figure 2. Model of sea water seepage into the body of a vacuum anchor

Source: made by V.V. Mironov, Yu.A. Ivanyushin, D.V. Mironov

Схема фильтрационного расчета была получена на плоской электрогидродинамической модели, выполненной на электропроводной бумаге с графитовым покрытием. На модель подавалось напряжение. Универсальным мультиметром (тестером напряжения) в различных точках модели определялся электрический потенциал. Таким образом, при помощи метода ЭГДА было сформировано фильтрационное поле и расположение линий фильтрационного тока морской воды внутрь вакуумного анкера при наличии в нем разрежения (рис. 2).

3. Результаты и обсуждение

Зная расположение линий фильтрационного тока, можно определить суммарный фильтрационный расход морской воды внутрь вакуумного анкера по формуле

$$Q_f = \int_{\frac{D}{2}}^{\alpha - \frac{D}{2}} \frac{2\pi \cdot k \Delta h \cdot x}{L + 2\left(x - \frac{D}{2}\right)} dx, \quad (1)$$

где Q_f — суммарный фильтрационный расход морской воды, м³/с; L — глубина погружения анкера в фильтрующий слой донного осадочного грунта, м; D — диаметр вакуумного анкера, м; Δh — потери напора при фильтрации воды от поверхности донного грунта до грунта, соприкасающегося с образующей цилиндрического вакуумного анкера, м; $\left(x - \frac{D}{2}\right)$ — расстояние от основания вакуумного анкера до водоупорного слоя грунта, м; k — коэффициент фильтрации грунта, м/с.

С учетом построенной методом ЭГДА модели весь процесс фильтрации морской воды внутрь вакуумного анкера можно разделить на три зоны. Первая зона — фильтрация воды от поверхности донного проницаемого грунта до образующей цилиндрического анкера. Вторая — фильтрация в цилиндрическом столбе проницаемого грунта под вакуумным анкером. Третья — фильтрация воды в грунте внутри анкера через слой грунта высотой L . Фильтрационные расходы воды в разных кольцевых элементарных струйках с геометрическим размером dx в первой зоне фильтрации разные из-за изменяющихся площадей живого сечения по координате x . В свою очередь, потери напора Δh одинаковые ввиду параллельности друг другу элементарных фильтрационных струек.

Фильтрационный расход воды до образующей цилиндрической поверхности анкера далее попадает в грунт цилиндрической формы под анкером. Расход поступающей профильтрованной воды Q_f в этой зоне неравномерен по высоте $\left(\alpha - \frac{D}{2}\right)$. Учитывая осреднения расхода по высоте $\left(\alpha - \frac{D}{2}\right)$ и путевую подпитку фильтрационным расходом столба грунта высотой $\left(\alpha - \frac{D}{2}\right)$, потери напора h_p в цилиндрическом слое проницаемого грунта под вакуумным анкером можно определить по формуле

$$h_p = \int_0^{\alpha - \frac{D}{2}} \frac{\frac{Q_f}{\alpha - \frac{D}{2}} \left(\frac{\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) - x}{\alpha - \frac{D}{2}} \right)}{k \frac{\pi D^2}{4}} dx. \quad (2)$$

Фильтрационный расход воды во всех трех зонах фильтрации одинаков. Фильтрационный расход в третьей зоне Q_3 , равный Q_f , можно рассчитать по формуле с использованием закона фильтрации Дарси:

$$Q_3 = k \cdot \omega \cdot J = k \cdot \frac{\left(\frac{p_a}{\rho g} + H + L + \left(\alpha - \frac{D}{2} \right) - \Delta h - h_p \right) - \left(\frac{p}{\rho g} + L + \left(\alpha - \frac{D}{2} \right) \right)}{L} \cdot \frac{\pi D^2}{4}, \quad (3)$$

где ω — площадь поперечного сечения вакуумного анкера, м^2 , диаметром D , м; J — пьезометрический уклон, м/м, p_a — атмосферное давление, Па; p — абсолютное давление на поверхности грунта внутри вакуумного анкера, большее абсолютного давления насыщенных паров при заданной температуре, Па; H — глубина акватории моря в месте установки вакуумного анкера, м; ρ — плотность морской воды, кг/м^3 ; g — ускорение свободного падения, м/с^2 или в сокращенном виде:

$$Q_3 = k \cdot \frac{\frac{p_a - p}{\rho g} + H - \Delta h - h_p}{L} \cdot \frac{\pi D^2}{4}. \quad (4)$$

Решая систему уравнений (1), (2) и (4), определялся фильтрационный расход в зависимости от глубины акватории моря и толщины фильтрационного слоя донного грунта при известных геометрических параметрах вакуумного анкера, коэффициента фильтрации донного грунта и абсолютного давления насыщенных паров воды при заданной температуре.

Максимально допустимое выдергивающее усилие для вакуумного анкера, соответствующее абсолютному давлению насыщенных паров воды внутри анкера при заданной температуре, можно рассчитать по формуле

$$F = (p_a + \rho g H - p) \cdot \frac{\pi D^2}{4}, \quad (5)$$

где F — максимально допустимое выдергивающее усилие, H .

В качестве гипотетического примера с использованием представленных зависимостей был выполнен фильтрационный расчет вакуумного анкера с заданными размерами $D = 0,58$ м, $L = 0,9$ м при абсолютном давлении насыщенных паров воды при заданной температуре $p = 2300$ Па.

Температура морской воды $T_b = 20$ °С. Коэффициент фильтрации осадочного донного грунта $k = 0,01 \times 10^{-2}$ м/с = 0,1 мм/с. Плотность морской воды $\rho = 1020$ кг/м^3 . Глубина до донной поверхности в месте размещения анкера составляет не менее $H \geq 3$ м. Мощность слоя водопроницаемого донного грунта приведена к глубине погружения вакуумного анкера в грунт L .

Результаты расчета в виде зависимости $Q_f = f(H, L)$ представлены на рис. 3. При построении графика — для наглядного отражения: осевые линии H и Q_f инвертированы; значения по осевой линии H выставлены в обратном порядке (в соответствии с увеличением глубины акватории до дна).

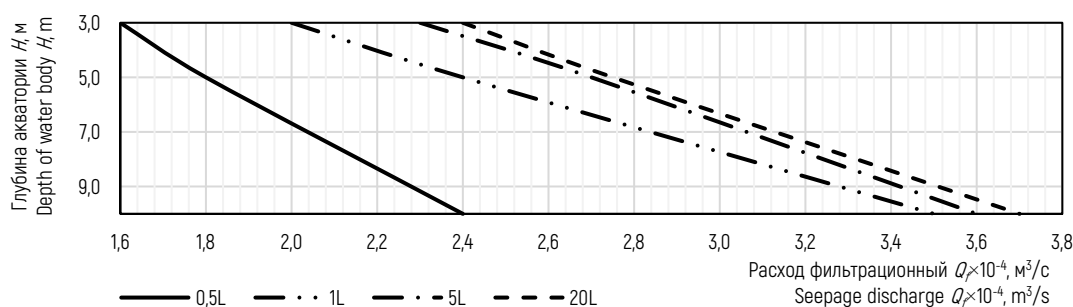


Рис. 3. Графическая зависимость фильтрационного расхода воды Q_f от глубины акватории H и толщины водопроницаемого слоя донного грунта

Источники: выполнено В.В. Мироновым, Ю.А. Иванюшиным, Д.В. Мироновым

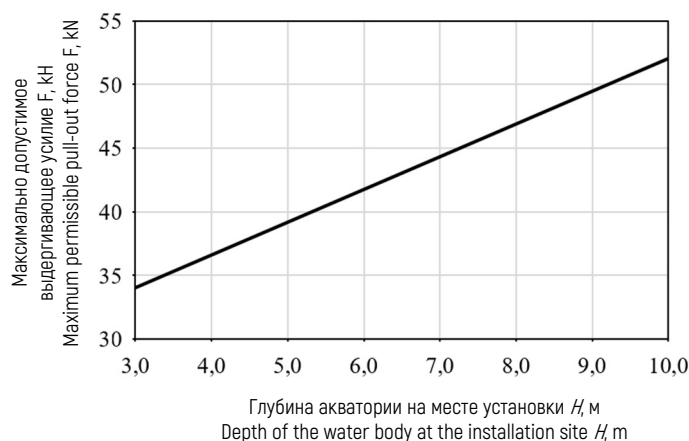
Figure 3. Graphic relationship between the water seepage discharge Q_f , the depth of the water body H and the thickness of the permeable layer of the bottom soil

Source: made by V.V. Mironov, Yu.A. Ivanyushin, D.V. Mironov

Вакуумный анкер с вышеприведенными размерами допустимо изготавливать из металлической двухсотлитровой бочки, попутно утилизируя тем самым пустую бочкотару (без значительных коррозионных повреждений и дефектов конструкции), избыточно скопившуюся в труднодоступных регионах Российской Федерации, как отмечено в [28]. Конструкция вакуумного анкера из бывшей в употреблении металлической бочки с откачивающим воду дренажным насосом, необходимым для погружения анкера в грунт, представлена на рис. 4, а.



а



б

Рис. 4. Вакуумный анкер из бывшей в употреблении металлической бочки:

а — общий вид опытного образца; б — графическая зависимость максимально допустимого выдергивающего усилия F , кН на анкер в зависимости от глубины акватории в месте его установки H , м

И с т о ч н и к: фото и схемы В.В. Миронова, Ю.А. Иванюшина, Д.В. Миронова

Figure 4. Vacuum anchor from a used metal barrel:

а — general view of the prototype; б — graphic relationship between the maximum permissible pull-out force F , kN, on the anchor and the depth of the water body at the place of its installation N , m

S o u r c e: photo and scheme by V.V. Mironov, Yu.A. Ivanyushin, D.V. Mironov

По формуле (5) для вакуумного анкера из металлической бочки при температуре морской воды $T_{\text{в}} = 20^{\circ}\text{C}$ были построены графики максимально допустимого выдергивающего усилия F в зависимости от глубины акватории H , в которой устанавливается вакуумный анкер (рис. 4, б). Анализ зависимостей (рис. 4, б) показывает, что вакуумный анкер из металлической двухсотлитровой бочки, бывшей в употреблении, может компенсировать выдергивающие нагрузки в несколько тонн.

4. Заключение

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Относительно недорогие вакуумные анкеры, в том числе выполненные из вторичных материалов, при установке их в слабых донных грунтах обладают значительной удерживающей способностью.

2. Вакуумные анкеры могут применяться для фиксации различных плавающих средств в акваториях с осадочными донными грунтами. Если вакуумный анкер при погружении полностью проходит слабый осадочный грунт и достигает водоупорного слоя, то его следует эксплуатировать без откачки воды из тела анкера. Единственное условие при прикладывании к анкеру выдергивающего усилия — абсолютное давление внутри тела анкера не должно быть меньше давления насыщенных паров воды при заданной температуре для предотвращения срыва анкера (парообразование внутри тела анкера с последующей кавитацией).

3. В случае, когда вакуумный анкер при вдавливании в грунт не доходит до водоупорного слоя по причине высокого коэффициента трения грунта о тело анкера или большой мощности слабого осадочного донного грунта, при прикладывании к нему выдергивающей нагрузки происходит фильтрация воды в тело анкера с вакуумом внутри него. В этом случае эксплуатация вакуумного анкера невозможна без откачки воды, профильтровавшейся в тело анкера. Откачка воды необходима для предотвращения выхода вакуумного анкера из слабого донного грунта.

4. При мощности слоя водопроницаемого донного грунта более пяти глубин погружения вакуумного анкера в донный грунт глубина морской акватории в месте установки практически не влияет на величину фильтрационного расхода (см. рис. 3). Для откачки можно использовать один из насосов с приводом от энергии морских волн, установленных на плавучем бье. Этот насос должен выполнять работу по циклической откачке профильтрованной воды из тела анкера.

5. Вакуумные анкеры являются локальным решением задачи фиксации морских сооружений, в том числе плавучих съемников энергии морских волн высокой повторяемости и обеспеченности в незамерзающих морях. Кроме того, в этом направлении существует возможность для вторичного применения бочкотары.

Список литературы

1. Миронов В.В., Иванюшин Ю.А., Суглобов Д.А., Миронов Д.В., Максимов Л.И. Технология жизнеобеспечения пляжных глэмпингов с использованием возобновляемой энергии морских волн // Вестник МГСУ. 2024. Т. 19. № 4 (185). С. 618–630. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2024.4.618-630> EDN: LDQQYP
2. Guo B., John V. Ringwood J.V. A review of wave energy technology from a research and commercial perspective // IET Renewable Power Generation. 2021. Vol. 15. No. 14. P. 3065–3090. <https://doi.org/10.1049/rpg2.12302> EDN: GYOPXV
3. Zhang Y., Zhao Y., Sun W., Li J. Ocean wave energy converters: Technical principle, device realization, and performance evaluation // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2021. Vol. 141. Article no. 110764. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2021.110764> EDN: CBPLID
4. Rui S., Guo Z., Zhou Z., Wang Z., Ye G., Ma, D. Frontiers in marine sciences, social sciences and engineering research related to marine (renewable) energy development // Frontiers in Marine Science. 2024. Vol. 11. Article no. 1421628. <https://doi.org/10.3389/fmars.2024.1421628>
5. Leijon J., Boström C. Freshwater production from the motion of ocean waves — A review // Desalination. 2018. Vol. 435. P. 161–171. <https://doi.org/10.1016/j.desal.2017.10.049>
6. Ahamed R., McKee K., Howard I. Advancements of wave energy converters based on power take off (PTO) systems: A review // Ocean Engineering. 2020. Vol. 204. Article no. 107248. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.107248> EDN: PNQHZU
7. Миронов В.В., Иванюшин Ю.А., Миронов Д.В., Суглобов Д.А. Способ очистки воды от соли и загрязнений / Патент на изобретение RU 2813520 C1, 12.02.2024. Заявка № 2023113267 от 22.05.2023. EDN: SSOWFW
8. Миронов В.В., Иванюшин Ю.А., Миронов Д.В., Суглобов Д.А. Способ очистки воды от соли и загрязнений / Патент на изобретение RU 2819674 C1, 22.05.2024. Заявка № 2023131939 от 30.11.2023. EDN: XSIFRS
9. Скрыгин Л.Н. Книга о якорях. Москва : Транспорт, 1972. 128 с. URL: <https://djvu.online/file/2n5EkR44szjlz> (дата обращения: 14.02.2025).
10. Raaj S.K., Saha N., Sundaravadivelu R. Exploration of deep-water torpedo anchors — A review // Ocean Engineering. 2023. Vol. 270. P. 113607. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.113607> EDN: MYKZKF
11. Некучаев В.О., Семиткина Е.В., Терентьева М.В., Кривов В.Е. Совершенствование конструктивных решений по закреплению магистрального газопровода в условиях слабонесущих грунтов // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. 2023. № 5–6. С. 5–12. <https://doi.org/10.24412/0131-4270-2023-5-6-5-12> EDN: BILHWZ
12. Судницына Е.С., Вахрушев С.И. Исследование способов повышения эффективности погружения свай методом вдавливания // Современные технологии в строительстве. 2017. Т. 1. С. 365–380. EDN: XNYGDR
13. Ганеев Н.В., Нестеров А.С. Устройство для погружения свай вдавливанием / Патент на полезную модель № 23629 (РФ; Патент на полезную модель). Бюл. Изобретения. Полезные модели № 18, 2002. URL: https://rusneb.ru/catalog/000224_000128_0000023629_20020627_U1_RU/ (дата обращения: 03.02.2025).
14. Циферов В.М., Толстов А.В., Павлов А.Б., Никитин В.И., Харько А.М. Устройство для погружения анкеров вдавливанием / Авторское свидетельство № 1409728 (СССР; Авторское свидетельство). Бюл. № 26, 1988. https://rusneb.ru/catalog/000224_000128_0001409728_19880715_A1_SU/?ysclid=mbpb6oacq82239864169 (дата обращения: 03.02.2025).

15. Кузьмичев Н.И., Гринберг А.Л., Гольдберг А.А. Вакуумный анкер для закрепления конструкций на поверхности грунта / Авторское свидетельство № 1649040 (СССР; Авторское свидетельство). Бюл. № 18, 1991. URL: https://rusneb.ru/catalog/000224_000128_0001649040_19910515_A1_SU/ (дата обращения: 14.02.2025).
16. Гулин Д.А., Салихов Б.И., Султанмагомедов Т.С., Султанмагомедов С.М. Расчет удерживающей способности вакуумного анкерного устройства // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. 2017. № 3. С. 33–37. EDN: YWJKJS
17. Rui S., Guo Z., Wang L., Wang H., Zhou W. Inclined loading capacity of caisson anchor in South China Sea carbonate sand considering the seabed soil loss // *Ocean Engineering*. 2022. Vol. 260. Article no. 111790. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111790> EDN: XETEJU
18. Zawawi N.A.W.A., Danyaro K.U., Liew M.S., Shawn L.E. Environmental sustainability and efficiency of offshore platform decommissioning: A review // *Sustainability*. 2023. Vol. 15. Article no. 12757. <https://doi.org/10.3390/su151712757> EDN: QQBRCC
19. Миронов В.В., Иванюшин Ю.А., Миронов Д.В., Кадысева А.А. Способ сооружения вакуумных свай / Патент на изобретение RU 2831685 C1, 11.12.2024. Заявка № 2024116586 от 13.06.2024. EDN: RFLSTX
20. Yang S., Jianting F., Chenchen Q., Jiawei W. Two-dimensional consolidation theory of vacuum preloading combined with electroosmosis considering the distribution of soil voltage // *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2020. Vol. 57. No. 1. P. 25–34. <https://doi.org/10.1007/s11204-020-09633-8> EDN: MSNDQB
21. Гарбузов В.В., Харьков Н.С., Пащенко Ф.А. Способ вакуумного уплотнения основания строительной конструкции / Патент на изобретение RU 2714406 C1, 14.02.2020. Заявка № 2019131739 от 08.10.2019. EDN: RXAQJX
22. Забелина О.Б., Энгин Д. Исследование методов водопонижения при строительстве высотных зданий в условиях прибрежных районов Санкт-Петербурга // *Перспективы науки*. 2021. № 3 (138). С. 199–202. EDN: JDAAYP
23. Игидов Т.Ш. Водопонижение грунтовых вод как необходимая задача начального этапа строительства // *Евразийский научный журнал*. 2016. № 11. С. 288–291. EDN: XDSQSV
24. Талалаева В.Ф., Склярченко Е.О. Исследование фильтрации из оросительного канала методом электрогидродинамических аналогий // *Мелиорация и гидротехника*. 2023. Т. 13. № 3. С. 256–273. <https://doi.org/10.31774/2712-9357-2023-13-3-256-273> EDN: KAVRTA
25. Котлов О.Н., Фролова Л.А., Савельева Ю.Ю., Козуб Ю.Г., Гусакова И.Н. Развитие методов моделирования фильтрации при проектировании и эксплуатации гидротехнических сооружений // *Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева*. 2021. Т. 200. С. 43–57. EDN: DMXADF
26. Umar N. Sources of irrigation in the state of Uttar Pradesh: A regional analysis // *International Journal of Applied Research*. 2020. Vol. 6. No. 10. P. 984–993. <https://doi.org/10.22271/allresearch.2020.v6.i10o.7681> EDN: XJBUXG
27. Jha R., Smakhtin V. A review of methods of hydrological estimation at ungauged sites in India. Colombo, Sri Lanka : International Water Management Institute, 2008. 28 p.
28. Седнев В.А., Дроздов Д.А., Сергеенкова Н.А. Методы обеспечения экологической безопасности при утилизации отходов в труднодоступных районах арктической зоны // *Арктика: экология и экономика*. 2022. Т. 12. № 3. С. 444–453. <https://doi.org/10.25283/2223-4594-2022-3-444-453> EDN: EALBIO

References

1. Mironov V.V., Ivanyushin Yu.A., Suglobov D.A., Mironov D.V., Maksimov L.I. Life support technology of beach glamping using renewable energy of sea waves. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2024;19;4(185):618–630. (In Russ.). <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2024.4.618-630> EDN: LDQQYP
2. Guo B., John V. Ringwood J.V. A review of wave energy technology from a research and commercial perspective. *IET Renewable Power Generation*. 2021;15(14):3065–3090. <https://doi.org/10.1049/rpg2.12302> EDN: GYOPXV
3. Zhang Y., Zhao Y., Sun W., Li J. Ocean wave energy converters: Technical principle, device realization, and performance evaluation. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2021;141:110764. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2021.110764> EDN: CBPLID
4. Rui S., Guo Z., Zhou Z., Wang Z., Ye G., Ma, D. Frontiers in marine sciences, social sciences and engineering research related to marine (renewable) energy development. *Frontiers in Marine Science*. 2024;11:1421628. <https://doi.org/10.3389/fmars.2024.1421628>
5. Leijon J., Boström C. Freshwater production from the motion of ocean waves — A review. *Desalination*. 2018; 435:161–171. <https://doi.org/10.1016/j.desal.2017.10.049>
6. Ahamed R., McKee K., Howard I. Advancements of wave energy converters based on power take off (PTO) systems: A review. *Ocean Engineering*. 2020;204:107248. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.107248> EDN: PNQHZU
7. Mironov V.V., Ivanyushin Yu.A., Mironov D.V., Suglobov D.A. *Method for purifying water from salt and contaminants*. Patent RU № 2813520. Byul. No. 5. (In Russ.) EDN: XSIFRS
8. Mironov V.V., Ivanyushin Yu.A., Mironov D.V., Suglobov D.A. *Method for purifying water from salt and impurities*. Patent RU № 2819674. Byul. No. 15. (In Russ.) EDN: XSIFRS

9. Skryagin L.N. *A book about anchors*. Moscow: Transport Publ.; 1972. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/2n5EkR44szjlz> (accessed: 14.02.2025).
10. Raaj S.K., Saha N., Sundaravadevelu R. Exploration of deep-water torpedo anchors — A review. *Ocean Engineering*. 2023;270:113607. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.113607> EDN: MYKZKF
11. Nekuchaev V.O., Semitkina E.V., Terent'yeva M.V., Krivov V.E. Improving design solutions for fixing the main gas pipeline in conditions of weakly bearing soils. *Transport and Storage of Oil Products and Hydrocarbons*. 2023;5-6:5–12. (In Russ.) <https://doi.org/10.24412/0131-4270-2023-5-6-5-12> EDN: BILHWZ
12. Sudnitsyna E.S., Vakhrushev S.I. Investigating ways to improve pile pressing efficiency. *Modern technologies in construction. Theory and practice*. 2017;1:365–380. (In Russ.) EDN: XNYGDR
13. Gapeev N.V., Nesterov A.S. *Device for driving piles by pressing*. Patent for utility model RU No. 23629 (Russia; Patent for utility mode). Byul. № 18, 2002. (In Russ.). Available from: https://rusneb.ru/catalog/000224_000128_0000023629_20020627_U1_RU/ (accessed: 03.02.2025).
14. Ciferov V.M., Tolstov A.V., Pavlov A.B., Nikitin V.I., Har'ko A.M. *Anchor driving device by pressing*. Certificate of authorship № 1409728 (USSR; Certificate of authorship). Byul. No. 26. 1988. (In Russ.) Available from: https://rusneb.ru/catalog/000224_000128_0001409728_19880715_A1_SU/?ysclid=m6p6ocaq82239864169 (accessed: 03.02.2025).
15. Kuzmichev N.I., Grinberg A.L., Goldberg A.A. *Vacuum anchor for fixing structures on the ground surface*. Certificate of authorship № 1649040 (USSR; Certificate of authorship). Byul. No. 18. 1991. (In Russ.). Available from: https://rusneb.ru/catalog/000224_000128_0001649040_19910515_A1_SU/ (accessed: 14.02.2025).
16. Gulín D.A., Salikhov B.I., Sultanmagomedov T.S., Sultanmagomedov S.M. Calculation of the carrying capacity of the vacuum anchor device. *Transportation and storage of petroleum products and hydrocarbon raw materials*. 2017;(3):33–37. (In Russ.) EDN: YWJKJS
17. Rui S., Guo Z., Wang L., Wang H., Zhou W. Inclined loading capacity of caisson anchor in South China Sea carbonate sand considering the seabed soil loss. *Ocean Engineering*. 2022;260:111790. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111790> EDN: XETEJU
18. Zawawi N.A.W.A., Danyaro K.U., Liew M.S., Shawn L.E. Environmental sustainability and efficiency of offshore platform decommissioning: A review. *Sustainability*. 2023;15:12757. <https://doi.org/10.3390/su151712757> EDN: QQBRCC
19. Mironov V.V., Ivanyushin Yu.A., Mironov D.V., Kadyseva A.A. *Method of erection of vacuum piles*. Patent RU No. 2831685. Byul. No. 35. (In Russ.) EDN: RFLSTX
20. Yang S., Jianting F., Chenchen Q., Jiawei W. Two-dimensional consolidation theory of vacuum preloading combined with electroosmosis considering the distribution of soil voltage. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2020;57(1):25–34. <https://doi.org/10.1007/s11204-020-09633-8>
21. Garbuzov V.V., Kharkov N.S., Pashchenko F.A. *Method of vacuum sealing of base of building structure*. Patent RU No. 2714406. Byul. No. 5. (In Russ.) EDN: RXAQJX
22. Zabelina O.B., Engin D. Research into methods of dewatering during the construction of high-rise buildings in the coastal areas of St. Petersburg. *Science prospects*. 2021;(3):199–202. EDN: JDAAYP
23. Igidov T.Sh. Groundwater lowering as a necessary task of the initial stage of construction. *Eurasian science journal*. 2016;(11):88–291. (In Russ.) EDN: XDSQSV
24. Talalaeva V.F., Sklyarenko E.O. Irrigation canal filtration study by electric analogy method. *Land Reclamation and Hydraulic Engineering*. 2023;13(3):256–273. (In Russ.) <https://doi.org/10.31774/2712-9357-2023-13-3-256-273> EDN: KAVRTA
25. Kotlov O.N., Frolova L.A., Savelieva Yu.Yu., Kozub Yu.G., Gusakova I.N. Development of groundwater filtration modelling for design and operation of hydro-technical structures. *Proceedings of the VNIIG*. 2021;200:43–57. (In Russ.) EDN: DMXADF
26. Umar N. Sources of irrigation in the state of Uttar Pradesh: A regional analysis. *International Journal of Applied Research*. 2020;6(10):984–993. <https://doi.org/10.22271/allresearch.2020.v6.i10o.7681> EDN: XJBUXG
27. Jha R., Smakhtin V. *A review of methods of hydrological estimation at ungauged sites in India*. Colombo, Sri Lanka: International Water Management Institute; 2008. 28 p.
28. Sednev V.A., Drozdov D.A., Sergeenkova N.A. Methods for ensuring environmental safety in waste disposal in hard-to-reach areas of the arctic zone. *Arctic: Ecology and Economy*. 2022;12(3):444–453. (In Russ.) <https://doi.org/10.25283/2223-4594-2022-3-444-453> EDN: EALBIO

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ
ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-2-108-117

EDN: NJOXAL

Research article / Научная статья

Natural Frequency Spectrum and Fundamental Frequency Formula
for Plane Periodic Lattice TrussMikhail N. Kirsanov 

National Research University “MPEI”, Moscow, Russian Federation

✉ c216@ya.ru

Received: January 28, 2025

Revised: March 12, 2025

Accepted: March 21, 2025

Abstract. The goal is to determine the free vibration natural frequency spectrum for a plane statically determinate truss with a cross-shaped lattice. The truss members are elastic and have the same stiffness. Both truss supports are pinned; the truss is externally statically indeterminate. A model, in which the mass of the structure is uniformly distributed over its nodes, and their vibrations occur vertically, is considered. The Maxwell-Mohr method is used to determine the stiffness of the truss. The member forces included in the formula are calculated by the method of joints using the standard operators of Maple mathematical software in symbolic form. The eigenvalues of the matrix for trusses with different numbers of panels are determined using the Maple system operators. Spectral constants are found in the overall picture of the frequency distribution constructed for trusses of different orders. A formula for the relationship between the first frequency and the number of panels is derived from the analysis of the series of analytical solutions for trusses of different orders. A simplified version of the Dunkerley method is used for the solution, which gives a more accurate approximation in a simple form. The relationship between the truss deflection under distributed load and the number of panels was found. Spectral constants were found in the frequency spectrum.

Keywords: Dunkerley method, first frequency, deflection, Maxwell-Mohr formula, periodic structure, analytical solution, frequency spectrum

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

For citation: Kirsanov M.N. Natural frequency spectrum and fundamental frequency formula for plane periodic lattice truss. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(2):108–117. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-108-117>

Mikhail N. Kirsanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, National Research University “MPEI”, 14/1, Krasnokazarmennay St, Moscow, 111250, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8679-6853, ORCID: 0000-0002-8588-3871; e-mail: c216@ya

© Kirsanov M.N., 2025

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Спектр собственных частот и формула для основной частоты плоской регулярной фермы решетчатого типа

М.Н. Кирсанов 

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Москва, Российская Федерация
✉ c216@ya.ru

Поступила в редакцию: 28 января 2025 г.

Доработана: 12 марта 2025 г.

Принята к публикации: 21 марта 2025 г.

Аннотация. Для плоской статически определимой фермы с крестообразной решеткой определяется спектр собственных частот свободных колебаний. Стержни фермы упругие и имеют одинаковую жесткость. Обе опоры фермы неподвижные шарниры, ферма внешне статически неопределима. Рассмотрена модель, в которой масса конструкции равномерно распределена по ее узлам, а их колебания происходят по вертикали. Для определения жесткости фермы применен метод Максвелла — Мора. Усилия в стержнях, входящие в формулу, рассчитывались методом вырезания узлов с применением стандартных операторов системы компьютерной математики Maple в символьной форме. Собственные числа матрицы для ферм с различным числом панелей разыскиваются с помощью операторов системы Maple. В общей картине распределения частот, построенной для ферм различного порядка, обнаружены спектральные константы. Из анализа последовательности аналитических решений для ферм разного порядка выведена формула зависимости первой частоты от числа панелей. Для решения использован упрощенный вариант метода Донкерлея, дающий более точное приближение в простой форме. Найдена зависимость прогиба фермы под действием распределенной нагрузки от числа панелей. В спектре частот обнаружены спектральные константы. Выведена формула зависимости прогиба фермы от числа панелей.

Ключевые слова: метод Донкерлея, первая частота, прогиб, формула Максвелла — Мора, регулярная конструкция, аналитическое решение, спектр частот

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Kirsanov M.N. Natural frequency spectrum and fundamental frequency formula for plane periodic lattice truss // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 2. С. 108–117. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-108-117>

1. Introduction

One of the problems of dynamics of engineering structures is the calculation of natural vibration frequencies. Most often, standard programs based on the finite element method are used for this purpose [1; 2]. This allows to obtain results for rather complex systems with many parameters, both geometric, related to the dimensions of the calculated object, and physical, characterizing various material properties of its elements. An alternative method of calculation of natural frequencies was developed mainly after the appearance of mathematical computer software. This method is applicable principally for simplified models of objects. Its main advantage manifests in case of periodic structures, for analytical solution of which the number of periodicity elements in the model does not affect the accuracy and complexity of calculations. R.G. Hutchinson and N.A. Fleck [3; 4] were first engaged in the theory of existence and calculation of periodic statically determinate truss structures. Later, this issue was addressed by F.W. Zok, R.M. Latture and M.R. Begley [5]. A simplified analysis of civil engineering structures using graph theory methods is proposed in [6]. The problem of optimizing the size, layout and topology of truss structures with the use of special algorithms is considered in [7]. In [8], approximate analytical solutions of statics of thin elastic plates in Maple are given. The superposition method for analyzing the stress state of an isotropic rectangle is proposed in [9]. A.S. Manukalo [10] analytically solved the problem of the first frequency of natural vibrations of a plane girder truss. The author's reference books [11; 12] contain analytical solutions of problems on the deflection of plane periodic trusses with an arbitrary number of panels. A simple formula for the lower estimate of natural vibrations of a plane periodic beam truss with a rectilinear upper chord is obtained in [13] by the Dunkerley method in the Maple mathematical software system. Analytical solutions

Кирсанов Михаил Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Российская Федерация, 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, стр. 1; eLIBRARY SPIN-код 8679-6853, ORCID: 0000-0002-8588-3871; e-mail: c216@ya

for spatial truss structures are also known. In [14], an estimate of the fundamental frequency of vibration of an L-shaped spatial truss with an arbitrary number of panels in the cross-girder was obtained by the induction method. Similar problems of statics and dynamics were solved in analytical form for spatial trusses in [15; 16].

In this paper, a new configuration of an externally statically indeterminate lattice truss is considered, and the analytical relationship between the deflection and the first frequency of natural vibration and the mass, dimensions, and number of panels is derived. The obtained formulas are compared with the results of traditional numerical calculations taking into account all degrees of freedom of the structure. In the joint frequency spectrum of a number of trusses of different orders, patterns are determined, which can be used to simplify practical calculations.

2. Structure

A plane truss consists of $2n$ panels of length $2a$ in its middle part and has the total height of $3h$ (Figure 1). A special feature of the truss is the pinned supports on its ends. At the same time, the truss remains statically determinate: the truss contains $\eta = 8n + 20$ members, including four members modelling the supports, and $K = 4n + 10$ internal hinge joints, $\eta = 2K$.

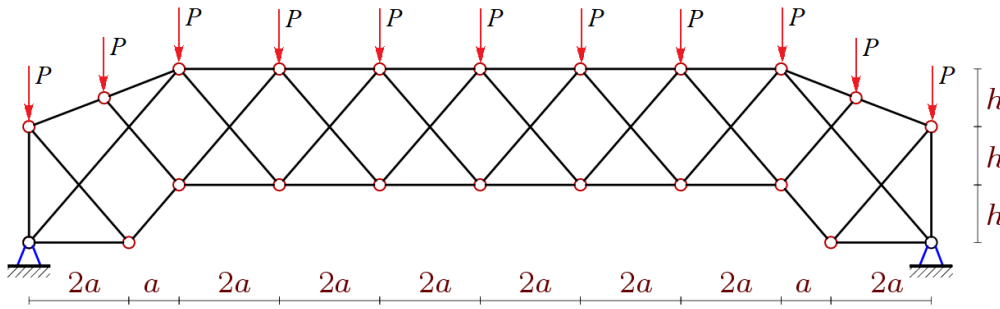


Figure 1. Truss under uniform load, $n = 3$

Source: made by M.N. Kirsanov

The mass of the truss in the problem of determining the natural frequency is uniformly distributed over all internal joints. In the model under consideration, the masses vibrate along the vertical y -axis. Under this assumption, the number of degrees of freedom of the truss is equal to the number of nodes K . It is assumed that the hinges of the truss are ideal and the material of the members is elastic.

3. Methods

3.1. Calculation of Forces

For the analytical calculation of forces in the truss members, a program written in the Maple symbolic mathematics language is used. The algorithm of this program was previously used in [10–12]. The nodal coordinates of the truss with a span of $L_0 = (4n + 6)a$ are defined using loops. The coordinate origin is located in the left pinned support (Figure 2):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, y_1 = 0, x_2 = 2a, y_2 = 0; \\ x_{i+2} &= x_{2n+7+i} = a(2i+1), y_{i+2} = h, y_{2n+7+i} = 3h, i = 1, \dots, 2n+1; \\ x_{2n+4} &= L_0 - 2a, y_{2n+4} = 0, x_{2n+5} = L_0, y_{2n+5} = 0; \\ x_{2n+6} &= 0, y_{2n+6} = 2h, x_{2n+7} = 3a/3, y_{2n+7} = y_{4n+9} = 5h/2; \\ x_{4n+9} &= L_0 - 3a/2, x_{4n+10} = L_0, y_{4n+10} = 2h. \end{aligned}$$

The order of connecting the members into nodes is specified by special lists containing the end numbers of the corresponding members $\Phi_i, i=1, \dots, \eta$. The members of the lower chord, for example, are coded by the lists: $\Phi_i = [i, i+1], i=1, \dots, 2n+4$.

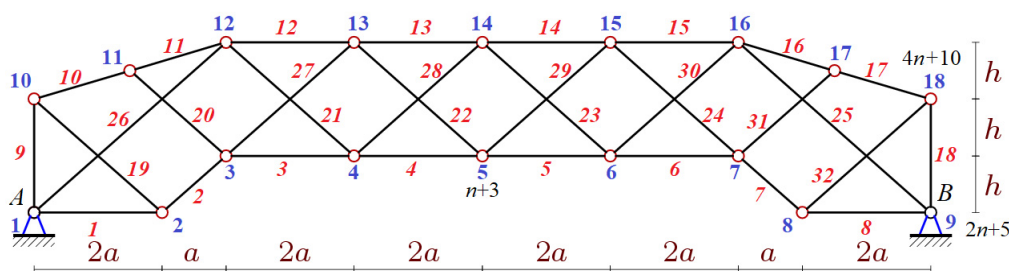


Figure 2. Numbering of nodes and members, $n = 2$

Source: made by M.N. Kirsanov

The matrix form is used to write the equations of equilibrium of the nodes projected onto the coordinate axes: $\mathbf{GS} = \mathbf{T}$. Here $\mathbf{G}$ is the matrix of directional cosines of the member forces, $\mathbf{S}$ is the vector of unknown forces and support reactions, $\mathbf{T}$ is the vector of the applied nodal loads. Odd elements T_{2i-1} of this vector contain the load components along the x -axis, even T_{2i} — along the y -axis. The elements of matrix $\mathbf{G}$ are calculated in terms of nodal coordinates and the data of lists $\Phi_i, i=1, \dots, \eta$. Maple uses a relatively fast inverse matrix method to solve the matrix equation in symbolic form: $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{T}$.

3.2. Deflection

The deflection due to a uniform nodal load applied on the top chord is calculated using the Maxwell — Mohr formula:

$$\delta = \sum_{j=1}^{\eta} S_j^{(n+3)} S_j^{(P)} l_j / (EF),$$

where $S_j^{(P)}$ is the force in member j due to load applied at nodes $i = 2n+6, \dots, 4n+10$ of the top chord; $S_j^{(n+3)}$ is the force in the same member due to a unit force, which is applied at the middle node of the lower chord, where the deflection is measured. Stiffness EF of all members is assumed to be the same.

The deflection is sought for an arbitrary number of panels in the truss, so first a series of solutions is compiled for individual trusses of different orders:

$$\delta_1 = P \frac{53a^3 + 15c^3 + 21h^3}{6h^2 EF};$$

$$\delta_2 = P \frac{3232a^3 + 438c^3 + 11d^3 + 964h^3}{72h^2 EF};$$

$$\delta_3 = P \frac{220a^3 + 17c^3 + 11h^3}{2h^2 EF};$$

$$\delta_4 = P \frac{20064a^3 + 1038c^3 + 19d^3 + 1364h^3}{72h^2 EF};$$

$$\delta_5 = P \frac{4036a^3 + 111c^3 + 45h^3}{6h^2 EF}, \dots$$

where lengths $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{9a^2 + h^2}$ are used. The required number of members of the series to determine its common term in this problem is twelve. Using computer mathematics methods, the common term of the series is obtained:

$$\delta_n = P \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3}{h^2 EF}.$$

The coefficients in this formula are obtained from the solution of homogeneous recurrence equations, which are constructed using the operator `rgf_findrecur` from the `genfunc` package in Maple:

$$C_1 = \left(30n^4 + 4(5 - 4(-1)^n)n^3 + 4(2(-1)^n + 5)n^2 + (110(-1)^n + 218)n + 105(-1)^n + 231 \right) / 36;$$

$$C_2 = \left(12n^2 + 2((-1)^n + 13)n + 9(-1)^n + 33 \right) / 24;$$

$$C_3 = (3 + 4n)(1 + (-1)^n) / 144;$$

$$C_4 = \left((16(-1)^n + 34)n + 48(-1)^n + 93 \right) / 18.$$

3.3. First Frequency Estimate

Two simple methods for estimating the first natural frequency of vibration are the most popular. They are the Dunkerley method for the lower estimate and the Rayleigh method for the upper one [17; 18]. The Rayleigh estimate is more accurate, however, its analytical expression is generally cumbersome. In [19], a modified version of the Dunkerley method is presented, which gives a simpler and more accurate solution than the original Dunkerley method. According to this method, the following formula is valid for the approximate expression of the first frequency ω_* :

$$\omega_*^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = mK\delta^{\max} / 2 = mK\Delta_n, \quad (1)$$

where by the Maxwell — Mohr formula each term has the form: $\delta_p = m \sum_{\alpha=1}^V \left(S_{\alpha}^{(p)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF)$, $S_{\alpha}^{(p)}$ is the force in member α due to a unit vertical force applied at node p , l_{α} is the length of the corresponding member, m is the mass of the truss node. Here, unlike the original Dunkerley method, the sum is computed by the mean value theorem. In this formula: $\delta^{\max}$ is the maximum value of δ_p , which is calculated for a particular node, having the maximum deflection from the individual vertical force applied to the same node. Obviously, for this problem such a node is node $n+3$ at the mid-span of the lower chord. For numerical calculation there is no difficulty in computing the sum in (1), however, summation difficulties arise when seeking an analytical solution. That is why in the simplified method the sum is replaced by its average value. In this case, of course, the property of the lower bound of the first frequency according to the Dunkerley method is lost.

Similar to the deflection calculation, expressions Δ_n for different numbers of truss panels are calculated step by step:

$$\Delta_1 = \frac{9a^3 + 5c^3 + h^3}{4h^2 EF};$$

$$\Delta_2 = \frac{233a^3 + 66c^3 + d^3 + 41h^3}{36h^2 EF};$$

$$\Delta_3 = \frac{65a^3 + 9c^3 + h^3}{4h^2 EF};$$

$$\Delta_4 = \frac{897a^3 + 102c^3 + d^3 + 41h^3}{36h^2EF};$$

$$\Delta_5 = \frac{233a^3 + 13c^3 + h^3}{4h^2EF}, \dots$$

By finding the common terms of the coefficient series before the exponentials of dimensions in these series, an expression for coefficient Δ_n is obtained:

$$\Delta_n = \frac{B_1a^3 + B_2c^3 + B_3d^3 + B_4h^3}{h^2EF},$$

where

$$B_1 = (12n^3 + 6(1 - 2(-1)^n)n^2 + 4((-1)^n + 7)n + 35(-1)^n + 62) / 36;$$

$$B_2 = (12n + (-1)^n + 19) / 24;$$

$$B_3 = ((-1)^n + 1) / 72, \quad B_4 = (16(-1)^n + 25) / 36.$$

Finally, according to (1):

$$\omega_* = h \sqrt{\frac{EF}{m(4n+10)(B_1a^3 + B_2c^3 + B_3d^3 + B_4h^3)}}. \quad (2)$$

3.4. Natural Frequency Spectrum

For numerical calculation of all frequencies of the truss, the same Maple operators as for the analytical results can be used, by entering their numerical values into the program instead of the symbolic geometric and physical characteristics of the structure. The results of calculations of frequencies of trusses of different orders are presented in Figure 3. The analysis was performed at $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa, $F = 9 \text{ cm}^2$, $m = 200$ kg, $a = 3$ m, $h = 2$ m. Each point on the graph corresponds to the value of frequency plotted on the vertical axis, and in the corresponding place on the horizontal axis the number of this frequency in the spectrum is marked. All frequencies of the same truss are connected by a broken line of individual color. The figure shows the calculations of the spectra of 12 trusses.

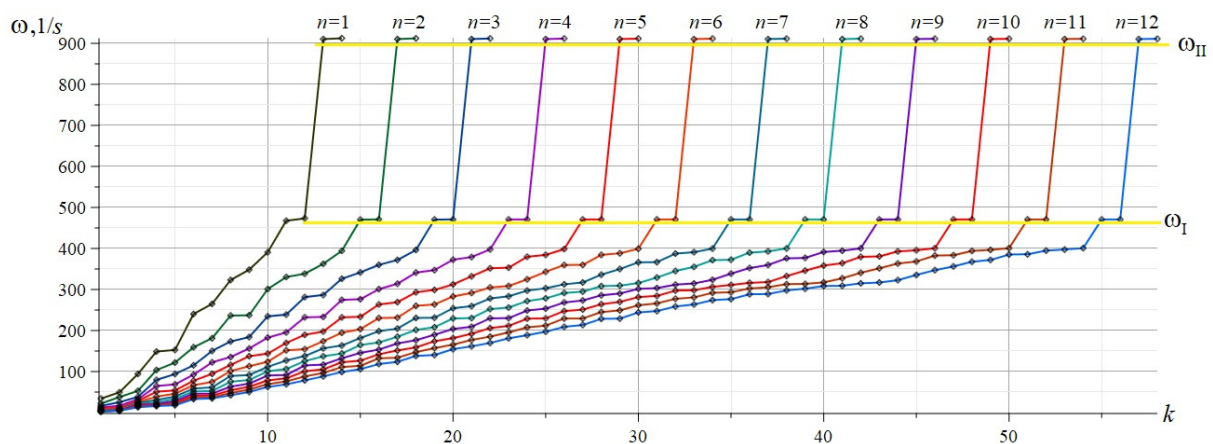


Figure 3. Spectra of trusses of order $n = 1, \dots, 12$

Source: made by M.N. Kirsanov

The overall picture of the frequency distribution of trusses of different orders reveals a number of patterns. First, given the dimensions of panel length, truss height, mass and stiffness, the frequencies of vibration are limited from above. Secondly, a jump of frequency values in the upper part of the spectrum is evident, which is the same for trusses of different orders. There are at least two horizontal lines connecting the points and representing almost constant values (with very small errors) of natural frequency for trusses of different orders. These number lines are labeled ω_I and ω_{II} respectively, and are the spectral constants of the truss [20; 21]. The practical meaning of these constants is obvious. To calculate this frequency in any truss with a large number of panels, when due to the amount of calculations there are often problems with accuracy and time-consumption, it is possible to use the solution for a similar truss with a small number of panels by adopting in this solution the desired value lying on the same horizontal straight line as the desired solution. For example, the value of the highest frequency for a truss with one panel ($n = 1$) coincides with great accuracy for a truss with 12 panels, $\omega = 911.08\text{s}^{-1}$, the calculation of natural frequencies of which is much more complicated than for a truss with one panel.

4. Results and Discussion

The analytical solution (2) is approximate. It should be compared with the numerical solution obtained in Maple using the Eigenvalues operator from the linear algebra package LinearAlgebra, designed to calculate the eigenvalues of a matrix. For the numerical solution, the algorithm for calculating the forces, the input of node coordinates and the order of connecting the members to the nodes is the same as for the derivation of formula (2). The numerical characteristics of the trusses are taken the same as in the construction of the frequency spectra. Figure 4 shows the curves of the relationship between the first frequency and the number of panels, obtained numerically and analytically using formula (2). The first frequency found numerically (dashed line) is denoted as ω_I , the analytical solution is denoted as ω_* . For small number of panels the error is quite noticeable. Starting from about $n = 4$, the error decreases. The method used is characterized by the fact that the curve of the analytical solution crosses the numerical solution, nominally assumed as the exact one, several times. It is possible to estimate the error of the method more accurately by introducing relative value $\varepsilon = |\omega_I - \omega_*| / \omega_I$ (Figure 5). It was obtained that the error decreases with increasing number of panels starting from $n = 5$. At the same time, the relationship between the error and the truss height h is uncertain: for small n the error decreases or increases when h changes. Starting from $n = 5$, the error is almost independent of the truss height.

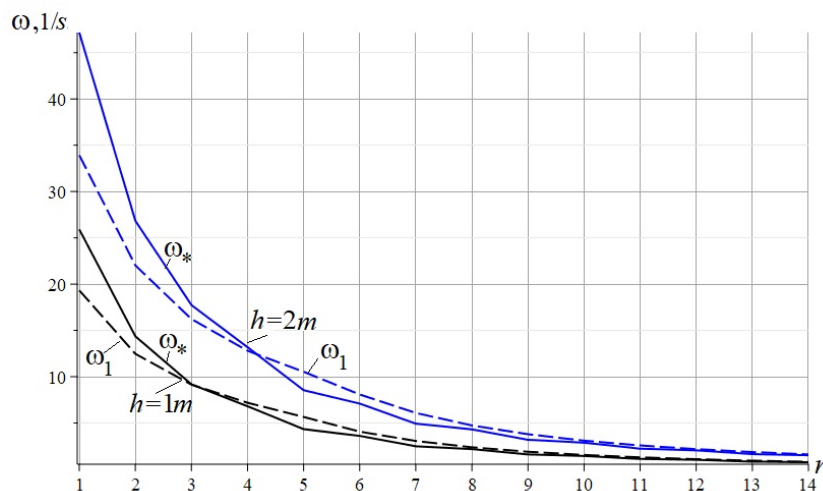


Figure 4. Relationship between the fundamental frequency of vibration and the number of panels

Source: made by M.N. Kirsanov

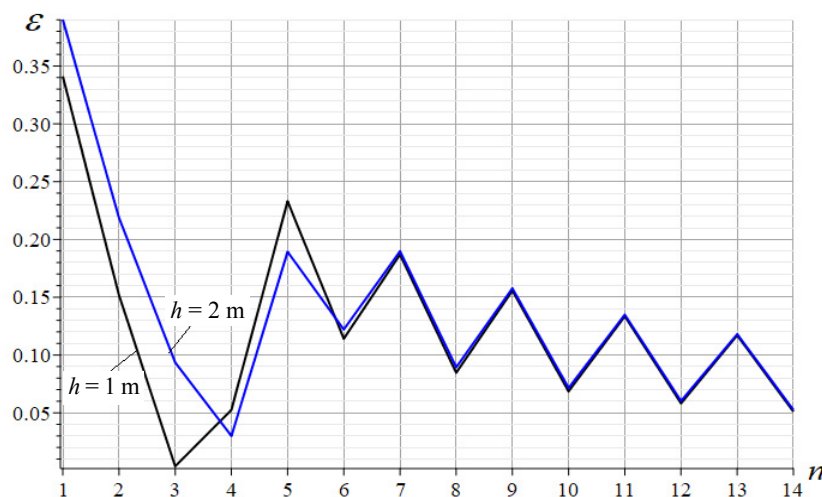


Figure 5. Relationship between the relative error and the number of panels

Source: made by M.N. Kirsanov

5. Conclusion

The considered truss configuration is more complicated than a conventional beam truss due to uncommon supports, more typical for frames and arches: both truss supports are pinned. This complicates the calculation of the structure, since the reactions of the supports cannot be found from the equations of equilibrium of the truss as a whole in the general way. However, in this formulation of the problem, an analytical solution is determined using mathematical computer software, for which it is not difficult to solve the complete system of equilibrium equations of all nodes, including the support ones, both in numerical and symbolic mode. On the basis of these solutions, the formula for the relationship of the fundamental frequency of vibration and the number of panels (this is the main result) is derived in a compact form in this paper. The deflection problem is solved in analytical form and the joint spectrum of all frequencies of natural vibrations of trusses of different orders is numerically constructed. Characteristic features are noticed in the spectra, the use of which in practice can significantly simplify and refine the solution.

The main results are:

1. A model of statically determinate periodic truss is proposed.
2. A formula for the first natural frequency as a function of the number of panels is derived.
3. Comparison of the analytical result with the numerical solution shows their good agreement. The accuracy of the estimates increases with increasing number of panels.
4. Spectral constants are found in the spectrum of the natural frequencies of the truss.

References

1. Liu G.R., Quek S.S. FEM for trusses. *The Finite Element Method*, Butterworth-Heinemann, 2014; 81–110. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-098356-1.00004-7>
2. Macareno L.M., Agirrebeitia J., Angulo C., Avilés R. FEM subsystem replacement techniques for strength problems in variable geometry trusses. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2008;44:346–357. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.12.003>
3. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005;85(9): 607–617. <https://doi.org/10.1002/Z./zamm.200410208> EDN: KGIHPX
4. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006;54(4):756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008> EDN: KGIHPX
5. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016;96:184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>

6. Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. *Swift analysis of civil engineering structures using graph theory methods*. 2020. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-45549-1>
7. Kaveh A., Hosseini S.M., Zaerreza A. Size, layout, and topology optimization of skeletal structures using plasma generation optimization. *Iranian Journal of Science and Technology. Transactions of Civil Engineering*. 2020;45:513–543. <https://doi.org/10.1007/S40996-020-00527-1> EDN: FMNDJD
8. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates. *AIP Conference Proceedings*. 2018:070012. <https://doi.org/10.1063/1.5034687> EDN: XPRHUD
9. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition method in the analysis of an isotropic rectangle. *Applied Mathematical Sciences*. 2016;10:2647–2660. <https://doi.org/10.12988/ams.2016.67211> EDN: YQJRPD
10. Manukalo A.S. Analysis of a planar sprengel truss first frequency natural oscillations value. *Structural mechanics and structures*. 2023;2(37):54–60. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.006> EDN: UXEELW
11. Kirsanov M.N. *Trussed frames and arches: Schemes and formulas*. Cambridge Scholars Publ; 2020. ISBN 978-1-5275-6039-0
12. Kirsanov M.N. *Planar trusses: Schemes and formulas*. Cambridge Scholars Publ; 2019. ISBN 978-1-52753531-2
13. Shchigol E.D. The formula for the lower estimate of the natural oscillations of a flat regular girder truss with a rectilinear upper belt. *Structural mechanics and structures*. 2023;2(37):46–53. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005> EDN: XSJJPI
14. Komerzan E.M., Maslov A.N. Estimation of the L-shaped spatial truss fundamental frequency oscillations. *Structural mechanics and structures*. 2023;2(37):35–45. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.004> EDN: UGWBIP
15. Astakhov S.V. Analytical assessment of the deflection of the rod model of a four-slope roof frame. *Structural mechanics and structures*. 2024;4(43):34–41. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/2219-1038.2024.43.4.003> EDN: GITKYF
16. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022;101:10101. <https://doi.org/10.4123/CUBS.101.1> EDN: CKQDPU
17. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023;109:10912. <https://doi.org/10.4123/CUBS.109.12>
18. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020;92:9204. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.4> EDN: ODWWBN
19. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023;108. <https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1> EDN: OFLARK
20. Luong C.L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2024;113:11304. <https://doi.org/10.4123/CUBS.113.4>
21. Luong Kong L. Dependence of the region of resonantly safe frequencies on the dimensions of a statically determinate flat truss. *Structural Mechanics and Structures*. 2024;2(41):16–26. (In Russ.) <https://doi.org/10.36622/2219-1038.2024.41.2.002> EDN: AKAVDU

Список литературы

1. Liu G.R., Quek S.S. FEM for trusses // *The Finite Element Method*, Butterworth-Heinemann. 2014. P. 81–110. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-098356-1.00004-7>
2. Macareno L.M., Agirrebeitia J., Angulo C., Avilés R. FEM Subsystem replacement techniques for strength problems in variable geometry trusses // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2008. Vol. 44. P. 346–357. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2007.12.003>
3. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. Vol. 85. No. 9. P. 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208> EDN: KGIHPX
4. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. No. 4. P. 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008> EDN: KGIHPX
5. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. P. 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
6. Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. *Swift analysis of civil engineering structures using graph theory methods*. 2020. 290 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-45549-1>
7. Kaveh A., Hosseini S.M., Zaerreza A. Size, layout, and topology optimization of skeletal structures using plasma generation optimization // *Iranian Journal of Science and Technology. Transactions of Civil Engineering*. 2020. Vol. 45. P. 513–543. <https://doi.org/10.1007/S40996-020-00527-1> EDN: FMNDJD
8. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates // *AIP Conference Proceedings*. 2018. P. 070012. <https://doi.org/10.1063/1.5034687> EDN: XPRHUD

9. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition method in the analysis of an isotropic rectangle // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10. No. 54. P. 2647–2660 <https://doi.org/10.12988/ams.2016.67211> EDN: XPRHUD
10. Манукало А.С. Анализ значения первой частоты собственных колебаний плоской шпренгельной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 54–60. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.006> EDN: UXEELW
11. Kirsanov M.N. Trussed frames and arches: Schemes and formulas. Cambridge Scholars Publ; 2020. 186 p. ISBN 978-1-5275-6039-0
12. Kirsanov M.N. Planar trusses: Schemes and formulas. Cambridge Scholars Publ; 2019. 206 p. ISBN 978-1-52753531-2
13. Щиголь Е.Д. Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 46–53. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005> EDN: XSJJPI
14. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 35–45. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.004> E.V EDN: UGWVIP
15. Астахов С.В. Аналитическая оценка прогиба стержневой модели каркаса четырехскатного покрытия // Строительная механика и конструкции. 2024. № 4 (43). С. 34–41. <https://doi.org/10.36622/2219-1038.2024.43.4.003> EDN: GITKYF
16. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. Vol. 101. Article No. 10101. <https://doi.org/10.4123/CUBS.101.1> EDN: CKQDPU
17. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 109. Article No. 10912. <https://doi.org/v10.4123/CUBS.109.12>
18. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No. 9204. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.4> EDN: ODWWBN
19. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. Vol. 108. <https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1> EDN: OFLARK
20. Luong C.L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2024. Vol. 113. Article No. 11304. <https://doi.org/10.4123/CUBS.113.4>
21. Лыонг Конг Л. Зависимость области резонансно безопасных частот от размеров статически определимой плоской фермы // Строительная механика и конструкции. 2024. № 2 (41). С. 16–26. <https://doi.org/10.36622/2219-1038.2024.41.2.002> EDN: AKAVDU

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-2-118-127

EDN: NJROUE

Research article / Научная статья

Two-Field Prismatic Finite Element Under Elasto-Plastic Deformation

Rumia Z. Kiseleva¹✉, Vitaliy V. Ryabukha¹, Natalia A. Kirsanova²,
Yuriy V. Klochkov¹, Anatoliy P. Nikolaev¹

¹ Volgograd State Agrarian University, *Volgograd, Russian Federation*

² Financial University under the Government of the Russian Federation, *Moscow, Russian Federation*

✉ rumia1970@yandex.ru

Received: January 29, 2025

Revised: March 24, 2025

Accepted: March 30, 2025

Abstract. For elasto-plastic analysis of structures at a particular load step, a mixed finite element in the form of a prism with triangular bases was obtained. Displacement increments and stress increments were taken as nodal unknowns. The target quantities were approximated using linear functions. Two versions of physical equations were used to describe elasto-plastic deformation. The first version used the constitutive equations of the theory of plastic flow. In the second version, the physical equations were obtained based on the hypothesis of proportionality of the components of the deviators of deformation increments to the components of the deviators of stress increments. To obtain the stiffness matrix of the prismatic finite element, a nonlinear mixed functional was used, as a result of the minimization of which two systems of algebraic equations with respect to nodal unknowns were obtained. As a result of solving these systems, the stiffness matrix of the finite element was determined, using which the stiffness matrix of the analysed structure was formed. After determining the displacements at a load step, the values of the nodal stress increments were determined. A specific example shows the agreement of the calculation results using the two versions of the constitutive equations of elasto-plastic deformation.

Keywords: elastic deformation, plastic deformation, mixed functional, mixed finite element, constitutive equations, flow theory

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution: Ryabukha V.V. — obtaining the stiffness matrix of the finite element, writing the text; Kirsanova N.A., Kiseleva R.Z. — implementation of the mixed functional and a hypothesis for obtaining plasticity equations; Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Kirsanova N.A. — discussion of the concept of obtaining the constitutive equations.

For citation: Kiseleva R.Z., Ryabukha V.V., Kirsanova N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. Two-field prismatic finite element under elasto-plastic deformation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(2):118–127. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-118-127>

Rumia Z. Kiseleva, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Geodesy, Environmental Management and Water Use, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskiy Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 1948-5390, ORCID: 0000-0002-3047-5256; e-mail: rumia1970@yandex.ru

Vitaliy V. Ryabukha, Postgraduate student of the Department of Mechanics, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskiy Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9596-2597, ORCID: 0000-0002-7394-8885; e-mail: vitalik30090@mail.ru

Natalia A. Kirsanova, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematics, Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prospekt, GSP-3, Moscow, 125993, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8393-5900, ORCID: 0000-0003-3496-2008; e-mail: nagureeve@fa.ru

Yuri V. Klochkov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskiy Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9436-3693, ORCID: 0000-0002-1027-1811; e-mail: klotchkov@bk.ru

Anatoliy P. Nikolaev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Mechanics, Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskiy Prospekt, Volgograd, 400002, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2653-5484, ORCID: 0000-0002-7098-5998; e-mail: anpetr40@yandex.ru

© Kiseleva R.Z., Ryabukha V.V., Kirsanova N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., 2025



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Двупольный конечный элемент при упругопластическом деформировании твердого тела

Р.З. Киселева¹✉, В.В. Рябуха¹, Н.А. Кирсанова², Ю.В. Клочков¹, А.П. Николаев¹

¹ Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Российская Федерация

² Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Российская Федерация

✉ c216@ya.ru

Поступила в редакцию: 29 января 2025 г.

Доработана: 24 марта 2025 г.

Принята к публикации: 30 марта 2025 г.

Аннотация. Для упругопластического расчета конструкций на шаге нагружения получен смешанный конечный элемент в форме призмы с треугольными основаниями. В качестве узловых неизвестных приняты приращения деформаций и приращения напряжений. Искомые величины аппроксимировались с использованием линейных функций. Для описания упругопластического деформирования использовались два варианта физических уравнений. В первом варианте применялись определяющие уравнения теории пластического течения. Во втором варианте физические уравнения получены на основе гипотезы о пропорциональности компонент девиаторов приращений деформаций компонентам девиаторов приращений напряжений. Для получения матрицы жесткости призматического конечного элемента использовался нелинейный смешанный функционал, в результате минимизации которого получены две системы алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных. В результате решения этих систем определена матрица жесткости конечного элемента, с использованием которой формировалась матрица жесткости рассчитываемой структуры. После определения перемещений на шаге нагружения определены значения узловых величин приращений напряжений. На конкретном примере показано совпадение результатов расчета с использованием вариантов определяющих уравнений упругопластического деформирования.

Ключевые слова: упругая деформация, пластическая деформация, смешанный функционал, смешанный конечный элемент, определяющие уравнения, теория течения

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов: Рябуха В.В. — получение матрицы жесткости конечного элемента, написание текста; Кирсанова Н.А., Киселева Р.З. — реализация смешанного функционала и гипотезы получения уравнений пластичности; Клочков Ю.В., Николаев А.П., Кирсанова Н.А. — обсуждение концепции получения определяющих уравнений.

Для цитирования: Kiseleva R.Z., Ryabukha V.V., Kirsanova N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P. Two-field prismatic finite element under elasto-plastic deformation // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 2. С. 118–127. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-118-127>

1. Introduction

When real structures are loaded, stress concentration zones always appear, in which local stresses exceed the yield strength of the material and the physical relationships between stress and strain are nonlinear. Analysis of the stress-strain state of structures in the zones of elasto-plastic deformation of the material is an important engineering problem. The solution of such problems is performed using numerical methods for determining design values. Among numerical methods for determining the strength parameters of structures, the finite element method (FEM) in various formulations has become widespread. The dis-

Киселева Румия Зайдуллаевна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, г. Волгоград, Университетский проспект, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 1948-5390, ORCID: 0000-0002-3047-5256; e-mail: rumia1970@yandex.ru

Рябуха Виталий Васильевич, аспирант кафедры механики, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, г. Волгоград, Университетский проспект, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 9596-2597, ORCID: 0000-0002-7394-8885; e-mail: vitalik30090@mail.ru

Кирсанова Наталья Анатольевна, доктор физико-математических наук, профессор департамента математики, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Российская Федерация, г. Москва, 125993, ГСП-3, Ленинградский проспект, д. 49; eLIBRARY SPIN-код: 8393-5900, ORCID: 0000-0003-3496-2008; e-mail: nagureeve@fa.ru;

Клочков Юрий Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, г. Волгоград, Университетский проспект, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 9436-3693, ORCID: 0000-0002-1027-1811; e-mail: klotchkov@bk.ru;

Николаев Анатолий Петрович, доктор технических наук, профессор кафедры механики, Волгоградский государственный аграрный университет, Российская Федерация, 400002, г. Волгоград, Университетский проспект, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 2653-5484, ORCID: 0000-0002-7098-5998; e-mail: anpetr40@yandex.ru

placement-based FEM has been widely used to analyze elasto-plastic deformation of structures [1–4]. In this formulation, the FEM was used in the analysis of thermoplastic and contact problems of continuum mechanics [5–9]. The finite element method has also been used in cases of finite strains in elasto-plastic deformation of bodies of various configurations [10–13].

Elasto-plastic deformation processes of plates and shells have also been investigated using the mixed FEM [14–18].

In this paper, a prismatic finite element in mixed formulation is developed, with strains and stresses as the nodal unknowns. A nonlinear mixed functional was used to obtain the stiffness matrix of the finite element. As physical equations, two versions of the constitutive equations of the theory of plastic flow were used. In the second version of the physical equations, the relations between the strain increments and stress increments obtained based on the hypothesis of proportionality of the components of the incremental strain deviator and the components of the incremental stress deviator were used.

2. Methods

2.1. Linear Geometric Relationships at a Load Step

In Cartesian coordinate system x, y, z the components of the incremental strain tensor $\Delta\varepsilon_{ij}$ are related to the displacement increments Δu_i by relationships¹

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{ij} + \Delta u_{ji}); (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

or in matrix form

$$\{\Delta\varepsilon\}_{6 \times 1} = [L]_{6 \times 3} \{\Delta v\}_{3 \times 1}, \quad (2)$$

where $\{\Delta\varepsilon\}_{1 \times 6}^T = \{\Delta\varepsilon_{11} \Delta\varepsilon_{22} \Delta\varepsilon_{33} 2\Delta\varepsilon_{12} 2\Delta\varepsilon_{13} 2\Delta\varepsilon_{23}\}$ is the row of strain increments; $\{\Delta v\}_{1 \times 3}^T = \{\Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3\}$ is the row of displacement increments; $[L]_{6 \times 3}$ is the matrix of differential operators.

2.2. Physical Equations at a Load Step

2.2.1. Physical Equations of Plastic Flow Theory

In the theory of plastic flow, it is assumed that the total strain increments are equal to the sum of elastic strain increments $\Delta\varepsilon_{ij}^e$ and plastic strain increments $\Delta\varepsilon_{ij}^p$.

The increments of elastic strain are determined by the relations of the Hooke's law¹

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{11}^e &= \frac{1}{E}(\Delta\sigma_{11} - \nu\Delta\sigma_{22} - \nu\Delta\sigma_{33}); \\ \Delta\varepsilon_{22}^e &= \frac{1}{E}(\Delta\sigma_{22} - \nu\Delta\sigma_{11} - \nu\Delta\sigma_{33}); \\ \Delta\varepsilon_{33}^e &= \frac{1}{E}(\Delta\sigma_{33} - \nu\Delta\sigma_{11} - \nu\Delta\sigma_{22}); \\ 2\Delta\varepsilon_{12}^e &= \frac{2(1+\nu)}{E}\Delta\sigma_{12}; \quad 2\Delta\varepsilon_{13}^e = \frac{2(1+\nu)}{E}\Delta\sigma_{13}; \quad 2\Delta\varepsilon_{23}^e = \frac{2(1+\nu)}{E}\Delta\sigma_{23}, \end{aligned} \quad (3)$$

where E is the elastic modulus of the material in tension; ν is the Poisson's ratio.

¹ Demidov S.P. *Theory of Elasticity*. Moscow: Vysshaya Shkola Publ.; 1979. (In Russ.)

To determine the plastic strain increments, the flow theory uses the hypothesis of proportionality of the components of the incremental plastic strain tensor to the components of the total stress deviator, occurring before the considered load step. According to this hypothesis,

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \frac{\Delta \varepsilon_i^p}{\sigma_i} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_c), \quad (4)$$

where σ_i is the stress intensity; δ_{ij} is the Kronecker delta symbol; $\sigma_c = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ is the first invariant of the stress tensor.

The value of the plastic strain intensity increment included in (4) is determined by the expression [19]

$$\Delta \varepsilon_i^p = \Delta \varepsilon_i - \Delta \varepsilon_i^e = \frac{\Delta \sigma_i}{E_x} - \frac{\Delta \sigma_i}{E_H}, \quad (5)$$

where $\Delta \varepsilon_i$ is the strain intensity increment; $\Delta \varepsilon_{ij}^e$ is the elastic strain intensity increment; E_x is the chord modulus of the stress-strain diagram; E_H is the modulus of the initial region of the stress-strain diagram; $\Delta \sigma_i$ is the stress intensity increment.

Considering (5), relationships (4) can be expressed as

$$\Delta \varepsilon_{mn}^p = \Delta \sigma_i \left(\frac{1}{E_c} - \frac{1}{E_0} \right) \frac{1}{\sigma_i} (\sigma_{mn} - \delta_{mn} \sigma_c). \quad (6)$$

In order to express $\Delta \varepsilon_{mn}^p$ according to (6) by stress increment functions $\Delta \sigma_{ij}$, $\Delta \sigma_i$ needs to be written in such general form

$$\Delta \sigma_i = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{mn}} \Delta \sigma_{mn}, \quad (7)$$

where $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \right]^{1/2}$.

By summing (3) and (6) and taking into account (7), the matrix relationship of the constitutive equations of the flow theory is formed

$$\{\Delta \varepsilon\} = \{C_1^p\} \{\Delta \sigma\}, \quad (8)$$

where $\{\Delta \varepsilon\}^T = \{\Delta \varepsilon_{11} \Delta \varepsilon_{22} \Delta \varepsilon_{33} 2\Delta \varepsilon_{12} 2\Delta \varepsilon_{13} 2\Delta \varepsilon_{23}\}$; $\{\Delta \sigma\}^T = \{\Delta \sigma_{11} \Delta \sigma_{22} \Delta \sigma_{33} \Delta \sigma_{12} \Delta \sigma_{13} \Delta \sigma_{23}\}$.

2.2.2. Version of Physical Equations without Separation of Strain Increments into Elastic and Plastic Parts

The hypothesis of proportionality of the components of the incremental strain deviator to the components of the incremental stress deviator was used in obtaining the constitutive equations of the specified version, leading to the following relations

$$\Delta \varepsilon_{mn} - \delta_{mn} \Delta \varepsilon_c = \frac{3}{2} \frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta \sigma_i} (\Delta \sigma_{mn} - \delta_{mn} \Delta \sigma_c), \quad (9)$$

where $\frac{\Delta \varepsilon_i}{\Delta \sigma_i} = \frac{1}{E_x}$; $\Delta \varepsilon_c = \frac{1}{3}(\Delta \varepsilon_{11} + \Delta \varepsilon_{22} + \Delta \varepsilon_{33})$; $\Delta \sigma_c = \frac{1}{3}(\Delta \sigma_{11} + \Delta \sigma_{22} + \Delta \sigma_{33})$.

Using the condition of incompressibility under plastic deformation assumed in the theory of plastic flow, according to which the following relation holds

$$\Delta \varepsilon_c = \frac{1-2\nu}{E} \Delta \sigma, \quad (10)$$

constitutive equations (9) can be expressed in matrix form

$$\{\Delta \varepsilon\} = \begin{bmatrix} C_2^P \\ 6 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma \\ 6 \times 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

3. Stiffness Matrix of Prismatic Finite Element

A prism with triangular bases is taken as the finite element. Nodal unknowns are displacement increments and stress increments. For integration over the finite element volume, rectangular prism is assumed, the height of which is determined by coordinate $-1 \leq \zeta \leq 1$, and the bases are right triangles with coordinates $0 \leq \xi, \eta \leq 1$.

Approximation of Cartesian coordinates x_i of displacement increments Δv_i and stress increments $\Delta \sigma_{ij}$ is performed in terms of the corresponding nodal quantities by linear functions

$$\lambda = \left\{ (1-\xi-\eta) \frac{1-\zeta}{2} : \xi \frac{1-\zeta}{2} : \eta \frac{1-\zeta}{2} : \{1-\xi-\eta\} \frac{1+\zeta}{2} : \xi \frac{1+\zeta}{2} : \eta \frac{1+\zeta}{2} \right\} \{\lambda\} = \left\{ f(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 6}^T \left\{ \lambda_y \right\}_{6 \times 1}, \quad (12)$$

where $\left\{ \lambda_y \right\}_{1 \times 6}^T = \left\{ \lambda^i \lambda^j \lambda^k \lambda^m \lambda^n \lambda^p \right\}$ is the row of nodal values of λ ; symbol λ denotes the values of $x_i, \Delta v_i, \Delta \sigma_{ij}$.

On the basis of (12), the necessary approximating expressions are written in matrix form

$$\{\Delta v\} = \begin{bmatrix} A \\ 3 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_y \\ 3 \times 18 \end{bmatrix}; \quad \{\Delta \varepsilon\} = \begin{bmatrix} L \\ 6 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ 6 \times 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_y \\ 3 \times 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 6 \times 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_y \\ 18 \times 1 \end{bmatrix}; \quad \{\Delta \sigma\} = \begin{bmatrix} S \\ 6 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_y \\ 6 \times 36 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

where

$$\left\{ \Delta v_y \right\}_{1 \times 18}^T = \left\{ \Delta v^{1i} \Delta v^{1j} \Delta v^{1k} \Delta v^{1m} \Delta v^{1n} \Delta v^{1p} \dots \Delta v^{3i} \Delta v^{3j} \Delta v^{3k} \Delta v^{3m} \Delta v^{3n} \Delta v^{3p} \right\};$$

$$\left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{1 \times 36}^T = \left\{ \Delta \sigma_{11}^i \Delta \sigma_{22}^i \Delta \sigma_{33}^i \Delta \sigma_{12}^i \Delta \sigma_{13}^i \Delta \sigma_{23}^i \dots \Delta \sigma_{11}^p \Delta \sigma_{22}^p \Delta \sigma_{33}^p \Delta \sigma_{12}^p \Delta \sigma_{13}^p \Delta \sigma_{23}^p \right\}.$$

To form the stiffness matrix of the prismatic finite element, a mixed functional for the considered load step is used [16]

$$\Phi = \int_V \left[\left\{ \sigma \right\}_{1 \times 6}^T + \frac{1}{2} \left\{ \Delta \sigma \right\}_{1 \times 6}^T \right] \begin{bmatrix} L \\ 6 \times 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v \\ 3 \times 1 \end{bmatrix} dV - \frac{1}{2} \int_V \left\{ \Delta \sigma \right\}_{1 \times 6}^T \left[G_{\mu}^p \right]_{6 \times 6}^{-1} \left\{ \Delta \sigma \right\}_{6 \times 1} dV - \\ - \int_S \left\{ \Delta v \right\}_{1 \times 3}^T \left(\left\{ q \right\}_{3 \times 1} + \frac{1}{2} \left\{ \Delta q \right\}_{3 \times 1} \right) dS; \quad (\mu = 1.2), \quad (14)$$

where $\left\{ \Delta q \right\}, \left\{ q \right\}$ is the load applied at the considered load step and before the considered step; V is the volume of the finite element; S is the area of load application.

Taking into account approximating relations (13), functional (14) will be expressed as

$$\Phi \equiv \left\{ \Delta v_y \right\}_{1 \times 36}^T \int_V [B]_{36 \times 6}^T \left\{ \sigma \right\}_{6 \times 1} dV + \left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{1 \times 36}^T \int_V [S]_{36 \times 6}^T [B]_{6 \times 18} dV \left\{ \Delta v_y \right\}_{18 \times 1} - \\ - \frac{1}{2} \left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{1 \times 36}^T \int_V [S]_{36 \times 6}^T [G_\mu^p]_{6 \times 6} [S]_{6 \times 36} dV \left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{36 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ \Delta v_y \right\}_{1 \times 18}^T \int_S [A]_{18 \times 3}^T \left\{ \Delta q \right\}_{3 \times 1} dS - \left\{ \Delta v_y \right\}_{1 \times 18}^T \int_S [A]_{18 \times 3}^T \left\{ q \right\}_{3 \times 1} dS. \quad (15)$$

As a result of minimization of functional (15) with respect to nodal unknowns, two systems of equations are obtained

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{36 \times 1}^T} \equiv [Q]_{36 \times 18} \left\{ \Delta v_y \right\}_{18 \times 1} - [H]_{36 \times 36} \left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{36 \times 1} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \left\{ \Delta v_y \right\}_{18 \times 1}^T} \equiv [Q]_{18 \times 36}^T \left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{36 \times 1} - \left\{ \Delta f_q \right\}_{18 \times 1} - \left\{ R \right\}_{18 \times 1} = 0, \quad (17)$$

where $[Q] = \int_V [S]_{36 \times 6}^T [B]_{6 \times 18} dV$; $[H] = \int_V [S]_{36 \times 6}^T [G_\mu^p]_{6 \times 6} [S]_{6 \times 36} dV$; $\left\{ \Delta f_q \right\} = \int_S [A]_{18 \times 3}^T \left\{ \Delta q \right\}_{3 \times 1} dS$;

$\left\{ R \right\} = \int_S [A]_{18 \times 3}^T \left\{ q \right\}_{3 \times 1} dS - \int_V [B]_{6 \times 18}^T \left\{ \sigma \right\}_{6 \times 1} dV$ is the Raphson residual error.

From system of equations (16), the column of stress increments is determined in terms of displacement increments

$$\left\{ \Delta \sigma_y \right\}_{36 \times 1} = [H]_{36 \times 36}^{-1} [Q]_{36 \times 18} \left\{ \Delta v_y \right\}_{18 \times 1}. \quad (18)$$

Taking into account (18), the stiffness matrix of the finite element is determined from system (17)

$$[K]_{18 \times 18} \left\{ \Delta v_y \right\}_{18 \times 1} = \left\{ \Delta f_q \right\}_{18 \times 1} + \left\{ R \right\}_{18 \times 1}, \quad (19)$$

where $[K] = [Q]_{18 \times 36}^T [H]_{36 \times 36}^{-1} [Q]_{36 \times 18}$.

Using (19), the stiffness matrix of the considered structure is formed, by solving which the displacements of all nodes are determined.

The values of the stress increments are determined by equations (18).

4. Results and Discussion

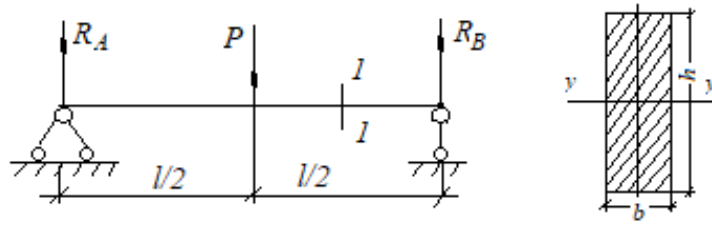
4.1. Example of Analysis

The stress-strain state of a simply-supported beam (Figure 1) is considered given the following data: $l = 200$ cm; $h = 10$ cm; $b = 1$ cm; $P = 13$ kN.

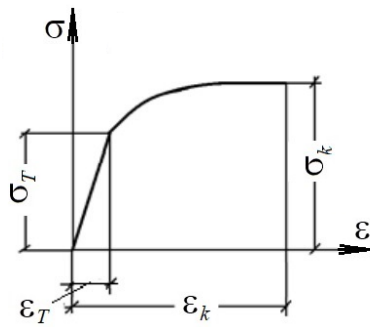
The tensile and flexural stress-strain diagrams of the material are shown in Figures 2 and 3.

Physical and mechanical parameters are assumed to be the following: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa; $\nu = 0.3$; $\sigma_T = 200$ MPa; $\sigma_k = 300$ MPa; $\varepsilon_T = 0.001$; $\varepsilon_k = 0.01$; $\sigma_{iT} = 200$ MPa; $\sigma_{ik} = 300$ MPa; $\varepsilon_{iT} = \frac{2}{3}(1 + \nu)\varepsilon_T = 0.866667 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_{ik} = 0.866667 \cdot 10^{-2}$; $W = bh^2/6 = 1 \times 10^2/6 = 16.66667$ cm³.

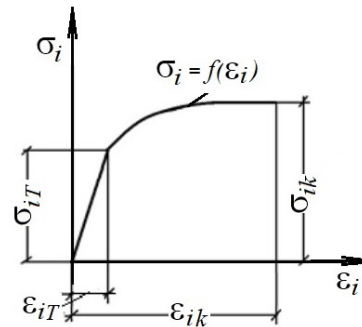
Section 1-1

**Figure 1.** Simply-supported beam

Source: made by R.Z. Kiseleva

**Figure 2.** Tensile stress-strain diagram

Source: made by R.Z. Kiseleva

**Figure 3.** Flexural stress-strain diagram

Source: made by R.Z. Kiseleva

The strain hardening curve is described by the equation

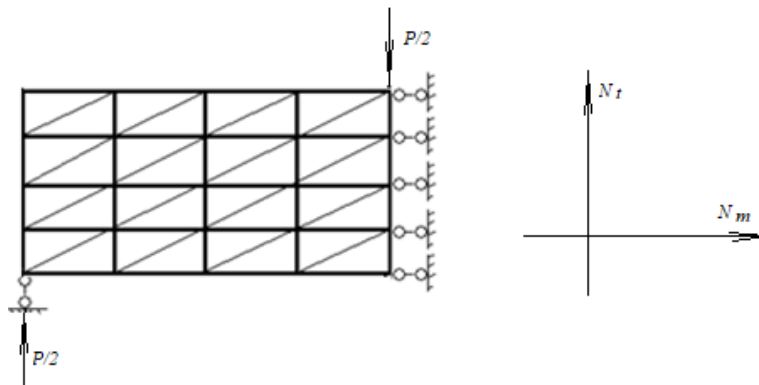
$$\sigma_i = a\epsilon_i^2 + b\epsilon_i + c,$$

where a , b , c are coefficients with the following numerical values:

$$a = -6612835.53 \text{ MPa}; \quad b = 242231.48 \text{ MPa}; \quad c = 1795.033 \text{ MPa}.$$

The model of the beam is presented in Figure 4 ($N_m = 40$; $N_t = 11$ number of nodes along the beam axis and along its height).

The results of calculation using the considered versions of the constitutive equations turned out to be virtually identical.

**Figure 4.** Finite element model of the beam

Source: made by R.Z. Kiseleva

According to the obtained values of normal stresses, the normal stress diagram in the beam cross-section, which is located at distance h from the middle one, is plotted (Figure 5).

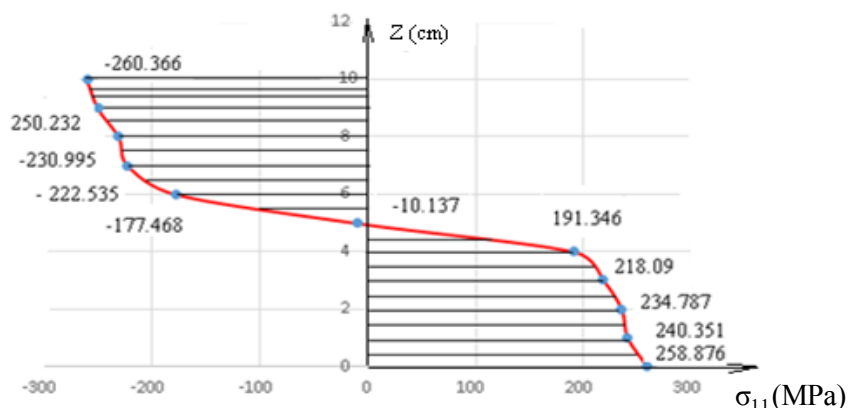


Figure 5. Diagram of normal stress σ_{11} in the beam section

Source: made by R.Z. Kiseleva

Equations of statics $\sum x = 0$ for the diagram in Figure 5 are satisfied with a discrepancy of $\delta \approx 0.7\%$. The moment from external forces is equal to $M_p = \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - h \right) = 6.5 \times (100 - 10) = 585 \text{ kN} \times \text{cm}$, and the moment from the internal forces is equal to $M_{\text{int}} = 597.4 \text{ kN} \times \text{cm}$.

The equations of statics have a discrepancy of $\delta \approx 0.5\%$ in terms of the equality of moments from external and internal forces.

5. Conclusion

Based on the obtained calculation results, it can be concluded:

1. The developed version of the constitutive equations without separation of strain increments into elastic and plastic parts leads to the same results as when using the constitutive equations of the flow theory, where the separation into elastic and plastic parts is adopted.

2. The use of the hypothesis of proportionality of the components of the incremental strain and incremental stress deviators in the developed version of the constitutive equations allows to express the stress increments immediately. In flow theory, the strain increments are first expressed in terms of the stress intensity increments, and only after performing differentiation operations it is possible to obtain the required constitutive equations.

The proposed version of the constitutive equations of the plasticity theory is more preferable for use in the design practice of engineering structures.

References

1. Bate K.Yu. *Finite element method: textbook*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2010. (In Russ.) ISBN 978-5-9221-1181-2 EDN: MVSUZX
2. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.) ISBN 5-9221-0674-0 EDN: QJPXPV
3. Krivoshapko S.N., Christian A.B.H., Gil-oulbé M. *Stages and architectural styles in design and building of shells and shell structures. Building and Reconstruction*. 2022;4(102):112–131. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2022-102-4-112-131> EDN: EPXBVH
4. Beirao Da Veiga L., Lovadina C., Mora D. A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017;295:327–346. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.013>

5. Ilyushin A.A. *Plasticity. Elastic-plastic deformations*. Moscow: Lenand Publ.; 2018. (In Russ.) ISBN 978-5-9710-4588-5
6. Zapara M., Müller W.H., Wille R., Tutyshkin N. Constitutive equations of a tensorial model for ductile damage of metals. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2012;24(4-6):697–717. <https://doi.org/10.1007/s00161-012-0264-7> EDN: RGJNNL
7. Sultanov L.U. Computational algorithm for investigation large elastoplastic deformations with contact interaction. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021;42(8):2056–2063. <https://doi.org/10.1134/S19950802210> EDN: PPWQJL
8. Aldakheel F. Micromorphic approach for gradient-extended thermo-elastic-plastic solids in the algorithmic strain space. *Continuum Mechanics Thermodynamics*. 2017;29(6):1207–1217. <https://doi.org/10.1007/s00161-017-0571-0> EDN: CTYSYR
9. Aldakheev F., Miehe C. Coupled thermomechanical response of gradient plasticity. *International Journal of Plasticity*. 2017;91:1–24. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.02.007>
10. Wriggers P., Hudobivnik B. A low order virtual element formulation for finite elastoplastic deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017;2:123–134. <http://doi.org/10.1016/j.cma.08.053.2017>
11. Golovanov A.I. Modeling of the large elastoplastic deformations of shells. theoretical basis of finite-element models. *Problems of Strength and Plasticity*. 2010;72:5–17. (In Russ.) EDN: NCVHZV
12. Aldakheel F., Wriggers P., Miehe C. A modified Gurson-type plasticity model at finite strains: formulation, numerical analysis and phase-field coupling. *Computational Mechanics*. 2018;62:815–833. <https://doi.org/10.1007/s00466-017-1530-0> EDN: NXNXUN
13. Hanslo P., Larson Mats G., Larson F. Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem. *Computational Mechanics*. 2015;56(1):87–95. <http://doi.org/10.1007/s00466-015-1158-x> EDN: JVDYXD
14. Magisano D., Leonetti L., Garcea G. Koiter asymptotic analysis of multilayered composite structures using mixed solid-shell finite elements. *Composite Structures*. 2016;154:296–308. <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.046>
15. Magisano D., Leonetti L., Garcea G. Advantages of mixed format in geometrically nonlinear of beams and shells using solid finite elements. *International Journal for Numerical Methods Engineering*. 2017;109(9):1237–1262. <http://doi.org/10.1002/nme.5322>
16. Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Yushkin V.N. Stress-strain state of shell of revolution analysis by using various formulations of three-dimensional finite elements. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(5):361–379. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-361-379> EDN: RRVXBB
17. Gureeva N.A., Kiseleva R.Z., Nikolaev A.P. Nonlinear deformation of a solid body on the basis of flow theory and realization of fem in mixed formulation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Scientific and Practical Conference Engineering*. 2019;675:012059. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/675/1/012059> EDN: VDBDCI
18. Gureyeva N.A., Arkov D.P. Implementation of the deformation theory of plasticity in calculations of plane-stressed plates based on FEM in a mixed formulation. *Bulletin of higher educational institutions. North caucasus region. Natural sciences*. 2011;(2):12–15. (In Russ.) EDN: NUPEON
19. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti*. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1975. (In Russ.) EDN: VLPSRF

Список литературы

1. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. Москва : Физматлит, 2010. 1022 с. ISBN 978-5-9221-1181-2 EDN: MVSUZX
2. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. Москва : Физматлит, 2006. 391 с. ISBN 5-9221-0674-0 EDN: QJPXPV
3. Krivoshepa S.N., Christian A.B.H., Gil-oulbé M. Stages and architectural styles in design and building of shells and shell structures // *Строительство и реконструкция*. 2022. № 4 (102). С. 112–131. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2022-102-4-112-131> EDN: EPXBVH
4. Beirao Da Veiga L., Lovadina C., Mora D. A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 295. P. 327–346. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.013>
5. Ильюшин А.А. Пластичность. Упруго-пластические деформации. Москва : Ленанд, 2018. 352 p. ISBN 978-5-9710-4588-5
6. Zapara M., Müller W.H., Wille R., Tutyshkin N. Constitutive equations of a tensorial model for ductile damage of metals // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2012. Vol. 24. No. 4–6. P. 697–717. <https://doi.org/10.1007/s00161-012-0264-7> EDN: RGJNNL
7. Sultanov L.U. Computational algorithm for investigation large elastoplastic deformations with contact interaction // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42. No. 8. P. 2056–2063. <https://doi.org/10.1134/S19950802210> EDN: PPWQJL

8. Aldakheel F. Micromorphic approach for gradient-extended thermo-elastic-plastic solids in the algorithmic strain space // *Continuum Mechanics Thermodynamics*. 2017. Vol. 29(6). P. 1207–1217. <https://doi.org/10.1007/s00161-017-0571-0> EDN: CTYSYR
9. Aldakheev F., Miehe C. Coupled thermomechanical response of gradient plasticity // *International Journal of Plasticity*. 2017. Vol. 91. P. 1–24. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.02.007>
10. Wriggers P., Hudobivnik B. A low order virtual element formulation for finite elastoplastic deformations // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 2. P. 123–134. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.08.053>
11. Голованов А.И. Моделирование больших упругопластических деформаций оболочек. теоретические основы конечно-элементных моделей // *Проблемы прочности и пластичности*. 2010. № 72. С. 5–17. EDN: NCVHZV
12. Aldakheel F., Wriggers P., Miehe C. A modified Gurson-type plasticity model at finite strains: formulation, numerical analysis and phase-field coupling // *Computational Mechanics*. 2018. Vol. 62. P. 815–833. <https://doi.org/10.1007/s00466-017-1530-0> EDN: NXNXUN
13. Hanslo P., Larson Mats G., Larson F. Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem // *Computational Mechanics*. 2015. Vol. 56. No. 1. P. 87–95. <http://doi.org/10.1007/s00466-015-1158-x> EDN: JVDYXD
14. Magisano D., Leonetti L., Garcea G. Koiter asymptotic analysis of multilayered composite structures using mixed solid-shell finite elements // *Composite Struct.* 2016. Vol. 154. P. 296–308. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.046>
15. Magisano D., Leonetti L., Garcea G. Advantages of mixed format in geometrically nonlinear of beams and shells using solid finite elements // *International Journal for Numerical Methods Engineering*. 2017. Vol. 109. Issue 9. P. 1237–1262. <https://doi.org/10.1002/nme.5322>
16. Гуреева Н.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П., Юшкин В.Н. Напряженно-деформированное состояние оболочки вращения при использовании различных формулировок трехмерных конечных элементов // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 5. С. 361–379. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-361-379> EDN: RRVXBB
17. Gureeva N.A., Kiseleva R.Z., Nikolaev A.P. Nonlinear deformation of a solid body on the basis of flow theory and realization of fem in mixed formulation // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. International Scientific and Practical Conference Engineering. 2019. Vol. 675. Article No. 012059. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/675/1/012059> EDN: VDBDCI
18. Гуреева Н.А., Арьков Д.П. Реализация деформационной теории пластичности в расчетах плосконапряженных пластин на основе МКЭ в смешанной формулировке // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. 2011. № 2. С. 12–15. EDN: NUPEON
19. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Москва : Машиностроение, 1975. 400 с. EDN: VLPSRF

Динамическое нагружение стержневых систем с конечным числом степеней свободы

С.П. Иванов^{1,2}, О.Г. Иванов¹, А.С. Иванова¹

¹ Поволжский государственный технологический университет, Йошкар-Ола, Российская Федерация

² Марийский государственный университет, Йошкар-Ола, Российская Федерация

✉ IvanovSP@volgatech.net

Поступила в редакцию: 1 февраля 2025 г.

Доработана: 28 марта 2025 г.

Принята к публикации: 2 апреля 2025 г.

Аннотация. Исследование устойчивости систем с конечным числом степеней свободы под действием динамических нагрузок является одной из важных проблем строительной механики. Такие системы находят широкое применение в механических системах, используемых в различных областях: строительстве, машиностроении, авиастроении, кораблестроении, приборостроении, биомеханике. При сейсмических воздействиях необходимо проверять на динамическую устойчивость элементы конструкции здания. Вопрос определения критического состояния систем с конечным числом степеней свободы при действии динамических нагрузок решается в данной работе. Представлена методика расчета на динамическую устойчивость стержневых систем с одной и двумя степенями свободы. Рассмотрены стержневые системы с конечным числом степеней свободы, на которые в продольном направлении действует динамическая сжимающая нагрузка. В шарнирах стержни соединены между собой упругими пружинами, которые противодействуют потере устойчивости системы. Для решения задачи составлены обыкновенные дифференциальные уравнения, а именно составляется уравнение для системы с одной степенью свободы и система двух уравнений для трехстержневой системы (система с двумя степенями свободы). Полученные уравнения позволяют исследовать устойчивость системы с конечным числом степеней свободы. Для решения задачи используется численный метод. Численное интегрирование уравнений выполнено методом Рунге — Кутты. По результатам расчетов построены графики зависимости отклонения стержневых систем от действующей динамической нагрузки. Изменение «времени t_1 » показывает величину динамического коэффициента k_d . Исследовано влияние на критерии динамической устойчивости стержневой системы с одной и двумя степенями свободы, параметра скорости изменения сжимающей нагрузки, начального несовершенства.

Ключевые слова: устойчивость, стержневая система, сжимающая нагрузка

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов: Иванов С.П. — научное руководство, обоснование и концепция исследования, рецензирование и редактирование, выводы; Иванов О.Г. — выполнение численных экспериментов, редактирование, написание текста; Иванова А.С. — обзор литературы, обработка данных экспериментов.

Для цитирования: Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С. Динамическое нагружение стержневых систем с конечным числом степеней свободы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 2. С. 128–137. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-128-137>

Иванов Сергей Павлович, доктор технических наук, заведующий кафедрой сопротивления материалов и прикладной механики, Поволжский государственный технологический университет, Российская Федерация, 424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д. 3; профессор кафедры электро-механики, Марийский государственный университет, Российская Федерация, 424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д. 1; eLIBRARY SPIN-код: 5963-6739, ORCID: 0000-0002-5206-9574; e-mail: IvanovSP@volgatech.net

Иванов Олег Геннадьевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов и прикладной механики ПГТУ, Поволжский государственный технологический университет, Российская Федерация, 424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д. 3; eLIBRARY SPIN-код: 5052-9077, ORCID: 0009-0005-2401-6423; e-mail: IvanovOG@volgatech.net

Иванова Анастасия Сергеевна, старший преподаватель, кафедра сопротивления материалов и прикладной механики ПГТУ, Поволжский государственный технологический университет, Российская Федерация, 424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д. 3; eLIBRARY SPIN-код: 9568-3451, ORCID: 0009-0005-3787-5067; e-mail: IvanovaAS@volgatech.net

© Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С., 2025



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Dynamic Loading of Bar Systems with a Finite Number of Degrees of Freedom

Sergei P. Ivanov^{1,2}, Oleg G. Ivanov¹, Anastasia S. Ivanova¹

¹ Volga Region State Technological University, Yoshkar-Ola, Russian Federation

² Mari State University, Yoshkar-Ola, Russian Federation

✉ IvanovSP@volgatech.net

Received: February 1, 2025

Revised: March 28, 2025

Accepted: April 2, 2025

Abstract. The study of the stability of systems with a finite number of degrees of freedom under the influence of dynamic loads is an important problem of structural mechanics. Such systems are widely used in mechanical systems in various fields: construction, mechanical engineering, aircraft construction, shipbuilding, instrument engineering, and biomechanics. In case of seismic impacts, it is necessary to check the building's structural elements for dynamic stability. The issue of determining the critical state of systems with a finite number of degrees of freedom under dynamic loads is solved in this paper. The article presents a method for analyzing the dynamic stability of bar systems with one and two degrees of freedom. Bar systems with a finite number of degrees of freedom, which are subjected to a dynamic compressive load in the longitudinal direction, are considered. In the hinges, the bars are connected by elastic springs that counteract the instability of the system. To solve the problem, ordinary differential equations are composed. One equation is composed for a single-degree-of-freedom system and a system of two equations for a three-bar system (a two-degree-of-freedom system). The obtained equations allow to study the stability of a system with a finite number of degrees of freedom. Numerical method is used to solve the problem. Numerical integration of the equations is performed by the Runge — Kutta method. Based on the calculation results, graphs of the relationships between the deflection of the bar systems and the acting dynamic load are constructed. The change in the “ t_1 time” shows the value of the dynamic coefficient k_d . The influence of the parameter of the rate of change of the compressive load and the initial imperfection on the criteria of dynamic stability of bar systems with one and two degrees of freedom is investigated.

Keywords: stability, bar system, compressive load

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution: *Ivanov S.P.* — supervision, rationale, conceptualization, review and editing, conclusions; *Ivanov O.G.* — numerical experiments, editing, writing the text; *Ivanova A.S.* — literature review, experiment data processing.

For citation: Ivanov S.P., Ivanov O.G., Ivanova A.S. Dynamic loading of bar systems with a finite number of degrees of freedom. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(2):128–137. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-128-137>

1. Введение

Как систему с конечным числом степеней свободы можно рассматривать механическую стержневую систему, если жесткость стержней значительно превышает жесткость упругих опор. Роль упругих пружин могут выполнять различные стержневые системы (балки, рамы, фермы как статически определимые, так и статически неопределимые), имеющие конечную жесткость. При наличии большой скорости нагружения элементы стержня не успевают переместиться в направлении, перпендикулярном к оси стержня. На основании этого сжимающее усилие может достигнуть критической величины и даже превысить ее в несколько раз, раньше, чем отклонения достигнут заметных величин. Под действием динамических нагрузок рассматривалась устойчивость пластинчатых систем в [1–3]. При действии продольной нагрузки на стержневую систему с промежуточными упругими опорами возникает задача устойчивости систем с конечным числом степеней свободы, а при действии нагрузки быстро изменяющейся во времени ставится задача динамической устойчивости.

Sergei P. Ivanov, Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Materials Resistance and Applied Mechanics, Volga State University of Technology, 3 Lenin Sq, 424000, Yoshkar-Ola, Russian Federation; Professor of the Department of Electrical Mechanics, Mari State University, 1 Lenin Sq, 424000, Yoshkar-Ola, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5963-6739, ORCID: 0000-0002-5206-9574; e-mail: IvanovSP@volgatech.net

Oleg G. Ivanov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Materials Resistance and Applied Mechanics, Volga State University of Technology, 3 Lenin Sq, 424000, Yoshkar-Ola, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5052-9077, ORCID: 0009-0005-2401-6423; e-mail: IvanovOG@volgatech.net

Anastasia S. Ivanova, Senior Lecturer of the Department of Materials Resistance and Applied Mechanics, Volga State University of Technology, 3 Lenin Sq, 424000, Yoshkar-Ola, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9568-3451, ORCID: 0009-0005-3787-5067; e-mail: IvanovaAS@volgatech.net

Устойчивость геометрически и физически нелинейных цилиндрических оболочек при действии локальных поперечных динамических нагрузок различных типов была исследована в [4–7]. Устойчивость стержневых систем рассматривалась в [8–12]. В [13] изложены результаты численного анализа динамической потери устойчивости нелинейно-деформируемых сетчатых пластин из композиционного материала. Статическая и динамическая устойчивость пластин рассматривалась в [14–17]. Вопросам динамической и статической устойчивости стержней, пластин и оболочек посвящены работы иностранных авторов [18–23]. Поведение сжатых стержневых систем с конечным числом степеней при внезапном нагружении рассматривалось А.В. Александровым, В.Д. Потаповым, В.Б. Зылевым¹. Дальнейшая разработка методики расчета на динамическую устойчивость стержневых систем с конечным числом степеней свободы является актуальной задачей.

Цель исследования — разработка методики расчета на динамическую устойчивость стержневых систем с конечным числом степеней свободы.

2. Постановка задачи

1. Рассмотрим известную статическую задачу устойчивости стержневой системы с одной степенью свободы (рис. 1) при действии продольной статической силы $P(t) = P$. Данную задачу можно решить тремя способами: статическим, энергетическим и динамическим.

Статическая величина критической силы составляет

$$P_{кр} = r/l, \quad (1)$$

где r — жесткость опорной пружины, характеризует величину момента, возникающего в основании при повороте опорного сечения θ на единицу.

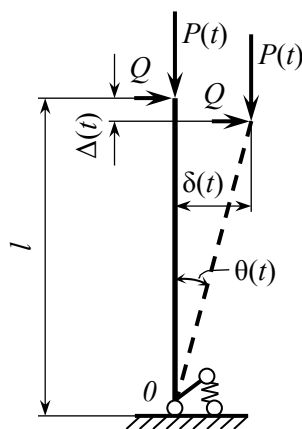


Рис. 1. Схема действия нагрузки на систему с одной степенью свободы

И с т о ч н и к: выполнено С.П. Ивановым, О.Г. Ивановым

Figure 1. Load diagram of the system with one degree of freedom

S o u r c e: made by S.P. Ivanov, O.G. Ivanov

Рассмотрим динамическое нагружение продольной силой $P(t)$, зависящей от времени t (рис. 1). Возможное движение системы характеризуется поворотом стержня относительно опорной точки O . Нелинейное дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = P(t)l \sin\theta - r\theta + Ql \cos\theta, \quad (2)$$

¹ Александров А.В., Потапов В.Д., Зылев В.Б. Строительная механика : в 2 кн. Кн. 2 : Динамика и устойчивость упругих систем: учеб. пособие для вузов. Москва : Высшая школа, 2008. 384 с.

где θ — угол поворота стержня, $I = ml^3/3$ — момент инерции массы m стержня относительно опорной точки O , Q — малая величина поперечной нагрузки, приложенной к верхней точке стержня для учета начального несовершенства.

Сжимающая нагрузка зависит от времени t в следующей форме:

$$P(t) = kt, \quad (3)$$

где k измеряется в кН/с, характеризует скорость изменения сжимающей нагрузки.

Введем новый параметр времени

$$t_1 = \frac{P(t)}{P_{кр}} = \frac{kt}{P_{кр}}. \quad (4)$$

Запишем уравнение (1) через новый параметр (4), используя правило замены переменных в дифференциальных выражениях

$$\frac{1}{S_1} \frac{d^2\theta}{dt_1^2} = (t_1 \sin \theta - \theta) + \frac{Q}{P_{кр}} \cos \theta, \quad (5)$$

где S_1 — величина, учитывающая скорость изменения сжимающей нагрузки и равная

$$S_1 = \frac{P_{кр}^3 l}{Ik^2} = \frac{r^3}{Il^2 k^2} = 3 \frac{r^3}{ml^5 k^2}. \quad (6)$$

S_1 обратно пропорциональна величине k^2 .

2. Перейдем к рассмотрению системы с двумя степенями свободы (рис. 2). Из решения статической задачи получаем два значения критической силы. Минимальная величина $P_{кр} = r/l$ и соответствует симметричной форме потери устойчивости.

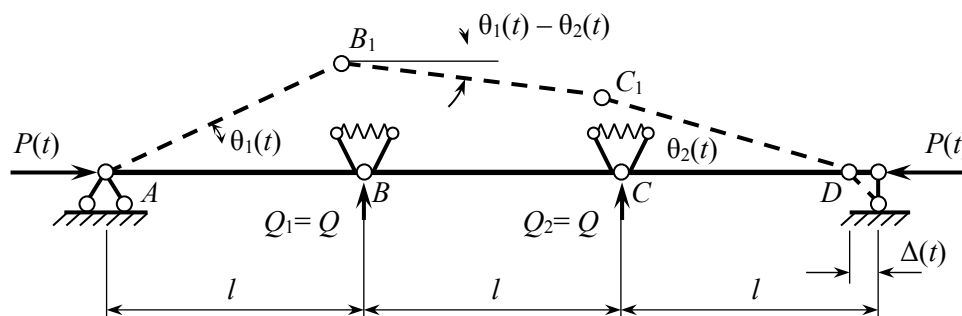


Рис. 2. Схема действия нагрузки на систему с двумя степенями свободы

Источник: выполнено С.П. Ивановым, О.Г. Ивановым

Figure 2. Load diagram of the system with two degrees of freedom

Source: made by S.P. Ivanov, O.G. Ivanov

На систему действует продольная динамическая сила $P(t)$. Составим возможные движения системы, характеризуемые поворотом θ_1 , θ_2 стержней относительно опорных точек A и D . Среднее звено BC совершает движение поворотное и поступательное. Моменты инерции I масс крайних звеньев и I_0 массы среднего звена выражаются по следующим формулам:

$$I = \int_0^l mx^2 dx = \frac{ml^3}{3}, \quad I_0 = \int_{-l/2}^{l/2} mx^2 dx = \frac{ml^3}{12}. \quad (7)$$

Запишем уравнения движения стержневой системы с учетом геометрической нелинейности:

$$4I \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + I \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -[5r\theta_1 - 2P(t)l \sin \theta_1] + [4r\theta_2 - P(t)l \sin \theta_2] + Ql \cos \theta_1,$$

$$I \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + 4I \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = [4r\theta_1 - P(t)l \sin \theta_1] - [5r\theta_2 - 2P(t)l \sin \theta_2] + Ql \cos \theta_2, \quad (8)$$

здесь r — жесткости пружин, действующие в шарнирах B и C ; $P(t)$ — динамическая нагрузка определяется по формуле (3).

Поделив первое и второе уравнения (8) на $P_{кр}$ и вводя новый параметр времени t_1 по формуле (4), получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{S_2} \frac{d^2\theta_1}{dt_1^2} = (3t_1 \sin \theta_1 - 8\theta_1) + (7\theta_2 - 2t_1 \sin \theta_2) + \frac{Q}{P_{кр}} \cos \theta_1,$$

$$\frac{1}{S_2} \frac{d^2\theta_2}{dt_1^2} = (7\theta_1 - 2t_1 \sin \theta_1)\theta_1 + (3t_1 \sin \theta_2 - 8\theta_2) + \frac{Q}{P_{кр}} \cos \theta_2, \quad (9)$$

где

$$S_2 = \frac{6P_{кр}^3}{5mlk^2} = \frac{6r^3}{5ml^5k^2}. \quad (10)$$

Начальное несовершенство учитывалось малыми величинами поперечных нагрузок $Q^* = Q/P_{кр}$, прикладываемых к шарнирам B и C .

3. Примеры реализации задач

1. Дифференциальное уравнение (5) реализовывалось численным методом Рунге — Кутты. По результатам расчета на рис. 3 представлены графики изменения угла θ от изменения динамической нагрузки $t_1 = P(t)/P_{кр}$.

Проанализируем результаты, представленные на рис. 3. Из сравнения графиков 1 и 2 видно, что при одинаковой скорости изменения нагрузки $S_1 = 0,1$, но разной величины $Q^* = 0,01$ и $Q^* = 0,02$ более быстрый рост угла θ наблюдается при большей величине $Q^* = 0,02$. С увеличением скорости изменения динамической нагрузки $S_1 = 0,05$ при тех же значениях $Q^* = 0,02$ и $0,01$ кривые 3 и 4 смещаются правее. Так, при отклонении стержня с угла $\theta = 0,07$ рад. наблюдается очень быстрый рост кривых 1 и 2, 3 и 4. Из графиков 1 и 2, 3 и 4 следует: при $\theta = 0,04$ рад. величина t_1 составляет соответственно 5 и 6; 7 и 8. Это значит, что при увеличении скорости действия нагрузки увеличивается величина динамической нагрузки, которая превышает статическую критическую силу в несколько раз.

2. Система дифференциальных уравнений (8) интегрировалась численным методом. Начальное несовершенство учитывалось нагрузкой $Q^* = Q/P_{кр}$. Результаты представлены на рис. 4.

Рассматривая график 1, видно, что при $S_2 = 0,2$ и $Q^* = 0,2$ кривая 1 зависимости $\theta — t_1$ резко начинает уходить вверх, начиная с угла $\theta = 1$ рад, величина $t_1 \approx 5$. Кривые 2 и 3 достаточно близко проходят друг от друга. При одинаковых скоростях $S_2 = 0,1$, но разных величин $Q^* = 0,2$ и $0,3$ у графика 2 начинается более быстрый рост угла θ при $t_1 \approx 6$. Принимая за критерий $\theta = 1$, у всех кривых 1–4 наблюдается асимптотический рост угла θ , соответственно имеем значения $t_1 = 5; 5,93; 6,5; 7,42$. Это значит, что при этих значениях кривые начинают резко уходить вверх. Так, при $t_1 = 6$ величина угла $\theta = 2,2$ рад. (продолжение кривой 1).

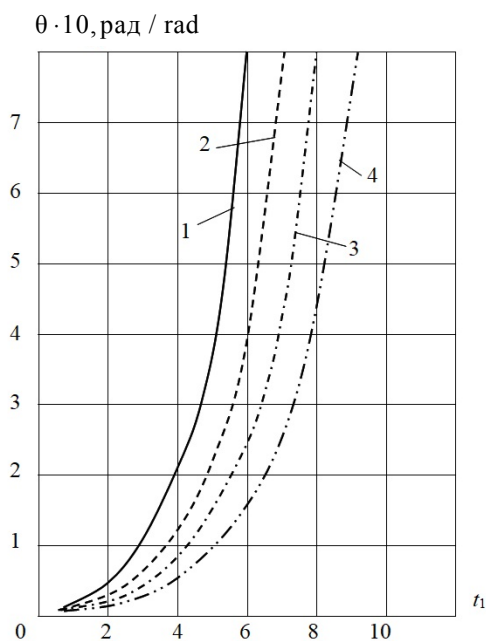


Рис. 3. Графики зависимости угла θ от параметра времени t_1 для системы с одной степенью свободы:

1 — при значениях $S_1 = 0,1$ и $Q^* = 0,02$; 2 — при значениях $S_1 = 0,1$ и $Q^* = 0,01$;
3 — при значениях $S_1 = 0,05$ и $Q^* = 0,02$; 4 — при значениях $S_1 = 0,05$ и $Q^* = 0,01$

И с т о ч н и к: выполнено С.П. Ивановым, О.Г. Ивановым, А.С. Ивановой

Figure 3. Graphs of the relationship between the angle θ and the time parameter t_1 for a system with one degree of freedom:

1 — for values $S_1 = 0.1$ and $Q^* = 0.02$; 2 — for values $S_1 = 0.1$ and $Q^* = 0.01$;
3 — for values $S_1 = 0.05$ and $Q^* = 0.02$; 4 — for values $S_1 = 0.05$ and $Q^* = 0.01$

S o u r c e: made by S.P. Ivanov, O.G. Ivanov, A.S. Ivanova

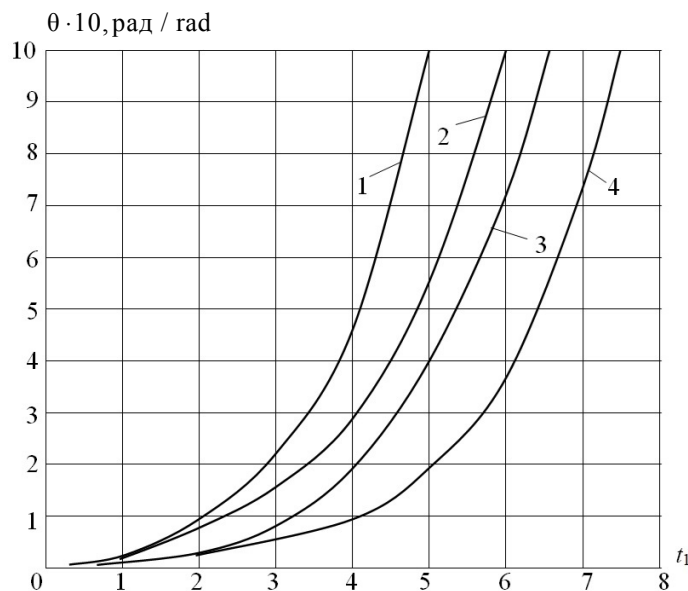


Рис. 4. Графики зависимости углов θ от параметра времени t_1 :

1 — при значениях $S_2 = 0,2$ и $Q^* = 0,2$; 2 — при значениях $S_2 = 0,1$ и $Q^* = 0,3$;
3 — при значениях $S_2 = 0,1$ и $Q^* = 0,2$; 4 — при значениях $S_2 = 0,1$ и $Q^* = 0,1$

И с т о ч н и к: выполнено С.П. Ивановым, О.Г. Ивановым, А.С. Ивановой

Figure 4. Graphs of the relationships between the angles θ and the time parameter t_1 :

1 — at values $S_2 = 0.2$ and $Q^* = 0.2$; 2 — at values $S_2 = 0.1$ and $Q^* = 0.3$;
3 — at values $S_2 = 0.1$ and $Q^* = 0.2$; 4 — at values $S_2 = 0.1$ and $Q^* = 0.1$

S o u r c e: made by S.P. Ivanov, O.G. Ivanov, A.S. Ivanova

На рис. 5 построены графики 1 и 2 при действии сжимающей нагрузки $P(t)$ соответственно на систему с одной и двумя степенями свободы при одинаковых величинах $S = 0,1$ и $Q^* = 0,1$. Из сравнения графиков 1 и 2 видно, что при одинаковых данных угол θ начинает быстрее расти в системе с одной степенью свободы. Так, при $\theta = 1$ рад. величина $t_1 = 5$ (кривая 1) и $t_1 = 7$ (кривая 2). Соотношение между параметрами, учитывающими скорость изменения сжимающей нагрузки, составляет $S_1/S_2 = 2,5$. Параметр k^2 , для обеих стержневых систем будет одинаков при $S_1 = 2,5 \cdot S_2$. Принято следующее обозначение:

$$S = \frac{r^3}{ml^5 k^2}. \quad (11)$$

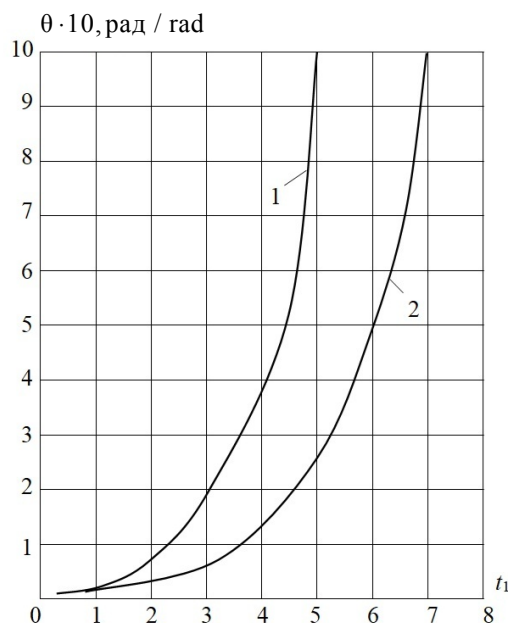


Рис. 5. Диаграммы «угол поворота θ — время t_1 » для сжатых стержневых систем с конечным числом степеней свободы при динамическом нагружении
Источник: выполнено С.П. Ивановым, О.Г. Ивановым, А.С. Ивановой

Figure 5. “Rotation angle θ — time t_1 ” diagrams for compressed bar systems with a finite number of degrees of freedom under dynamic loading
Source: made by S.P. Ivanov, O.G. Ivanov, A.S. Ivanova

4. Заключение

В результате проведенного исследования получены дифференциальные уравнения, описывающие зависимость $\theta - t_1$ при динамическом нагружении для стержневых систем с конечным числом степеней свободы: с одной и двумя степенями свободы.

Следует отметить следующее:

1. Во всех случаях при увеличении скорости нагружения в несколько раз увеличивается динамическая нагрузка по отношению к статической критической силе, что подтверждается расчетами, выполненными А.С. Вольмиром для систем с бесконечным числом степеней свободы. Такой вывод можно сделать, так как систему с бесконечным числом степеней свободы можно заменить системой с конечным числом степеней свободы.

3. При одинаковых скоростях нагружения и одинаковой величине Q^* график зависимости $\theta - t_1$ находится левее для системы с одной степенью свободы по сравнению с графиком для системы с двумя степенями свободы.

Список литературы

1. *Иванов С.П., Иванова А.С.* Приложение вариационного метода В.З. Власова к решению нелинейных задач пластинчатых систем: монография. Йошкар-Ола : ПГТУ, 2015. 248 с. ISBN 978-5-8158-1591 EDN: VRJXVX
2. *Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С.* Устойчивость пластин под действием сдвигающих нагрузок // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2017. № 6. С. 68–73. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-6-68-73> EDN: ZRPHEB
3. *Иванов С.П., Иванова А.С., Иванов О.Г.* Устойчивость геометрически нелинейных пластинчатых систем под действием динамических нагрузок // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 3. С. 219–225. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-219-225> EDN: FVXXHV
4. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. Москва : Наука, 1967. 984 с. <https://djvu.online/file/7kElR8yCOmeCg>
5. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. Москва : Наука, 1972. 432 с. <https://djvu.online/file/nAycMFOD1SE33>
6. *Власов В.З.* Тонкостенные пространственные системы : монография. Москва : Госстройиздат, 1958. 502 с. <https://dwg.ru/dnl/10477>
7. *Лукаш П.А.* Основы нелинейной строительной механики. Москва : Стройиздат, 1978. 204 с. https://techlibrary.ru/b1/2t1u1l1a1z_2x.2h_2w1s1o1p1c2c_1o1f1m1j1o1f1k1o1p1k_1s1t1r1p1j1t1f1m2d1o1p1k_1n1f1w1a1o1j1l1j_1978.pdf
8. *Филин А.П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела : сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. Т. III. Москва : Наука, 1981. 480 с. URL: <https://djvu.online/file/rTZaPLb2PDUM9> (дата обращения: 22.01.2025).
9. *Егоров А.В., Егоров В.Н.* Расчетно-экспериментальное исследование продольной устойчивости конструкции тонкостенного плоского стержня // *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023. № 3. С. 1–16. <http://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-3-2256> EDN: VFTQTU
10. *Языев С.Б., Чепурненко А.С., Аваков А.А.* Численно-аналитический расчет продольного изгиба призматических упругих стержней при действии осевой сжимающей нагрузки с учетом собственного веса // *Вестник МГСУ*, 2021. Т. 16. № 1. С. 30–40. <http://doi.org/10.22227/1997-0935.2021.1.30-40> EDN: FNGVRD
11. *Рзаев Н.С.* Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки из разномодульного материала, лежащей на вязкоупругом основании // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2024. Т. 20. № 3. С. 289–299. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-289-299> EDN: QZUUMZ
12. *Ilgamov M.A.* Bending and stability of a cantilever bar under the action of pressure on its surface and longitudinal force // *Mechanics of Solids*. 2021. Vol. 56. P. 495–504. <http://doi.org/10.3103/S0025654421040087> EDN: INNNKM
13. *Трушин С.И., Журавлева Т.А., Сысоева Е.В.* Динамическая потеря устойчивости нелинейно-деформируемых сетчатых пластин из композиционного материала с различными конфигурациями решетки // *Научное обозрение*. 2016. № 4. С. 44–51. EDN: VXMUOT
14. *Колмогоров Г.Л., Мельникова Т.Е., Азина Е.О.* Применение метода Бубнова-Галеркина для оценки устойчивости анизотропных пластин // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2017. № 4. С. 29–33. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-4-29-33>
15. *Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е.* Численный анализ устойчивости подкрепленных пластин с некротными критическими нагрузками // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2020. Т. 16. № 1. С. 54–61. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-54-61>
16. *Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е.* Геометрически нелинейный расчет на устойчивость подкрепленной пластины с учетом взаимодействия собственных форм выпучивания // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 1. С. 3–18. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18>
17. *Медведский А.Л., Мартыросов М.И., Хомченко А.В., Дедова Д.В.* Численный анализ поведения трехслойной панели с сотовым наполнителем при наличии дефектов под действием динамической нагрузки // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 4. С. 357–365. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-357-365>
18. *Breslavsky I.D., Amabili M., Legrand M.* Physically and geometrically non-linear vibrations of thin rectangular plates // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2014. Vol. 58. P. 30–40. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.08.009> EDN: YDWOYH
19. *Vescovini R., Dozio L.* Exact refined buckling solutions for laminated plates under uniaxial and biaxial loads // *Composite Structures*. 2015. Vol. 127. P. 356–368. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.003>
20. *Nazarimofrad E., Barkhordar A.* Buckling analysis of orthotropic rectangular plate resting on Pasternak elastic foundation under biaxial in-plane loading // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016. Vol. 23. No. 10. P. 1144–1148. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1059528>

21. Srividhya S., Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. Nonlocal nonlinear analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory // *International Journal of Engineering Science*. 2018. Vol. 125. P. 1–22. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.12.006>
22. Shiva K., Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. Nonlocal buckling analysis of laminated composite plates considering surface stress effects // *Composite Structures*. 2019. Vol. 226. Article No. 111216. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111216>
23. Pagani A., Daneshkhah E., Xu X., Carrera E. Evaluation of geometrically nonlinear terms in the large-deflection and post-buckling analysis of isotropic rectangular plates // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2020. Vol. 121. Article No. 103461. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103461> EDN: YWBBVY

References

1. Ivanov S.P., Ivanova A.S. *Application of the variational method of V.Z. Vlasov to solving nonlinear problems of plate systems*: monograph. Yoshkar-Ola: PGTU Publ.; 2015. (In Russ.) ISBN 978-5-8158-1591-9 EDN: VRJXVX
2. Ivanov S.P., Ivanov O.G., Ivanova A.S. Stability of plates under the action of shear loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2017;6:68–73. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-6-68-73> EDN: ZRPHEB
3. Ivanov S.P., Ivanova A.S., Ivanov O.G. Stability of geometrically nonlinear plate systems under the action of dynamic loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Building*. 2020;16(3):219–225. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-219-225> EDN: FVXXHV
4. Volmir A.S. *Stability of deformable systems*. Moscow: Nauka Publ.; 1967. (In Russ.)
5. Volmir A.S. *Nonlinear dynamics of plates and shells*. Moscow: Nauka Publ.; 1972. (In Russ.) <https://djvu.online/file/nAycMFOD1SE33>
6. Vlasov V.Z. *Thin-walled spatial systems*. Moscow: Gosstroizdat Publ.; 1958. (In Russ.)
7. Lukash P.A. *Fundamentals of nonlinear structural mechanics*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1978. (In Russ.) https://techlibrary.ru/b1/2t1u1l1a1z_2x.2h_2w1s1o1p1c2c_1o1f1m1j1o1f1k1o1p1k_1s1t1r1p1j1t1f1m2d1o1p1k_1n1f1w1a1o1j1l1j_1978.pdf
8. Filin A.P. *Applied mechanics of a solid deformable body: Resistance of materials with elements of the theory of continuous media and structural mechanics*. Vol. III. Moscow: Nauka Publ.; 1981. (In Russ.)
9. Egorov A.V., Egorov V.N. Computational and experimental study of longitudinal stability of the thin-walled flat bar structure. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2023;3:1–16. (In Russ.) <http://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-3-2256> EDN: VFTQTU
10. Yazyaev S.B., Chepurnenko A.S., Avakov A.A. Numerical and analytical calculation of the buckling of elastic prismatic rods under the action of axial compressive loading with account for the dead load. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2021;16(1):30–40. (In Russ.) <http://doi.org/10.22227/1997-0935.2021.1.30-40> EDN: FNGVRD
11. Rzaev N.S. Dynamic stability of a cylindrical shell made of a material of different modulus placed on a viscous-elastic foundation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(3):289–299. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-289-299> EDN: QZUUMZ
12. Ilgamov M.A. Bending and stability of a cantilever bar under the action of pressure on its surface and longitudinal force. *Mechanics of Solids*. 2021;56:495–504. <http://doi.org/10.3103/S0025654421040087> EDN: INNNKM
13. Trushin S.I., Zhuravleva T.A., Sysoeva E.V. Dynamic buckling of nonlinearly deformable reticulate plates from composite material with different lattice configurations. *Science Review*. 2016;4:44–51. (In Russ.) EDN: VXMUOT
14. Kolmogorov G.L., Melnikova T.E., Azina E.O. Application of the Bubnov-Galerkin method for assessment of stability of non-isotropic plates. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Building*. 2017;4:29–33. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-4-29-33> EDN: ZHAIYP
15. Manuilov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Numerical analysis of stability of the stiffened plates subjected aliquant critical loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1):54–61. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-54-61> EDN: VAIDVE
16. Manuilov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Geometrically nonlinear analysis of the stability of the stiffened plate taking into account the interaction of eigenforms of buckling. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):3–18. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18> EDN: LLKKIK
17. Medvedskiy A.L., Martirosov M.I., Khomchenko A.V., Dedova D.V. Numerical analysis of the behavior of a three-layer honeycomb panel with interlayer defects under action of dynamic load. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(4):357–365. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-357-365> EDN: UYBBRC

18. Breslavsky I.D., Amabili M., Legrand M. Physically and geometrically non-linear transformations of thin rectangular plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2014;58:30–40. <http://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.08.009> EDN: YDWOYH
19. Vescovini R., Dozio L. Exact refined buckling solutions for laminated plates under uniaxial and biaxial loads. *Composite Structures*. 2015;127:356–368. <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.003>
20. Nazarimofrad E., Barkhordar A. Buckling analysis of orthotropic rectangular plate resting on Pasternak elastic foundation under biaxial in-plane loading. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016;23(10):1144–1148. <http://doi.org/10.1080/15376494.2015.1059528>
21. Srividhya S., Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. Nonlocal nonlinear analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory. *International Journal of Engineering Science*. 2018;125:1–22. <http://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.12.006>
22. Shiva K., Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. Nonlocal buckling analysis of laminated composite plates considering surface stress effects. *Composite Structures*. 2019;226:111216. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111216>
23. Pagani A., Daneshkhah E., Xu X., Carrera E. Evaluation of geometrically nonlinear terms in the large-deflection and post-buckling analysis of isotropic rectangular plates. *Inter-national Journal of Non-Linear Mechanics*. 2020;121:1–11. <http://doi.org/10.21822/2073-6185-2022-49-3-116-122> EDN: XNLIYD

РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-2-138-154

EDN: NQBZIK

Научная статья / Research article

Системы аппроксимирующих функций при использовании вариационных методов для расчета тонкостенных строительных конструкций

В.В. Карпов 

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, *Санкт-Петербург, Российская Федерация*

✉ vvkarpov@lan.spbgasu.ru

Поступила в редакцию: 12 февраля 2025 г.

Доработана: 7 апреля 2025 г.

Принята к публикации: 12 апреля 2025 г.

Аннотация. Исследуется вопрос использования аппроксимирующих функций в задачах расчета тонкостенных строительных конструкций и анализируются требования, которым они должны удовлетворять. Сформулировано правило, позволяющее отличить главные краевые условия от естественных. Показано, что аппроксимирующие функции должны удовлетворять главным краевым условиям, а естественные краевые условия входят в уравнения равновесия и выполняются автоматически при решении краевой задачи. Точность их выполнения зависит от точности решения самой задачи. На примере показано, к каким ошибкам может приводить использование аппроксимирующих функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям, но не удовлетворяющих условиям полноты. Рассмотрены некоторые системы функций, для которых доказано условие полноты в энергетическом пространстве. На примере ортогональных многочленов Лежандра приводится методика формирования аппроксимирующих функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям и условиям полноты системы функций. Показана эффективность использования полученных аппроксимирующих функций при решении краевых задач методом Б. Г. Галеркина.

Ключевые слова: аппроксимация, метод Б.Г. Галеркина, главные краевые условия, естественные краевые условия, полнота функций, многочлены Лежандра, сходимость

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Карпов В.В. Системы аппроксимирующих функций при использовании вариационных методов для расчета тонкостенных строительных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 2. С. 138–154. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-138-154>

Карпов Владимир Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры информационных систем и технологий, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Российская Федерация, 190005, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4; eLIBRARY SPIN-код: 7406-9199, ORCID: 0000-0001-7911-4067; e-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru

© Карпов В.В., 2025



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Systems of Approximating Functions when Using Variational Methods for Calculating Thin-Walled Building Structures

Vladimir V. Karpov 

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russian Federation

✉ vvkarpov@lan.spbgasu.ru

Received: February 12, 2025

Revised: April 7, 2025

Accepted: April 12, 2025

Abstract. The question of the use of approximating functions in the calculation of thin-walled building structures is investigated and the requirements that they must satisfy are analyzed. A rule is formulated that allows one to distinguish between the principal boundary conditions and natural ones. It is shown that the approximating functions must satisfy the principal boundary conditions, while the natural boundary conditions are included in the equilibrium equations and are satisfied automatically when solving a boundary value problem. The accuracy of their fulfillment depends on the accuracy of the solution of the problem itself. An example shows what errors can result from the use of approximating functions that satisfy the specified boundary conditions, but do not satisfy the completeness conditions. Some systems of functions for which the completeness condition in the energy space has been proven are considered. Using the example of Legendre or-thogonal polynomials, a technique is given for forming approximating functions that satisfy the specified boundary conditions and the completeness conditions of a system of functions. The efficiency of using the obtained approximating functions in solving boundary value problems using the Galerkin method is shown.

Keywords: approximation, Galerkin method, principal boundary conditions, natural boundary conditions, completeness of functions, Legendre polynomials, convergence

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

For citation: Karpov V.V. Systems of approximating functions when using variational methods for calculating thin-walled building structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(2):138–154. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-138-154>

1. Введение

Вариационные методы Ритца и Б.Г. Галеркина (полуаналитические методы) находят большое применение при расчетах тонкостенных строительных конструкций (балка, плита, оболочка) [1–4]. Приближенное решение для этих методов берется в виде суммы произведений неизвестных числовых параметров и известных аппроксимирующих функций. Аппроксимирующие функции должны удовлетворять главным краевым условиям. Естественные краевые условия при решении задачи будут удовлетворяться автоматически. Однако если аппроксимирующие функции удовлетворяют еще и естественным краевым условиям, то процесс сходимости приближенного решения к точному ускорится.

По сравнению с методом конечных элементов (МКЭ) применение вариационных методов позволяет для определения функций перемещений получать систему алгебраических уравнений, порядок которой сравнительно мал. А иногда для получения достаточной точности достаточно в разложении искомых функций по аппроксимирующим функциям брать всего один член.

Условие полноты систем аппроксимирующих функций гарантирует сходимость приближенного решения к точному, поэтому применение вариационных методов может быть использовано для обоснования точности решений, полученных МКЭ.

Наиболее часто в качестве аппроксимирующих функций используют тригонометрические функции [5–8]. Они обладают хорошей наглядностью, но для непериодических решений обладают худшей сходимостью, чем алгебраические функции.

Vladimir V. Karpov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Information Systems and Technologies, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 4, 2-nd Krasnoarmeiskaja St, St.Petersburg, 190005, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 7406-9199, ORCID: 0000-0001-7911-4067; e-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru

Описанию различных аппроксимирующих функций посвящено несколько публикаций. Самый полный перечень аппроксимирующих функций, удовлетворяющих самым разнообразным краевым условиям, дается в работе В.З. Власова [9]. В 40–50-х гг. прошлого столетия большую популярность при расчете тонкостенных строительных конструкций получили вариационные методы: метод Б.Г. Галеркина, метод Власова — Канторовича, метод Ритца.

Первоначально для цилиндрических и призматических оболочек В.З. Власов на основе применения функций поперечных колебаний балок разработал аппроксимирующие функции для различных видов граничных условий.

Общий аналитический метод решения краевых задач по теории цилиндрических оболочек открытого профиля основан на применении к интегрированию дифференциальных уравнений оболочки в частных производных фундаментальных функций поперечных колебаний балки. Эти функции в методе В.З. Власова определяются по граничным условиям, заданным на поперечных криволинейных краях оболочки и должны удовлетворять однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 X_n}{\partial \alpha^4} - \lambda_n^4 X_n = 0,$$

где

$$\lambda_n = \frac{Rm_n}{l},$$

и однородным граничным условием, заданным на краях $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_1 = 1/R$.

О.Д. Ониашвили распространил применение вариационного метода на класс пологих оболочек двоякой кривизны, что дает возможность приближенного решения статических и динамических задач при произвольных граничных условиях, заданных на контуре [10]. Рассматривались уравнения в смешанной форме.

Искомые функция напряжений в срединной поверхности оболочки $\Phi(x, y)$ и функция прогиба $W(x, y)$ О.Д. Ониашвили были представлены в виде сумм произведения неизвестных числовых параметров и двух известных функций, одна из которых зависит от переменной x , а вторая зависит от y . И для задания этих функций использовались линейные комбинации фундаментальных функций поперечных колебаний балки, заведомо удовлетворяющих заданным граничным условиям, причем не только главным граничным условиям, но и естественным.

Напомним, что эту методику О.Д. Ониашвили предлагал в 1949 г. Эта методика решения вариационных задач с успехом применяется и сейчас, только ужесточились требования, предъявляемые к аппроксимирующим функциям. Они должны удовлетворять еще и условиям полноты в рассматриваемом энергетическом пространстве. Это условие гарантирует сходимость приближенного решения к точному.

Под вариационным методом в работе О.Д. Ониашвили понимается применение метода Б.Г. Галеркина к уравнениям в смешанной форме.

Для разных форм закрепления краев оболочки выписываются фундаментальные функции (системы функций). Так как принимается

$$\Phi(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} \varphi_{mn};$$

$$W(x, y) = \sum_m \sum_n B_{mn} w_{mn},$$

и, кроме того,

$$\varphi_{mn} = X_n(x) Y_m(y);$$

$$w_{mn} = \chi_n(x) \Psi_m(y),$$

то для различных видов закрепления краев оболочки находятся функции $X_n(x), Y_m(y), \chi_n(x), \Psi_m(y)$ из комбинаций фундаментальных функций

$$Z_n(\alpha) = c_1 \sin(\lambda_n \alpha) + c_2 \cos(\lambda_n \alpha) + c_3 \operatorname{sh}(\lambda_n \alpha) + c_4 \operatorname{ch}(\lambda_n \alpha);$$

$$Z_m(\beta) = C_1 \sin(\mu_m \beta) + C_2 \cos(\mu_m \beta) + C_3 \operatorname{sh}(\mu_m \beta) + C_4 \operatorname{ch}(\mu_m \beta).$$

Эти функции являются соответственными решениями дифференциальных уравнений

$$Z_n^{IV}(\alpha) = \alpha_n^4 Z_n(\alpha);$$

$$Z_m^{IV}(\beta) = \mu_m^4 Z_m(\beta).$$

В этих уравнениях α_n и μ_m — некоторые параметры, связанные в задаче о колебаниях балки с частотой собственных колебаний. Произвольные постоянные c и C определяются из условий опирания концов простой балки.

С начала 60-х годов прошлого столетия появились более четкие требования к аппроксимирующим функциям. Они должны удовлетворять главным краевым условиям, любая их последовательность должна быть линейно независимой, и они должны быть полны в рассматриваемом энергетическом пространстве.

Последнее требование обеспечивает сходимость приближенного решения к точному. К работам этого направления можно отнести работы С.Г. Михлина [11], Н.И. Ахиезера [12], И.К. Даугавета [13] и др.

Построению аппроксимирующих функций посвящено несколько публикаций (Г.Р. Коперник и В.В. Петров [14], В.Н. Филатов [15], В.П. Ильин и В.В. Карпов [16], П.А. Бакусов и А.А. Семенов [17] и др.).

В данной работе будет показано, к каким ошибкам может привести использование в качестве аппроксимирующих функций, удовлетворяющих краевым условиям, но не обладающих условием полноты. Основой же данной публикации являются составленные из многочленов Лежандра аппроксимирующие функции для различных краевых условий, удовлетворяющих всем требованиям, предъявляемым к ним.

2. Теория и методы

2.1. Погрешность, к которой приводит использование аппроксимирующих функций, удовлетворяющих краевым условиям, но не обладающих условием полноты

Тригонометрические функции, используемые в строительной механике в качестве аппроксимирующих функций, обладают хорошей наглядностью, но могут не удовлетворять условиям полноты.

В качестве примера рассмотрим расчет балки длиной 4 м, жестко закрепленной на концах и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки q .

Уравнение равновесия такой балки примет вид

$$EJW^{IV} - q = 0. \quad (1)$$

Известно точное решение задачи

$$W(x) = \frac{q}{24EJ} (x^4 - 8x^3 + 16x^2).$$

Используя метод Б.Г. Галеркина, найдем приближенное решение уравнения (1) при краевых условиях

$$W(0) = W'(0) = 0; \quad W(4) = W'(4) = 0. \quad (2)$$

Аппроксимирующие функции возьмем в виде

$$(4-x)^2 x^{2+i}; \quad i=0, 1, 2, \dots$$

Такая система функций, как описана в работе С.Г. Михлина [11], является полной в рассматриваемом пространстве.

Возьмем первое приближение

$$W(x) = W_1 (4-x)^2 x^2.$$

В соответствии с методом Б.Г. Галеркина для определения W_1 имеем уравнение

$$\int_0^4 \left(24W_1 - \frac{q}{EJ} \right) (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx = 0,$$

откуда $W_1 = \frac{q}{24EJ}.$

Следовательно,

$$W(x) = \frac{q}{24EJ} (x^4 - 8x^3 + 16x^2), \quad (3)$$

что совпадает с точным решением

$$W(0) = W(4) = 0; \quad W(2) = 0,666 \cdot \frac{q}{EJ}.$$

Найдем вторую производную $W(x)$, которая выражает изгибающий момент в балке и является важной характеристикой ее НДС:

$$W''(x) = \frac{q}{24EJ} (12x^2 - 48x + 72). \quad (4)$$

Теперь

$$W''(0) = W''(4) = 3 \cdot \frac{q}{EJ}, \quad W''(2) = \frac{q}{EJ}. \quad (5)$$

В строительной механике для расчета плит и оболочек часто используются в качестве аппроксимирующих функций тригонометрические функции. Так, при жестко закрепленных концах при $x=0$, $x=4$ используются функции

$$\sin^2 \frac{(2i-1)\pi x}{4}.$$

Эти аппроксимирующие функции не обладают условием полноты, но удовлетворяют краевым условиям (2).

Возьмем первое приближение

$$W(x) = W_1 \sin^2 \frac{\pi x}{4}. \quad (6)$$

В этом случае приближенное решение будет иметь вид

$$W(x) = \frac{q}{EJ} \frac{64}{\pi^4} \sin^2 \frac{\pi x}{4}.$$

Здесь

$$W(0) = W(4) = 0; \quad W(2) = 0,657 \cdot \frac{q}{EJ},$$

что близко к точному решению.

Найдем вторую производную от полученного решения:

$$W''(x) = \frac{q}{EJ} \frac{8}{\pi^2} \cos \frac{2\pi x}{4}. \quad (7)$$

Теперь

$$W''(0) = W''(4) = 0,81 \cdot \frac{q}{EJ}; \quad W''(2) = -0,81 \cdot \frac{q}{EJ}, \quad (8)$$

что существенно отличается от точного решения.

Таким образом, применение тригонометрических функций, не обладающих условиями полноты, при расчете строительных конструкций вариационными методами, при кажущейся высокой точности в значениях перемещений, в моментах может привести к существенным ошибкам.

2.2. Аппроксимирующие функции, составленные из многочленов Лежандра

Как уже говорилось ранее, полнота системы аппроксимирующих функций гарантирует сходимость приближенного решения, полученного вариационными методами Ритца или Б.Г. Галеркина, к точному решению.

Полнота системы функций $\{\sin \pi j \eta\}$, $j = 1, 2, \dots$ доказана в работе Н.И. Ахиезера [12], системы функций $\{\omega(\eta) \eta^{j-1}\}$; $j = 1, 2, \dots$ в работе Л.В. Канторовича и В.И. Крылова [18], системы функций

$$\left\{ \sqrt{2j+1} \int_0^\eta (\eta-t) P_j(2t-1) dt \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где $P_j(\eta)$ — многочлены Лежандра, в работе С.Г. Михлина [11].

В работе Н.К. Даугавета [13] показано, что аппроксимация многочленами непериодических функций дает более быструю сходимость по сравнению с тригонометрической аппроксимацией.

Сконструируем системы аппроксимирующих функций из алгебраических многочленов для некоторых видов граничных условий. Наиболее удобными для этой цели являются многочлены Лежандра [19; 21], образующие на отрезке $[-1, 1]$ полную систему функций. В [21] описаны многочлены Лежандра, заданные на отрезке $[0, 1]$ и образующие на нем полную систему функций.

В работе Д.С. Кузнецова¹ приводятся многочлены Лежандра $P_n(x)$, заданные на отрезке $[-1, 1]$ и равные 1 или -1 на концах отрезка. Эти полиномы определяются формулой Родрига

¹ Кузнецов Д.С. Специальные функции. Москва : Высшая школа, 1962. 249 с.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right).$$

Также многочлены Лежандра в качестве аппроксимирующих функций используются в работах [22–27].

Г. Корн и Т. Корн приводят рекуррентную формулу² для определения ортогональных многочленов Лежандра

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) + \frac{x^2 - 1}{n+1} \cdot \frac{dP_n(x)}{dx}. \quad (10)$$

Эти многочлены заданы на отрезке $[-1, 1]$ и на концах отрезка принимают значения 1 или -1 . Эти многочлены образуют на отрезке $[-1, 1]$ полную систему функций. Вот некоторые из них:

$$\begin{aligned} P_0 = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{3}(4x^2 - 1); \quad P_3(x) = 2x^3 - x; \quad P_4(x) = \frac{1}{5}(16x^4 - 12x^2 + 1); \\ P_5(x) = \frac{1}{3}(16x^5 - 16x^3 + 3x); \quad P_6(x) = \frac{16}{3} \left(\frac{11}{6}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{23}{32}x^2 - \frac{1}{32} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Будем рассматривать смещенные многочлены Лежандра

$$\bar{P}_n(x) = P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x); \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Эти многочлены будут равны нулю при $x = -1$ и $x = 1$. Получим некоторые из них:

$$\begin{aligned} \bar{P}_2(x) = \frac{1}{3}(4x^2 - 4); \quad \bar{P}_3(x) = 2x^3 - 2x; \quad \bar{P}_4(x) = \frac{1}{15}(48x^4 - 56x^2 + 8); \\ \bar{P}_5(x) = \frac{1}{3}(16x^5 - 22x^3 + 6x); \quad \bar{P}_6(x) = \frac{16}{3} \left(\frac{11}{6}x^6 - \frac{44}{15}x^4 + \frac{187}{160}x^2 - \frac{11}{160} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Перейдем от отрезка $[-1, 1]$ к отрезку $[0, 1]$, сделав замену $\xi = \frac{x+1}{2}$ или $x = 2\xi - 1$. Теперь многочлены примут вид

$$\begin{aligned} \bar{P}_2(\xi) = \frac{1}{3}(4(2\xi - 1)^2 - 4) = \frac{16}{3}\xi(\xi - 1); \quad \bar{P}_3(\xi) = 2(8\xi^3 - 12\xi^2 + 4\xi) = 8\xi(2\xi^2 - 3\xi + 1); \\ \bar{P}_4(\xi) = \frac{32}{15}(24\xi^4 - 48\xi^3 + 29\xi^2 - 5\xi); \\ \bar{P}_5(\xi) = \frac{8}{3}(64\xi^5 - 160\xi^4 + 138\xi^3 - 47\xi^2 + 5\xi); \\ \bar{P}_6(\xi) = \frac{16}{3} \left(\frac{11 \cdot 64}{6}\xi^6 - \frac{11 \cdot 192}{6}\xi^5 + \frac{11792}{30}\xi^4 - \frac{2992}{15}\xi^3 + \frac{5313}{40 \cdot 3}\xi^2 - \frac{1540}{32 \cdot 15}\xi \right). \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 1 приведены графики этих многочленов.

² Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Москва : Наука, 1973. 832 с.

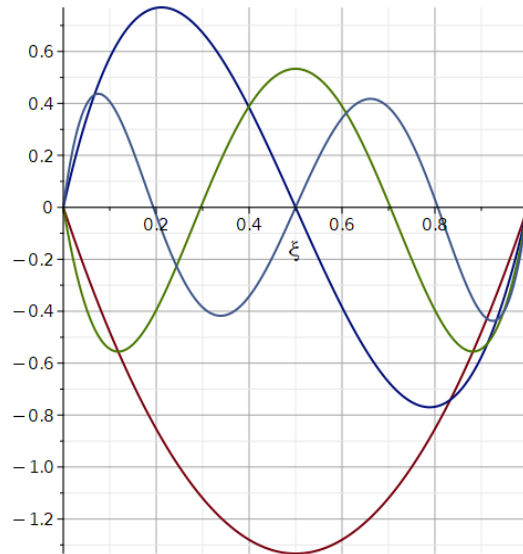


Рис. 1. Смещенные многочлены Лежандра

И с т о ч н и к: выполнено В.В. Карповым

Figure 1. Shifted Legendre Polynomials

S o u r c e: made by V.V. Karpov

Эти многочлены при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ равны нулю. От отрезка $[0, 1]$ можно перейти к отрезку $[0, a]$, если сделать замену

$$\xi = \frac{y}{a}; \quad 0 \leq y \leq a.$$

Например:

$$\bar{P}_2(\xi) = \frac{16}{3}\xi(\xi-1) = \frac{16}{3}\frac{y}{a}\left(\frac{y}{a}-1\right) = \frac{16}{3a^2}y(y-a);$$

$$\bar{P}_3(\xi) = 8\xi(2\xi^2-3\xi+1) = 8\frac{y}{a}\left(2\frac{y^2}{a^2}-3\frac{y}{a}+1\right) = \frac{8}{a^3}y(2y^2-3ya+a^2);$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_4(\xi) &= \frac{32}{15}(24\xi^4-48\xi^3+29\xi^2-5\xi) = \frac{32}{15}\left(24\frac{y^4}{a^4}-48\frac{y^3}{a^3}+29\frac{y^2}{a^2}-5\frac{y}{a}\right) = \\ &= \frac{32}{15a^4}(24y^4-48y^3a+29y^2a^2-5ya^3). \end{aligned}$$

Многочлены (14), заданные на отрезке $[0, 1]$ и равные нулю на концах этого отрезка, могут быть использованы для аппроксимации перемещений $U(\xi)$ и $V(\xi)$, если край конструкции закреплён жестко или шарнирно-неподвижно, а для аппроксимации прогиба $W(\xi)$ из них необходимо также сконструировать аппроксимирующие функции, удовлетворяющие заданным краевым условиям.

Теперь из многочленов (14) получим аппроксимирующие функции, удовлетворяющие условиям

$$W(0) = 0; \quad W'(0) = 0; \quad W''(1) = 0; \quad W'''(1) = 0. \quad (15)$$

Эти условия означают, что при $\xi = 0$ край жестко закреплен, а при $\xi = 1$ — свободен.

Рассмотрим $\bar{P}_2(\xi) = \frac{16}{3}\xi(\xi-1)$. Эта функция удовлетворяет условию $W'''(1) = 0$, но и $W'''(0) = 0$, а это не требуется, поэтому примем

$$W_{12}'''(\xi) = \frac{16}{3}(\xi-1).$$

Проинтегрируем это соотношение:

$$W_{12}''(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^2}{2} - \xi + C_1\right).$$

Используя условие $W_{12}''(1) = 0$, найдем $C_1 = 1/2$.

Далее

$$W_{12}'(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{2}\xi + C_2\right).$$

Используя условие $W_{12}'(0) = 0$, найдем $C_2 = 0$.

Далее получим

$$W_{12}(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^4}{24} - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^2}{4} + C_3\right).$$

Используя условие $W_{12}(0) = 0$, найдем $C_3 = 0$.

Следовательно,

$$W_{12}(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^4}{24} - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^2}{4}\right).$$

Поступая аналогичным способом, и используя многочлены (14), далее получаем

$$W_{13}(\xi) = \frac{4}{15}\xi^5 - \xi^4 + \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{2}{3}\xi^2;$$

$$W_{14}(\xi) = \frac{32}{15}\left(\frac{1}{5}\xi^6 - \frac{4}{5}\xi^5 + \frac{29}{24}\xi^4 - \frac{5}{6}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^2\right);$$

$$W_{15}(\xi) = \frac{8}{3}\left(\frac{32}{105}\xi^7 - \frac{8}{6}\xi^6 + \frac{23}{10}\xi^5 - \frac{47}{24}\xi^4 + \frac{5}{6}\xi^3 - \frac{3}{20}\xi^2\right);$$

$$W_{16}(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{22}{63}\xi^8 - \frac{16 \cdot 11}{15 \cdot 7}\xi^7 + \frac{1474}{15 \cdot 30}\xi^6 - \frac{748}{15 \cdot 15}\xi^5 + \frac{1771}{80 \cdot 12}\xi^4 - \frac{77}{48 \cdot 3}\xi^3 + \frac{11}{80 \cdot 2}\xi^2\right).$$

Аппроксимирующие функции, удовлетворяющие условиям (15), приведены на рис. 2, а.

Используя многочлены (14), получим аппроксимирующие функции для $W(\xi)$, удовлетворяющие краевым условиям при $\xi = 0$ и $\xi = 1$:

$$W_n(0) = W_n''(0) = 0; \quad W_n(1) = W_n''(1) = 0. \quad (16)$$

Эти краевые условия соответствуют шарнирно-неподвижному закреплению краев.

Примем

$$W_{2_1}''(\xi) = \frac{16}{3}(\xi^2 - \xi).$$

Проинтегрируем это соотношение два раза

$$W_{2_1}'(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{2} + C_1\right);$$

$$W_{2_1}(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^4}{12} - \frac{\xi^3}{6} + C_1\xi + C_2\right).$$

Из условия $W_{2_1}(0) = 0$ находим $C_2 = 0$, из условия $W_{2_1}(1) = 0$ находим $C_1 = 1/12$. Следовательно,

$$W_{2_1}(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^4}{12} - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi}{12}\right).$$

Поступая аналогичным способом, используя многочлены (14), далее получаем

$$W_{2_2}(\xi) = 8\left(\frac{\xi^5}{10} - \frac{\xi^4}{4} + \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi}{60}\right);$$

$$W_{2_3}(\xi) = \frac{32}{15}\left(\frac{4}{5}\xi^6 - 12\frac{\xi^5}{5} + 29\frac{\xi^4}{12} - 5\frac{\xi^3}{6} + \frac{1}{60}\xi\right);$$

$$W_{2_4}(\xi) = \frac{8}{3}\left(\frac{32}{21}\xi^7 - 16\frac{\xi^6}{3} + 69\frac{\xi^5}{10} - 47\frac{\xi^4}{12} + \frac{5}{6}\xi^3 + C_1\xi + C_2\right).$$

Аппроксимирующие функции, удовлетворяющие условию (16), приведены на рис. 2, б.

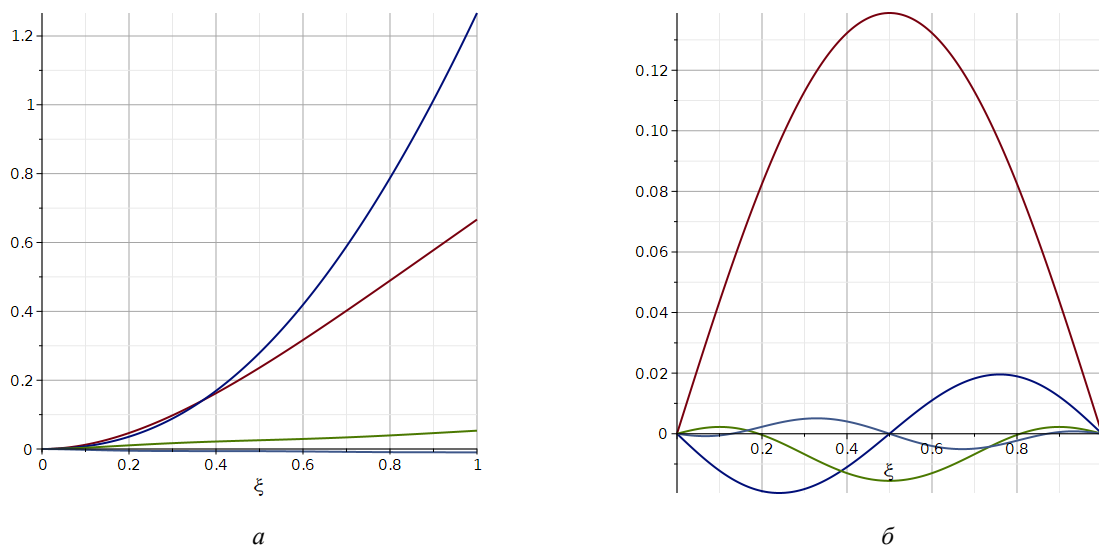


Рис. 2. Аппроксимирующие функции:

a — при жестком (левый край) и свободном (правый край) закреплении; b — при шарнирно-неподвижном закреплении

Источник: выполнено В.В. Карповым

Figure 2. Approximating functions:

a — with fixed support (left edge) and free end (right edge); b — with pinned supports

Source: made by V.V. Karpov

Используя многочлены (14), получим аппроксимирующие функции для $W(\xi)$, удовлетворяющие условиям

$$W(0) = W'(0) = 0; \quad W(1) = W''(1) = 0, \quad (17)$$

то есть при $\xi = 0$ край жестко защемлен, а при $\xi = 1$ закреплен шарнирно-неподвижно.

Примем

$$W_{31}''(\xi) = \frac{1}{\xi}(\bar{P}_2(\xi) + A\bar{P}_3(\xi)) = \frac{16}{3}(\xi - 1) + A \cdot 8(2\xi^2 - 3\xi + 1).$$

При этом условие $W_{31}''(1) = 0$ выполняется. Проинтегрируем $W_{31}''(\xi)$ два раза:

$$W_{31}'(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^2}{2} - \xi\right) + 8A\left(\frac{2}{3}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \xi\right) + C_1;$$

$$W_{31}(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{2}\right) + 8A\left(\frac{2}{12}\xi^4 - \frac{3}{6}\xi^3 + \frac{\xi^2}{2}\right) + C_1\xi + C_2.$$

Из условия $W'(0) = 0$ находим $C_1 = 0$, а из условия $W(0) = 0$ находим $C_2 = 0$. Используя условие $W(1) = 0$, находим A :

$$\frac{16}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) + 8A\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0; \quad A = \frac{4}{3};$$

Окончательно получим

$$W_{31}(\xi) = \frac{8}{9}(2\xi^4 - 5\xi^3 + 3\xi^2).$$

Поступая аналогичным способом, используя многочлены (14), далее получаем

$$W_{32}(\xi) = \frac{24}{7}\xi^5 - \frac{212}{21}\xi^4 + \frac{206}{21}\xi^3 - \frac{22}{7}\xi^2 = \frac{2}{7}\left(12\xi^5 - \frac{106}{3}\xi^4 + \frac{103}{3}\xi^3 - 11\xi^2\right);$$

$$W_{33}(\xi) = \frac{32}{15}\left(\frac{24}{20}\xi^5 - 4\xi^4 + \frac{29}{6}\xi^3 - \frac{5}{2}\xi^2\right) + \frac{56}{45} \cdot \frac{8}{3}\left(\frac{64}{30}\xi^6 - 8\xi^5 + \frac{23}{2}\xi^4 - \frac{47}{6}\xi^3 + \frac{5}{2}\xi^2\right).$$

Аппроксимирующие функции, удовлетворяющие условиям (17), показаны на рис. 3, а.

Если конструкция при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ жестко закреплена, то есть аппроксимирующие функции должны удовлетворять условию $W(0) = W'(0) = 0; \quad W(1) = W'(1) = 0$, то, как было уже сказано ранее, в качестве аппроксимирующих функций, удовлетворяющих условиям полноты [11], можно принять

$$W_i(\xi) = (1 - \xi)^2 \cdot \xi^{2+i}; \quad i = 0, 1, 2, \text{ а также используя многочлены (14)}$$

$$\bar{P}_2(\xi) = \frac{16}{3}\xi(\xi - 1); \quad \bar{P}_3(\xi) = 8\xi(2\xi^2 - 3\xi + 1);$$

$$\bar{P}_4(\xi) = \frac{32}{15}(24\xi^4 - 48\xi^3 + 29\xi^2 - 5\xi);$$

$$\bar{P}_5(\xi) = \frac{8}{3}(64\xi^5 - 160\xi^4 + 138\xi^3 - 47\xi^2 + 5\xi),$$

получим выражения

$$W_{41}(\xi) = \frac{16}{3}\xi^2(\xi-1)^2;$$

$$W_{42}(\xi) = 8\xi^2(2\xi^2 - 3\xi + 1)^2;$$

$$W_{43}(\xi) = \frac{32}{15}(24\xi^4 - 48\xi^3 + 29\xi^2 - 5\xi)^2;$$

$$W_{44}(\xi) = \frac{8}{3}(64\xi^5 - 160\xi^4 + 138\xi^3 - 47\xi^2 + 5\xi)^2.$$

Вид этих аппроксимирующих функций показан на рис. 3, б.

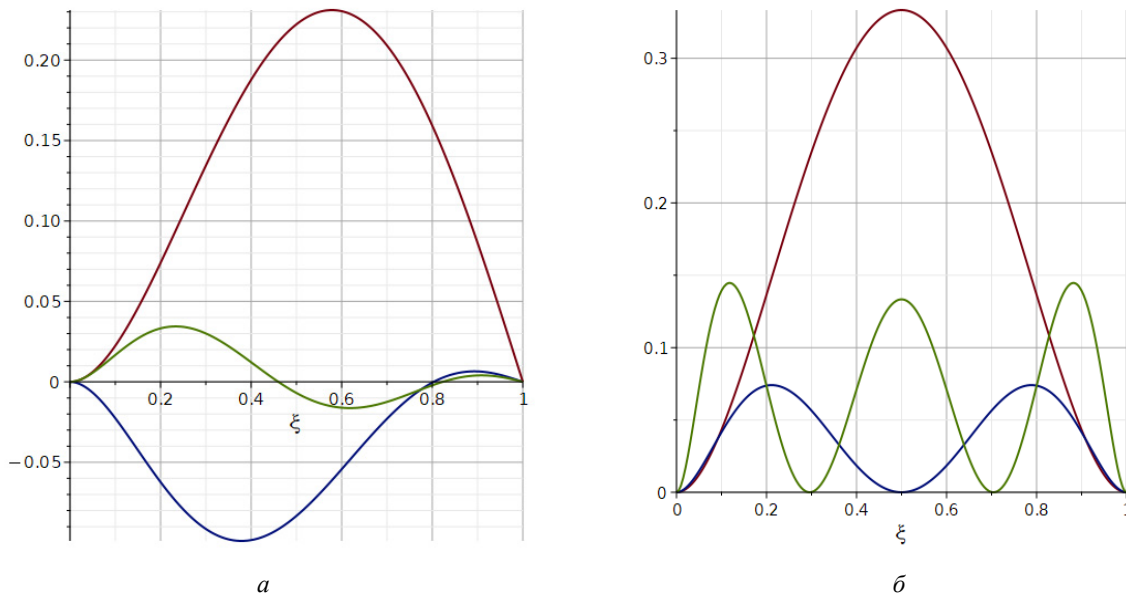


Рис. 3. Аппроксимирующие функции:
а — при жестком (левый край) и шарнирно-неподвижном (правый край) закреплении; б — жестком закреплении
И с т о ч н и к: выполнено В.В. Карповым

Figure 3. Approximating functions:
а — with fixed (left edge) and pinned (right edge) supports; б — with fixed support
S o u r c e: made by V.V. Karpov

3. Результаты и обсуждение

Некоторые примеры использования аппроксимирующих функций, обладающих условием полноты

Теперь проанализируем некоторые аппроксимирующие функции, составленные из многочленов Лежандра, которые образуют полную систему функций в рассматриваемом пространстве.

Эти функции заданы на отрезке $[0, 1]$, поэтому точное решение для балки при соответствующих формах закрепления концов будем находить для отрезка $[0, 1]$.

Рассмотрим шарнирно-неподвижное закрепление на концах балки. Должны выполняться краевые условия

$$W(0) = W''(0) = 0; \quad W(1) = W''(1) = 0. \quad (18)$$

Общее решение уравнения

$$W^{IV} - \frac{q}{EI} = 0 \quad (19)$$

будет иметь вид

$$W(x) = \frac{q}{EI} \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4. \quad (20)$$

При этом

$$\begin{aligned} W'(x) &= \frac{q}{EI} \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3; \\ W''(x) &= \frac{q}{EI} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2; \\ W'''(x) &= \frac{q}{EI} x + C_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Частное решение, удовлетворяющее краевым условиям (18), примет вид

$$W(x) = \frac{q}{EI \cdot 12} \left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x}{2} \right). \quad (22)$$

Аппроксимирующие функции для этого вида закрепления краев конструкции, составленные из многочленов Лежандра, будут иметь вид (первый член системы функций)

$$\varphi_1(x) = \frac{16}{3 \cdot 6} \left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x}{2} \right). \quad (23)$$

Примем

$$W(x) = W_1 \varphi_1(x)$$

и найдем решение уравнения (19). Значение W_1 найдем из условия, откуда

$$\int_0^1 \left(\frac{16}{3 \cdot 6} 12 W_1 - \frac{q}{EI} \right) \left(\frac{16}{18} \left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x}{2} \right) \right) dx = 0.$$

Таким образом,

$$W_1 = \frac{q}{EI \cdot 12} \frac{18}{16}.$$

Следовательно,

$$W(x) = \frac{q}{EI \cdot 12} \left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x}{2} \right), \quad (24)$$

что совпадает с точным решением (22).

Рассмотрим еще один вид закрепления краев конструкции

$$W(0) = W'(0) = 0; \quad W''(1) = W'''(1) = 0. \quad (25)$$

В этом случае частное решение уравнения (19) при краевых условиях (25) примет вид

$$W(x) = \frac{q}{EI} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right). \quad (26)$$

Первый член системы аппроксимирующих функций для этого вида закрепления краев конструкции, составленной из многочленов Лежандра, имеет вид

$$\varphi_1(x) = \frac{16}{3} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right). \quad (27)$$

Примем

$$W(x) = W_1 \varphi_1(x)$$

и найдем решение уравнения (19). Значение W_1 найдем из условия

$$\int_0^1 \left(\frac{16}{3} W_1 - \frac{q}{EI} \right) \frac{16}{3} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right) dx = 0.$$

Отсюда

$$W_1 = \frac{q}{EI} \frac{3}{16}.$$

Следовательно,

$$W(x) = \frac{q}{EI} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right). \quad (28)$$

Функция (28) совпадает с (26), то есть приближенное решение, найденное, когда аппроксимирующие функции составлены из многочленов Лежандра, совпадает с точным решением.

4. Заключение

Представленные исследования показали, что нельзя использовать в качестве аппроксимирующих функции, удовлетворяющие заданным краевым условиям, но не удовлетворяющие условиям полноты. Возможно, такая аппроксимация дает хорошие результаты в перемещениях, но в моментах приводит к существенным погрешностям.

1. Для формирования аппроксимирующих функций наиболее удобными являются ортогональные многочлены Лежандра, для которых доказано выполнение условий полноты.

2. На основе смещенных многочленов Лежандра получены аппроксимирующие функции, удовлетворяющие всем требованиям, предъявляемым к ним.

Список литературы

1. *Salmanizadeh A., Kiani Y., Eslami M.R.* Vibrations of functionally graded material conical panel subjected to instantaneous thermal shock using Chebyshev-Ritz route // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2022. Vol. 144. P. 422–432. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.08.040> EDN: SZOESD
2. *Gao C., Pang F., Cui J., Li H., Zhang M., Du Y.* Free and forced vibration analysis of uniform and stepped combined conical-cylindrical-spherical shells: A unified formulation // *Ocean Engineering*. 2022. Vol. 260. P. 111842. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111842> EDN: CTVJOW
3. *Трепутнева Т.А., Моисеенко М.О., Попов О.Н., Барашков В.Н., Песцов Д.Н.* Напряжённо-деформированное состояние подкреплённых тонкостенных элементов конструкций // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2023. Т. 27. № 1. С. 12–21.

турно-строительного университета. 2021. Т. 23. № 4. С. 69–78. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2021-23-4-69-78> EDN: IYLNVB

4. *Sowiński K.* The Ritz method application for stress and deformation analyses of standard orthotropic pressure vessels // *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 162. P. 107585. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107585> EDN: ALNABX

5. *Amabili M.* Non-linearities in rotation and thickness deformation in a new third-order thickness deformation theory for static and dynamic analysis of isotropic and laminated doubly curved shells // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015. Vol. 69. P. 109–128. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.026>

6. *Bakulin V.N., Nedbay A.Y.* Dynamic stability of a cylindrical shell reinforced by longitudinal ribs of piecewise-constant thickness under axial loading // *Doklady Physics*. 2020. Vol. 65. No. 12. P. 436–441. <https://doi.org/10.1134/S1028335820120034> EDN: EQBNOB

7. *Razov I., Sokolov V., Dmitriev A., Ogorodnova J.* Parametric vibrations of the underground oil pipeline // *E3S Web of Conferences*. 2022. Vol. 363. P. 01038. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236301038>

8. *Waqas H.M., Shi D., Khan S.Z., Helal M., Fathallah E.* Analytical modeling of cross-ply cylindrical composite submersible shell with elastic buckling using first order shear deformation theory // *Frontiers in Materials*. 2022. Vol. 9. P. 1004752. <https://doi.org/10.3389/fmats.2022.1004752> EDN: DGVOQA

9. *Власов В.З.* Избранные труды : в 3 т. Москва : Изд-во АН СССР, 1962. 528 с. URL: <https://thelibrary.net/1240368-vlasov-vz-izbrannye-trudy-v-3-t-moskva> (дата обращения: 20.02.2025).

10. *Онишвили О.Д.* Некоторые динамические задачи теории оболочек. Москва : Изд-во АН СССР, 1957. 199 с.

11. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. Москва : Наука, 1966. 432 с. URL: [https://publ.lib.ru/ARCHIVES/M/MIHLIN_Solomon_Grigor'evich_\(matematik\)/](https://publ.lib.ru/ARCHIVES/M/MIHLIN_Solomon_Grigor'evich_(matematik)/) (дата обращения: 20.02.2025).

12. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. 2-е изд. Москва : Наука, 1965. 407 с. URL: <https://djvu.online/file/XiWds81QZnYso> (дата обращения: 20.02.2025).

13. *Даугавет И.К.* О быстроте сходимости метода Галеркина для обыкновенных дифференциальных уравнений // *Известия вузов. Математика*. 1958. № 5. С. 158–165.

14. *Коперник Г.Р., Петров В.В.* О построении аппроксимирующих функций при расчете гибких пластинок и пологих оболочек вариационными методами // *Механика деформируемых сред*. 1974. Т. 1. С. 117–123. EDN: UNCUVN

15. *Филатов В.Н.* Построение систем аппроксимирующих функций с помощью модификации статического метода В.З. Власова, служащих для решения задач теории гибких пластин. Саратов, СПИ. Деп. ВИНТИ (7427-B85), 1985. 26 с.

16. *Ильин В.П., Карпов В.В.* Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. Ленинград : Стройиздат, 1986. 168 с. EDN: UGDTQF

17. *Бакусов П.А., Семенов А.А.* Устойчивость сегментов тороидальных оболочек при изменении угла отклонения от вертикальной оси // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2017. № 3. С. 17–36. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.3.02> EDN: ZJZRMV

18. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. 5-е изд. Москва, Ленинград : Физматгиз, 1962. 708 с. URL: <https://djvu.online/file/LmWkpF1c2N3Z3> (дата обращения: 20.02.2025).

19. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions: Vol. I. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. 302 p. URL: <https://djvu.online/file/yJMgdNZWJk89f> (дата обращения: 20.02.2025).

20. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions: Vol. II. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. 396 p. URL: <https://djvu.online/file/t7CNNO9bH0KS9> (дата обращения: 20.02.2025).

21. *Люстерник Л.А., Червоненкис О.А., Янпольский А.Р.* Математический анализ. Вычисление элементарных функций. Москва : Физматгиз, 1963. 248 с.

22. *Qu Y., Long X., Wu S., Meng G.* A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia // *Composite Structures*. 2013. Vol. 98. P. 169–191. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.001>

23. *Feng K., Xu J.* Buckling Analysis of Composite Cylindrical Shell Panels by Using Legendre Polynomials Hierarchical Finite-Strip Method // *Journal of Engineering Mechanics*. 2017. Vol. 143. No. 4. P. 04016121. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001181](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001181)

24. *Yshii L.N., Santana R.C., Monteiro F.A.C., Lucena Neto E.* Buckling of Cylindrical Panels by a Ritz Scheme // *Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. Brazil, 2017. <https://doi.org/10.20906/CPS/CILAMCE2017-0613>

25. *Zappino E., Li G., Pagani A., Carrera E., Miguel A.G. de.* Use of higher-order Legendre polynomials for multi-layered plate elements with node-dependent kinematics // *Composite Structures*. 2018. Vol. 202. P. 222–232. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.01.068> EDN: YEGXYT

26. *Li G., Miguel A.G. de, Pagani A., Zappino E., Carrera E.* Finite beam elements based on Legendre polynomial expansions and node-dependent kinematics for the global-local analysis of composite structures // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2019. Vol. 74. P. 112–123. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.11.006> EDN: PCPGRL

27. Raghieb R., Naciri I., Khalfi H., Elmaimouni L., Yu J., Bybi A., Sahal M. Free Vibration Modeling in a Functionally Graded Hollow Cylinder Using the Legendre Polynomial Approach // *Architecture and Engineering*. 2023. Vol. 8. No. 4. P. 82–98. <https://doi.org/10.23968/2500-0055-2023-8-4-82-98> EDN: AJNBMP

References

1. Salmanizadeh A., Kiani Y., Eslami M.R. Vibrations of functionally graded material conical panel subjected to instantaneous thermal shock using Chebyshev-Ritz route. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2022;144:422–432. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.08.040> EDN: SZOESD
2. Gao C., Pang F., Cui J., Li H., Zhang M., Du Y. Free and forced vibration analysis of uniform and stepped combined conical-cylindrical-spherical shells: A unified formulation. *Ocean Engineering*. 2022;260:111842. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111842> EDN: CTVJOW
3. Treputneva T.A., Moiseenko M.O., Popov O.N., Barashkov V.N., Pestsov D.N. Stress-strain state of reinforced thin-walled structural elements. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta — Journal of Construction and Architecture*. 2021;23(4):69–78. (In Russ.) <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2021-23-4-69-78> EDN: IYLNVB
4. Sowiński K. The Ritz method application for stress and deformation analyses of standard orthotropic pressure vessels. *Thin-Walled Structures*. 2021;162:107585. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107585> EDN: ALNABX
5. Amabili M. Non-linearities in rotation and thickness deformation in a new third-order thickness deformation theory for static and dynamic analysis of isotropic and laminated doubly curved shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015;69:109–128. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.026>
6. Bakulin V.N., Nedbay A.Y. Dynamic stability of a cylindrical shell reinforced by longitudinal ribs of piecewise-constant thickness under axial loading. *Doklady Physics*. 2020;65(12):436–441. <https://doi.org/10.1134/S1028335820120034> EDN: EQBNOB
7. Razov I., Sokolov V., Dmitriev A., Ogorodnova J. Parametric vibrations of the underground oil pipeline. *E3S Web of Conferences*. 2022;363:01038. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236301038>
8. Waqas H.M., Shi D., Khan S.Z., Helal M., Fathallah E. Analytical modeling of cross-ply cylindrical composite submersible shell with elastic buckling using first order shear deformation theory. *Frontiers in Materials*. 2022;9:1004752. <https://doi.org/10.3389/fmats.2022.1004752> EDN: DGVOQA
9. Vlasov V.Z. *Selected works*: in 3 volumes. Moscow: USSR Academy of Sciences Publ.; 1962. (In Russ.) Available from: <https://thelibrary.net/1240368-vlasov-vz-izbrannye-trudy-v-3-h-tomah.html> (accessed: 20.02.2025).
10. Oniashvili O.D. *Some dynamic problems of shell theory*. Moscow: USSR Academy of Sciences Publ.; 1957. (In Russ.)
11. Mikhlin S.G. *Numerical implementation of variational methods*. Moscow: Nauka Publ.; 1966. (In Russ.) Available from: [https://publ.lib.ru/ARCHIVES/M/MIHLIN_Solomon_Grigor'evich_\(matematik\)/](https://publ.lib.ru/ARCHIVES/M/MIHLIN_Solomon_Grigor'evich_(matematik)/) (accessed: 20.02.2025).
12. Akhiezer N.I. *Lectures on the theory of approximation*. 2nd Moscow: Nauka Publ.; 1965. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/XiWds81QZnYso> (accessed: 20.02.2025).
13. Daugavet I.K. On the speed of convergence of Galerkin's method for ordinary differential equations. *Izvestiya vuzov. Mathematics*. 1958;(5):158–165. (In Russ.)
14. Kopernik G.R., Petrov V.V. On the construction of approximating functions in the calculation of flexible plates and hollow shells by variational methods. *Mechanics of deformable media*. 1974;1:117–123. (In Russ.) EDN: UNCUVN
15. Filatov V.N. *Construction of systems of approximating functions using a modification of V.Z. Vlasov's static method used to solve problems in the theory of flexible plates*. Saratov, SPI. Dept. VINITI (7427-B85), 1985. (In Russ.)
16. Ilyin V.P., Karpov V.V. *Stability of ribbed shells under large displacements*. Leningrad: Stroyizdat Publ.; 1986. (In Russ.) EDN: UGDTQF
17. Bakusov P.A., Semenov A.A. Stability of toroidal shell segments at variation of a deflection angle. *PNRPU mechanics bulletin*. 2017;(3):17–36. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.3.02> EDN: ZJZRMV
18. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Approximate methods of higher analysis*. 5th ed. Moscow, Leningrad: Fizmatgiz Publ.; 1962. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/LmWkpF1c2N3Z3> (accessed: 20.02.2025).
19. Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*: Vol. I. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. Available from: <https://djvu.online/file/yJMgdNZWJk89f> (accessed: 20.02.2025).
20. Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*: Vol. II. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. Available from: <https://djvu.online/file/t7CNNO9bH0KS9> (accessed: 20.02.2025).
21. Lyusternik L.A., Chervonenkis O.A., Yanpolsky A.R. *Mathematical analysis. Calculation of elementary functions*. Moscow: Fizmatgiz Publ.; 1963. (In Russ.)
22. Qu Y., Long X., Wu S., Meng G. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia. *Composite Structures*. 2013;98:169–191. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.001>

23. Feng K., Xu J. Buckling Analysis of Composite Cylindrical Shell Panels by Using Legendre Polynomials Hierarchical Finite-Strip Method. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017;143(4):04016121. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001181](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001181)
24. Yshii L.N., Santana R.C., Monteiro F.A.C., Lucena Neto E. Buckling of Cylindrical Panels by a Ritz Scheme. *Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. Brazil, 2017. <https://doi.org/10.20906/CPS/CILAMCE2017-0613>
25. Zappino E., Li G., Pagani A., Carrera E., De Miguel A.G. Use of higher-order Legendre polynomials for multi-layered plate elements with node-dependent kinematics. *Composite Structures*. 2018;202:222–232. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.01.068> EDN: YEGXYT
26. Li G., Miguel A.G. de, Pagani A., Zappino E., Carrera E. Finite beam elements based on Legendre polynomial expansions and node-dependent kinematics for the global-local analysis of composite structures. *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2019;74:112–123. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.11.006> EDN: PCPGRL
27. Raghib R., Naciri I., Khalfi H., Elmaimouni L., Yu J., Bybi A., Sahal M. Free Vibration Modeling in a Functionally Graded Hollow Cylinder Using the Legendre Polynomial Approach. *Architecture and Engineering*. 2023;8(4):82–98. <https://doi.org/10.23968/2500-0055-2023-8-4-82-98> EDN: AJNBMP

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-2-155-166

EDN: NRNOQA

Research article / Научная статья

Torses with Two Curves in Intersecting Planes and with Parallel Axes

Sergey N. Krivoshapko 

RUDN University, Moscow, Russian Federation

✉ sn_krivoshapko@mail.ru

Received: December 28, 2024

Revised: February 27, 2025

Accepted: March 7, 2025

Abstract. Methods for designing torse surfaces with two specified plane directrix curves in intersecting planes, which are projected onto the opposite sides of an arbitrary plane quadrilateral base, are studied and implemented. The other two sides of the base coincide with the two generatrix lines. The theoretical construction techniques are illustrated and visualized using computer graphics for four torse surfaces. Parabolas of the second and fourth orders and a hyperbola are chosen as the directrix curves. The geometric and strength studies on torse surfaces and shells that have been conducted by scientists over the past 10 years are briefly described. They show that interest in their study is not fading, but is moving towards computer modeling and comparative strength calculations using the finite element method. The directions in research of various torse, that are desirable to extend to the torse surfaces proposed for implementation, are illustrated.

Keywords: torse surface, arbitrary quadrilateral base, torse design, coplanarity of three vectors, torse implementation, developable helicoid

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

For citation: Krivoshapko S.N. Torses with two curves in intersecting planes and with parallel axes. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(2):155–166. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-155-166>

Торсы с двумя кривыми в пересекающихся плоскостях и с параллельными осями

С.Н. Кривошапко 

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ sn_krivoshapko@mail.ru

Поступила в редакцию: 28 декабря 2024 г.

Доработана: 27 февраля 2025 г.

Принята к публикации: 7 марта 2025 г.

Аннотация. Исследованы и реализованы методики проектирования торсовой поверхности с двумя заданными направляющими плоскими кривыми на пересекающихся плоскостях, которые проецируются на противоположные стороны произвольного плоского четырехугольника. Две другие стороны плана совпадают с двумя образующими прямыми. Теоретические построения проиллюстрированы и визуализированы с помощью компьютерной графики на четырех торсовых поверхностях. В качестве направляющих кривых выбраны параболы второго и четвертого порядков и гипербола. Кратко

Sergey N. Krivoshapko, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2021-6966, ORCID: 0000-0002-9385-3699; e-mail: sn_krivoshapko@mail.ru

Кривошапко Сергей Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2021-6966; ORCID: 0000-0002-9385-3699; e-mail: sn_krivoshapko@mail.ru

© Krivoshapko S.N., 2025



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

описаны геометрические и прочностные исследования по торсовым поверхностям и оболочкам, которые проводились учеными за последние 10 лет. Они показывают, что интерес к их изучению не проходит, но перемещается в сторону компьютерного моделирования и сравнительных расчетов на прочность при помощи метода конечных элементов. Проиллюстрированы направления в исследованиях разнообразных торсов, которые желательно распространить на предлагаемые к внедрению торсовые поверхности.

Ключевые слова: торсовая поверхность, произвольный четырехугольный план, конструирование торсов, компланарность трех векторов, использование торсов, развертывающийся геликоид

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Krivoshapko S.N. Torses with two curves in intersecting planes and with parallel axes // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 2. С. 155–166. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-155-166>

1. Introduction

The studies of geometrical problems of torse surfaces with an edge of regression, which were started by G. Monge, still have not stopped. Torse shells are very convenient for covering large arbitrary areas with rectilinear or curved contour sides [1]. In [2], torse surfaces with rectangular base are considered (Figure 1), while in [3] torse surfaces cover an equilateral trapezoidal area (Figure 2). In both cases, plane curves in the form of second-order algebraic curves and superellipses are located at the ends, and the sides of the horizontal base coincide with the rectilinear generatrices of the projected ruled surface of zero Gaussian curvature (torse surface), which will be neither a cone nor a cylinder (Figures 1, 2).

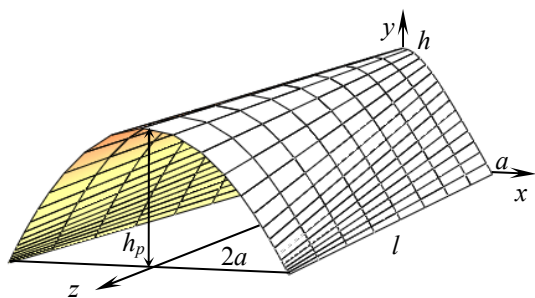


Figure 1. A torse with a parabola and a hyperbola at the ends
Source: compiled by S.N. Krivoshapko

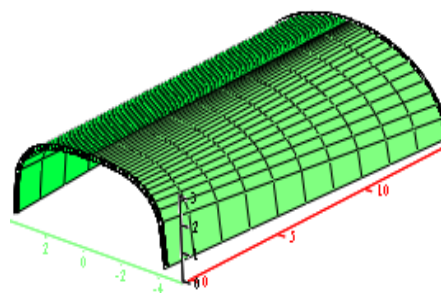


Figure 2. A torse with superellipses at the parallel ends
Source: compiled by S.N. Krivoshapko

In scientific literature, several techniques for designing analytical surfaces with rectangular and trapezoidal bases and with specified plane curves at the ends are proposed, but these techniques yield cylindrical [4] or conical surfaces, cylindroids [5] or kinematic ruled surfaces [6]. And only in works [2; 3] parametric equations of torse surfaces with specified plane directrix curves in parallel planes and with additional imposed geometric requirements are obtained.

The *aim of study* is to obtain parametric equations of torse surfaces with two plane curves lying in intersecting planes and with parallel axes, i.e., developable surfaces covering an arbitrary quadrilateral area. At present, only one torse surface with two parabolas with parallel axes is known, and the parabolas lie in intersecting planes [7].

2. Methods

2.1. Adopted Methodology for Determining Parametric Equations of Midsurfaces of Torse Shells Covering Arbitrary Quadrilateral Areas

Consider the case when the plane directrix curves lie in intersecting planes. Without restricting the generality of the problem, it is assumed that the first curve lies in the xOy plane, and both planes intersect at the Oy axis, then the equations of the curves can be written as

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(u), \quad y_1 = y_1(u), \quad z_1 = 0; \\x_2 &= x_2(v), \quad y_2 = y_2(v), \quad z_2 = z_2(v).\end{aligned}\quad (1)$$

This pair of directrix curves can be expressed in vector form as

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u) \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(v) \quad (2)$$

with respect to origin O , where u, v are the corresponding parameters, then the torse equation can be presented in the form of [7]:

$$\mathbf{r}(u, \lambda) = \mathbf{r}_1(u) + \lambda[\mathbf{r}_2(v) - \mathbf{r}_1(u)], \quad (3)$$

where λ is a dimensionless parameter, $0 \leq \lambda \leq 1$. By adopting

$$\mathbf{r}_2(v) = \mathbf{r}_2[v(u)] = \mathbf{R}(u),$$

and by defining $\mathbf{m}(u) = \mathbf{R}(u) - \mathbf{r}_1(u)$, the torse equation (3) can be written as

$$\mathbf{r}(u, \lambda) = \mathbf{r}_1(u) + \lambda \mathbf{m}(u). \quad (4)$$

By defining the torse in the form of (4), coordinate lines $\lambda = 0$ and $\lambda = 1$ coincide with the directrix curves (1). The relationship between parameters u and v can be obtained from the condition of coplanarity of three vectors:

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') = 0,$$

which in expanded form is written as

$$y_1(u) - uy_1'(u) = y_2(v) - vy_2'(v), \quad (5)$$

by assuming that $x_1(u) = u$, $x_2(v) = v$, $x_1'(u) = 1$, $x_2'(v) = 1$, $z_2 = v \operatorname{tg} \varphi$, $z_2' = \operatorname{tg} \varphi$, φ is the angle between the intersecting planes.

The meaning of condition (5) is that the correspondence between points P_1 and P_2 (Figure 3) involves the requirement that the tangents to the curves at these points intersect at the line of intersection of the planes containing the given curves [8].

Vector equation (4) can be expressed in parametric form:

$$\begin{aligned}x &= x(u, \lambda) = x_1(u)(1 - \lambda) + \lambda x_2[v(u)], \\y &= y(u, \lambda) = y_1(u)(1 - \lambda) + \lambda y_2[v(u)], \\z &= z(u, \lambda) = \lambda z_2[v(u)] = \lambda x_2[v(u)] \operatorname{tg} \varphi.\end{aligned}\quad (6)$$

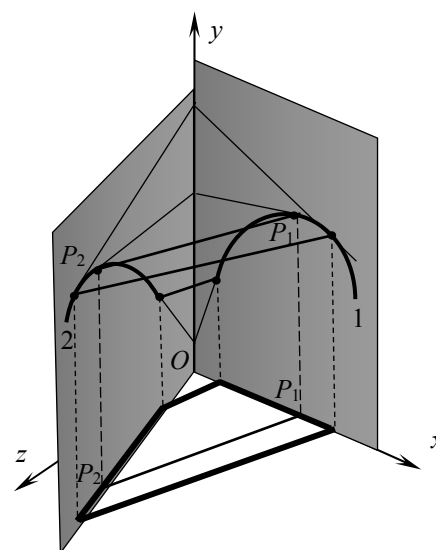


Figure 3. Construction of a torse with curves in intersecting planes
Source: compiled by S.N. Krivoshapko

2.2. Examples of Determining Parametric Equations of Midsurfaces of Torse Shells Covering Arbitrary Quadrilateral Areas

Example 1. Two square parabolas lying in planes intersecting at angle φ are given (Figure 4):

$$\begin{aligned}x_2 &= x_2(v) = v, \quad y_2 = y_2(v) = H \left[1 - (v - c)^2 / (b^2 \cos^2 \varphi) \right], \quad z_2 = z_2(v) = v \operatorname{tg} \varphi. \\x_2 &= x_2(v) = v, \quad y_2 = y_2(v) = H \left[1 - (v - c)^2 / (b^2 \cos^2 \varphi) \right], \quad z_2 = z_2(v) = v \operatorname{tg} \varphi.\end{aligned}\quad (7)$$

The relationship between parameters u and v is determined using formula (5):

$$v^2 + (b^2 \cos^2 \varphi - c^2) = \frac{hb^2 \cos^2 \varphi (u^2 + a^2 - c^2)}{a^2 H},$$

or

$$v = \sqrt{\frac{hb^2 \cos^2 \varphi (u^2 + a^2 - c^2)}{a^2 H} - b^2 \cos^2 \varphi + c^2}. \quad (8)$$

The parametric equations of the sought torse surface (Figure 5) are determined by formulas (6) taking into account relation (8):

$$x = x(u, \lambda) = u(1 - \lambda) + \lambda v;$$

$$y = y(u, \lambda) = h \left[1 - (u - c)^2 / a^2 \right] (1 - \lambda) + \lambda H \left[1 - (v - c)^2 / (b^2 \cos^2 \varphi) \right];$$

$$z = z(u, \lambda) = \lambda v \operatorname{tg} \varphi. \quad (9)$$

The following notation (see Figure 4) is adopted in equation (6): h is the height of the first parabola with respect to the xOz plane, H is the same for the second parabola, c is the distance from axis Oz to the vertical axes of the two parabolas, $2b$ is the span of the second parabola in the xOz plane, $2a$ is the span of the first parabola in the xOz plane, $c - a \leq u \leq c + a$.

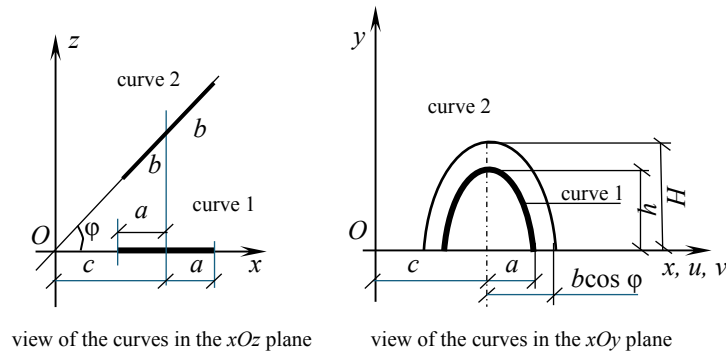


Figure 4. Plane directrix curves in intersecting planes

Source: compiled by S.N. Krivoschapko

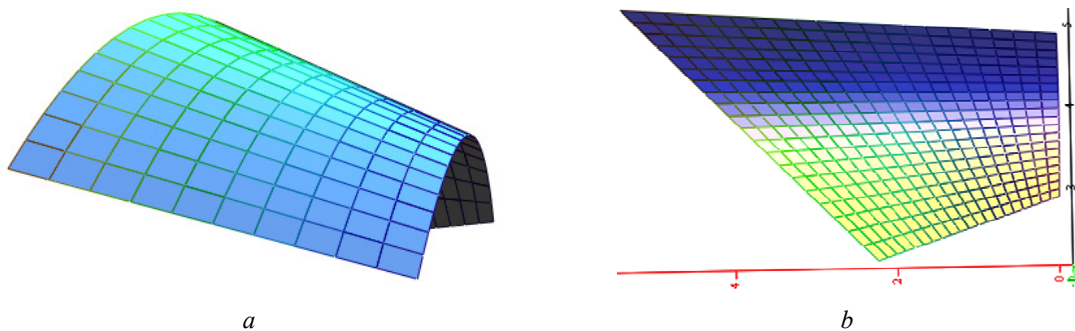


Figure 5. A torse with two parabolas in intersecting planes:

a — general view; b — view in the xOz plane

Source: compiled by S.N. Krivoschapko

Example 2. The two square parabolas, which were considered in the previous example, lie in the planes intersecting at an angle φ , but the vertical axis of the second parabola is located at a distance of $b\cos\varphi$ from the coordinate axis Oz (Figure 6):

$$\begin{aligned}x_1 = x_1(u) = u, \quad y_1 = y_1(u) &= h \left[1 - (u - c)^2 / a^2 \right], \quad z_1 = 0; \\x_2 = x_2(v) = v, \quad y_2 = y_2(v) &= H \left[1 - (v - b\cos\varphi)^2 / (b^2 \cos^2\varphi) \right], \quad z_2 = z_2(v) = v \operatorname{tg}\varphi.\end{aligned}\quad (10)$$

In this case, relationship (5) between parameters u and v allows to obtain:

$$v = \frac{b\cos\varphi}{a} \sqrt{\frac{h(u^2 + a^2 - c^2)}{H}}, \quad (11)$$

and to write the parametric equations of the torse surface (6) in the form:

$$\begin{aligned}x &= x(u, \lambda) = u(1 - \lambda) + \lambda v; \\y &= y(u, \lambda) = h \left[1 - (u - c)^2 / a^2 \right] (1 - \lambda) + \lambda H \left[1 - (v - b\cos\varphi)^2 / (b^2 \cos^2\varphi) \right]; \\z &= z(u, \lambda) = \lambda v \operatorname{tg}\varphi.\end{aligned}\quad (12)$$

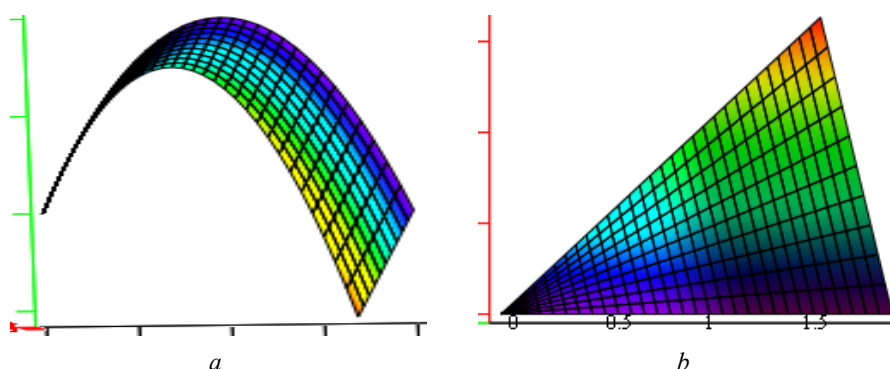


Figure 6. A torse with two parabolas in intersecting planes, but with their axes at different distance from the yOz plane:

a — general view; b — view in the xOz plane

Source: compiled by S.N. Krivoschapko

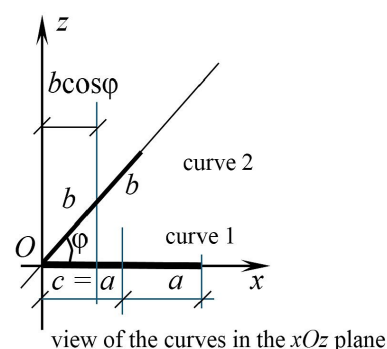


Figure 7. Plane directrix curves in intersecting planes for the 2nd example

Source: compiled by S.N. Krivoschapko

Figure 7 shows the geometrical parameters for example 2, which are used in formulas (10)–(12). For the construction of the surface shown in Figure 6 it is assumed that $a = c = 1$ m, $h = 2$ m, $0 \leq u \leq 2$ m, $0 \leq \lambda \leq 1$, $b = 1$ m.

Example 3. If a biquadratic and a quadratic parabola are placed in intersecting planes (see Figure 4), then

$$\begin{aligned}x_1 = x_1(u) = u, \quad y_1 = y_1(u) &= h \left[1 - (u - c)^4 / a^4 \right], \quad z_1 = 0; \\x_2 = x_2(v) = v, \quad y_2 = y_2(v) &= H \left[1 - (v - c)^2 / (b^2 \cos^2\varphi) \right]; \\z_2 = z_2(v) &= v \operatorname{tg}\varphi.\end{aligned}\quad (13)$$

Relationship (5) between parameters u and v takes the following form:

$$v = \sqrt{\frac{hb^2 \cos^2 \varphi \left[(u-c)^3 (3u+c) + a^4 \right]}{a^4 H}} - b^2 \cos^2 \varphi + c^2. \quad (14)$$

The parametric equations of the sought torse surface (Figure 8) are determined by formulas (6) taking into account relation (14):

$$\begin{aligned} x &= x(u, \lambda) = u(1 - \lambda) + \lambda v; \\ y &= y(u, \lambda) = h \left[1 - (u-c)^4 / a^4 \right] (1 - \lambda) + \lambda H \left[1 - (v-c)^2 / (b^2 \cos^2 \varphi) \right]; \\ z &= z(u, \lambda) = \lambda v \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \quad (15)$$

where $c - a \leq u \leq c + a$, h is the height of the biquadratic parabola above the xOz plane, H is the same for the second order parabola, c is the distance from axis Oz to the vertical axes of the two parabolas, $2b$ is the span of the quadratic parabola in the xOz plane, $2a$ is the span of the biquadratic parabola in the xOz plane (Figure 4).

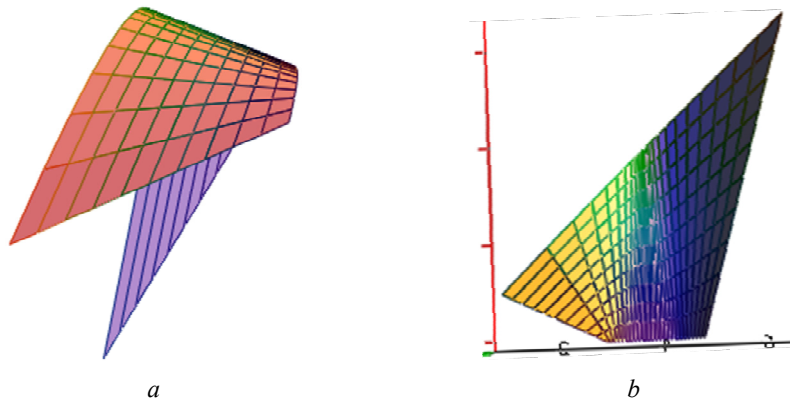


Figure 8. A torse with the second and the fourth orders parabolas in intersecting planes:

a — general view; b — view in the xOz plane

Source: compiled by S.N. Krivoschapko

Example 4. Let a hyperbola and a parabola of the second order with axes parallel to the coordinate axis Oy be located in two intersecting planes (Figure 4):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u) = u, \quad y_1 = y_1(u) = d + h - \sqrt{d^2 + \frac{h(u-c)^2(2d+h)}{a^2}}, \quad z_1 = 0, \\ x_2 &= x_2(v) = v, \quad y_2 = y_2(v) = H \left[1 - (v-c)^2 / (b^2 \cos^2 \varphi) \right], \quad z_2 = z_2(v) = v \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \quad (16)$$

Relationship (5) between parameters u and v takes the following form:

$$v = \sqrt{\frac{b^2 \cos^2 \varphi}{H} \left[d + h - H - \frac{d^2 - hc(u-c)(2d+h)/a^2}{\sqrt{d^2 + \frac{h(u-c)^2(2d+h)}{a^2}}} \right]} + c^2. \quad (17)$$

The constant geometric parameters are shown in Figure 4, the constant parameter d associated with the bisector of the hyperbola is chosen arbitrarily as needed, but $d \neq 0$. When constructing the surface shown in Figure 9, it is assumed that $d = 1$ m.

The parametric equations of the sought torse surface (Figure 9) are determined by formulas (6) taking into account relation (17):

$$x = x(u, \lambda) = u(1 - \lambda) + \lambda v;$$

$$y = y(u, \lambda) = \left[d + h - \sqrt{d^2 + \frac{h(u-c)^2(2d+h)}{a^2}} \right] (1 - \lambda) + \lambda H \left[1 - \frac{(v-c)^2}{b^2 \cos^2 \varphi} \right];$$

$$z = z(u, \lambda) = \lambda v \operatorname{tg} \varphi. \quad (18)$$

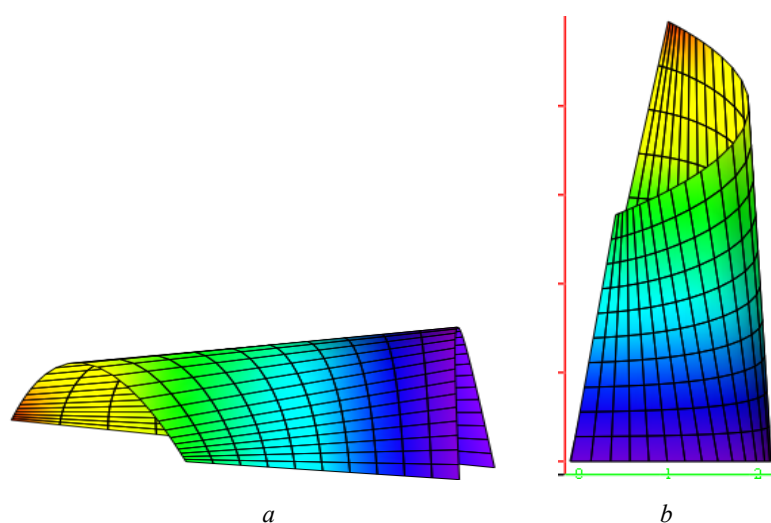


Figure 9. A torse with a parabola and a hyperbola in intersecting planes:

a — general view, b — view in the yOz plane

Source: compiled by S.N. Krivoschapko

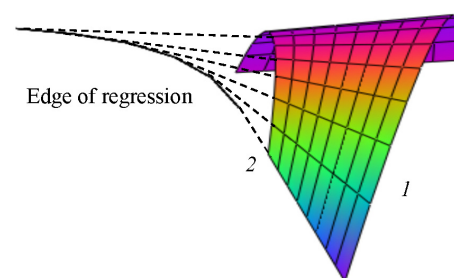


Figure 10. A torse surface with two parabolas in the intersecting planes, formed by tangent lines to its edge of regression

Source: compiled by S.N. Krivoschapko

Example 5. Four examples of finding parametric equations (6) of torse surfaces with specified second-order algebraic curves lying in intersecting planes are presented above. A review of relevant literature on the methods of constructing torse surfaces with curves in intersecting planes has shown that there is only one more publication [7; 9], which studies a torse surface with two parabolas in intersecting planes through the determination of parametric equations of its edge of regression (Figure 10).

This surface is also considered in example 1.

3. Research on Torse Surfaces and Shells Performed in the last 10 Years (2015–2025)

The most complete information on torse surfaces and shells is given in monograph [9] with 386 used sources. This monograph describes the studies on the history of the appearance of the results, geometry, applications, parabolic bending of torse surfaces, and strength analysis of torsos. Research performed up to 2009 is described. More recent new research will be summarized in the paper. As the review of the studies related to torse surfaces and thin shells has shown, these studies were mainly progressing in 6 directions.

Application of Torses in Construction and Mechanical Engineering

Architects used them mostly as objects of small architecture or for sculptural compositions [10], but there are examples where they were used to decorate the facades of large civil structures, such as the Luxembourg pavilion at Expo 2020 [1]. In [11] it is recommended to use a fragment of a torse of the same slope as a reinforced concrete canopy with a thickness of 5 cm over the entrance to a public building.

In paper [12] it is proposed to perform segmentation of non-developable surfaces using torse fragments. The authors prove with specific examples that it will reduce the cost of products in the textile industry, in the production of thin-walled metal structures of mechanical engineering, in the construction of lattice shell pavilions. Similar problems of approximation of complex surfaces by torse surfaces in the form of ribbons are solved in [13]. There are proposals for the use of torse surfaces for tent structures [14]. The authors of article [15] state that torse surfaces are of great interest to experts of various branches of human activity, such as architecture, engineering, textile industry, replacement of free-form surfaces by torse surfaces.

Design of Torses with Predetermined Geometric Conditions

To date, 10 methods of designing torse surfaces are known [9], of which the most popular are designing a torse surface using two given plane directrix curves and using a specified edge of regression [16]. The shaping of new torse surfaces containing two specified plane curves can be illustrated by examples of torses on rectangular [2], trapezoidal [3], and arbitrary quadrilateral (Figures 5–9) bases. Torse surfaces can be easily computer modeled [17]. Paper [18] uses a well-known technique to obtain equations of torse surfaces of equal slope with curvilinear coordinates in the lines of curvature. The name of the surface itself indicates that its rectilinear generatrices are inclined to a plane with a directrix curve at the same angle. Researchers are also interested in the method of designing torses with a predetermined line of curvature and a single straight generatrix [19]. Quite a lot of studies are devoted to the construction of developable Bézier surfaces [20]. The method of torse shaping with two plane curves in parallel planes is widely used in shipbuilding for the formation of external hulls [1; 15].

Construction of Torse Surface Developments

Currently, the construction of torse developments onto a plane is not difficult. Having more than a dozen analytical and numerical methods of torse developments [9], geometers have decided that the issue with the construction of torse developments is finally solved. Over the last 10 years, only one paper on the construction of torse developments with parabolas of the second and sixth orders in parallel planes has appeared [21].

Parabolic Bending of Thin Metal Pieces

When bending a thin metal piece into a desired torse, normal stresses emerge in it, unlike a surface that has no thickness and Poisson's ratio. Several papers [22–24] are devoted to the study of this phenomenon. As a result of parabolic bending of a metal sheet, plastic deformations can also occur.

Some researchers propose to consider that bending flat metal sheets into a torse uses minimum energy [15], but it should be known that, practically, a real flat piece made of plywood, aluminum or steel cannot be bent exactly into the designed torse with preservation of straight generatrices due to the presence of Poisson's ratio of the used material [22].

Strength Analysis of Thin Torse Shells

The main works on determining the strength of torse shells defined in non-orthogonal conjugate curvilinear coordinates were published before 2015 [9; 25]. After that, only torse surfaces of equal slope on an elliptic base [18; 26] and developable helicoids [27] were studied.

Investigation of Helical Developable Products and Building Shells

The helical developable surface (torse-helicoid, helical torse, developing helicoid, involute helicoid) is the best known torse surface (Figure 11). This surface was used as early as Archimedes, who created a screw to lift water to a height of 0.5 meters. This surface has always been on the radar of geometers, architects and engineers [25]. The increased introduction of numerical methods and the growing interest in computer modeling has also affected all areas of research on developable helicoids. Five types of linear helicoidal surfaces have been established, of which the torse helicoid is a surface of zero Gaussian curvature and the other four are surfaces of negative Gaussian curvature, with the straight helicoid being the only minimal surface [27]. In [28], the optimal mesh sizes for FEM analysis of straight and developable helicoids are determined.

The analysis of modern software packages for constructing helicoid models and the possibilities of their application in 3D modeling is carried out in article [29]. It is noted that it is not possible to implement the method of parametric modeling in all software packages.

It is possible to list even more scientific articles devoted to helical developable products and building shells, but in this paper the discussion is restricted to the cited sources, since the purpose of the section is to show the interest of researchers in the application of torse surfaces and shells.

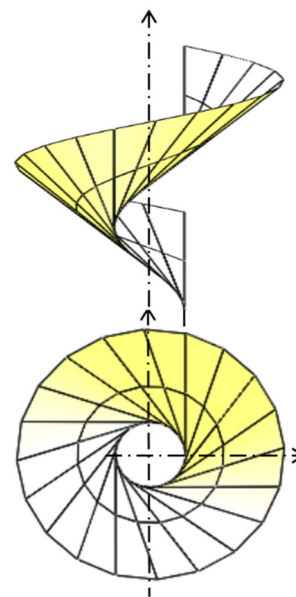


Figure 11. Developable helicoid
Source: compiled
by S.N. Krivoschapko

4. Results

1. The parametric equations (6) of torse surfaces with two plane curves lying in intersecting planes and with parallel axes are obtained. These developable surfaces allow to cover an arbitrary quadrilateral area.
2. It is found that up to the present time, only one torse surface with two parabolas and with parallel axes, defined by analytical formulas, is known, and the parabolas lie in intersecting planes, although the method of constructing the surfaces under consideration was proposed as recently as by G. Monge.
3. Parametric equations of four torse surfaces with two second-order directrix curves lying in intersecting planes are derived. The proposed four torses are visualized using computer graphics.
4. It is shown that the four considered developable surfaces can be applied in construction, mechanical engineering, textile industry, and in the production of thin-walled metal structures.
5. A literature review on the subject over the last 10 years has shown that there are currently no published studies of the stress-strain state of thin shells with the considered torse middle surfaces defined in curvilinear non-orthogonal conjugate coordinates u, λ in the form of (6) with the application of the moment theory of shells.

5. Conclusion

Algebraic second-order surfaces are the most widespread in various fields of human activity. The next most widespread surfaces are surfaces of zero Gaussian curvature (cylindrical, conical and torse surfaces). Next are transfer surfaces, oblique linear surfaces, and tubular surfaces. This short list of the most common analytical surfaces implemented in real products and structures and the given list of used sources shows that torse surfaces have a wide range of application in various branches of economy. With specific examples, the possibility of determining parametric equations of torse surfaces containing two predetermined directrix curves in intersecting planes is shown. Directions in the research of a variety of torses, which are desirable to extend to the torse surfaces proposed for implementation, are illustrated.

References

1. Krivoshapko S.N., Gil-oulbé M. Tangential developable surfaces and their application in real structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(2):140–149. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-2-140-149> EDN: IQPSGE
2. Krivoshapko S.N. Torse surfaces on a rectangular plan with two plane curves on the opposite ends. *Building and Reconstruction*. 2025;1(117):3–15. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2025-117-1-3-15>
3. Rekach V.G., Krivoshapko S.N. *Analysis of Shell of Complex Geometry*. Moscow: RUDN Publ.; 1988. (In Russ.) ISBN 5-209-00047-8
4. Ivanov V.N., Aleshina O.O., Larionov E.A. Determination of optimal cylindrical shells in the form of secondorder surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(1):37–47. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-1-37-47>
5. Ivashchenko A.V., Stepura A.V. Modeling the surface of a cylindroid using CAD systems. *Perspectivy Nauki [Perspectives of Science]*. 2023;1(160):121–124. (In Russ.) EDN: MHRRUD
6. Filipova J.R. Comparative analysis of the results of calculation of a thin shell in the form of carved surface of Monge with an application of membrane (momentless) theory and finite element method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016;(3):8–13.
7. Bhattacharya B. Theory of a new class of shells. *Symposium on Industrialized Spatial and Shell Structures*. Poland, 1973:115–124.
8. Pavlenko G.E. *Simplified Shapes of Ships*. Moscow: MRF SSSR, 1948.
9. Krivoshapko S.N. *Geometry of ruled surfaces with cuspidal edge and linear theory of developable surfaces'* analysis: monograph. Moscow: RUDN; 2009. (In Russ.) ISBN 978-5-209-03087-4
10. Grinko E.A. On classification of analytical surfaces as applied to parametrical architecture and machine building. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2018;19(4):438–456. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2018-19-4-438-456> EDN: YXILRJ
11. Aleshina O.O. Studies of geometry and calculation of torso shells of an equal slope. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2019;3(284):63–70. (In Russ.) EDN: MGZGMR
12. Yuan C., Cao N., Shi Y. *A survey of developable surfaces: from shape modeling to manufacturing*. 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.09587>
13. Tang Ch., Pengbo Bo, Wallner J., Pottmann H. Interactive design of developable surfaces. *ACM Transactions on Graphics*. 2016;35(2):12. <https://doi.org/10.1145/2832906>
14. Belyaeva Z.V., Berestova S.A., Mityushov E.A. Tangent developable surfaces elements in thin-walled structures. *VIII International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures-Structural Membranes 2017*. Munich, Germany. 2017:415–426. EDN: XYCRPV
15. Perez-Arribas F., Fernandez-Jambrina L. Computer-aided design of developable surfaces: designing with developable surfaces. *Journal of Computers*. 2018;13(10):1171–1176. <https://doi.org/10.17706/jcp.13.10.1171-1176>
16. Kovaleva N.V., Fedorova A.V., Pashyan D.A. Algorithms of generating cuspidal edges of developable surfaces. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. Sochi: IOP Publishing Ltd; 2020;962(3):032025. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/962/3/032025> EDN: YNMOAN
17. Fernandez-Jambrina L. Characterization of rational and NURBS developable surfaces in computer aided design. *Journal of Computational Mathematics*. 2021;29(4):556–573. <https://doi.org/10.4208/jcm.2003-m2019-0226>
18. Aleshina O.O., Ivanov V.N., Cajamarca-Zuniga D. Comparative analysis of the stress state of an equal slope shell by analytical and numerical methods. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2022;18(4):375–386. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-375-386>
19. Yilmaz B., Ramis C., Yayli Y. On developable ruled surface of the principal-direction curve. *Konuralp Journal of Mathematics*. 2017;5(2):172–180. Available from: <https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/351070> (accessed: 21.10.2024).
20. Hu G., Cao H., Qin X., & Wang X. Geometric design and continuity conditions of developable λ -Bézier surfaces. *Advances in Engineering Software*. 2017;114:235–245. <https://doi.org/10.1016/J.ADVENGSOFT.2017.07.009>
21. Ershov M.E., Tupikova E.M. Construction of development of a torse surface with the parabolas on the opposite edges. *Engineering Research: Scientific-and-Practical Conference. RUDN University*. 2020:31–41. (In Russ.) EDN: JDIESQ
22. Krivoshapko S.N. On parabolic bending of plane metal sheet into torse structure. *Tekhnologiya Mashinostroeniya*. 2020;11(221):14–24. (In Russ.) EDN: QMSSJF
23. Cherouat A., Borouchaki H., Jie Z. Simulation of sheet metal forming processes using a fullyrheological-damage constitutive model coupling and a specific 3D remeshing method. *Metals*. 2018;8:991. <https://doi.org/10.3390/met8120991>
24. Marciniak Z., Duncan J.L., Hu S.J. *Mechanics of Sheet Metal Forming*. Butterworth-Heinemann Publ.; 2002. ISBN 0-7506-5300-0

25. Krivoshapko S.N. Geometry and strength of general helicoidal shells. *Applied Mechanics Reviews*. 1999;52(5): 161–175. <https://doi.org/10.1115/1.3098932> EDN: XOOZHE
26. Aleshina O.O., Ivanov V.N., Grinko E.A. Investigation of the equal slope shell stress state by analytical and two numerical methods. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2020;6(293):2–13. (In Russ.) <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.6.2.13> EDN: YXWWNT
27. Krivoshapko S.N., Rynkovskaya M. Five types of ruled helical surfaces for helical conveyers, support anchors and screws. *MATEC Web of Conferences*. 2017;95:06002. <https://doi.org/10.1051/mateconf/20179506002>
28. Ermakova E., Rynkovskaya M. Modern software capabilities for shape optimization of shells. *Vietnam Journal of Science and Technology*. 2024;62(1):184–194. <https://doi.org/10.15625/2525-2518/18788> EDN: EVIFMG
29. Jean Paul V., Elberdov T.A., Rynkovskaya M.I. Helicoids 3D modeling for additive technologies. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2020;21(2):136–143. (In Russ.) <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2020-21-2-136-143> EDN: QNCFJR

Список литературы

1. Krivoshapko S.N., Gil-oulbé M. Tangential developable surfaces and their application in real structures // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18. № 2. С. 140–149. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-2-140-149> EDN: IQPSGE
2. Кривошапко С.Н. Торсовые поверхности на прямоугольном плане с двумя плоскими кривыми на противоположных торцах // Строительство и реконструкция. 2025. № 1 (117). С. 3–15. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2025-117-1-3-15> EDN: ACOCGO
3. Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. Расчет оболочек сложной геометрии. Москва : УДН, 1988. 176 с. ISBN 5-209-00047-8
4. Иванов В.Н., Алёшина О.О., Ларионов Е.А. Определение оптимальных цилиндрических оболочек в форме поверхностей второго порядка // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 1. С. 37–47. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-1-37-47>
5. Иващенко А.В., Степура А.В. Моделирование поверхности цилиндриоида средствами CAD-систем // Перспективы науки. 2023. № 1 (160). С. 121–124. EDN: MHRRUD
6. Филипова Е.Р. Сравнительный анализ результатов расчета тонкой оболочки в форме резной поверхности Монжа по безмоментной теории и методом конечного элемента // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 3. С. 8–13. EDN: VUCZJH
7. Bhattacharya B. Theory of a new class of shells // Symposium on Industrialized Spatial and Shell Structures. Poland, 1973. P. 115–124.
8. Павленко Г.Е. Об упрощенных формах судов. Москва : МРФ СССР, 1948. 28 с.
9. Кривошапко С.Н. Геометрия линейчатых поверхностей с ребром возврата и линейная теория расчета торсовых оболочек: монография. Москва : РУДН, 2009. 357 с. ISBN 978-5-209-03087-4 EDN: QJWLJC
10. Гринько Е.А. Классификация аналитических поверхностей применительно к параметрической архитектуре и машиностроению // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования. 2018. Т. 19. № 4. С. 436–456. <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2018-19-4-438-456> EDN: YXILRJ
11. Алёшина О.О. Исследования по геометрии и расчету торсовых оболочек одинакового ската // Строительная механика и расчет сооружений. 2019. № 3 (284). С. 63–70. EDN: MGZGMR
12. Yuan C., Cao N., Shi Y. A survey of developable surfaces: from shape modeling to manufacturing. 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.09587>
13. Tang Ch., Pengbo Bo., Wallner J., Pottmann H. Interactive design of developable surfaces // ACM Transactions on Graphics. 2016. Vol. 35. No. 2. Article No. 12. <https://doi.org/10.1145/2832906>
14. Belyaeva Z.V., Berestova S.A., Mityushov E.A. Tangent developable surfaces elements in thin-walled structures // VIII International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures-Structural Membranes 2017. Munich, Germany. 2017. P. 415–426. EDN: XYCRPV
15. Perez-Arribas F., Fernandez-Jambrina L. Computer-aided design of developable surfaces: designing with developable surfaces // Journal of Computers. 2018. Vol. 13. No. 10. P. 1171–1176. <https://doi.org/10.17706/jcp.13.10.1171-1176>
16. Kovaleva N.V., Fedorova A.V., Pashyan D.A. Algorithms of generating cuspidal edges of developable surfaces // IOP Conference Series Materials Science and Engineering. Sochi, 2020. Vol. 962 (3). Article No. 032025. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/962/3/032025> EDN: YNMOAN
17. Fernandez-Jambrina L. Characterization of rational and NURBS developable surfaces in computer aided design // Journal of Computational Mathematics. 2021. Vol. 29. No. 4. P. 556–573. <https://doi.org/10.4208/jcm.2003-m2019-0226>
18. Aleshina O.O., Ivanov V.N., Cajamarca-Zuniga D. Comparative analysis of the stress state of an equal slope shell by analytical and numerical methods // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. Т. 18.

№ 2. С. 375–386. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-4-375-386>. EDN: OTIAHV

19. *Yilmaz B., Ramis C., Yayli Y.* On developable ruled surface of the principal-direction curve // *Konuralp Journal of Mathematics*. 2017. Vol. 5. No. 2. P. 172–180. URL: <https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/351070> (accessed: 21.10.2024)

20. *Hu G., Cao H., Qin X., & Wang X.* Geometric design and continuity conditions of developable λ -Bézier surfaces // *Advances in Engineering Software*. 2017. Vol. 114. P. 235–245. <https://doi.org/10.1016/J.ADVENGSOFT.2017.07.009>

21. *Ершов М.Е., Туникова Е.М.* Построение разверток торсовой поверхности с параболой на торцах // *Инженерные исследования : труды научно-практической конференции с международным участием* / под ред. М.Ю. Мальковой. Москва : РУДН, 2020. С. 31–41. EDN: JDIESQ

22. *Кривошапко С.Н.* О параболическом изгибании плоского металлического листа в торсовую конструкцию // *Технология машиностроения*. 2020. № 11 (221). С. 14–24. EDN: QMSSJF

23. *Cherouat A., Borouchaki H., Jie Z.* Simulation of sheet metal forming processes using a fullyrheological-damage constitutive model coupling and a specific 3D remeshing method // *Metals*. 2018. Vol. 8. Issue 12. Article no. 991. <https://doi.org/10.3390/met8120991>

24. *Marciniak Z., Duncan J.L., Hu S.J.* *Mechanics of Sheet Metal Forming*. Butterworth-Heinemann Publ.; 2002. 211 p. ISBN 0-7506-5300-0

25. *Krivoshapko S.N.* Geometry and strength of general helicoidal shells // *Applied Mechanics Reviews*. 1999. Vol. 52. No. 5. P. 161–175. <https://doi.org/10.1115/1.3098932> EDN: XOOZHE

26. *Алешина О.О., Иванов В.Н., Гринько Е.А.* Исследование напряженного состояния торсовой оболочки одинакового ската аналитическим и численными методами // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2020. № 6 (293). С. 2–13. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.6.2.13> EDN: YXWWNT

27. *Krivoshapko S.N. and Rynkovskaya Marina.* Five types of ruled helical surfaces for helical conveyers, support anchors and screws / *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 95. Article No. 06002. <https://doi.org/10.1051/mateconf/20179506002>

28. *Ermakova E., Rynkovskaya M.* Modern software capabilities for shape optimization of shells // *Vietnam Journal of Science and Technology*. 2024. 62 (1). P. 184–194. <https://doi.org/10.15625/2525-2518/18788>

29. *Жан Поль В., Эльбердов Т.А., Рынкoвская М.И.* 3D-моделирование геликоидов для использования в аддитивных технологиях // *Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования*. 2020. Т. 21. № 2. С. 136–143. <https://doi.org/10.22363/2312-8143-2020-21-2-136-143> EDN: QNCFJR

ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ DYNAMICS OF STRUCTURES AND BUILDINGS

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-2-167-178

EDN: OBXHMJ

Research article / Научная статья

Variant Design of Girder-Slab Structure with Different Geometric Cells Under Flexural Vibrations

Andrey A. Chernyaev^{ID}✉, Kirill V. Marfin^{ID}

Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russian Federation,

✉ chernyev87@yandex.ru

Received: February 20, 2025

Revised: April 10, 2025

Accepted: April 18, 2025, 2025

Abstract. Girder-slab structures are widely used in industrial buildings, bridge decks, complex combined engineering structures and other objects of construction and mechanical engineering. An important task in their design is to find the most economical structural solution with the least amount of material while ensuring the necessary strength and rigidity. Therefore, the development of methods and algorithms for searching of the most rational and optimal design solutions is of great significance. The authors offer a technique of variant design of girder-slab structures with various cell shapes: rectangular, triangular, rhombic, trapezoidal and other, when analyzing vibrations. The technique is based on the principles of physicomechanical analogies and geometrical methods of structural mechanics. For a numerical example, a cantilever girder-slab structure on trapezoidal base is studied. The bars are of typical sections, the flooring is smooth steel. It is shown that cell geometry affects flexural vibrations of the girder-slab structure and material consumption.

Keywords: flexural vibrations, girder-slab structure, fundamental frequency of vibration, material consumption, metal structure

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution: *Chernyaev A.A.* — supervision, conceptualization, review and editing, experimental investigation, conclusions; *Marfin K.V.* — literature review, data processing, writing the text.

For citation: Chernyaev A.A., Marfin K.V. Variant design of girder-slab structure with different geometric cells under flexural vibrations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(2):167–178. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-167-178>

Andrey A. Chernyaev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Industrial and Civil Engineering, Orel State University named after I.S. Turgenev, 95 Komsomolskaya St, Orel, 302026, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 4803-8464, ORCID: 0000-0002-0158-7056; e-mail: chernyev87@yandex.ru

Kirill V. Marfin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures and Materials, Orel State University named after I.S. Turgenev, 95 Komsomolskaya St, Orel, 302026, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5146-0715, ORCID: 0000-0001-7646-1258; e-mail: marfinkirill@yandex.ru

© Chernyaev A.A., Marfin K.V., 2025

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Вариантное проектирование пластинчато-стержневой конструкции с различной геометрической ячейкой при изгибных колебаниях

А.А. Черняев[✉], К.В. Марфин[✉]

Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орел, Российская Федерация

✉ chernyev87@yandex.ru

Поступила в редакцию: 20 февраля 2025 г.

Доработана: 10 апреля 2025 г.

Принята к публикации: 18 апреля 2025 г.

Аннотация. Пластинчато-стержневые конструкции широко используются в качестве перекрытий зданий, пролетных строений мостов, сложных комбинированных инженерных сооружений и других объектов строительства и машиностроения. Важной задачей при их проектировании является поиск наиболее экономичного конструктивного решения, на выполнение которого затрачивалось бы наименьшее количество материала при обеспечении необходимой прочности и жесткости. В связи с этим большое значение при проектировании придается разработке методов и алгоритмов поиска рациональных и оптимальных конструктивных решений. Предложена авторская методика вариантного проектирования пластинчато-стержневых конструкций с различной геометрической ячейкой в плане: прямоугольной, треугольной, ромбической, трапециевидной и другой при исследовании колебаний. Методика основана на использовании принципов физико-механических аналогий и геометрических методов строительной механики. В качестве объекта исследования для численного примера рассматривается консольная пластинчато-стержневая конструкция на трапециевидном плане. Сечения стержней из типовых профилей, настил стальной гладкий. Показано, что геометрия ячейки влияет на изгибные колебания пластинчато-стержневой конструкции и материалоемкость.

Ключевые слова: изгибные колебания, пластинчато-стержневые конструкции, основная частота собственных колебаний, материалоемкость, металлическая конструкция

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов: Черняев А.А. — научное руководство, концепция исследования, рецензирование и редактирование, подготовка и проведение эксперимента, выводы; Марфин К.В. — обзор литературы, обработка результатов, написание текста.

Для цитирования: Chernyaev A.A., Marfin K.V. Variant design of girder-slab structure with different geometric cells under flexural vibrations // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 2. С. 167–178. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-167-178>

1. Introduction

Girder-slab structures are widely used in industrial buildings, bridge decks, complex combined engineering structures and other construction objects and machine structures. An important task in their design is to find geometric grids with the least amount of material and while ensuring the strength and rigidity, also in case of vibrations [1–3]. Now, computer programs for the finite element analysis of the stress-strain state of structures are a common tool of engineers. In tasks of variant engineering and optimization of designs of girder-slab structures, numerical methods are also used [4–6]. A set of methods, which can be used for girder-slab design is very broad: from rather universal, such as nonlinear mathematical programming and genetic algorithms, to problem-oriented [7–9].

All methods have advantages and disadvantages and means for setup, appropriate application of which can strongly influence the speed of operation of the methods and even correctness of the results.

Moreover, direct borrowing of universal numerical optimization methods, which in some works are referred to as “search optimization methods”, from mathematics leads to the increase in dimensionality of the problems and significant growth in calculation amount in case of the increase in the number of design

Черняев Андрей Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры промышленного и гражданского строительства, Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Российская Федерация, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, д. 95; eLIBRARY SPIN-код: 4803-8464, ORCID: 0000-0002-0158-7056; e-mail: chernyev87@yandex.ru

Марфин Кирилл Васильевич, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций и материалов, Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Российская Федерация, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, д. 95; eLIBRARY SPIN-код: 5146-0715, ORCID: 0000-0001-7646-1258; e-mail: marfinkirill@yandex.ru

variables. Development of the methodology of nonlinear mathematical programming should be pointed out from mathematical works on geometrical optimization methods for the purposes of structural design and construction [10]. It requires accurate formalization of the optimization problem statement.

In this work, the authors propose a technique of variant design of girder-slab structures with various horizontal cell shapes, i.e. rectangular, triangular, rhombic, trapezoidal and other, with the choice of the most rational structural solution in terms of the lowest material costs for its production and while ensuring the rigidity under vibrations. The technique is based on use of the principles of physicommechanical analogies and geometrical methods of structural mechanics. To implement this technique, it is planned to develop software products that will visually represent the entire calculation procedure.

2. Methods

Geometrical methods of structural mechanics are based on mathematical analogy and the functional correlation, individual physicommechanical characteristics of the stress-strain state of plane elements of structures (pressures, deflections, vibration frequencies, critical buckling forces and others) in the shape of plates, membranes, bar cross-sections with their geometrical parameters (sizes, angles, side ratio and so on). For this, it is necessary to choose some characteristic of the geometric shape for plates and membranes or of the cross-section for the bars. And if it is proved that it is related to the parameters of the stress-strain state by some function or expression, then it is possible to study the change in the stress-strain state parameters using the chosen geometric characteristic [11; 12] et. al.

In this work, it is proposed to use the geometrical parameter representing the relation of the inner mapping radius to the external mapping radius of the areas restricted to the contour of plates, membranes or bar cross-sections [13].

During the research, the authors' technique of physical-geometric analogy is used, see references to this technique in [14–16], according to which the integral geometric characteristic of a flat area with a convex contour (the ratio of mapping radii) is analogous to the integral physical characteristics in the considered problems, that is, the laws of change of physical characteristics in these problems are modeled by the corresponding changes in the shape of the area.

2.1. Definition of Terms

“The following quantities are involved with a plane domain $\underline{D}$:

A is the area of $\underline{D}$,” “ r_a is the inner radius of $\underline{D}$ with respect to point a ; point a lies necessarily inside $\underline{D}$. The interior of $\underline{D}$ is mapped conformally onto the interior of a circle, so that point a corresponds to the center of the circle and the linear magnification at point a is equal to 1; the radius of the obtained circle is r_a . The value of r_a varies with point a . $\dot{r}$ is the maximum inner radius.” ... “ $\bar{r}$ is the outer radius of $\underline{D}$. The complementary domain of $\underline{D}$, exterior to $\underline{C}$, is mapped conformally onto the exterior of a circle, so that the points at infinity correspond and the linear magnification at infinity is equal to 1; the radius of the obtained circle is $\bar{r}$.” [13, p. 2].

“... $\underline{C}$ a closed plane curve without double points surrounding plane domain $\underline{D}$ ” [13, p. 1].

2.2. Formulae

The formulas for finding internal $\dot{r}$ and external $\bar{r}$ mapping radii for some singly connected domains, which are considered in the work, take the following form [13; 17]:

- for a circle of radius a

$$\dot{r} = a, \quad \bar{r} = a; \tag{1}$$

- for perfect n-squares

$$\dot{r} = \frac{G\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2^{1-\frac{2}{n}} G\left(\frac{1}{2}\right) G\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)} L, \quad \bar{r} = \frac{G\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2^{1+\frac{2}{n}} G\left(\frac{1}{2}\right) G\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)} L, \quad (2)$$

where n is the number of the sides; L is the perimeter; $G(x)$ is the Gamma-function;

- for arbitrary triangles with angles $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\gamma$:

$$\dot{r} = 4\pi \cdot f(\alpha) f(\beta) f(\gamma) \cdot \rho, \quad \bar{r} = \frac{A}{\pi \dot{r}}, \quad (3)$$

where

$$f(x) = \frac{1}{G(x)} \left\{ \frac{x^x}{(1-x)^{1-x}} \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad (4)$$

ρ is the large radius; A is the square; x is α or β or γ ; $G(x)$ is the same as in (2);

- for isosceles triangles with angles $\alpha = \beta$ expressions (3) will take the following form:

$$\dot{r} = 4\pi \cdot f^2(\alpha) f(\gamma) \cdot \rho; \quad \bar{r} = \frac{\text{ctg}\alpha \cdot h^2}{\pi \dot{r}}, \quad (5)$$

where α is the equal base angle; h is the height;

- for rectangular triangles ($\alpha = \pi/2$), it follows from expression (3) that

$$\bar{r} = \frac{\sin 2\alpha \cdot c^2}{4\pi \dot{r}}, \quad (6)$$

where α is the angle in case of hypotenuse; c is the hypotenuse;

- for rhombs with angle $\pi\alpha$

$$\dot{r} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{G\left(\frac{\alpha}{2}\right) G\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} L, \quad \bar{r} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{8G\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) G\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} L; \quad (7)$$

where $G(x)$ and L is the same as in (2);

- for ellipses with semiaxes a and b ($a \geq b$)

$$\dot{r} = \bar{r} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \right\}^{-1} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right\}^{-1}, \quad \bar{r} = \frac{a+b}{2}, \quad (8)$$

where

$$q = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}; \quad (9)$$

- for rectangles with the sides a and b ($a \geq b$)

$$\dot{r} = \frac{2}{\pi} b \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right)^{-2}, \quad \begin{cases} \frac{a}{\bar{r}} = \pi \cos^2 \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2k-1)!!)^2}{2^{2k} (k+1)! k!} \cos^{2k} \alpha; \\ \frac{b}{\bar{r}} = \pi \sin^2 \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2k-1)!!)^2}{2^{2k} (k+1)! k!} \sin^{2k} \alpha, \end{cases} \quad (10)$$

where $q = e^{-\frac{\pi a}{b}}$, α is the argument of complex numbers (circle points which images are rectangle vertices in case of conformal mapping).

For other complex domains, for example, parallelogram, trapezoid and other, mapping radii can be obtained using the Schwarz-Christoffel formula [18] and expanding the mapping function in a Taylor series.

These formulas are also given in the authors' works [14; 15], among other.

2.3. Mathematical Functional Correlation

Mathematical analogy and the functional correlation of mapping radiuses with the characteristics of the stress-strain state, vibrations and stability of structural elements in the shape of plates, membranes, bar cross-sections are defined in earlier works [19].

Since the stress state of a plate under vibrations is considered, then, the resulting relationship for the fundamental frequency of vibration of a plate should be also considered. The fundamental frequency of vibration of a plate ω_0 is related to mapping radii $\dot{r}$ and $\bar{r}$ by expression [19]:

$$\omega_0 \leq k \cdot \left(\frac{\dot{r}}{\bar{r}} \right)^{-1} \cdot \frac{\sqrt{D/m}}{A}, \quad (11)$$

where k is a numerical constant turning the expression into an equality for round plates, which depends on the type of boundary conditions, m is the mass (weight) of the plate with an area of 1 m²; A is the area of the plate; D is the flexural rigidity of the plate:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (12)$$

where E is the modulus of elasticity; t is thickness of the plate; ν is the Poisson's ratio.

In case of fixed supports of the plate, $k = 32.08$ in (11).

In case of pinned supports of the plate, the value of k can be indicated only for a specific plate material. Since the transition of a regular n -angle plate into a round one with pinned supports leads to the well-known Sapondzhyan — Babuska paradox [20], according to which the value of the vibration frequency will depend on the Poisson's ratio. For such a case of boundary conditions, for comparison, the value of $k = 17.8$ corresponding to a plate in the shape of a regular 16-gon is specified, which in shape is close enough to round.

Expression (11) was obtained using the variational representation of the eigenvalue of the differential equation of free vibrations of the plate and the conformal representation of the inner part of its region when mapped onto a unit circle. And also with the help of many mathematical transformations.

Expression (11) shows that fundamental frequency of vibration of a plate ω_0 is inversely proportional to the ratio of mapping radii $\dot{r}/\bar{r}$, or directly proportional to the ratio of mapping radii $\bar{r}/\dot{r}$. It means that, the change in fundamental frequency of vibration ω_0 for plates of various shapes can be studied by defining the change in the ratio of mapping radii $\dot{r}/\bar{r}$. The ratio of mapping radii $\dot{r}/\bar{r}$ in expression (11) characterizes the geometric shape of the plate in dimensionless form.

2.4. Graphs and Functions

In work [21], instead of numerical constant k (11), correcting polynomial functions of the form $k_\omega = f(\dot{r}/\bar{r})$ were defined for all plates of simple shapes: rectangular plates, isosceles triangular plates, rectangular triangular plates, rhombic plates, regular polygonal plates, elliptical plates. k_ω represents the fundamental frequency of vibration of a plate in general form. Graphs were constructed (Figures 1, 2).

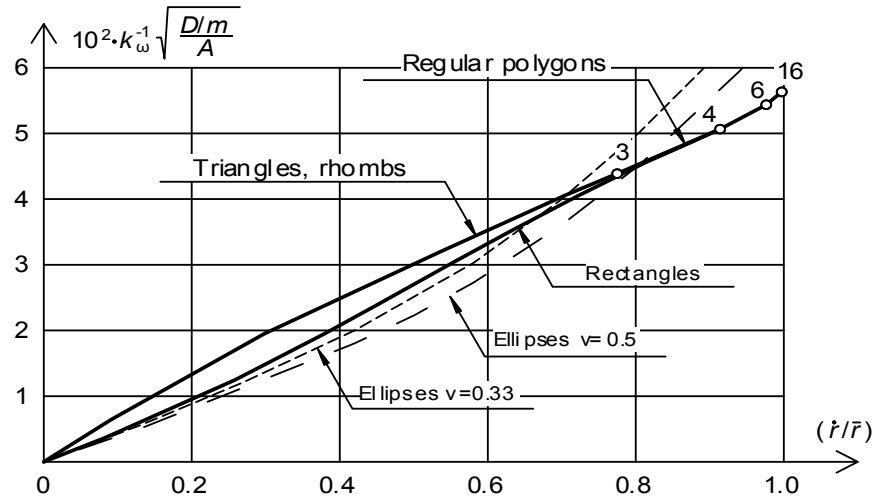


Figure 1. Graphs of the fundamental frequency of vibration of plates with pinned supports along the perimeter, presented depending on the ratio of mapping radii

Source: made by A. A. Chernyaev

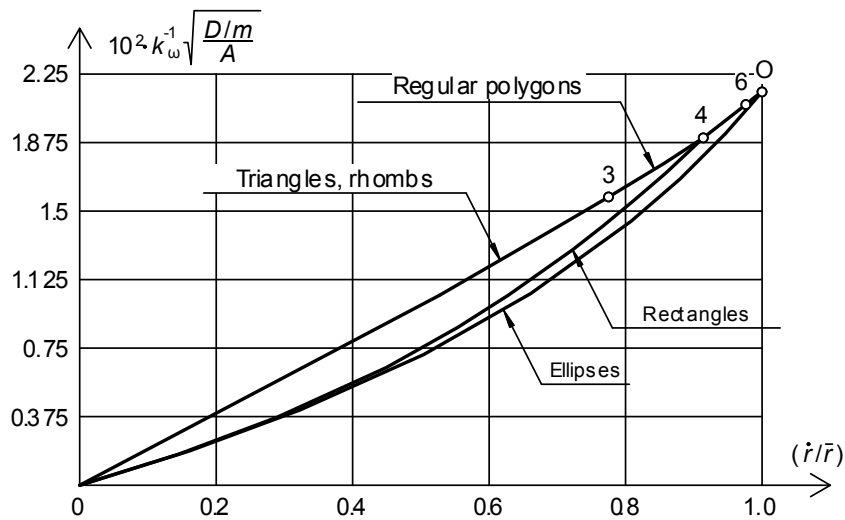


Figure 2. Graphs of the fundamental frequency of vibration of plates with fixed supports along the perimeter, presented depending on the ratio of mapping radii

Source: made by A. A. Chernyaev

For elliptical plates with pinned supports along the perimeter, the graphs and functions $k_\omega = f(\dot{r}/\bar{r})$ will be different for different values of the Poisson's ratio due to the indicated paradox [20]. Figure 1 shows, for example, graphs for two values of the Poisson's ratio: $\nu = 0.33$, $\nu = 0.5$.

As shown in Figures 1, 2 points 3, 4, 6, 16 correspond to k_{ω} values for plates in the shapes: regular triangle (point 3), square (points 4), regular hexagon (points 6), regular hexadecagon (points 16), circle (point O).

In works [19; 21] it was proved that the values of k_{ω} for all plates with a convex contour, for example parallelogram, trapezoid, are inside between these graphs.

2.5. Computational Model and Algorithm

The computational model of the girder-slab structure represents a cross system of bars of the first, second and third levels, which support the slabs (plates). The bars of the first level are called the main girders or spars. The bars of the second level are called secondary beams. The bars of the third level are called floor beams. Beams and girders can be made in the shape of bars of constant or variable cross-section. They can be located in space not only at right angles, but also inclined with a different geometric cell (Figure 3) [14; 15].

The mass (weight) from the plates is transmitted along the perimeter to the floor beams and secondary beams. The plates can be loaded, then the mass (weight) takes this load into account. The mass (weight) from the floor beams is transferred to the secondary girders at the connection points. The mass (weight) from the secondary beams is transferred to the main girders (spars) at the connection points. The girder-slab structure vibrates freely from the mass (weight). The main parameter to determine is the fundamental frequency corresponding to the first mode of vibration. The main factor that affects the fundamental frequency of vibrations is the mass (weight) of the girder-slab structure. If the horizontal outline of the structure is assumed to be constant or specified to be unchanged according to the design assignment, then with different geometric cells (geometric shape of plates) the main vibration frequency will be different (see similar problems, for example [22–24]). Therefore, the main task in the design of girder-slab structures is to determine the geometry of the cells.

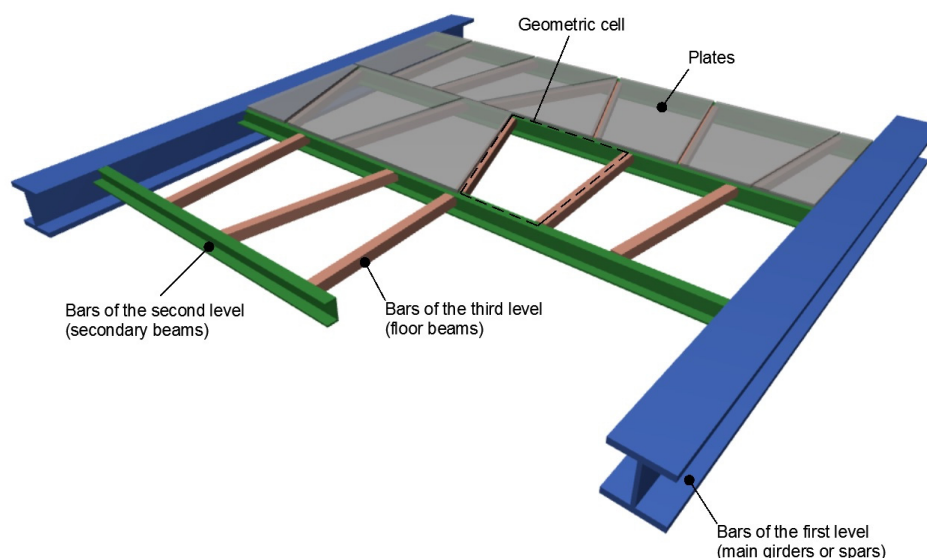


Figure 3. Computational model of the girder-slab structure

Source: made by A.A. Chernyaev

An algorithm is being developed for determining the geometry of cells of various shapes in the girder-slab system at a given fundamental frequency of vibration of the plates based on the established mathematical and graphical relationship between the fundamental frequency of vibration of the plates and the ratio of the mapping radii of the region bounded by the contour of the plates (Figure 4).

This algorithm uses a custom designed computer program: patent No. 2016615454 (RU) (Figure 5).

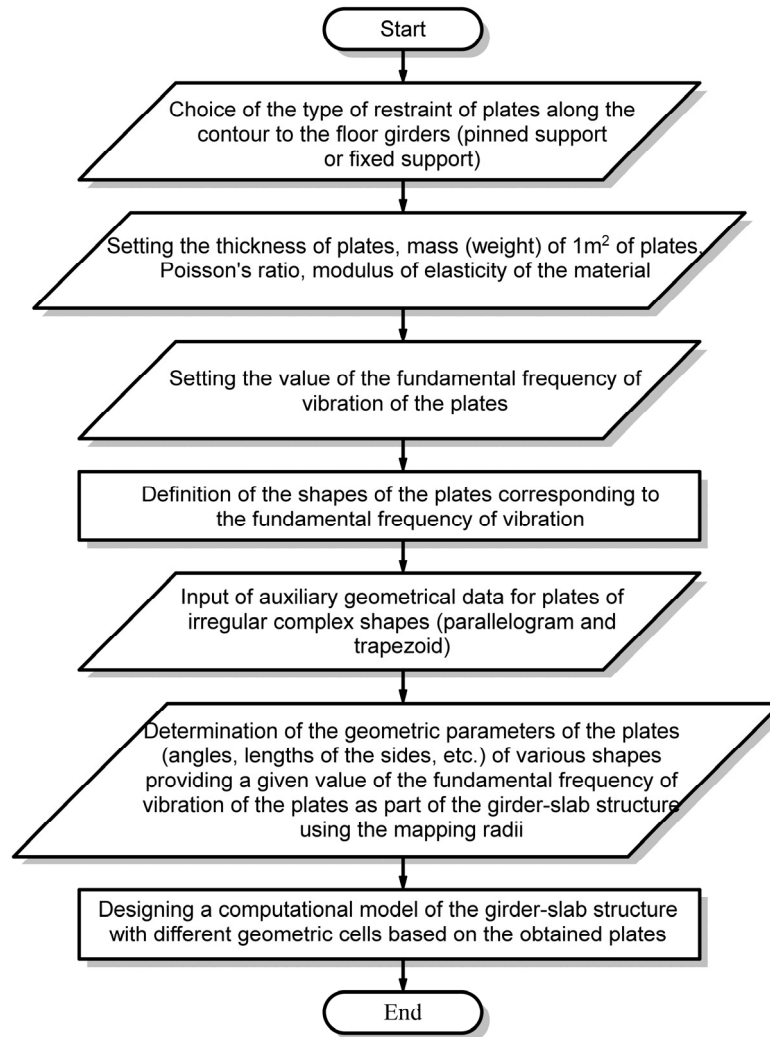


Figure 4. Algorithm for determining the geometry of cells of various shapes in the girder-slab structure at a given fundamental frequency of vibration of the plates

S o u r c e: made by A. A. Chernyaev

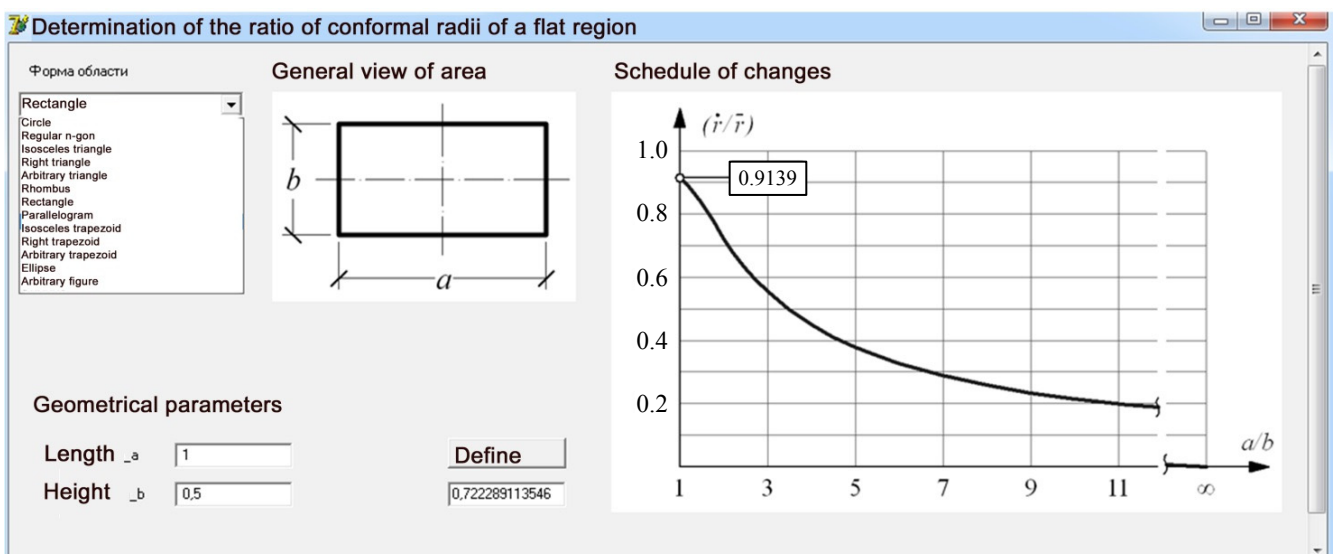


Figure 5. Working window of the computer program: patent № 2016615454 (RU)

S o u r c e: made by A. A. Chernyaev using PrintScreen

3. Results and Discussion

In this section, a numerical example is presented. A cantilever girder-slab structure on trapezoidal plane with sizes: larger base 3 m, smaller base 1.5 m, height 4.5 m, larger inner angle 90° , is studied. The bars are made of typical sections, plates (flooring) are steel and smooth. The bars of the first level (main girders or spars) are made with a linearly variable section. The bars of the second level are parallel.

The bars of the first level (main girders or spars) with a larger base are fixed. The bars of the second level (secondary beams) are connected to the bars of the first level by means of steel covers using electric welding, such connection is considered to be rigid. The bars of the third level (floor beams) are connected to the bars of the second level in the same way. The steel flooring is welded to flooring beams by means of welding. Strictly speaking, such connection is considered rigid, however in calculations such connection is considered as a hinge for thin plates in safety margin of material.

Initial data. The material is steel, modulus of elasticity $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa, Poisson's ratio $\nu = 0.3$, weight of steel 78.5 kN/m^3 . Thickness of the plates (flooring) $t = 1.0 \text{ mm}$.

The cross section of the first level bars is flange beam in accordance with Figure 6.

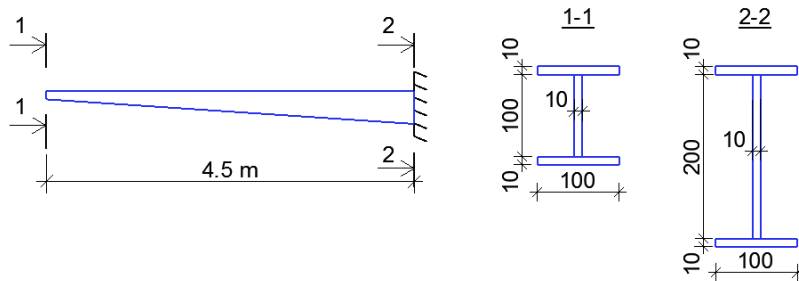


Figure 6. Bars of the first level (main girders or spars)

Source: made by A. A. Chernyaev

The cross section of the second level bars is channel No. 5 in accordance with the interstate standard GOST 8240-97¹.

The cross section of the third level bars is equilateral angle No. 30×3 in accordance with the interstate standard GOST 8509-93².

Solution. With the help of the computer program: patent No. 2016615454 (RU)³ (see Figure 5), the geometric sizes of plates of various shapes are determined. All plates have identical values of the fundamental frequency of vibration

$$\omega_0 = 24.665 \frac{\sqrt{D/m}}{A},$$

absolute value $\omega_0 = 76.34 \text{ 1/sec}$.

On their basis, girder-slab structures with a different geometric cell are designed. The structures numbered 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (see Figure 5) are selected for calculation (Figure 7).

Example result of flexural vibrations of girder-slab structures with geometric cell number 1 (Figure 7) in SCAD Office [25] is shown in Figure 8. Calculation of flexural vibrations of other girder-slab structures is performed similarly in SCAD Office. The results of the flexural vibration analysis of the structures (Figure 7) are shown in Table.

¹ GOST 8240-97. *Hot-rolled steel channels. Assortment*. Minsk, 1997.

² GOST 8509-93. *Hot-rolled steel equal-leg angles. Assortment*. Minsk, 1993.

³ Chernyaev A.A. *Determination of the ratio of conformal radii of a flat region*. Certificate of registration of the computer program RU 2016615454, 05/25/2016. Application No. 2016612918. 2016.

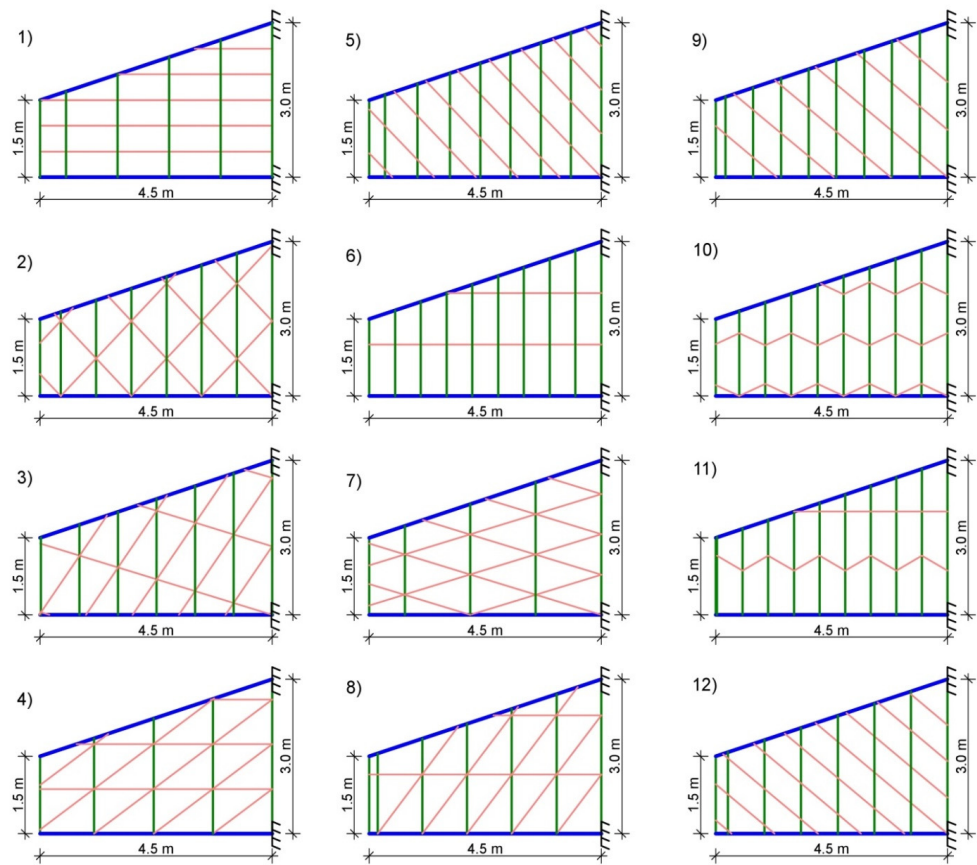


Figure 7. Girder-slab structures with different geometric cell
Source: made by A.A. Chernyaev

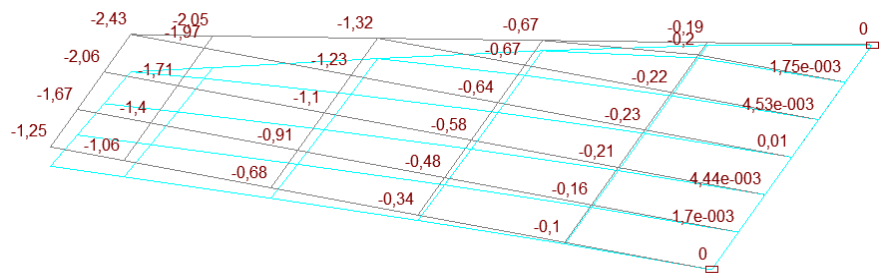


Figure 8. Example result of flexural vibration analysis of the girder-slab structure
with geometric cell number 1 (Figure 7)
Source: made by A.A. Chernyaev using SCAD Office

Results of flexural vibration analysis of girder-slab structures with different geometric cell

Geometric cell (Figure 7)	Material consumption, kg	Fundamental frequencyof vibration, 1/sec	Maximum deflection, mm
1	421	37.13	2.43
2	446	36.67	2.42
3	438	37.22	2.35
4	420	37.30	2.28
5	453	36.44	2.46
6	452	37.01	2.41
7	421	36.77	2.33
8	434	36.46	2.40
9	459	36.15	2.50
10	457	36.8	2.44
11	453	36.98	2.42
12	443	36.49	2.42

Source: made by A.A. Chernyaev

4. Conclusions

The conducted research allowed to conclude the following:

1. Cell geometry affects the flexural vibrations of the girder-slab structure. Between the 12 types of cells considered in the work (see Figure 7), the difference in the results was: 9.2% by material consumption, 3.1% by fundamental frequency of vibration, 7.8% by maximum deflection (see Table);
2. The developed technique can be used for variant design and optimization of girder-slab structures.

References / Список литературы

1. Rees D.W.A. *Mechanics of optimal structural design: Minimum weight structures*. Uxbridge: A John Wiley & Sons Ltd.; 2009. <https://doi.org/10.1002/9780470749784>
2. Pavlov V.P., Kudoyarova V.M., Nusratullina L.R. Eigenfrequency spectrum analysis of bending vibrations for naturally swirled rod. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. 2020;709(2):022059. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/709/2/022059> EDN: SFMDZZ
3. Mazilu T., Dumitriu M., Sorohan S., Gheti M.A., Apostol I.I. Testing the effectiveness of the anti-bending bar system to reduce the vertical bending vibrations of the railway vehicle carbody using an experimental scale demonstrator. *Applied Sciences*. 2024;14(11):4687. <https://doi.org/10.3390/app14114687> EDN: NECUOI
4. Zak A., Krawczuk M. Certain numerical issues of wave propagation modelling in rods by the spectral finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2011;47(9):1036–1046. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2011.03.019>
5. Serpik I.N., Shvyryaev M.V. Finite element modeling of operation for thin-walled open cross section bars to analyze plate-rod systems. *Russian Aeronautics*. 2017;60(1):34–43. <https://doi.org/10.3103/S1068799817010068> EDN: XMZQHR
6. Dmitrieva T. Algorithm of numerical optimization of steel structures on basis of minimum weight criterion. *MATEC Web of Conferences*. 2018;1212:01024. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201821201024> EDN: NFHAYZ
7. Zvorygina S.V., Viktorova O.L. Determination of rational geometrical parameters of spatial plate-core systems using adaptive method. *Regional architecture and engineering*. 2019;38(1):105–111. (In Russ.) EDN: MDXKBD
Зворыгина С.В., Викторова О.Л. Определение рациональных геометрических параметров пространственных плитно-стержневых систем с применением адаптационного метода // Региональная архитектура и строительство. 2019. № 1 (38). С. 105–111. EDN: MDXKBD
8. Simões T.M., Ribeiro P., António C.C. Maximisation of bending and membrane frequencies of vibration of variable stiffness composite laminated plates by a genetic algorithm. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. 2023;12:1275. <https://doi.org/10.1007/s42417-023-01022-3> EDN: VGZFEJ
9. Poshvyach D., Lukianchenko O. Research of stochastic stability of constructions parametric vibrations by the Monte-Carlo method. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2024;(112):32–331. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2024.112.327-331> EDN: NAGQPV
10. Dmitrieva T.L., Ulambayar Kh. Algorithm for building structures optimization based on Lagrangian functions. *Magazine of Civil Engineering*. 2022;109(1):10910. <https://doi.org/10.34910/MCE.109.10> EDN: DEHQHE
11. Korobko V.I., Korobko A.V. *Quantification of symmetry*. Moscow: ASV Publ.; 2008. (In Russ.) ISBN 978-5-93093-544-8
Коробко В.И., Коробко А.В. Количественная оценка симметрии. Москва : ACB, 2008. 128 с. ISBN 978-5-93093-544-8
12. Korobko A.V., Prokurov M.Yu. Automated calculation of form factor of simply connected plane domains with convex polygonal contour. *Building and Reconstruction*. 2016;6(68):29–40. (In Russ.) EDN: XBKCAN
Коробко А.В., Прокуров М.Ю. Автоматизированный подсчёт коэффициента формы односвязных плоских областей с выпуклым полигональным контуром // Строительство и реконструкция. 2016. № 6 (68). С. 29–40. EDN: XBKCAN
13. Pólya G., Szegő G. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press.; 1951. ISBN: 1400882664, 9781400882663
14. Chernyaev A.A. Construction of algorithms and development of computer programs in design variant plate-core power structures of conditions by reinforcement plate geometric modeling form. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2016;12(2):147–157. (In Russ.) EDN: WCYGAF
Черняев А.А. Построение алгоритмы и разработка программы для ЭВМ по вариантному проектированию пластинчато-стержневых силовых конструкций из условий жесткости пластин путем геометрического моделирования их формы // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. 2016. № 2 (12). С. 147–157. EDN: WCYGAF

15. Chernyaev A.A. Alternative engineering of steel girder cages by geometrical methods. *Magazine of Civil Engineering*. 2018;78(2):3–15. <https://doi.org/10.18720/MCE.78.1> EDN: XPKZRB

16. Chernyaev A.A. Geometric modeling of a shape of parallelogram plates in a problem of free vibrations using conformal Radii. *Tomsk State University journal of mathematics and mechanics*. 2021;(70):139–159. (In Russ.) <https://doi.org/10.17223/19988621/70/12> EDN: ISHAER

Черняев А.А. Геометрическое моделирование формы параллелограммных пластин в задаче свободных колебаний с использованием конформных радиусов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 143–159. <https://doi.org/10.17223/19988621/70/12> EDN: ISHAER

17. Kazantsev V.P., Zolotov O.A., Dolgoplova M.V. Electrostatics on the plane. Potential normalization. Capacities of the lonely conductor and the line concerning a point. Conformal radiuses. *Bulletin of the Krasnoyarsk State University. Series: physical and mathematical sciences*. 2005;(1):32–38. (In Russ.) EDN: KLNDRX

Казанцев В.П., Золотов О.А., Долгополова М.В. Электростатика на плоскости. Нормировка потенциала. Емкости уединенного проводника и линии относительно точки. Конформные радиусы // Вестник Красноярского государственного университета. Серия: Физико-математические науки. 2005. № 1. С. 32–38. EDN: KLNDRX

18. Soninbayar J.A. Sequential method conformal mappings. *Annals Of Mathematics And Physics*. 2023;6(2):154–155. <https://doi.org/10.17352/amp.000095> EDN: IBNACY

19. Chernyaev A.A. Solving two-dimensional problems of the theory of elasticity and structural mechanics by interpolation using conformal radii. *Structural mechanics and structures*. 2017;2(15):32–44. (In Russ.) EDN: ZXMGSP

Черняев А.А. Решение двумерных задач теории упругости и строительной механики методом интерполяции с использованием конформных радиусов // Строительная механика и конструкции. 2017. № 2 (15). С. 32–44. EDN: ZXMGSP

20. Mazja V.G., Nazarov S.A. Paradoxes of limit passage in solutions of boundary value problems involving the approximation of smooth domains by polygonal domains. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*. 1987;29(3):511–533. <https://doi.org/10.1070/IM1987v029n03ABEH000981>

21. Korobko A.V., Chernyaev A.A. Determination of the fundamental frequency of free vibrations of plates using conformal radii. *Building and Reconstruction*. 2011;1(33):12–18. (In Russ.) EDN: OIJZKN

Коробко А.В., Черняев А.А. Определение основной частоты свободных колебаний пластинок с использованием конформных радиусов // Строительство и реконструкция. 2011. № 1 (33). С. 12–18. EDN: OIJZKN

22. Ibrahim S.M., Alsayed S., Abbas H. Carrera E., Al-Salloum Y., Almusallam T. Free vibration of tapered beams and plates based on unified beam theory. *Journal of Vibration and Control*. 2013;20(16):2450–2463. <https://doi.org/10.1177/1077546312473766>

23. He X.C., Yang J.S., Mei G.X., Peng L.X. Bending and free vibration analyses of ribbed plates with a hole based on the FSDT meshless method. *Engineering Structures*. 2022;272(2):114914. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114914> EDN: MQVIBS

24. Eltaş S., Guler M.A., Tsavdaridis K.D., Sofias C., Yildirim B. On the beam-to-beam eccentric end plate connections: a Numerical Study. *Thin-Walled Structures*. 2023;188(2):110787. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110787> EDN: MUPUYO

25. Karpilovskiy V.S., Kriksunov E.Z., Malyarenko A.A., Fialko S.Yu., Perel'muter A.V., Perel'muter M.A. *SCAD Office. Version 21*. Moscow: SKAD SOFT Publ.; 2015. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/msHDERp3z3XOE> (accessed: 20.12.2024)

Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Малайренко А.А., Фиалко С.Ю., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. *SCAD Office. Версия 21*. Вычислительный комплекс SCAD++. Москва : СКАД СОФТ, 2015. 848 с. URL: <https://djvu.online/file/msHDERp3z3XOE> (дата обращения: 20.12.2024).