

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ватин Н.И., д-р техн. наук, проф., РУДН, Москва, Россия

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Ерофеев В.Т., акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., МГУ им. Н.П. Огарева, Саранск, Россия**Колчунов В.И.**, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Мамиева И.А., РУДН, Москва, Россия

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Агапов В.П., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия**Ашиходжаев А.И.**, д-р техн. наук, проф., ТГТУ, Ташкент, Узбекистан**Базаров Д.Р.**, д-р техн. наук, проф., ТИИМ, Ташкент, Узбекистан**Ватин В.В.**, д-р техн. наук, проф., КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина**Варум У.**, д-р философии, проф., Университет Порту, Порту, Португалия**Войцкицкий З.**, проф., Вроцлавский научно-технический университет, Вроцлав, Польша**Волосухин В.А.**, д-р техн. наук, проф., Кубанский ГАУ, Краснодар, Россия**Галишикова В.В.**, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия**Дуцев М.В.**, д-р архитектуры, проф., ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия**Евкин А.Ю.**, д-р техн. наук, проф., независимый исследователь, Торонто, Канада**Какои С.**, д-р философии, проф., Технологический университет ПЕТРОНАС, Перак, Малайзия**Карпенко Н.И.**, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., НИИСФ РААСН, Москва, Россия**Козлов Д.В.**, д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия**Красич С.**, канд. техн. наук, Нишский университет, Ниш, Сербия**Кудрявцев С.А.**, чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф., ДВГУПС, Хабаровск, Россия**Курбацкий Е.Н.**, д-р техн. наук, проф., МИИТ, Москва, Россия**Лазарев Ю.Г.**, д-р техн. наук, проф., СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия**Магуле Ф.**, проф., Высшая инженерная школа «Централь Сюпелек», Университет Париж-Сакли, Париж, Франция**Мендонка П.**, д-р философии, Архитектурная школа, Университет Минью, Брага, Португалия**Перькова М.В.**, д-р архитектуры, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия**Сантос Р.**, исследователь, Национальная лаборатория строительной техники, Лиссабон, Португалия**Травуш В.И.**, акад. РААСН, д-р техн. наук, проф., ЭНПИ, Москва, Россия**Федюк Р.С.**, д-р техн. наук, доцент, ДВФУ, Владивосток, Россия**Якутов Н.М.**, чл.-корр. РИА, д-р техн. наук, проф., ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия

СОДЕРЖАНИЕ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

- Зверев Е.М.* Исследование напряженно-деформированного состояния изгиба длинной полосы из разномодульного трещиноватого материала применительно к образованию трещин в растянутой зоне бетона 509
- Клочков М.Ю.* Использование различных формулировок МКЭ в расчетах тонкостенных конструкций 526
- Мозолов М.В., Окольников Г.Э.* Оценка выбора модели метода конечных элементов для расчета балок на основе распределения касательных напряжений 539

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

- Kurbanmagomedov A.K., Morozov E.M.* Specific Strength Under Combined Loading (Удельная прочность при сложном сопротивлении) 552

РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

- Krivoshapko S.N.* Analytical Calculation of Cylindrical Shells in the form of Second-Order Algebraic Surfaces (Аналитический расчет цилиндрических оболочек в форме алгебраических поверхностей второго порядка) 567

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

- Харченко И.Я., Харченко А.И., Панченко А.И., Ерофеев В.Т., Мирсаяпов И.Т., Хозин В.Г., Тараканов О.В., Завалишин Е.В.* Инъекционные технологии для устранения карстово-суффозионной опасности и просадочности грунтов в основании зданий и сооружений 593

СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

- Rakhmonov B.S., Sagdiev Kh.S., Ter-Martirosyan A.Z., Mirsayapov I.T., Erofeev V.T.* Energy-Based Evaluation of Dynamic Soil-Structure Interaction Process Under Seismic Impact from Explosion (Энергетическая оценка процесса взаимодействия в динамической системе «грунт — сооружение» при сейсмозрывных воздействиях) 613

Редактор И.Л. Панкратова

Редактор англоязычных текстов Е.Ф. Шалеева

Дизайн обложки Ю.Н. Ефремовой

Компьютерная верстка Н.В. Маркеловой

Адрес редакции:

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; тел./факс: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru, i_mamieva@mail.ru

Подписано в печать 15.12.2024. Выход в свет 28.12.2024. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 14,18. Тираж 250 экз. Заказ № 2059. Цена свободная.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

Российская Федерация, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

STRUCTURAL MECHANICS OF ENGINEERING CONSTRUCTIONS AND BUILDINGS

2024 VOLUME 20 No. 6

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-6

<http://journals.rudn.ru/structural-mechanics> (Open Access)

Founded in 2005

by Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)

Published 6 times a year.

Languages: Russian, English.

Indexed by RSCI, Russian Index of Science Citation, Cyberleninka, DOAJ, Google Scholar, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, Dimensions.

The journal has been included in the list of the leading review journals and editions of the Highest Certification Committee of Ministry of Education and Science of Russian Federation in which the basic results of PhD and Doctoral Theses are to be published.

International scientific-and-technical peer-reviewed journal "Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings" shows the readers round the achievements of Russian and foreign scientists in the area of geometry of spatial structures, strength of materials, structural mechanics, theory of elasticity and analysis of building and machine-building structures, illuminates the problems of scientific-and-technic progress in building and machine-building, publishes analytic reviews on the aims and scope of the journal.

The journal website contains full information about the journal, editorial policy and ethics, requirements for the preparation and publication of the articles, etc., as well as full-text issues of the journal since 2008 (Open Access).

EDITORIAL BOARD

EDITOR-IN-CHIEF

Nikolai I. Vatin, DSc, Professor, RUDN University, Moscow, Russia

ASSISTANT EDITORS-IN-CHIEF

Vladimir T. Erofeev, member of the RAACS, DSc, Professor, Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

Vitaly I. Kolchunov, member of the RAACS, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

MANAGING EDITOR

Iraida A. Mamieva, RUDN University, Moscow, Russia

MEMBERS OF EDITORIAL BOARD:

Anvar I. Adylkhodzhaev, DSc, Professor, TSTU, Tashkent, Uzbekistan

Vladimir P. Agapov, DSc, Professor, NRU MGSU, Moscow, Russia

Dilshod R. Bazarov, DSc, Professor, TIAME, Tashkent, Uzbekistan

Mikhail V. Dutsev, Dr. of Architecture, NNGASU, Nizhny Novgorod, Russia

Alexander Yu. Evkin, DSc, Professor, independent scientist, Toronto, Canada

Roman S. Fedyuk, DSc, Associate Professor, FEPU, Vladivostok, Russia

Vera V. Galishnikova, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Saeid Kakooei, PhD, senior lecturer, Universiti Teknologi PETRONAS, Seri Iskandar, Malaysia

Nikolay I. Karpenko, member of the RAACS, DSc, Professor, NIIF RAACS, Moscow, Russia

Dmitriy V. Kozlov, DSc, Professor, MGSU, Moscow, Russia

Sonja Krasic, PhD of Technical Science, University of Nis, Nis, Serbia

Sergey A. Kudryavtsev, corresponding member of the RAACS, DSc, Professor, FESTU, Khabarovsk, Russia

Evgeniy N. Kurbatskiy, DSc, Professor, MIIT, Moscow, Russia

Yuriy G. Lazarev, DSc, Professor, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Fredéric Magoulès, DSc, Professor, Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Paris, France

Paulo Mendonça, Associate Professor, Architecture School, University of Minho, Braga, Portugal

Margarita V. Perkova, Dr. of Architecture, SPbPU, St. Petersburg, Russia

Ricardo Santos, PhD in Civil Engineering, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal

Vladimir I. Travush, member of the RAACS, DSc, Professor, ENPI, Moscow, Russia

Vladimir V. Vanin, DSc, Professor, NTUU KPI, Kiev, Ukraine

Humberto Varum, Full Professor, University of Porto, Porto, Portugal

Viktor A. Volosukhin, DSc, Professor, KubSAU, Krasnodar, Russia

Zbigniew Wójcicki, Professor, Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Poland

Nukh M. Yakupov, corresponding member of the Russian Academy of Engineering, DSc, Professor, IME of FIC KazanSC of RAS, Russia

CONTENTS

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS

OF STRUCTURES

Zveryaev E.M. Study of Stress-Strain State of Long Cracked Multi-Modulus Strip in Bending in Relation to Crack Formation in Tensile Zone of Concrete... 509

Klochkov M.Yu. Using Different FEM Formulations in Calculations of Thin-Walled Structures 526

Mozgolev M.V., Okolnikova G.E. Evaluation of Selection of Finite Element Model for Beam Analysis Based on Shear Stress Distribution 539

PROBLEMS OF THEORY OF ELASTICITY

Kurbanmagomedov A.K., Morozov E.M. Specific Strength Under Combined Loading 552

ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS

Krivoshapko S.N. Analytical Calculation of Cylindrical Shells in the Form of Second-Order Algebraic Surfaces 567

ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

Kharchenko I.Ya., Kharchenko A.I., Panchenko A.I., Erofeev V.T., Mirsayapov I.T., Khazin V.G., Tarakanov O.V., Zavalishin E.V. Injection Technologies for Elimination of Karst-Suffosion Hazard and Soil Subsidence in the Foundation of Buildings and Structures 593

SEISMIC RESISTENCE

Rakhmonov B.S., Sagdiev Kh.S., Ter-Martirosyan A.Z., Mirsayapov I.T., Erofeev V.T. Energy-Based Evaluation of Dynamic Soil-Structure Interaction Process Under Seismic Impact from Explosion 613

Copy Editor I.L. Pankratova

English Texts' Editor E.F. Shaleeva

Graphic Designer Iu.N. Efremova

Layout Designer N.V. Markelova

Address of the Editorial Board:

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; tel./fax: +7 (495) 955-08-28; e-mail: stmj@rudn.ru, i_mamieva@mail.ru

Printing run 250 copies. Open price

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba
6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation

Printed at Publishing House of RUDN University
3 Ordzhonikidze St, Moscow, 115419, Russian Federation

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-6-509-525

УДК 539.3

EDN: CEORTO

Научная статья / Research article

Исследование напряженно-деформированного состояния изгиба длинной полосы из разномодульного трещиноватого материала применительно к образованию трещин в растянутой зоне бетона

Е.М. Зверяев^{ID}

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

ЦНИИ строительных конструкций им. В.А. Кучеренко, Москва, Россия

✉ zveriaev@mail.ru

Поступила в редакцию: 3 сентября 2024 г.

Принята к публикации: 4 декабря 2024 г.

Аннотация. Задача нахождения напряженно-деформированного состояния полосы из разномодульного материала может быть вопреки существующему мнению о существенной нелинейности поставлена как линейная для двухслойной полосы. Дифференциальные уравнения теории упругости первого порядка плоской задачи для полосы сводятся к безразмерному виду и заменяются интегральными уравнениями относительно поперечной координаты подобно тому, как это делается в методе простых итераций Пикара. При этом в интегральных уравнениях перед знаком интеграла появляется как множитель малый параметр, с помощью которого обеспечивается сходимость решений в соответствии с принципом сжатых отображений, называемым также теоремой Банаха о фиксированной точке. Исходная система уравнений теории упругости расщеплена на интегрируемые уравнения поперечного изгиба, продольного растяжения-сжатия и краевого эффекта. Найденные решения удовлетворяют всем граничным условиям задачи теории упругости. Записана определяющая положение нейтральной оси при изгибе формула. Для разномодульного материала, такого как бетон, нейтральная линия при изгибе существенно сдвигается вверх в области сжатия, в результате чего на нижней растянутой грани возникают большие перемещения и создаются условия для раскрытия вертикальных трещин. Объяснено появление наклонных трещин около опор.

Ключевые слова: метод Сен-Венана — Пикара — Банаха, SVPB, принцип сжатых отображений, малый параметр, слоистая полоса, нейтральная линия, итерации, разномодульный трещиноватый материал, краевой эффект

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Зверяев Е.М. Исследование напряженно-деформированного состояния изгиба длинной полосы из разномодульного трещиноватого материала применительно к образованию трещин в растянутой зоне бетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 6. С. 509–525. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-509-525>

Зверяев Евгений Михайлович, доктор технических наук, профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 4893-2337, ORCID: 0000-0001-8097-6684; e-mail: zveriaev@mail.ru

© Зверяев Е.М., 2024

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Study of Stress-Strain State of Long Cracked Multi-Modulus Strip in Bending in Relation to Crack Formation in Tensile Zone of Concrete

Evgeniy M. Zveryaev 

RUDN University, Moscow, Russia

Kucherenko Institute of Building Structures, Moscow, Russia

✉ zveriaev@mail.ru

Received: September 3, 2024

Accepted: December 4, 2024

Abstract. The problem of strength analysis of a multi-modulus strip, in contradiction to the existing standpoint of essential nonlinearity, may be formulated as a linear problem for a two-layer strip. First order differential equations of the theory of elasticity for the plane strip problem are transformed to dimensionless form and are replaced by integral equations with respect to the transverse coordinate, similar to how it is done in the Picard's method of simple iterations. In this case, a small parameter appears as a multiplier in the integral equations before the integral sign, which ensures the convergence of solutions in accordance with the contraction mapping principle, also called the Banach fixed point theorem. The original system of equations of elasticity theory is splitted into integratable equations of bending, axial tension-compression and edge effect. The found solutions satisfy all boundary conditions of the elasticity theory problem. The formula determining the position of the neutral axis during bending is written. For a multi-modulus material, such as concrete, the neutral line shifts upward significantly in the compression region during bending, resulting in large displacements at the lower edge in tension and creating conditions for opening of vertical cracks. The occurrence of inclined cracks near supports is explained.

Keywords: Saint-Venant — Picard — Banach (SVPB) method, contraction mapping principle, small parameter, layered strip, neutral line, iterations, cracked multi-modulus material, edge effect

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

For citation: Zveryaev E.M. Study of stress-strain state of long cracked multi-modulus strip in bending in relation to crack formation in tensile zone of concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024; 20(6):509–525. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-509-525>

1. Введение

Конструкционные материалы в процессе эксплуатации испытывают различные нагрузки, вызывающие сжимающие или растягивающие напряжения. Выбор структуры материала зависит от условий эксплуатации элемента сооружения или конструкции, а также от вида нагрузки и сопротивляемости материала в том или ином направлении. Считается, что в некоторых задачах для описания напряженно-деформированного состояния твердого тела может оказаться недостаточно линейного представления Гука. Практика показывает, что во многих случаях различная сопротивляемость конструкционных материалов сжимающим и растягивающим напряжениям зависит даже не от анизотропии свойств конструкции вдоль осей главных напряжений, а скорее от микрповреждений и неоднородностей, расположенных случайно по всему объему материала. Естественнo предположить, что наличие микродефектов может сказаться не лучшим образом на «работоспособности» материала, а зачастую приводит его к разрушению раньше предназначенного срока. Все сказанное в полной мере относится к старейшему и, пожалуй, наиболее сложному композиционному материалу — бетону.

Разномодульная теория упругости берет свое начало с работ [1–4], относящихся к концу 60-х годов прошлого столетия и спровоцировавших ряд публикаций [5–21], продолжающихся до настоящего времени. В [5; 12] считается, что определяющие соотношения основаны на обобщении клас-

Evgeniy M. Zveryaev, DSc. In Engineering, Professor of the Department of Construction Technologies and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 4893-2337, ORCID: 0000-0001-8097-6684; e-mail: zveriaev@mail.ru

сического упругого потенциала, характеризующего зависимость свойств материала от вида напряженного состояния. В этом случае в качестве параметра, характеризующего вид напряженного состояния, предлагается взять отношение среднего напряжения к интенсивности напряжений. Монография [6] посвящена построению обобщенных классических теорий тонкостенных тел, таких как пластины и оболочки, при некоторых предложенных автором соотношениях упругости для разномодульных тел. Автор отмечает, что для уточнения предложенных теорий и построения корректных механических моделей разномодульных материалов требуются новые экспериментальные исследования. В [7; 8] рассматривается поведение тел из разномодульного материала с позиций теории возмущений. Подобным образом свойства линейных физических соотношений разномодульного материала исследуются в [9]. В [10] предложена конструктивная теория для поперечно-изотропных бимодульных материалов с классом стационарных волновых решений. Работы [11–15] посвящены разработке определяющих соотношений разномодульной теории упругости. Статья [16] посвящена решению задачи определения температурных напряжений в балке.

В [17] предложен метод эквивалентного сечения, который используется для преобразования бимодулярной криволинейной балки в классическую с особым модулем; упрощенное решение для изгибных напряжений определено путем изменения параметров, относящихся к характеристикам сечения. Для получения явного выражения нейтрального слоя используется метод возмущений. После нахождения положения нейтрального слоя метод функции напряжения используется для получения решения для напряжений и перемещений при выполнении граничных условий и условий непрерывности. На основе решения упругости рассматривается задача начальных напряжений в бимодульном многосвязном теле. Сравнение двух решений показывает, что упрощенное решение очень хорошо согласуется с упругим. Кроме того, также обсуждаются учет касательного напряжения и применение метода эквивалентного сечения в железобетонных криволинейных балках. Результаты показывают, что бимодулярность материалов оказывает определенное влияние на изгибные свойства бимодульной изогнутой балки. В [18] проведен анализ вязкости разрушения двухфазной стали с использованием метода предельной работы разрушения.

В [19] на основе классической гипотезы Кирхгофа предложена упрощенная механическая модель, пригодная для решения задач для бимодульных тонких пластин малого прогиба. В [20] представлены результаты численного счета для бимодульной круглой пластины.

В некоторых работах основная проблема разномодульных задач сводится к обобщению классического упругого потенциала, содержащего две константы (сдвиговой и объемный модули) на среды, разносопротивляющиеся растяжению и сжатию.

В экспериментальных работах тем или иным способом разыскиваются модули упругости в сжатой и растянутой зоне тела. Например, в [21] рассмотрена и численно с помощью метода конечных элементов просчитана модель нелинейной упругости, основанная на использовании параметра трехосности для описания вида напряженного состояния материала. Отмечается, что экспериментальные исследования деформирования слоистых композиционных материалов часто показывают сложную зависимость жесткостных и прочностных характеристик от типа нагружения. Утверждается, что учесть подобные эффекты в прикладных расчетах возможно лишь с использованием моделей нелинейной упругости. Трудности, с которыми столкнулись авторы упомянутых работ, заключаются в отсутствии решений теории упругости, с одной стороны, достаточно простых, с другой стороны, свободных от каких-либо априорных гипотез.

В настоящей работе на основе непротиворечивого решения уравнений линейной теории упругости [22; 23] для длинной упругой двухслойной полосы из разномодульного материала без каких-либо априорных допущений и предположений об искомым неизвестных находятся все неизвестные задачи и формула для нейтральной линии, разделяющей участки сжатия и растяжения. Решения представляются асимптотическими рядами по малому параметру и вследствие этого являются сходящимися в силу теоремы Банаха о неподвижной точке.

2. Произвольно нагруженная по длинным сторонам двухслойная разномодульная полоса

Длинная прямоугольная полоса рассматривается в прямоугольной системе координат x^* , z^* (рис. 1), так что $0 \leq x^* \leq l$, $-h \leq z^* \leq h$.

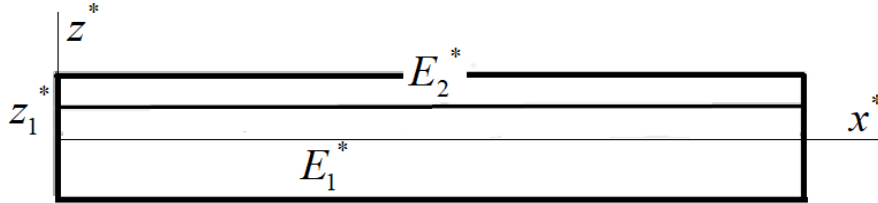


Рис. 1. Полоса из разномодульного материала, представленная как двухслойная полоса

И с т о ч н и к: выполнено Е.М. Зверевым

Figure 1. A strip of multi-modulus material presented as a two-layer strip

Source: made by E.M. Zveryaev

Длинные стороны полосы $z^* = \pm h$ несут произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть так или иначе закреплены или тоже нагружены. Известные уравнения плоской задачи теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} = 0;$$

$$E^* \varepsilon_x = \sigma_x^* - \nu \sigma_z^*, \quad E^* \varepsilon_z = \sigma_z^* - \nu \sigma_x^*, \quad \gamma = \frac{2(1+\nu)}{E^*} \tau^*;$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*},$$

описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы в безразмерных координатах $x = x^* / l$, $z = z^* / h$, перемещениях $u = u^* / h$, $w = w^* / h$ вдоль осей x^* , z^* соответственно и нормальных $\sigma_x = \sigma_x^* / E_h^*$, $\sigma_z = \sigma_z^* / E_h^*$ и касательных $\tau = \tau^* / E_h^*$ напряжениях (размерные перемещения и напряжения отмечены звездочкой) принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \tau' = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} + \varepsilon \sigma_x' = 0;$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z), \quad \tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma, \quad \sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x);$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon u', \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon w'. \quad (1)$$

Здесь E — безразмерный модуль упругости, определенный формулой $E^* = E(z) E_h^*$, где E_h^* — некоторое значение модуля Юнга или какое-либо другое подходящее по размерности и смыслу значение; $E(z)$ — безразмерная заданная по слоям функция, которая может быть разрывной, так же как и ее первая производная; $\nu = \nu(z)$ — коэффициент Пуассона, считающиеся для анизотропного или компо-

зита материала функциями координат; $\varepsilon_x, \varepsilon_z$ — безразмерные по определению продольная и поперечная деформации; γ — сдвиг, также по определению безразмерная величина. Штрихом обозначена операция дифференцирования по безразмерному аргументу x , и введено обозначение для малого параметра $\varepsilon = h/l$. Более того, в общем случае коэффициенты E и ν могут также зависеть от продольной координаты x .

Примем, что нижний слой при $-1 \leq z \leq z_1$, $0 \leq x \leq 1$ имеет жесткость E_1 и коэффициент Пуассона ν_1 , верхний слой при $z_1 \leq z \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ имеет жесткость E_2 и коэффициент Пуассона ν_2 . Для простоты записи с тем, чтобы выделить основную идею работы, заключающейся в исследовании разномодульности трещиноватой среды, примем E_1, E_2, ν не зависящими от координат x и z .

Расположив уравнения системы (1) в определенной последовательности и задав в качестве известных величин начального приближения некоторые $w_{(0)} = w_0(x)$ и $\tau_{(0)} = \tau_0(x)$, можно свести вычисления к методу последовательных приближений в соответствии со следующей схемой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} &= -\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_0, \quad \frac{\partial \sigma_{z(0)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau_0', \quad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_{(0)}'; \\ \sigma_{x(0)} &= E \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)}, \quad \varepsilon_{z(0)} = -\nu \varepsilon_{x(0)} + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{z(0)}; \\ \frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} &= \varepsilon_{z(0)}, \quad \frac{\partial \tau_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \sigma_{x(0)}', \quad \frac{\partial \sigma_{z(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau_{(1)}', \quad \frac{\partial u_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon w_{(1)}' + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{(1)} \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Здесь и далее нижним индексом в скобках обозначен номер приближения и штрихом — операция дифференцирования по координате x .

В силу независимости величин начального приближения от z все неизвестные вычисляются в результате интегрирования по z :

$$\begin{aligned} u_{(0)} &= -\varepsilon w_0' z + \tau_0 \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + u_0; \\ \varepsilon_{x(0)} &= -\varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \varepsilon u_0'; \\ \sigma_{z(0)} &= -\varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z0}; \\ \sigma_{x(0)} &= -E \varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \left[E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \nu z \right] + E \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0}; \\ \varepsilon_{z(0)} &= \nu \varepsilon^2 w_0'' z - \varepsilon \tau_0' \left[\nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{1-\nu^2}{E} z \right] - \nu \varepsilon u_0' + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{z0}; \\ w_{(1)} &= \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z \nu dz - \varepsilon \tau_0' \left[\int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + \int_0^z \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz \right] + \sigma_{z0} \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz - \varepsilon u_0' \int_0^z \nu dz + w_0; \\ \tau_{(1)} &= \varepsilon^3 w_0''' \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[\int_0^z \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z \nu dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^z E dz - \varepsilon \sigma_{z0}' \int_0^z \nu dz + \tau_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{z(1)} = & -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} E z d z d z + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[\int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} E \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+\nu)}{E} d z d z d z - \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} \nu z d z d z \right] + \\
& + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} E z d z d z + \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} \nu d z d z - \varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z0}; \\
u_{(1)} = & -\varepsilon w_0' z + \tau_0 \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+\nu)}{E} d z + u_0 - \varepsilon^3 w_0''' \left[\int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} \nu z d z d z \varepsilon^3 + \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} E z d z d z \right] + \\
& + \varepsilon^2 \tau_0'' \left\{ \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} \frac{1-\nu^2}{E} z d z d z + \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} \nu \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+\nu)}{E} d z d z d z \right\} - \frac{2(1+\nu)}{E} \left[\int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} E \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+\nu)}{E} d z d z d z - \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} \nu z d z d z \right] + \\
& + \varepsilon^2 u_0'' \left\{ \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} \nu d z d z - \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} E z d z d z \right\} - \varepsilon \sigma_{z0}' \left\{ \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} \nu d z d z + \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} \frac{1-\nu^2}{E} d z d z \right\}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Последнее выражение из (2) показывает, что к полученным величинам нулевого приближения из первой формулы для $u_{(0)}$ в первой итерации к одноименным добавляются члены, имеющие относительный множитель ε^2 , то есть к w_0' добавляется $\varepsilon^3 w_0'''$, к τ_0 добавляется $\varepsilon^2 \tau_0''$ и к u_0 добавляется $\varepsilon^2 u_0''$. Коэффициенты при этих добавочных членах в силу выбора единиц измерения при формировании безразмерных величин имеют порядок ε^0 . Поэтому добавочные величины, если они не являются быстро меняющимися, т.е. не увеличиваются в ε^{-1} раз при дифференцировании, будут $O(\varepsilon^2)$ и могут быть отброшены.

3. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы

На лицевых поверхностях полосы $z^* = \pm h$ должны удовлетворяться граничные условия, соответствующие условиям нагружения. В безразмерном виде эти условия записываются так:

$$\sigma_z = Z_+(x), \quad \tau = X_+(x) \quad \text{при } z = 1; \quad \sigma_z = Z_-(x), \quad \tau = X_-(x) \quad \text{при } z = -1, \quad (3)$$

где безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на жесткость E_h . Условия (3) будем удовлетворять величинами первого приближения из общих решений (2) в предположении, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины. Полученная таким образом система уравнений

$$\begin{aligned}
\varepsilon^3 w_0''' \int_0^1 E z d z - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[\int_0^1 E \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+\nu)}{E} d z d z - \int_0^1 \nu z d z \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^1 E d z - \varepsilon \sigma_{z0}' \int_0^1 \nu d z + \tau_0 = X_+, \\
\varepsilon^3 w_0''' \int_0^{-1} E z d z - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[\int_0^{-1} E \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+\nu)}{E} d z d z - \int_0^{-1} \nu z d z \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^{-1} E d z - \varepsilon \sigma_{z0}' \int_0^{-1} \nu d z + \tau_0 = X_-, \\
-\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} E z d z d z + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[\int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} E \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+\nu)}{E} d z d z d z - \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} \nu z d z d z \right] + \\
+ \varepsilon^3 u_0''' \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} E z d z d z + \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' \int_0^{\bar{z}} \int_0^{\bar{z}} \nu d z d z - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z0} = Z_+,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[\int_0^{-1} \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z \nu z dz dz \right] + \\
& + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' \int_0^{-1} \int_0^z \nu z dz dz + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z0} = Z_-
\end{aligned} \quad (4)$$

может быть разрешена относительно основных неизвестных $\tau_0(x)$, $\sigma_{z0}(x)$, $w_0(x)$, $u_0(x)$ после вычисления в общем случае шестнадцати интегральных коэффициентов:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \int_0^1 E z dz & \int_0^1 E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz & \int_0^1 E dz & \int_0^1 \nu dz \\ \int_0^{-1} E z dz & \int_0^{-1} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz & \int_0^{-1} E dz & \int_0^{-1} \nu dz \\ \int_0^1 \int_0^z E z dz dz & \int_0^1 \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z \nu z dz dz & \int_0^1 \int_0^z E z dz dz & \int_0^1 \int_0^z \nu z dz dz \\ \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz & \int_0^{-1} \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z \nu z dz dz & \int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz & \int_0^{-1} \int_0^z \nu z dz dz \end{array} \right\}$$

от заданных функций $E(z)$ и $\nu(z)$.

Примем (рис. 1), что нижний слой при $-1 \leq z \leq z_1$, $0 \leq x \leq 1$ имеет жесткость E_1 , верхний слой при $z_1 \leq z \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ имеет жесткость E_2 ; E_1 и E_2 — константы. Положим для сокращения вычислений и изложения $\nu = \text{const}$ во всей полосе. Вычислим входящие в уравнения интегральные коэффициенты (5) при искомым неизвестных w_0 , u_0 , τ_0 и σ_{z0}

• при $z \geq 0$

$$\int_0^1 E z dz = (E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + E_2 \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz = \frac{2+\nu}{2},$$

$$\int_0^1 E dz = (E_1 - E_2) z_1 + E_2, \quad \int_0^1 \nu dz = \nu;$$

• при $z \leq 0$

$$\int_0^{-1} E z dz = \frac{1}{2} E_1, \quad \int_0^{-1} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz = \frac{2+\nu}{2}, \quad \int_0^{-1} E dz = -E_1, \quad \int_0^{-1} \nu dz = -\nu;$$

• при $z \geq 0$

$$\int_0^1 \int_0^z E z dz dz = (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + E_2 \frac{1}{6}, \quad \int_0^1 \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^1 \int_0^z \nu z dz dz = \frac{2+\nu}{6},$$

$$\int_0^1 \int_0^z E dz dz = \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + E_2 \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \int_0^z \nu z dz dz = \frac{1}{2} \nu;$$

• при $z \leq 0$

$$\int_0^{-1} \int_0^z E z dz dz = -\frac{1}{6} E_1, \quad \int_0^{-1} \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{-1} \int_0^z \nu z dz dz = -\frac{2+\nu}{6},$$

$$\int_0^{-1} \int_0^z E_1 dz dz = \frac{1}{2} E_1, \quad \int_0^{-1} \int_0^z \nu dz dz = \frac{1}{2} \nu$$

и подставим их в уравнения (4)

$$\varepsilon^3 w_0''' \left[(E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + E_2 \frac{1}{2} \right] - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} - \varepsilon^2 u_0'' [(E_1 - E_2) z_1 + E_2] - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_+;$$

$$\varepsilon^3 w_0''' E_1 \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} + \varepsilon^2 u_0'' E_1 + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_-;$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \left[(E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + E_2 \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} +$$

$$+ \varepsilon^3 u_0''' \left[\frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + E_2 \frac{1}{2} \right] + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_+;$$

$$\varepsilon^4 w_0'''' E_1 \frac{1}{6} - \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} + \varepsilon^3 u_0''' E_1 \frac{1}{2} + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_-.$$

Складывая и вычитая попарно первые два и последние два уравнения и поменяв порядок записи уравнений, получим

$$\varepsilon^3 w_0''' \left[(E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] - (2+\nu) \varepsilon^2 \tau_0'' - \varepsilon^2 u_0'' (E_1 - E_2) (z_1 + 1) + 2\tau_0 = X_+ + X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \left[(E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + (E_1 + E_2) \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{3} +$$

$$+ \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2z_1 - z_1^2 - 1) - 2\varepsilon \tau_0' = Z_+ - Z_-,$$

$$\varepsilon^3 w_0''' (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon^2 u_0'' [(E_1 - E_2) z_1 - (E_1 - E_2)] - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}' = X_+ - X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} [(E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + E_1 + E_2] + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} = Z_+ + Z_-.$$

Примем в соответствии с описанием метода SVPB [22] $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ в первой паре уравнений, где τ_0^s — медленно меняющаяся функция; τ_0^q — быстро меняющаяся функция. (Медленно меняющейся функцией называется такая функция, применение к которой оператора $\partial/\partial x$ не меняет ее асимптотического порядка по ε . Быстро меняющейся функцией называется такая, применение к которой оператора $\varepsilon \partial/\partial x$ также не меняет ее асимптотического порядка по ε .)

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2} \left[(E_1 - E_2) z_1^2 + (E_1 + E_2) \right] - (2 + \nu) \varepsilon^2 (\tau_0^{s''} + \tau_0^{q''}) - \\
& - \varepsilon^2 u_0'' \left[(E_1 - E_2) z_1 + E_1 + E_2 \right] + 2(\tau_0^s + \tau_0^q) = X_+ + X_-, \\
& - \varepsilon^4 w_0'''' \left[(E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + (E_1 + E_2) \frac{1}{6} \right] + \frac{2 + \nu}{3} \varepsilon^3 (\tau_0^{s'''} + \tau_0^{q'''}) + \\
& + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2z_1 - z_1^2 - 1) - 2\varepsilon (\tau_0^{s'} + \tau_0^{q'}) = Z_+ - Z_-,
\end{aligned}$$

и запишем их отдельно для быстро меняющихся

$$(2 + \nu) \varepsilon^3 \tau_0^{q''} - 6\varepsilon \tau_0^{q'} = 0, \quad (5)$$

$$-(2 + \nu) \varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0, \quad (6)$$

отмеченных верхним индексом q , и медленно меняющихся неизвестных

$$\varepsilon^3 w_0^{s'''} \left[(E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] - \varepsilon^2 u_0'' \left[(E_1 - E_2) z_1 + E_1 + E_2 \right] + 2\tau_0^s = X_+ + X_-, \quad (7)$$

$$- \varepsilon^4 w_0^{s''''} \left[(E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + (E_1 + E_2) \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2z_1 - z_1^2 - 1) - 2\varepsilon \tau_0^{s'} = Z_+ - Z_-, \quad (8)$$

$$\varepsilon^3 w_0^{s'''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1^2 - 1) - \varepsilon^2 u_0'' \left[(E_1 - E_2) z_1 + (E_1 + E_2) \right] - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}^{s'} = X_+ - X_-, \quad (9)$$

$$- \varepsilon^4 w_0^{s''''} (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) + \varepsilon^3 u_0''' \left[(E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + (E_1 + E_2) \right] + 2\sigma_{z_0}^s = Z_+ + Z_-, \quad (10)$$

отмеченных верхним индексом s . Уравнения (5) и (6) несовместны, так как не могут одновременно обращаться в ноль для одной и той же функции τ_0^q . Ниже при выполнении условий на коротких сторонах в п. 4 будет предложено разрешение этой ситуации.

Продифференцируем первое уравнение по x и умножим на ε . Затем исключим $\tau_0^{s'}$ из первых двух. Получим уравнение, связывающее w_0^s с u_0^s :

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{3} \left[(E_1 - E_2) z_1^3 - (E_1 + E_2) \right] + \varepsilon^3 u_0''' \left[\frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1 - z_1^2 - 1) - (E_1 + E_2) \right] = \\
& = Z_+ - Z_- - \varepsilon (X_+' + X_-').
\end{aligned} \quad (11)$$

Из уравнения (10) замечаем, что $\sigma_{z_0}^s \sim \varepsilon^4$. Поэтому эту величину можно отбросить как малую порядка ε^2 в уравнении (9):

$$\varepsilon^3 w_0^{s'''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1^2 - 1) - \varepsilon^2 u_0'' \left[(E_1 - E_2) z_1 + (E_1 + E_2) \right] = X_+ - X_-. \quad (12)$$

Из системы уравнений (11), (12) находим разрешающее уравнение для w_0^s :

$$\varepsilon^4 C w_0^{s''''} = Z_+ - Z_- - \varepsilon (X_+' + X_-') + \varepsilon \frac{(X_+' - X_-')}{\left[(E_1 - E_2) z_1 + (E_1 + E_2) \right]} \left[\frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1 - z_1^2 - 1) - (E_1 + E_2) \right]. \quad (13)$$

Здесь введено обозначение

$$C = (Z_+ - Z_-) + \varepsilon (X'_+ + X'_-) + \varepsilon \frac{(X_+ - X_-)'}{D} \left[(E_1 - E_2) \left(2z_1 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - (E_1 + E_2) \right]. \quad (14)$$

И разрешающее уравнение для функции u_0^s

$$\varepsilon^3 u_0^{s'''} = \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{2} \frac{(E_1 - E_2)}{[(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)]} (z_1^2 - 1) - \varepsilon \frac{(X'_+ - X'_-)}{[(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)]}, \quad (15)$$

выраженную через функцию w_0^s . Уравнения (13) и (15) могут быть легко проинтегрированы.

Величины τ_0^s и σ_{z0}^s при известных $w_0^{s''''}$ и $u_0^{s''}$ находятся из уравнений (7) и (8):

$$2\tau_0^s = X_+ + X_- - \varepsilon^3 w_0^{s''''} \left[(E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] + \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + E_1 + E_2]; \quad (16)$$

$$2\sigma_{z0}^s = Z_+ + Z_- + \varepsilon^4 w_0^{s''''} (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) - \varepsilon^3 u_0^{s'''} [(E_1 - E_2)(2 - z_1)z_1 + (E_1 + E_2)]. \quad (17)$$

4. Нейтральная линия в полосе из разномодульного материала

Рассмотрим случай изгиба полосы нагрузкой $X_+ = X_- = Z_- = 0$, $Z_+ = -p$. Для простоты примем $p = const$. Уравнения (13) и (15) принимают вид

$$\varepsilon^4 w_0^{s''''} = \frac{p}{C}, \quad \varepsilon^3 u_0^{s'''} = \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{2} \frac{(E_1 - E_2)}{[(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)]} (z_1^2 - 1). \quad (18)$$

Нейтральная линия должна удовлетворять условию отсутствия продольной деформации $\varepsilon_{x(0)}$, определенной второй формулой в списке (2):

$$-\varepsilon^2 w_0^{s''} z + \varepsilon \tau_0^s \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \varepsilon u_0^{s'} = 0. \quad (19)$$

Из формул (13), (15)–(17) следуют оценки

$$w_0^s \sim \varepsilon^{-4} p, \quad u_0^s \sim \varepsilon^{-3} p, \quad \tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0^{s''''} \text{ или } \tau_0^s \sim \varepsilon^{-1} p, \quad \sigma_{z0}^s \sim p. \quad (20)$$

Следовательно, средний член в уравнении (19), соответствующий касательному напряжению, может быть отброшен как малая величина $O(\varepsilon^2)$, и уравнение нейтральной линии будет выглядеть так:

$$-\varepsilon^2 w_0^{s''} z + \varepsilon u_0^{s'} = 0. \quad (21)$$

Таким образом, задача нахождения нейтральной линии в полосе сводится к решению уравнений (18) при заданных условиях на коротких сторонах полосы. Примем их соответствующими условиям свободного опирания полосы и балки (рис. 2).



Рис. 2. Напряжения на коротких сторонах полосы, которые должны быть обращены в ноль при свободном опирании

И с т о ч н и к: выполнено Е.М. Зверевым

Figure 2. Stresses on the short sides of the strip, which must be zero when freely supported
S o u r c e: made by E.M. Zveryaev

При $x = 0; 1$ напряжения $\sigma_x = \tau = 0$. Кроме того, вертикальное перемещение полосы на концах должно отсутствовать. С помощью формул (2) запишем эти условия в развернутом виде:

$$\left\{ \varepsilon^2 w_0'' \int_0^{\bar{z}} v z dz - \varepsilon \tau_0' \left[\int_0^{\bar{z}} \frac{1-v^2}{E} z dz + \int_0^{\bar{z}} v \int_0^{\bar{z}} \frac{2(1+v)}{E} dz dz \right] + \sigma_{z0} \int_0^{\bar{z}} \frac{1-v^2}{E} dz - \varepsilon u_0' \int_0^{\bar{z}} v dz + w_0 \right\}_{x=0;1} = 0;$$

$$\left\{ \left[-E \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon (\tau_0^{s'} + \tau_0^{q'}) (2+v) \right] z + E \varepsilon u_0' + v \sigma_{z0} \right\}_{x=0;1} = 0; \quad (22)$$

$$\left\{ \varepsilon^3 w_0''' \int_0^{\bar{z}} E z dz - \varepsilon^2 (\tau_0^{s''} + \tau_0^{q''}) (2+v) \frac{z^2}{2} - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^{\bar{z}} E dz - v \varepsilon \sigma_{z0}' z + \tau_0 \right\}_{x=0;1} = 0. \quad (23)$$

На основании асимптотических оценок (20) можно в условиях (22) отбросить величины $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с главными:

$$\{w_0\}_{x=0;1} = 0,$$

$$\left\{ \left[-E \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0^{q'} (2+v) \right] z + E \varepsilon u_0' \right\}_{x=0;1} = 0$$

и потребовать обращения в ноль коэффициентов при каждой степени z во втором условии из (22) на краях $x = 0; 1$:

$$w_0 = 0, \quad u_0^{s'} = 0; \quad (24)$$

$$-E \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0^{q'} (2+v) = 0. \quad (25)$$

Вычислим интегралы в выражении (23) и с помощью соотношения (6) и оценки (20) для $\tau_0^s \sim \varepsilon^{-1} p$ приведем к виду:

$$\tau_{(1)} = \left(\frac{1}{2} E_1 \varepsilon^3 w_0''' - \tau_0^q \right) z^2 - \varepsilon^2 u_0'' E_1 z - v \varepsilon \sigma_{z0}' z + \tau_0 = 0 \text{ при } 0 < z < z_1;$$

$$\tau_{(1)} = \left(\frac{1}{2} E_2 \varepsilon^3 w_0''' - \tau_0^q \right) (z^2 - z_1^2) - \varepsilon^2 u_0'' E_2 (z - z_1) - v \varepsilon \sigma_{z0}' (z - z_1) + \tau_0 = 0 \text{ при } z_1 < z < 1;$$

$$\tau_{(1)} = \left(\frac{1}{2} E_1 \varepsilon^3 w_0''' - \tau_0^q \right) z^2 + \varepsilon^2 u_0'' E_1 z + v \varepsilon \sigma_{z0}' z + \tau_0 = 0 \text{ при } -1 < z < 0. \quad (26)$$

Очевидно, что здесь τ_0^q является решением уравнения (6). Уравнение (5) может быть записано так:

$$U = (2 + \nu) \epsilon^3 \tau_0^{q''''} - 2\epsilon \tau_0^{q'} - 4\epsilon \tau_0^{q'}.$$

То есть первые два члена при выполнении уравнения (6) обращаются в ноль, а оставшийся член $-4\epsilon \tau_0^{q'}$ дает реакцию в опоре.

Приравнявая в условиях (26) коэффициенты при каждой степени z и разности степеней $(z - z_1)$, получим условия на краях $x = 0; 1$. Первые условия в скобках служат для определения функции краевого эффекта $\tau_0^q = \tau_0^q(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_1 \epsilon^3 w_0^{q''''} - \tau_0^q &= 0 \quad \text{при } 0 < z < z_1; \\ \frac{1}{2} E_2 \epsilon^3 w_0^{q''''} - \tau_0^q &= 0 \quad \text{при } z_1 < z < 1; \\ \frac{1}{2} E_1 \epsilon^3 w_0^{q''''} - \tau_0^q &= 0 \quad \text{при } -1 < z < 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Несмотря на то, что функция $\tau_0^q = \tau_0^q(x)$ в этих условиях определяется как разрывная, в формулах (27) $\tau_{(1)}$ непрерывна по координате z .

Величина τ_0^q из условия совместности уравнений (25) и (27) должна быть $O(\epsilon^3)$. На основании этой оценки условие (25) после отбрасывания $\epsilon \tau_0^{q'} \sim \epsilon^2 p$ приобретает вид

$$w_0^{s''} = 0. \quad (28)$$

Это условие вместе с первым условием из (24) совпадает с классическими условиями свободного опирания балки на концах $x = 0; 1$. Теперь уравнения (18) могут быть проинтегрированы при условиях (28) и (24) для первого уравнения и условия (24) для второго. Получаем решение для w_0^s, u_0^s

$$w_0^s = \epsilon^{-4} \frac{p}{24C} (x^4 - 2x^3 + x) \quad u_0^s = \epsilon w_0^{s'} \frac{E_1 - E_2}{2[(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)]} (z_1^2 - 1).$$

Подставив $w_0^{s''}$ и $u_0^{s'}$ в уравнение нейтральной линии (21), получим довольно простое уравнение для определения координаты нейтральной линии z_1 :

$$z_1^2 - 2 \frac{E_1 + E_2}{E_2 - E_1} z_1 + 1 = 0.$$

Отсюда получаем подходящее значение координаты нейтральной линии (см. рис. 1)

$$z_1 = \frac{E_1 + E_2}{E_2 - E_1} - \sqrt{\left(\frac{E_1 + E_2}{E_2 - E_1} \right)^2 - 1}.$$

График координаты нейтральной линии $z_1 = z_1(E_1)$ приведен на рис. 3. Принято $E_h = E_2$. На рис. 4 изображен элемент изогнутой полосы/балки со смещенной нейтральной линией FG вследствие раз-

номодульности. На графике видно, что при смещенной вверх нейтральной линии в искривленном элементе полосы $AMEC$ между нормальными к нейтральной линии AC и ME удлинение нижнего слоя CD намного больше укорочения верхнего слоя BA . Например, при $E_1 = 0.1$, когда модули жесткости слоев отличаются в 10 раз, удлинение нижнего волокна CD в 3 раза больше, чем укорочение верхнего волокна BA . При таких перемещениях в нижней части полосы/балки в трещиноватом нижнем слое возможно объединение мелких трещин в большие, изображенные на рис. 4 пунктирными линиями, и их раскрытие.

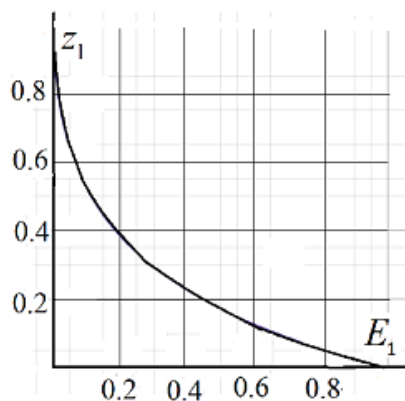


Рис. 3. Зависимость координаты нейтральной линии Z_1 от соотношения жесткостей слоев

И с т о ч н и к: выполнено Е.М. Зверьяевым

Figure 3. Dependence of the coordinate of the neutral line Z_1 on the ratio of the stiffness of the layers

S o u r c e: made by E.M. Zveryaev

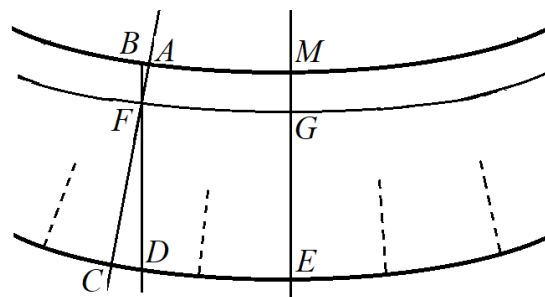


Рис. 4. Появление поперечных трещин в растянутой зоне бетона

И с т о ч н и к: выполнено Е.М. Зверьяевым

Figure 4. The appearance of transverse cracks in the stretched area of concrete

S o u r c e: made by E.M. Zveryaev

На рис. 5, заимствованном из [24], показаны результаты испытания опытных балок, где авторы отмечают: «...первые нормальные трещины при силовом воздействии появлялись во всех балках без исключения при нагрузке $N_i = 7,5 \pm 0,7$ кН. На последующих этапах загрузки появились новые нормальные трещины, дальнейший характер развития которых, как и уровень появления и развития наклонных трещин, находился в определенной зависимости от класса рабочей арматуры, процента стального армирования и вида композитной арматуры, наклеенной на растянутую грань балок».

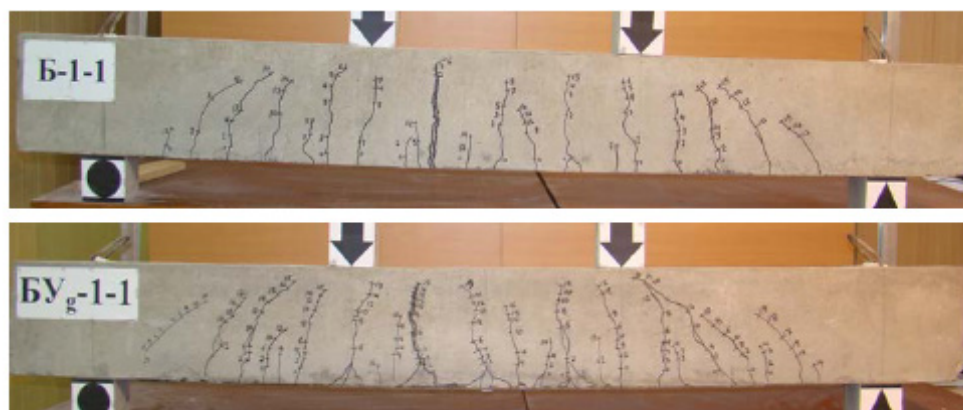


Рис. 5. Расположение трещин в железобетонной балке

И с т о ч н и к: выполнено Д.Р. Маляном, П.П. Польским, А. Михубом [24]

Figure 5. The location of cracks in a reinforced concrete beam

S o u r c e: made by D.R. Malyan, P.P. Polskoy, A. Mihoub [24]

То есть трещины типа изображенных на рис. 4 в разномодульной полосе появляются даже в усиленных арматурой балках. Верхний слой, где бетон подвержен сжатию из-за смещения нейтральной линии, довольно узкий, и, соответственно, смещение нейтральной линии вверх довольно велико. Заметим, что в настоящей статье не учтено безусловно имеющее место изменение модуля упругости в растянутой зоне от некоторой конечной величины до, скорее всего, нуля в нижней части балки.

Для того чтобы объяснить появление наклонных трещин около опор, обратимся к рис. 6. На нем изображены классические эпюры моментов M и поперечных сил Q_{kl} . Последняя изображается прямой линией, достигающей своего наибольшего значения на концах балки. Под ней изображена суммарная эпюра поперечных сил с поправкой от краевого эффекта, описываемого уравнением (6).

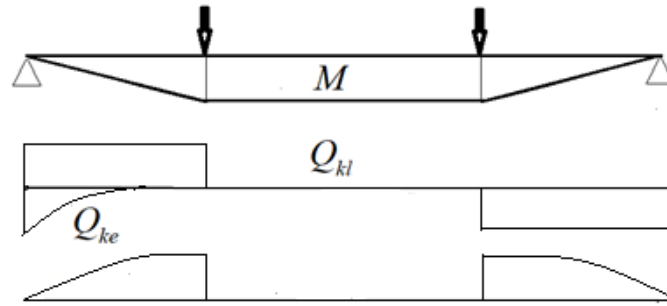


Рис. 6. Уточненная эпюра поперечных сил в полосе по сравнению с балочной

И с т о ч н и к: выполнено Е.М.Зверевым

Figure 6. Расположение трещин в железобетонной балке

S o u r c e: made by E.M. Zveryaev

Из эпюр следует, что в области опор моментные нормальные и касательные напряжения малы.

Рассмотрим балку, не по теории балок принятую в сопротивлении материалов, а по теории упругости как длинную прямоугольную полосу на треугольных призмах-опорах. В этом случае надо выполнить граничные условия отсутствия нормальных и касательных напряжений на торцевых поверхностях полосы. Эта задача решена в [25]. Формула для поперечного напряжения σ_z :

$$\sigma_z = p \left[\frac{3}{4} \left(z - \frac{z^3}{3} \right) + \frac{1}{2} \right] - p \left\{ \frac{\kappa}{\varepsilon} \exp \left(-\frac{\kappa}{\varepsilon} x \right) + \frac{\kappa}{\varepsilon} \exp \left[-\frac{\kappa}{\varepsilon} (1-x) \right] \right\} \left[\frac{3}{4} \left(z - \frac{z^3}{3} \right) - \frac{1}{2} \right],$$

где $\kappa^2 = \frac{2}{2-\nu}$ указывает на отсутствие напряжений в верхних углах полосы. Таким образом, в торцах полосы-балки около опор можно выделить мало напряженные области, идеализованные в виде треугольников ABC и DGM (рис. 7), при этом считать их квазижесткими телами, в которые закреплена средняя часть балки с проекцией в плоскости рисунка в виде трапеции $CMDM$.

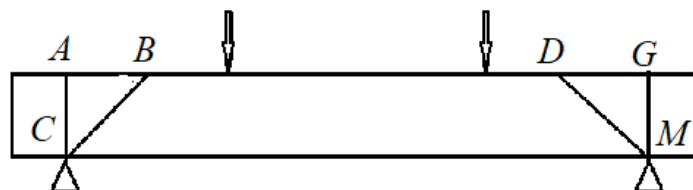


Рис. 7. Квазижесткое включение, образующееся в полосе при свободном опирании

И с т о ч н и к: выполнено Е.М. Зверевым

Figure 7. Quasi-rigid inclusion forming in the strip with free support

S o u r c e: made by E.M. Zveryaev

5. Заключение

Задача нахождения напряженно-деформированного состояния полосы из разномодульного материала вопреки существующему мнению о существенной нелинейности может быть поставлена как линейная для двухслойной полосы.

В ходе проведенного исследования получены следующие результаты.

1. В статье определены изгибная и продольная жесткость двухслойной полосы/балки.
2. Найдена определяющая положение нейтральной оси при изгибе простая формула.
3. Для разномодульного материала, такого как бетон, нейтральная линия при изгибе существенно сдвигается вверх в области сжатия, в результате чего на нижней растянутой грани возникают большие перемещения и создаются условия для раскрытия вертикальных трещин.
4. Объяснено появление наклонных трещин около опор.
5. Получены формулы для всех перемещений и напряжений задачи.
6. Построенное с помощью метода малого параметра решение учитывает все особенности исходной задачи теории упругости и является асимптотически сходящимся в силу теоремы Банаха о неподвижной точке.

Для удобного использования предполагается в дальнейшем формулы переписать для новой системы координат: ось $y = 0$ совместить с нейтральной линией полосы/балки. Это упростит запись формул и вычисления по ним. Также приведенный анализ показывает, что надо провести в дальнейшем исследование трещинообразования для стремящегося к нулю в силу разрушения мостиков по краям трещин на нижней грани полосы модуля упругости.

Также возможно рассмотрение трехслойной полосы с учетом арматуры и четырехслойной с учетом подкрепления полосы композиционными материалами.

Список литературы

1. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разнотвердых к растяжению и сжатию // Инженерный журнал. Механика твердого тела. 1966. № 2. С. 44–53.
2. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. К разномодульной теории упругости // Инженерный журнал Механика твердого тела. 1966. № 6. С. 64–67.
3. Шапиро Г.С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инженерный журнал Механика твердого тела. 1966. № 2. С. 123–125.
4. Матченко Н.М., Толоконников Л.А. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах // Инженерный журнал Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 108–110.
5. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения механики разномодульных тел. М., 1980 (Препринт / АН СССР. Ин-т проблем механики; № 159)
6. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. Москва : Наука, 1982. 320 с. URL: <https://reallib.org/reader?file=449586&pg=3> (дата обращения: 15.06.2024).
7. Isabekian N., Metellus A.-M. Energie de deformation d'un materiau elastique possedant des modules differents en traction et on compression, en theorie des petites perturbations. C R. Acad. Sc. Paris, Serie A. 233 C0. 1978. Vol. 286.
8. Isabekian N., Metellus A.-M. Sur le comportement d'un materiau elastique anisotrope possedant des modules differents en traction et en compression, en theorie des petites perturbations. C R. Acad. Sc. Paris, Serie A-491 A3. 1978. Vol. 286.
9. Wesolowski Z. Piecewise linear elastic material // Archiwum mecbaniki stosowanej. 1970. Vol. 22. No. 3.
10. Benveniste Y. A constitutive theory for transversely isotropic bimodulus materials with a class of steady wave solutions // Acta Mechanica. 1983. Vol. 46. P. 137–153. <https://doi.org/10.1007/BF01176770>
11. Jones R.M. Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression // AIAA J. 1977. Vol. 15. No. 1. P. 16–23. <http://doi.org/10.2514/3.7297>
12. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного материала // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 6. С. 29–34.
13. Березин А.В. О законах деформирования разномодульных дилатирующих сред // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2007. № 2. С. 70–72. EDN: IAFRVN
14. Цвелодуб И.Ю. О разномодульной теории упругости // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 1. С. 157–164.

15. Adamov A.A. Methodological problems in experimental studies and verification of the governing equations of the theory of elasticity for an isotropic body with different moduli in tension and compression // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2020. Vol. 61. No. 6. C. 979–985. <https://doi.org/10.1134/S0021894420060115>. EDN: JRGLER
16. Guo Y., Wen S.-R., Sun J.-Y., He X.-T. Theoretical Study on Thermal Stresses of Metal Bars with Different Moduli in Tension and Compression // *Metals*. 2022. Vol. 12. Article no. 347. <https://doi.org/10.3390/met12020347>
17. He X.-T., Xu P., Sun J.-Y., Zheng Z.-L. Analytical Solutions for Bending Curved Beams with Different Moduli in Tension and Compression // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2015. Vol. 22. Issue 5. P. 325–337. <https://doi.org/10.1080/15376494.2012.736053>
18. Sunil Kumar M.R., Schmidova E., Konopik P., Melzer D., Bozkurt F., Londe N.V. Fracture toughness analysis of automotive-grade dual-phase steel using essential work of fracture (EWF) method // *Metals*. 2020. Vol. 10. Issue 8. Article no. 1019. <http://doi.org/10.3390/met1008101>
19. He X., Chen Q., Sun J., Zheng Z., Chen Sh. Application of the Kirchhoff hypothesis to bending thin plates with different moduli in tension and compression // *Journal of mechanics of materials and structures*. 2010. Vol. 5. No. 5. P. 765–769. <https://doi.org/10.2140/jomms.2010.5.755>
20. He X., Wang X.-G., Pang B., Ai J., Sun J. Variational Solution and Numerical Simulation of Bimodular Functionally Graded Thin Circular Plates under Large Deformation // *Mathematics*. 2023. Vol. 11. Issue 14. Article no. 3083. <http://doi.org/10.3390/math11143083>
21. Федоренко А.Н., Федулов Б.Н., Ломакин Е.В. Задача потери устойчивости тонкостенных конструкций из композиционных материалов, свойства которых зависят от типа нагружения // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета // Механика*. 2019. № 3. С. 104–111. <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.3.11>
22. Зверев Е.М. Метод Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // *ПММ*. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 823–833. <http://doi.org/10.1134/S0032823519050126> EDN: WZNTUO
23. Зверев Е.М., Рыжковская М.И., Хоа В.Д. Построение решения уравнений теории упругости слоистой полосы на основе принципа сжатых отображений // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. № 5. С. 421–449. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-421-449>
24. Маилан Д.Р., Польской П.П., Михуб А. Особенности трещинообразования и разрушения усиленных железобетонных балок с различными видами арматуры и композитных материалов // *Инженерный вестник Дона*. 2013. № 2 (25). EDN: QLISND
25. Зверев Е.М. Метод вычисления концентрации напряжений в угловых точках длинной упругой полосы // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2018. № 6. С. 7–14. EDN: MHPNZR

References

1. Ambartsumyan S.A., Khachatryan A.A. Basic Equations of Elastic Theory for Materials with Tension–Compression Asymmetry. *Engineering Journal. Mechanics of Solids*. 1966;2:44–53. (In Russ.)
2. Ambartsumyan S.A., Khachatryan A.A. On the multimodular theory of elasticity. *Engineering Journal Mechanics of Solids*. 1966;(6):64–67. (In Russ.)
3. Shapiro G.S. On deformations of bodies with different resistance to tension and compression. *Engineering Journal Mechanics of Solids*. 1966;(2):123–125. (In Russ.)
4. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A. On the relationship between stresses and strains in isotropic media of different moduli. *Engineering journal Mechanics of solids*. 1968;(6):108–110. (In Russ.)
5. Lomakin E.V. *Defining relations of mechanics of different-module bodies*. Moscow, 1980 (Preprint/USSR Academy of Sciences. Institute for Problems in Mechanics; No. 159) (In Russ.)
6. Ambartsumyan S.A. *Different-module theory of elasticity*. Moscow: Nauka Publ.; 1982. (In Russ.) Available from: <https://reallib.org/reader?file=449586&pg=3> (accessed: 15.06.2024).
7. Isabekian N., Metellus A.-M. Energie de deformation d'un materiau elastique possedant des modules differents en traction et on compression, en theorie des petites perturbations. *C R. Acad. Sc. Paris*. 1978;286, Serie A. 233 C0.
8. Isabekian N., Metellus A.-M. Sur le comportement d'un materiau elastique anisotrope possedant des modules differents en traction et en compression, en theorie des petites perturbations. *C R. Acad. Sc. Paris*. 1978;286:491–494.
9. Wesolowski Z. Piecewise linear elastic material. *Archiwum mechaniki stosowanej*. 1970;22(3).
10. Benveniste Y. A constitutive theory for transversely isotropic bimodulus materials with a class of steady wave solutions. *Acta Mechanica*. 1983;46:137–153. <https://doi.org/10.1007/BF01176770>
11. Jones R.M. Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression. *AIAA J*. 1977;15: 16–23. <https://doi.org/10.2514/3.7297>
12. Lomakin E.V., Rabotnov Yu.N. Relations of the theory of elasticity for an isotropic material of different modulus. *Izvestiya AN SSSR. Mechanics of solids*. 1978;(6):29–34.

13. Berezin A.V. On the laws of deformation of dilating media of different modulus. *Problems of mechanical engineering and automation*. 2007;(2):70–72. (In Russ.) EDN: IAFRVN
14. Tselodub I.Yu. On the multimodular theory of elasticity. *PMTF*. 2008;49(1):157–164. (In Russ.) EDN: JRGLER
15. Adamov A.A. Methodological problems in experimental studies and verification of the governing equations of the theory of elasticity for an isotropic body with different moduli in tension and compression. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2020;61(6):979–985. <https://doi.org/10.1134/S0021894420060115> (In Russ.) EDN: JRGLER
16. Guo Y., Wen S.-R., Sun J.-Y., He X.-T. Theoretical Study on Thermal Stresses of Metal Bars with Different Moduli in Tension and Compression. *Metals*. 2022;12(2):347. <https://doi.org/10.3390/met12020347>
17. He X.-T., Xu P., Sun J.-Y., Zheng Z.-L. Analytical Solutions for Bending Curved Beams with Different Moduli in Tension and Compression. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2015;22(5):325–337. <https://doi.org/10.1080/15376494.2012.736053>
18. Sunil Kumar M.R., Schmidova E., Konopik P., Melzer D., Bozkurt F., Londe N.V. Fracture toughness analysis of automotive-grade dual-phase steel using essential work of fracture (EWF) method. *Metals*. 2020;10(8):1019. <https://doi.org/10.3390/met10081019>
19. He X., Chen Q., Sun J., Zheng Z., Chen Sh. Application of the Kirchhoff hypothesis to bending thin plates with different moduli in tension and compression. *Journal of mechanics of materials and structures*. 2010;5(5):765–769. <https://doi.org/10.2140/jomms.2010.5.755>
20. He X., Wang X.-G., Pang B., Ai J., Sun J. Variational Solution and Numerical Simulation of Bimodular Functionally Graded Thin Circular Plates under Large Deformation. *Mathematics*. 2023;11(14):3083. <https://doi.org/10.3390/math11143083>
21. Fedorenko A.N., Fedulov B.N., Lomakin E.V. Buckling problem of composite thin-walled structures with properties dependent on loading types. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2019;(3):104–111. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.3.11>
22. Zveryaev E.M. Saint-Venant–Picard–Banach method for integrating thin-walled systems equations of the theory of elasticity. *Mechanics of Solids*. 2020;55(7):1042–1050. <https://doi.org/10.3103/S0025654420070225>
23. Zveryaev E.M., Rynkovskaya M.I., Hoa V.D. Generation a solution to the equations of elasticity theory for a layered strip basing on the mapping contraction principle. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(5):421–449. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-421-449>
24. Mailyan D.R., Polskoy P.P., Mihoub A. Features of crack formation and destruction of reinforced concrete beams with different types of reinforcement and composite materials. *Engineering Bulletin of the Don*. 2013;2(25):102. (In Russ.) EDN: QLISND
25. Zveryaev E.M. Method for calculating stress concentration at corner points of a long elastic strip. *Structural mechanics and calculation of structures*. 2018;(6):7–14. (In Russ.) EDN: MHPNZR

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-6-526-538

УДК 539.3

EDN: CIMBAP

Научная статья / Research article

Использование различных формулировок МКЭ в расчетах тонкостенных конструкций

М.Ю. Клочков 

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

✉ m.klo4koff@yandex.ru

Поступила в редакцию: 27 сентября 2024 г.

Принята к публикации: 12 декабря 2024 г.

Аннотация. Представлен сравнительный анализ точности конечно-элементных решений тонкостенной конструкции в форме оболочки эллипсоидального типа при использовании МКЭ в форме метода перемещений и смешанной формулировке. Элементом дискретизации тонкостенной конструкции выбран четырехузловой фрагмент срединной поверхности с узловыми неизвестными в виде компонент вектора перемещения и их частных производных первого порядка по криволинейным координатам. При реализации смешанной формулировки МКЭ в качестве силовых узловых неизвестных выбраны деформации и искривления срединной поверхности тонкостенной конструкции. Матрица жесткости элемента дискретизации размерностью 36×36 в форме метода перемещений была получена минимизацией функционала Лагранжа. Матрица жесткости конечного элемента в смешанной формулировке была скомпонована минимизацией смешанного функционала по кинематическим и по силовым узловым неизвестным. Применение метода подстановки при решении системы матричных уравнений смешанного варианта МКЭ позволило сохранить оптимальную размерность матрицы жесткости элемента дискретизации 36×36 , такую же, как и при использовании МКЭ в форме метода перемещений. На тестовых примерах расчетов цилиндрической оболочки с круговым и эллиптическим поперечным сечениями показано, что предложенный вариант смешанного МКЭ обладает существенными преимуществами в плане точности конечно-элементных решений по сравнению с МКЭ в форме метода перемещений. Причем указанные преимущества возрастают по мере увеличения кривизны поверхности рассматриваемой оболочечной конструкции.

Ключевые слова: метод конечных элементов, метод перемещений, смешанная формулировка МКЭ

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Клочков М.Ю. Использование различных формулировок МКЭ в расчетах тонкостенных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 6. С. 526–538. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-526-538>

Клочков Михаил Юрьевич, аспирант кафедры строительных конструкций, фундаментов и надежности сооружений факультета строительства и жилищно-коммунального хозяйства, Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 2767-3955, ORCID: 0000-0001-6751-4629; e-mail: m.klo4koff@yandex.ru

© Клочков М.Ю., 2024

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Using Different FEM Formulations in Calculations of Thin-Walled Structures

Mikhail Yu. Klochkov 

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia

✉ m.klo4koff@yandex.ru

Received: September 27, 2024

Accepted: December 12, 2024

Abstract. A comparative analysis of the accuracy of finite element solutions of a thin-walled structure in the form of an ellipsoidal shell using displacement-based and mixed FEM is presented. The discretization element of the thin-walled structure is a four-node fragment of the middle surface with displacement components and their first-order partial derivatives with respect to curvilinear coordinates as the nodal unknowns. When implementing the mixed FEM formulation, strains and curvatures of the middle surface of the thin-walled structure are chosen as the force-type nodal unknowns. The stiffness matrix of the discretization element of dimension 36×36 according to the displacement method was obtained by minimizing the Lagrange functional. The finite element stiffness matrix in the mixed formulation was compiled by minimizing the mixed functional with respect to the kinematic and force nodal unknowns. The use of the substitution method when solving the system of matrix equations of the mixed FEM made it possible to maintain the optimal dimension of the stiffness matrix of the discretization element 36×36 , the same as in the case of the displacement-based FEM. Test examples of calculations of a cylindrical shell with circular and elliptical cross sections show that the proposed version of the mixed FEM has significant advantages in terms of the accuracy of finite element solutions compared to the displacement-based FEM. Moreover, these advantages improve as the curvature of the surface of the analyzed shell structure increases.

Keywords: finite element method, displacement method, mixed FEM formulation

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

For citation: Klochkov MYu. Using different FEM formulations in calculations of thin-walled structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(6):526–538. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-526-538>

1. Введение

К настоящему времени тонкостенные конструкции, состоящие из тонких оболочек или их фрагментов, получают все более широкое распространение. К таковым относятся арочные конструкции, трубопроводы различного назначения, ангары, газгольдеры, резервуары, бункеры и многие другие. Прочностные расчеты подобного рода оболочечных конструкций в настоящее время базируются на основе использования численных методов, преобладающим из которых является метод конечных элементов (МКЭ) [1–5]. Во многих современных вычислительных комплексах МКЭ реализуется в форме метода перемещений [6–15]. Однако применение данного вида формулировки МКЭ к расчету оболочечных конструкций требует при использовании теории тонких оболочек [16] определения производных компонент вектора перемещения вплоть до второго порядка включительно, что сопряжено с дополнительными вычислительными трудностями. К ним относится необходимость использования интерполяционных полиномов высокого порядка с дополнительным включением в число искомых неизвестных производных нормального перемещения второго порядка [17]. Для вычисления искомых силовых неизвестных в виде продольных сил и изгибающих моментов необходимо предварительно получить деформации и искривления срединной поверхности как функций от перемещений и их производных.

Альтернативой данному подходу может служить использование МКЭ в смешанной формулировке [18–26], при которой открывается возможность одновременно получать как кинематические

Mikhail Yu. Klochkov, post-graduate student of the Department of Building Structures, Foundations and Reliability of Structures, Faculty of Construction and Housing and Communal Services, Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 2767-3955, ORCID: 0000-0001-6751-4629; e-mail: m.klo4koff@yandex.ru

(перемещения и их производные), так и силовые (продольные силы, моменты, деформации) искомые прочностные параметры.

Естественным образом возникает вопрос о том, какая же формулировка МКЭ является наиболее предпочтительной. В данной работе на примере расчета фрагмента эллиптического цилиндра представлен сравнительный анализ эффективности использования МКЭ в форме метода перемещений и смешанного варианта МКЭ, базирующегося на применении четырехузловых элементов дискретизации с варьируемыми параметрами в виде компонент вектора перемещения и их производных первого порядка.

2. Методы

2.1. Геометрические соотношения

Срединная поверхность тонкостенной конструкции эллипсоидального типа может быть задана радиус-вектором

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + y(x,t)\vec{j} + z(x,t)\vec{k}, \quad (1)$$

где t — параметр эллипса поперечного сечения оболочки плоскостью, перпендикулярной оси Ox .

Ковариантные векторы базиса точки M^0 срединной поверхности оболочки в недеформированном состоянии определяются формулами

$$\vec{a}_\rho^0 = \vec{R}_{,\rho}^0 \quad (\rho=1,2), \quad (2)$$

а орт нормали в точке M^0 — векторным произведением

$$\vec{a}^0 = \vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0 / \sqrt{a_0}, \quad (3)$$

где $a_0 = (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_1^0)(\vec{a}_2^0 \cdot \vec{a}_2^0) - (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0)^2$.

При приложении к оболочечной конструкции внешней поверхностной нагрузки точка M^0 займет новое положение M , определяемое радиус-вектором

$$\vec{R} = \vec{R}^0 + \vec{v} = \vec{R}^0 + (v^\rho \vec{a}_\rho^0 + v \vec{a}^0), \quad (4)$$

а точка $M^{0\zeta}$, находящаяся в произвольном слое оболочки, переместится в точку M^ζ , определяемую радиус-вектором

$$\vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V} = (\vec{R}^0 + \zeta \vec{a}^0) + \vec{V}. \quad (5)$$

Входящий в (5) вектор перемещения точки $M^{0\zeta}$ может быть определен с привлечением гипотезы о прямой нормали [16]

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{a} - \vec{a}^0), \quad (6)$$

где $\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 / \sqrt{a}$ — орт нормали в точке M деформированной срединной поверхности;

$\vec{a}_\rho = \vec{R}_{,\rho} = (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,\rho}$; $\vec{a} = (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1)(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2) - (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)^2$.

Дифференцированием $\vec{R}^{0\zeta}$ и $\vec{R}^\zeta$ по x и t определяются векторы базиса исходного и деформированного состояний

$$\vec{g}_\rho^0 = \vec{R}_{,\rho}^{0\zeta}; \quad \vec{g}_\rho = \vec{R}_{,\rho}^\zeta, \quad (7)$$

скалярные произведения которых, в свою очередь, определяют компоненты метрического тензора в данных состояниях:

$$g_{\rho\gamma}^0 = \vec{g}_\rho^0 \cdot \vec{g}_\gamma^0; \quad g_{\rho\gamma} = \vec{g}_\rho \cdot \vec{g}_\gamma. \quad (8)$$

Деформации произвольного слоя оболочки, отстоящего на расстоянии ζ от ее срединной поверхности, могут быть получены посредством использования соотношений механики сплошных сред [27].

$$\varepsilon_{\rho\gamma}^\zeta = 0.5(g_{\rho\gamma} - g_{\rho\gamma}^0). \quad (9)$$

2.2. Четырехузловой элемент дискретизации

Тонкостенная конструкция моделируется четырехугольными фрагментами срединной поверхности с узлами i, j, k, l , расположенными в их вершинах. Узловыми искомыми неизвестными выбираются компоненты вектора перемещения и их производные первого порядка при реализации МКЭ в форме метода перемещений. При использовании смешанной формулировки МКЭ в качестве искоемых узловых неизвестных наряду с перемещениями и их производными дополнительно привлекаются силовые параметры в виде деформаций и искривлений срединной поверхности тонкостенной конструкции.

Таким образом, для используемого элемента дискретизации вводятся два столбца узловых неизвестных

$$\left\{ U^L \right\}_{1 \times 36}^T = \left\{ \left\{ v^{1L} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v^{2L} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v^L \right\}_{1 \times 12}^T \right\}; \quad (10)$$

$$\left\{ \varepsilon \mathbf{N} \right\}_y^T = \left\{ \left\{ \varepsilon_{\rho\gamma} \right\}_y^T \left\{ \mathbf{N}_{\rho\gamma} \right\}_y^T \right\}_{1 \times 24}, \quad (11)$$

где $\left\{ q^L \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ q^i q^j q^k q^l q_{,\xi}^i \dots q_{,\xi}^l q_{,\eta}^i \dots q_{,\eta}^l \right\}$; под q понимается компонента вектора перемещения v^p

или v ; $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ — локальные координаты; $\left\{ \varepsilon_{\rho\gamma} \right\}_y^T = \left\{ \left\{ \varepsilon_{11} \right\}_y^T \left\{ \varepsilon_{22} \right\}_y^T \left\{ 2\varepsilon_{12} \right\}_y^T \right\}_{1 \times 12}$;

$$\left\{ \mathbf{N}_{\rho\gamma} \right\}_y^T = \left\{ \left\{ \mathbf{N}_{11} \right\}_y^T \left\{ \mathbf{N}_{22} \right\}_y^T \left\{ 2\mathbf{N}_{12} \right\}_y^T \right\}_{1 \times 12}.$$

Для интерполяции компонент вектора перемещения привлекаются произведения полиномов Эрмита третьего порядка

$$q = \left\{ \underset{1 \times 12}{\Phi} \right\}^T \left\{ \underset{12 \times 1}{q^L} \right\}, \quad (12)$$

а для деформаций и искривлений — билинейные функции локальных координат $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$, например:

$$\varepsilon_{11} = \left\{ \underset{1 \times 4}{\Psi} \right\}^T \left\{ \underset{4 \times 1}{\varepsilon_{11}} \right\}_y; \quad \kappa_{11} = \left\{ \underset{1 \times 4}{\Psi} \right\}^T \left\{ \underset{4 \times 1}{\kappa_{11}} \right\}_y. \quad (13)$$

С учетом (12), (13) можно скомпоновать следующие матричные интерполяционные соотношения:

$$\left\{ \underset{3 \times 1}{U} \right\} = \left[\underset{3 \times 36}{A} \right] \left\{ \underset{36 \times 1}{U^L} \right\} = \left[\underset{3 \times 36}{A} \right] \left[\underset{36 \times 36}{P_R} \right] \left\{ \underset{36 \times 1}{U^G} \right\}; \quad (14)$$

$$\left\{ \underset{6 \times 1}{\varepsilon_{py}} \right\} = \left[\underset{6 \times 24}{H} \right] \left\{ \underset{24 \times 1}{\varepsilon \kappa} \right\}_y, \quad (15)$$

где $\left\{ \underset{1 \times 3}{U} \right\}^T = \left\{ v^1 \ v^2 \ v \right\}$ — компоненты вектора перемещения точки M^0 срединной поверхности;

$\left\{ \underset{36 \times 1}{U^G} \right\}$ — столбец узловых значений компонент вектора перемещения и их производных в глобальной системе координат x, t ; $\left[\underset{36 \times 36}{P_R} \right]$ — матрица, определяющая связь между столбцами $\left\{ \underset{36 \times 1}{U^L} \right\}$

и $\left\{ \underset{36 \times 1}{U^G} \right\}$.

Функционал Лагранжа, необходимый для компоновки матрицы жесткости используемого элемента дискретизации, может быть записан в виде [17]

$$\Phi_L = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \underset{6 \times 1}{\sigma^{py}} \right\}^T \left\{ \underset{6 \times 1}{\varepsilon_{py}^z} \right\} dV - \frac{1}{2} \int_F \left\{ \underset{3 \times 1}{U} \right\}^T \left\{ \underset{3 \times 1}{P} \right\} dF \quad (16)$$

или с учетом (9), (14)

$$\begin{aligned} \Phi_L = & \frac{1}{2} \left\{ \underset{1 \times 36}{U^G} \right\}^T \left[\underset{36 \times 36}{P_R} \right]^T \int_V \left[\underset{36 \times 6}{B} \right]^T \left[\underset{6 \times 3}{S} \right]^T \left[\underset{3 \times 3}{C} \right]^T \left[\underset{3 \times 6}{S} \right] \left[\underset{6 \times 36}{B} \right] dV \left[\underset{36 \times 36}{P_R} \right] \left\{ \underset{36 \times 1}{U^G} \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \underset{1 \times 36}{U^G} \right\}^T \left[\underset{36 \times 36}{P_R} \right] \int_F \left[\underset{36 \times 3}{A} \right]^T \left\{ \underset{3 \times 1}{P} \right\} dF, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\left[\underset{3 \times 3}{C} \right]$ — матрица упругости; $\left[\underset{3 \times 6}{S} \right]$ — матрица перехода от деформаций произвольного слоя к де-

формациям и искривлениям срединной поверхности; $\left[\underset{6 \times 36}{B} \right]$ — матрица, компонуемая на основе соотношений Коши и (14).

Минимизацией (16) по $\left\{ \underset{36 \times 1}{U^G} \right\}^T$ можно получить матрицу жесткости $\left[\underset{36 \times 36}{K_L} \right]$ и столбец узловых усилий $\left\{ \underset{36 \times 1}{f^G} \right\}$ элемента дискретизации в формулировке метода перемещений

$$\partial \Phi_L / \partial \{U^G\}^T \equiv \underset{36 \times 36}{[K_L]} \underset{36 \times 1}{\{U^G\}} - \underset{36 \times 1}{\{f^G\}} = 0, \quad (18)$$

$$\text{где } \underset{36 \times 36}{[K_L]} = \underset{36 \times 36}{[P_R]}^T \int_V \underset{24 \times 6}{[B]}^T \underset{6 \times 3}{[S]}^T \underset{3 \times 3}{[C]}^T \underset{3 \times 6}{[S]} \underset{6 \times 36}{[B]} dV \underset{36 \times 36}{[P_R]}; \quad \underset{36 \times 1}{\{f^G\}} = \underset{36 \times 36}{[P_R]} \int_F \underset{36 \times 3}{[A]}^T \underset{3 \times 1}{\{P\}} dF.$$

Смешанный функционал для получения матрицы жесткости используемого элемента дискретизации может быть записан в виде

$$\Phi_S = \int_V \underset{1 \times 3}{\{\varepsilon_{py}^\zeta\}}^T \underset{3 \times 1}{\{\sigma^{py}\}} dV - \frac{1}{2} \int_V \underset{1 \times 3}{\{\varepsilon_{py}^\zeta\}}^T \underset{3 \times 1}{\{\sigma^{py}\}} dV - \frac{1}{2} \int_F \underset{1 \times 3}{\{U\}}^T \underset{3 \times 1}{\{P\}} dF. \quad (19)$$

Учитывая вышеизложенное, функционал (19) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_S = & \underset{1 \times 24}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}}_y^T \int_V \underset{24 \times 6}{[H]}^T \underset{6 \times 3}{[S]}^T \underset{3 \times 3}{[C]}^T \underset{3 \times 6}{[S]} \underset{6 \times 36}{[B]} dV \underset{36 \times 36}{[P_R]} \underset{36 \times 1}{\{U^G\}} - \\ & - \frac{1}{2} \underset{1 \times 24}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}}_y^T \int_V \underset{24 \times 6}{[H]}^T \underset{6 \times 3}{[S]}^T \underset{3 \times 3}{[C]}^T \underset{3 \times 6}{[S]} \underset{6 \times 24}{[H]} dV \underset{1 \times 24}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}}_y - \frac{1}{2} \underset{1 \times 36}{\{U^G\}}^T \underset{36 \times 36}{[P_R]}^T \int_F \underset{36 \times 3}{[A]}^T \underset{3 \times 1}{\{P\}} dF. \end{aligned} \quad (20)$$

Последовательно применяя к (20) процедуру минимизации по $\underset{y}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}}^T$ и по $\{U^G\}^T$, можно записать следующую систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} \partial \Phi_S / \partial \underset{y}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}}^T \equiv \underset{24 \times 36}{[G]} \underset{36 \times 1}{\{U^G\}} - \underset{24 \times 24}{[D]} \underset{24 \times 1}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}}_y = 0; \\ \partial \Phi_S / \partial \{U^G\}^T \equiv \underset{36 \times 24}{[G]}^T \underset{24 \times 1}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}}_y - \underset{36 \times 1}{\{f^G\}} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{где } \underset{24 \times 36}{[G]} = \int_V \underset{24 \times 6}{[H]}^T \underset{6 \times 3}{[S]}^T \underset{3 \times 3}{[C]}^T \underset{3 \times 6}{[S]} \underset{6 \times 36}{[B]} dV \underset{36 \times 36}{[P_R]}; \quad \underset{24 \times 24}{[D]} = \int_V \underset{24 \times 6}{[H]}^T \underset{6 \times 3}{[S]}^T \underset{3 \times 3}{[C]}^T \underset{3 \times 6}{[S]} \underset{6 \times 24}{[H]} dV.$$

Реализуя подстановку $\underset{y}{\{\varepsilon \mathbf{N}\}} = [D]^{-1} [G] \{U^G\}$, систему (21) можно привести к виду

$$\underset{36 \times 24}{[G]}^T \underset{24 \times 24}{[D]}^{-1} \underset{24 \times 36}{[G]} \underset{36 \times 1}{\{U^G\}} = \underset{36 \times 1}{\{f^G\}} \quad (22)$$

или

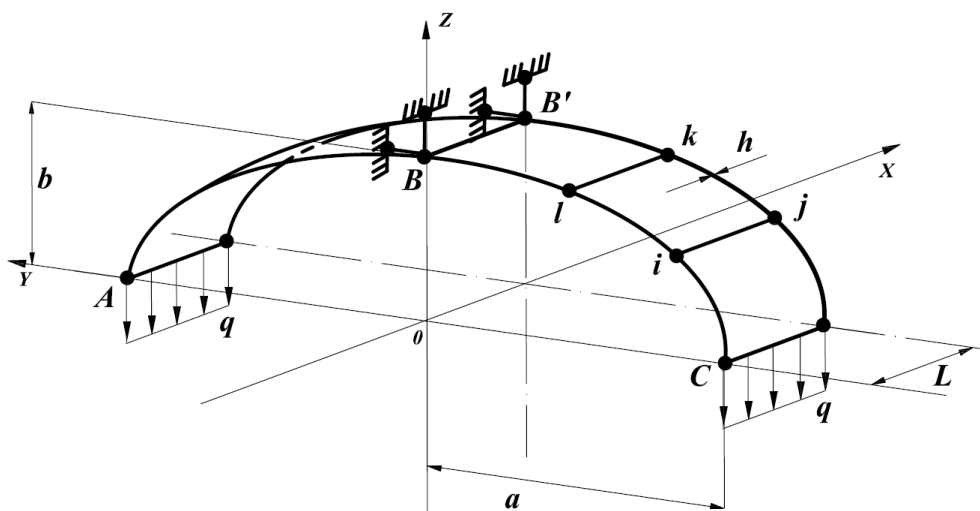
$$\underset{36 \times 36}{[K_S]} \underset{36 \times 1}{\{U^G\}} = \underset{36 \times 1}{\{f^G\}}, \quad (23)$$

где $\underset{36 \times 36}{[K_S]} = \underset{36 \times 24}{[G]}^T \underset{24 \times 24}{[D]}^{-1} \underset{24 \times 36}{[G]}$ — матрица жесткости элемента дискретизации в смешанной формулировке МКЭ.

Процедура компоновки глобальной матрицы жесткости оболочечной конструкции осуществляется стандартным для МКЭ способом [1] из $[K_L]$ или $[K_S]$ посредством матрицы индексов.

3. Результаты и обсуждения

Пример расчета 1. Был рассчитан фрагмент цилиндрической оболочки в виде полукольца, нагруженного вдоль образующих равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q=1$ Н/см, шарнирно закрепленного в точках B , B' (рис.). Были использованы следующие исходные данные: $E=2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu=0,3$; $L=1$ см; толщина стенки $h=0,2$ м.



Расчетная схема оболочки

И с т о ч н и к: выполнено М.Ю. Клочковым

Shell model

S o u r c e: made by M.Yu. Klochkov

Первоначально был рассчитан фрагмент кругового цилиндра, параметры эллипса поперечного сечения при этом принимались равными $a = b = 50$ см. Расчеты были выполнены в двух вариантах: в первом варианте использовался МКЭ в форме метода перемещений (16) и (17); во втором варианте был реализован МКЭ в смешанной формулировке (19)...(23). Результаты расчетов сведены в табл. 1, в которой приведены «физические» значения кольцевых напряжений на внутренней $\sigma_{\theta\theta}^{\text{in}}$, наружной $\sigma_{\theta\theta}^{\text{out}}$ и срединной $\sigma_{\theta\theta}^{\text{midl}}$ поверхностях оболочки, а также продольной силы N_{22} в точках A и C оболочки в зависимости от сетки узлов дискретизации. В правой крайней колонке приведены значения аналитического решения.

Анализ данных, представленных в табл. 1, показывает, что и в первом и во втором варианте наблюдается устойчивая сходимость вычислений к точному аналитическому решению. В то же время следует отметить, что точность конечно-элементных решений во втором варианте оказалась выше, чем в первом варианте.

Пример расчета 2. Во втором примере расчета круговой цилиндр был заменен на эллиптический с соотношением параметров эллипса поперечного сечения $a/b = 50$ см/40 см, равного 1,25. Прочие исходные данные имели те же значения. Результаты повариантных расчетов приведены в табл. 2, структура которой совпадает с табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Значения нормальных напряжений и продольной силы в точках приложения нагрузки в круговом цилиндре
 Values of normal stress and axial force at the points of load application in the circular cylinder

Координаты точек $\mathcal{X}$, см; t , рад / Point coordinates $\mathcal{X}$, cm; t , rad	σ , Н/см ² ; N_{22} , Н / σ , N/cm ² ; N_{22} , N	Варианты формулировок МКЭ / FEM formulation option						Аналитическое решение / Analytical solution
		Метод перемещений / Displacement method			Смешанная формулировка / Mixed formulation			
		Сетка узлов дискретизации / Nodal grid						
		101×2	151×2	201×2	101×2	151×2	201×2	
Точка / Point A : $x = 0,00$ $t = -\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	6,190	5,470	5,250	5,600	5,250	5,130	–
	σ_{tt}^{out}	4,490	4,720	4,830	4,400	4,750	4,870	–
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	5,340	5,100	5,040	5,000	5,000	5,000	5,000
	N_{22}	1,0672	1,0191	1,0079	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000
Точка / Point C : $x = 0,00$ $t = \frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	6,290	5,500	5,250	5,600	5,250	5,130	–
	σ_{tt}^{out}	4,400	4,690	4,830	4,400	4,750	4,870	–
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	5,340	5,100	5,040	5,000	5,000	5,000	5,000
	N_{22}	1,0681	1,0192	1,0079	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000

И с т о ч н и к: выполнено М.Ю. Клочковым / S o u r c e: made by M.Yu. Klochkov

Таблица 2 / Table 2

Значения нормальных напряжений и продольной силы
 в точках приложения нагрузки в эллиптическом цилиндре при $a/b=1,25$ /

Values of normal stresses and axial force at the points of load application in the elliptical cylinder at $a/b=1.25$

Координаты точек x , см; t , рад / Point coordinates x , cm; t , rad	σ , Н/см ² ; N_{22} , Н / σ , N/cm ² ; N_{22} , N	Метод перемещений / Displacement method					Аналитическое решение / Analytical solution
		Сетка узлов дискретизации / Nodal grid					
		101×2	201×2	301×2	351×2	401×2	
Точка / Point A : $x = 0,00$ $t = -\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	6,013	5,578	5,333	5,246	5,133	–
	σ_{tt}^{out}	–2,489	3,837	3,854	4,345	4,869	–
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	1,735	4,702	4,453	4,793	5,000	5,000
	N_{22}	0,347	0,940	0,8905	0,9586	1,000	1,000
Точка / Point C : $x = 0,00$ $t = \frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	6,015	5,492	5,233	5,181	5,196	–
	σ_{tt}^{out}	–2,484	3,152	5,246	4,841	4,540	–
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	1,739	4,315	5,239	5,010	4,866	5,000
	N_{22}	0,349	0,863	1,049	1,002	0,9733	1,000

Окончание табл. 2 / Ending of the Table 2

Координаты точек X , см; t , рад / Point coordinates X , cm; t , rad	σ , Н/см ² ; N_{22} , Н / σ , N/cm ² ; N_{22} , N	Смешанная формулировка / Mixed formulation				Аналитическое решение / Analytical solution
		Сетка узлов дискретизации / Nodal grid				
		101×2	201×2	251×2	251×2	
Точка / Point A : $x = 0,00$ $t = -\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	5,588	5,123	5,123	5,037	–
	σ_{tt}^{out}	4,416	4,877	4,877	4,963	–
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	4,999	5,000	5,000	5,000	5,000
	N_{22}	0,9997	1,000	1,000	1,000	1,000
Точка / Point C : $x = 0,00$ $t = \frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	5,588	5,123	5,123	5,037	–
	σ_{tt}^{out}	4,416	4,877	4,877	4,963	–
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	4,999	5,000	5,000	5,000	5,000
	N_{22}	0,9997	1,000	1,000	1,000	1,000

И с т о ч н и к: выполнено М.Ю. Клочковым / S o u r c e: made by M.Yu. Klochkov

Анализ табличных данных показывает, что в первом варианте наблюдается медленная сходимость вычислительного процесса. Относительно приемлемые результаты достигаются при сетке дискретизации $351 \dots 401 \times 2$. Кроме того, следует отметить некоторое различие в значениях σ_{tt} и N_{22} в точках A и C оболочки, хотя они должны быть абсолютно одинаковыми, исходя из симметрии расчетной схемы. Во втором варианте расчета можно констатировать быструю сходимость вычислительного процесса и абсолютное совпадение σ_{tt} и N_{22} в точках A и C , что и должно выполняться.

Таблица 3 / Table 3

Значения нормальных напряжений и продольной силы
в точках приложения нагрузки в эллиптическом цилиндре при $a/b=2,5$

Values of normal stresses and axial force at the points of load application in the elliptical cylinder at $a/b=2.5$

Координаты точек x , см; t , рад / Point coordinates x , cm; t , rad	σ , Н/см ² ; N_{22} , Н / σ , N/cm ² ; N_{22} , N	Метод перемещений / Displacement method					Аналитическое решение / Analytical solution
		Сетка узлов дискретизации / Nodal grid					
		101×2	201×2	301×2	401×2	501×2	
Точка / Point A : $x = 0,00$ $t = -\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	−342,0	−22,29	4,098	7,924	9,031	−
	σ_{tt}^{out}	−880,85	-142,1	−46,52	−17,385	−39,42	−
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	−618,3	-83,72	−21,85	−5,048	−15,80	5,000
	N_{22}	−123,7	-16,74	−4,369	−1,010	−3,160	1,0000
Точка / Point C : $x = 0,00$ $t = \frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	−342,0	-22,23	3,830	7,507	7,062	−
	σ_{tt}^{out}	−880,84	-141,9	−47,91	−23,50	19,99	−
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	−618,3	-83,60	−22,69	−8,386	13,67	5,000
	N_{22}	−123,7	-16,72	−4,538	−1,677	2,733	1,0000

Окончание табл. 3 / Ending of the Table 3

Координаты точек x , см; t , рад / Point coordinates x , cm; t , rad	σ , Н/см ² ; N_{22} , Н σ , N/cm ² ; N_{22} , N	Смешанная формулировка / Mixed formulation				Аналитическое решение / Analytical solution
		Сетка узлов дискретизации / Nodal grid				
		101×2	151×2	201×2	251×2	
Точка / Point A : $x=0,00$ $t=-\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	5,500	5,150	5,030	4,973	—
	σ_{tt}^{out}	4,512	4,850	4,970	5,025	—
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	4,994	5,000	5,000	5,000	5,000
	N_{22}	0,99875	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000
Точка / Point C : $x=0,00$ $t=\frac{\pi}{2}$	σ_{tt}^{in}	5,501	5,150	5,030	4,973	—
	σ_{tt}^{out}	4,512	4,850	4,970	5,025	—
	$\sigma_{tt}^{\text{midl}}$	4,994	5,000	5,000	5,000	5,000
	N_{22}	0,99875	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000

И с т о ч н и к: выполнено М.Ю. Клочковым / S o u r c e: made by M.Yu. Klochkov

Пример расчета 3. В третьем примере была рассчитана оболочка с большей кривизной срединной поверхности, чем во втором примере. Соотношение параметров эллипса поперечного сечения было принято равным $a/b = 50 \text{ см}/20 \text{ см} = 2,5$. Результаты конечно-элементных решений при $a/b = 2,5$ приведены в табл. 3. Как следует из табл. 3, результаты расчетов принципиально различаются по вариантам. В первом варианте численные значения напряжений и продольной силы нельзя признать удовлетворительными, несмотря на значительное сгущение сетки дискретизации. Во втором варианте можно наблюдать устойчивую сходимости численных значений к точному аналитическому решению при сравнительно редкой сетке дискретизации.

4. Заключение

Таким образом можно отметить, что при выполнении прочностных расчетов тонкостенных конструкций из оболочек эллипсоидального профиля наиболее эффективным инструментом исследования НДС последних представляется МКЭ в смешанной формулировке. Предложенный вариант функционала (16) позволил получить в результате его минимизации по перемещениям и их производным, а также по деформациям и искривлениям срединной поверхности матрицу жесткости четырехузлового конечного элемента размерностью 36×36 , необходимого для дискретизации рассчитываемой оболочечной конструкции. Выполненные исследования позволили сделать следующие выводы:

1. Применение метода подстановки для решения системы матричных уравнений (21) дало возможность избежать увеличения размерности матрицы жесткости конечного элемента при реализации предложенного смешанного варианта МКЭ.

2. При определении НДС тонкостенных конструкций из оболочек эллипсоидального профиля точность вычисления контролируемых параметров прочности предложенным смешанным вариантом МКЭ оказалась существенно выше по сравнению с вариантом расчета, в котором был реализован МКЭ в форме метода перемещений.

3. При расчете оболочки эллипсоидального профиля со значительной кривизной срединной поверхности корректные значения параметров НДС удалось получить только при использовании предложенного варианта смешанного МКЭ. Традиционный вариант МКЭ в форме метода перемещений в этом случае не позволил получить удовлетворительного по точности решения.

Список литературы

1. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград : Судостроение, 1974. 342 с. URL: <https://reallib.org/reader?file=661671&pg=8> (дата обращения: 20.09.2024).
2. Бате К.Ю. Метод конечных элементов. Москва : Физматлит, 2010. 1022 с.
3. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. Москва : Физматлит, 2006. 391 с. URL: <https://djvu.online/file/WtV8YnGU6bpRv> (дата обращения: 20.09.2024).
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. 6th Edition. Butterworth-Heinemann; 2005. 631 p. ISBN: 9781493302895
5. Агапов В.П., Маркович А.С. Нелинейные модели бетонных и железобетонных конструкций. Теория и реализация в ВК ПРИНС: монография. Москва : РУДН, 2023. 264 с. ISBN: 978-5-209-11784-1
6. Tyukalov Yu.Ya. Quadrilateral Finite Element for Thin and Thick Plates // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. Issue. 5 (98). Article no. 9802. <https://doi.org/10.4123/CUBS.98.2>
7. Dmitriev A.N., Lalin V.V., Novozhilov Iu.V., Mikhaliuk D.S. Simulation of Concrete Plate Perforation by Coupled Finite Element and Smooth Particle Hydrodynamics Methods // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Issue. 7 (92). Article no. 9207. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.7>
8. Ko Y., Lee P.-S., Bathe K.-J. A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element // Computers & Structures. 2017. Vol. 192. P. 34–49. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.07.003>
9. Schöllhammer D., Fries T.P. A higher-order trace finite element method for shells // Numerical Methods in Engineering. 2021. Vol. 122. No. 5. P. 1217–1238. <https://doi.org/10.1002/nme.6558>
10. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu. The calculation of the ellipsoidal shell based FEM with vector interpolation of displacements when the variable parameterisation of the middle surface // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. No. 3. P. 373–381. <https://doi.org/10.1134/S1995080220030117>
11. Maslennikov A.M., Kobelev E.A., Maslennikov N.A. Solution of stability problems by the finite element method // Bulletin of Civil Engineers. 2020. Vol. 2 (79). P. 68–74.
12. Агапов В.П., Айдемиров К.Р. Проектирование лопастей воздушных винтов самолетов методом конечных элементов с учетом прочности конструкций // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 1. С. 65–71. <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-1-65-71>
13. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a Synthesized Element of Complex Geometry Based Upon Three-Dimensional and Two-Dimensional Finite Elements // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 9. P. 2263–2271. <http://doi.org/10.1134/S1995080221090316>
14. Jurayev D., Vatin N., Sultanov T., Mirsaidov M. Spatial stress-strain state of Earth dams // Magazine of Civil Engineering. 2023. Vol. 2. No. 118. Article no. 11810. <https://doi.org/10.34910/MCE.118.10>
15. Косицын С.Б., Акулич В.Ю. Численный анализ НДС ортогонально пересекающихся цилиндрических оболочек, взаимодействующих с основанием, с учетом изменения расчетной модели во времени // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 4. С. 303–310. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-4-303-310>
16. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Санкт-Петербург : Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2010. 378 с. ISBN: 978-5-288-05021-3
17. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A. Using Lagrange multipliers in the triangular element of a nonshallow shell under variable interpolation of displacements // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2017. Vol. 11. No. 4. P. 535–544. <https://doi.org/10.1134/S1990478917040111>
18. Lalin V.V., Rybakov V.A., Ivanov S.S., Azarov A.A. Mixed finite-element method in V.I. Slivker's semi-shear thin-walled bar theory // Magazine of Civil Engineering. 2019. Vol. 5. No. 89. P. 79–93. <https://doi.org/10.18720/MCE.89.7>
19. Magisano D., Liang K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M. An efficient mixed variational reduced-order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2018. Issue 113 (4). P. 634–655. <https://doi.org/10.1002/nme.5629>
20. Klochkov Yu., Pshenichkina V., Nikolaev A., Vakhnina O., Klochkov M. Stress-strain state of elastic shell based on mixed finite element // Magazine of Civil Engineering. 2023. Issue 4 (120). P. 12003. <https://doi.org/10.34910/MCE.120.3>
21. Клочкив Ю.В., Пиеничкина В.А., Николаев А.П., Вахнина О.В., Клочкив М.Ю. Четырехугольный конечный элемент в смешанной формулировке МКЭ для расчета тонких оболочек вращения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 1. С. 64–72. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-64-72>
22. Lei Zh., Gillot F., Jezeguel L. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner-Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature // Int. J. Mech. 2015. Vol. 54. P. 105–119. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.06.010>
23. Nodargi N.A., Bisegna P. State update algorithm for isotropic elastoplasticity by incremental energy minimization // Int. J. Numer. Methods Eng. 2015. Vol. 105. No. 3. 163–196. <https://doi.org/10.1002/nme.4966>

24. Liguori F., Madeo A., Garcea G. A mixed finite-element formulation for the elasto-plastic analysis of shell structures // *Materials Research Proceedings*. 2023. Vol. 26. P. 227–232. <https://doi.org/10.21741/9781644902431-37>
25. Liguori F., Madeo A., Garcea G. A dual decomposition of the closest point projection in incremental elasto-plasticity using a mixed shell finite element // *International Journal for Numerical Methods*. 2022. Vol. 123. No. 24. P. 6243–6266. <https://doi.org/10.1002/nme.7112>
26. Игнатъев А.В., Завьялов И.С., Бочков М.И. Алгоритм редуцирования систем уравнений МКЭ высоких порядков с использованием полиномиальной интерполяции основных смешанных неизвестных // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. 2024. № 7 (787). С. 5–18. <https://doi.org/10.32683/0536-1052-2024-787-7-5-18>
27. Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2 томах. Москва : Наука, 1976. Том 2. 536 с. ISBN: 5-02-007052-1

References

1. Postnov V.A., Kharkhurim I.Ya. *Finite element method in calculations of ship structures*. Leningrad: Sudostroenie Publ.; 1974. (In Russ.) 2018;4(2):177–186. Available from: <https://reallib.org/reader?file=661671&pg=8> (accessed: 20.09.2024).
2. Bate K.Yu. *Finite Element Method*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2010. (In Russ.)
3. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Finite element method in the statics and dynamics of thin-walled structures*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2006. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/WtV8YnGU6bpRv> (accessed: 20.09.2024).
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 6th edition. Butterworth-Heinemann; 2005. ISBN: 9781493302895
5. Agapov V.P., Markovich A.S. *Nonlinear models of concrete and reinforced concrete structures. Theory and implementation in VK PRINCE: monograph*. Moscow: RUDN Publ.; 2023. (In Russ.) ISBN: 978-5-209-11784-1
6. Tyukalov Yu.Ya. Quadrilateral Finite Element for Thin and Thick Plates. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021;5(98):9802. <https://doi.org/10.4123/CUBS.98.2>
7. Dmitriev A.N., Lalin V.V., Novozhilov Iu.V., Mikhaliuk D.S. Simulation of Concrete Plate Perforation by Coupled Finite Element and Smooth Particle Hydrodynamics Methods. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020;7(92):9207. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.7>
8. Ko Y., Lee P.-S., Bathe K.-J. A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element. *Computers & Structures*. 2017;192:34–49. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.07.003>
9. Schöllhammer D., Fries T.P. A higher-order trace finite element method for shells. *Numerical Methods in Engineering*. 2021;122(5):1217–1238. <https://doi.org/10.1002/nme.6558>
10. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu. The calculation of the ellipsoidal shell based FEM with vector interpolation of displacements when the variable parameterisation of the middle surface. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020;41(3):373–381. <https://doi.org/10.1134/S1995080220030117>
11. Maslennikov A.M., Kobelev E.A., Maslennikov N.A. Solution of stability problems by the finite element method. *Bulletin of Civil Engineers*. 2020;2(79):68–74.
12. Agapov V.P., Aidemirov K.R. Designing of the blades of aircraft propellers by the finite element method, taking into account the strength of structure. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2021;22(1):65–71. 2021;22(1):65–71. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-1-65-71>
13. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a Synthesized Element of Complex Geometry Based Upon Three-Dimensional and Two-Dimensional Finite Elements. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021;42(9):2263–2271. <http://doi.org/10.1134/S1995080221090316>
14. Jurayev D., Vatin N., Sultanov T., Mirsaidov M. Spatial stress-strain state of Earth dams. *Magazine of Civil Engineering*. 2023;2(118):11810. <https://doi.org/10.34910/MCE.118.10>
15. Kositsyn S.B., Akulich V.Yu. Numerical analysis of stress-strain state of orthogonally intersecting cylindrical shells interacting with the base, taking into account changes in the calculation model over time. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(4):303–310. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-4-303-310>
16. Novozhilov V.V. *Theory of thin shells*. St. Petersburg: St. Petersburg University Press; 2010. (In Russ.) ISBN: 978-5-288-05021-3
17. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A. Using Lagrange multipliers in the triangular element of a nonshallow shell under variable interpolation of displacements. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2017;11(4):535–544. <https://doi.org/10.1134/S1990478917040111>
18. Lalin V.V., Rybakov V.A., Ivanov S.S., Azarov A.A. Mixed finite-element method in V.I. Slivker's semi-shear thin-walled bar theory. *Magazine of Civil Engineering*. 2019;5(89):79–93. <https://doi.org/10.18720/MCE.89.7>
19. Magisano D., Liang K., Garcea G., Leonetti L., Ruess M. An efficient mixed variational reduced-order model formulation for nonlinear analyses of elastic shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2018;113(4):634–655. <https://doi.org/10.1002/nme.5629>

20. Klochkov Yu., Pshenichkina V., Nikolaev A., Vakhnina O., Klochkov M. Stress-strain state of elastic shell based on mixed finite element. *Magazine of Civil Engineering*. 2023;4(120):12003. <https://doi.org/10.34910/MCE.120.3>
21. Klochkov Yu.V., Pshenichkina V.A., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Klochkov M.Y. Quadrangular finite element in a mixed FEM formulation for the calculation of thin shells of rotation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(1):64–72. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-1-64-72>
22. Lei Zh., Gillot F., Jezeguel L. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner-Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature. *Int. J. Mech.* 2015;54:105–119. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.06.010>
23. Nodargi N.A., Bisegna P. State update algorithm for isotropic elastoplasticity by incremental energy minimization. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2015;105(3):163–196. <https://doi.org/10.1002/nme.4966>
24. Liguori F., Madeo A., Garcea G. A mixed finite-element formulation for the elasto-plastic analysis of shell structures. *Materials Research Proceedings*. 2023;26:227–232. <https://doi.org/10.21741/9781644902431-37>
25. Liguori F., Madeo A., Garcea G. A dual decomposition of the closest point projection in incremental elasto-plasticity using a mixed shell finite element. *International Journal for Numerical Methods*. 2022;123(24):6243–6266. <https://doi.org/10.1002/nme.7112>
26. Ignatiev A.V., Zavyalov I.S., Bochkov M.I. Algorithm for reducing systems of high-order FEM equations using polynomial interpolation of the main mixed unknowns. *News of higher educational institutions. Construction*. 2024;7(787): 5–18. (In Russ.) <https://doi.org/10.32683/0536-1052-2024-787-7-5-18>
27. Sedov L.I. *Continuum mechanics*. Moscow: Nauka Publ.; 1976. (In Russ.) ISBN: 5-02-007052-1

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-6-539-551

УДК 624.01

EDN: CPDFMF

Научная статья / Research article

Оценка выбора модели метода конечных элементов для расчета балок на основе распределения касательных напряжений

М.В. Мозголов¹, Г.Э. Окольников^{2, 3}¹ Коломенский институт (филиал) Московского политехнического университета, *Коломна, Россия*² Российский университет дружбы народов, *Москва, Россия*³ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, *Москва, Россия*

✉ okolnikova_ge@mail.ru

Поступила в редакцию: 11 сентября 2024 г.

Принята к публикации: 1 декабря 2024 г.

Аннотация. При расчете строительных конструкций в программных комплексах, основанных на методе конечных элементов, можно получить неверные результаты. Для обоснования правильности полученного решения необходимо выполнять верификационные исследования и инженерную оценку полученных данных. Этого требует национальный стандарт Российской Федерации по моделированию. Правильность создания расчетных моделей можно оценить при помощи сравнения данных метода конечных элементов с эталонным значением. Произведен численный эксперимент в программном комплексе SCAD++ версии 21 для пяти моделей конечных элементов для консольной балки из бетона класса В15 с размерами 2,5×0,5×0,5 м: четыре твердотельные модели № 1–4 и одна «эталонная» модель, состоящая из густой сетки объемных конечных элементов второго порядка кубической формы. По результатам расчетов выполнен сравнительный анализ характера распределения касательных напряжений от действия поперечной силы для всех моделей с напряжениями, вычисленными при помощи известного аналитического метода, по формуле Журавского. Установлено, что распределение касательных напряжений в сечениях четырех компьютерных моделей № 1–4 не соответствует теоретическим значениям, вычисленным по правилам сопротивления материалов. Точное решение можно получить при использовании «эталонной» твердотельной модели, предложенной авторами, состоящей из густой сетки объемных конечных элементов второго порядка кубической формы.

Ключевые слова: поперечная сила, формула Журавского, критические зоны, сходимость результата, твердотельная модель

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Мозголов М.В. — концепция и расчет. Окольников Г.Э. — обзор, редактирование, обработка данных.

Для цитирования: Мозголов М.В., Окольников Г.Э. Оценка выбора модели метода конечных элементов для расчета балок на основе распределения касательных напряжений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 6. С. 539–551. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-539-551>

Мозголов Михаил Валентинович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительного производства, Коломенский институт (филиал) Московского политехнического университета, Коломна, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 3386-1518, ORCID: 0000-0001-7414-0469; e-mail: mvmozgolov@yandex.ru

Окольникова Галина Эриковна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов инженерной академии, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций, Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 8731-8713, ORCID: 0000-0002-8143-4614; e-mail: okolnikova_ge@mail.ru

© Мозголов М.В., Окольников Г.Э., 2024

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Evaluation of Selection of Finite Element Model for Beam Analysis Based on Shear Stress Distribution

Mikhail V. Mozgolov¹, Galina E. Okolnikova^{2,3}

¹ Moscow Polytechnic University, Kolomna, Russia

² RUDN University, Moscow, Russia

³ Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia

 okolnikova_ge@mail.ru

Received: September 11, 2024

Accepted: December 1, 2024

Abstract. When analyzing building structures in software packages based on the finite element method, incorrect results can be obtained. To justify the correctness of the obtained solution, it is necessary to perform verification studies and engineering assessment of the obtained data. This is required by the national standard of Russian Federation on modeling. The correctness of constructing calculation models can be assessed by comparing the data of the finite element method with the reference value. A numerical experiment was carried out in the SCAD++ version 21 software package for five finite element models of a cantilever beam made of B15 grade concrete, with dimensions of 2.5×0.5×0.5 m: four solid models No. 1–4 and one “reference” model consisting of a dense grid of second-order volumetric finite elements of cubic shape. Based on the calculation results, a comparative analysis of the shear stress distribution pattern from shear force was performed for all models with stresses calculated using the well-known analytical method, according to the Zhuravskii formula. It was found that the shear stress distribution in the sections of four computer models No. 1–4 does not correspond to the theoretical values calculated according to the rules of strength of materials. An accurate solution can be obtained using the “reference” solid model proposed by the authors, consisting of a dense grid of volumetric finite elements of the second order of cubic shape.

Keywords: shear force, Zhuravskii formula, critical zones, result convergence, solid model

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors’ contribution. Mozgolov M.V. — concept and calculation. Okolnikova G.E. — review, editing, data processing.

For citation: Mozgolov M.V., Okolnikova G.E. Evaluation of selection of finite element model for beam analysis based on shear stress distribution. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(6):539–551. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-539-551>

1. Введение

В соответствии с современными требованиями российского законодательства выполнение проектных работ¹, в случае необходимости проведения их экспертизы, должно выполняться в виде цифровой информационной модели². Прочностной анализ строительных конструкций выполняется на ЭВМ в программных комплексах, основанных на методе конечных элементов (МКЭ).

С математической точки зрения, МКЭ точным методом расчета не является [1–6].

Mikhail V. Mozgolov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Operations, Kolomna Institute (branch) of Moscow Polytechnic University, Kolomna, Russia, eLIBRARY SPIN-code: 3386-1518, ORCID: 0000-0001-7414-0469; e-mail: mvmozgolov@yandex.ru

Galina E. Okolnikova, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technologies and Structural Materials, Engineering Academy, RUDN University, Moscow, Russia; Associate Professor of the Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University MGSU), Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 8731-8713, ORCID: 0000-0002-8143-4614; e-mail: okolnikova_ge@mail.ru

¹ Градостроительный кодекс Российской Федерации: 29 дек. 2004 г., № 190-ФЗ. URL: <https://normativ.kontur.ru/document?moduleId=1&documentId=485433#h993> (дата обращения: 21.06.2024).

² СП 333.1325800.2020 Информационное моделирование в строительстве. Правила формирования информационной модели объектов на разных стадиях жизненного цикла. URL: <https://docs.cntd.ru/document/573514520> (дата обращения: 21.06.2024).

Существует множество численных исследований для изучения поведения железобетонных балок при силовых, температурных воздействиях; балок с повреждениями; балок, усиленных внешним армированием; балок с новыми видами арматуры.

В работе [7] авторами произведена оценка остаточной несущей способности железобетонных балок после пожара при помощи программного комплекса ABAQUS методом конечных элементов, была построена термодинамическая модель железобетонных балок с тремя сторонами, подвергающихся воздействию огня. Модель была подтверждена результатами испытаний на огнестойкость, расхождение между результатами эксперимента и расчета составило 10–18 %.

Исследование [8] посвящено анализу железобетонных балок, усиленных композитами из армированного волокнами полимера (углепластика и стеклопластика), на устойчивость к изгибающим и сдвигающим нагрузкам. Анализ был проведен с помощью метода конечных элементов и программного обеспечения ABAQUS, которое широко используется для моделирования экспериментальных условий в численных исследованиях.

Работа [9] посвящена нелинейному моделированию конечных элементов для прогнозирования прочности железобетонных балок с трещинами (поврежденных балок) и балок, усиленных композитами. Смоделировано испытание на изгиб семи железобетонных балок в программе конечных элементов для проверки стратегий моделирования путем сравнения структурной реакции балок. Точность моделирования в среднем составила 18,5 %.

В исследовании [10] представлен подход к моделированию методом конечных элементов для проверки поведения поврежденных железобетонных балок, усиленных волокнистыми композитами, при воздействии нагрузки. Наличие трещин в поврежденных железобетонных балках было включено в модель в качестве геометрических объектов. Были проведены параметрические исследования, и для различных уровней повреждений были предложены адекватные значения ширины, высоты и интервала трещин. Для моделирования поведения бетона и эпоксидной смолы были использованы модель поврежденной пластичности бетона и модель отделения от бетона. Для численного анализа применялся программный пакет ABAQUS.

Авторы [11] представили результат нелинейного исследования методом конечных элементов для повышения прочности на сдвиг железобетонных Т-образных балок с помощью альтернативной диагональной поперечной арматуры.

В [12] трехмерная (3D) нелинейная конечно-элементная модель внешнего соединения балок и колонн проверяется, а затем используется для изучения пластичности соединения балок и колонн.

В работе [13] предложена модель для анализа повреждений бетона.

В ходе исследования [14] оценивалось поведение железобетонных балок, усиленных пластинами из углеродного волокна, при изгибе с использованием четырех трехмерных нелинейных конечно-элементных моделей, разработанных в программном обеспечении ABAQUS.

Прогнозирование поведения на сдвиг железобетонной балки, усиленной поперечным внешним преднапряжением, выполнено авторами исследования [15] с помощью метода конечных элементов. Результаты, полученные методом конечных элементов, отличаются от результатов испытаний в среднем на 8–10 %.

Результаты рассмотренных исследований [7–15] показывают, что на точность моделирования влияют такие параметры, как плотность сетки, угол расширения и модель поведения бетона (энергия разрушения бетона), а также подчеркивают необходимость усовершенствования моделей МКЭ.

С целью доказательства правильности полученного решения необходимо выполнять верификационные расчеты³, оценивать сходимость результата, выполнять инженерную оценку полученного решения [16–17].

³ ГОСТ Р 57700.10–2018. Численное моделирование физических процессов. Определение напряженно-деформированного состояния. Верификация и валидация численных моделей сложных элементов конструкций в упругой области. Москва : Стандартинформ, 2018.

К контролю качества проектирования установлены минимальные требования⁴, отмечается необходимость выполнения проверки того, что использованы адекватные расчетные модели, а сами расчеты проведены с необходимой точностью. Возникает вопрос о допустимых отклонениях данных, полученных при верификационных вычислениях. За основу можно взять предложение работы [18, с. 134]. При проведении поверочных расчетов конструкций в различных программных комплексах разница между полученными результатами не должна превышать 5 %.

Как правило, в зонах несущих строительных конструкций с минимальными запасами, так называемых критических зонах, возникает сложное напряженно-деформированное состояние. Исследование таких мест при помощи метода конечных элементов требует особого подхода с изучением разброса напряжений в смежных элементах узла звезды конечных элементов⁵. В критических зонах конструкций необходимо подробно изучать распределение как нормальных, так и касательных напряжений. Одним из примеров критической зоны можно назвать опорный участок безбалочного монолитного железобетонного перекрытия, работающий на продавливание и воспринимающий значительный опорный изгибающий момент. Эти места опасны как по нормальным, так и по касательным напряжениям. Например, по причине неработоспособности опорных зон плоских перекрытий 16 июля 2009 года в г. Коломна после заливки бетона перекрытия второго этажа произошло обрушение перекрытия первого этажа строящегося здания Межрайонного регистрационно-экзаменационного отдела Государственной инспекции безопасности дорожного движения (МРЭО ГИБДД) на ул. Митяево (рис. 1, 2), а в городе Сергиев Посад 4 января 2018 г. колонны сечением 400×400 мм из сборного железобетона проткнули плоское монолитное железобетонное покрытие толщиной 300 мм подземной автостоянки жилого комплекса по ул. Фестивальной (рис. 3, 4). Объект готовился к вводу в эксплуатацию. Обе аварии характеризуются хрупким разрушением опорных зон перекрытий с дальнейшим прогрессирующим обрушением несущих конструкций. Примеры подобных аварий имеются как в России, так и за рубежом [19].



Рис. 1. Обрушение строящегося здания МРЭО ГИБДД в г. Коломна, ул. Митяево
И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозговым, Г.Э. Окольниковой

Figure 1. Collapse of the road police driver licencing office building under construction in Kolomna, Mityaev street
S o u r c e: made by M.V. Mozgolov, G.E. Okolnikova



Рис. 2. Обрушение строящегося здания МРЭО ГИБДД в г. Коломна, ул. Митяево. Опорный узел перекрытия первого этажа
И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозговым, Г.Э. Окольниковой

Figure 2. Collapse of the road police driver licencing office building under construction in Kolomna, Mityaev Street. Support joint of the first floor slab
S o u r c e: made by M.V. Mozgolov, G.E. Okolnikova

⁴ ГОСТ 27751–2014 Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. Москва : Стандартинформ, 2015.

⁵ ГОСТ Р 57700.10–2018. Численное моделирование физических процессов. Определение напряженно-деформированного состояния. Верификация и валидация численных моделей сложных элементов конструкций в упругой области. Москва : Стандартинформ, 2018.



Рис. 3. Обрушение покрытия подземной парковки
в г. Сергиев Посад, ул. Фестивальная

И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозговым,
Г.Э. Окольниковой

Figure 3. Collapse of the underground parking roof
in Sergiev Posad, Festivalnaya Street

S o u r c e: made by M.V. Mozglov, G.E. Okolnikova



Рис. 4. Обрушение покрытия подземной парковки
в г. Сергиев Посад, ул. Фестивальная. Опорный узел
моноконтингента и сборная железобетонная колонна

И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозговым, Г.Э. Окольниковой

Figure 4. Collapse of the underground parking roof
in Sergiev Posad, Festivalnaya Street. Support joint
of the cast-in-situ roof and precast reinforced concrete column

S o u r c e: made by M.V. Mozglov, G.E. Okolnikova

2. Материалы и методы

Расчет конструкций по МКЭ, основанному на методе перемещений, вначале предполагает определение перемещений узлов конечных элементов, по которым путем дифференцирования получается поле напряжений [5]. Ошибки вычисления перемещений по МКЭ являются неизбежными, это приводит к более грубой ошибке в моментах, и еще более грубой ошибке в поперечных силах [5]. Известно, что чем мельче сетка конечно-элементного разбиения, тем точнее результат по перемещениям и изгибающим моментам. Как правило, он сходится для различных типов конечных элементов. Что касается поперечной силы, такой вывод сделать нельзя (табл. 2.8–1, 2.8–2 [6]).

Данная работа является продолжением изучения правильности моделирования балочных конструкций из объемных конечных элементов решения пространственной задачи теории упругости [20]. Для оценки моделей ранее рассматривались перемещения узлов консольной балки и нормальные напряжения. По полученным данным был сделан вывод, что все конечно-элементные модели дают хороший результат.

В данной работе численный эксперимент выполняется на четырех твердотельных моделях консольной балки № 1–4, созданных на основании схем, представленных в пособии [6], и одной «эталонной» модели, предложенной авторами [22], изучается сходимость касательных напряжений τ_{xz} , (рис. 5), возникающих от действия поперечной силы $Q_z = 8$ Т. Правильность решения можно оценить при помощи эталонного значения, полученного экспериментальным или аналитическим способами [1–6; 21]. Таким образом, чтобы сделать вывод о сходимости распределения касательных напряжений по сечениям компьютерных моделей, необходимо вычислить их значения по правилам сопротивления материалов. Для квадратного поперечного сечения это можно сделать по формуле Д.И. Журавского (1855 г.):

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z \cdot S_y^{\text{отс}}}{I_y \cdot b}, \quad (1)$$

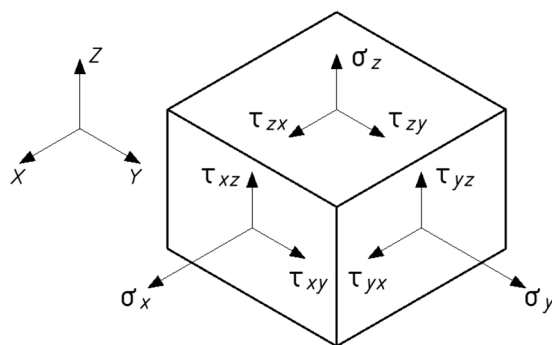


Рис. 5. Напряжения, действующие
по граням конечного элемента [8]

И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозговым,
Г.Э. Окольниковой

Figure 5. Stresses acting along
the edges of a finite element [8]

S o u r c e: made by M.V. Mozglov, G.E. Okolnikova

где τ_{xz} — сдвигающее напряжение; Q_z — поперечная сила вдоль оси Z ; $S_y^{\text{отс}}$ — статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно оси Y ; I_y — момент инерции поперечного сечения относительно оси Y ; b — ширина поперечного сечения.

В нашем случае наибольшие касательные напряжения возникают в середине сечения:

$$\tau_{xz}^{\max} = \frac{3Q_z}{2bh} = \frac{3 \cdot 8}{2 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 48 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2}, \quad (2)$$

где h — высота поперечного сечения.

Минимальные касательные напряжения возникают на верхней и нижней гранях элемента по причине равенства нулю статического момента отсеченной части поперечного сечения:

$$\tau_{xz}^{\min} = 0. \quad (3)$$

3. Результаты и обсуждение

Для изучения правильности распределения касательных напряжений в компьютерных моделях на полях напряжений τ_{xz} «обесцвечиваем» минимальные и максимальные теоретические значения $\tau_{xz} = 0 \text{ Т/м}^2$ и $\tau_{xz} = 48 \text{ Т/м}^2$ (рис. 6, 8, 10, 12). «Обесцвеченные» зоны показаны черным цветом. Модели представлены таким образом, чтобы посмотреть напряжения внутри конструкции. Изучить сходимость решения по поперечной силе можно, умножая усредненное значение касательных напряжений (рис. 7, 9, 11, 13), действующее по высоте балки, на площадь ее поперечного сечения:

$$Q_z = \tau_{xz}^{\text{сред}} \cdot bh. \quad (4)$$

Результаты расчетов представлены в таблице.

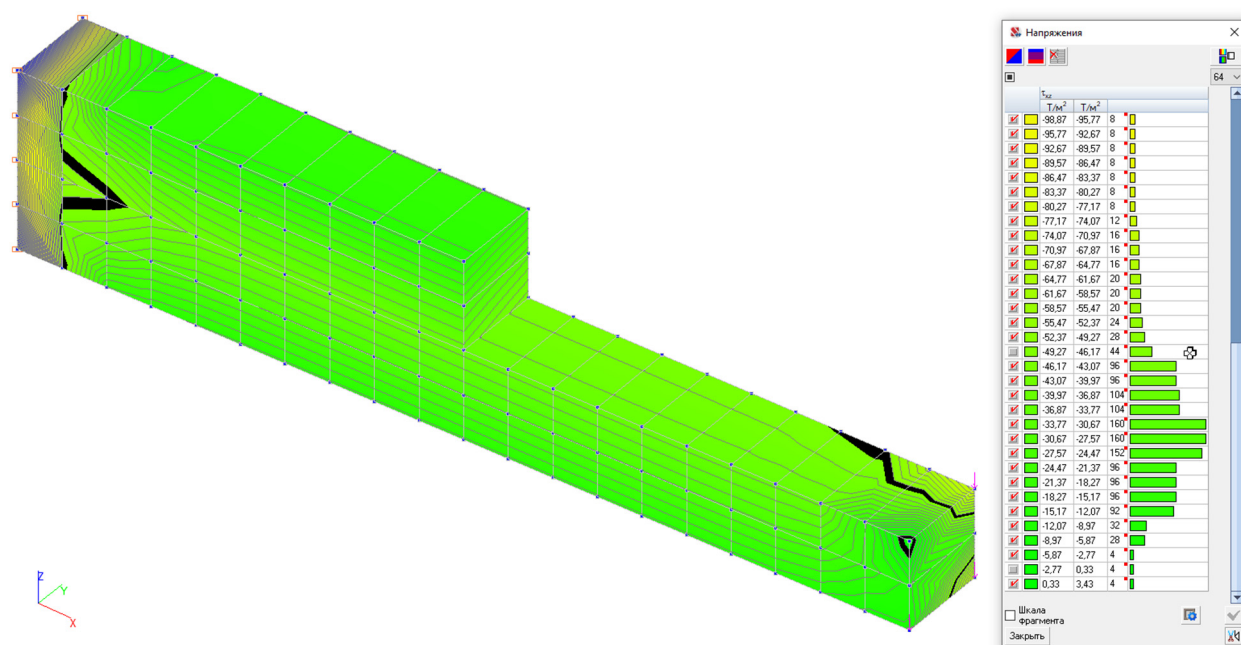


Рис. 6. Модель № 1. Черным цветом показаны зоны с касательными напряжениями $\tau_{xz} = 0 \text{ Т/м}^2$ и $\tau_{xz} = 48 \text{ Т/м}^2$

И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозговым, Г.Э. Окольниковой

Figure 6. Model No. 1. Zones with shear stresses $\tau_{xz} = 0 \text{ Т/м}^2$ and $\tau_{xz} = 48 \text{ Т/м}^2$ are shown in black

S o u r c e: made by M.V. Mozgolov, G.E. Okolnikova

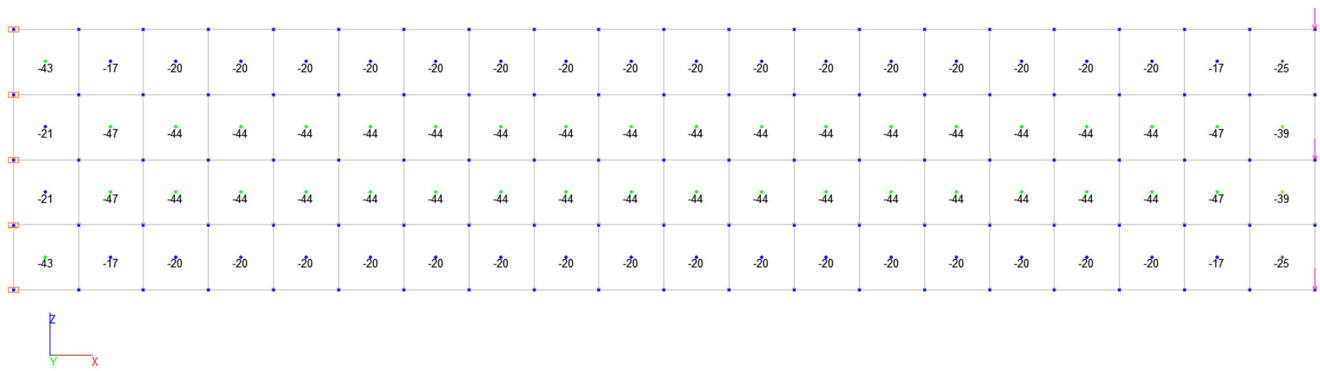


Рис. 7. Модель № 1. Значения касательных напряжений τ_{xz} в центре конечных элементов, T/m^2
И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозголовым, Г.Э. Окольниковой

Figure 7. Model No. 1. Values of shear stresses τ_{xz} in the center of finite elements, T/m^2
S o u r c e: made by M.V. Mozgolov, G.E. Okolnikova

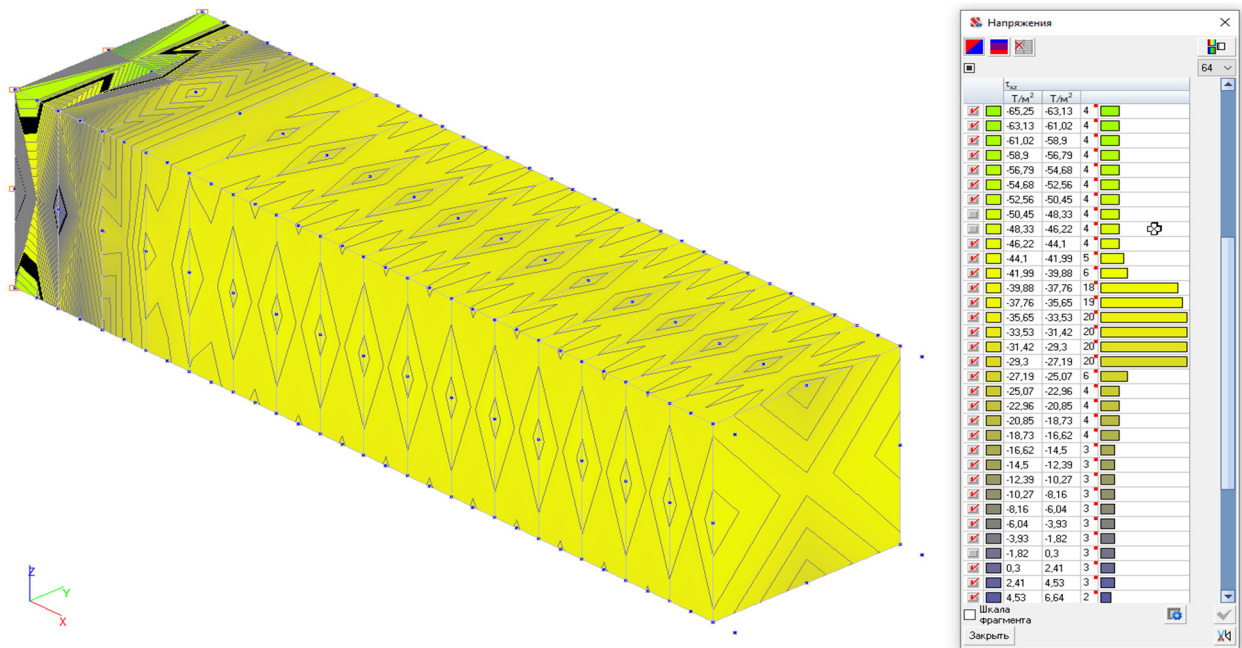


Рис. 8. Модель № 2. Черным цветом показаны зоны с касательными напряжениями $\tau_{xz} = 0 \text{ T/m}^2$ и $\tau_{xz} = 48 \text{ T/m}^2$
И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозголовым, Г.Э. Окольниковой

Figure 8. Model No. 2. Zones with shear stresses $\tau_{xz} = 0 \text{ T/m}^2$ and $\tau_{xz} = 48 \text{ T/m}^2$ are shown in black
S o u r c e: made by M.V. Mozgolov, G.E. Okolnikova

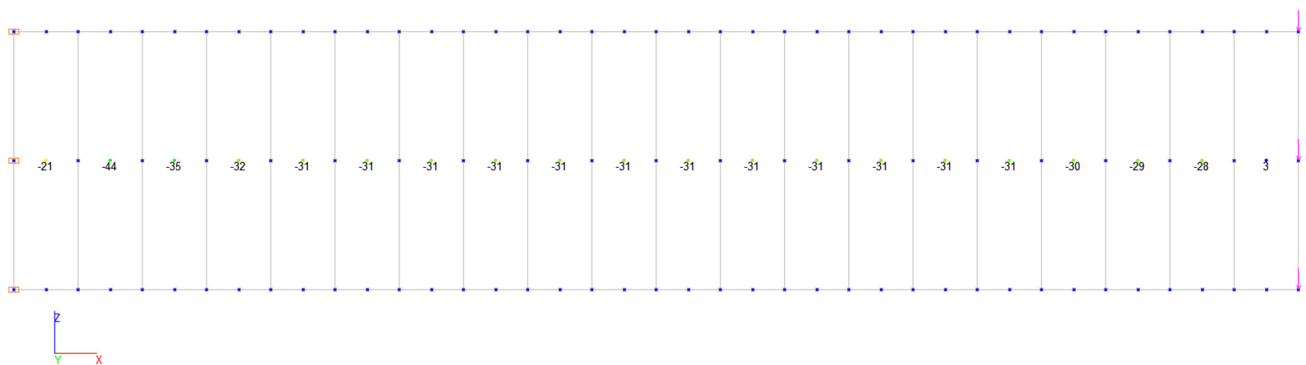


Рис. 9. Модель № 2. Значения касательных напряжений τ_{xz} в центре конечных элементов, T/m^2
И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозголовым, Г.Э. Окольниковой

Figure 9. Model No. 2. Values of shear stresses τ_{xz} in the center of the finite elements, T/m^2
S o u r c e: made by M.V. Mozgolov, G.E. Okolnikova

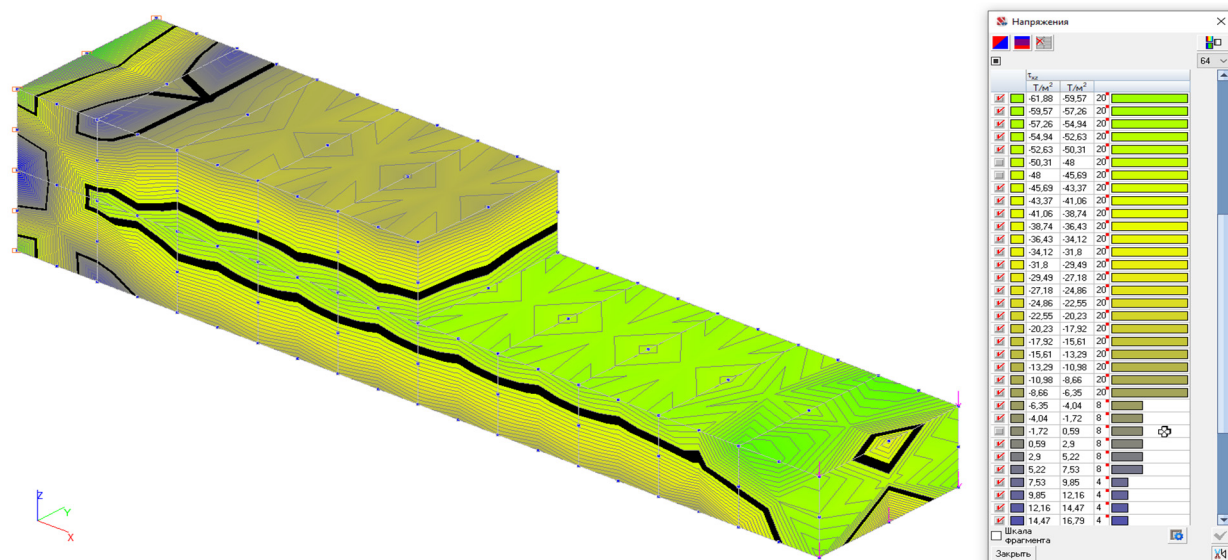


Рис. 10. Модель № 3. Черным цветом показаны зоны с касательными напряжениями $\tau_{xz} = 0 \text{ T/m}^2$ и $\tau_{xz} = 48 \text{ T/m}^2$
И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозговым, Г.Э. Окольниковой

Figure 10. Model No. 3. Zones with shear stresses of $\tau_{xz} = 0 \text{ T/m}^2$ and $\tau_{xz} = 48 \text{ T/m}^2$ are shown in black
S o u r c e: made by M.V. Mozgolov, G.E. Okolnikova

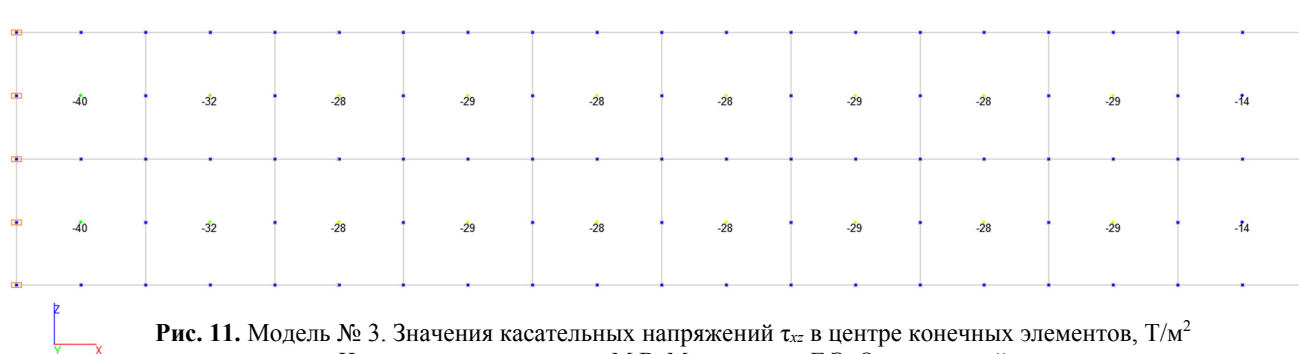


Рис. 11. Модель № 3. Значения касательных напряжений τ_{xz} в центре конечных элементов, T/m^2
И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозговым, Г.Э. Окольниковой

Figure 11. Model No. 3. Values of shear stresses τ_{xz} in the center of the finite elements, T/m^2
S o u r c e: made by M.V. Mozgolov, G.E. Okolnikova

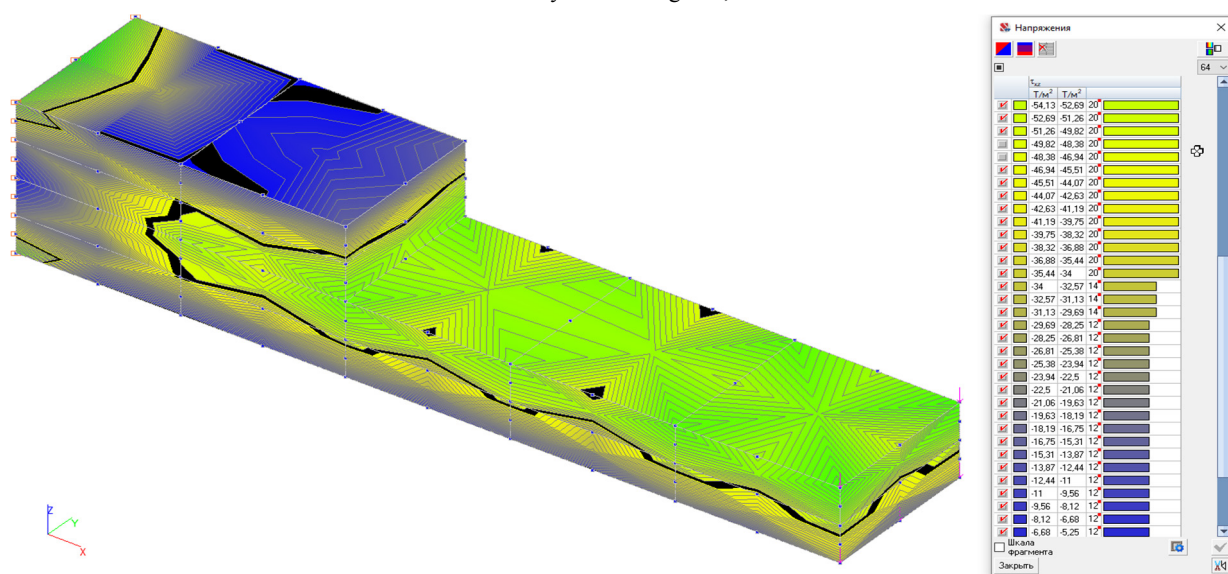


Рис. 12. Модель № 4. Черным цветом показаны зоны с касательными напряжениями $\tau_{xz} = 0 \text{ T/m}^2$ и $\tau_{xz} = 48 \text{ T/m}^2$
И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозговым, Г.Э. Окольниковой

Figure 12. Model No. 4. Zones with shear stresses of $\tau_{xz} = 0 \text{ T/m}^2$ and $\tau_{xz} = 48 \text{ T/m}^2$ are shown in black
S o u r c e: made by M.V. Mozgolov, G.E. Okolnikova

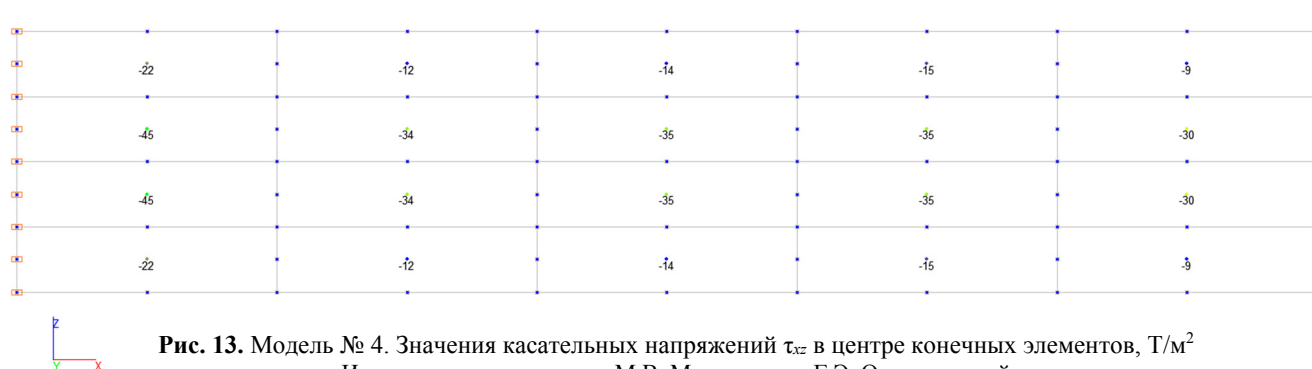


Рис. 13. Модель № 4. Значения касательных напряжений τ_{xz} в центре конечных элементов, T/m^2

И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозголовым, Г.Э. Окольниковой

Figure 13. Model No. 4. Values of shear stresses τ_{xz} in the center of the finite elements, T/m^2

S o u r c e: made by M.V. Mozglov, G.E. Okolnikova

Изучив поля касательных напряжений τ_{xz} , действующих в сечениях компьютерных моделей № 1–4, можно сделать вывод, что их распределение не соответствует теоретическим значениям, вычисленным по правилам сопротивления материалов. Создадим правильную, «эталонную» компьютерную модель [22]. Она будет состоять из густой сетки конечных элементов второго порядка кубической формы с размером ребра 50 мм (тип КЭ 37 библиотеки ВК SCAD++ версии 21 [6]). Поля касательных напряжений τ_{xz} в модели представлены на рис. 14. Значения касательных напряжений τ_{xz} в центре конечных элементов, расположенных в плоскостях XOZ и YOZ , представлены на рис. 15 и 16. Анализ данных свидетельствует о правильности распределения напряжений по сечениям конструкции. Отклонения от теоретических значений наблюдаются в местах действия сил — нагрузки и опорных реакций. Это объясняется проявлением особенностей, которые называют принципом Сен-Венана [5]. Под словом «эталонная» в работе подразумевается наиболее точная модель, сходимость решений в которой соответствует нормативным требованиям. Конечно, можно создать и еще более точную модель, например, уменьшив сетку конечно-элементного разбиения. В нашем случае размер конечного элемента равен 1/10 характерного размера поперечного сечения конструкции.

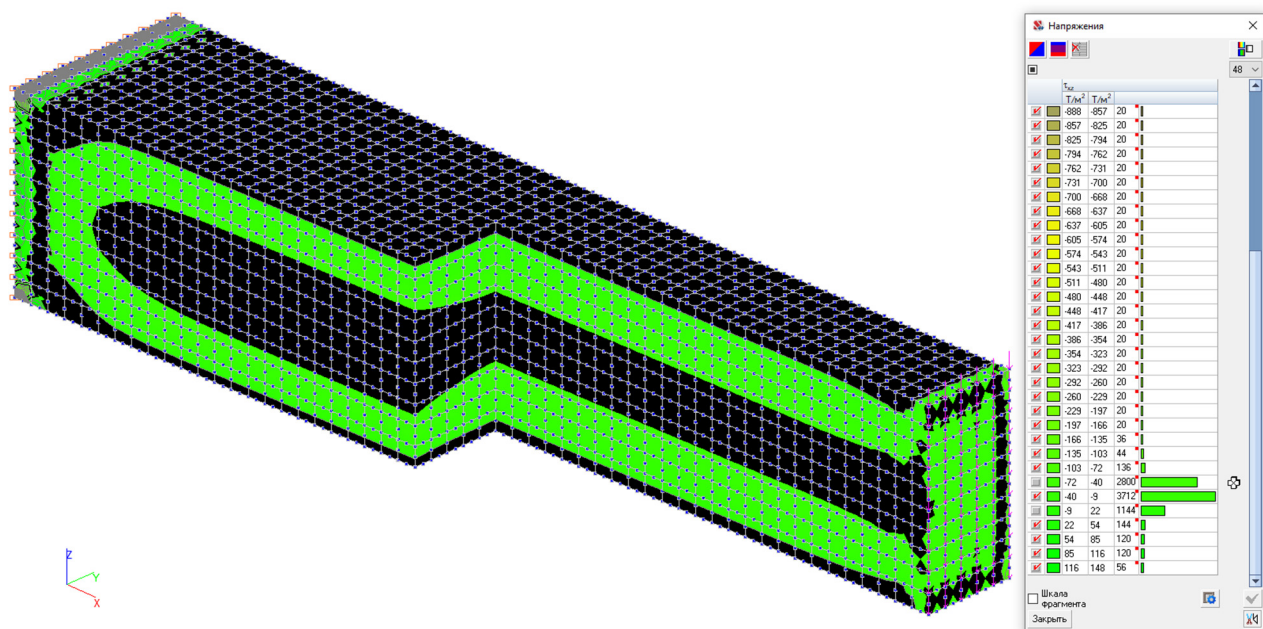


Рис. 14. «Эталонная» модель. Черным цветом показаны зоны с касательными напряжениями $\tau_{xz} = 0 \text{ T/m}^2$ и $\tau_{xz} = 48 \text{ T/m}^2$

И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозголовым, Г.Э. Окольниковой

Figure 14. The “reference” model. Zones with shear stresses $\tau_{xz} = 0 \text{ T/m}^2$ and $\tau_{xz} = 48 \text{ T/m}^2$ are shown in black

S o u r c e: made by M.V. Mozglov, G.E. Okolnikova



Figure 15. The “reference” model. Values of shear stresses τ_{xz} in the center of finite elements located in the XOZ plane, T/m²
 Source : made by M.V. Mozgolov, G.E. Okolnikova

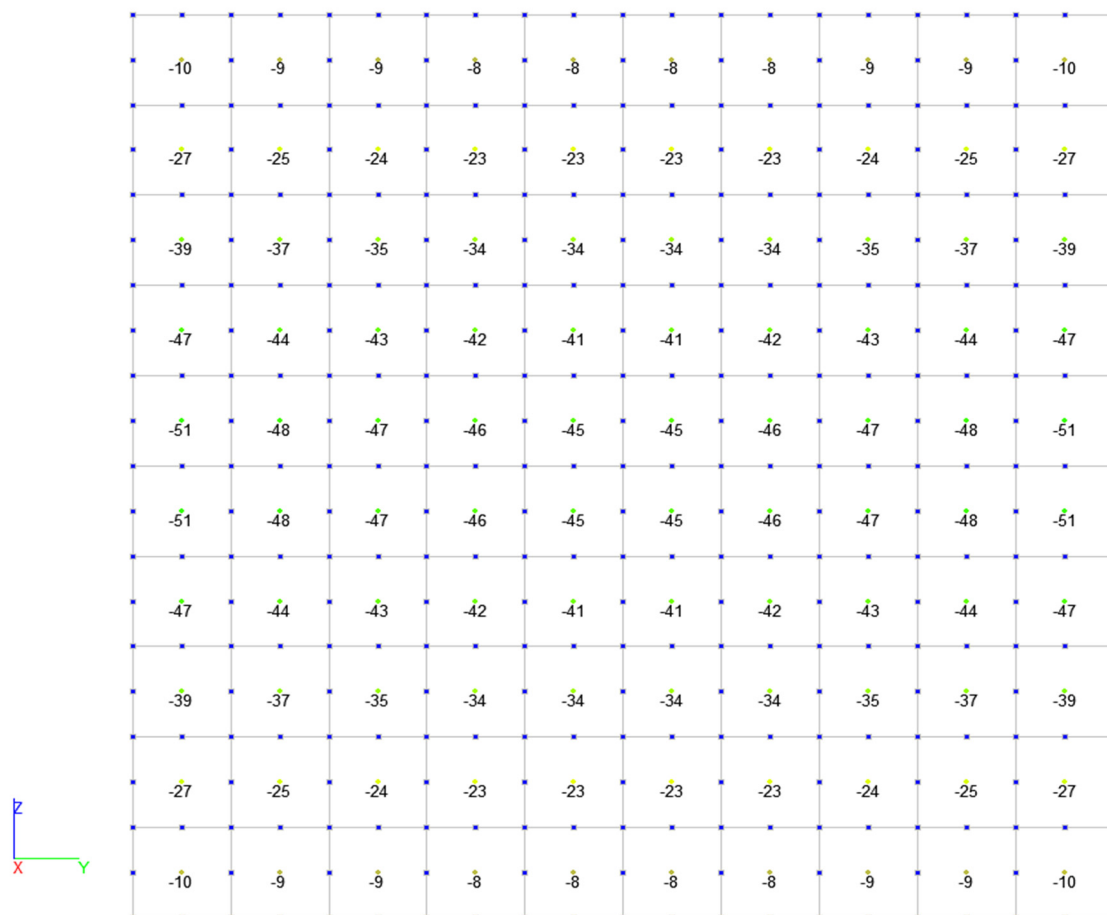


Figure 16. The “reference” model. Values of shear stresses τ_{xz} in the center of finite elements located in the YOZ plane, T/m²
 Source: made by M.V. Mozgolov, G.E. Okolnikova

**Значения усредненных касательных напряжений τ_{xz}
по сечениям компьютерных моделей и вычисленные по ним поперечные силы**
**The values of the averaged shear stresses τ_{xz}
in the cross sections of computer models and the shear forces calculated from them**

Модель № 1 / Model No. 1		Модель № 2 / Model No. 2		Модель № 3 / Model No. 3		Модель № 4 / Model No. 4	
τ_{xz} Т/м ² / T/m ²	Q Т / T	τ_{xz} Т/м ² / T/m ²	Q Т / T	τ_{xz} Т/м ² / T/m ²	Q Т / T	τ_{xz} Т/м ² / T/m ²	Q Т / T
32	8	21	5,25	40	10	33,5	8,375
32	8	44	11	—	—	—	—
32	8	35	8,75	32	8	—	—
32	8	32	8	—	—	—	—
32	8	31	7,75	28	7	—	—
32	8	31	7,75	—	—	23	5,75
32	8	31	7,75	29	7,25	—	—
32	8	31	7,75	—	—	—	—
32	8	31	7,75	28	7	—	—
32	8	31	7,75	—	—	24,5	6,125
32	8	31	7,75	—	—	—	—
32	8	31	7,75	28	7	—	—
32	8	31	7,75	—	—	—	—
32	8	31	7,75	29	7,25	—	—
32	8	31	7,75	—	—	25	6,25
32	8	31	7,75	28	7	—	—
32	8	30	7,5	—	—	—	—
32	8	29	7,25	29	7,25	—	—
32	8	28	7	—	—	—	—
32	8	3	0,75	14	3,5	19,5	4,875

И с т о ч н и к: выполнено М.В. Мозголовым, Г.Э. Окольниковой
S o u r c e: made by M.V. Mozgolov, G.E. Okolnikova

Из таблицы видно, что при вычислении поперечной силы по действующим касательным напряжениям точной моделью является модель № 1, а самой неточной — модель № 4.

4. Заключение

В исследовании произведен численный эксперимент для консольной балки в программном комплексе SCAD++ версии 21 рассмотрены пять твердотельных моделей конечных элементов (модели № 1–4 и «эталонная» модель). Для всех моделей проанализирован характер распределения касательных напряжений и выполнена оценка сходимости решения по поперечной силе.

В исследовании произведена оценка выбора модели метода конечных элементов для расчета балок на основе распределения касательных напряжений:

1. Распределение касательных напряжений от действия поперечной силы в сечениях компьютерных моделей № 1–4 не соответствует теоретическим значениям, вычисленным по правилам сопоставления материалов.
2. Для определения поперечной силы по действующим касательным напряжениям можно рекомендовать модель № 1.
3. Для изучения касательных напряжений при помощи твердотельных моделей модели рекомендуется создавать из кубических конечных элементов второго порядка с густой сеткой конечно-элементного разбиения.

Список литературы

1. Секулович М. Метод конечных элементов / перевод с сербского Ю.Н. Зуева ; под редакцией В.Ш. Барбакадзе. Москва : Стройиздат, 1993. 664 с. ISBN 5-274-01755-X
2. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера : практическое руководство. Москва : УРСС, 2003. 272 с. ISBN 5-354-00238-9
3. Городецкий А.С., Барабаш М.С., Сидоров В.Н. Компьютерное моделирование в задачах строительной механики. Москва : АСВ, 2016. 337 с. ISBN 978-5-4323-0188-8
4. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Москва : ДМК Пресс, 2007. 600 с. ISBN 5041950571, 9785041950576
5. Перельмутер А.В. Беседы о строительной механике. Москва : Издательство SCAD Soft, Издательский дом АСВ, 2016. 304 с. ISBN 978-5-4323-0153-6
6. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Филалко С.Ю., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. SCAD Office. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD ++. Москва : СКАД СОФТ, 2020. 1006 с. ISBN 978-5-903683-28-4, ISBN 978-5-4323-0081-2
7. Cai B., Li B., Fu F. Finite Element Analysis and Calculation Method of Residual Flexural Capacity of Post-fire RC Beams // *International Journal of Concrete Structures and Materials*. 2020. Vol. 14. Article no. 58. <https://doi.org/10.1186/s40069-020-00428-7>
8. Saribiyik A., Sümer Y., Aldbahir W.M. Finite Element Modeling of RC Beams Produced with Low-Strength Concrete and Strengthened for Bending and Shear with CFRP and GFRP // *Sakarya University Journal of Science*. 2024. Vol. 28. No. 6. P. 1326–1341. <https://doi.org/10.16984/saufenbilder.1469172>
9. Aktas M., Sumer Y. Nonlinear finite element analysis of damaged and strengthened reinforced concrete beams // *Journal of Civil Engineering and Management*. 2014. Vol. 20. No. 2. P. 201–210. <https://doi.org/10.3846/13923730.2013.801889>
10. Sümer Y., Aktaş M. Finite element modeling of existing cracks on pre-loaded reinforced concrete beams // *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2014. Vol. 39. No. 4. P. 2611–2619. <https://doi.org/10.1007/s13369-013-0925-2>
11. Demir A., Caglar N., Ozturk H., Sumer Y. Nonlinear finite element study on the improvement of shear capacity in reinforced concrete T-Section beams by an alternative diagonal shear reinforcement // *Engineering Structures*. 2016. Vol. 120. P. 158–165. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.04.029>
12. Tahnat Y.B.A., Dwaikat M.M., Samaaneh M.A. Effect of using CFRP wraps on the strength and ductility behaviors of exterior reinforced concrete joint. *Composite Structures*. 2018. Vol. 201. P. 721–739. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.06.082>
13. Cao V.V., Ronagh H.R. A model for damage analysis of concrete // *Advances in concrete construction*. 2013. Vol. 1. Issue 2. P. 187–200. <https://doi.org/10.12989/acc.2013.01.2.187>
14. Varghese S.M., Kamath K., Salim S.R. Effect of concrete strength and tensile steel reinforcement on RC beams externally bonded with fiber reinforced polymer composites: A finite element study // *Materials Today: Proceedings*. 2023. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2023.03.650>
15. Sattaratphaijit N., Sirimontree S., Witchayangkoon B. Prediction of the Shear Behavior of Reinforced Concrete Deep Beam Strengthened by Transverse External Post-tension using Finite Element Method // *International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies*. 2022. Vol. 13. No. 2. Article no. 13A2P. <https://doi.org/10.14456/ITJEMAST.2022.37>
16. Мозголов М.В., Козлова Е.В. К вопросу создания верификационной модели для расчета кессонного железобетонного перекрытия в вычислительном комплексе SCAD // *Вестник НИЦ «Строительство»*. 2022. Т. 32. № 1. P. 128–140. [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-1\(32\)-128-140](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-1(32)-128-140)
17. Мозголов М.В., Козлова Е.В. Верификация стержневой и твердотельной моделей вычислительного комплекса SCAD расчета железобетонного кессонного перекрытия // *Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова*. 2023. № 6. С. 35–47. <https://doi.org/10.34031/2071-7318-2023-8-6-35-47>
18. Еремеев П.Г. Современные конструкции покрытий над трибунами стадионов. Москва : АСВ, 2015. 236 с.
19. Зенин С.А., Болгов А.Н., Сокуров А.З., Кудинов О.В. Прочность на продавливание плоских плит перекрытий в зонах опирания на торцы стен // *Бетон и железобетон*. 2022. Т. 610. № 2. С. 35–40. <https://doi.org/10.31659/0005-9889-2022-610-2-35-40>. EDN: OWTRVU
20. Мозголов М.В., Окольникова Г.Э. К вопросу оценки точности решений моделей метода конечных элементов на примере расчета консольной балки // *Системные технологии*. 2024. № 1 (50). С. 118–128. https://doi.org/10.48612/dniti/2024_50_181-128
21. Мозголов М.В. Об ошибках примера расчета железобетонной кессонной панели перекрытия в справочнике проектировщика // *Градостроительство и архитектура*. 2023. Т. 13. № 3. С. 13–22. <https://doi.org/10.17673/Vestnik.2023.03.02>
22. Мозголов М.В., Козлова Е.В. Модель комплекса SCAD из объемных конечных элементов: расчет железобетонных кессонных перекрытий // *Вестник НИЦ Строительство*. 2023. Т. 37. № 2. С. 18–36. [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2023-2\(37\)-18-36](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2023-2(37)-18-36)

References

1. Sekulovich M. *Finite Element Method. Translation from Serbian by Yu.N. Zuev*. Edited by V.Sh. Barbakadze. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1993. (In Russ.) ISBN 5-274-01755-X
2. Kaplun A.B., Morozov E.M., Olferyeva M.A. *ANSYS in the Hands of an Engineer. Practical Guide*. Moscow: URSS, 2003. (In Russ.) ISBN 5-354-00238-9
3. Gorodetsky A.S., Barabash M.S., Sidorov V.N. *Computer Modeling in Structural Mechanics Problems*. Moscow: ASV, 2016. (In Russ.) ISBN 978-5-4323-0188-8
4. Perelmuter A.V., Slivker V.I. *Calculation Models of Structures and the Possibility of Their Analysis*. Moscow: DMK Press, 2007. (In Russ.) ISBN 5041950571, 9785041950576
5. Perelmuter A.V. *Conversations about structural mechanics*. Moscow: SCAD Soft Publ., ASV Publ.; 2016. (In Russ.) ISBN 978-5-4323-0153-6
6. Karpilovsky V.S., Kriksunov E.Z., Maliarenko A.A., Fialko S.Yu., Perelmuter A.V., Perelmuter M.A. *SCAD Office. Version 21. Computing complex SCAD ++*. Moscow: SKAD SOFT Publ.; 2020. (In Russ.) ISBN 978-5-903683-28-4, ISBN 978-5-4323-0081-2
7. Cai B., Li B., Fu F. Finite Element Analysis and Calculation Method of Residual Flexural Capacity of Post-fire RC Beams. *International Journal of Concrete Structures and Materials*. 2020;14:58. <https://doi.org/10.1186/s40069-020-00428-7>
8. Saribiyik A., Sümer Y., Aldbahir W.M. Finite Element Modeling of RC Beams Produced with Low-Strength Concrete and Strengthened for Bending and Shear with CFRP and GFRP. *Sakarya University Journal of Science*. 2024;28(6):1326-1341. <https://doi.org/10.16984/aufenbilder.1469172>
9. Aktas M., Sumer Y. Nonlinear finite element analysis of damaged and strengthened reinforced concrete beams. *Journal of Civil Engineering and Management*. 2014;20(2):201–210. <https://doi.org/10.3846/13923730.2013.801889>
10. Sümer Y., Aktaş M. Finite element modeling of existing cracks on pre-loaded reinforced concrete beams. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2014;39(4):2611–2619. <https://doi.org/10.1007/s13369-013-0925-2>
11. Demir A., Caglar N., Ozturk H., Sumer Y. Nonlinear finite element study on the improvement of shear capacity in reinforced concrete T-Section beams by an alternative diagonal shear reinforcement. *Engineering Structures*. 2016;120:158–165. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.04.029>
12. Tahnat Y.B.A., Dwaikat M.M., Samaaneh M.A. Effect of using CFRP wraps on the strength and ductility behaviors of exterior reinforced concrete joint. *Composite Structures*. 2018;201:721–739. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.06.082>
13. Cao V.V., Ronagh H.R. A model for damage analysis of concrete. *Advances in concrete construction*. 2013;1(2): 187–200. <https://doi.org/10.12989/acc.2013.01.2.187>
14. Varghese S.M., Kamath K., Salim S.R. Effect of concrete strength and tensile steel reinforcement on RC beams externally bonded with fiber reinforced polymer composites: A finite element study. *Materials Today: Proceedings*. 2023. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2023.03.650>
15. Sattaratphaijit N., Sirimontree S., Wichayangkoon B. Prediction of the Shear Behavior of Reinforced Concrete Deep Beam Strengthened by Transverse External Post-tension using Finite Element Method. *International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies*. 2022;13(2):13A2P. <https://doi.org/10.14456/ITJEMAST.2022.37>
16. Mozgolov M.V., Kozlova E.V. On the issue of creating a verification model for calculating a caisson reinforced concrete floor in the SCAD computing complex. *Bulletin of the Scientific Research Center Construction*. 2022;32(1):128–140. (In Russ.) [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-1\(32\)-128-140](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2022-1(32)-128-140)
17. Mozgolov M.V., Kozlova E.V. Verification of the rod and solid models of the SCAD computing complex for calculating a reinforced concrete caisson floor. *Bulletin of the BSTU named after V.G. Shukhov*. 2023;(6):35–47. (In Russ.) <https://doi.org/10.34031/2071-7318-2023-8-6-35-47>
18. Ereemeev P.G. *Modern structures of roofs over stadium stands*. Moscow: ASV Publ.; 2015. (In Russ.)
19. Zenin S.A., Bolgov A.N., Sokurov A.Z., Kudinov O.V. Punching strength of flat floor slabs in areas of support on wall ends. *Concrete and reinforced concrete*. 2022;610(2):35–40. (In Russ.) <https://doi.org/10.31659/0005-9889-2022-610-2-35-40>
20. Mozgolov M.V., Okolnikova G.E. On the issue of assessing the accuracy of solutions of finite element method models using the example of calculating a cantilever beam. *System Technologies*. 2024;1(50):118–128. (In Russ.) https://doi.org/10.48612/dnitii/2024_50_181-128
21. Mozgolov M.V. On the errors of the example of calculating a reinforced concrete caisson floor panel in the designer's handbook. *Urban development and architecture*. 2023;13(3):13–22. (In Russ.) <https://doi.org/10.17673/Vestnik.2023.03.02>
22. Mozgolov M.V., Kozlova E.V. Model of the SCAD complex from volumetric finite elements: calculation of reinforced concrete caisson floors. *Bulletin of the Scientific Research Center Construction*. 2023;37(2):18–36. (In Russ.) [https://doi.org/10.37538/2224-9494-2023-2\(37\)-18-36](https://doi.org/10.37538/2224-9494-2023-2(37)-18-36)

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ PROBLEMS OF THEORY OF ELASTICITY

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-6-552-566

UDC 539.42

EDN: CXIPEP

Research article / Научная статья

Specific Strength Under Combined Loading

Arslan K. Kurbanmagomedov¹, Evgeny M. Morozov²

¹ RUDN University, Moscow, Russia

² Department of Density Physics, National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia

✉ kurbanmagomedov_ak@pfur.ru

Received: September 10, 2024

Accepted: November 11, 2024

Abstract. The work is devoted to the application of the concept of specific strength for the analysis of the degree of utilization of mechanical properties of beam material under combined loading. The beam is studied and force diagrams are constructed for various types of loads, such as pure bending with tension, pure bending with tension and torsion, pure bending with torsion, and the strength utilization factor of a beam with an arbitrary cross-section is obtained. The research method is based on the superposition of stress states with the determination of the difference between the resistance diagrams. The concept of material resistance to fracture in the form of ultimate stresses distributed over the body volume is introduced. The method of calculating the specific strength for a beam under combined stress, as well as for thick-walled pipes loaded with internal pressure, is given. The relationship between the beam cross-section of the beam and the specific strength is presented, followed by a conclusion for the optimal application of the beam with the cross-section used.

Keywords: fracture mechanics, solid mechanics, composite material, failure of solid materials and structures, deformation

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution. Kurbanmagomedov Arslan — numerical analysis, evaluation of research results, preparation of text and infographics, final conclusions. Morozov Evgeny — research concept, development of methodology, final conclusions.

For citation: Kurbanmagomedov A.K., Morozov E.M. Specific strength under combined loading. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(6):552–566. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-552-566>

Arslan K. Kurbanmagomedov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior lecturer, Nikolskii Mathematical Institute, RUDN University, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 5262-5269, ORCID 0000-0001-9158-0378; e-mail: kurbanmagomedov_ak@pfur.ru

Evgeny M. Morozov, Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute) Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 3989-2934, ORCID: 0000-0002-4824-8481; e-mail: evgeny.morozov@gmail.com

© Kurbanmagomedov A.K., Morozov E.M., 2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Удельная прочность при сложном сопротивлении

А.К. Курбанмагомедов¹, Е.М. Морозов²

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия

✉ kurbanmagomedov_ak@pfur.ru

Поступила в редакцию: 10 сентября 2024 г.

Принята к публикации: 11 ноября 2024 г

Аннотация. Исследовано применение понятия удельной прочности для расчетного изучения степени использования механических свойств материала бруса при его работе в условиях сложного сопротивления. Представлено исследование бруса с дальнейшим построением эпюр с различными видами нагрузок, таких как чистый изгиб с растяжением, чистый изгиб с растяжением и кручением, чистый изгиб с кручением и получен коэффициент использования несущей способности бруса с произвольным поперечным сечением. Метод исследования основан на суперпозиции напряженных состояний с определением различия между эпюрами сопротивления нагружению. Введено понятие сопротивления материала разрушению в виде предельных напряжений, распределенных по объему тела. Приведен метод расчета удельной прочности для сложнапряженного бруса, а также толстостенных труб, нагруженных внутренним давлением. Представлена зависимость сечения бруса от удельной прочности, с последующим выводом для наиболее выгодного использования бруса с используемым сечением.

Ключевые слова: механика твердого тела, композиционный материал, разрушения твердых материалов и конструкций, деформация

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Морозов Е.М. — научное руководство, концепция, развитие методологии, итоговые выводы. Курбанмагомедов А.К. — анализ результатов исследования, подготовка исходного текста, подготовка инфографиков, итоговые выводы.

Для цитирования: Kurbanmagomedov A.K., Morozov E.M. Specific strength under combined loading // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 6. С. 552–566. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-552-566>

1. Introduction

Solving the problem of increasing strength of structures while simultaneously reducing weight and with minimal consumption of scarce materials leads to the development of methods for evaluating the degree of utilization of the shape and dimensions of the body and the strength of the material. These methods were developed first along the path of assessing the shape and dimensions of the cross-section [1–6] at a constant distribution of material properties across the cross-section. To create a body of equal strength in all its zones and in all directions, it is necessary to evaluate the degree of approximation to an equal-strength state and the correspondence of the stress state in each element of the body to the material strength in the same element.

Since in most cases material properties are distributed non-uniformly over the cross-section, either as a result of technological side processes or as a result of their deliberate changes, evaluation of the load-bearing capacity of the body must be made taking into account the variability of mechanical properties across the cross-sections of the body. Reasonable use and creation of variability in material properties plays a similar role to the rational choice of body shape. Recently, methods have been proposed for estimating the load-bearing capacity of bodies taking into account the variability of not only the stress distribution, but also the resistance distribution [2; 7; 8].

Курбанмагомедов Арслан Курбанмагомедович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель математического института С.М. Никольского, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 5262-5269, ORCID: 0000-0001-9158-0378; e-mail: kurbanmagomedov_ak@pfur.ru

Морозов Евгений Михайлович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры физики прочности, Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 3989-2934, ORCID: 0000-0002-4824-8481; e-mail: evgeny.morozof@gmail.com

In works [7–9] the main conclusion was that from the point of view of increasing the specific strength, it is not the stress distribution itself that is important, but the mutual correspondence of the stress and resistance distributions, and it is necessary to add the analysis of the stress distribution to the analysis of the resistance distribution.

2. Methods

Attempts to assess the load-bearing capacity of bodies and individual cross-sections have been made for the simplest loading cases — tension, pure bending, torsion. The bearing capacity of cross-sections is evaluated by specific strength [9–11] using a nondimensional coefficient θ_C , called the strength utilization factor, which varies from 0 to 1. Specific strength is numerically characterized by coefficient θ_C .

$$\theta_C = \frac{\int_F \sigma y dF}{\int_F \sigma_c y_{\max} dF} = \frac{M}{y_{\max} F \sigma_{av}}, \quad (1)$$

where M is the load-bearing capacity of the cross-section; $y_{\max}$ is the half-height of cross-section; σ_{av} is the average reduced resistance of the cross section; F is the area of the cross-section under study.

In evaluation of the bearing capacity, the existing bearing capacity must be compared with the maximum possible one and, thus, the unused reserves are identified. The given formula (1) allows to evaluate the degree of utilization of the mechanical properties of the material and the geometry of the body based on the specific strength of the body, i.e. strength per unit cross-sectional area of the body, per unit “arm” and per unit of average strength of the material.

The denominator in formula (1) represents the load-bearing capacity of some ideal cross-section, the entire area F of which is concentrated at the end of the “arm” $y_{\max}$, and the material of which has an average resistance of σ_{av} .

Based on this, it can be said that the specific strength of a body is the ratio of the bearing capacity of the body to the bearing capacity of an ideal body with the same dimensions. An ideal body (cross-section) has an average resistance, i.e. resistance equal to

$$\sigma_{av} = \frac{1}{F} \int_F \sigma_c dF, \quad (2)$$

where σ_c is the reduced resistance of the material of the cross-section, depending on the coordinates of the cross-section points. The reduced resistance based on the most common theories of strength (first and third) is either the resistance to brittle fracture, or the yield strength, or variable resistance to plastic deformation if hardening is taken into account.

Thus, specific strength (similar to efficiency) is a dimensionless number varying from 0 to 1. A specific strength value equal to one (achieved only in rare cases) corresponds to 100% utilization of the given dimensions and strength of the material.

Below is an attempt to calculate the specific strength value for combined loading cases for a straight beam.

In the general case, the internal forces in the given section of a beam form the resultant vector and the resultant moment [11; 12], which can be decomposed into the following components (Figure 1). The resultant moment is decomposed into two components: perpendicular to the cross-section plane, M_T (torque moment), and lying in the section plane, M_B (bending moment). The resultant vector — into force P perpendicular to the cross-section (applied at the center of gravity of the cross-section) and the shear force, which is not taken into account.

An ideal section can be represented as two concentrated areas F_i spaced from each other at the maximum possible distance h (dimension) perpendicular to the M_B vector (Figure 1). This type of cross-section is ideal for bending moment apprehension. For torsion resistance, a thin-walled ring of diameter h with area F_K is ideal. It is assumed that steady state is maintained for ideal sections. Both types of cross-sections are able to carry axial load. Thus, the ideal cross-section for a combined load is assumed to consist of the sum of two separate types of ideal cross-sections [13–15].

The load-bearing capacity of the real cross-section is determined by a set of values P, M_B, M_T , which satisfy the strength conditions (according to the chosen strength theory) with a certain reserved strength.

In order to ensure that the specified load acting on the real cross-section can also be accepted by the ideal cross-section, it is necessary to find the values of the areas F_i and F_K of the ideal cross-section. The required areas F_i and F_K can be found from the strength conditions for both types of ideal cross-sections.

For the part of the ideal cross-section subjected to bending and axial load, the following is obtained:

$$\sigma_{av} = \frac{P}{F_i + F_K} + \frac{2M_B}{hF_i}. \quad (3)$$

For the annular part of an ideal cross-section, subjected to torsion and axial load, the following is obtained:

- ♦ according to the 1-st theory of strength

$$2\sigma_{av} = \frac{P}{F_i + F_K} + \sqrt{\left(\frac{P}{F_i + F_K}\right)^2 + 4\left(\frac{2M_T}{hF_K}\right)^2}, \quad (4)$$

- ♦ according to the 3-rd theory of strength

$$\sigma_{av}^2 = \left(\frac{P}{F_i + F_K}\right)^2 + 4\left(\frac{2M_T}{hF_K}\right)^2. \quad (5)$$

The presented equations determine the minimum required areas for carrying maximum loads P, M_B, M_T . With such values of the areas of the ideal cross-section, loads P, M_B, M_T will be ultimate not only for the given cross-section, but also for the ideal cross-section. The sum of areas $F_i + F_K$ gives the total area of the ideal cross-section required to carry the ultimate sum of all types of loads. Moreover, each of the two areas resists with ultimate efficiency only to its own type of load [16–19]. The total area of the ideal cross-section is less than (or equal to) the area of the given cross-section. To assess the degree of utilization of the material properties and the shape of the cross-section, the ratio of the areas can be taken: the minimum area required to withstand the specified combined ultimate load, and the given area that carries the specified combined ultimate load. Then the coefficient evaluating the specific strength will be

$$\theta_C = \frac{F_i + F_K}{F}, \quad (6)$$

where F_i, F_K are the required values of ideal cross-sectional areas calculated using equations (3), (4) or (5).

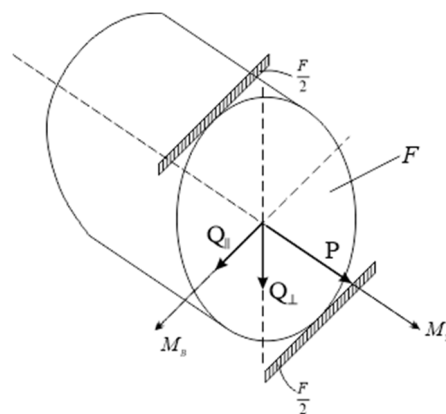


Figure 1. Two types of ideal cross sections
Source: made by A.K. Kurbanmagomedov

Under the action of only one type of load, coefficient θ_s according to formula (6) coincides with the strength utilization factor (1) according to the work of N.D. Sobolev and Ya.B. Friedman [7–9].

In fact, substituting the value of the ultimate bending moment from (3) into (1) results in

$$\theta_C = \frac{M}{y_{\max} F \sigma_{\text{av}}} = \frac{F_i}{F}.$$

Thus, the ratio of the minimum required area to the given one evaluates the specific strength of the cross-section in the same way as the ratio of the load-bearing capacities. Specific strength in terms of bearing capacity under combined load can be characterized by the ratio of ray segments from the coordinate origin to the real and ideal ultimate load curves:

$$\theta_C = \frac{\sqrt{P^2 + M_i^2 + M_T^2}}{\sqrt{P^2 + M_i^2 + M_K^2}},$$

where the numerator is the ultimate load of the given cross-section, and the denominator is the ultimate load of the ideal cross-section, the area of which is equal to the area of the given cross-section.

However, this method must be abandoned, since adding values with different dimensions can lead to inconsistencies.

In formulas (3)–(5), there are maximum loads for the given cross-section, i.e. they satisfy the strength condition according to the maximum normal stress theory

$$2\sigma_c = \frac{P}{F} + \frac{M_B}{I_Z} y + \sqrt{\left(\frac{P}{F} + \frac{M_B}{I_Z} y\right)^2 + 4\tau^2}. \quad (7)$$

or the strength condition according to the maximum shear stress theory

$$\sigma_c = \sqrt{\left(\frac{P}{F} + \frac{M_B}{I_Z} y\right)^2 + 4\tau^2}. \quad (8)$$

Here τ is the shear stress at the tangency point of the σ_c and σ diagrams.

The specific strength evaluated using the strength utilization factor (6) shows the degree of utilization of the cross-sectional shape and mechanical properties of the material.

As an example of specific strength calculation, some special cases of combined resistance are considered further.

2.1. Pure Bending with Tension

1. Let a beam have rectangular cross-section and constant material resistance. Bending moment M_B acts in the principal plane. Using the 3-rd theory of strength according to equation (8) for the given cross-section (rectangle), the following is obtained:

$$F\sigma_c = P + \frac{6}{h} M_B. \quad (9)$$

Substituting the loads from (9) into (3) and then into (5), the strength utilization factor is obtained:

$$\theta_C = \frac{P}{F\sigma_{\text{av}}} + \frac{2M_B}{hF\sigma_{\text{av}}} = 1 - \frac{4M_B}{hF\sigma_c}.$$

In Figure 2, the values of θ_c are plotted on the lines of ultimate forces and moments [1]. The specific strength of the body equal to 0.33 under bending increases linearly with the increase of ratio $\frac{P}{M_n}$ and becomes equal to one in the absence of bending.

2. Let the resistance increase linearly from $\frac{\sigma_c}{2}$ on the central axis to the value of σ_c at the upper and lower points of the rectangular cross-section. The average resistance in this case is equal to $\frac{3}{4}\sigma_c$.

Here, when calculating the strength, it is necessary to distinguish between three cases (Figure 3) depending on the points of the cross-section at which the σ and σ_c diagrams contact.

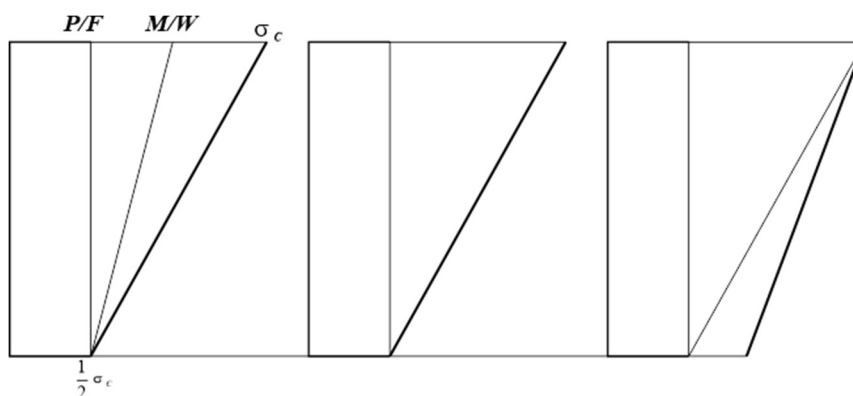


Figure 3. Stress and resistance diagrams for bending and stretching

Source: made by A.K. Kurbanmagomedov

From equation (8), the following is obtained:

$$F\sigma_c = P + 6\frac{M}{h}, \quad (10)$$

where for the above three cases the loads are limited as follows:

Case 1	Case 2	Case 3
$P = \frac{1}{2}F\sigma_c$	$P = \frac{1}{2}F\sigma_c$	$P < \frac{1}{2}F\sigma_c$
$M < \frac{1}{2}W\sigma_c$	$W = \frac{1}{2}W\sigma_c$	$M > \frac{1}{2}W\sigma_c$

The strength utilization factor is obtained from (6) by substituting the loads from (10) into (3):

$$\theta_c = \frac{4}{3} \frac{P}{F\sigma_c} + \frac{8}{3} \frac{M}{hF\sigma_c}.$$

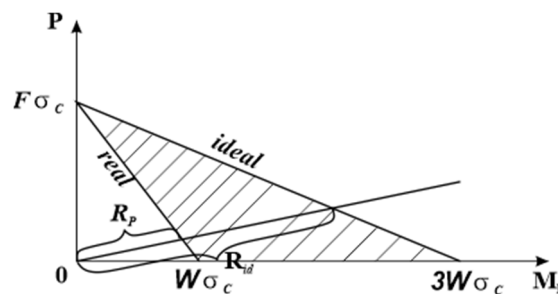


Figure 2. The combined effect

of bending and stretching on the beam

Source: made by A.K. Kurbanmagomedov

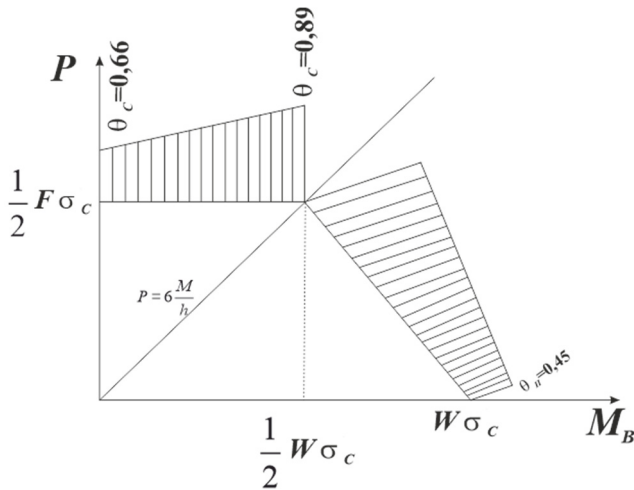


Figure 4. The strength utilization factor under combined bending and stretching of the beam
 Source: made by A.K. Kurbanmagomedov

In Figure 4, strength utilization factor θ_c is plotted on the line of ultimate loads P and M_B . At a value of $P = 6 \frac{M}{h}$ the specific strength is the highest due to the coincidence of σ and σ_c curves. In tension only, the specific strength decreases to 0.66, and in bending only to 0.45.

In Figure 4, strength utilization factor θ_c is plotted on the line of ultimate loads P and M_B . At a value of $P = 6 \frac{M}{h}$ the specific strength is the highest due to the coincidence of σ and σ_c curves. In tension only, the specific strength decreases to 0.66, and in bending only to 0.45.

2.2. Tension with Pure Bending and Torsion

3. Let the cross-section be round with constant resistance.

For such a cross-section, the following is obtained from (8):

$$(F\sigma_c)^2 = \left(P + 8 \frac{M_B}{d} \right)^2 + 64 \left(\frac{M_T}{d} \right)^2.$$

Substituting these load values into formulas (3) and (5) and then into (6), the load-bearing capacity coefficient is obtained, which is plotted for the values of the ultimate loads corresponding to the coordinate planes (Figure 5).

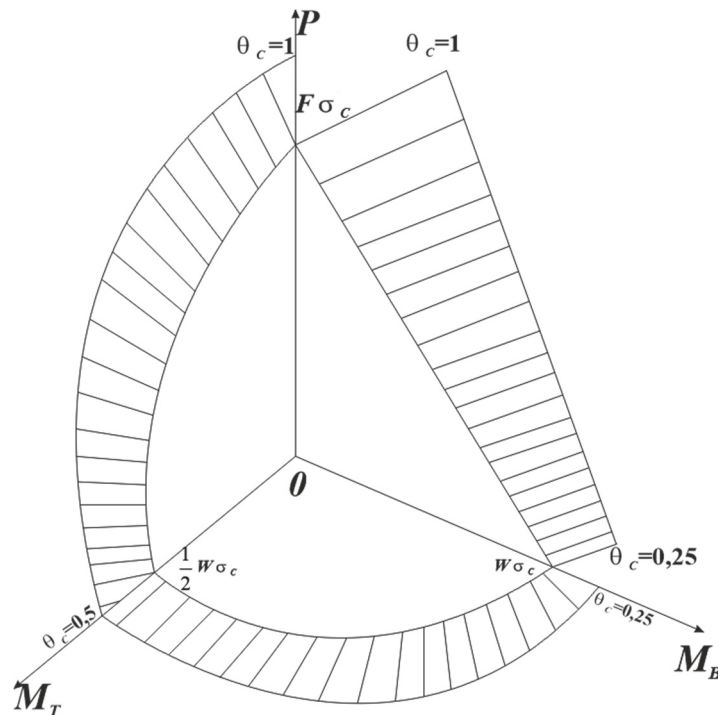


Figure 5. The combined effect of stretching, torsion and bending on the beam
 Source: made by A.K. Kurbanmagomedov

4. Let the same beam have variable resistance of the cross-sectional material. At the center of the round cross-section the resistance is equal to $\frac{\sigma_c}{2}$. The resistance increases linearly along the radius to the value of σ_c at the circumference. The average cross-sectional resistance according to (2) is equal to $\frac{5\sigma_c}{6}$.

The point of contact of diagrams σ and σ_c will be in the center of the circle at

$$\frac{P}{F} = \frac{\sigma_c}{2}; n(F\sigma_c)^2 > \left(P + 8\frac{M_B}{d}\right)^2 + 64\left(\frac{M_T}{d}\right)^2.$$

Contact of σ and σ_c will occur on the surface if

$$\frac{P}{F} < \frac{\sigma_c}{2}; \sigma_c^2 = \left(\frac{P}{F} + \frac{M_B}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_T}{W_p}\right)^2.$$

If the stress and resistance diagrams contact simultaneously both in the center and on the surface, then

$$\sigma_c^2 = \left(\frac{\sigma_c}{2} + \frac{M_B}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_T}{W_p}\right)^2.$$

Based on these cases, Figure 6 shows the surface of ultimate P , M_B , M_T and the strength utilization factor. The most favorable load ratios are determined by the greatest mutual approach of the σ and σ_c diagrams, at which the specific strength is the highest [17–20].

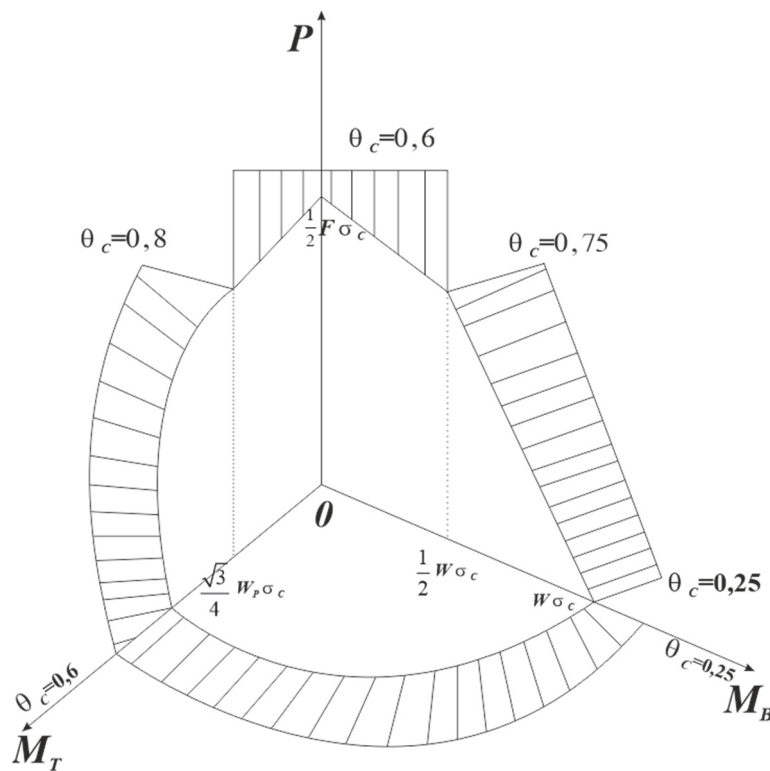


Figure 6. Cross-section of regions on coordinate planes

Source: made by A.K. Kurbanmagomedov

2.3. Pure Bending with Torsion

5. Let the cross-section be elliptical with constant resistance. The bending moment acts in the plane of the major axis of the ellipse. When the reduced stress at the end points of the major axis of the ellipse reaches the resistance value, the load-bearing capacity of the section will be exhausted and according to (8)

$$\frac{a^2}{16} F^2 \sigma_c^2 = M_B^2 + M_T^2.$$

In this respect, there are three possible cases:

I.	II.	III.
$M_T = \frac{\pi ab^2}{4} \sigma_c$	$M_T = \frac{\pi ab^2}{4} \sigma_c$	$M_T < \frac{\pi ab^2}{4} \sigma_c$
$M_B < \frac{F \sigma_c}{4} \sqrt{a^2 - b^2}$	$M_B = \frac{F \sigma_c}{4} \sqrt{a^2 - b^2}$	$M_B > \frac{F \sigma_c}{4} \sqrt{a^2 - b^2}$

In case 1, σ touches σ_c at the extreme points of the minor axis of the ellipse (with that $a < b$); in case 3 — at the extreme points of the major axis of the ellipse ($a > b$); in case II ($a = b$) — simultaneously at both of these and other points of the cross-section.

Plotting strength utilization factor on the curves of the ultimate M_B and M_T (Figure 7), it can be observed that the specific strength depends on the ratio of semi-axes of the ellipse and with an increase in the proportion of torque it varies from 0.25 to 0.5 $\frac{b}{a}$.

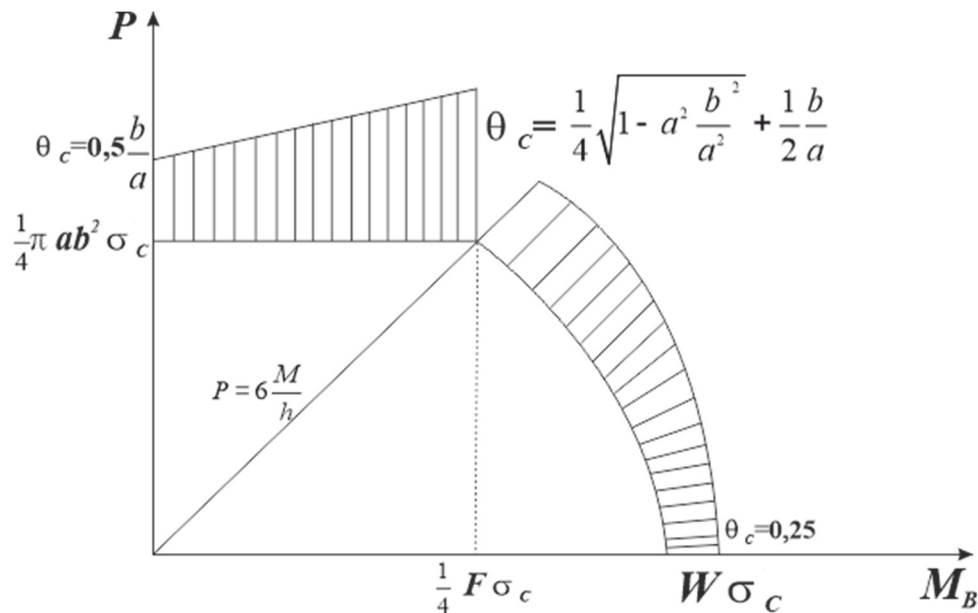


Figure 7. The strength utilization factor in case of combined torsion and bending

Source: made by A.K. Kurbanmagomedov

For a particular ratio between bending and torque ultimate moments, the most favorable ratios of ellipse semi-axes can be found. For example, for case II, equating the derivative of θ_C in terms of $\frac{b}{a}$ to zero, the most favorable cross-sectional shape is obtained at $\frac{b}{a} = 0.89$.

Let the application of the concept of specific strength to the calculation of the optimal cross-section dimensions be demonstrated using a specific example.

Cantilever steel tubular shaft is subjected to static bending moment $M_B = Pl$ and torque $M_T = Pa$. The shaft has variable strength in the normal annular cross-section.

The outer layer of the shaft with a thickness of $\sigma = 5$ mm has a strength K times greater than the core (increasing the strength of the surface layers can be structurally achieved, for example, by freeze casting a stronger material onto the core).

The optimal value of the internal diameter d is determined assuming that the remaining parameters are specified and constant, and the violation of strength occurs in the subsurface layer of the shaft.

The following notation is adopted:

$D = 30$ mm is the outer diameter of the shaft annular section;

σ_{sl} , σ_{sc} are the resistances (strengths) of the material of the surface layer and the shaft core respectively;

$$C = \frac{d}{D}; \quad h = \frac{\delta}{D} = 0.167; \quad K = \frac{\sigma_{sl}}{\sigma_{sc}} = \frac{50}{30} = 1.66.$$

From (8), the ultimate value of the force is obtained as

$$P = \frac{\pi D^4 (1 - c^4) \sigma_{sc}}{32 (D - 2\delta) \sqrt{l^2 + a^2}}.$$

The average resistance according to (2) will be

$$\sigma_{av} = \frac{4h(1-h)}{1-c^2} (\sigma_{sl} - \sigma_{sc}) + \sigma_{sc}.$$

Substituting P and σ_{av} into (3), (5) and (6), the strength utilization factor is obtained as

$$\theta_C = \frac{(l + 2a)(1 - c^4)}{2(1 - 2h) [4h(1 - h)(k - 1) + (1 - c^2)] \sqrt{l^2 + a^2}}.$$

From the condition of maximum specific strength of the cross-section $\frac{\partial \theta_C}{\partial c} = 0$, the equation for determining the best value of C is obtained:

$$c^4 - [8h(1 - h)(k - 1) + 2]c^2 + 1 = 0.$$

For the considered case, this results in $C = 0.57$, or the internal diameter should be equal to 17 mm.

2.4. Specific Strength of Thick-Walled Pipes

The specific strength of a beam under combined loading was discussed above. Let the definition of specific strength be applied to evaluate the extent to which the strength of thick-walled pipes loaded with internal pressure is utilized [21–23].

A thin-walled pipe is assumed to be an ideal body, based on obtaining the maximum load-bearing capacity for a given internal radius of the pipe, considering that the entire thickness of the thick-walled pipe under consideration is concentrated in its internal diameter. The resistance of the material of an ideal pipe, according to definition, is equal to the average resistance of the material of the given thick-walled pipe [23–26].

Then the reference load-bearing capacity of an ideal pipe will be:

$$P_{id} = \frac{\sigma_{av}(R-r)}{r},$$

where $\sigma_{av} = \frac{\int_r^R \sigma_c d\rho}{R-r}$ is average resistance.

The specific strength of a thick-walled pipe will be:

$$\theta_C = \frac{P}{P_{id}} = \frac{pr}{\sigma_{av}(R-r)},$$

where p is the load-bearing capacity of this pipe; R , r are the outer and inner radii of the thick-walled pipe under consideration.

The resulting coefficient can be represented as a product of the coefficients of equal strength and shape:

$$\theta_C = \frac{P}{P'} \frac{P'}{P_{id}} = \theta_p \theta_{sh},$$

where P' is the maximum internal pressure in the thick-walled pipe, in which the reduced stresses σ throughout the entire thickness of the pipe coincide with the σ_c resistance diagram.

3. Results and Discussions

The coincidence of the diagram of reduced stress from internal pressure with the resistance diagram can be achieved, for example, by continuously increasing the elastic modulus along the thickness of the pipe from the inner to the outer surface. The practical implementation of a continuous change in the elastic modulus according to the desired law is apparently difficult to achieve.

The specific strength calculated for some cases of resistance of thick-walled pipes is given in Table.

The Table shows that for a jointed pipe and for a pipe, part of the wall of which has crossed into the plastic zone, the strength utilization factor is approximately the same. In the case of a very thick pipe wall, the specific strength drops significantly, which indicates that pipes with very thick walls are unprofitable. By changing the diagram of the yield strength along the thickness of the pipe, it is possible to increase the strength utilization of the pipe yet in the elastic stage to the degree of utilization in case of plastic operation of the pipe with constant resistance.

Material specifications											
Material	Temper	Chemical Composition	Physical Properties						Description and Application	Test by Laboratory	Receiving inspection
			Dimension	Tensile Strength Lbs/Sq.In. Min.	Yield Strength Lbs/Sq.In.Min.	Elongation Min.	Rockwell Hardness Number	Cold Bend Angle			
Cold Finished High Yellow Brass Copper – 65% Zinc – 35%	Hard	Copper – 64.50–67.50% Zinc – 32.09% Lead – 0.35% Iron – 0.06%	Cold Drawn Seamless Tubing All sizes	68.000	40.000	—	B75 to B85	90° around radius equal to thickness	• Good for flat work. • Suitable for ornamental plate or panel parts. • Used for Squirrel Cage rotor and rings.	None	Dimensions, Tolerances, Quality and Appearance
Cold drawn Seamless tubing high yellow brass Copper – 67.5% Zinc – 32% Lead – 0.5%	Light Anneal	Copper – 65.00–8.00% Zinc – 0.98% Lead – 0.80% Iron – 0.07% Tin –0.15%	Cold Drawn Seamless Tubing All sizes	45.000	18.000	25%	—	180° around Pin equal $1\frac{1}{2}$ to 1— times	• A 7.5 cm long piece of tubing, after being split lengthwise will withstand opening out flat without showing cracks or flaws. • Example of use: Coil spools when ends are to be spun over.	None	Dimensions, Tolerances, Quality and Appearance
Cold drawn Seamless tubing high yellow brass Copper – 67.5% Zinc – 32% Lead – 0.5%	Half hard	Copper – 65.00–68.00% Zinc – 30.98% Lead – 0.80% Iron – 0.07% Tin – 0.15%	Cold Drawn Seamless Tubing All sizes	Physical properties on all sizes not available. May be obtained on specific sizes when desired.					• Suitable for brass railings. Also coil spools when not spun over.	None	Dimensions, Tolerances, Quality and Appearance

S o u r c e: made by A.K. Kurbanmagomedov

4. Conclusion

The following conclusion is made based on the obtained results:

1. The paper provides a method for calculating the specific strength for a beam under combined loading, as well as for thick-walled pipes loaded with internal pressure.

References

1. Gordeeva G.V., Kurbanmagomedov A.K., Spitsov D.V. Strength control of concrete structures during the assessment of the residual life of buildings and structures of a hazardous production facility in the field of thermal power engineering. *System technologies*. 2022;4(45):73–86. (In Russ.) https://doi.org/10.55287/22275398_2022_4_73
2. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V., Zhidelev A.V. *The mixed form of the finite element method in problems of structural mechanics*. Volgograd: VSUACE (VolgGASU) Publ.; 2006. (In Russ.) EDN: OUNUOH
3. Lepikhin A.M., Morozov E.M., Makhutov N.A., Leschenko V.V. Possibilities of Estimation of Fracture Probabilities and Allowable Sizes of Defects of Structural Elements According to the Criteria of Fracture Mechanics. *Inorganic Materials*. 2023;59:1524–1531. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S0020168523150074>
4. Makhutov N.A., Moskvichev V.V., Morozov E.M., Shlyannikov V.N., Gadenin M.M., Yudina O.N., Fedorova E.N. The international and national researches of strength, integrity and safety of engineering systems. *Safety and emergencies problems*. 2020;(1):5–19. (In Russ.) <https://doi.org/10.36535/0869-4176-2020-01-1>
5. Moskvichev V.V., Makhutov N.A., Shokin Yu.I. et al. *Applied problems of structural strength and mechanics of destruction of technical systems*. Novosibirsk: Nauka Publ.; 2021. (In Russ.) <https://doi.org/10.7868/978-5-02-038832-1>
6. Arkadov G.V., Getman A.F., Usanov A.I. Development and Application of Technologies Maintenance of a Lifetime and Safety the NPP Components. *Proceedings of the 16th International Conference on Nuclear Engineering*. Orlando, Florida, USA. May 11–15, 2008;1:313–319. ASME. <https://doi.org/10.1115/ICONE16-48904>
7. Sobolev N.D., Bogdanovich K.P. *Mechanical properties of materials and fundamentals of strength physics*. Moscow: MEPhI Publ.; 1985. (In Russ.)
8. Friedman Ya.B. *Unified theory of strength of materials*: With a preface. Academician N.N. Davidenkov. All-Union Scientific Research Institute of Aviation Materials. Moscow: Oborongiz Publ.; 1943. (In Russ.)
9. Morozov E.M., Polak L.S., Fridman Y.B. Variational Principles in the Development of Cracks in Solids. *Soviet Physics Doklady*. 1964;9:394. (In Russ.)
10. Kurbanmagomedov A., Radzhabov Z., Okolnikova G. Investigation of Normal Fracture Cracks in an Infinite Elastic Medium. *Networked Control Systems for Connected and Automated Vehicles. NN 2022. Lecture Notes in Networks and Systems*. 2023;509:1407–1417. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11058-0_142
11. Honeycombe R. Plastic Deformation of Metals. *Nature*. 1932. Vol. 129. <https://doi.org/10.1038/129717b0>
12. Zakharov M.N., Morozov E.M., Nasonov V.A. Assessing the risk of welding defects. *Russian Engineering Research*. 2015;35(11):846–849. <https://doi.org/10.3103/S1068798X15110180>
13. Kurbanmagomedov A.K., Radzhabov Z.R., Okolnikova G.E. Investigation of Normal Fracture Cracks in Elastic-Layer Materials. *NeuroQuantology*. 2022;20(8):6378–6384. <http://doi.org/10.14704/nq.2022.20.8.NQ44661>
14. Khazhinsky G.M. *Mechanics of small cracks in strength calculations of equipment and pipelines*. Moscow: Fizmatkniga Publ.; 2008. (In Russ.) ISBN 978-89155-171-8
15. Morozov E.M., Kurbanmagomedov A.K. Is it possible to determine the whole crack path at once. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(4):364–373. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-4-364-373>
16. Gordeeva G.V., Kurbanmagomedov A.K., Spitsov D.V. Strength control of concrete structures during the assessment of the residual life of buildings and structures of a hazardous production facility in the field of thermal power engineering. *The System technologies*. 2022;4(45):73–86. http://doi.org/10.55287/22275398_2022_4_73
17. Carpinteri A., Brighenti R., Spagnoli A. Part-through cracks in pipes under cyclic bending. *Nuclear Engineering and Design*. 1998;185(1):1–14. [https://doi.org/10.1016/S0029-5493\(98\)00189-7](https://doi.org/10.1016/S0029-5493(98)00189-7)
18. Carpinteri A., Brighenti R., Spagnoli A. Fatigue growth simulation of part-through flaws in thick-walled pipes under rotary bending. *International Journal of Fatigue*. 2000;22(1):1–9. [https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(99\)00115-2](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(99)00115-2)
19. Musayev V.K. Mathematical Modeling of Explosive and Seismic Impacts on an Underground Structure. *Power Technology and Engineering*. 2024;57(6):875–881. <https://doi.org/10.1007/s10749-024-01751-9>
20. Ghelichi R., Kamrin K. Modeling growth paths of interacting crack pairs in elastic media. *Soft Matter*. 2015;(11):7995–8012. <https://doi.org/10.1039/c5sm01376c>
21. Nikhamkin M., Ilinykh A. Low cycle fatigue and crack grow in powder nickel alloy under turbine disk wave form loading: Validation of damage accumulation model. *Applied Mechanics and Materials*. 2014;(467):312–316. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.467.312>

22. Wang Q., Ren J.Q., Wu Y.K., Jiang P., Sun Z.J., Liu X.T. Comparative study of crack growth behaviors of fully-lamellar and bi-lamellar Ti-6Al-3Nb-2Zr-1Mo alloy. *Journal of Alloys and Compounds*. 2019;789:249–255. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2019.02.302>
23. Kolesnikov Yu.V., Morozov E.M. *Mechanics of contact failure*. Moscow: LKI Publ.; 2007. (In Russ.) ISBN: 978-5-382-00268-2
24. Matvienko Y.G., Morozov E.M. Two basic approaches in a search of the crack propagation angle. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. 2017;40(8):1191–1200. <https://doi.org/10.1111/ffe.12583>
25. Pook L.P. The linear elastic analysis of cracked bodies, crack paths and some practical crack path examples. *Engineering Fracture Mechanics*. 2016;167:2–19. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.02.055>
26. Dombrovskii Y.M., Stepanov M.S. Mechanisms of Intragrain Plastic Deformation in Steel Heating Process. *Metal Science and Heat Treatment*. 2024;(65):747–750. <https://doi.org/10.1007/s11041-024-01000-w>

Список литературы

1. Гордеева Г.В., Курбанмагомедов А.К., Спицов Д.В. Контроль прочности бетонных конструкций при проведении оценки остаточного ресурса зданий и сооружений опасного производственного объекта в сфере теплоэнергетики // Системные технологии. 2022. № 4 (45). С. 73–86. https://doi.org/10.55287/22275398_2022_4_73
2. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В., Жиделев А.В. Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики. Волгоград : Изд-во ВолгГАСУ, 2006. 172 с. EDN: OWNУОН
3. Lepikhin A.M., Morozov E.M., Makhutov N.A., Leschenko V.V. Possibilities of Estimation of Fracture Probabilities and Allowable Sizes of Defects of Structural Elements According to the Criteria of Fracture Mechanics // *Inorganic Materials*. 2023. Vol. 59. P. 1524–1531. <https://doi.org/10.1134/S0020168523150074>
4. Махутов Н.А., Москвичев В.В., Морозов Е.М., Шлянников В.Н., Гаденин М.М., Юдина О.Н., Федорова Е.Н. Международные и национальные исследования прочности, целостности и безопасности технических систем // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. 2020. № 1. С. 5–19. <https://doi.org/10.36535/0869-4176-2020-01-1>
5. Москвичев В.В., Махутов Н.А., Шокин Ю.И. и др. Прикладные задачи конструкционной прочности и механики разрушения технических систем. Новосибирск : Наука, 2021. 796 с. <https://doi.org/10.7868/978-5-02-038832-1>
6. Arkadov G.V., Getman A.F., Usanov A.I. Development and Application of Technologies Maintenance of a Lifetime and Safety the NPP Components // *Proceedings of the 16th International Conference on Nuclear Engineering*. Orlando, Florida, USA. May 11–15, 2008. Vol. 1. P. 313–319. ASME. <https://doi.org/10.1115/ICONE16-48904>
7. Соболев Н.Д., Богданович К.П. Механические свойства материалов и основы физики прочности. Москва : МИФИ, 1985. 82 с.
8. Фридман Я.Б. Единая теория прочности материалов: с предисл. акад. Н.Н. Давиденкова / Всесоюзный научно-исследовательский институт авиационных материалов. Москва : Оборонгиз, 1943. 94 с.
9. Морозов Е.М., Полак Л.С., Фридман Ю.Б. О вариационных принципах развития трещин в твердых телах // Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 146. № 3. С. 537–540.
10. Kurbanmagomedov A., Radzhabov Z., Okolnikova G. Investigation of Normal Fracture Cracks in an Infinite Elastic Medium // *Networked Control Systems for Connected and Automated Vehicles*. NN 2022. Lecture Notes in Networks and Systems. 2023. Vol. 509. P. 1407–1417. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11058-0_142
11. Honeycombe R. Plastic Deformation of Metals // *Nature*. 1932. Vol. 129. <https://doi.org/10.1038/129717b0>
12. Zakharov M.N., Morozov E.M., Nasonov V.A. Assessing the risk of welding defects // *Russian Engineering Research*. 2015. Vol. 35. P. 846–849. <https://doi.org/10.3103/S1068798X15110180>
13. Kurbanmagomedov A.K., Radzhabov Z.R., Okolnikova G.E. Investigation of Normal Fracture Cracks in Elastic-Layer Materials // *NeuroQuantology*. 2022. No. 20 (8). P. 6378–6384. <http://doi.org/10.14704/nq.2022.20.8.NQ44661>
14. Хажинский Г.М. Механика мелких трещин в расчетах прочности оборудования и трубопроводов. Москва : Физматкнига, 2008. 254 с. ISBN 978-89155-171-8
15. Morozov E.M., Kurbanmagomedov A.K. Is it possible to determine the whole crack path at once // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024. Vol. 20. No. 4. P. 364–373. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-4-364-373>
16. Gordeeva G.V., Kurbanmagomedov A.K., Spitsov D.V. Strength control of concrete structures during the assessment of the residual life of buildings and structures of a hazardous production facility in the field of thermal power engineering // *The System technologies*. 2022. № 4 (45). P. 73–86. https://doi.org/10.55287/22275398_2022_4_73
17. Carpinteri A., Brighenti R., Spagnoli A. Part-through cracks in pipes under cyclic bending // *Nuclear Engineering and Design*. 1998. Vol. 185. No. 1. P. 1–14. [https://doi.org/10.1016/S0029-5493\(98\)00189-7](https://doi.org/10.1016/S0029-5493(98)00189-7)
18. Carpinteri A., Brighenti R., Spagnoli A. Fatigue growth simulation of part-through flaws in thick-walled pipes under rotary bending // *International Journal of Fatigue*. 2000. Vol. 22. No. 1. P. 1–9. [https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(99\)00115-2](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(99)00115-2)

19. *Musayev V.K.* Mathematical modeling of explosive and seismic impacts on an underground structure // *Power Technology and Engineering*. 2024. Vol. 57. No. 6. P. 875–881. <https://doi.org/10.1007/s10749-024-01751-9>
20. *Ghelichi R., Kamrin K.* Modeling growth paths of interacting crack pairs in elastic media. *Soft Matter*. 2015;(11): 7995–8012. <https://doi.org/10.1039/c5sm01376c>
21. *Nikhamkin M., Ilinykh A.* Low cycle fatigue and crack grow in powder nickel alloy under turbine disk wave form loading: Validation of damage accumulation model // *Applied Mechanics and Materials*. 2014. Vol. 467. P. 312–316. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.467.312>
22. *Wang Q., Ren J.Q., Wu Y.K., Jiang P., Sun Z.J., Liu X.T.* Comparative study of crack growth behaviors of fully-lamellar and bi-lamellar Ti-6Al-3Nb-2Zr-1Mo alloy // *Journal of Alloys and Compounds*. 2019. Vol. 789. P. 249–255. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2019.02.302>
23. *Колесников Ю.В., Морозов Е.М.* Механика контактного разрушения. Москва : Изд-во ЛКИ, 2007. 224 с. ISBN 978-5-382-00268-2
24. *Matvienko Y.G., Morozov E.M.* Two basic approaches in a search of the crack propagation angle // *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. 2017. Vol. 40. No. 8. P. 1191–1200. <https://doi.org/10.1111/ffe.12583>
25. *Pook L.P.* The linear elastic analysis of cracked bodies, crack paths and some practical crack path examples // *Engineering Fracture Mechanics*. 2016. Vol. 167. P. 2–19. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.02.055>
26. *Dombrovskii Y.M., Stepanov M.S.* Mechanisms of Intragrain Plastic Deformation in Steel Heating Process // *Metal Science and Heat Treatment*. 2024. No. 65. P. 747–750. <https://doi.org/10.1007/s11041-024-01000-w>

РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-6-567-592

UDC 624.04*074.4:539.41:513.73:514.74:514.8

EDN: CYGRSH

Research article / Научная статья

Analytical Calculation of Cylindrical Shells in the Form of Second-Order Algebraic Surfaces

Sergey N. Krivoschapko 

RUDN University, Moscow, Russia

✉ sn_krivoschapko@mail.ru

Received: July 30, 2024

Accepted: September 27, 2024

Abstract. When choosing the shape of a shell, one should strive for the boundary conditions to ensure momentless behavior of the shell. Second-order algebraic surfaces include three degenerate surfaces: parabolic, elliptic, and hyperbolic cylindrical surfaces, and two surfaces derived from them: circular cylindrical surface and cylindrical surface with incomplete ellipse in cross-section. These five surfaces are the objects of this research. For the first time, comparative static analysis of the five shells under a load of self-weight type is performed using the momentless shell theory. The explicit formulae for the determination of three internal membrane forces are obtained. It is shown that the parabolic cylindrical shell and the cylindrical shell with incomplete ellipse in cross-section perform better within the momentless shell theory. The constraints for the application of the momentless theory obtained earlier by other authors are confirmed. For the first time, a system of three partial differential equations with respect to the displacements of middle surfaces of the five cylindrical shells given in previously unused curvilinear coordinates is derived. It is established that no studies dealt with the calculation of hyperbolic cylindrical shells so far. A brief review of publications on the analysis of strength, stability, dynamics, and application of the five considered cylindrical shells is given to clarify the directions of investigation of these five cylindrical shells.

Keywords: thin shell, hyperbolic cylindrical shell, parabolic cylindrical shell, circular cylindrical shell, elliptic cylindrical shell, linear shell theory in lines of curvature, momentless shell theory

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

For citation: Krivoschapko S.N. Analytical calculation of cylindrical shells in the form of second-order algebraic surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(6):567–592. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-567-592>

Sergey N. Krivoschapko, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 2021-6966, ORCID: 0000-0002-9385-3699; e-mail: sn_krivoschapko@mail.ru

© Krivoschapko S.N., 2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Аналитический расчет цилиндрических оболочек в форме алгебраических поверхностей второго порядка

С.Н. Кривошапко 

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

✉ sn_krivoshapko@mail.ru

Поступила в редакцию: 30 июля 2024 г.

Принята к публикации: 27 сентября 2024 г.

Аннотация. При выборе формы оболочек нужно стремиться, чтобы граничные условия обеспечивали работу оболочек в безмоментном состоянии. В состав алгебраических поверхностей второго порядка входят три вырожденные поверхности: параболическая, эллиптическая и гиперболическая цилиндрические поверхности, а также две производные от них поверхности: круговая цилиндрическая поверхность и цилиндрическая поверхность с неполным эллипсом в поперечном сечении. Эти пять цилиндрических поверхностей стали объектами исследования в статье. Впервые произведен сравнительный расчет по безмоментной теории пяти оболочек на действие статической нагрузки типа собственного веса, для чего получены в явном виде формулы для определения трех тангенциальных внутренних усилий. Показано, что в рамках безмоментной теории оболочек лучше работает параболическая цилиндрическая оболочка и цилиндрическая оболочка с неполным эллипсом в поперечном сечении. Подтверждены полученные ранее другими авторами ограничения на применение безмоментной теории. Впервые выведена система трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно перемещений срединной поверхности пяти цилиндрических оболочек, заданных в ранее не применявшихся криволинейных координатах. Установлено, что до настоящего времени никто не занимался расчетом гиперболической цилиндрической оболочки. Приведен краткий обзор опубликованных работ по расчету на прочность, устойчивость, колебания и применение пяти рассматриваемых цилиндрических оболочек для выяснения направлений исследований этих пяти цилиндрических оболочек.

Ключевые слова: тонкая оболочка, гиперболическая цилиндрическая оболочка, параболическая цилиндрическая оболочка, круговая цилиндрическая оболочка, эллиптическая цилиндрическая оболочка, линейная теория оболочек в линиях кривизны, безмоментная теория оболочек

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Krivoshapko S.N. Analytical calculation of cylindrical shells in the form of second-order algebraic surfaces // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 6. С. 567–592. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-567-592>

1. Introduction

Various analytical, semi-analytical and numerical methods for the calculation of thin- and thick-walled, single- and multi-layer shells made of physically linear and nonlinear structural materials have been developed in response to the demands of practice. To assist the design engineer, the corresponding computational software systems have been created. Various optimality criteria have been developed for the design of thin shells.

A number of review papers [1–4] show that shells of rotation, translation, cylindrical and conical shells are among the most popular thin and thick shells that can satisfy a variety of practical and scientific demands arising in different time periods.

The greatest attention has been given to shells of rotation. Twenty three optimality criteria were proposed for them [5]. V.V. Novozhilov et al. [6] showed that, in terms of stress magnitude, a parabolic dome is the most efficient, but it requires the largest area of the supporting ring and is the least efficient from this standpoint. In [7], the stress-strain state of the rotation shells with holes in the apex and the same overall dimensions, but different meridians, was compared. Comparative calculations of domes were performed to determine the strength parameters under external static [6], dynamic and explosive [8] loads. The choice of an optimal velaroidal shell on a rhombic flat base, the middle surface of which is formed by the motion of different plane curves with variable curvature, was studied in [9].

Кривошапко Сергей Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологий строительства и конструктивных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 2021-6966, ORCID: 0000-0002-9385-3699; e-mail: sn_krivoshapko@mail.ru

However, such comparative calculations have not been performed for hyperbolic, parabolic, elliptic and circular cylindrical roofs, although architects have tried to expand the list of surfaces of zero Gaussian curvature on a rectangular base by including developable surfaces [10].

Materials for analytical calculation of cylindrical shells defined by algebraic surfaces are considered primarily in this paper. At present time, virtually all problems of structural mechanics are solved using numerical methods. But there is another standpoint, such as that of the authors of monograph [6]: “In a reasonable combination of analytical and numerical methods with an understanding of the mechanical side of the problem under consideration”.

Purpose of the study. To determine the strength parameters of two elliptic, circular, hyperbolic and parabolic cylindrical thin shells, having the same span and height, constant thickness, physical and mechanical characteristics of the structural material and subjected to the same static external load using the analytical calculation technique of the momentless shell theory.

By comparing the obtained approximate calculation results, conclusions need to be drawn regarding the choice of an optimal cylindrical shell in the form of a second-order algebraic surface and regarding the applicability of the momentless shell theory to the calculation of the considered shells.

It is also necessary to determine the position of the shells in the form of second-order cylindrical surfaces in the modern construction practice and in the solution of new problems, arising in the design of these shells for various needs of society.

2. Explicit and Parametric Equations of Second-Order Algebraic Cylindrical Surfaces and Their Coefficients of Fundamental Quadratic Forms

Second-order algebraic surfaces include 3 degenerate surfaces: parabolic (Figure 1), elliptic (Figure 2) and hyperbolic cylindrical surfaces. These three surfaces are well known to geometers, architects [11], and engineers. Based on these surfaces, two more surfaces can be derived: circular cylindrical surface (Figure 3) and cylindrical surface with incomplete ellipse in cross-section (Figure 4).

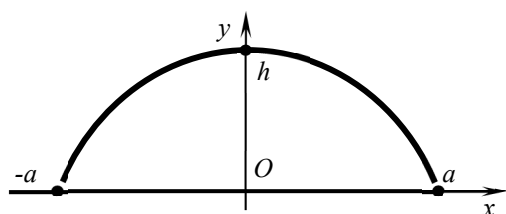


Figure 1. Parabolic cylindrical shell
Source: made by S.N. Krivoshapko

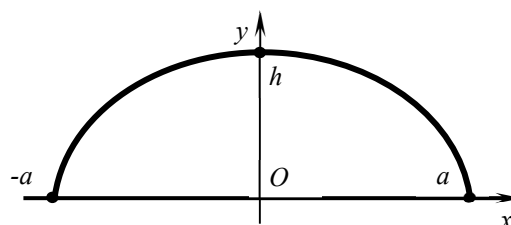


Figure 2. Semielliptic cylindrical shell
Source: made by S.N. Krivoshapko

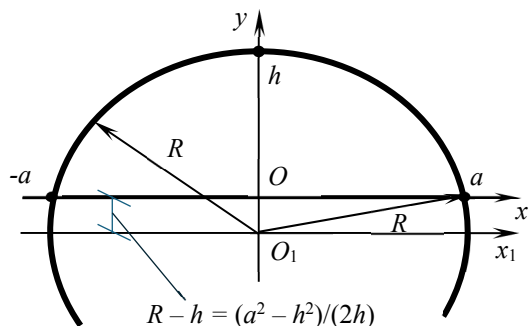


Figure 3. Circular cylindrical shell
Source: made by S.N. Krivoshapko

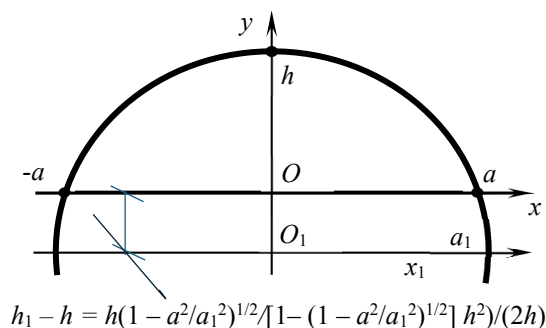


Figure 4. Elliptic cylindrical shell
Source: made by S.N. Krivoshapko

2.1. Parabolic Cylindrical Thin Shell

The canonical explicit equation of parabolic cylindrical surface (see Figure 1):

$$y = y(x) = h \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad z = z.$$

The parametric equations of this surface may be expressed as

$$x = x(u) = au, \quad y = y(u) = h(1 - u^2), \quad z = z(v) = lv,$$

where u, v are the dimensionless independent parameters, $-1 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$.

Then, the coefficients of the first (A, F, B) and the second (L, M, N) quadratic forms of the surface will be the following:

$$A^2 = a^2 + 4h^2u^2, \quad F = 0, \quad B = l, \quad L = 2ah/A, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

and the radius of curvature of coordinate line u will be

$$R_1 = A^2/L = A^3/(2ah).$$

Hence, hereinafter, a coordinate grid in the lines of curvature is used, with coordinate line u coinciding with the directing parabola of the cylinder, and coordinate lines v coinciding with the rectilinear generators of the cylinder ($R_v = R_2 = \infty$).

2.2. Elliptic Cylindrical Thin Shell

The canonical explicit equation of elliptic cylindrical surface:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1, \quad z = z,$$

where a, h are the lengths of the semi-axes of the ellipse.

2.2.1. Cylindrical Thin Shell With Semi-Ellipse in Cross-Section (Figure 2)

The parametric equations of this surface can be represented as

$$x = x(u) = au, \quad y = y(u) = h(1 - u^2)^{1/2}, \quad z = z(v) = lv,$$

where u, v are the dimensionless independent parameters, $-1 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$.

The coefficients of the first (A, F, B) and the second (L, M, N) quadratic forms of the surface will be

$$A^2 = a^2 + h^2u^2/(1 - u^2), \quad F = 0, \quad B = l, \quad L = ah / \left[A(1 - u^2)^{3/2} \right], \quad M = 0, \quad N = 0,$$

and the radius of curvature of coordinate line u will be

$$R_1 = A^2/L = A^3(1 - u^2)^{3/2}/(ah).$$

2.2.2. Cylindrical Thin Shell with Incomplete Ellipse in Cross-Section

The canonical explicit equation of the considered cylindrical surface (see Figure 4):

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \left(\frac{y}{h_1} + \sqrt{1 - \frac{a^2}{a_1^2}} \right)^2 = 1, \quad z = z.$$

In the considered case it is necessary to set the length of the semi-axis of the full ellipse $a_1 \geq a$, and then to determine the length of the other semi-axis of the full ellipse h_1 :

$$h_1 = \frac{h}{1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{a_1^2}}}.$$

The parametric equations of the considered cylindrical surface can be represented in the following form:

$$x = x(u) = au, \quad z = z(v) = lv,$$

$$y = y(u) = h_1 \left(\sqrt{1 - u^2 \frac{a^2}{a_1^2}} - \sqrt{1 - \frac{a^2}{a_1^2}} \right).$$

The coefficients of the first (A, F, B) and the second (L, M, N) quadratic forms of the surface will be

$$A^2 = a^2 + \frac{h_1^2 a^4 u^2}{a_1^4 \left(1 - \frac{a^2}{a_1^2} u^2 \right)}, \quad F = 0, \quad B = l,$$

$$L = a^3 h_1 a_1 / \left[A \left(a_1^2 - a^2 u^2 \right)^{3/2} \right], \quad M = 0, \quad N = 0,$$

and the radius of curvature of coordinate line u will be

$$R_u = R_1 = \frac{A^3 a_1^2}{a^3 h_1} \left(1 - \frac{a^2}{a_1^2} u^2 \right)^{3/2}.$$

2.2.3. Circular Cylindrical Thin Shell (See Figure 3)

The formulas obtained in section 2.2.2 may be used for the circular cylindrical shell, but one must set $a_1 = R$, $h_1 = R$, then

$$x^2 + \left(y + \frac{a^2 - h^2}{2h} \right)^2 = \frac{(h^2 + a^2)^2}{4h^2} = R^2,$$

$$x = x(u) = au, \quad z = z(v) = lv,$$

$$y = y(u) = \sqrt{R^2 - a^2 u^2} - \frac{a^2 - h^2}{2h}.$$

The coefficients of the first (A, F, B) and the second (L, M, N) quadratic forms of the surface will be

$$A^2 = \frac{a^2 R^2}{(R^2 - a^2 u^2)}, \quad F = 0, \quad B = l,$$

$$L = \frac{a^3 R^2}{A(R^2 - a^2 u^2)^{3/2}} = \frac{a^2 R}{R^2 - a^2 u^2}, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

and the radius of curvature of coordinate line u will be

$$R_u = R_1 = R = \frac{a^2 + h^2}{2h}.$$

The radius of curvature of coordinate line v will be $R_v = R_2 = \infty$.

2.3. Hyperbolic Cylindrical Thin Shell

The implicit equation of one branch of a hyperbolic cylindrical surface can be written in the following form (Figure 5):

$$\frac{y^2}{c^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

where for a single considered branch

$$b^2 = \frac{a^2 c^2}{h(2c + h)}.$$

In this case, the explicit equation of the hyperbolic cylindrical surface defined in the xOy axes is written as

$$y = h + c - \left[c^2 + x^2 h(2c + h) / a^2 \right]^{1/2},$$

Figure 5. One branch of the hyperbolic cylindrical shell

Source: made by S.N. Krivoschapko

taking into account the introduced geometric notation shown in Figure 5.

The parametric equations of the considered cylindrical surface can be represented in the following form:

$$x = x(u) = au,$$

$$z = z(v) = lv,$$

$$y = c + h - \sqrt{c^2 + hu^2(2c + h)}.$$

The coefficients of the first (A, F, B) and the second (L, M, N) quadratic forms of the surface will be

$$A^2 = a^2 + \frac{h^2(2c + h)^2 u^2}{c^2 + hu^2(2c + h)}, \quad F = 0, \quad B = l,$$

$$L = \frac{ahc^2(2c + h)}{A[c^2 + hu^2(2c + h)]^{3/2}}, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

The radii of curvature of coordinate lines u and v are $R_1 = A^2/L$, $R_v = R_2 = \infty$.

3. Three Groups of Governing Equations of Linear Theory of Thin Shells in Lines of Principle Curvatures

Taking into account that the coefficients of the first fundamental form for cylindrical surfaces are $B = l$, $A = A(u)$, then

$$\partial B / \partial u = \partial B / \partial v = 0, \partial A / \partial v = 0, R_v = R_2 = \infty,$$

and therefore the equations of the general linear theory of thin shells will be simplified in some way.

Equilibrium equations:

$$l \frac{\partial N_u}{\partial u} + A \frac{\partial S}{\partial v} - Al \frac{Q_u}{R_u} + AlX = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial u} + A \frac{\partial N_v}{\partial v} + AlY = 0,$$

$$Al \frac{N_u}{R_u} + l \frac{\partial Q_u}{\partial u} + A \frac{\partial Q_v}{\partial v} - AlZ = 0,$$

$$l \frac{\partial H}{\partial u} - A \frac{\partial M_v}{\partial v} - AlQ_v = 0,$$

$$l \frac{\partial M_u}{\partial u} - A \frac{\partial H}{\partial v} + AlQ_u = 0, \quad (1)$$

where the positive directions of bending and twisting moments, internal normal and shear forces, external surface load are shown in Figure 6.

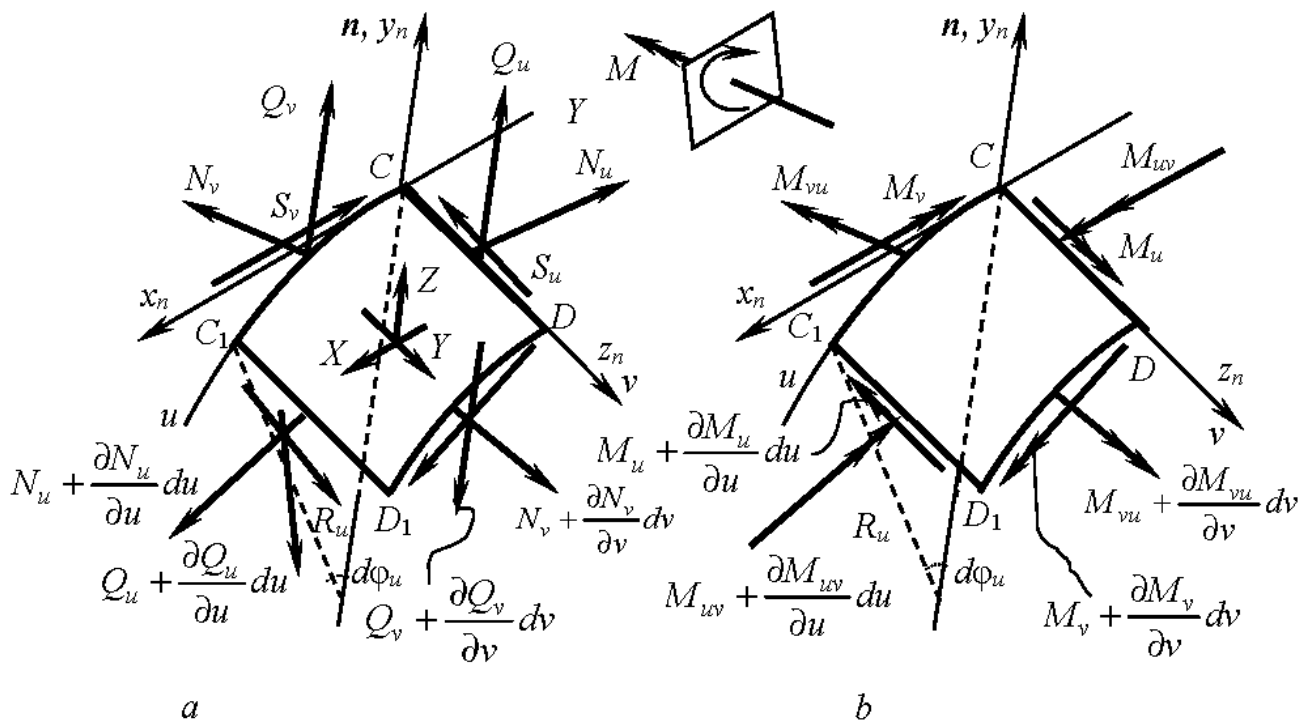


Figure 6. Positive directions of forces (a) and moments (b)

Source: made by S.N. Krivoshapko

Constitutive equations:

$$N_u = C(\varepsilon_u + \nu \varepsilon_v), \quad N_v = C(\varepsilon_v + \nu \varepsilon_u), \quad S = C(1 - \nu) \varepsilon_{uv} / 2,$$

$$M_u = -D(\kappa_u + \nu \kappa_v), \quad M_v = -D(\kappa_v + \nu \kappa_u), \quad H = -D(1 - \nu) \kappa_{uv}, \quad (2)$$

where $C = Eh / (1 - \nu^2)$, $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$, h is the shell thickness, ν is the Poisson's ratio, E is the modulus of elasticity of the shell material. ε_u , ε_v , ε_{uv} , κ_u , κ_v , κ_{uv} are the components of the membrane and flexural strains. The contradictions introduced by formulas (2) into the shell theory were first pointed out by V.Z. Vlasov. However, in the opinion of V.V. Novozhilov, all these contradictions do not exceed the errors introduced into the shell theory by the initial assumptions of the thin shell theory.

Geometrical equations:

$$\varepsilon_u = \frac{1}{A} \frac{\partial u_u}{\partial u} - \frac{u_z}{R_u}, \quad \varepsilon_v = \frac{1}{l} \frac{\partial u_v}{\partial v}, \quad \varepsilon_{uv} = \frac{1}{A} \frac{\partial u_v}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial u_u}{\partial v},$$

$$\kappa_u = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_z}{\partial u} + \frac{u_u}{R_u} \right), \quad \kappa_v = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial v^2}, \quad 2\kappa_{uv} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2}{A} \frac{\partial u_z}{\partial u} + \frac{u_u}{R_u} \right), \quad (3)$$

where u_u , u_v , u_z are the displacement components.

4. Determination of Internal Forces of Thin Cylindrical Shells in the Form of Second-Order Algebraic Surfaces Using Momentless Shell Theory

In this section, the linear theory of thin rigid shells will be considered in the approximate momentless setting, when it is assumed that internal bending and twisting moments, and hence shear forces, can be neglected. The assumption of uniform stress distribution over the thickness of the shell led to the emergence of the momentless theory of rigid shells. Those who are interested in the momentless thin shells that only accept tensile internal forces and change their shape under external forces can explore the materials of review article [12] with 80 sources used.

Assuming that a rigid shell satisfies the requirements of momentless state, then the first three general equations of equilibrium (1) of the shell can be used excluding the shear forces:

$$l \frac{\partial N_u}{\partial u} + A \frac{\partial S}{\partial v} + AlX = 0,$$

$$l \frac{\partial S}{\partial u} + A \frac{\partial N_v}{\partial v} + AlY = 0,$$

$$\frac{N_u}{R_u} - Z = 0,$$

from which it follows that

$$N_u = ZR_u,$$

$$S = -l \int \left(\frac{1}{A} \frac{\partial N_u}{\partial u} + X \right) dv + f_1(u) = -lv \left(\frac{1}{A} \frac{\partial N_u}{\partial u} + X \right) + f_1(u),$$

$$N_v = -\frac{l}{A} \int \frac{\partial S}{\partial u} dv - lYv + f_2(u). \quad (4)$$

Thus, the problem of determining the internal normal and shear forces by the approximate momentless shell theory is a statically determinate problem for all shells in the form of second-order cylindrical surfaces.

Arbitrary functions of integration $f_1(u)$, $f_2(u)$ and $df_1(u)/du$ are determined by satisfying boundary conditions according to the momentless shell theory.

In further calculations of all five cylindrical shells defined by second-order algebraic surfaces, it is assumed that $a = 5$ m, $h = 4$ m, and the external surface load components X , Y , Z are

$$X = X(u) = q \sin \varphi = q \frac{\operatorname{tg} \varphi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}, \quad Y = 0,$$

$$Z = Z(u) = -q \cos \varphi = -q \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}},$$

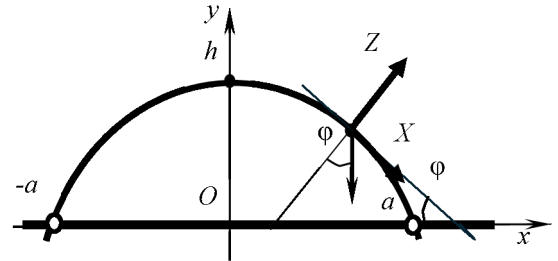


Figure 7. Geometrical parameters, external loading, and hinge supports of the considered shells

S o u r c e: made by S.N. Krivoschapko

where q is the distributed load of self-weight kind, φ is the angle between the tangent to coordinate line u and the fixed Ox axis (Figure 7).

It is assumed that the hinges are connected to an absolutely rigid in-plane and flexible out-of-plane support at the ends $v = 0$, $v = 1$. For open cylindrical shells it is impossible to satisfy the boundary conditions on the straight edges of the contour.

Then, formulas (4) give

$$N_v = \frac{l^2 v^2}{2A} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{A} \frac{dN_u}{du} + X \right) - \frac{l}{A} v \frac{df_1}{du} + C + f_2(u),$$

from where $C = 0$, $f_2(u) = 0$, since $N_v = 0$ at $v = 0$. Then, from the boundary condition of $N_v = 0$ at $v = 1$, the following is obtained:

$$\frac{df_1(u)}{du} = \frac{l}{2} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{A} \frac{dN_u}{du} + X \right),$$

from where

$$f_1(u) = \frac{l}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{dN_u}{du} + X \right).$$

By substituting the obtained expressions for $f_1(u)$, df_1/du and $f_2(u)$ into formulas (4), the final formulas for calculating the internal membrane forces under the considered boundary conditions are written:

$$N_u = ZR_u,$$

$$S = \frac{l}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{dN_u}{du} + X \right) (1 - 2v),$$

$$N_v = -\frac{l^2 v}{2A} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{A} \frac{dN_u}{du} + X \right) (1 - v). \quad (5)$$

4.1. Parabolic Cylindrical Thin Shell

The following was obtained previously for the cylindrical parabolic surface:

$$A^2 = a^2 + 4h^2u^2, \quad R_1 = R_u = A^3/(2ah).$$

In the previous section, the formuals for calculating $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ were presented, thus

$$X = \frac{2hu}{A}q, \quad Y = 0, \quad Z = -\frac{qa}{A}.$$

According to formulas (4):

$$N_u = -\frac{q(a^2 + 4h^2u^2)}{2h},$$

$$S = \frac{2lqhvu}{\sqrt{a^2 + 4h^2u^2}} + f_1(u),$$

$$N_v = \frac{-l^2qha^2}{(a^2 + 4h^2u^2)^2}v^2 - \frac{vl}{\sqrt{a^2 + 4h^2u^2}} \frac{df_1}{du} + f_2(u).$$

The boundary condition of $N_v = 0$ at $v = 0$ gives $f_2(u) = 0$. The boundary condition of $N_v = 0$ on the opposite end of the shell $v = 1$ gives

$$\frac{df_1(u)}{du} = -lqha^2 \frac{1}{(a^2 + 4h^2u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

from where

$$f_1(u) = -lqh \frac{u}{\sqrt{a^2 + 4h^2u^2}} + C,$$

where $C = 0$ when $S(u = 0) = 0$. Finally, for the parabolic cylindrical shell:

$$N_u = -\frac{q(a^2 + 4h^2u^2)}{2h},$$

$$S = \frac{lqhu(2v-1)}{\sqrt{a^2 + 4h^2u^2}},$$

$$N_v = \frac{l^2qha^2v(1-v)}{(a^2 + 4h^2u^2)^2}.$$

4.2. Elliptic Cylindrical Thin Shell

4.2.1. Cylindrical Thin Shell with Semi-Ellipse in Cross-Section

All geometric parameters of the elliptic cylindrical middle surface with a semi-ellipse in the cross-section (see Figure 2) are given in Section 2.2.1. In addition to this

$$X = q \frac{uh}{A\sqrt{1-u^2}}, \quad Y = 0, \quad Z = -q \frac{a}{A}.$$

According to formulas (5):

$$N_u = -\frac{q}{h} A^2 (1-u^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$N_v = \frac{ql^2\nu(\nu-1)\sqrt{1-u^2}}{2h[a^2-u^2(a^2-h^2)]^2} \left[3a^4 - 9a^2u^2(a^2-h^2) - a^2h^2 + 6u^4(a^2-h^2)^2 \right].$$

4.2.2. Cylindrical Thin Shell with Incomplete Ellipse in Cross-Section

All geometrical parameters of the elliptic cylindrical middle surface with an ellipse fragment in the crosssection (Figure 4) are given in Section 2.2.2. In addition to this

$$X = q \frac{\beta u h_1}{\sqrt{a^2 + \beta u^2 (\beta h_1^2 - a^2)}}, \quad Y = 0, \quad Z = -q \frac{a\sqrt{1-\beta u^2}}{\sqrt{a^2 + \beta u^2 (\beta h_1^2 - a^2)}},$$

$$A = \frac{\sqrt{a^2 + \beta u^2 (\beta h_1^2 - a^2)}}{\sqrt{1-\beta u^2}}, \quad \beta = \frac{a^2}{a_1^2}, \quad R_u = \frac{A^3}{h_1 a \beta} (1-\beta u^2)^{3/2}.$$

According to formulas (5):

$$N_u = -\frac{qA^2(1-\beta u^2)^{\frac{3}{2}}}{\beta h_1} = -\frac{q}{\beta h_1} \sqrt{1-\beta u^2} [a^2 + \beta u^2 (\beta h_1^2 - a^2)],$$

$$S = \frac{lqu(1-2\nu)}{2h_1 A \sqrt{1-\beta u^2}} [3A^2(1-\beta u^2) - \beta h_1^2] =$$

$$= \frac{lqu(1-2\nu)}{2h_1 \sqrt{a^2 + \beta u^2 (\beta h_1^2 - a^2)}} \left\{ 3[a^2 + \beta u^2 (\beta h_1^2 - a^2)] - \beta h_1^2 \right\},$$

$$N_v = \frac{ql^2\nu(\nu-1)}{2h_1 A} \left\{ \frac{3[a^2 + 2\beta u^2 (\beta h_1^2 - a^2)]}{\sqrt{a^2 + \beta u^2 (\beta h_1^2 - a^2)}} - \frac{\beta a^2 h_1^2}{[a^2 + \beta u^2 (\beta h_1^2 - a^2)]^{3/2}} \right\}.$$

The obtained formulas allow to calculate the elliptic cylindrical shell with a semi-ellipse in the cross-section (see Figure 2). For this purpose, in the formulas of Section 4.2.2, it is necessary to take

$$\beta = 1, \quad a_1 = a, \quad h_1 = h.$$

4.2.3. Circular Cylindrical Thin Shell

In this case, it is necessary to take $R = 5.125$ m,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{x}{R} = \frac{au}{R}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - a^2 u^2}}{R}.$$

According to formulas (4):

$$N_u = -q\sqrt{R^2 - a^2u^2},$$

$$S = -2\frac{laq}{R}uv + f_1(u),$$

$$N_v = \frac{l\sqrt{R^2 - a^2u^2}}{R} \left(\frac{lqv^2}{R} - \frac{v}{a} \frac{df_1}{du} \right) + f_2(u).$$

The boundary condition of $N_v = 0$ at $v = 0$ gives $f_2(u) = 0$. The boundary condition of $N_v = 0$ on the other end of the shell $v = 1$ gives $df_1/du = alq/R$, and $f_1(u) = alqu/(R) + C$.

Let $S = 0$ at $u = 0$, then $C = 0$. Substituting the obtained results into the equations for determining the internal forces according to the momentless theory allows to write the following:

$$N_u = -q\sqrt{R^2 - a^2u^2} = -qR\cos\varphi,$$

$$S = \frac{laq}{R}u(1 - 2v),$$

$$N_v = l^2q \frac{\sqrt{R^2 - a^2u^2}}{R^2} v(v - 1).$$

For the calculation of long circular cylindrical shells, it is advisable not to use the momentless theory. When using the momentless theory, it is necessary to fulfill the following relation [18; 12]:

$$\frac{l}{R} \ll \sqrt{\frac{R}{h}}.$$

4.3. Hyperbolic Cylindrical Thin Shell

All geometrical parameters of the hyperbolic cylindrical middle surface (see Figure 5) are given in Section 2.3. It is necessary to take into account that

$$X = q \frac{hu\gamma}{\sqrt{a^2c^2 + \gamma hu^2(a^2 + \gamma h)}}, \quad Y = 0, \quad Z = -q \frac{a\sqrt{c^2 + \gamma hu^2}}{\sqrt{a^2c^2 + \gamma hu^2(a^2 + \gamma h)}},$$

$$A = \frac{\sqrt{a^2c^2 + \gamma hu^2(a^2 + \gamma h)}}{\sqrt{c^2 + \gamma hu^2}}, \quad \gamma = 2c + h, \quad R_u = \frac{A^3(c^2 + \gamma hu^2)^{3/2}}{ah\gamma c^2},$$

where $c > 0$ is an arbitrary number; $0 < \cos\varphi \leq 1$, i.e. $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$.

According to formulas (5):

$$N_u = -\frac{qaA}{L} = -\frac{q\sqrt{c^2 + \gamma hu^2}}{h\gamma c^2} \left[a^2c^2 + \gamma hu^2(a^2 + \gamma h) \right],$$

$$S = -\frac{luq}{2c^2}(1 - 2v) \frac{3 \left[a^2c^2 + \gamma hu^2(a^2 + \gamma h) \right] + c^2\gamma h}{\sqrt{a^2c^2 + \gamma hu^2(a^2 + \gamma h)}},$$

$$N_v = q \frac{l^2 \nu(1-\nu) \sqrt{c^2 + \gamma h u^2}}{2c^2 \left[a^2 c^2 + \gamma h u^2 (a^2 + \gamma h) \right]^2} \left[a^2 c^4 (3a^2 + \gamma h) + 9\gamma h a^2 c^2 u^2 (a^2 + \gamma h) + 6\gamma^2 h^2 u^4 (a^2 + \gamma h)^2 \right].$$

5. Comparison of Results of Momentless Analysis of Five Cylindrical Thin Shells in the Cross-Sections of the Shells (in the Longitudinally Middle Section of the Shells, i.e. at $\nu = 0.5$)

As noted earlier, all shells are assumed to have the same overall dimensions, i.e. $h = 4 \text{ m}$, $a = 5 \text{ m}$, $l = 20 \text{ m}$. In this case, the formulas for calculating the internal membrane forces per unit length of the coordinate line take the following form:

- *parabolic cylindrical thin shell:*

$$N_u = -8q(0.39 + u^2), \quad S = \frac{10uq(2\nu - 1)}{\sqrt{0.39 + u^2}}, \quad N_v = \frac{9.77\nu(1-\nu)}{(0.39 + u^2)^2} q;$$

- *cylindrical thin shell with semi-ellipse in cross-section:*

$$N_u = -2.25q(2.78 - u^2)\sqrt{1 - u^2},$$

$$S = \frac{49.2 - 22.5u^2}{\sqrt{2.78 - u^2}} qu(1 - 2\nu),$$

$$N_v = \frac{qv(\nu - 1)\sqrt{1 - u^2}}{(2.78 - u^2)^2} (300u^4 - 1250u^2 + 910);$$

- *cylindrical thin shell with incomplete ellipse in cross-section ($a_1 = 5.98 \text{ m}$, $h_1 = 8.84 \text{ m}$, $\beta = 0.7$):*

$$N_u = -q(4.04 + 3.36u^2)\sqrt{1 - 0.7u^2},$$

$$S = \frac{14.1qu(1 - 2\nu)}{\sqrt{1 + 0.83u^2}} (0.37 + u^2),$$

$$N_v = q \frac{18.35\nu(\nu - 1)\sqrt{1 - 0.7u^2}}{(1 + 0.83u^2)^2} (1 + 9.22u^2 + 5.1u^4);$$

- *circular cylindrical thin shell ($R = 5.125 \text{ m}$):*

$$N_u = -q\sqrt{R^2 - 25u^2} = -qR\cos\varphi,$$

$$S = \frac{1000qu(1 - 2\nu)}{R},$$

$$N_v = 400qv(\nu - 1)\sqrt{R^2 - 25u^2} / R^2;$$

- *hyperbolic cylindrical thin shell* ($c = 2 \text{ m}$, $\gamma = 8 \text{ m}$, $b = 0.88 \text{ m}$; $0.68 \leq \cos \varphi \leq 1$, i.e. $0^\circ \leq \varphi \leq 47^\circ$):

$$N_u = -1.56q\sqrt{1+8u^2} \left[1+18.24u^2 \right],$$

$$S = -qu(1-2v) \frac{107(1+0.17u^2)}{\sqrt{1+18.24u^2}},$$

$$N_v = \frac{107q\sqrt{1+8u^2}}{(1+18.24u^2)^2} v(1-v)(1+38.36u^2+466u^4).$$

The values of shear and normal forces per unit length of coordinate lines u and v in the $z = l/2$ section of cylindrical shells are presented in Tabl.

Momentless analysis results

$\nu = 0.5$ ($z = l/2 = 10 \text{ m}$ section)					
No.	Shell type	Force/ q	$u = 0$	$u = \pm 0.4$	$u = \pm 1$ (support along the length of the shell)
1.	Parabolic cylindrical thin shell	N_u/q	-3.12	-4.4	-11.12
		S/q	0	0	0
		N_v/q	16.05	8.07	1.27
2.	Cylindrical thin shell with semi-ellipse in cross-section	N_u/q	-6.25	-5.42	0
		S/q	0	0	0
		N_v/q	-29.4	-24.05	0
3.	Cylindrical thin shell with incomplete ellipse in cross-section	N_u/q	-4.04	-4.3	-4.05
		S/q	0	0	0
		N_v/q	-4.59	-8.8	-11.6
4.	Circular cylindrical thin shell	N_u/q	-5.125	-4.72	-1.13
		S/q	0	0	0
		N_v/q	-19.51	-18	-4.28
5.	Hyperbolic cylindrical thin shell	N_u/q	-1.56	-9.23	-90
		S/q	0	0	0
		N_v/q	26.75	50.14	109

S o u r c e: made by S.N. Krivoschapko

Using the momentless theory, normal forces N_u in a hyperbolic cylindrical shell are determined by the first formula (5):

$$N_u = ZR_u = -q\cos\varphi R_u,$$

where the radius of curvature $R_u = 1.56 \text{ m}$ at $u = 0$, but $R_u = 131.8 \text{ m}$ on the contour $u = \pm 1$, therefore this normal force takes on a larger value $N_u = -90q$. The momentless theory does not allow to specify a boundary condition on these edges. Taking into account that at the apex $u = 0$, $\varphi = 0^\circ$, $\cos\varphi = 1$, this results in $N_u/q = R_u$, i.e. the values in the $u = 0$ column of Table in the first row for N_u show the radius of curvature of a coordinate line R_u in its apex.

All the above formulas in Sections 4 and 5 should be used with caution. Biderman V.L. [14] found that for open circular cylindrical shells, the momentless theory can be used in exceptional cases if the membrane boundary conditions on longitudinal edges are automatically satisfied. The scope of application of the momentless theory is limited to short shells with respect to shell radius R (see Section 4.2.3). Apparently, for non-circular cylindrical shells, the applicability of the momentless theory, by analogy with circular shells, can be limited by the relation:

$$\frac{l}{a} \ll \sqrt{\frac{a}{h}}.$$

Although in some cases the formulas for the momentless theory provide acceptable results, and the possibility of their application needs to be confirmed by more accurate calculation methods. In many cases, it is possible to incorporate the solutions of the momentless theory equations into the approximate solution of the general equations by splitting the latter into the momentless stress state equations and the edge effect.

In monograph [6], a similar analysis is performed on four cylindrical roof shells under dead load according to the momentless theory and it is concluded that the most optimal shell is the cylindrical shell with an incomplete ellipse in the cross-section, since this shell transfers a relatively small normal load to the supporting beams.

6. The System of Design Equations of the General Theory of Thin Cylindrical Shells in Terms of Displacements

Five equations of equilibrium (1), six constitutive equations (2) and six geometric equations (3) were derived for the calculation of thin elastic cylindrical shells using the general linear theory.

Substituting the geometric equations (3) into the constitutive equations (2), the following is obtained:

$$\begin{aligned} N_u &= C \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_u}{\partial u} - \frac{u_z}{R_u} + \frac{\nu}{l} \frac{\partial u_v}{\partial v} \right); \\ N_v &= C \left(\frac{1}{l} \frac{\partial u_v}{\partial v} - \nu \frac{u_z}{R_u} + \frac{\nu}{A} \frac{\partial u_u}{\partial u} \right); \\ S &= \frac{1-\nu}{2} C \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_v}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial u_u}{\partial v} \right); \\ M_u &= -D \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_z}{\partial u} + \frac{u_u}{R_u} \right) + \frac{\nu}{l^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial v^2} \right]; \\ M_v &= -D \left[\frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial v^2} + \frac{\nu}{A} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_z}{\partial u} + \frac{u_u}{R_u} \right) \right]; \\ H &= -D(1-\nu) \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_z}{\partial u} + \frac{u_u}{2R_u} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

The values of the shear forces are determined from the last two equilibrium equations (1):

$$Q_u = \frac{1}{l} \left(\frac{\partial H}{\partial v} - \frac{l}{A} \frac{\partial M_u}{\partial u} \right), \quad Q_v = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{A}{l} \frac{\partial M_v}{\partial v} \right). \quad (7)$$

From the last three equations (6) and equations (7), it can be seen that internal moments M_u , M_v , H and shear forces Q_u and Q_v do not depend on displacement u_v .

Substituting the expressions for internal forces and moments into the first three equilibrium equations (1) results in a system of three partial differential equations in terms of displacements of the middle surface of the eighth order, which are usually written in a reduced form:

$$\begin{aligned} L_{11}^2 u_u + L_{12}^2 u_v + L_{13}^3 U_z + A l X &= 0, \\ L_{21}^2 u_u + L_{22}^2 u_v + L_{23}^1 U_z + A l Y &= 0, \\ L_{31}^3 u_u + L_{32}^1 u_v + L_{33}^4 U_z - A l Z &= 0, \end{aligned}$$

where $L_{ij}^k \dots$ are differential operators, the upper index of which shows the maximum order of the corresponding partial derivative. In a more extended form these three equations can be expressed as

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{l}{A} \frac{\partial u_u}{\partial u} + \nu \frac{\partial u_v}{\partial v} - l \frac{u_z}{R_u} \right) + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u_v}{\partial u} + \frac{A}{l} \frac{\partial u_u}{\partial v} \right) + \\
 & + \frac{h^2}{12R_u} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{l} \frac{\partial^3 u_z}{\partial u \partial v^2} + \frac{(1-\nu)A}{2l} \frac{u_u}{R_u} - l \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_z}{\partial u} + \frac{u_u}{R_u} \right) \right] \right\} + \frac{Al}{C} X = 0, \\
 & \frac{12A}{h^2 R_u} \left(\frac{l}{A} \frac{\partial u_u}{\partial u} + \nu \frac{\partial u_v}{\partial v} - l \frac{u_z}{R_u} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{l}{A} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_z}{\partial u} + \frac{u_u}{R_u} \right) \right] + \frac{\nu}{lA} \frac{\partial^3 u_z}{\partial u \partial v^2} - \frac{(1-\nu)}{l} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{2}{A} \frac{\partial u_z}{\partial u} + \frac{u_u}{R_u} \right) \right\} + \\
 & + \frac{1}{l} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left[\frac{A}{l^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial v^2} + \nu \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_z}{\partial u} + \frac{u_u}{R_u} \right) \right] - \frac{Al}{D} Z = 0, \\
 & \frac{(1-\nu)l}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u_v}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{A}{l} \frac{\partial u_v}{\partial v} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial u_u}{\partial u} - \nu A \frac{u_z}{R_u} \right) + \frac{Al}{C} Y = 0. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Thus, the equilibrium equations (1) of cylindrical shells are expressed in terms of displacements u_u , u_v , u_z of the middle surface. The system of three partial differential equations (8) with variable coefficients is obtained. The system is of the eighth order. The use of geometric equations (3) guarantees the satisfaction of the strain compatibility conditions in the mid-layer of the shell.

The system of three differential equations in displacements for developable shells, i.e., for shells of zero Gaussian curvature defined in a non-orthogonal conjugate coordinate system, is given in monograph [15], but for the case of zero Poisson's ratio ($\nu = 0$). Taking $\nu = 0$ and the average coefficient of the first quadratic form $F = 0$, equations (8) can be reduced to the form presented in monograph [15].

In general form, equations (8) will probably never be applied to the calculation of cylindrical shells defined in lines of curvature. These equations are derived here only to illustrate the displacement method for cylindrical shells in the form of analytic surfaces. Their application to circular cylindrical shells, the geometry of which is described in Section 2.2.3, will be shown only in Section 7.

7. Existing Approaches to the Calculation of Thin Elastic Cylindrical Shells Using Analytical Methods During the “Golden Age of Shells”

It is commonly believed that the “Golden age of shells” fell on 1924–1970s. It was at this time that reliable analytical methods for the calculation of thin elastic shells emerged, which are related to the requests of the construction practice for shell design and making it possible to describe the behavior of shells under external static loads more or less accurately.

In addition to specific theories of cylindrical shells (V.Z. Vlasov, L. Donnel, A.A. Umansky, H.M. Mushtari, S.M. Feinberg), V.V. Novozhilov [16], at that time, proposed a complex resulting equation that includes all specific theories of cylindrical shells, including those strengthened by stiffeners.

7.1. Circular Cylindrical Thin Shell

The largest number of analytical methods for the calculation of thin cylindrical shells based on the general linear theory of elastic shells has been proposed for circular cylindrical shells. The equations and formulas of the theory of circular cylindrical shells are mainly written in terms of z and s or $\xi = z/R$ and $\theta = s/R$, where s is the distance along the middle surface from the initial position to the corresponding point. As a result, $A = B = 1$ in equations (1) – (3), and $R_u = R = \text{const}$.

V.Z. Vlasov [17] introduced function $\Phi(\xi, \theta)$, through which displacements u_u , u_v , u_z are expressed. This allowed to turn the first two equations of equilibrium (1) into identities, and the third equation of equilibrium took the form of a partial differential equation with respect to the introduced function $\Phi(\xi, \theta)$. This function was expressed as a double trigonometric sine series, which corresponds to a shell with hinged supports along the contour. The extension of the solution to shells with other boundary conditions is possible, but requires cumbersome calculations [18].

In the calculation of open circular shells of length l , the load and displacements were decomposed into Fourier series with period l :

$$\begin{aligned} u_v &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{vn}(s) \cos \frac{n\pi z}{l}; \quad u_u = \sum_{n=1}^{\infty} u_{un}(s) \sin \frac{n\pi z}{l}; \\ u_z &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{zn}(s) \sin \frac{n\pi z}{l}; \\ Y &= \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(s) \cos \frac{m\pi z}{l}; \quad X_m = \sum_{m=1}^{\infty} X_m(s) \sin \frac{m\pi z}{l}; \\ Z &= \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(s) \sin \frac{m\pi z}{l}, \end{aligned}$$

where the known decomposition coefficients X_m , Y_m , Z_m can be determined using the formulas given by V.Z. Vlasov [17]. Substituting these values into equations (8) for open circular cylindrical shells, three simple differential equations with respect to u_{un} , u_{vn} , u_{zn} are obtained. In $z = 0$ и $z = l$ planes, only the free support conditions will be satisfied, i.e., $u_u = u_z = 0$ and $N_v = M_v = 0$.

For a closed circular cylindrical shell loaded with axisymmetric load, the solution can be represented as a single cosine series, which leads to an eighth order ordinary differential equation with respect to variable $\xi = z/R$. Its solution is sought in the form of the sum of hyper-geometric functions of ξ .

Lurye A.I. [19] proposed the calculation of the optimal strengthening of a circular hole in a circular cylindrical shell.

In [20], solutions in the framework of technical and semi-integral shell theories using the method of separation of variables are demonstrated. The solution methods and simplifying assumptions for closed and open circular shells are different. In this work, it is noted that in many cases calculations for building shells give excessive accuracy from the practical standpoint, therefore it was possible to introduce a number of simplified versions of the shell theory, which allowed to solve a certain class of problems at that time. For example, V.Z. Vlasov [17] and his students introduced additional static and geometric hypotheses, and A.L. Goldenweiser [21] and V.V. Novozhilov [22] and their followers revealed conditions under which some terms of the design equations turn out to be insignificant.

In the semi-momentless theory of cylindrical shells, it is assumed that $M_v = H = Q_v = 0$ and $\varepsilon_u = \varepsilon_{uv} = 0$, due to which the design equations of shells are simplified. The semi-momentless theory is discussed in more detail in [20; 23]. In [20] it is argued that one can introduce additional assumptions that do not have a noticeable effect on the behavior of closed cylindrical shells, in particular, one can assume that the Poisson's ratio is zero ($\nu = 0$) or one can discard relatively small values compared to a unit. W. Flügge [23] gave recommendations for the calculation of multi-wave reinforced concrete circular cylindrical shells with flexible or high sides.

Different assumptions for the calculation of shallow and non-shallow short open shells and medium-length and long shells were proposed.

During this period, many researchers studied buckling of circular cylindrical shells with closed contour under compressive and shear loads applied at the ends [23] and under pure shear [23].

The theory of multilayer shells also appeared at this time. The main directions in the development of the theory of multilayer shells were presented in 1972 by E.I. Grigolyuk and F.A. Kogan, as described in article [24]. In this article, the first works on the calculation of cylindrical shells are mentioned.

7.2. Elliptic Cylindrical Thin Shell

In [20], it is stated that cylindrical thin shells of non-circular cross-section were generally supported by flexible diaphragms at the transverse ends and the longitudinal edges were strengthened with edge elements. The performance of such a system depends largely on the $l/(2a)$ ratio. In long shells ($l/(2a) > 4$), the external load is taken up almost exclusively by the N_u , N_v , S forces. In medium-length shells ($4 > l/(2a) > 1$), in addition to these membrane forces, bending moment M_u is significant, while bending moment M_v and torque H play a minor role and may not even be taken into account. In short shells ($l/(2a) < 1$) the effect of bending moment M_u is relatively small, but the role of bending moment M_v increases. The mentioned features of shell behavior allow simplifying their calculation by replacing the actual structure with a simplified model. For example, short shells can be calculated as beams of length l . In contrast to circular cylindrical shells, the exact calculation of non-circular shells was extremely difficult in the mentioned period of time [20].

Most of the approximate methods were based on the idea of replacing the shell by prismatic folds. Basically, the methods differ from each other by the hypotheses about the degree of influence of certain internal forces, moments, or strains on the behavior of the considered shell. Studies on the use of computers for the calculation of the approximating folds began to appear [25].

7.3. Parabolic Cylindrical Thin Shell

The contents of the first two paragraphs of the previous Section 7.2, which deals with elliptic cylindrical shells, are fully consistent with parabolic cylindrical shells as well.

In the considered time interval, studies of multilayer shallow parabolic cylindrical shells, taking into account plastic deformations, have begun, e.g. [26].

7.4. Hyperbolic Cylindrical Thin Shell

Hyperbolic cylindrical surface has been known for a long time, but only geometers have used it in their research. Not a single structure has been built. Not a single scientific article devoted to the strength analysis of a shell in the form of this surface has been found.

7.5. Conclusion of Section 7

E. Freyssinet, a French bridge engineer, designed and built the first parabolic cylindrical shell, which is technically a system of parabolic arches, to cover a 30-meter span of a factory in Monlusion (France) in 1905. In Russia, long and short cast-in-situ cylindrical shells have been used in industrial buildings since 1928. For example, the first reinforced concrete cylindrical shell was erected under the direction of Prof. M.A. Novogorodsky over a water tank in Baku in 1925. After, cylindrical shells were used for the building of the Kharkov post office (1928), Moscow automobile depot (1929) and Rostov agricultural machinery plant (1931) [27]. A large number of circular and elliptic cylindrical shells made of reinforced concrete and brick constructed for the roofs of industrial buildings in 1930–1970 in Italy are presented in review article [28]. The advent of reinforced concrete and public demand for large-span structures for warehouses, hangars and public buildings led to the need of static calculation methods for these rigid shells. It was during the “Golden age of shells” that the fundamental discipline — shell theory — emerged, initial hypotheses and assumptions were accepted, resolving equations adequately describing the behavior of shells were formed, simplifications of the equations of the shell theory were proposed, and qualitative studies of a number of specific problems appeared.

8. Information on Publications After 2000 about Calculation of Cylindrical Shells with Second-Order Algebraic Middle Surfaces and Their Application in Architecture and Construction

8.1. Application of Cylindrical Shells with Second-Order Algebraic Middle Surfaces

Many review [3] and scientific [11] papers, monographs [29] and reference books [30] are devoted to the application of cylindrical shells, structures and cylindrical surfaces in architecture, construction and mechanical engineering. In all these works, there are sections on structures and products in the form of second-order cylindrical algebraic surfaces.

8.2. Information on Publications After 2000 About Calculation of Cylindrical Shells With Second-Order Algebraic Middle Surfaces

As already mentioned in the Introduction, in the last quarter of a century, almost no studies have been conducted to determine the optimal cylindrical shell among the five cylindrical shells with the same overall dimensions and boundary conditions and subjected to the same external load. There is only paper [32], where the stability of the computational algorithm is studied when one type of cylindrical surface is replaced with another, which can simplify the computation. It is argued that the replacement of hyperbolic and elliptic cylindrical shells with a parabolic shell simplifies the calculations.

All other scientific articles are devoted to studies on the calculation of specific cylindrical shells of the same shape for strength, stability, and dynamics, i.e., each article is devoted to only one type of closed or open, thin or thick cylindrical shells. The most complete review of works on the calculation of three degenerate cylindrical shells in the form of second-order algebraic surfaces is given in article [11], which contains 14 references on the subject.

Almost all new studies are devoted to circular cylindrical shells. It is noted in [33] that, despite the extensive literature on the development of shell theory, the comparative analysis of analytical and numerical solutions is not sufficiently covered. One of the first works devoted to this direction in the study of natural frequencies and vibration modes of closed circular cylindrical shells is [33].

Very interesting results have been obtained in the experimental study of the behavior of masonry cylindrical roofs under the settlement of one of the longitudinal rectilinear supports, due to which longitudinal cracks appear [34].

Many papers claim that the momentless theory provides acceptable results for thin shells with a ratio of thickness to internal diameter equal to 0.1 and having the shape of shells of rotation [13]. Examples of using the momentless theory for cylindrical shells subjected to axisymmetric loading are given mainly in textbooks for students of various fields [13; 35; 36].

In monograph [6], the maximum stresses and displacements in an elliptical tube caused by uniform normal pressure are determined. It is found that the maximum normal stresses in the direction of the ellipse will occur at the ends of the minor semi-axis, the shear stresses will reach the highest value at the shell supports. The normal axial stresses reach their maximum in the middle of the span. The authors of monograph [6] point out that the results obtained by the momentless shell theory are not applicable to long pipes. Similar conclusions were made in Section 5 and in the “Results” section of the presented paper.

With a major excess of studies on open or closed circular cylindrical shells, there are works whose authors believe that non-circular shells are an interesting object for research, for example, elliptic, in which the values of semi-axes R_x and R_y act as variable parameters. At their specific values, it is possible to achieve a decrease or increase in the minimum natural frequency relative to the cylindrical configuration without changing the mode of vibration. Paper [37] shows the variation of natural frequencies of vibration depending on the type of boundary conditions set at the edges of an elliptic shell and the frequencies of vibration of a cantilever steel non-circular shell at different lengths of one semi-axis.

The aeroelastic stability of closed cylindrical shells with an elliptical cross-section streamlined from the outside by a supersonic gas flow is investigated in article [38] in a three-dimensional setting using the mathematical model and its numerical realization based on the finite element method. Using the developed program, the influence of kinematic boundary conditions, dimensions, and the ellipticity parameter on the critical characteristics of buckling in the form of flutter was analyzed. It is demonstrated that in the cantilever case, there exist such ellipse semi-axis ratios that provide higher aeroelastic stability boundaries as compared to a similar circular configuration.

Finite element modeling and buckling analysis of a composite closed elliptic cylindrical lattice shell under axial compression and lateral bending were studied for spacecraft in [31]. Here, the natural vibration modes of the considered product are obtained and it is found that the structure and geometry of the object affect the magnitude of the critical load and the natural vibration modes.

There are studies on the determination of strength of parabolic cylindrical shells. For example, FEM was used to numerically investigate the behavior of a straight parabolic cylindrical shell with supports at four corners, subjected to dynamic loading, when increasing the shell height or its thickness [39]. The tabular and graphical results of the study were obtained using the standard SAP 2000 software.

A numerical study, performed together with the experimental one, proves the effect of cracks in parabolic cylindrical reinforced concrete shells on the static and dynamic behavior of the studied shells [40]. The obtained results will help to determine the choice of shell repair times.

In [41], it is argued that parabolic cylindrical panels made of memory polymers are very useful in spacecraft that are subjected to dynamic (vibration) loads.

One of the first attempts to select an optimal shell among shells with different cross-sections was made in [42], where single-layer shells with a triangular lattice with circular, catenary and parabolic cross-sections under a distributed load such as self-weight were considered. It is established that the shells of greatest mass will have a cross-section in the form of a catenary curve. The same article presents graphs of the relationship between the mass of the three considered lattice shells and the height. The parabolic shell will be the most economical in terms of material. If the maximum deflection of the structure is taken as the main criterion, the shell in the shape of a catenary curve has an advantage over the circular and parabolic shapes.

An interesting approach to the calculation of long open cylindrical building structures of non-circular cross-section is proposed in [43], where the stress-strain state of a structure obtained using a beam model with supports at two ends and using the equations of linear shell theory is studied.

8.3. Conclusion of Section 8

The presented brief review of the studies of cylindrical roofs and closed circular and elliptic shells carried out over the last 25 years shows a decline in interest in their investigation. The only exceptions are closed circular cylindrical shells, which have found applications in underground structures [44] and in mechanical engineering [45]. However, there are still unsolved problems. For example, as mentioned above, there is still no answer to the question of the optimal shell with respect to the five cylindrical shells shown in Figures 1–4 and Figure 5, which are subjected to some static or dynamic load. There are practically no studies on the determination of radial displacements of a hollow cylinder under the combined action of internal pressure, centrifugal forces, and temperature effects, which is very important in the manufacture of products in the field of mechanical engineering [46].

To determine the strength and dynamic characteristics of cylindrical objects, numerical methods and standard computer systems are almost always used. Analytical methods are developed only for individual cases.

The form of cylindrical shells, shell structures and cylindrical external outlines of buildings, defined by second-order algebraic surfaces, is used very widely by architects and civil and mechanical engineers in the XXI century.

A brief review of studies on the strength, stability, and dynamics of cylindrical shells conducted over the last 25 years confirms the conclusions of V.V. Novozhilov and other scientists in the field of mechanics

[6] that the “Shell Theory” fundamental discipline becomes one of the sections of applied mathematics. In this case, the theory is used only to write out the initial system of equations.

An investigation of recent publications shows that the calculation of cylindrical shells is currently associated with the consideration of multilayered walls, geometrical and physical nonlinearities, new structural materials [41] and new types of external static, dynamic [47] and thermal [46] loads, sometimes after the adoption of refining hypotheses [48].

After circular cylindrical shells, the most popular are parabolic cylindrical shells, especially as roofs for warehouses, industrial and exhibition halls, and elliptic cylindrical shells for mechanical engineering projects. Open cylindrical shells play a much more important role in construction.

Section 8 summarizes only the main directions of research on cylindrical shells in the form of second-order algebraic surfaces and which have been presented in publications over the last 25 years. Additional information on the topic can be found in review and scientific articles [11; 49; 50; 51].

9. Results

A comparative analysis of five thin shells under a static load of self-weight type according to the momentless shell theory has been performed.

1. Three formulas (4) in explicit form are obtained for the determination of internal membrane forces in the five shells defined by second-order algebraic surfaces with boundary conditions in terms of forces, acceptable for the momentless theory of thin shells.

2. Three formulas (5) in explicit form are obtained for the determination of internal membrane forces in the five shells defined by second-order algebraic surfaces with two specified boundary conditions in terms of forces at two opposite ends for normal forces in the form $N_v = 0$ involving the momentless theory of shells.

3. The main geometric characteristics of the five second-order middle algebraic surfaces are presented.

4. It is shown that in the framework of the approximate momentless theory of shells, the parabolic cylindrical thin shell (Figure 1) and the cylindrical thin shell with an incomplete ellipse in the cross-section (Figure 4) perform best under external load similar to self-weight, and the greatest internal forces arise in the cylindrical thin shell with a semi-ellipse in the cross-section (Figure 2).

5. It has been established that in cylindrical shells, the axial normal forces N_v determined using the momentless theory depend significantly on the square of the shell length l , which is clearly seen from the third formulas of systems (4) and (5). This is contrary to common sense, so it is necessary to agree with the conclusions of many scientists in the field of mechanics and the author, that the application area of the momentless theory is limited to short cylindrical shells, or to take into account that long shells behave according to the beam model with hinged supports at the ends [23]. However, cylindrical shells cannot be calculated as beams with curvilinear contour, because they generally do not follow the law of plane sections and do not obey the hypothesis of invariability of the cross-sectional shape. Deplanation of cross-sections occurs.

6. The known statements of the momentless shell theory that the forces determined in the shell regions farthest from the supports, for which boundary conditions cannot be set, are the closest to the true internal forces in shells, are confirmed. In the considered cases, these regions are located around the coordinate line $u = 0$.

The following has been done with respect to the general linear theory of shells:

7. A system of three partial differential equations (8) of the eighth order with respect to the displacements of the middle surface of a cylindrical shell defined in the curvilinear coordinate system u ($-1 \leq u \leq 1$), v ($0 \leq v \leq 1$) is derived for the first time for possible future application.

8. It is shown that the internal bending moments M_u , M_v and torque H as well as shear forces Q_u , Q_v do not depend on displacements u_v along the straight cylinder generators.

9. It was found that no studies on the calculation and application of hyperbolic cylindrical roofs have been published after 2000.

10. Conclusion

With the modern development of numerical calculation methods and computer technology, most approximate methods of calculation of curvilinear civil and mechanical engineering structures of shell kind, including the momentless theory of shells, are practically not used. However, virtually all textbooks on structural mechanics of shells have sections devoted to the momentless theory of shells. The materials contained in this article can be used in the teaching process to illustrate the applicability of approximate methods of shell analysis.

In the practice of thin shell design, the above materials are unlikely to be used, if only for preliminary assignment of thicknesses of cylindrical shells. All well-known scientists in the field of mechanics related to the design of thin shells state that when selecting the shell shape, one should strive for the shell behavior to be close to momentless.

Having the formulas for calculating the values of internal forces, it is possible to determine the boundary conditions at the edges of the shell in terms of displacements and forces, by satisfying which it is possible to obtain a momentless stress-strain state in the considered shell. However, the required boundary conditions can be created only theoretically, but it is necessary to strive for it.

It may seem that the momentless theory of cylindrical shells is practically useless due to a large number of constraints. However, in a number of cases it allows to obtain simple and sufficiently accurate solutions. In particular, it is applicable to the calculation of shells supported by spandrels, since the length of the compartments between them is set relatively small. The momentless stress state is taken as the basic stress state, and the stability of cylindrical shells in the basic stress state is investigated.

References

1. Lee Y.S. Review on the cylindrical shell research. *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers, A*. 2009;33(1):1–26. <http://doi.org/10.3795/KSME-A.2009.33.1.1>
2. Krivoshapko S.N. History of research and application of conical surfaces and shells. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2024;12(792):123–143. (In Russ.) <http://doi.org/10.32683/0536-1052-2024-792-12-123-143>
3. Mamieva I.A. Analytical surfaces for parametrical architecture in contemporary buildings and structures. *Academia. Architecture and Construction*. 2020;(1):150–165. (In Russ.) EDN: KNYKTY
4. Gbaguidi Aisse G.L. Influence of the geometrical research of surfaces of revolution and translation surfaces on design of unique structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings* 2019;15(4):308–314. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-308-314>
5. Krivoshapko S.N. Optimal shells of revolution and main optimizations. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(3):201–209. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-3-201-209>
6. Novozhilov V.V., Chernikh K.F., Mikhailovskiy E.I. *Linear Theory of Thin Shells*. Leningrad: Politehnika Publ.; 1991. (In Russ.) ISBN 5-7325-0127-4
7. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Simplified selection of optimal shell of revolution. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019;15(6):438–448. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-438-448>
8. Sahu R.R., Gupta P.K. Blast diffusion by different shapes of domes. *Defense Science Journal*. 2015;65(1):77–82. <http://doi.org/10.14429/dsj.65.6908>
9. Tupikova E.M. Shells in the form of algebraic ruled surfaces on a rhombic base. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(5):510–519. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-510-519>
10. Hayakawa K., Ohsaki M. Form generation of discrete piecewise developable surface and its interior boundaries using local gauss map. *Summaries of Technical Papers of Annual Meeting*. Architectural Institute of Japan, 2023;1:997–998. (In Japan.)
11. Krivoshapko S.N. Shells, shell structures, and curvilinear erections in the form of algebraical surfaces of the second order. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2024;6:2–18. (In Russ.) <http://doi.org/10.37538/0039-2383.2024.6.2.18>
12. Rabinskiy L.N., Shoumova N.P., Zhavoronok S.I. Analytical mechanics of membrane shells: a review. *Applied Mathematical Sciences*. 2016;10(44):2189–2204. <http://doi.org/10.12988/ams.2016.64158>
13. Olshevskiy A.A. *Structural Mechanics of Shells*. Bryansk, 2019. (In Russ.)
14. Biderman V.L. *Mechanics of Thin-Walled Structures. Statics*. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1977. (In Russ.) Available from: <https://dwg.ru/dnl/6392> (accessed: 02.05.2024).

15. Krivoshapko S.N. *Geometry of Ruled Surfaces with Cuspidal Edge and Linear Theory of Analysis of Tangential Developable Shells*: Monograph. Moscow: RUDN Publ.; 2009. (In Russ.) ISBN 978-5-209-03087-4
16. Novozhilov V.V. Analysis of Cylindrical Shells. *Izv. AN SSSR. OTN*. 1946;(6):803–816.
17. Vlasov V.Z. *General Shell Theory and its Application in Technics*. Moscow; Leningrad: Gostehizdat Publ.; 1949.
18. Chernikh K.F. *Linear Theory of Shells*. Part 1. Leningrad; 1962.
19. Lurye A.I. Concentration of stresses around a hole on the surface of the circular cylinder. *PMM*. 1946;10(3):307–406.
20. Prokopovich I.E., Slezinger I.N., Shteinberg M.V. *Analysis of Thin Elastic Cylindrical Shells and Prizm Hipped Plate Structures*. Kiev: Budivel'nik Publ.; 1967.
21. Goldenveizer A.L. *Theory of Elastic Thin Shells*. New York: Published by Pergamon Press; 1961.
22. Novozhilov V.V. *Theory of Thin Shells*. Leningrad: Sudpromgiz Publ.; 1962.
23. Flügge W. *Statik und Dynamik der Schalen*. Springer-Verlag; 1957.
24. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. General direction of development of the theory of multilayered shells. *Mechanics of Composite Materials*. 1988;2:231–241. <https://doi.org/10.1007/BF00608158>
25. Slezinger I.N. Matrix Form of Analysis of Elastic Cylindrical Shells and Hipped Plate Structures. *The Fifth All-Union Conference on Theory of Plates and Shells*. Moscow: Nauka Publ.; 1965.
26. Yokoo Y., Nakamura T., Matsui T. Limit analysis of shallow parabolic cylindrical shells. *Transactions of the Architectural Institute of Japan*. 1964;106:10–19. https://doi.org/10.3130/aijsaxx.106.0_10
27. Krivoshapko S.N., Christian A. Bock Hyeng, Mamieva I.A. Chronology of erection of the earliest reinforced concrete shells. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*. 2014;18(2):95–108. EDN: UVEJCD
28. Currà E., Giannetti I., Russo M. Self-supporting thin shells in Italy. Space and structure of the industrial buildings (1930-1970). *Informes de la Construcción*. 2024;76(575):6893. <https://doi.org/10.3989/ic.6893>
29. Krasic S. *Geometrijske Površi u Arhitekturi*. Građevinsko-arhitektonski fakultet Univerzitet u Nišu; 2012. ISBN 978-86-88601-02-3
30. Polański S., Pianowski L. *Surface development in technology. Computer-Aided Design*. Warsaw: Wydawnictwo Naukowe PWN; 2001. (In Polish) ISBN 83-01-13362-7
31. Lopatin A.V., Morozov E.V., Shatov A.V. Buckling and vibration of composite lattice elliptical cylindrical shells. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part L: Journal of Materials Design and Applications*. 2019;233(7):1255-1266. <http://doi.org/10.1177/1464420717736549>
32. Bakusov P.A., Semenov A.A. Analysis of the stability of the computational algorithm to a change in the geometric parameters of cylindrical shell structures. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2021;1:12–21. (In Russ.) <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.1.02>
33. Dyachenko I.A., Mironov A.A., Sverdlik Yu.M. Comparative analysis of theories and finite-element models of calculations of natural vibrations of cylindrical shells. *Transportnie Sistemy*. 2019;3(10):55–63. (In Russ.) http://doi.org/10.46960/62045_2019_3_55
34. Orlov A.S., Rubtsova E.G., Shcheglov A.S. Analysis of deformations of cylindrical vaulted roofing of religious buildings. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. 2022;3(55):109–120. <http://doi.org/10.36622/VSTU.2022.55.3.011>
35. Monahov V.A. *Theory of Plates and Shells*. Penza: PGUAS; 2016. (In Russ.)
36. Blaauwendraad J., Hoefakker J.H. Application of membrane theory to circular cylindrical shells. *Structural Shell Analysis. Solid Mechanics and Its Applications*. 2014;200:29–50. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6701-0_4
37. Lekomtsev S.V. Finite-element algorithms for calculation of natural vibrations of three-dimensional shells. *Computational continuum mechanics*. 2012;5(2):233–243. (In Russ.) <http://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.2.28>
38. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Aeroelastic stability of cylindrical shells with elliptical cross-section. *Mechanics of Solids*. 2020;55(5):728–736. (In Russ.) <http://doi.org/10.31857/S0572329920050049>
39. Sahu R., Kumar B., Shrotriya D. Dynamic study of parabolic cylindrical shell: A parametric study. *International Journal of Trend in Scientific Research and Development*. 2021;5(4):1545–1548. Available from: www.ijtsrd.com/papers/ijtsrd43638.pdf (accessed: 02.05.2024).
40. Robles S.I., Ortega N.F. Damage evaluation in shells from changes in its static parameters. *The Open Construction and Building Technology Journal*. 2011;5:182–189. <http://doi.org/10.2174/1874836801105010182>
41. Li H., Guo D., Tzou H. Light-induced vibration control of parabolic cylindrical shell panels. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures. Engineering, Materials Science, Physics*. 2017;28(20):2947–2958. <http://doi.org/10.1177/1045389X17704912>
42. Ivanova S.S., Umnova O.V. A study of the influence of the steel grid shell's height to its weight and deflection. *Diary of Science*. 2017;12(12):16. (In Russ.) EDN: YMELPK
43. Sehlström A., Olsson K., Williams C. Should Torroja's prestressed concrete Allos aqueduct be thought of as a beam or a shell? *Engineering Structures*. 2022;264:114425. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114425>

44. Kosytsyn S.B., Akulich V.Yu. Numerical analysis of cylindrical shell stability inter-acting with inhomogeneous soil. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):608–616. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-608-616>
45. Rustamova M.A. Determination of natural vibration frequencies of reinforced cylindrical shell. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(6):628–638. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-628-638>
46. Hudoley A.L., Baran O.A., Goman A.M. Determination of radial displacements of cylindrical shell under thermo-forced loading. *Vestnik of Brest state technical university. Series: Mechanical engineering*. 2006;(4):9–13. (In Russ.) Available from: <https://rep.bstu.by/handle/data/12497> (accessed: 02.05.2024).
47. Montes R.O.P., Silva F.M.A., Pedroso L.J. Free vibration analysis of a claim cylindrical shell with internal and external fluid interaction. *Journal of Fluids and Structures*. 2024;125:104079. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2024.104079>
48. Firsanov V.V., Vo A.H. Investigation of strengthened cylindrical shells under action of local load on refined theory. *Trudy MAI*. 2018;(102). (In Russ.) EDN: YQONHV
49. Choudhary D.K., Jha A.K., Parihar R.S., Misra R., Udeniyan A. A parametric study of skewed parabolic cylindrical shell at 0° and 30° by staad pro software. *International Journal of Research Publication and Reviews*. 2024;5(7):2847–2855. ISSN 2582-7421
50. Rai R., Pendharkar U. Computer aided analysis of multiple cylindrical shell structure using different parameters. *International Journal of Engineering Research & Technology*. 2012;1(3):1–7. ISSN: 2278-0181
51. Nemeth M.P., Oterkus E., Madenci E. Stress analysis of composite cylindrical shells with an elliptical cutout. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2007;2(4):695–727. <http://doi.org/10.2140/jomms.2007.2.695>

Список литературы

1. Lee Y.S. Review on the cylindrical shell research // Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers, A. 2009. Vol. 33. № 1. P. 1–26.
2. Кривошапко С.Н. История изучения и применения конических поверхностей и оболочек // Известия вузов. Строительство. 2024. № 12 (792). С. 123–143. <http://doi.org/10.32683/0536-1052-2024-792-12-123-143>
3. Мамиева И.А. Аналитические поверхности для параметрической архитектуры в современных зданиях и сооружениях // Academia. Архитектура и строительство. 2020. № 1. С. 150–165. EDN: KNYKTY
4. Gbaguidi Aisse G.L. Influence of the geometrical research of surfaces of revolution and translation surfaces on design of unique structures // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 4. С. 308–314. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-308-314>
5. Krivoshapko S.N. Optimal shells of revolution and main optimizations // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 3. С. 201–209. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-3-201-209>
6. Новожиллов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Ленинград : Политехника, 1991. 656 с. ISBN 5-7325-0127-4
7. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Simplified selection of optimal shell of revolution // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 6. С. 438–448 <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-6-438-448>
8. Sahu R.R., Gupta P.K. Blast diffusion by different shapes of domes // Defense Science Journal. 2015. Vol. 65. No. 1. P. 77–82. <http://doi.org/10.14429/dsj.65.6908>
9. Тупикова Е.М. Оболочки в форме алгебраических линейчатых поверхностей на ромбическом плане // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 5. С. 510–519. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-510-519>
10. Hayakawa K., Ohsaki M. Form generation of discrete piecewise developable surface and its interior boundaries using local gauss map // Summaries of Technical Papers of Annual Meeting, Architectural Institute of Japan, 2023, Structures-1, 997–998. (In Jap.)
11. Кривошапко С.Н. Оболочки, оболочечные структуры и криволинейные сооружения в форме алгебраических поверхностей 2-го порядка // Строительная механика и расчет сооружений. 2024. № 6. С. 2–18. <http://doi.org/10.37538/0039-2383.2024.6.2.18>
12. Rabinskiy L.N., Shoumova N.P., Zhavoronok S.I. Analytical mechanics of membrane shells: a review // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10. No. 44. P. 2189–2204. <http://doi.org/10.12988/ams.2016.64158>
13. Ольшевский А.А. Строительная механика оболочек. Брянск, 2019. 51 с.
14. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. Москва : Машиностроение, 1977. 488 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/6392> (дата обращения: 02.05.2024).
15. Кривошапко С.Н. Геометрия линейчатых поверхностей с ребром возврата и линейная теория расчета торсовых оболочек: монография. Москва : Изд-во РУДН, 2009. 357 с. ISBN 978-5-209-03087-4

16. Новожилов В.В. Расчет цилиндрических оболочек // Изв. АН СССР. ОТН. 1946. № 6. С. 803–816
17. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Москва ; Ленинград : Гостехиздат, 1949. 784 с.
18. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 1. Изд-во Ленинградского университета, 1962. 274 с.
19. Лурье А.И. Концентрация напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра // ПММ. 1946. Т. 10. № 3. С. 307–406.
20. Прокопович И.Е., Слезингер И.Н., Штейнберг М.В. Расчет тонких упругих цилиндрических оболочек и призматических складок. Киев : Изд-во Будівельник, 1967. 240 с.
21. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва : ГТИ, 1953. 544 с.
22. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Ленинград : Судпромгиз, 1962. 431 с.
23. Флюгге В. Статика и динамика оболочек. Москва : Гос. изд-во литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1961. 306 с.
24. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. General direction of development of the theory of multilayered shells // Mechanics of Composite Materials. 1988. Vol. 2. P. 231–241. <https://doi.org/10.1007/BF00608158>
25. Слезингер И.Н. Матричная форма расчета гибких цилиндрических оболочек и складок // V Всесоюзная конференция по теории пластин и оболочек. Москва : Наука, 1965.
26. Yokoo Y., Nakamura T., Matsui T. Limit analysis of shallow parabolic cylindrical shells // Transactions of the Architectural Institute of Japan. 1964. Vol. 106. P. 10–19. https://doi.org/10.3130/aajsaxx.106.0_10
27. Krivoschapko S.N., Bock Hyeng C.A., Mamieva I.A. Chronology of erection of the earliest reinforced concrete shells // International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences. 2014. Vol. 18. Issue. 2. P. 95–108. ISSN: 2076-734X, EISSN: 2076-7366
28. Currà E., Giannetti I., Russo M. Self-supporting thin shells in Italy. Space and structure of the industrial buildings (1930–1970) // Informes de la Construcción. 2024. Vol. 76. No. 575. Article no. 6893. <https://doi.org/10.3989/ic.6893>
29. Krasic Sonja. Geometrijske Površi u Arhitekturi. Građevinsko-arhitektonski fakultet Univerzitet u Nišu, 2012. 238 p. ISBN 978-86-88601-02-3
30. Polański S., Pianowski L. Rozwinięcia powierzchni w technice. Konstrukcje wspomagane komputerowo. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2001. 412 p. (на польск.) ISBN 83-01-13362-7
31. Lopatin A.V., Morozov E.V., Shatov A.V. Buckling and vibration of composite lattice elliptical cylindrical shells // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part L: Journal of Materials Design and Applications. 2017. Vol. 233. Issue 7. 1255–1266. <http://doi.org/10.1177/1464420717736549>
32. Бакусов П.А., Семенов А.А. Анализ устойчивости вычислительного алгоритма к изменению геометрических параметров цилиндрических оболочечных конструкций // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 1. С. 12–21. <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.1.02>
33. Дяченко И.А., Миронов А.А., Свердлик Ю.М. Сравнительный анализ теорий и конечно-элементных моделей расчета свободных колебаний цилиндрических оболочек // Транспортные системы. 2019. № 3 (10). С. 55–63. http://doi.org/10.46960/62045_2019_3_55
34. Orlov A.S., Rubtsova E.G., Shcheglov A.S. Analysis of deformations of cylindrical vaulted roofing of religious buildings // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2022. Issue 3 (55). P. 109–120. <http://doi.org/10.36622/VSTU.2022.55.3.011>
35. Монахов В.А. Теория пластин и оболочек : учеб. пособие по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений». Пенза : ПГУАС, 2016. 252 с.
36. Blaauwendraad J., Hoefakker J.H. Application of membrane theory to circular cylindrical shells // Structural Shell Analysis. Solid Mechanics and Its Applications. 2014. Vol. 200. P. 29–50. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6701-0_4
37. Лекомцев С.В. Конечно-элементные алгоритмы расчета собственных колебаний трёхмерных оболочек // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 2. С. 233–243 <http://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.2.28>
38. Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П. Аэроупругая устойчивость цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2020. № 5. С. 151–160. <http://doi.org/10.31857/S0572329920050049>
39. Sahu R., Kumar B., Shrotriya D. Dynamic study of parabolic cylindrical shell: A parametric study // International Journal of Trend in Scientific Research and Development. 2021. Vol. 5. Issue 4. P. 1545–1548. URL: www.ijtsrd.com/papers/ijtsrd43638.pdf (дата обращения: 02.05.2024).
40. Robles S.I., Ortega N.F. Damage evaluation in shells from changes in its static parameters // The Open Construction and Building Technology Journal. 2011. Vol. 5. P. 182–189. <http://doi.org/10.2174/1874836801105010182>
41. Li H., Guo D., Tzou H. Light-induced vibration control of parabolic cylindrical shell panels // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. Engineering, Materials Science, Physics. 2017. Vol. 28. Issue 20. P. 2947–2958. <http://doi.org/10.1177/1045389X17704912>
42. Иванова С.С., Умнова О.В. Исследование влияния высоты стрелы подъема сетчатой оболочки на ее массу и прогиб // Дневник науки. 2017. № 12 (12). С. 16. EDN: YMELPK

43. *Sehlström A., Olsson K., Williams C.* Should Torroja's prestressed concrete Allos aqueduct be thought of as a beam or a shell? // *Engineering Structures*. 2022. Vol. 264. No. 13. Article no. 114425. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.114425>
44. Косицын С.Б., Акулич В.Ю. Численный анализ устойчивости цилиндрической оболочки, взаимодействующей с неоднородным окружающим основанием // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 6. С. 608–616. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-608-616>
45. Рустамова М.А. Определение собственных частот колебаний армированной цилиндрической оболочки // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2021. Т. 17. № 6. С. 628–638. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-6-628-638>
46. Худолей А.Л., Баран О.А., Гоман А.М. Расчет радиальных перемещений цилиндрической оболочки при термостатическом нагружении // *Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Машиностроение*. 2006. № 4. С. 9–13. URL: <https://rep.bstu.by/handle/data/12497> (дата обращения: 02.05.2024).
47. *Montes R.O.P., Silva F.M.A., Pedrosa L.J.* Free vibration analysis of a clamped cylindrical shell with internal and external fluid interaction // *Journal of Fluids and Structures*. 2024. Vol. 125. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructures.2024.104079>
48. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // *Труды МАИ*. 2018. № 102. EDN: YQONHV
49. *Choudhary D.K., Jha A.K., Parihar R.S., Misra R., Udeniyan A.* A parametric study of skewed parabolic cylindrical shell at 0° and 30° by staad pro software // *International Journal of Research Publication and Reviews*. 2024. Vol. 5. Issue 7. P. 2847–2855. ISSN 2582-7421
50. *Rai R., Pendharkar U.* Computer aided analysis of multiple cylindrical shell structure using different parameters // *International Journal of Engineering Research & Technology*. 2012. Vol. 1. Issue 3. P. 1–7. ISSN: 2278-0181
51. *Nemeth M.P., Oterkus E., Madenci E.* Stress analysis of composite cylindrical shells with an elliptical cutout // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2007. Vol. 2. No. 4. P. 695–727. <http://doi.org/10.2140/jomms.2007.2.695>

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-6-593-612

УДК 624.138

EDN: DKACDV

Научная статья / Research article

Инъекционные технологии для устранения карстово-суффозионной опасности и просадочности грунтов в основании зданий и сооружений

И.Я. Харченко¹, А.И. Харченко², А.И. Панченко³, В.Т. Ерофеев³✉,
И.Т. Мирсаяпов⁴, В.Г. Хозин⁴, О.В. Тараканов⁵, Е.В. Завалишин⁶

¹ Российский университет транспорта, Москва, Россия

² ОАО «Россевзапстрой», Москва, Россия

³ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

⁴ Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань, Россия

⁵ Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, Пенза, Россия

⁶ Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, Саранск, Россия

✉ erofeevvt@bk.ru

Поступила в редакцию: 11 августа 2024 г.

Принята к публикации: 10 декабря 2024 г.

Харченко Игорь Яковлевич, советник РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры мостов и тоннелей, Российский университет транспорта, Москва, Россия; eLIBRARY AuthorID: 815775, ORCID: 0009-0004-0521-9404; e-mail: iharcenko@mail.ru

Харченко Алексей Игоревич, кандидат технических наук, директор, ОАО «Россевзапстрой», Москва, Россия; ORCID: 0000-0002-3850-4285; e-mail: greenstone236@gmail.com

Панченко Александр Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры строительного материаловедения, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 1223-1280, ORCID: 0009-0004-9538-6088; e-mail: alex250354@gmail.com

Ерофеев Владимир Трофимович, академик РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры строительного материаловедения, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 4425-5045, ORCID: 0000-0001-8407-8144; e-mail: erofeevvt@bk.ru

Мирсаяпов Илизар Талгатович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой оснований фундаментов динамики сооружений и инженерной геологии, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 1454-1154, ORCID: 0000-0002-6193-0928; e-mail: mirsayapov1@mail.ru

Хозин Вадим Григорьевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии строительных материалов, изделий и конструкций, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 3825-6514, ORCID: 0000-0003-0874-316X; e-mail: khazin.vadim@yandex.ru

Тараканов Олег Вячеславович, доктор технических наук, профессор, декан факультета управления территориями, Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, Пенза, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 5316-5749, ORCID: 0000-0002-1773-6095; e-mail: tarov60@mail.ru

Завалишин Евгений Васильевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой инженерной и компьютерной графики, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, Саранск, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 8036-3974, ORCID: 0009-0003-6956-6010; e-mail: evaz@mail.ru

© Харченко И.Я., Харченко А.И., Панченко А.И., Ерофеев В.Т., Мирсаяпов И.Т., Хозин В.Г., Тараканов О.В., Завалишин Е.В., 2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Аннотация. Показано, что устройство противофильтрационных завес (ПФЗ) с использованием различных буронабивных технологий следует рассматривать как наиболее эффективный метод по защите от развития карстово-суффозионной опасности при строительстве и эксплуатации транспортных и других сооружений. Для устройства ПФЗ и ликвидации карстовых разуплотнений, в зависимости от инженерно-геологических и гидрогеологических условий на участке будущего строительства, возможно применение различных смесей на основе полимеров, жидкого стекла и т.д. Показано, что полимерные пропиточные композиции эффективны для ускоренного варианта повышения несущей способности грунтов, а использование композиций на основе жидкого стекла позволяет повысить биостойкость. Эффективно также применение технологии струйной цементации, манжетной технологии или их комбинации. Специальные инъекционные смеси на минеральной основе целесообразно применять для уплотнения и упрочнения карстовых горных пород. Эти минеральные специальные инъекционные смеси более технологичны, а грунтобетон ПФЗ и уплотненных карстовых пород более долговечен по сравнению с грунтом, уплотненным инъекционными смесями на полимерной основе или на основе жидкого стекла. Эффективной инъекционной смесью для устройства ПФЗ при защите от карстово-суффозионной опасности является инъекционная смесь «ПФС+», которую следует рассматривать в качестве альтернативы инъекционным смесям на основе бентонита, полимеров или жидких стекол. Учитывая высокую вероятность развития сульфатной коррозии при инъектировании трещиноватых гипсовых пород, показана эффективность применения минерального тонкодисперсного вяжущего — микроцемента «Интроцем» на шлаковой основе в манжетной технологии. С целью ликвидации карстовых разуплотнений наиболее предпочтительным является применение специальной закладочной инъекционной смеси «ЗИС», которая изготавливается на основе минерального композиционного вяжущего. Опыт использования технологии «Super-Jet» при различных геотехнических условиях и проектных решениях показал, что прочность грунтобетонного массива, сформированного по данной технологии, может достигать 15 МПа, а при устройстве противофильтрационных завес обеспечивается их полная водонепроницаемость. Показано, что более высокая прочность грунтовых оснований достигается при их инъектировании порошково-активированными композициями.

Ключевые слова: инъекционные минеральные вяжущие, карстовые разуплотнения, противофильтрационные завесы

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Все авторы внесли равноценный вклад в разработку концепции и проведение исследования, рецензирование, редактирование и написание текста.

Для цитирования: Харченко И.Я., Харченко А.И., Панченко А.И., Ерофеев В.Т., Мирсаяпов И.Т., Хозин В.Г., Тараканов О.В., Завалишин Е.В. Инъекционные технологии для устранения карстово-суффозионной опасности и просадочности грунтов в основании зданий и сооружений // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2024. Т. 20. № 6. С. 593–612. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-593-612>

Injection Technologies for Elimination of Karst-Suffosion Hazard and Soil Subsidence in the Foundation of Buildings and Structures

Igor Ya. Kharchenko¹, Alexey I. Kharchenko², Alexander I. Panchenko³, Vladimir T. Erofeev³✉, Ilizar T. Mirsayapov⁴, Vadim G. Khozin⁴, Oleg V. Tarakanov⁵, Evgeny V. Zavalishin⁶

¹ Russian University of Transport, Moscow, Russia

² JSC “Rossevizapzastroy”, Moscow, Russia

³ Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia

⁴ Kazan State University of Architecture and Civil Engineering, Kazan, Russia

⁵ Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russia

⁶ N.P. Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

✉ erofeevvt@bk.ru

Received: August 11, 2024

Accepted: December 10, 2024

Abstract. It is shown that the installation of cutoff walls (CW) using various drilling and injection technologies should be considered as the most effective method to protect against the development of karst-suffosion hazard during construction and operation of transportation and other structures. Depending on geotechnical and hydrogeological conditions at the future construction site, it is possible to use various mixtures based on polymers, liquid glass, etc., for CW construction and elimination of karst unconsolidation. It is shown that polymeric impregnation compositions are effective for the accelerated option of increasing the bearing capacity of soils, and the use of compositions based on liquid glass allows to increase biologic

resistance. The use of jet grouting technology, collar technology or their combination is also effective. It is reasonable to use mineral-based special injection mixtures for compaction and hardening of karst rocks. These mineral-based special injection mixtures are more technologically advanced, and the soil cement of CW and compacted karst rocks is more durable compared to soil compacted with polymer-based or liquid glass injection mixtures. An effective injection mixture for CW installation for protection against karst-suffosion hazard is the “PFS+” injection mixture, which should be considered as an alternative to injection mixtures based on bentonite, polymers or liquid glass. Taking into account the high probability of sulfate corrosion development during injection of fractured gypsum rocks, the efficiency of application of mineral fine-dispersed binder — “Introcem” slag based microcement in collar technology — is shown. In order to eliminate karst unconsolidation, the most preferable approach is the use of the “ZIS” special injection mixture, which is made on the basis of mineral composite binder. The experience of using the “Super-Jet” technology under different geotechnical conditions and design solutions has shown that the strength of the soil cement body formed by this technology can reach 15 MPa, and the cutoff walls are fully waterproof. It is shown that higher strength of soil bases is achieved when they are injected with powder-activated compositions.

Keywords: mineral injection binders, karst unconsolidation, cutoff walls

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors’ contribution. All authors have made an equal contribution to conceptualization, review & editing, writing, review and editing.

For citation: Kharchenko I.Ya., Kharchenko A.I., Panchenko A.I., Erofeev V.T., Mirsayapov I.T., Khozin V.G., Tarakanov O.V., Zavalishin E.V. Injection technologies for elimination of karst-suffosion hazard and soil subsidence in the foundation of buildings and structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(6):593–612. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-593-612>

1. Введение

Известно, что безопасная эксплуатация зданий и сооружений повышенной ответственности невозможна без рационального подхода к проектированию грунтового основания [1]. Среди множества негативных факторов, которые необходимо учитывать, важное место занимают карстово-суффозионные процессы. Устранение карстово-суффозионных процессов в мировой практике осуществляется с помощью различных мероприятий [2–4].

Значительная часть территории России, включая районы западного Приуралья, Русской равнины, Приангарья и многие другие районы Сибири, Кавказа и Дальнего Востока, находится в условиях развития карстово-суффозионной опасности [5–7]. В этой связи проектирование и строительство транспортных сооружений различного назначения, включая мостовые и дорожные сооружения, необходимо выполнять с учетом реализации соответствующих защитных мероприятий. Степень развития карстов определяется склонностью горных пород к растворению, гидрогеологическими условиями и геологическим строением участка, рельефом местности, степенью трещиноватости пород, климатическими условиями, а также другими природными и техногенными факторами [8–10]. Различают два вида

Igor Ya. Kharchenko, Doctor of Technical Sciences, Professor, Advisor of RAASN, Professor of Department of Bridges and Tunnels, Russian University of Transport, Moscow, Russia; eLIBRARY AuthorID: 815775, ORCID: 0009-0004-0521-9404; e-mail: iharchenko@mail.ru

Alexey I. Kharchenko, Candidate of Technical Sciences, Director, JSC “Rossevezapzastroy”, Moscow, Russia; ORCID: 0000-0002-3850-4285; e-mail: greenstone236@gmail.com

Alexander I. Panchenko, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Building Materials Science, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 1223-1280, ORCID: 0009-0004-9538-6088; e-mail: alex250354@gmail.com

Vladimir T. Erofeev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of RAASN, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 4425-5045, ORCID: 0000-0001-8407-8144; e-mail: rofeevvt@bk.ru

Ilizar T. Mirsayapov, Corresponding Member of RAASN, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Foundations of Structural Dynamics and Engineering Geology, Kazan State University of Architecture and Civil Engineering, Kazan, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 1454-1154, ORCID: 0000-0002-6193-0928; e-mail: mirsayapov1@mail.ru

Vadim G. Khozin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Technology of Building Materials, Products and Structures, Kazan State University of Architecture and Civil Engineering, Kazan, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 3825-6514, ORCID: 0000-0003-0874-316X; e-mail: khazin.vadim@yandex.ru

Oleg V. Tarakanov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Territory Management, Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 5316-5749, ORCID: 0000-0002-1773-6095; e-mail: tarov60@mail.ru

Evgeny V. Zavalishin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Engineering and Computer Graphics, N.P. Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 8036-3974, ORCID: 0009-0003-6956-6010; e-mail: evaz@mail.ru

суффозии — механическую и химическую. При механической суффозии фильтрующаяся вода размывает горные породы и перемещает глинистые, илистые или песчаные частицы во взвешенном состоянии по руслу подземных или надземных рек; при химической коррозии грунтовая вода растворяет горные породы (гипс, соли, карбонаты) вплоть до их полного исчезновения. При одновременном действии этих двух видов суффозии применяют термин — механохимическая суффозия [11–13]. Этот вид суффозии развивается в породах, где растворяется цементирующее вещество с одновременным выносом глинистых или иловых частиц.

Установлено, что наиболее интенсивному развитию подвержены горные породы, содержащие растворимые водой соли, гипс, известняки, доломиты и магнезиты. Одним из главных факторов, ускоряющих развитие карстовых процессов, является повышение интенсивности фильтрационных процессов при увеличении степени трещинообразования и обводненности горных пород [14; 15]. Наиболее интенсивно развиваются карстовые процессы в трещиноватых породах при наличии трещин шириной раскрытия более 1 мм, что обеспечивает интенсивную и свободную циркуляцию воды, сопровождающуюся преобразованием трещин в крупные каналы и пещеры. Этот процесс, получивший название коррозии, развивается до уровня естественного водоупора [16; 17]. При разработке и реализации мероприятий по защите транспортных сооружений в условиях карстово-суффозионной опасности (КСО) первоочередным является устройство противofильтрационных завес (ПФЗ), а также защитных экранов.

Способы уплотнения и упрочнения грунтов, применяемые для защиты от КСО, назначаются исходя из геотехнических задач, направленных на формирование противofильтрационных завес в структуре трещиноватых горных пород, а также для упрочнения грунта и ликвидации уже сформировавшихся карстовых полостей [18; 19]. В отдельных случаях достаточным и экономически обоснованным мероприятием является устройство защитных или разгружающих экранов, размещаемых между транспортным сооружением и сформировавшимися карстовыми породами [20; 21]. Кроме того, эффективным решением может быть устройство грунтобетонной опорной пяты для свайного фундамента, которая обеспечит необходимую несущую способность свай даже в случае развития карстово-суффозионных процессов в основании сооружения [10; 22; 23].

Геотехнические противокарстовые мероприятия осуществляются путем преобразования свойств грунтового массива в зоне фундаментов или в грунтах покрывающей толщи. Геотехнические мероприятия выполняются несколькими способами (или их комбинацией):

- ликвидация карстовых полостей по технологии струйной цементации, по манжетной или комбинированной технологии;
- инъекционное закрепление трещиноватых закарстованных пород по манжетной технологии восходящими заходками;
- закрепление грунтов покрывающей толщи по технологии струйной цементации, манжетной или комбинированной технологии.

Геотехнические противокарстовые мероприятия разделяют на два типа:

- мероприятия 1-го типа направлены на исключение условий образования, развития и проявления карста;
- мероприятия 2-го типа направлены на обеспечение прочности и устойчивости сооружения при возможном развитии карстовых процессов.

Геотехнические мероприятия типа 1 предполагают сплошное закрепление толщи карстовых пород в результате заполнения инъекционными смесями трещин и каналов в зоне трещиноватых грунтов. Геотехнические мероприятия типа 2 предполагают закрепление грунтов в толще над карстовыми породами, в основании сооружения, упрочнение поверхностных карстовых слоев или сочетание указанных мероприятий. В случае применения свайных фундаментов наиболее эффективным решением является устройство грунтобетонной опорной пяты в основании свай [24].

Исходя из имеющегося опыта и в зависимости от конструктивного исполнения фундаментов, особенностей инженерно-геологических условий площадки строительства, предполагаемого характера

развития карстовых процессов и т.д., цементация закарстованных пород (геотехнические мероприятия типа 1) и закрепление грунтов покровной толщи (геотехнические мероприятия типа 2) могут выполняться по площадной или локальной схемам.

Площадная схема предусматривает выполнение противокарстовых мероприятий в границах всего объекта или участка (а при необходимости — за его границами). Локальная схема предусматривает выполнение работ в границах отдельных участков или в отношении отдельных конструктивных элементов (например, цементация основания под пятой свай-стоек). При проектировании противокарстовых мероприятий по площадной схеме скважины рекомендуется располагать по сетке с регулярным шагом.

Далее приводятся некоторые результаты исследований и практического опыта упрочнения и уплотнения грунтов с применением инъекционных смесей на минеральной основе, позволяющие обоснованно определить область их эффективного применения при строительстве зданий и сооружений различного назначения в сложных инженерно-геологических условиях.

2. Инъекционные смеси для устройства противofiltrационных завес

Крупные пустоты характерны для массивов карбонатных или гипсоносных пород, пораженных карстовыми процессами, для выветрелых зон осадочных пород с глыбовым сложением, лавовых пород молодого геологического возраста. Отличительной особенностью являются не только большие размеры пустот, но и большая их неоднородность (особенно в закарстованных породах) по размеру и распространению в пространстве.

Для выявления формы и размеров крупных пустот должны предусматриваться разведочные скважины с документацией пустот, их размера, заполнителя; геофизические работы, проводимые путем электро- или сейсмоакустического профилирования и просвечивания, позволяющие установить области расположения крупных пустот.

Заполнение крупных пустот должно производиться способами заполнительной цементации.

В связи с невозможностью заранее определить объем пустот процесс производства цементационных работ рассчитывается на широкий диапазон изменения цементационных работ и состава вводимых материалов.

Технологические приемы заполнительной цементации зависят от ряда факторов: назначения цементации (прочности и водонепроницаемости заполнителя пустот); вида и формы цементационного сооружения; размера пустот; сообщаемости пустот; характера заполнителя в пустотах; обводненности и наличия подземных вод.

Для заполнения крупных пустот могут применяться растворы различных типов:

1. Цементно-песчаные растворы (с добавкой глины или бентонита).
2. Цементные растворы с добавкой искусственных пылеватых материалов (зола-уноса, каменной муки, молотого шлака).
3. Цементно-глинистые или цементно-суглинистые стабильные растворы с добавкой песка или без него).
4. Быстротсхватывающиеся смеси (БСС) или схватывающиеся и расширяющиеся растворы.

При укрепительной цементации непосредственно под сооружениями, при которой необходимо надежное заполнение пустот, целесообразно использовать растворы 1–3-го типов. При заполнении пустот в пределах противofiltrационной завесы следует применять растворы 3-го и 4-го типов. В качестве активных добавок используются жидкое стекло, алебастр, порошок алюминия (расширяющая добавка) и др.

Оборудование для цементации крупных пустот должно быть рассчитано на подачу густых растворов со значительным расходом. Нагнетание раствора в пустоты обычно производится без давления или с давлением, соответствующим потерям напора в коммуникациях. Появление давления в системе нагнетания и его рост обычно свидетельствуют об окончании заполнения пустот. При нагнетании

раствора через открытую скважину окончание заполнения пустот проявляется выходом раствора на поверхность. При нагнетании раствора в замкнутые пустоты пробуривается рядом с нагнетательной воздухоотводящая скважина, появление раствора в которой свидетельствует об окончании заполнения пустоты.

Для ограничения распространения по пустотам раствор следует нагнетать с перерывами. Возведение зданий на закарстованных породах представляет большие трудности и требует принятия специальных защитных мер. В практике строительства известны случаи, когда непринятие таких мер в условиях карста приводило к резкому увеличению фильтрации и даже к катастрофическим последствиям.

При наличии карста опасность представляет не только процесс выщелачивания карбонатных пород, но и механическая суффозия, затрагивающая в первую очередь отложения, накапливающиеся часто в карстовых полостях (песчаный, глинистый материал и др.). Вынос такого материала приводит к быстрому возрастанию фильтрации, что в свою очередь активизирует процесс карстообразования. В районах карста породы, слагающие основание зданий, должны быть особо тщательно исследованы. В закарстованных породах часто наблюдаются разветвленные фильтрационные ходы весьма большого протяжения, связывающие иногда с соседними долинами и реками.

При наличии в породах карстовых явлений разведочные скважины должны задаваться более близко одна от другой, чем обычно, так как в противном случае могут быть пропущены весьма важные данные о дефектах породы. Поэтому обычно принимаемые расстояния для разведочных скважин через 30–50 м по створу неприемлемы для районов карста.

При определенных условиях в районах карста возможно устройство мощных противofильтрационных завес и производство сплошной цементации основания под подошвой фундамента.

При проектировании и осуществлении завес в карстовых районах руководствуются следующими основными положениями:

1. При наличии карста опасные фильтрационные токи могут образоваться не только в плоскости или в непосредственной близости от проектируемых русловой и береговых завес, но также и под самим зданием или сооружением. В связи с этим наряду с проектированием завес должна быть установлена необходимость в принятии противofильтрационных мер в таких частях основания, где имеется угроза обходной фильтрации.

2. Отдельные крупные полости или карстовые пещеры, выявленные при разведочных работах, должны быть тщательно оконтурены на профилях. Они подлежат заполнению раствором или бетоном, глинистым материалом и т.п., для чего должен быть запроектирован в зависимости глубины залегания карстовых полостей тот или иной метод разработки — открытым способом или путем горных выработок. Особенно эффективным в этих случаях оказалось бурение скважин большого диаметра.

3. Опыт показал, что промытые каверны встречаются иногда на значительной глубине (при цементации пород зарегистрирован случай вскрытия больших каверн на глубине до 90 м). В связи с этим при глубоком залегании водоупорных пластов или при отсутствии признаков затухания трещиноватости с глубиной приходится в зависимости от местных условий проектировать завесы значительной глубины.

4. Завесы, как правило, проектируются двух- и трехрядными, а в особых случаях многорядными.

5. Расстояние между скважинами задается с учетом закарстованности пород в целях повышения качества цементации и во избежание пропуска каверн и трещин.

6. Направление цементационных скважин должно задаваться сообразно напластованию пород с учетом системы господствующих трещин. Положение отдельных крупных трещин необходимо при этом учитывать самостоятельно. При сложной трещиноватости пород для повышения цементации иногда задают систему пересекающихся скважин.

7. Помимо создания глубинной противofильтрационной завесы обычно предусматривают укрепление верхнего, наиболее выветрелого слоя пород путем цементации мелких скважин под верховой частью или под всей подошвой сооружения.

8. В проекте производства работ должны находить отражение характерные особенности цементации сильно нарушенных и закарстованных пород: недопустимость применения цементации методом восходящих зон, густых растворов и отощателей, бесциркуляционного (прямого) метода нагнетания, а в условиях очень сильной трещиноватости — прерывистого метода нагнетания.

Общим для всех этих способов требованием является последующая цементация прилегающих к карстовым полостям пород, в особенности в створе самой завесы.

Характерным для устройства завес в карстовых районах является их высокая стоимость и большой расход нагнетаемого материала. Поэтому особое значение приобретает выбор наиболее целесообразного для данных конкретных условий материала: цемента, песка, бентонита, битума, глины и т. п.

Экономические соображения должны приниматься во внимание при одновременном удовлетворении основного требования — долговечности завесы. Так, например, при выборе цемента должна быть обеспечена его коррозионная стойкость против воздействия подземных вод; при выборе глины суффозионная устойчивость завесы m условиях гидравлических градиентов, отвечающих проектному подпору. При выборе битума должно быть не только обеспечено надежное заполнение мелких трещин, но и предотвращена пластическая текучесть (выдавливание) битума из широких трещин при больших напорах.

Стремление к удовлетворительному разрешению этих сложных задач привело, в частности, к применению комбинированного метода создания завес, при котором используются совместно цементация и битумизация. При этом сначала битумизируются более тонкие трещины, а затем цементируются крупные каверны и трещины.

Начиная с 1920-х гг. в Советском Союзе использовались разнообразные способы закрепления грунтов с применением различных полимерных, битумных, жидкостекольных и минеральных составов.

Пропитка грунтов с целью их закрепления является широко применяемым технологическим процессом в области строительного производства. *Составы и свойства инъекционных смесей, предназначенных для уплотнения и упрочнения закарстованных пород, подбираются с учетом характера и степени их трещиноватости, а также гидрогеологических условий участка производства работ по результатам лабораторных исследований. Далее эти результаты уточняются в рамках выполнения опытно-производственных работ.*

Достижения современного материаловедения, внедрение новых способов строительства, появление современного бурового и инъекционного оборудования существенно повысили уровень технологичности и безопасности применяемых технологий инъектирования.

Уплотнение и упрочнение трещиноватой породы заключается в нагнетании под давлением через инъекционные скважины специальных смесей, которые после затвердевания формируют сплошной защитный экран в качестве ПФЗ, с заданной водонепроницаемостью, что исключает развитие процесса растворения горных пород и обеспечивает надежную эксплуатацию транспортного или иного сооружения.

В настоящее время применяемые полимерные системы преимущественно используются для устранения аварийных ситуаций при ликвидации активных водопроявлений, временной гидроизоляции, гидрофобизации конструкций и применяются в небольших объемах ввиду дороговизны составляющих материалов [25].

Для оперативного усиления оснований разработаны эффективные составы эпоксидных композитов с новыми отвердителями, а также составы композитов различной вязкости, регулируемой за счет введения растворителей и пластификаторов. В качестве отвердителей предложены полиоксиэтилированный триэтанолламин и смесь полиэтиленполиамин и кубовых остатков этилкарбитола. Данные отвердители менее активны, чем традиционные полиэтиленполиамины. Применение предложенных отвердителей позволяет повысить жизнеспособность пропиточных составов.

Результаты испытаний прочностных показателей составов с данными отвердителями приведены в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Свойства эпоксидных композитов с новыми отвердителями /
Properties of epoxy composites with new hardeners

Состав, мас. ч. / Composition, pts. wt.	Отвердитель / Hardener	Содержание отвердителя, мас. ч. / Hardener content, pts. wt.	Прочность при сжатии, МПа / Compressive strength, MPa	Удельная ударная вязкость, кДж/м ² / Specific impact strength, kJ/m ²
Смола ЭД-20 – 100 / ED-20 resin – 100;	Полиоксиэтилированный триэтаноламин / Polyoxyethylated triethanolamine	10	96	5,0
Изопропиловый спирт – 10 / Isopropyl alcohol – 10;		15	107	5,42
Маршалит – 100 / Marshallit – 100;		20	106	5,36
Кварцевый песок – 250 / Quartz sand – 250		25	101	5,12
		30	95	4,75
Смола ЭД-20 – 100 / ED-20 resin – 100;	Смесь полиэтиленполиамин и кубовых остатков этилкарбитола / A mixture of polyethylene polyamine and still residues of ethylcarbitol	7,5	106	–
Портландцемент – 100 / Portland cement – 100;		10	109	
Кварцевый песок – 250 / Quartz sand – 250		15	92	
		20	85	

И с т о ч н и к: выполнено И.Я. Харченко, А.И. Харченко, А.И. Панченко, В.Т. Ерофеевым,

И.Т. Мирсаяповым, В.Г. Хозиным, О.В. Таракановым, Е.В. Завалишиным

S o u r c e: made by I.Ya. Kharchenko, A.I. Kharchenko, A.I. Panchenko, V.T. Erofeev,

I.T. Mirsayapov, V.G. Khozin, O.V. Tarakanov, E.V. Zavalishin

Высоконаполненные составы, приведенные в табл. 1, пригодны для усиления скальных оснований, в которых имеются трещины большого размера. В других случаях, а именно при трещинах малого размера, используются низковязкие ненаполненные составы.

Составы ненаполненных эпоксидных композиций оптимизированы нами по показателям упруго-прочностных характеристик. Оптимизационные исследования проводились с помощью плана эксперимента вида ПФЭ 2². Были приняты следующие факторы на уровнях варьирования (–1 +1): X_1 — количество отвердителя (9 и 12 мас. ч.), X_2 — количество добавки-разжижителя (10 и 20 мас. ч.). Количественные значения факторов приняты на 100 мас. ч. связующего.

Упруго-прочностные характеристики эпоксидных композиций определялись на образцах-балочках размером 20×20×70 мм. В качестве связующего использовали эпоксидную смолу марки ЭД-20, а в качестве отвердителя — полиэтиленполиамин. В качестве разжижающей добавки применяли бензин марки АИ-92. Композиции готовили совместным перемешиванием компонентов в миксере в течение 120 с. Порядок приготовления образцов из клеевых и пропиточных композиций был принят следующий: эпоксидное связующее перемешивали вначале с разжижающей добавкой, после чего в смесь вводили отвердитель (вязкость приготовленных композиций контролировали вискозиметром типа ВЗ-246 с диаметром воронки 5 мм). Полученные смеси укладывали в формы. Уплотнение образцов производили на встряхивающем столике при 30 ударах и частоте 1 удар в секунду. Образцы твердели в сушильном шкафу при температуре 80 °С в течение 6 ч.

После испытания образцов и статистической обработки результатов эксперимента получены следующие модели упруго-прочностных характеристик составов:

$$R_b^M = 52,16 + 16,22X_1 - 2,72X_2, \quad (1)$$

$$R_{bt}^M = 14,88 + 10,29X_1 - 3,17X_2, \quad (2)$$

$$E_0^M = 1892,8 + 379,7X_1 - 151,9X_2, \quad (3)$$

где R_b^M , R_{bt}^M и E_0^M — пределы прочности при сжатии, растяжении при изгибе и начальный модуль упругости матриц, МПа.

По уравнениям регрессии построены графические зависимости изменения свойств композитов от выбранных факторов и уровней их варьирования (рис. 1), из которых следует, что прочность эпоксидных композиций при сжатии и изгибе в пределах плана эксперимента изменяется соответственно в пределах 33,2–71,1 и 1,4–28,3 МПа, модуль упругости — 1 361–2 424 МПа, вязкость — 55–170 с.

На основе осуществленных исследований для проведения дальнейших опытов выбраны составы ненаполненных композиций различной вязкости, основные характеристики которых приведены в табл. 2.

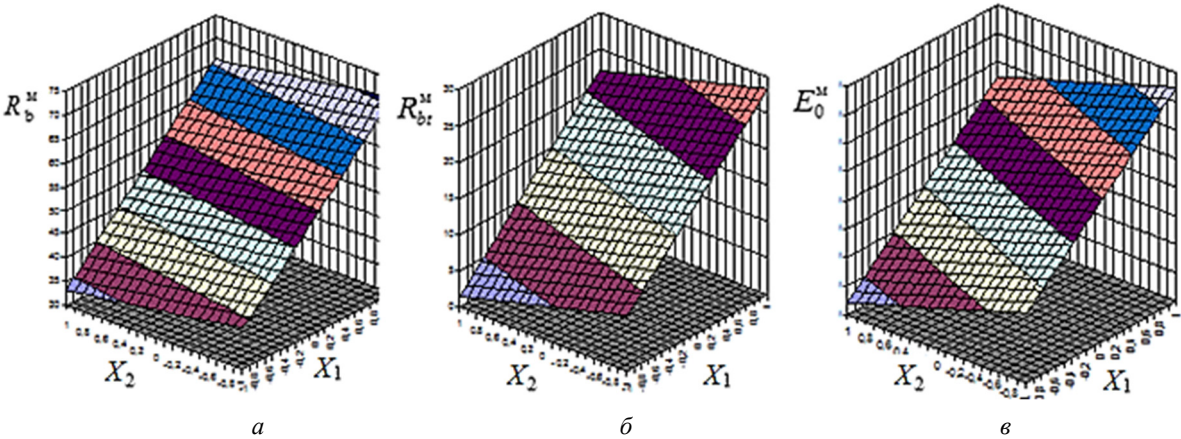


Рис. 1. Зависимости предела прочности при сжатии:

a — предела прочности при изгибе; b — начального модуля упругости;
 c — ненаполненных эпоксидных композитов, МПа;
 X_1 — содержание ПЭПА; X_2 — содержание бензина

И с т о ч н и к: выполнено И.Я. Харченко, А.И. Харченко, А.И. Панченко,
В.Т. Ерофеевым, И.Т. Мирсаяповым, В.Г. Хозиным, О.В. Тарakanовым, Е.В. Завалишиным

Figure 1. Compressive strength relationships:

a — bending strength; b — initial modulus of elasticity; c — unfilled epoxy composites, MPa;
 X_1 is the content of PEPA, X_2 is the content of gasoline

S o u r c e: made by I.Ya. Kharchenko, A.I. Kharchenko, A.I. Panchenko,
V.T. Erofeev, I.T. Mirsayapov, V.G. Khozin, O.V. Tarakanov, E.V. Zavalishin

Таблица 2 / Table 2

Составы и основные характеристики пропиточных матриц /
Compositions and main characteristics of impregnation matrices

Обозначение композиций / Naming of compositions	Содержание в составах, мас. ч. / Content in the compositions, pts. wt.	Физико-механические показатели / Physical and mechanical parameters			
		R_b^M , МПа / МПа	R_{bt}^M , МПа / МПа	E_0^M , МПа / МПа	L_0^M , с / s
M1	ЭД-20 – 100 / ED-20 – 100 ПЭПА – 10 / PEPA – 10 бензин Аи-92 – 5 / AI-92 gasoline – 5	81,6	36,3	3030	159
M2	ЭД-20 – 100 / ED-20 – 100 ПЭПА – 10 / PEPA – 10 бензин Аи-92 – 7,5 / AI-92 gasoline – 7.5	74,8	36,0	2920	111
M3	ЭД-20 – 100 / ED-20 – 100 ПЭПА – 10 / PEPA – 10 бензин Аи-92 – 10 / AI-92 gasoline – 10	68,0	35,8	2750	69

И с т о ч н и к: выполнено И.Я. Харченко, А.И. Харченко, А.И. Панченко, В.Т. Ерофеевым,
И.Т. Мирсаяповым, В.Г. Хозиным, О.В. Тарakanовым, Е.В. Завалишиным
S o u r c e: made by I.Ya. Kharchenko, A.I. Kharchenko, A.I. Panchenko, V.T. Erofeev,
I.T. Mirsayapov, V.G. Khozin, O.V. Tarakanov, E.V. Zavalishin

В отдельных случаях требуется, чтобы инъекционные составы были способны отверждаться во влажных условиях, а также непосредственно в воде. С учетом полученных ранее данных нами была проведена оптимизация составов эпоксидных композитов на аминосланцефенольном отвердителе с применением различных пластификаторов (табл. 3).

Таблица 3 / Table 3

**Свойства эпоксидных композитов с различными пластификаторами /
Properties of epoxy composites with different plasticizers**

Характеристики / Specifications	Показатели составов на основе связующих / Parameters of compositions based on binders				
	ЭД-20 / ED-20	К-153 / K-153	К-115 / K-115	ЭКР-22 / EKR-22	ЭИС-1 / EIS-1
Предел прочности, МПа / Ultimate strength, MPa					
При сжатии / In compression	120,8	86,8	119,9	92,5	111,2
При изгибе / In bending	42,1	47,1	49,3	44,2	–
При растяжении / In tension	13,2	16,1	15,6	14,3	–
Модуль упругости, МПа / Modulus of elasticity, MPa	8227	5736	6569	4168	5553
Удельная ударная вязкость, кДж/м / Specific impact strength, kJ/m	4,9	7,3	8,1	6,5	–

И с т о ч н и к: выполнено И.Я. Харченко, А.И. Харченко, А.И. Панченко, В.Т. Ерофеевым,
И.Т. Мирсаяповым, В.Г. Хозиным, О.В. Таракановым, Е.В. Завалишиным

S o u r c e: made by I.Ya. Kharchenko, A.I. Kharchenko, A.I. Panchenko, V.T. Erofeev,
I.T. Mirsayapov, V.G. Khozin, O.V. Tarakanov, E.V. Zavalishin

Как видно из результатов исследования, эпоксидные композиты с введенными в их состав пластификаторами: К-115 (с олигоэфиром МГФ-9); К-153 (с олигоэфиром МГФ-9 и тиоколом); ЭКР-22 (с изомеризованной окситерпеновой смолой и окисленным скипидаром) — способствуют повышению прочности эпоксидных композитов при изгибе, растяжении и существенно повышают ударную прочность.

В последнее время становятся актуальными вопросы повышения биологической стойкости различных материалов [26; 27]. Обеспечение долговечной работы композитов на основе жидкого стекла невозможно без знания их работоспособности в средах, оптимизации структуры и составов материалов различного назначения. Следует отметить, что данные о биологической стойкости жидкостекольных композитов в литературе являются малочисленными. При проведении мероприятий, связанных с защитой зданий от биоповреждений, требуется разработка биоцидных пропиточных составов для снижения микробиологической зараженности грунтов, контактирующих с фундаментами и другими конструкциями зданий и сооружений.

В данном случае эффективными являются жидкостекольные композиты [27]. В отечественной и зарубежной практике наиболее применяемым отвердителем жидкого стекла является кремнефтористый натрий. Особенность кремнефтористого натрия заключается в том, что он не только взаимодействует со щелочью, понижая ее содержание, но и выделяет при разложении кремнекислоту, которая заметно уплотняет твердеющую систему, понижая пористость. К тому же известно, что он обладает и хорошим фунгицидным действием. Также известно, что при подкислении среды (уменьшении pH) развитие отдельных видов микроорганизмов прекращается. Учитывая это, можно предположить, что при выделении кремниевой кислоты среда становится более кислой, и это может оказать влияние на рост и размножение микроорганизмов на материале. Согласно литературным данным, оптимальная концентрация кремнефтористого натрия для получения плотных, водостойких и кислотостойких материалов составляет примерно 15 % от массы жидкого стекла. С целью проверки теоретических предположений о возможности повышения биостойкости жидкостекольных композитов за счет регулирования количественного содержания кремнефтористого натрия были проведены исследования составов,

в которых содержание кремнефтористого натрия варьировалось в пределах от 15 до 20 мас. ч. на 100 мас. ч. жидкого стекла. Результаты испытаний образцов на биостойкость приведены в табл. 4.

Анализ результатов испытаний показывает, что при увеличении содержания в составах композитов кремнефтористого натрия более 19 мас. ч. на 100 мас. ч. вяжущего жидкостекольные материалы становятся фунгицидными. Среди различных способов закрепления значительное место занимают методы силикатизации грунтов. С целью исследования поведения грунтов с пропитанной структурой и без проведения пропитки были проведены исследования образцов в стандартной биологической среде. При проведении исследований рассматривали песок фракций 0,14–0,315 и 0,63–1,25 мм. В качестве пропиточной композиции применяли жидкое стекло, которое смешивали с кремнефтористым натрием. Количество кремнефтористого натрия было принято равным 20 мас. ч. на 100 мас. ч. вяжущего. Пропитка грунтов осуществлялась следующим способом: песчаный грунт различной крупности пофракционно закладывался в формы размером 1×1×3 см и затем получившиеся образцы прямо в формах пропитывались жидкостекольными композициями. Пропитка осуществлялась без применения давления. Далее получившиеся образцы испытывали в средах микроскопических грибов. Результаты испытаний приведены в табл. 5.

Анализируя данные табл. 5, можно сделать вывод, что при пропитке песчаных грунтов жидкостекольными композициями образцы грунтов становятся фунгицидными.

Таблица 4 / Table 4

**Влияние кремнефтористого натрия на биостойкость жидкостекольных композитов /
The effect of sodium silicofluoride on the biological resistance of liquid glass composites**

Количество отвердителя, мас.ч. / Amount of hardener, pts. wt.	Оценка роста грибов, в баллах / Assessment of fungus growth, in points		Характеристика по ГОСТу / Characteristics according to GOST
	Метод 1 / Method 1	Метод 2 / Method 2	
15	0	2	Грибостоек / Fungus-resistant
16	0	2	Грибостоек / Fungus-resistant
17	0	2	Грибостоек / Fungus-resistant
18	0	2	Грибостоек / Fungus-resistant
19	0	1	Фунгициден / Fungicidal
20	0	0; R = 5	Фунгициден / Fungicidal

И с т о ч н и к: выполнено И.Я. Харченко, А.И. Харченко, А.И. Панченко, В.Т. Ерофеевым,
И.Т. Мирсаяповым, В.Г. Хозиным, О.В. Тарakanовым, Е.В. Завалишиным

S o u r c e: made by I.Ya. Kharchenko, A.I. Kharchenko, A.I. Panchenko, V.T. Erofeev,
I.T. Mirsayapov, V.G. Khozin, O.V. Tarakanov, E.V. Zavalishin

Таблица 5 / Table 5

**Влияние пропитки песчаных грунтов различного зернового состава на биостойкость /
The effect of impregnation of sandy soils of various grain composition on biological resistance**

Вид грунта / Type of soil	Оценка роста грибов, в баллах / Assessment of fungus growth, in points		Характеристика по ГОСТу / Characteristics according to GOST
	Метод 1 / Method 1	Метод 3 / Method 3	
Песок крупностью 0,63–1,25 мм / Sand with a grain size of 0.63–1.25 mm	0	0; R = 3	Фунгициден / Fungicidal
Песок крупностью 0,14–0,315 мм / Sand with a grain size of 0.14–0.315 mm	0	0; R = 15	–

И с т о ч н и к: выполнено И.Я. Харченко, А.И. Харченко, А.И. Панченко, В.Т. Ерофеевым,
И.Т. Мирсаяповым, В.Г. Хозиным, О.В. Тарakanовым, Е.В. Завалишиным

S o u r c e: made by I.Ya. Kharchenko, A.I. Kharchenko, A.I. Panchenko, V.T. Erofeev,
I.T. Mirsayapov, V.G. Khozin, O.V. Tarakanov, E.V. Zavalishin

Большая часть инъекционных работ (закрепление и консолидация грунта, создание противофильтрационных завес) в строительстве производится инъекционными смесями на минеральной основе ввиду их более низкой стоимости, достаточно высокой долговечности и технологичности, экологической безопасности и широкой доступности.

Эффективной инъекционной смесью для устройства ПФЗ при защите от КСО является инъекционная смесь «ПФС+», которую следует рассматривать в качестве альтернативы инъекционным смесям на основе бентонита, полимеров или жидких стекол. На основании выполненных исследований установлены прочностные (см. рис. 1) и реологические (рис. 2) характеристики «ПФС+», которые определяют эффективные области его применения. Из графиков (рис. 2) видно, что инъекционная смесь «ПФС+» является быстротвердеющей. На третьи сутки она набирает около 80–90 % прочности от прочности в возрасте 28 сут.

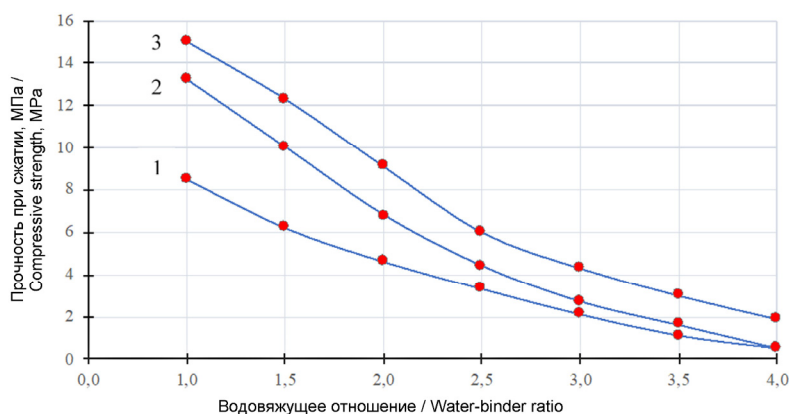


Рис. 2. Влияние водовяжущего отношения на прочность при сжатии смеси «ПФС+», соответственно через 24 ч (1); 3 сут (2); 28 сут (3)
И с т о ч н и к: выполнено И.Я. Харченко, А.И. Харченко, А.И. Панченко, В.Т. Ерофеевым, И.Т. Мирсаяповым, В.Г. Хозиным, О.В. Тарakanовым, Е.В. Завалишиным

Figure 2. The effect of the water-binder ratio on the compressive strength of the “PFS+” mixture, respectively, after 24 hours (1); 3 days (2); 28 days (3)
S o u r c e: made by I.Ya. Kharchenko, A.I. Kharchenko, A.I. Panchenko, V.T. Erofeev, I.T. Mirsayapov, V.G. Khozin, O.V. Tarakanov, E.V. Zavalishin

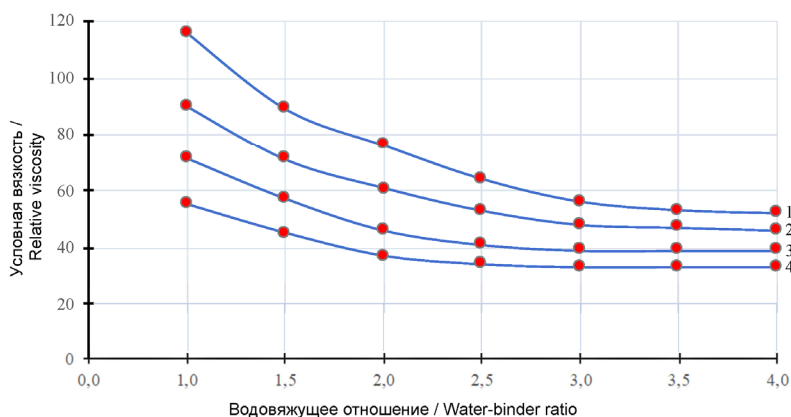


Рис. 3. Влияние водовяжущего отношения на условную вязкость «ПФС+»: 1, 2, 3, 4 вязкость соответственно через 90 мин; 60 мин; 30 мин и после приготовления
И с т о ч н и к: выполнено И.Я. Харченко, А.И. Харченко, А.И. Панченко, В.Т. Ерофеевым, И.Т. Мирсаяповым, В.Г. Хозиным, О.В. Тарakanовым, Е.В. Завалишиным

Figure 3. The effect of the water-binder ratio on the relative viscosity of “PFS+”: 1, 2, 3, 4 viscosity, respectively, after 90 min; 60 min; 30 min and after preparation
S o u r c e: made by I.Ya. Kharchenko, A.I. Kharchenko, A.I. Panchenko, V.T. Erofeev, I.T. Mirsayapov, V.G. Khozin, O.V. Tarakanov, E.V. Zavalishin

При устройстве ПФЗ в трещиноватых породах и песчаных грунтах применяются растворы с водовязущим отношением В/В = 1,0...2,5, в зависимости от проектной прочности. На основании экспериментальных исследований установлено, что «ПФС+» с водовязущим отношением В/В = 2,5 и более обладает условной вязкостью по воронке Марша, сопоставимой с условной вязкостью воды (рис. 3).

Это обеспечивает ее равномерное распределение в структуре трещиноватых пород с последующим затвердеванием и надежной кольматацией трещин с шириной раскрытия до 0,5 мм. Этим обеспечивается практически полная водонепроницаемость трещиноватых пород, что исключает дальнейшее развитие суффозионных процессов и образование карстовых полостей в основании сооружений. Установлено улучшение физико-химических и физико-механических свойств цементных композитов от соотношения воды, цемента и возраста [28].

Инъекционная смесь на основе «ПФС+» может нагнетаться как с применением односторонних, так и двусторонних разжимных пакеров по манжетной технологии с целью формирования грунтобетонных массивов диаметром до 1,2 м и более в зависимости от вида грунта.

3. Инъекционные смеси для уплотнения и упрочнения песчаных грунтов и трещиноватых горных пород

В случае необходимости формирования ПФЗ в зоне песчаных грунтов и трещиноватых пород с шириной раскрытия трещин менее 0,5 мм используется инъекционное закрепление по манжетной технологии с применением особо тонкодисперсных минеральных, как правило, композиционных [29], вяжущих или микроцементов в режиме пропитки.

Большая часть инъекционных работ, связанных с уплотнением и упрочнением песчаных грунтов и трещиноватых горных пород в строительстве, производится также инъекционными смесями на минеральной основе ввиду их более низкой стоимости, достаточно высокой долговечности и технологичности, экологической безопасности и широкой доступности.

Инъекционная технология цементационного формирования грунтового массива основана на пропитке структуры грунта в режиме низконапорной подачи при малых давлениях (до 0,5 МПа). При этом в процессе нагнетания инъекционная смесь полностью заполняет поровую структуру грунта, кроме закрытых пор, без нарушения его природной структуры. При случаях, когда закрепляемый грунт находится в состоянии полного водонасыщения, инъекционная смесь в процессе пропитки вытесняет грунтовую воду, обеспечивая формирование грунтобетонного массива, по своим показателям сравнимого со строительными растворами и мелкозернистыми бетонами.

Инъекционные составы, используемые для пропитки, готовятся на водном растворе специальных минеральных вяжущих гидравлического типа твердения — ОТДВ, имеющих заданный химико-минералогический и гранулометрический состав. Такие показатели ОТДВ обеспечиваются при использовании специального технологического оборудования, включающего в себя:

- помольный комплекс (высокоскоростной диспергатор, дозирующий и смесительный блоки для производства ОТДВ);
- турбулентный смеситель и активатор готового инъекционного раствора;
- насосное оборудование с автоматической корректировкой давления и расхода в режиме инъектирования в соответствии с заданными проектными параметрами;
- манжетную технологию с использованием комплекта инъекторов труб и пакеров двухстороннего типа разжима.

Значительным резервом повышения технико-экономической эффективности работ по уплотнению и упрочнению грунтов по технологии струйной цементации является замена строительного портландцемента на шлаковое вяжущее [30]. Кроме того, целесообразность замены строительного портландцемента на шлаковое вяжущее обусловлена тем, что грунтовые воды в условиях плотной городской застройки обладают повышенной агрессивностью по отношению к цементным бетонам и,

наоборот, могут быть дополнительным активирующим фактором при применении шлаковых вяжущих. Теоретические основы применения активированных шлаков в строительстве изложены в трудах Г. Кюля, Я. Давидовича, В.Г. Глуховского [25; 26]. В частности, Я. Давидович ввел понятие геополимерных систем, основанных на щелочной активации метакеолина с образованием алюмосиликатных полимеров. В настоящее время исследованы и разработаны различные способы активации шлаков и зол, предусматривающих механическое, химическое или механохимическое воздействие на их структуру. Одним из эффективных способов активации доменных гранулированных шлаков является сульфатная активация, основанная на смешивании молотых шлаков и гипса.

Учитывая высокую вероятность развития сульфатной коррозии при инъецировании трещиноватых гипсовых пород, был применен микроцемент «Интроцем» на шлаковой основе и с использованием манжетной технологии. При этом весь расчетный объем инъекционной смеси после окончания процесса инъецирования размещался в капиллярно-пористой структуре грунта, обеспечивая ее уплотнение, упрочнение и полную водонепроницаемость. Инъецирование выполнялось при низком давлении до 8–10 бар, в режиме пропитки, с сохранением природной структуры грунта, что исключает вероятность каких-либо неконтролируемых потерь инъекционной смеси. Гарантируемое формирование сплошности грунтобетонного массива, а также достижение его проектных характеристик обеспечивается управляемым процессом инъецирования, при строгом соблюдении расчетных параметров технологического регламента.

Технология предусматривает формирование водонепроницаемого массива грунта с прочностью при сжатии не менее 2 МПа, глубиной пропитки до 1,2...1,8 м (рис. 4). Для обеспечения сплошности ПФЗ необходимо выполнять инъекцию структуры грунта в режиме пропитки с применением раствора низкой вязкости на основе особо тонкодисперсных минеральных вяжущих или микроцементов с дисперсностью не более $D_{95} < 6$ мкм. Инъекционная смесь приготавливалась с В/В = 1,5...2,5, с вязкостью по воронке Марша 32...34 с и седиментацией не более 5 %, со сроком загустевания после завершения инъекционных работ в период до 90 мин.

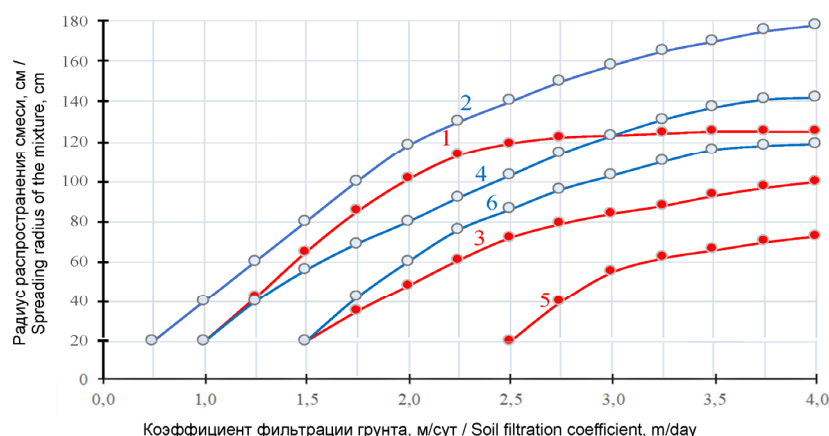


Рис. 4. Распределение инъекционной смеси «Интроцем» в структуре грунта в зависимости от его фильтрационной способности и дисперсности вяжущего:

1, 3, 5 — без предварительной обработки грунта; 2, 4, 6 — с предварительной обработкой грунта инъекцией воды с ПАВ; инъекционная смесь при В/В = 3,0; 1, 2 — Интроцем-экстра; 3, 4 — Интроцем-ультра; 5, 6 — Интроцем-стандарт

Источники: выполнено И.Я. Харченко, А.И. Харченко, А.И. Панченко, В.Т. Ерофеевым, И.Т. Мирсапавым, В.Г. Хозиным, О.В. Таракановым, Е.В. Завалишиным

Figure 4. Distribution of the “Introcem” injection mixture in the soil structure depending on its filtration capacity and binder fineness:

1, 3, 5 — no soil pretreatment; 2, 4, 6 — soil pretreatment by injection of water with surfactants; injection mixture at water-binder ratio = 3.0; 1, 2 — Introcem-extra; 3, 4 — Introcem-ultra; 5, 6 — Introcem-standard

Source: made by I.Ya. Kharchenko, A.I. Kharchenko, A.I. Panchenko, V.T. Erofeev, I.T. Mirsayapov, V.G. Khozin, O.V. Tarakanov, E.V. Zavalishin

«Интроцем» является экологически чистым продуктом, совместимым по минеральному составу с грунтом. В зависимости от дисперсности частиц, содержащихся в количестве 95 % от массы вяжущего, «Интроцем» классифицируется на три вида: «Интроцем-Экстра» при $D_{95} \leq 5,5$; «Интроцем-Ультра» при $D_{95} \leq 9,0$; «Интроцем-Стандарт» при $D_{95} \leq 15,5$.

На основании комплексных лабораторных исследований определены эффективные области применения инъекционных смесей на основе микроцемента «Интроцем», которые представлены в табл. 6.

Таблица 6 / Table 6

**Применение инъекционных смесей на основе микроцемента
«Интроцем» для устранения фильтрации воды через трещиноватые породы /
The use of injection mixtures based on Introcom microcement
to eliminate water filtration through fractured rocks**

Ширина раскрытия трещин, мм / Crack opening width, mm	Интроцем-Экстра / Introcom-Extra	Интроцем-Ультра / Introcom-Ultra	Интроцем-Стандарт / Introcom-Standard
0,1... 0,7 мм / mm	В/Ц / Water/cement = 1,0÷2,5 Рн / Strength $\leq 1,5$ МПа / MPa	Нет / No	Нет / No
0,8... 1,5 мм / mm	В/Ц / Water/cement = 1,0÷2,5 Рн / Strength $\leq 1,2$ МПа / MPa	В/Ц / Water/cement = 1,0÷2,5 Рн / Strength $\leq 1,2$ МПа / MPa	Нет / No
1,5... 3,0 мм / mm	Нет / No	Нет / No	В/Ц / Water/cement = 1,0÷2,5 Рн / Strength $\leq 1,0$ МПа / MPa

И с т о ч н и к: выполнено И.Я. Харченко, А.И. Харченко, А.И. Панченко, В.Т. Ерофеевым,
И.Т. Мирсаяповым, В.Г. Хозиным, О.В. Таракановым, Е.В. Завалишиным
S o u r c e: made by I.Ya. Kharchenko, A.I. Kharchenko, A.I. Panchenko, V.T. Erofeev,
I.T. Mirsayapov, V.G. Khozin, O.V. Tarakanov, E.V. Zavalishin

Эксплуатационные свойства шлакощелочных композиций можно улучшить за счет введения модифицирующих добавок [30].

Технологии однокомпонентной (Jet-1) и двухкомпонентной (Jet-2) цементации приемлемы для широкого спектра грунтов [31]. Они обеспечивают формирование свай диаметром 0,6–0,8 и 1,8–2,0 м соответственно. Однако в обоих случаях прочность грунтоцемента не превышает, как правило, 1–3 МПа. Кроме того, данные технологии не обеспечивают достаточную плотность и водонепроницаемость. Эффект достигается в случае применения комбинированных методов цементации.

Комбинация технологии двухкомпонентной струйной цементации (Jet-2) с манжетной инъекционной технологией цементации грунтов, получившей название «Super-Jet», имеет целью совместить высокую интенсивность производства работ, являющуюся существенным преимуществом двухкомпонентной струйной цементации, с необходимостью придать закрепляемому массиву повышенную прочность и непроницаемость, которая гарантированно достигается применением манжетной технологии с использованием инъекционных смесей на основе микроцементов.

Результаты полевых испытаний, а также опыт практического применения технологии «Super-Jet», при различных геотехнических условиях и проектных решениях, показал, что прочность грунтобетонного массива, сформированного по данной технологии, может достигать 15 МПа, а при устройстве противофильтрационных завес обеспечивается их полная водонепроницаемость. Причем усиленная таким образом противофильтрационная завеса может рассматриваться в качестве опорного элемента для различного вида фундаментов надземных конструкций.

4. Инъекционные смеси для ликвидации карстовых полостей

С целью ликвидации карстовых разуплотнений эффективным является применение специальной закладочной инъекционной смеси «ЗИС» (рис. 5), которая изготавливается на основе минерального композиционного вяжущего и имеет следующие отличительные свойства:

- инъекционная смесь легко перекачивается и сохраняет свою подвижность в период до 120 мин;
- после завершения инъекционных работ быстро загустевает и приобретает структурную прочность через 24 ч около 0,1...0,15 МПа;
- при твердении во влажных условиях в период до 6 мес. прочность увеличивается до 1,5...2,0 МПа и приобретает свойства тугопластичной глины.

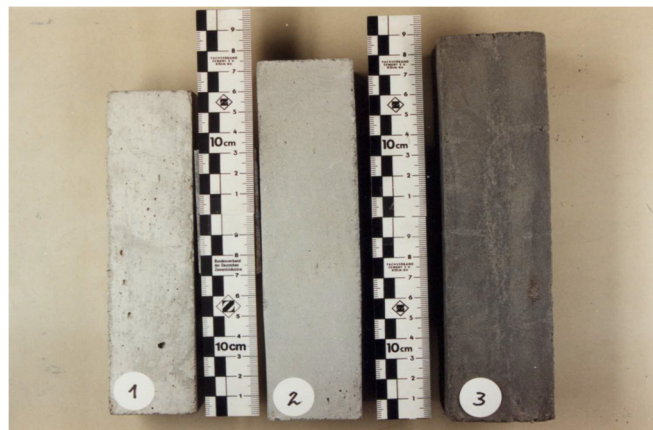


Рис. 5. Инъекционные смеси для ликвидации карстовых разуплотнений:

1 — инъекционная смесь на основе композиционного вяжущего без расширяющейся добавки с плотной структурой (ЗИС-П); 2 — инъекционная смесь на основе композиционного вяжущего с расширяющейся добавкой с плотной структурой (ЗИС-ПР). Объемное расширение 7–10 %; 3 — легкая инъекционная смесь на основе композиционного вяжущего с расширяющейся добавкой и мелкопористой структурой (ЗИС-ЛР). Объемное расширение до 15–20 %

И с т о ч н и к: выполнено И.Я. Харченко, А.И. Харченко, А.И. Панченко, В.Т. Ерофеевым, И.Т. Мирсаяповым, В.Г. Хозиным, О.В. Таракановым, Е.В. Завалишиным

Figure 5. Injection mixtures for the elimination of karst unconsolidation:

1 — injection mixture based on a composite binder without an expanding additive with a dense structure (ZIS-P); 2 — injection mixture based on a composite binder with an expanding additive with a dense structure (ZIS-PR). Volumetric expansion of 7–10%; 3 — light injection mixture based on a composite binder with an expanding additive and a fine-pored structure (ZIS-LR). Volumetric expansion up to 15–20%

S o u r c e: made by I.Ya. Kharchenko, A.I. Kharchenko, A.I. Panchenko, V.T. Erofeev, I.T. Mirsayapov, V.G. Khozin, O.V. Tarakanov, E.V. Zavalishin

Подбор состава инъекционной смеси «ЗИС» выполняется в лабораторных условиях в соответствии с проектными требованиями. В процессе производства работ определяются прочность, реологические параметры смеси, седиментационная устойчивость, величина усадки и расширения. Контроль соответствия фактического состояния заполненного карстового пространства проектным требованиям выполняется с применением методов прямого отбора проб и кернов, а также с применением геофизических и сейсмоакустических методов определения сплошности сформированного массива.

Для сплошного закрепления массива шаг скважин следует назначать исходя из условия взаимного пересечения зон закрепления смежных скважин на величину не менее 10 % расчетного радиуса закрепления. Нагнетание инъекционного раствора проводят непрерывно до наступления отказа, за который следует принимать либо полное прекращение поглощения раствора, либо снижение удельного расхода раствора до установленной проектом величины при проектном давлении отказа. При отсутствии особых требований в проекте за отказ в поглощении раствора рекомендуется принимать снижение расхода раствора до 2 л/мин при проектном давлении до 15 бар.

Для ликвидации карстовых разуплотнений и устройства противофильтрационных завес возможно применение смесей реакционно-порошковых бетонов с использованием микро- и нанодобавок и мелких песков.

Смеси готовятся на основе цемента с эффективными суперпластификаторами. Для повышения эффективности в состав смеси, в зависимости от расхода цемента, вводится один или несколько

микронаполнителей и микрокремнезем. В порошково-активированных смесях нового поколения к цементу добавляется до 100 % (от массы цемента) тонкомолотых порошков, полученных на основе плотных и прочных горных пород (гранит, диабаз, базальт). При использовании совместно с микронаполнителями микрокремнезема его частицы агрегируются на зернах цемента и микронаполнителя, создавая дополнительный объем реологически активной матрицы, что способствует снижению водопотребности смеси и уплотнению структуры.

При использовании тонкозернистых и молотых песков фракции $0,1\div0,5\div0,16\div0,63$ мм также увеличивается суммарный объем тонкодисперсной матрицы, которая служит для перемещения крупнозернистого песка и повышения пластичности смесей (табл. 7) [32].

Таблица 7 / Table 7

**Кинетика твердения реакционно-порошковых смесей с нанодобавками /
Kinetics of hardening of reaction powder mixtures with nano additives**

Состав / Composition	Расход материала на 1 м ³ (кг) / Material consumption per 1 m ³ (kg)	В/Ц / Water/Cement	$\rho_{\text{вал}}, \text{кг/м}^3 / \rho_{\text{wet}}, \text{kg/m}^3$	Прочность при сжатии $R_{\text{сж}}, \text{МПа} / \text{Compressive strength } R_{\text{comp}}, \text{MPa}$		
				1 сут / 1 day	7 сут / 7 days	28 сут / 26 days
Цемент белый М 500 / White cement M 500	658	0,38	2233	39,6	81,8	122
ГП Melflux 2651F 0,8 % от ПЦ / HP Melflux 2651F, 0.8% of PC	5,3					
Песок молотый $S_{\text{уд}} = 3200 \text{ см}^2/\text{г} / \text{Ground sand } S_{\text{sp}} = 3200 \text{ cm}^2/\text{g}$	272,4					
Микроволластонит $0,5\div97, \rho = 2,9 \text{ г/см}^3 / \text{Microwollastonite } 0.5\div97, \rho = 2.9 \text{ g/cm}^3$	58					
Песок немолотый Фр. $0,16\div0,63 / \text{Non-ground sand Fr. } 0.16\div0.63$	921					
Микрокремнезем / Silica	66					
Вода / Water	250					

И с т о ч н и к: выполнено И.Я. Харченко, А.И. Харченко, А.И. Панченко, В.Т. Ерофеевым, И.Т. Мирсаяповым, В.Г. Хозиным, О.В. Таракановым, Е.В. Завалишиным

S o u r c e: made by I.Ya. Kharchenko, A.I. Kharchenko, A.I. Panchenko, V.T. Erofeev, I.T. Mirsayapov, V.G. Khozin, O.V. Tarakanov, E.V. Zavalishin

Применение реакционно-активных песчаных литых бетонных смесей позволяет получать прочность до 40 МПа, а через 28 сут до 120 МПа. Кроме того, применение порошково-активированных бетонов способствует повышению показателей трещиностойкости.

5. Заключение

1. Безопасная эксплуатация оснований в сложных инженерно-геологических условиях невозможна без учета карстово-суффозионных процессов. Геотехнические противокарстовые мероприятия осуществляются путем преобразования свойств грунтового массива или устройства защитного экрана.

2. Рассматриваются инъекционные технологии для устранения карстово-суффозионной опасности и просадочности грунтов в основаниях зданий и сооружения. При этом для устройства противофильтрационных завес предлагаются технологии струйной цементизации, манжетной технологии, а также их комбинации.

3. Показано, что разработанные инъекционные смеси на минеральной основе являются высокотехнологичными, а грунтобетон с противофильтрационной завесой и уплотненных карстовых пород является более долговечным по сравнению с грунтом, уплотненными инъекционными смесями на полимерной и жидкостекольной основе, а также на основе бентонитов.

4. Показаны области эффективного использования полимерных и жидкостекольных пропиточных композиций. Первые рекомендуются для оперативного закрепления оснований, а вторые — для повы-

шения биостойкости грунтов. Экспериментально подобраны оптимальные составы полимерных и жидкостекольных композиций с различной вязкостью. Показано, что стоимость пропиточных составов на основе цементных вяжущих является более низкой.

5. Минеральные смеси на основе цементов являются быстротвердеющими, на третьи сутки они набирают около 80–90 % прочности от прочности в возрасте 28 сут. С их помощью обеспечивается практически полная водонепроницаемость трещиноватых пород, что исключает дальнейшее развитие суффозионных процессов и образование карстовых полостей в основании сооружений. Для случаев развития сульфатной коррозии показана эффективность применения микроцемента «Интроцем» на шлаковой основе при использовании в манжетной технологии.

6. Разработано три вида композиций «Интроцем», отличающихся дисперсностью наполнителя. Для ликвидации карстовых разуплотнений наиболее предпочтительным является инъекционная смесь «ЗИС», изготавливаемая на основе минерального композиционного вяжущего и сохраняющая свою подвижность в течение 120 мин.

7. Показана также эффективность 2-компонентной струйной цементации, получившей название «Super-Jet» позволяющей при необходимости прочность и непроницаемость. Опыт использования технологии «Super-Jet» с применением микроцементов при различных геотехнических условиях показал, что прочность грунтобетонного массива может достигать 15 МПа, а при устройстве противофильтрационных завес обеспечивает их полную водонепроницаемость.

8. Значительное повышение прочности грунтовых оснований достигается при их пропитке порошково-активированными композициями.

Список литературы

1. Тер-Мартirosян А.З., Соболев Е.С. Безопасность эксплуатации оснований зданий и сооружений при динамическом воздействии // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 5 (104). С. 537–544. <http://doi.org/10.22227/1997-0935.2017.5.537-544>
2. Latypov A., Zharkova N., Ter-Martirosyan A. Calculation of the stress-strain state of soil massifs with karst-suffusion cavities // OP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 365. Article no. 042058. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/365/4/042058>
3. Glushkov A., Glushkov V., Glushkov I. Features of the construction of buildings in karst areas // E3S Web of Conferences. 2021. Vol. 263. Article no. 02043. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126302043>.
4. Kuzichkin O.R., Vasilyev G.S., Grecheneva A.V., Mikhaleva E.V., Baknin M.D., Surzhik D.I. Application of phase-metric compensation method for geoelectric control of near-surface geodynamic processes // Bulletin of Electrical Engineering and Informatics. 2020. Vol. 9. No. 3. P. 898–905. <http://doi.org/10.11591/eei.v9i3.1727>
5. Аникеев А.В. Провалы и воронки оседания в карстовых районах: механизмы образования, прогноз и оценка риска. Москва : РУДН, 2017. 328 с. ISBN 978-5-209-07483-0
6. Аникеев А.В. Провалы и оседания земной поверхности в карстовых районах: моделирование и прогноз: дис. ... канд. геолого-минералогических наук. Москва, 2014. 142 с.
7. Кутепов В.М., Козлякова И.В., Анисимова Н.Г., Еремينا О.Н., Кожевникова И.А. Оценка карстовой и карстово-суффозионной опасности в проекте крупномасштабного геологического картирования г. Москвы // Геоэкология. Инженерная геология, гидрогеология, геокриология. 2011. № 3. С. 217–228. EDN: NUIKPN
8. Меркин В.Е., Маковский Л.В., Гарбер В.А. Проектирование и строительство тоннелей в закарстованных грунтах. Москва : ТИМР, 1994. Вып. 3. 61 с.
9. Рагозин А.Л., Елкин В.А. Региональная оценка карстовой опасности и риска // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. 2003. № 4. С. 33–52.
10. Родионов Н.В. Карст Европейской части СССР, Урала и Кавказа. Москва : Госгеолтехиздат, 1963. 174 с.
11. Саваренский И.А., Миронов Н.А. Руководство по инженерно-геологическим изысканиям в районах развития карста. Москва : Изд-во ПНИИИС Госстроя России, 1995. 167 с.
12. Толмачев В.В. Вероятностный подход при оценке устойчивости закарстованных территорий и проектировании противокарстовых мероприятий // Инженерная геология. 1980. № 3. С. 98–107. EDN: YKWQWZ
13. Толмачев В.В. О допустимых рисках строительства в карстовых районах // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2007. № 5. С. 19–21. EDN: SLBANV
14. Толмачев В.В. Методы оценки карстовой опасности для строительных целей: состояние и перспективы // Геоэкология. Инженерная геология, гидрогеология, геокриология. 2012. № 4. С. 354–363. EDN: PFFQUD
15. Толмачев В.В., Роїтер Ф. Инженерное карстоведение. Москва : Недра, 1990. 152 с. ISBN: 5-247-01508-8

16. Хоменко В.П. Закономерности и прогноз суффозионных процессов. Москва : ГЕОС, 2003. 216 с. ISBN: 5-89118-320-X
17. Clayton C. Managing Geotechnical Risk: Improving productivity in UK building and construction. London, 2001. 80 p. <https://doi.org/10.1680/mgr.29675>
18. Robin F., Ho K., Lacasse S., Leroi E. A framework for landslide risk assessment and management. 2005. 786 p. <https://doi.org/10.1201/9781439833711-4>
19. Milanović P.T. Geological Engineering in Karst: dams, reservoirs, grouting, groundwater protection, water tapping, tunneling. Belgrade: Zebra, 2000. 347 p.
20. Кочев А.Д., Чертков Л.Г., Зайонц И.Л. Методика и результаты комплексного изучения карстово-суффозионных процессов в г. Москве // Инженерная геология. 1989. № 6. С. 77–94.
21. Tolmachev V., Leonenko M. Experience in collapse risk assessment of building on covered karst landscapes in Russia // Karst Management / ed. by van P. Beynen. Springer, Dordrecht, 2011. P. 75–102. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1207-2_4
22. Панченко А.И., Харченко И.Я., Алексеев С.В. Микроцементы. Москва : Издательство АСВ, 2014. 76 с. ISBN: 978-5-4323-0032-4
23. Ерофеев В.Т., Римшин В.И., Смирнов В.Ф. и др. Армированные каркасные композиты для зданий и сооружений. Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 2015. 360 с. ISBN 978-5-7103-3211-5
24. Erofeev V., Rodin A., Rodina N., Kalashnikov V., Erofeeva I. Biocidal Binders for the Concretes of Unerground Constructions // Procedia Engineering. 2016. Vol. 165. P. 1448–1454. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.878>
25. Erofeev V.T., Zavalishin E.V., Rimshin V.I., Kurbatov V.L., Stepanovich M.B. Frame composites based on soluble glass // Research Journal of Pharmaceutical, Biological and Chemical Sciences. 2016. Vol. 7. No. 3. P. 2506–2517. EDN: WVBFTP
26. Maksimova I., Makridin N., Erofeev V., Barabanov D. Study of the Properties of Water-Hardened Cement Stone Depending on the Water-Cement Ratio and Age // Proceedings of IEEE 2020. ECE 2020. Lecture Notes in Civil Engineering. Springer, Cham, 2021. Vol. 150. P. 192–203. https://doi.org/10.1007/978-3-030-72404-7_20
27. Panchenko A.I., Kharchenko I.Ya., Mirzozan M. Soil strengthening using fine composite binder based on carbide slurry // ICMTME 2020, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 971. Article no. 032032. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/971/3/032032>
28. Aimenov Z.T., Aimenov A.J., Erofeev V.T., Sabitov L.S., Sanyagina Y.A. The effect of modifying additives on the performance properties of slag-alkali binders and concretes // International journal for computational civil and structural engineering. 2024. Vol. 20. No. 1. P. 162–170. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2024-20-1-162-170>
29. Харченко И.Я., Алексеев В.А., Исрафилов К.А., Бетербиев А.С.Э. Современные технологии цементационного закрепления грунтов // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 5 (104). С. 552–558. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2017.5.552-558>
30. Erofeev V., Bobryshev A., Lakhno A., Shafigullin L.N., Khalilov I., Sibgatullin K., Igtisamov R. Theoretical evaluation of rheological state of sand cement composite systems with polyoxyethylene additive using topological dynamics concept // Materials Science Forum. 2016. Vol. 871. P. 96–103. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.871.96>
31. Erofeev V.T., Vatin N.I., Maximova I.N., Tarakanov O.V., Sanyagina Y.A., Erofeeva I.V., Suzdaltsev O.V. Powder-activated concrete with a granular surface texture // International journal for computational civil and structural engineering. 2022. Vol. 18. No. 4. P. 49–61. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-4-49-61>
32. Travush V.I., Karpenko N.I., Erofeev V.T., Vatin N.I., Erofeeva I.V., Maksimova I.N., Kondrashchenko V.I., Kesarijskij A.G. Destruction of powder-activated concrete with fixation of destruction by a laser interferometer // Magazine of Civil Engineering. 2020. Vol. 95. Issue 3. P. 42–48. <https://doi.org/10.18720/MCE.95.4>

References

1. Ter-Martirosyan A.Z., Sobolev E.S. Operating safety of foundations of buildings and structures under dynamic impact. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2017;12(5):537–544. (In Russ.) <http://doi.org/10.22227/1997-0935.2017.5.537-544>
2. Latypov A., Zharkova N., Ter-Martirosyan A. Calculation of the stress-strain state of soil massifs with karst-suffusion cavities. *OP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2018;365:042058. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/365/4/042058>
3. Glushkov A., Glushkov V., Glushkov I. Features of the construction of buildings in karst areas. *E3S Web of Conferences*. 2021;263:02043. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126302043>
4. Kuzichkin O.R., Vasilyev G.S., Grecheneva A.V., Mikhaleva E.V., Baknin M.D., Surzhik D.I. Application of phase-metric compensation method for geoelectric control of near-surface geodynamic processes. *Bulletin of Electrical Engineering and Informatics*. 2020;9(3):898–905. <http://doi.org/10.11591/eei.v9i3.1727>
5. Anikeev A.V. *Sinkholes and sinkholes in karst areas: formation mechanisms, prognosis and risk assessment*. Moscow: RUDN University, 2017. (In Russ.) ISBN 978-5-209-07483-0
6. Anikeev A.V. *Sinkholes and subsidence of the Earth's surface in karst areas: modeling and forecast*: diss. ... Candidate of Geological and Mineralogical Sciences. Moscow, 2014. (In Russ.)

7. Kutepov V.M., Kozlyakova I.V., Anisimova N.G., Eremina O.N., Kozhevnikova I.A. Assessment of karst and karst-suffusion hazard in the project of large-scale geological mapping of moscow territory. *Geoecology. Engineering Geology, hydrogeology, geocryology*. 2011;(3):217–228. (In Russ.) EDN: NUIKPN
8. Merkin V.E., Makovskiy L.V., Garber V.A. *Design and construction of tunnels in karst soils*. Moscow: TIMR Publ.; 1994. (In Russ.)
9. Ragozin A.L., Elkin V.A. Regional assessment of karst hazard and risk. *Problems of safety and emergency situations*. 2003;(4):33–52. (In Russ.)
10. Rodionov N.V. *Karst of the European part of the USSR, the Urals and the Caucasus*. Moscow: Gosgeoltekhizdat Publ.; 1963. (In Russ.)
11. Savarensky I.A., Mironov N.A. *Guidelines for engineering and geological surveys in karst development areas*. Moscow: PNIIS Gosstroy of Russia Publ.; 1995. (In Russ.)
12. Tolmachev V.V. Probabilistic approach in assessing the sustainability of karst areas and designing anti-karst measures. *Engineering geology*. 1980;(3):98–107. (In Russ.) EDN: YKWQWZ
13. Tolmachev V.V. On the permissible risks of construction in karst areas. *Foundations, foundations and soil mechanics*. 2007;(5):19–21. (In Russ.) EDN: SLBANV
14. Tolmachev V.V. Methods for assessing karst hazards for construction purposes: state and prospects. *Geoecology. Engineering geology, hydrogeology, geocryology*. 2012;(4):354–363. (In Russ.) EDN: PFFQUD
15. Tolmachev V.V., Reuter F. *Engineering karst science*. Moscow: Nedra Publ.; 1990. (In Russ.) ISBN: 5-247-01508-8
16. Khomenko V.P. *Patterns and forecast of suffusion processes*. Moscow: GEOS Publ.; 2003. (In Russ.) ISBN: 5-89118-320-X
17. Clayton C. *Managing Geotechnical Risk: Improving productivity in UK building and construction*. London, 2001. <https://doi.org/10.1680/mgr.29675>
18. Robin F., Ho K., Lacasse S., Leroi E. *A framework for landslide risk assessment and management*. 2005. <https://doi.org/10.1201/9781439833711-4>
19. Milanović P.T. *Geological Engineering in Karst: dams, reservoirs, grouting, groundwater protection, water tapping, tunneling*. Belgrade: Zebra Publ.; 2000.
20. Kochev A.D., Chertkov L.G., Zaionts I.L. Methodology and results of a comprehensive study of karst-suffusion processes in Moscow. *Engineering geology*. 1989;(6):77–94. (In Russ.)
21. Tolmachev V., Leonenko M. Experience in collapse risk assessment of building on covered karst landscapes in Russia. In: van P. Beynen (ed.). *Karst Management*. Springer, Dordrecht; 2011. p. 75–102. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1207-2_4
22. Panchenko A.I., Kharchenko I.Ya., Alekseev S.V. *Micro-cement*. Moscow: ASV Publ.; 2014. (In Russ.) ISBN: 978-5-4323-0032-4
23. Erofeev V.T., Rimshin V.I., Smirnov V.F. et al. *Reinforced frame composites for buildings and structures*. Saransk: Mordovian University Publ.; 2015. (In Russ.) ISBN 978-5-7103-3211-5
24. Erofeev V., Rodin A., Rodina N., Kalashnikov V., Erofeeva I. Biocidal Binders for the Concretes of Unerground Constructions. *Procedia Engineering*. 2016;165:1448–1454. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.878>
25. Erofeev V.T., Zavalishin E.V., Rimshin V.I., Kurbatov V.L., Stepanovich M.B. Frame composites based on soluble glass. *Research Journal of Pharmaceutical, Biological and Chemical Sciences*. 2016;7(3):2506–2517. EDN: WVBBTP
26. Maksimova I., Makridin N., Erofeev V., Barabanov D. Study of the Properties of Water-Hardened Cement Stone Depending on the Water-Cement Ratio and Age. *Proceedings of IEEE 2020. EECE 2020. Lecture Notes in Civil Engineering*. Springer, Cham, 2021;150:192–203. https://doi.org/10.1007/978-3-030-72404-7_20
27. Panchenko A.I., Kharchenko I.Ya., Mirzozan M. Soil strengthening using fine composite binder based on carbide slurry. *ICMTMTE 2020, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2020;971:032032. <http://doi.org/10.1088/1757-899X/971/3/032032>
28. Aimenov Z.T., Aimenov A.J., Yerofeev V.T., Sabitov L.S., Sanyagina Y.A. The effect of modifying additives on the performance properties of slag-alkali binders and concretes. *International journal for computational civil and structural engineering*. 2024;20(1):162–170. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2024-20-1-162-170>
29. Kharchenko I.Ya., Alekseev V.A., Israfilov K.A., Beterbiev A.S.E. Modern technologies of cement grouting. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2017;5(104):552–558. (In Russ.) <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2017.5.552-558>
30. Erofeev V., Bobryshev A., Lakhno A., Shafigullin L.N., Khalilov I., Sibgatullin K., Igtisamov R. Theoretical evaluation of rheological state of sand cement composite systems with polyoxyethylene additive using topological dynamics concept. *Materials Science Forum*. 2016;871:96–103. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.871.96>
31. Erofeev V.T., Vatin N.I., Maximova I.N., Tarakanov O.V., Sanyagina Y.A., Erofeeva I.V., Suzdaltsev O.V. Powder-activated concrete with a granular surface texture. *International journal for computational civil and structural engineering*. 2022;18(4):49–61. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-4-49-61>
32. Travush V.I., Karpenko N.I., Erofeev V.T., Vatin N.I., Erofeeva I.V., Maksimova I.N., Kondrashchenko V.I., Kesarijskij A.G. Destruction of powder-activated concrete with fixation of destruction by a laser interferometer. *Magazine of Civil Engineering*. 2020;95(3):42–48. <https://doi.org/10.18720/MCE.95.4>

СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ СООРУЖЕНИЙ SEISMIC RESISTENCE

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-6-613-627

UDC 624.138

EDN: DNPMBH

Research article / Научная статья

Energy-Based Evaluation of Dynamic Soil-Structure Interaction Process Under Seismic Impact from Explosion

Bakhodir S. Rakhmonov¹, **Khamidulla S. Sagdiev²**, **Armen Z. Ter-Martirosyan³**,
Ilizar T. Mirsayapov⁴, **Vladimir T. Erofeev³**✉

¹ Urgench State University, *Urgench, Uzbekistan*

² M.T. Urazbayev Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, *Tashkent, Uzbekistan*

³ Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), *Moscow, Russia*

⁴ Kazan State University of Architecture and Civil Engineering, *Kazan, Russia*

✉ erofeevvt@bk.ru

Received: August 17, 2024

Accepted: December 10, 2024

Abstract. This study presents the results of instrumental observations of the interaction process of an underground structure with the soil environment under explosion-induced seismic impact. During seismic impact, the soil imparts kinetic energy to underground structures, the value of which depends on the contact area of the structure and the soil and the conditions of interaction. In this regard, the energy-based evaluation of the process of joint vibration of the underground structure and the environment under explosive seismic waves is of great significance. The analysis of energy release in terms of frequencies shows that the energy of seismic radiation at different frequencies of the spectrum is not the same, and there is a well-defined maximum in the energy spectrum at small equivalent distances, i.e. at a certain frequency value much more energy is released than at other frequencies. Mathematical expressions are provided for calculating the total energy of ground vibrations, estimated proportion of energy propagating in the soil, and the energy received by the underground structure during their

Bakhodir S. Rakhmonov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction, Urgench State University, 14 Kh. Alimdjan St, Urgench city, 220100, Uzbekistan; ORCID: 0000-0001-6285-2063; e-mail: rah-bahodir@yandex.com

Khamidulla S. Sagdiev, Candidate of Technical Sciences, leading researcher at the Laboratory of Experimental Studies of Structural Strength and Seismic Resistance of Structures, M.T. Urazbayev Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 70 Yahya Ghulomov St, Tashkent, Uzbekistan; e-mail: imssan@mail.ru

Armen Z. Ter-Martirosyan, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Soil Mechanics and Geotechnics, Vice Rector, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 9467-5034, ORCID: 0000-0001-8787-826X; e-mail: gic-mgsu@mail.ru

Ilizar T. Mirsayapov, Corresponding Member of RAASN, Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Foundations, Structural Dynamics and Engineering Geology, Kazan State University of Architecture and Civil Engineering, 1 Zelenaya St, Kazan, 420043, Tatarstan, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 1454-1154, ORCID: 0000-0002-6193-0928; e-mail: mirsayapov1@mail.ru

Vladimir T. Erofeev, Academician of RAASN, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Building Materials Science, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 4425-5045, ORCID: 0000-0001-8407-8144; e-mail: rofeevvt@bk.ru

© Rakhmonov B.S., Sagdiev Kh.S., Ter-Martirosyan A.Z., Mirsayapov I.T., Erofeev V.T., 2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

interaction. A formula is proposed for calculating a dimensionless coefficient of the vibration process, indicating the share of energy transmitted through the soil to the underground structures. Three zones are identified that characterize the relationships of the forces of interaction in the contact area. The first is the zone with a linear relationship between the force and the deflection of the structure. Then, in the next zone, the proportionality between the values is violated with the loss of the elastic nature of the interaction. In the third zone, the underground structure slides relative to the ground. Aspects of the interaction of a thin-walled structure with the soil are considered. Calculations show that the obtained relationships can be used with sufficient accuracy to evaluate the seismic intensity of explosive seismic waves.

Keywords: calculation of vibration energy, underground explosions, seismic waves, vibrations of the structure of the structure, kinetic energy, discrete spectra, seismic and explosive vibrations, stress modeling, deformation diagram

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution. All authors have made an equal contribution to conceptualization, review & editing, writing, review and editing.

For citation: Rakhmonov B.S., Sagdiev Kh.S., Ter-Martirosyan A.Z., Mirsayapov I.T., Erofeev V.T. Energy-based evaluation of dynamic soil-structure interaction process under seismic impact from explosion. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(6):613–627. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-613-627>

Энергетическая оценка процесса взаимодействия в динамической системе «грунт — сооружение» при сейсмозрывных воздействиях

Б.С. Рахмонов¹, Х.С. Сагдиев², А.З. Тер-Мартirosян³, И.Т. Мирсаяпов⁴, В.Т. Ерофеев³

¹ Ургенчский государственный университет, *Ургенч, Узбекистан*

² Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

³ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, *Москва, Россия*

⁴ Казанский государственный архитектурно-строительный университет, *Казань, Россия*

✉ erofeevt@bk.ru

Поступила в редакцию: 17 августа 2024 г.

Принята к публикации: 10 декабря 2024 г.

Аннотация. Приведены результаты инструментальных наблюдений по исследованию процесса взаимодействия подземного сооружения с грунтовой средой, при сейсмозрывных воздействиях. При сейсмических воздействиях грунт сообщает подземным сооружениям кинетическую энергию, величина которой зависит от площади контакта сооружения и грунта, условий взаимодействия. В этой связи большое значение имеет энергетическая оценка процесса совместного колебания подземного сооружения и среды при действии сейсмозрывных волн. Приведены дискретные спектры энерговыделений на разных частотах, построенные на основе экспериментально полученных результатов. Анализ энерговыделения по частотам показывает, что энергия сейсмического излучения на различных частотах спектра не одинакова, а в энергетическом спектре при малых приведенных расстояниях имеется четко выраженный максимум, т.е. на определенной величине частот выделяется значительно больше энергии, чем в других частотах. Приведены математические выражения для расчета общей энергии колебаний грунтовой среды, оценки соотношения энергии, протекающей в грунте, и энергии, получаемой подземным сооружением при их взаимодействии. Предложена формула для расчета безразмерного коэффициента колебательного процесса, показывающего долю энергии,

Рахмонов Баходир Собирович, доктор технических наук, профессор кафедры строительства, Ургенчский государственный университет, 220100, Узбекистан, город Ургенч, улица Х. Олимжона, 14; ORCID: 0000-0001-6285-2063; e-mail: rah-bahodir@yandex.com

Сагдиев Хамидулла Сагдиевич, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории экспериментальных исследований прочности конструкций и сейсмостойкости сооружений, Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Узбекистан, Ташкент, ул. Яхьи Гуломова 70; e-mail: imssan@mail.ru

Тер-Мартirosян Армен Завенович, доктор технических наук, профессор кафедры механики грунтов и геотехники, проректор, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 9467-5034, ORCID: 0000-0001-8787-826X; e-mail: gic-mgsu@mail.ru

Мирсаяпов Илизар Талгатович, член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, заведующий кафедрой оснований, фундаментов, динамики сооружений и инженерной геологии, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 420043, Казань, ул. Зеленая 1; eLIBRARY SPIN-код: 1454-1154, ORCID: 0000-0002-6193-0928; e-mail: mirsayapov1@mail.ru

Ерофеев Владимир Трофимович, академик РААСН, доктор технических наук, профессор кафедры строительного материаловедения, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 4425-5045, ORCID: 0000-0001-8407-8144; e-mail: erofeevt@bk.ru

передаваемой через грунт на подземные сооружения. Выделены три зоны, характеризующие зависимости сил взаимодействия в контактной области. Первая зона характеризуется линейной зависимостью между силой и относительным перемещением сооружения. Затем в следующей зоне пропорциональность между значениями нарушается с потерей упругого характера взаимодействия. В третьей же зоне происходит скольжение подземного сооружения относительно грунта. Рассмотрены особенности взаимодействия тонкостенного сооружения с грунтовой средой. Расчеты показывают, что полученные зависимости с достаточной точностью могут быть использованы при оценке сейсмической интенсивности сейсмозрывных волн.

Ключевые слова: расчет энергии колебаний, подземные взрывы, сейсмические волны, колебания конструкции сооружения, кинетическая энергия, дискретные спектры, сейсмозрывные колебания, моделирование напряжений, диаграмма деформирования

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов. Все авторы внесли равноценный вклад в разработку концепции и проведение исследования, рецензирование, редактирование и написание текста.

Для цитирования: *Rakhmonov B.S., Sagdiev Kh.S., Ter-Martirosyan A.Z., Mirsayapov I.T., Erofeev V.T.* Energy-based evaluation of dynamic soil-structure interaction process under seismic impact from explosion // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 6. С. 613–627. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-613-627>

1. Introduction

Safe operation of buildings and structures is ensured by designing the foundation and underground parts of buildings taking into account various negative factors [1; 2; 3]. In seismically active territories, earthquakes not only cause damage to structures due to vibration, but, in some cases, there is also dynamic liquefaction of soils accompanied by a complete or partial loss of stability of the soil base [1].

The main regulatory document in the field of design and construction of foundations of buildings and structures in Russia, the main regulatory document SP 22.13330.2016¹ recommends to design considering the dynamic effects from equipment installed in buildings, surface and underground transportation, construction works and other sources (clause 5.8.11). To take into account additional strain of soil due to cyclic and vibration loads, a reduction factor is used, the use of which is associated with the correction of the deformation modulus obtained from the results of static tests [4]. This approach to the quantitative evaluation of additional strain is called quasi-static, since it can be used within the framework of conventional static methods of calculating settlement of structure foundation [3].

Design of foundations for safe operation can be performed by analytical methods regulated by both Russian and international standards [5]. At the same time, there is a possibility of calculations by numerical methods, using specialized geotechnical software systems that implement the finite element method (FEM) and the finite difference method (FDM) [6]. The main analytical method for calculations of foundations of buildings and structures with respect to the serviceability limit states under dynamic impact is the method of layer-by-layer elementary summation with the use of a reduction factor of the deformation modulus.

Russian building code SP 23.13330.2011² states that the basis for computational and experimental evaluation of dynamic properties of soils are the results of field and laboratory tests of soils. Experimental studies are effectively performed by observing the behavior of the structural model or the structure itself in situ. Extensive measurements of vibration parameters of structures during seismic impact from underground explosions, which most fully reflect natural tectonic earthquakes, can be considered the most perfect experimental method of studying the behavior of structures. Energy-based evaluation of the process of joint vibration of the underground structure and the environment under explosive seismic waves is of great significance.

The problem of energy-based evaluation of soil behavior during the propagation of seismic and explosive seismic waves was studied in [7–11].

¹ SP 22.13330.2016. Foundations of buildings and structures. JSC “SIC “Construction”, 2016.

² SP 23.13330.2011. Foundation of hydraulic structures. Moscow: Minregion of Russia, 2011.

The deformation characteristics of soils under cyclic loading depend significantly on the level of average stress, porosity and strain amplitude. Dynamic effects of this nature occur during earthquakes. At present, the main parameters used in engineering dynamic analysis of stability of soil bases are dynamic shear modulus G and damping ratio D .

Damping ratio (or subsidence, decay ratio) D characterizes the property of materials to absorb dynamic impact.

Russian [12–15] and international scientific literature [16–20] present systematized test results of measuring shear modulus and damping ratios of cohesive and non-cohesive soils under cyclic (low- and high-frequency) loading.

The values of dynamic shear modulus of soils are determined in accordance with the international regulation “Standard test methods for the determination of the modulus and damping properties of soils using the cyclic triaxial apparatus” using the diagrams of deformation loops plotted in τ – γ coordinates (Figure 1).

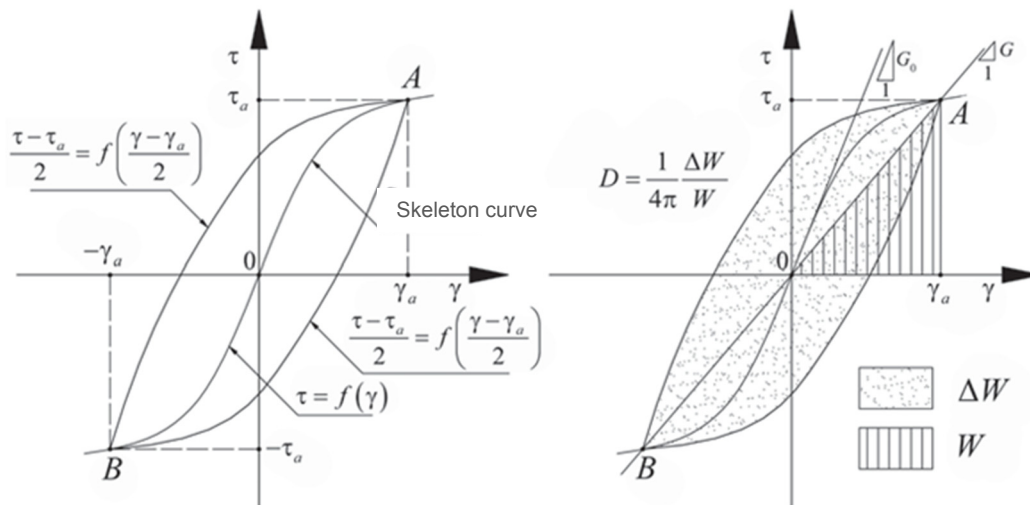


Figure 1. Determination of the dynamic shear modulus and damping ratio by the hysteresis loop:

W is the stored energy after one cycle; ΔW is the energy loss after one cycle [1]

S o u r c e: made by A.Z. Ter-Martirosyan and E.S. Sobolev [1]

Dynamic shear modulus G and damping ratio D are calculated according to the formulas

$$G = \frac{\tau_a}{\gamma_a}, \quad (1)$$

where G is the shear modulus, kPa; τ_a is the amplitude of shear stress τ , kPa; γ_a is the amplitude of shear strain γ , unit fraction,

$$D = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W}, \quad (2)$$

where D is the damping ratio, unit fraction; ΔW is the energy loss after one “loading-unloading” cycle, quantitatively equal to the area of the hysteresis loop; W is the maximum stored energy after one cycle, quantitatively equal to the area of triangle $0\tau_a\gamma_a$.

Based on the results of dynamic triaxial compression tests of soil, it is possible to perform ultimate limit state calculations — dynamic stability of the soil base using the liquefaction potential. Liquefaction potential is a characteristic of the soil base as a whole or individual geotechnical elements of the base, showing the safety factor of the soil body under dynamic loading of specific intensity. Commonly, such calculations are

performed in conditions of seismically active territories and allow to ensure safe operation of buildings and structures.

In addition to the presented analytical methods of calculation of foundations taking into account dynamic properties, nowadays, numerical methods of modeling soil-structure interaction are widely used [1]. Numerical methods allow to model the soil-structure interaction more accurately, apply any types of natural and anthropogenic dynamic impacts, and take into account physical and mechanical properties of soil base [21–23]. Implementation of the analysis in specialized geotechnical software systems allows to design foundations taking into account dynamic effects with a high degree of accuracy and to ensure safe operation on the basis of reliable prediction.

In [1; 24], a finite element model of a heterogeneous soil body interacting with a structure of finite stiffness was considered (results of numerical modeling in PLAXIS 2B v.8). In the same works, isofields and the soil bearing ratio of a heterogeneous base were obtained.

At the same time, it should be noted that the number of works that consider the behavior of an underground structure in terms of the energies of the structure and the soil environment is very small.

2. Purpose

The main purpose of this study was to investigate the behavior of the underground structure in terms of the energies of the structure and the soil environment in full-scale conditions. The methodology of experiments, information about soil conditions and other data are given in [12; 24].

3. Results of Experimental and Theoretical Studies

In the seismic impact process, the soil imparts kinetic energy to an underground cylindrical thin-walled structure, the magnitude of which depends on the area of contact between the structure and the soil, interaction conditions, etc. In this regard, in order to objectively estimate the energy characteristics of an underground structure, it is necessary to address the seismic energy density, i.e. the amount of energy received through a unit area of contact to the structure.

In [11], the ground vibration energy density was calculated using the following formula by S.V. Medvedev:

$$E_r = \frac{1}{2} \gamma c \sum v_i^2 T_i n_i, \quad (3)$$

where γ is the soil density in g/cm^3 ; c is the wave propagation velocity in the soil, cm/sec ; v_i is the velocity amplitude in cm/sec , which is defined as one half of the measured individual amplitude due to the wave reflection effect; T_i is the period of vibration in sec .

Figure 2 shows discrete energy release spectra plots at different frequencies based on experimentally obtained results. Here, attention should be paid to the spectrum of a well-defined maximum, i.e., at a particular frequency much more energy is released than at other frequencies.

Figure 2 shows that the energy of explosive seismic waves at different frequencies of the spectrum is not the same, and there is a well-defined maximum in the energy spectrum of vibration. The peak where the maximum is pronounced is always observed not at the beginning of the frequency range. Frequency $f_{\max}$, which carries most energy, changes with distance.

At small equivalent distances, a pronounced maximum is observed in the high-frequency region of the vibration spectrum; at equivalent distances of 7.4 and 0.8, respectively, the frequencies correspond to 20 and 12.5 Hz, and with increasing equivalent distance, the peak is observed already in the low-frequency zone of the spectrum. At the equivalent distance values of 14.7; 16.0; and 24.5, the frequency values are 10 Hz; 9.1 Hz; and 7.1 Hz, respectively.

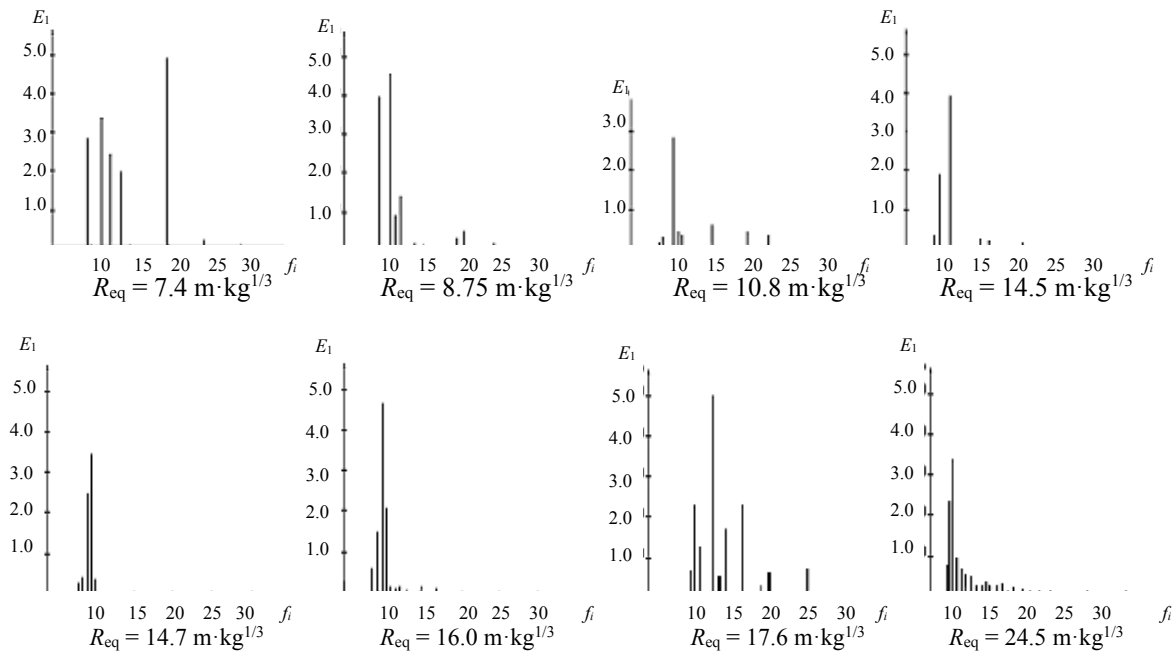


Figure 2. Discrete energy release spectra at different frequencies for different equivalent distances

S o u r c e: made by B.S. Rakhmonov, Kh.S. Sagdiev, A.Z. Ter-Martirosyan, I.T. Mirsayapov, V.T. Erofeev

Figure 3 presents a graph based on the experimentally obtained results, which shows the changes in the magnitude of the carrier frequencies as a function of the equivalent distance. The graph shown in the figure demonstrates that the frequency corresponding to the maximum energy value changes with the increase in the equivalent distance. Here, starting from some value of the equivalent distance, a decrease in frequency is observed. As the equivalent distance increases, the number of peaks increases, i.e., in these cases the spectra are enriched with low-frequency components of the peaks, and their magnitude decreases.

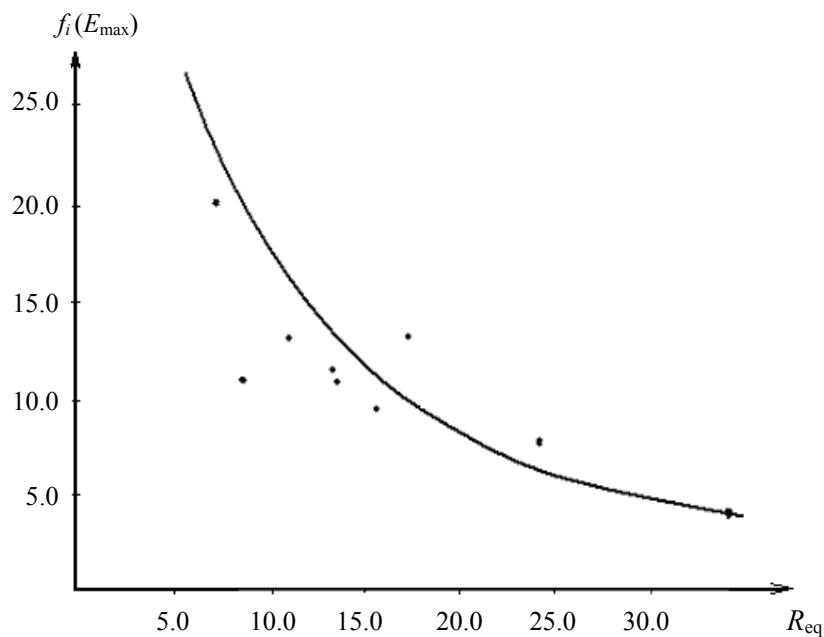


Figure 3. Change in the magnitude of carrier frequencies depending on the equivalent distance

S o u r c e: made by B.S. Rakhmonov, Kh.S. Sagdiev, A.Z. Ter-Martirosyan, I.T. Mirsayapov, V.T. Erofeev

The total vibration energy of the soil environment is calculated based on records for each of the three components: two horizontal and one vertical:

$$E_r = E_{h1} + E_{h2} + E_{vert} . \quad (4)$$

Since each component is commensurable with each other, based on [9], the following expression can be written for the considered case:

$$E_{gr} = E_{h1} = 0.35E_r \quad (5)$$

and taking (3) into account, the following can be written:

$$E_{gr} = 0.35 \cdot \frac{1}{2} \gamma c_p \sum v_i^2 T_i . \quad (6)$$

To estimate the ratio between the energy propagating in the ground and the energy received by the underground structure during their interaction, the following expression is used:

$$\eta = E_k / E_{0,gr} , \quad (7)$$

where E_k is the kinetic energy received by the structure as a result of the interaction with the ground; $E_{0,gr}$ is the energy propagating over an area equal to the cross-section of the underground structure, defined by the following formula:

$$E_{0,gr} = E_{gr} S . \quad (8)$$

Kinetic energy E_k is defined by the following formula:

$$E_k = \frac{1}{2} M \dot{u}^2 , \quad (9)$$

where M is the mass of the underground structure defined by the following formula:

$$M = \pi \rho^2 (R^2 - r^2) L , \quad (10)$$

where ρ is the density of the structure; R and r are the external and internal radii of the structure, respectively; L is the length of the structure; $\dot{u}$ is the amplitude of displacement velocity of the structure under explosive seismic waves (recorded using seismometric channel).

Substituting (10) into (9) results in the following:

$$E_k = \frac{1}{2} \pi \rho^2 (R^2 - r^2) L \dot{u}^2 . \quad (11)$$

The following expression can be composed from (7), (9) and (11):

$$\eta = \frac{\pi \rho (R^2 - r^2) \dot{u}^2 L}{(0.35 \gamma c_p \sum v_i^2 T_i) S} . \quad (12)$$

This dimensionless value can be called the “reduction” ratio of vibrational energy in the dynamic soil-structure system or the “transfer” ratio. The above coefficient, by meaning, shows the share of energy transferred through the ground to the underground structure, as a result of their interaction under explosive seismic waves.

The curve of η as a function of the intensity of seismic vibration, obtained on the basis of formula (12), is shown in Figure 4.

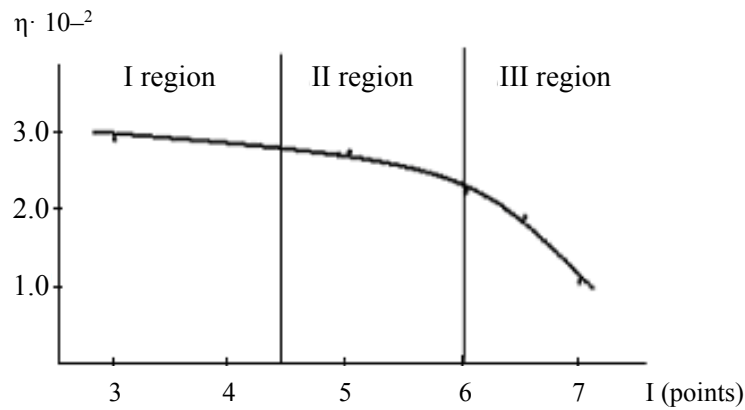


Figure 4. Relationship between ratio η and the intensity of explosive seismic vibration of the soil
 Source: made by B.S. Rakhmonov, Kh.S. Sagdiev, A.Z. Ter-Martirosyan, I.T. Mirsayapov, V.T. Erofeev

Figure 4 shows that with increasing intensity of the explosive seismic vibration of the soil, ratio η slightly decreases. With increasing intensity of vibration due to underground explosions, the total amount of kinetic energy received by the underground structure increases, but the ratio η decreases.

Three regions can be distinguished in the general qualitative characteristic of the relationship between contact forces of the structure with the soil and their relative displacement, according to the experimental diagrams of the test results. The first one corresponds to the stage of loading the structure, when the relationship between the forces and relative displacement of the structure is linear. In this case, the soil is being compacted, and elastic and viscous properties of the body, but not plastic ones, are revealed.

At the second stage, the proportionality between the interaction forces and the displacement of the structure is violated and the elastic character of the interaction is lost. With the increase of the external load, it is possible to observe sliding of the underground structure relative to the ground in the third region (Figure 4). This implies that with increasing intensity, the share of energy transferred from the ground to the structure decreases.

In the interaction process, when the strength properties of the structure and the surrounding soil are markedly different and physically complex, the displacement of the structure relative to the ground during seismic impact is observed. The interaction results in the reduction of vibrational energy in the dynamic soil-structure system, and therefore this parameter is increasingly attracting the attention of experimental researchers. In addition to the above, when the structure is thin-walled, the complexity of the interaction process between the structure and the environment is aggravated. Following this tradition during the experiments, attention was also paid to studying this parameter. Figure 5 shows the relationship between the values of displacements ($\tilde{U}$, $\tilde{V}$, $\tilde{W}$) of the structure relative to the ground and ratio η .

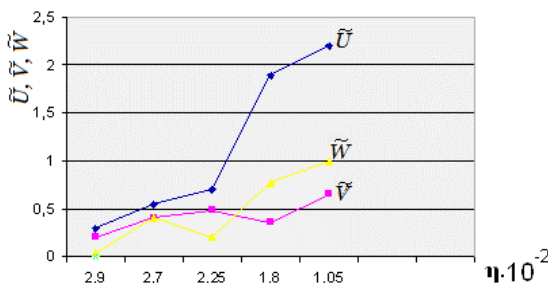


Figure 5. Relationship between the soil-structure relative displacement and the energy "reduction" ratio η ($\eta = E_{struct} / E_{gr}$)

Source: made by B.S. Rakhmonov, Kh.S. Sagdiev, A.Z. Ter-Martirosyan, I.T. Mirsayapov, V.T. Erofeev

to the ground and ratio η .

The above results can be used to predict the behavior of underground thin-walled structures subjected to explosive seismic waves. The calculations show that the relationships established in this paper can be effectively used in estimating the intensity of explosive seismic waves.

Cyclic liquefaction of soils must be considered along with vibration issues in case of explosive seismic impact.

Design of hazardous industrial facilities requires safe earthquake-proof design solutions. As a result of the construction of the Nizhnekamsk Reservoir in the Republic of Tatarstan, the groundwater level rose and a number of areas

were flooded along the Kama River. This rise in groundwater level and the presence of tectonic faults in the area of Kamskiye Polyany provoked an increase in the level of seismic activity of the considered territories of the Kama River coast. According to the OSR-97 seismic zoning map, earthquakes with intensity of 7.0 points are forecasted on medium soils in the territory of the Republic of Tatarstan. As a result, dynamic properties of soil bases need to be evaluated during surveys and seismic-resistant reinforcement needs to be used in the design and construction of structures.

Considering the above, the effect of seismic load from a possible earthquake on the change of physical and mechanical properties of soils needs to be taken into account when designing foundations of critical structures [1–3; 5–8].

The site under study is located in the water area of the Kama River, north-east of the Republic of Tatarstan. The results of seismic microzoning of the construction site show that the seismic activity of the site with the given soil base is estimated at 7.0 points on the MSK-64 scale with an acceleration of $143 \text{ cm}^2/\text{sec}$ at short and medium vibration periods. The accelerograms of the scenario earthquakes and their corresponding response spectra are presented in Figure 6.

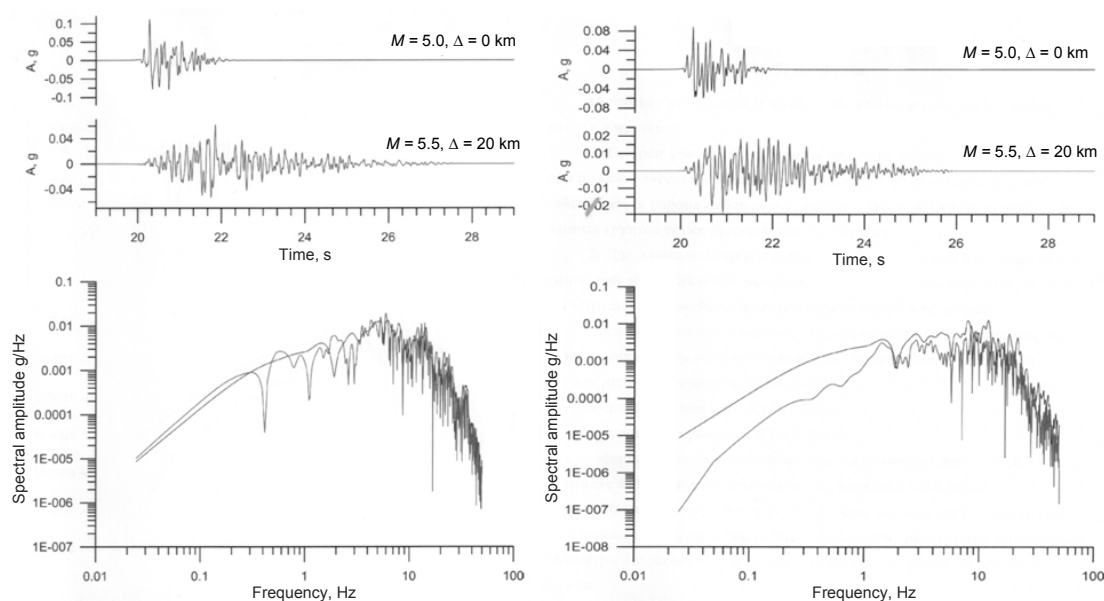


Figure 6. Scenario earthquake accelerograms of and their corresponding reaction spectra

S o u r c e : made by B.S. Rakhmonov, Kh.S. Sagdiev, A.Z. Ter-Martirosyan, I.T. Mirsayapov, V.T. Erofeev

To investigate the dynamic stability of clay and water-saturated sandstone layers from the position of assessing the possibility of their liquefaction under seismic effects corresponding to the design (predicted) seismic activity of the site, laboratory triaxial cyclic loading tests equivalent to the seismic impact in terms of force were carried out.

When modeling the deformation conditions in which the soil is subjected to seismic impact in real field conditions, the predicted seismic load is modeled before cyclic loading based on the methodology proposed by H.B. Seed and I. Idriss [16].

According to this methodology, seismic loading can be characterized by the magnitude of the equivalent cyclic shear stresses (CSR) for an earthquake of a given recurrence and intensity:

$$CSR = \frac{\tau_{av}}{\sigma_v'}, \quad (13)$$

where τ_{av} is the average expected cyclic shear stress at the specified magnitude; σ_v' is the vertical overburden stress.

It is assumed that before the earthquake, the soil element located under the horizontal surface is subjected to consolidation for a long time in state K_0 (K_0 is the ratio of horizontal and vertical stresses during consolidation in natural conditions). During an earthquake, a series of successive cyclic shear stresses act on this soil element under undrained conditions. These stresses are applied in the absence of lateral deformation, because the flat earth surface is assumed to extend infinitely in the horizontal direction.

In practical calculations, in order to assess the liquefaction potential of clayey and sandy soils with different degrees of water saturation, the average values of shear stresses caused by an earthquake at depth h are determined from the expression

$$\tau_{av} = \left(0.65 \cdot \frac{\gamma \cdot h}{g} \right) \cdot a_{\max} \cdot r_d. \quad (14)$$

The value of $a_{\max}$ is taken from the accelerogram of the earthquake with respect to peak horizontal accelerations for horizontal components of vibration.

The number of loading cycles (N) in the laboratory experiment simulating seismic impact depends on the duration of the earthquake, and therefore on the magnitude of the earthquake.

The analysis (approach) described above gives the maximum value of the expected cyclic shear stress due to earthquake (τ_{av}), which corresponds to one half of the axial dynamic load in triaxial dynamic tests (Figures 7 and 8).

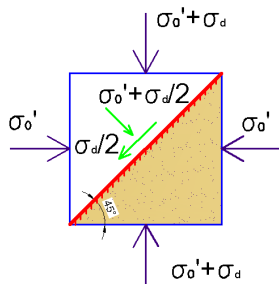


Figure 7. Modeling of stresses in a soil sample under triaxial compression during cyclic loading
Source: made by B.S. Rakhmonov, Kh.S. Sagdiev, A.Z. Ter-Martirosyan, I.T. Mirsayapov, V.T. Erofeev

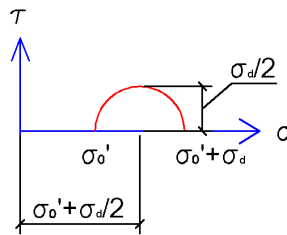


Figure 8. Stress state of the soil during laboratory simulation of equivalent triaxial cyclic loading
Source: made by B.S. Rakhmonov, Kh.S. Sagdiev, A.Z. Ter-Martirosyan, I.T. Mirsayapov, V.T. Erofeev

Based on the methodology mentioned above, a strength model of layered soil base composed of sandy and clayey soil with different degrees of water saturation during scenario earthquakes has been developed. The model takes into account the possibility of acceleration of the soil body in three directions, as well as the mutual interference of layers of different stiffness.

To quantify the liquefaction capacity of water-saturated sand and clay layers under random irregular multidirectional seismic impact, correction functions are introduced for cyclic strength obtained under steady-state cyclic loading in order to take into account the discussed features of real seismic loading C_2 and C_5 [12].

Based on the developed model, the equivalent parameters of regular cyclic loading were determined for laboratory studies of liquefaction resistance of sandy and clayey soils of the construction site under the following design characteristics of the scenario earthquake: magnitude 7.0, acceleration $A = 143 \text{ cm}^2/\text{s}$, fundamental frequency $\approx 2 \text{ Hz}$, fundamental period of vibration 0.56 sec.

The following strength criteria are adopted to evaluate the resistance to liquefaction:

1. Emergence of axial deformation under triaxial cyclic loading less than 5 %;
2. Pore pressure coefficient $\beta = p_w / \sigma_{cp}$ must be ≤ 0.6 ;

3. The width of the hysteresis loop at the 30th loading cycle must be less than the width of the loop at the 29th cycle of loading, i.e. $\Delta \epsilon_{30} \leq \Delta \epsilon_{29}$.

Experimental studies of liquefaction resistance were performed on 143 series of undisturbed (134 series) and disturbed (9 series) soil samples (three twin samples in each series) in a triaxial compression device (stabilometer) under cyclic loading conditions with parameters equivalent to those of a scenario earthquake with an intensity of 7.0 points installed for the construction site. In the process of experimental studies, the main parameters characterizing the state of sandy and clayey soils under cyclic loading were established: axial and radial strains, pore pressure, effective and average stresses.

The conducted experimental studies allowed to establish patterns of strain growth under equivalent cyclic loading.

By analyzing the obtained results, it can be concluded that in soil samples of different degree of water saturation, which are subjected to cyclic triaxial compression equivalent to seismic loading with intensity of 7.0 points, strains develop with different intensity (Figure 9). At the initial stage, the development of strains is more intense due to post-compaction of the specimen, afterwards the strains stabilize. In all specimens tested under the cyclic loading equivalent to the design scenario earthquake with intensity of 7.0 points, the magnitude of axial strain does not exceed 3.0%, the pore pressure coefficient is less than 0.6, the ratio $\Delta\varepsilon_{30} / \Delta\varepsilon_{29}$ is less than 1. In the process of testing, there were no external signs of reaching the ultimate resistance (formation of barrel and inclined shear plane).

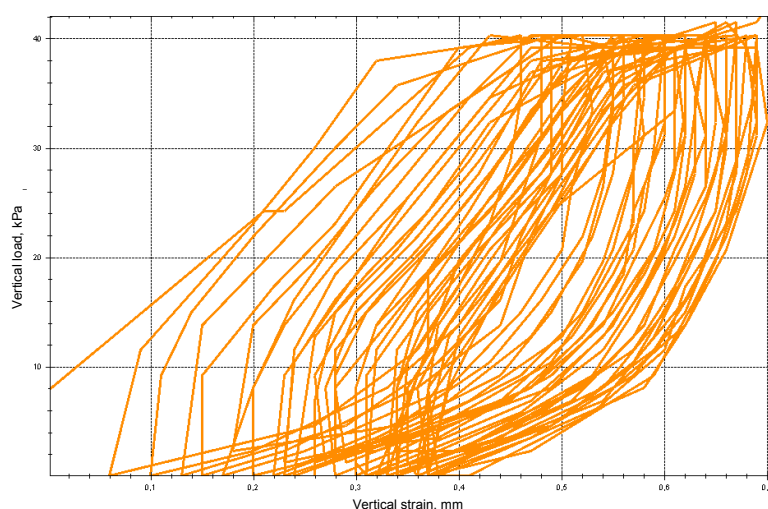


Figure 9. Sample deformation diagram during cyclic loading

Source: made by B.S. Rakhmonov, Kh.S. Sagdiev, A.Z. Ter-Martirosyan, I.T. Mirsayapov, V.T. Erofeev

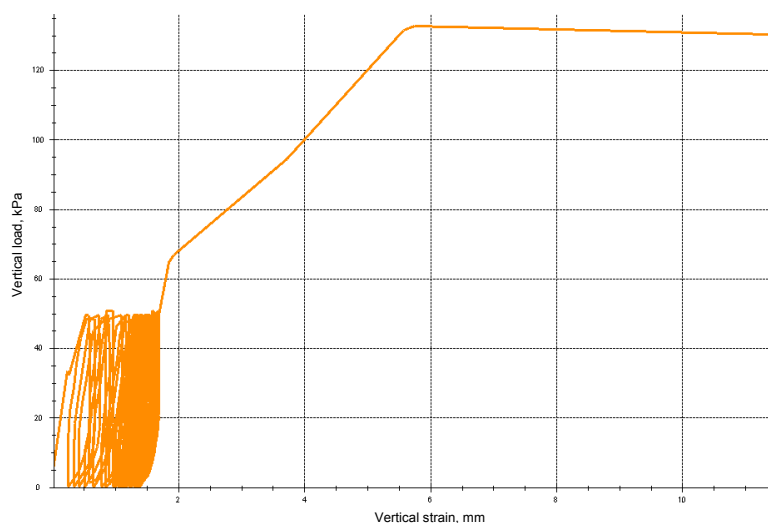


Figure 10. Sample deformation diagram according to the "crushing" pattern

Source: made by B.S. Rakhmonov, Kh.S. Sagdiev, A.Z. Ter-Martirosyan, I.T. Mirsayapov, V.T. Erofeev

After cyclic loading test with parameters equivalent to the design scenario seismic impact, the soil samples were brought to failure by deviatoric static loading according to the “crushing” pattern (Figure 10). It was found that, in general, seismic impact on soils did not lead to a decrease in the ultimate deviatoric load compared to the results of static loading.

There was a difference in the character of static fracture along the “crushing” trajectory of sandy and clayey soils. The clayey soil samples fractured on the descending branch of the $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_1$ diagram (Figure 11, *a*), while the sandy soil samples fractured on the ascending branch of the stress-strain diagram (Figure 11, *b*). This fact is explained by different initial density of the soils.

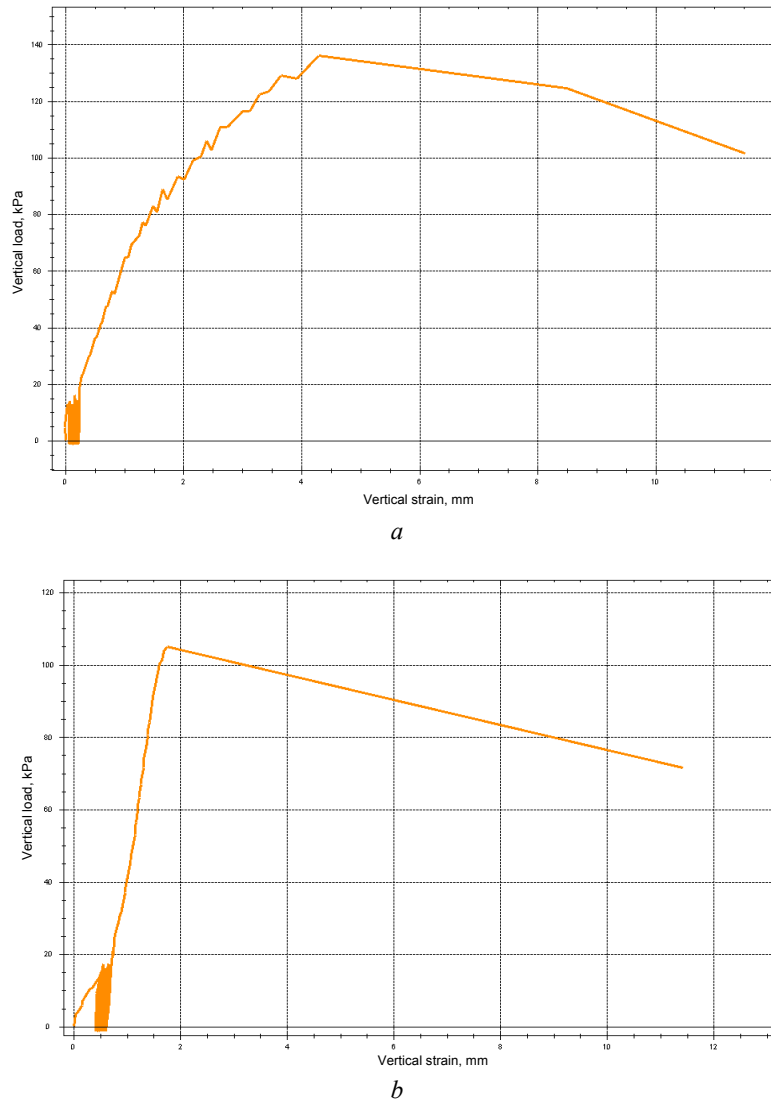


Figure 11. Sample deformation diagram according to the “crushing” pattern:

a — clay; *b* — sandstone

S o u r c e: made by B.S. Rakhmonov, Kh.S. Sagdiev, A.Z. Ter-Martirosyan, I.T. Mirsayapov, V.T. Erofeev

4. Conclusion

1. The process of dynamic soil-structure interaction under explosion-induced seismic impact has been evaluated.

2. It is shown that the most comprehensive study method is exploring the behavior of the structure in full-scale conditions with energy-based evaluation of the process of joint vibration of the underground structure and the ground environment under explosive seismic waves.

3. During seismic action, the soil imparts kinetic energy to the underground structure, the magnitude of which depends on the area of contact between the structure and the soil and the conditions of their interaction.
4. Discrete energy release spectra at different frequencies were obtained and plotted on the basis of experimentally obtained results.
5. It was found that the energy of explosive seismic waves at different frequencies of the spectrum is not equal, and there is a well-defined maximum in the energy spectrum of vibration. That is, more energy is released at a certain frequency than at other frequencies. At the same time, the frequency, which has more energy, changes with distance.
6. Mathematical expressions for calculating the total energy of soil vibration and the energy received by the underground structure during interaction with the soil are given.
7. The ratio of the vibrational process, which shows the share of energy transferred through the soil to the underground structure, is introduced. Relationships between the ratio and the intensity explosive seismic vibration of the soil are shown.
8. Three regions are defined on the experimentally obtained force-displacement diagram. The first one corresponds to the stage when the relationship between the forces and relative displacement of the structure is linear. At the second stage, the elastic character of the interaction is lost. At the third one, sliding of the underground structure relative to the ground is observed.
9. It is shown that the above results can be used to predict the behavior of underground thin-walled structures under the influence of explosive seismic waves.

References

1. Ter-Martirosyan A.Z., Sobolev E.S. Operating safety of foundations of buildings and structures under dynamic impact. *Monthly Journal on Construction and Architecture*. 2017;125(104):537–544. (In Russ.) <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2017.5.537-544>
2. Ter-Martirosyan A.Z., Mirnyy A.Yu., Sobolev E.S. Peculiarities of determining parameters of contemporary soil models by laboratory tests. *Geotechnics*. 2016;(1):66–72. (In Russ.) EDN: VZVZCP
3. Ter-Martirosyan Z.G., Ter-Martirosyan A.Z., Sobolev E.S. Creep and vibrocreep of sandy soils. *Engineering survey*. 2014;(5–6):24–28. (In Russ.) EDN: SJCUCX
4. Ivanov P.L. *Liquefaction of sandy soils*. Leningrad: Gosenergoizdat Publ.; 1962. (In Russ.)
5. Ter-Martirosyan Z.G., Sobolev E.S., Ter-Martirosyan A.Z. Rheological models creation on the results triaxial tests of sands. *Geotechnical engineering for infrastructure and development: Proceedings of the XVI European conference on soil mechanics and geotechnical engineering. ECSMGE 2015*. Edinburgh: ICE Publ.; 2015;6:3365–3369. EDN: WTWPBZ
6. Ter-Martirosyan Z.G., Ter-Martirosyan A.Z., Sobolev E.S. Rheological properties of sandy soils. *Advanced Materials Research*. 2014;1073–1076:1673–1679. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.1073-1076.1673>
7. Aptikaev F.F. On the determination of the energy of seismic sources. *Experimental seismology*. Moscow: Nauka Publ.; 1971. p. 59–65. (In Russ.)
8. Barkan D.D. *Seismic explosive waves and their effect on structures*. Moscow; Leningrad: Stroyizdat Publ.; 1945. (In Russ.)
9. Carder D., Cloud W.K. Surface motion from large underground explosions. *Journal of Geophysical Research*. 1959; 64:1471–1487. <https://doi.org/10.1029/JZ064i010p01471>
10. Medvedev S.V. *Seismics of rock explosions*. Moscow: Nedra Publ.; 1964. (In Russ.)
11. Medvedev S.V., Lyamzina G.A. The seismic effect of explosions at the mine. *Problems of Engineering Seismology*. 1962;21:73–102. (In Russ.)
12. Ishihara K. *Behavior of soils in earthquakes*. Fadeev A.B., Lisyuk M.B. (eds.); St. Petersburg: NPO “Georeconstruction-Fundamentproekt”; 2006. (In Russ.) ISBN 5-9900771-1-4
13. Voznesensky E.A. Dynamic testing of soils. The status of this question and standardization. *Engineering survey*. 2013;(5):20–26. (In Russ.) EDN: QCGKLJ
14. Mirsayapov I.T., Koroleva I.V. Estimation of seismic stability of layered soil bases composed of clays and water-saturated sandstones. *News of the Kazan State University of Architecture and Engineering*. 2015;1(31):99–106. (In Russ.) EDN: RXADXW
15. Stavitz L.R. *Seismic resistance of foundations and foundations*. Moscow: ASV Publ.; 2010. (In Russ.)
16. Seed H.B., Asce M., Idriss I.M. Simplified procedures for evaluating soil liquefaction potential. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 1971;97:1249–1273. <https://doi.org/10.1061/JSFEAQ.000166>

17. Seed H.B. Soil liquefaction and cyclic mobility evaluation for level ground during earthquakes. *Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering, ASCE*. 1996;105(2):201–255.
18. Chu J., Leong W.K., Loke W.L., Wanatowski D. Instability of Loose Sand under Drained Conditions. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2012;138:207–216. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0000](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000)
19. Iwasaki T., Tokida K., Tatsuoka F. et al. Microzonation for soil liquefaction potential using simplified methods. *Proceedings of the 3rd International Conference on Microzonation, Seattle*. 1982;3:1319–1330.
20. Yamamuro J.A., Lade P.V. Static liquefaction of very loose sands. *Canadian Geotechnical Journal*. 1997;34(6):905–917. <https://doi.org/10.1139/t97-057>
21. Ter-Martirosyan Z., Ter-Martirosyan A., Sobolev E. Vibration of embedded foundation at multi-layered base taking into account non-linear and rheological properties of soils. *Procedia Engineering. XXV Polish — Russian — Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering”*. 2016;153:747–753.
22. Sobolev E.S., Ter-Martirosyan A.Z. The influence of the physical properties of sandy soils on the dynamic stability of the foundations of buildings and structures. *Construction and formation of the living environment: collection of materials of the XIX International Interuniversity Scientific and Practical Conference*. Moscow: MGSU Publ.; 2016. p. 1087–1090. (In Russ.) EDN: WCZUZZ
23. Mirsayapov I.T., Koroleva I.V. Clayey soils rheological model under triaxial regime loading. *Geotechnical Engineering for Infrastructure and Development. Proceedings of the XVI European Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, ECSMGE. 2015*. Edinburgh, 2015. p. 3249–3254. EDN: WTXBOZ
24. Sadovsky M.A. The case of seismic explosions in conditions of weak soils and monolithic structures. *Proceedings of the Seismological Institute of the USSR Academy of Sciences*, No. 117, ed. USSR Academy of Sciences, Moscow-Leningrad, 1945. (In Russ.) https://elbib.biblioatom.ru/text/sadovskiy_izbrannye-trudy_2004/p40/

Список литературы

1. Тер-Мартirosян А.З., Соболев Е.С. Безопасность эксплуатации оснований зданий и сооружений при динамическом воздействии // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 5 (104). С. 537–544. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2017.5.537-544>
2. Тер-Мартirosян А.З., Мирный А.Ю., Соболев Е.С. Особенности определения параметров современных моделей грунта в ходе лабораторных испытаний // Геотехника. 2016. № 1. С. 66–72. EDN: VZVZCP
3. Тер-Мартirosян З.Г., Тер-Мартirosян А.З., Соболев Е.С. Ползучесть и виброползучесть песчаных грунтов // Инженерные изыскания. 2014. № 5–6. С. 24–28. EDN: SJCUCX
4. Иванов П.Л. Разжижение песчаных грунтов. Ленинград : Госэнергоиздат, 1962. 260 с.
5. Ter-Martirosyan Z.G., Sobolev E.S., Ter-Martirosyan A.Z. Rheological models creation on the results triaxial tests of sands // Geotechnical engineering for infrastructure and development: Proceedings of the XVI European conference on soil mechanics and geotechnical engineering. ECSMGE 2015. Edinburgh : ICE Publishing, 2015. Vol. 6. P. 3365–3369. EDN: WTWPBZ
6. Ter-Martirosyan Z.G., Ter-Martirosyan A.Z., Sobolev E.S. Rheological properties of sandy soils // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 1073–1076. P. 1673–1679. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.1073-1076.1673>
7. Антикаев Ф.Ф. К определению энергии сейсмических источников // Экспериментальная сейсмология. Москва : Наука, 1971. С. 59–65.
8. Баркан Д.Д. Сейсмозрывные волны и действие их на сооружения. Москва-Ленинград : Стройиздат, 1945. 51 с.
9. Carder D., Cloud W.K. Surface motion from large underground explosions // Journal of Geophysical Research. 1959. Vol. 64. P. 1471–1487. <https://doi.org/10.1029/JZ064i010p01471>
10. Медведев С.В. Сейсмика горных взрывов. Москва : Недра, 1964. 188 с.
11. Медведев С.В., Лямзина Г.А. Сейсмический эффект взрывов на руднике // Труды института физики Земли им. О.Ю. Шмидта, № 21 (188), Вопросы инженерной сейсмологии. Москва : Изд-во. Академии Наук СССР, 1962. Вып. 6. С. 73–102.
12. Ишихара К. Поведение грунтов при землетрясениях / под ред. А.Б. Фадеева, М.Б. Лисюка; пер. с англ. Санкт-Петербург : НПО «Геореконструкция-Фундаментпроект», 2006. 384 с. ISBN 5-9900771-1-4
13. Вознесенский Е.А. Динамические испытания грунтов. Состояние вопроса и стандартизация // Инженерные изыскания. 2013. № 5. С. 20–26. EDN: QCGKLJ
14. Мирсаяпов И.Т., Королева И.В. Оценка сейсмостойкости слоистых грунтовых оснований, сложенных глинами и водонасыщенными песчаниками // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2015. № 1 (31). С. 99–106. EDN: RXADXW
15. Ставницер Л.П. Сейсмостойкость оснований и фундаментов. Москва : Изд-во АСВ, 2010. 448 с.
16. Seed H.B., Asce M., Idriss I.M. Simplified procedures for evaluating soil liquefaction potential // Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. 1971. Vol. 97. P. 1249–1273. <https://doi.org/10.1061/JSFEAQ.000166>

17. *Seed H.B.* Soil liquefaction and cyclic mobility evaluation for level ground during earthquakes // *Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 1996. Vol. 105 (2). P. 201–255.
18. *Chu J., Leong W.K., Loke W.L., Wanatowski D.* Instability of Loose Sand under Drained Conditions // *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2012. Vol. 138. P. 207–216. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0000](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000)
19. *Iwasaki T., Tokida K., Tatsuoka F. et al.* Microzonation for soil liquefaction potential using simplified methods // *Proceedings of the 3rd International Conference on Microzonation*. Seattle. 1982. Vol. 3. P. 1319–1330.
20. *Yamamuro J.A., Lade P.V.* Static liquefaction of very loose sands // *Canadian Geotechnical Journal*. 1997. Vol. 34. No. 6. P. 905–917. <https://doi.org/10.1139/t97-057>
21. *Ter-Martirosyan Z., Ter-Martirosyan A., Sobolev E.* Vibration of embedded foundation at multi-layered base taking into account non-linear and rheological properties of soils // *Procedia Engineering*. XXV Polish — Russian — Slovak Seminar “Theoretical Foundation of Civil Engineering”. 2016. Vol. 153. P. 747–753.
22. *Соболев Е.С., Тер-Мартirosян А.З.* Влияние физических свойств песчаных грунтов на динамическую устойчивость оснований зданий и сооружений // *Строительство формирование среды жизнедеятельности: сб. мат-лов. XIX Междунар. межвуз. научн.-практ. конф.* Москва : МГСУ, 2016. С. 1087–1090. EDN: WCZUZZ
23. *Mirsayapov I.T., Koroleva I.V.* Clayey soils rheological model under triaxial regime loading // *Geotechnical Engineering for Infrastructure and Development : Proceedings of the XVI European Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, ECSMGE*. 2015. Edinburgh. 2015. P. 3249–3254. EDN: WTXBOZ
24. *Садовский М.А.* Случай действия сеймики взрывов в условиях слабых грунтов и монолитного сооружения // *Труды сейсмологического института АН СССР. № 117.* Москва-Ленинград : изд. АН СССР, 1945. URL: https://elbib.biblioatom.ru/text/sadovskiy_izbrannye-trudy_2004/p40/

--