

Напряженно-деформированное состояние ортотропной прямоугольной пластинки, свободно опертой по всем сторонам

К.Ф. Шагивалеев^{ID}, Д.А. Сурнин^{ID}, Е.К. Сурнина^{ID}✉

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, Российская Федерация

✉ eksurnina@mail.ru

Поступила в редакцию: 29 июня 2025 г.

Доработана: 10 августа 2025 г.

Принята к публикации: 15 августа 2025 г.

Аннотация. Ввиду широкого применения в инженерной практике конструкций из композитных материалов актуальной задачей является исследование их напряженно-деформированного состояния при действии различных нагрузок. Рассматривалась свободно опертая по четырем сторонам ортотропная прямоугольная пластинка. Исследовалось напряженно-деформированное состояние пластинки под действием нормально приложенной нагрузки. Для получения разрешающего дифференциального уравнения использовалось операционное исчисление, связанное с преобразованием Лапласа. Получены в общем виде аналитические выражения, которые позволяют определять напряженно-деформированное состояние в ортотропной пластинке при разных геометрических параметрах пластинки, при разных упругих характеристиках материала пластинки и при разных размерах площадки нагружения. Используя выведенные общие аналитические выражения, можно получить различные частные решения: при действии нагрузки, нормально приложенной по всей поверхности пластинки, при действии локальных и сосредоточенных нагрузок. В качестве тестовой задачи представлены результаты расчетов ортотропной пластинки из углепластика при действии нагрузки, равномерно распределенной по всей поверхности пластинки.

Ключевые слова: композиционный материал, нагрузка, дифференциальное уравнение, операционное исчисление, оригинал, изображение, аналитическое решение

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов: Шагивалеев К.Ф. — концепция исследования, рецензирование и выводы, редактирование текста; Сурнин Д.А. — расчет, результаты напряженно-деформированного состояния, обработка результатов, написание текста; Сурнина Е.К. — обзор литературы. Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Для цитирования: Шагивалеев К.Ф., Сурнин Д.А., Сурнина Е.К. Напряженно-деформированное состояние ортотропной прямоугольной пластинки, свободно опертой по всем сторонам // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 4. С. 307–320. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-307-320>

Шагивалеев Камилъ Фатыхович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных материалов, конструкций и технологий, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Российская Федерация, 410054, Саратовская обл., г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77; eLIBRARY SPIN-код: 9726-5456, ORCID: 0009-0001-6962-9355; e-mail: kfshag@yandex.ru

Сурнин Дмитрий Аркадьевич, аспирант кафедры транспортного строительства, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Российская Федерация, 410054, Саратовская обл., г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77; eLIBRARY SPIN-код: 9654-2120, ORCID: 0009-0005-5373-8804; e-mail: dasurnin98@mail.ru

Сурнина Елена Камилевна, кандидат технических наук, доцент кафедры транспортного строительства, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Российская Федерация, 410054, Саратовская обл., г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77; eLIBRARY SPIN-код: 5584-2282, ORCID: 0000-0003-2500-1256; e-mail: eksurnina@mail.ru

© Шагивалеев К.Ф., Сурнин Д.А., Сурнина Е.К., 2025



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Stress-Strain State of an Orthotropic Rectangular Plate Simply Supported on All Sides

Kamil F. Shagivaleev^{id}, Dmitry A. Surnin^{id}, Elena K. Surnina^{id}✉

Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin, Saratov, Russian Federation

✉ ekurnina@mail.ru

Received: June 29, 2025

Revised: August 10, 2025

Accepted: August 15, 2025

Abstract. Abstract. In view of the wide application of composite structures in engineering practice, an important task is to study their stress-strain state under the action of various loads. An orthotropic rectangular plate simply supported on four sides was considered. The stress-strain state of the plate under the action of a normally applied load was investigated. General analytical expressions are obtained that allow determining the stress-strain state in an orthotropic plate for different geometric parameters of the plate, for different elastic characteristics of the plate material and for different dimensions of the loading area. Using the derived general analytical expressions, various particular solutions can be obtained: under the action of a normal load applied over the entire surface of the plate, under the action of local and concentrated loads. The results of calculations of an orthotropic carbon fiber plate under the action of a uniformly distributed load applied over the entire surface of the plate are presented as a test problem. To obtain the resolving differential equation, operational calculus associated with the Laplace transform was used.

Keywords: composite material, load; differential equation, operational calculus, original, image, analytical solution

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution: *Shagivaleev K.F.* — conceptualization, review and conclusions, editing; *Surnin D.A.* — calculation, results of stress-strain state, processing of results, text writing; *Surnina E.K.* — literature review, editing. All authors read and approved the final version of the article.

For citation: Shagivaleev K.F., Surnin D.A., Surnina E.K. Stress-strain state of an orthotropic rectangular plate simply supported on all sides. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(4):307–320. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-307-320>

1. Введение

Прямоугольные панели широко применяются в конструкциях различного назначения. В гражданском и промышленном строительстве, в авиа-, судо-, автомобилестроении часто используют панели, изготовленные из композиционных материалов. Данные материалы придают элементам конструкции большую прочность при меньшем весе по сравнению с традиционными материалами. Панели из композиционных материалов в общем случае являются анизотропными. Однако на практике часто их изготавливают из ортотропного материала, для которого характерно различие упругих свойств материала вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений.

В основу расчета данных конструкций положены основные положения теории тонкой упругой пластинки. Математической моделью пластинок из ортотропного материала является бигармоническое уравнение для их прогиба. Задав определенный вид закрепления краев пластины и вид нагружения, определяют значение прогиба. Используя найденное значение прогиба, можно легко определить все компоненты напряженного состояния: изгибающие моменты и перерезывающие силы.

В настоящее время теоретическому исследованию ортотропных пластин посвящены многие работы [1–19]. Для решения задач изгиба ортотропных прямоугольных пластин авторы используют

Kamil F. Shagivaleev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Materials, Structures and Technologies, Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin, 77 Politechnicheskaya St, Saratov, 410054, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9726-5456, ORCID: 0009-0001-6962-9355; e-mail: kfshag@yandex.ru

Dmitry A. Surnin, Postgraduate student of the Department of Transport Construction, Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin, 77 Politechnicheskaya St, Saratov, 410054, Russian Federation; eLIBRARY SPIN- code: 9654-2120, ORCID: 0009-0005-5373-8804; e-mail: dasurnin98@mail.ru

Elena K. Surnina, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Transport Construction, Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin, 77 Politechnicheskaya St, Saratov, 410054, Russian Federation; eLIBRARY SPIN- code: 5584-2282, ORCID: 0000-0003-2500-1256; e-mail: ekurnina@mail.ru

различные методы: методы интегральных преобразований, вариационные методы, метод Канторовича, метод собственных функций и т.д.

В работе [1] задача изгиба ортотропной защемленной по всем сторонам пластинки решается расширенным методом Канторовича, а в работе [2] используется симплектический метод.

Метод начальных функций используется в статье [3] для исследования поведения ортотропной пластины, находящейся под действием нормальной равномерно распределенной по ее поверхности нагрузки.

В работе [4] решение изгиба ортотропной пластины представлено в виде ряда по собственным функциям оператора Гамильтона. Сначала уравнения ортотропной прямоугольной тонкой пластины преобразуют в гамильтонову систему, а соответствующий гамильтонов оператор бесконечной размерности получают с помощью метода разделения переменных. Затем вычисляют собственные значения и соответствующие собственные функции гамильтонова оператора. Наконец, с помощью метода симплектической суперпозиции получают аналитические решения изгиба полностью защемленных ортотропных тонких пластин.

В статье [5] с использованием метода Галеркина решается задача изгиба равномерно нагруженной защемленной прямоугольной пластины.

В работе [6] для определения изгиба тонкой ортотропной прямоугольной пластины авторы используют полиномы Лежандра и Чебышева первого рода.

Метод интерполяции по коэффициенту формы применяют в работе [7] для расчета прямоугольных ортотропных пластин с однородными граничными условиями.

Часто для получения решений задач изгиба ортотропных прямоугольных пластин с различными граничными условиями применяют различные типы метода интегрального преобразования. В работах [8; 9] для решения изгиба пластин с различными сложными граничными условиями используют двойное интегральное конечное синус-преобразование Фурье. Авторы работы [10] задействуют метод обобщенного интегрального преобразования (GITT) для получения точного решения изгиба полностью защемленных пластин. В исследованиях [11–15] также применяют метод конечных интегральных преобразований для решения задач изгиба прямоугольных ортотропных тонких пластин с различными условиями закрепления при различных условиях нагружения.

Несмотря на известные достижения в теории и методах расчета конструкций из композитных материалов, совершенствование методов расчета таких конструкций остается актуальной задачей. В частности, получение простых математических формул (решений), с помощью которых можно оценить прогибы в прямоугольных пластинах из композиционного материала, шарнирно опертых по всему контуру и находящихся под нагрузкой, не проводя длительных вычислений с использованием компьютера, представляет ценность для проектировщиков конструкций, работающих во многих областях промышленности.

Цель исследования — с использованием метода интегрального преобразования (преобразования Лапласа) получить решения изгиба ортотропных прямоугольных тонких пластин, шарнирно опертых по всему контуру и находящихся под действием нормально приложенной нагрузки.

Задачи исследования:

- вывести решения изгиба ортотропных прямоугольных тонких пластин, шарнирно опертых по всему контуру и находящихся под действием нормально приложенной нагрузки;
- исследовать напряженно-деформированное состояние пластины при действии нагрузки, равномерно распределенной по всей поверхности пластины;
- проверить достоверность и точность получаемых по этому методу результатов на основе сравнения их с данными, опубликованными в научной литературе.

2. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрена шарнирно опертая по всему контуру прямоугольная ортотропная пластинка (рис. 1), которая изгибается нормально приложенной нагрузкой $q(x, y)$, распределенной по закону

$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x < c; \\ q_0 \sin \frac{n\pi y}{b}, & \text{при } c \leq x \leq c + \tau; \\ 0, & \text{при } c + \tau < x \leq a, \end{cases} \quad (1)$$

где $n = 1, 3, 5 \dots$

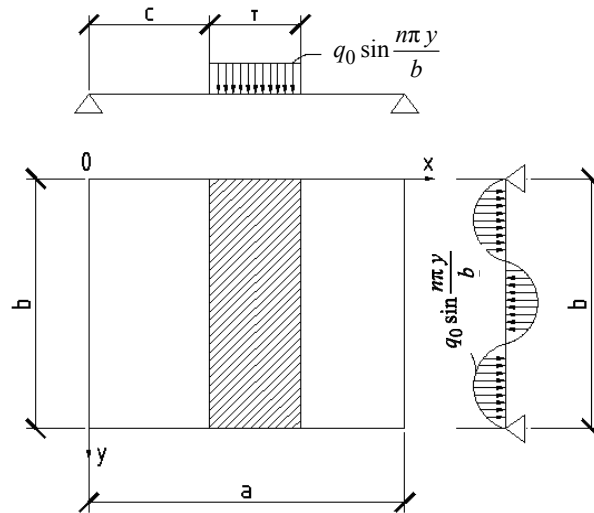


Рис. 1. Схема пластинки при действии полосовой нагрузки

Источники: выполнено Д.А. Сурниным

Figure 1. Diagram of the plate under the action of a strip load

Source: made by D.A. Surnin

Главные направления упругости совпадали с направлениями сторон (рис. 1).

Граничные условия для свободно опертых краев:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 & \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = a; \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 & \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b. \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластинки имеет вид [20; 21]

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x < c; \\ q_0 \sin \frac{n\pi y}{b}, & \text{при } c \leq x \leq c + \tau; \\ 0, & \text{при } c + \tau < x \leq a, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}; \quad D_k = G \frac{h^3}{12}; \quad D_3 = D_1 \mu_2 + 2D_k.$$

E_1, E_2 — модули упругости; μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона; G — модуль сдвига; h — толщина пластинки.

Решение уравнения (3) приняли в виде

$$w(x, y) = f(x) \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), после сокращения всех членов на $\sin \frac{n\pi y}{b}$, получили обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - 2r^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + s^4 f = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x < c; \\ \frac{q_0}{D_1}, & \text{при } c \leq x \leq c + \tau; \\ 0, & \text{при } c + \tau < x \leq a, \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{где } r^2 = \frac{D_3}{D_1} \lambda^2; \quad s^4 = \frac{E_2}{E_1} \lambda^4; \quad \lambda = \frac{n\pi}{b}.$$

Для решения дифференциального уравнения 4 порядка применили операционное исчисление, связанное с преобразованием Лапласа [22]. Преобразование Лапласа позволило уменьшить количество нахождения произвольных постоянных в два раза и снизить математическую сложность решения задачи путем преобразования исходного дифференциального уравнения 4-го порядка в алгебраическое уравнение в пространстве изображений. Решив полученное алгебраическое уравнение в пространстве изображений, получили выражение для перемещений в виде функций комплексной переменной (изображений). Затем полученное выражение для изображений преобразовали обратно в исходную пространственную область с помощью обратного преобразования Лапласа, возвращая решение в физическую плоскость.

Полагая $f(x) \Leftrightarrow W(p)$ и учитывая граничные условия при $x = 0$, по теореме дифференцирования оригинала получили

$$\begin{aligned} f'(x) &\Leftrightarrow pW(p); \\ f''(x) &\Leftrightarrow p^2 W(p) - w'(0); \\ f'''(x) &\Leftrightarrow p^3 W(p) - pw'(0); \\ f^{IV}(x) &\Leftrightarrow p^4 W(p) - p^2 w'(0) - w'''(0), \end{aligned} \quad (6)$$

где p — комплексный параметр; $w'(0)$ и $w'''(0)$ — произвольные постоянные.

Изображение правой части уравнения (5) имеет вид [22]

$$\frac{q_0}{D_1} \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}) e^{-pc}. \quad (7)$$

Переходя в уравнении (5) от оригиналов к выражениям (6), (7), получили операторное уравнение

$$p^4 W(p) - p^2 w'(0) - w'''(0) - 2r^2 [p^2 W(p) - w'(0)] + s^4 W(p) = \frac{q_0}{D_1} \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}) e^{-pc}. \quad (8)$$

Из (8) нашли

$$W(p) = \frac{q_0}{D_1} \frac{(1 - e^{-p\tau}) e^{-pc}}{p(p^4 - 2r^2 p^2 + s^4)} + \frac{p^2 - 2\frac{D_3}{D_1} \lambda^2}{p^4 - 2r^2 p^2 + s^4} w'(0) + \frac{1}{p^4 - 2r^2 p^2 + s^4} w'''(0). \quad (9)$$

Переходя в выражении (9) от изображений к оригиналам [22; 23], получили искомое решение. Произвольные постоянные $w'(0)$ и $w''(0)$ нашли из граничных условий (2) при $x = a$.

Так как при решении уравнения $p^4 - 2r^2 p^2 + s^4$ можем иметь действительные, кратные и мнимые корни, то соответственно получили и три различных искомых решений уравнения.

Ввиду громоздкости все промежуточные операции не приводятся.

Окончательно имеем:

при $r > s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{2s^4 \gamma D_1} \left\{ \left[2\gamma + P_2^2 \operatorname{ch} P_1 (x - c) - P_1^2 \operatorname{ch} P_2 (x - c) \right] \eta(x - c) - \right. \\ \left. - \left[2\gamma + P_2^2 \operatorname{ch} P_1 (x - c - \tau) - P_1^2 \operatorname{ch} P_2 (x - c - \tau) \right] \eta(x - c - \tau) - P_2^2 k_1 \operatorname{sh} P_1 x + P_1^2 k_2 \operatorname{sh} P_2 x \right\} \sin \lambda y, \quad (10)$$

где $\gamma = \sqrt{r^4 - s^4}$; $P_1 = \sqrt{r^2 + \gamma}$; $P_2 = \sqrt{r^2 - \gamma}$;

$$k_1 = \frac{\operatorname{ch} P_1 (a - c) - \operatorname{ch} P_1 (a - c - \tau)}{\operatorname{sh} P_1 a}; \quad k_2 = \frac{\operatorname{ch} P_2 (a - c) - \operatorname{ch} P_2 (a - c - \tau)}{\operatorname{sh} P_2 a};$$

$\eta(x - c)$ — единичная функция, которая при $x \geq c$ равна 1 и при $x < c$ равна 0;

$\eta(x - c - \tau)$ — единичная функция, которая при $x \geq c + \tau$ равна 1 и при $x < c + \tau$ равна 0.

При $r = s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{r^4 D_1} \left\{ \left[1 - \operatorname{chr}(x - c) + \frac{1}{2} r(x - c) \operatorname{shr}(x - c) \right] \eta(x - c) - \right. \\ \left. - \left[1 - \operatorname{chr}(x - c - \tau) + \frac{1}{2} r(x - c - \tau) \operatorname{shr}(x - c - \tau) \right] \eta(x - c - \tau) + k_3 \operatorname{shr} x + k_4 r x \operatorname{chr} x \right\} \sin \lambda y, \quad (11)$$

где

$$k_3 = \frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 r a} \left\{ (2 \operatorname{sh} r a + r a \operatorname{chr} a) [\operatorname{chr}(a - c) - \operatorname{chr}(a - c - \tau)] - \right. \\ \left. - r \operatorname{shr} a [(a - c) \operatorname{shr}(a - c) - (a - c - \tau) \operatorname{shr}(a - c - \tau)] \right\};$$

$$k_4 = -\frac{1}{2 \operatorname{sh} r a} [\operatorname{chr}(a - c) - \operatorname{chr}(a - c - \tau)].$$

При $r < s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{2s^4 \gamma_1 \gamma_2 D_1} \left[(2\gamma_1 \gamma_2 - 2\gamma_1 \gamma_2 Y_1 + r^2 Y_4) \eta(x - c) - (2\gamma_1 \gamma_2 - 2\gamma_1 \gamma_2 \bar{Y}_1 + r^2 \bar{Y}_4) \eta(x - c - \tau) \right. \\ \left. + (-r^2 \eta_1 + 2\gamma_1 \gamma_2 \eta_2) X_2 + (r^2 \eta_2 + 2\gamma_1 \gamma_2 \eta_1) X_3 \right] \sin \lambda y, \quad (12)$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(s^2 + r^2)}; \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(s^2 - r^2)};$$

$$X_1 = \cos \gamma_2 x \operatorname{ch} \gamma_1 x; \quad Y_1 = \cos \gamma_2 (x - c) \operatorname{ch} \gamma_1 (x - c);$$

$$X_2 = \sin \gamma_2 x \operatorname{ch} \gamma_1 x; \quad Y_2 = \sin \gamma_2 (x - c) \operatorname{ch} \gamma_1 (x - c);$$

$$X_3 = \cos \gamma_2 x \operatorname{sh} \gamma_1 x; \quad Y_3 = \cos \gamma_2 (x - c) \operatorname{sh} \gamma_1 (x - c);$$

$$X_4 = \sin \gamma_2 x \operatorname{sh} \gamma_1 x; \quad Y_4 = \sin \gamma_2 (x - c) \operatorname{sh} \gamma_1 (x - c);$$

$$\overline{Y}_1 = \cos \gamma_2 (x - c - \tau) \operatorname{ch} \gamma_1 (x - c - \tau);$$

$$\overline{Y}_2 = \sin \gamma_2 (x - c - \tau) \operatorname{ch} \gamma_1 (x - c - \tau);$$

$$\overline{Y}_3 = \cos \gamma_2 (x - c - \tau) \operatorname{sh} \gamma_1 (x - c - \tau);$$

$$\overline{Y}_4 = \sin \gamma_2 (x - c - \tau) \operatorname{sh} \gamma_1 (x - c - \tau).$$

$$\eta_1 = [A_2(B_4 - C_4) + A_3(B_1 - C_1)](A_2^2 + A_3^2)^{-1};$$

$$\eta_2 = [A_2(B_1 - C_1) - A_3(B_4 - C_4)](A_2^2 + A_3^2)^{-1};$$

$$A_1 = \cos \gamma_2 a \operatorname{ch} \gamma_1 a; \quad B_1 = \cos \gamma_2 (a - c) \operatorname{ch} \gamma_1 (a - c);$$

$$A_2 = \sin \gamma_2 a \operatorname{ch} \gamma_1 a; \quad B_2 = \sin \gamma_2 (a - c) \operatorname{ch} \gamma_1 (a - c);$$

$$A_3 = \cos \gamma_2 a \operatorname{sh} \gamma_1 a; \quad B_3 = \cos \gamma_2 (a - c) \operatorname{sh} \gamma_1 (a - c);$$

$$A_4 = \sin \gamma_2 a \operatorname{sh} \gamma_1 a; \quad B_4 = \sin \gamma_2 (a - c) \operatorname{sh} \gamma_1 (a - c);$$

$$C_1 = \cos \gamma_2 (a - c - \tau) \operatorname{ch} \gamma_1 (a - c - \tau);$$

$$C_2 = \sin \gamma_2 (a - c - \tau) \operatorname{ch} \gamma_1 (a - c - \tau);$$

$$C_3 = \cos \gamma_2 (a - c - \tau) \operatorname{sh} \gamma_1 (a - c - \tau);$$

$$C_4 = \sin \gamma_2 (a - c - \tau) \operatorname{sh} \gamma_1 (a - c - \tau).$$

Обращаем внимание на то, что единичные функции $\eta(x - c)$ и $\eta(x - c - \tau)$ приняты только для сокращения записи выражений. Они указывают, с какого значения координаты x появляется в выражении данное слагаемое.

Имея $w(x, y)$, можно получить выражения для $M_x, M_y, N_x, N_y, H_{xy}$ [20; 21].

Выражения (10), (11), (12) позволяют рассчитать ортотропную пластинку при любом положении полосовой нагрузки и при различных размерах участка нагружения τ . Из выражений (10), (11), (12) можно получить различные частные решения.

Положив в выражениях (10), (11), (12) $c = 0$ и $\tau = a$, получили решение для случая, когда нагрузка действует по всей поверхности пластинки (рис. 2).

При $r > s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{2s^4 \gamma D_1} \left(2\gamma + P_2^2 \operatorname{ch} P_1 x - P_1^2 \operatorname{ch} P_2 x - P_2^2 k_5 \operatorname{sh} P_1 x + P_1^2 k_6 \operatorname{sh} P_2 x \right) \sin \lambda y, \quad (13)$$

где

$$k_5 = \frac{\operatorname{ch} P_1 a - 1}{\operatorname{sh} P_1 a}, \quad k_6 = \frac{\operatorname{ch} P_2 a - 1}{\operatorname{sh} P_2 a}.$$

При $r = s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{r^4 D_1} \left(1 - chrx + \frac{1}{2} r x shrx + k_7 shrx + k_8 r x chrx \right) \sin \lambda y, \quad (14)$$

где

$$k_7 = \frac{1}{2 sh^2 ra} \left[(2 shra + rachra)(chra - 1) - ra sh^2 ra \right], \quad k_8 = -\frac{1}{2 shra} (chra - 1).$$

При $r < s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{2s^4 \gamma_1 \gamma_2 D_1} \left[2\gamma_1 \gamma_2 - 2\gamma_1 \gamma_2 X_1 + r^2 X_4 + (-r^2 \eta_3 + 2\gamma_1 \gamma_2 \eta_4) X_2 + \right. \\ \left. + (r^2 \eta_4 + 2\gamma_1 \gamma_2 h_3) X_3 \right] \sin \lambda y, \quad (15)$$

где

$$\eta_3 = \frac{sh \gamma_1 a}{\cos \gamma_2 a + ch \gamma_1 a}, \quad \eta_4 = -\frac{\sin \gamma_2 a}{\cos \gamma_2 a + ch \gamma_1 a}.$$

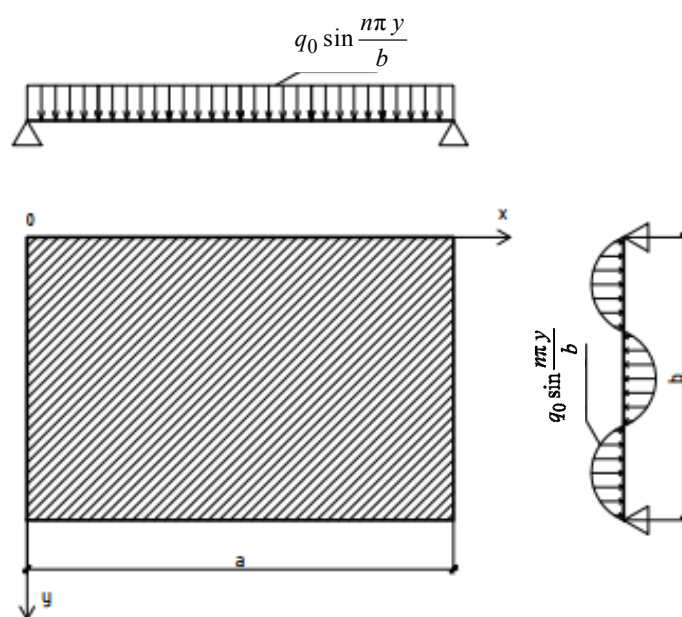


Рис. 2. Схема пластинки при действии неравномерно распределенной нагрузки по всей поверхности пластинки

Источник: выполнено Д.А. Сурниным

Figure 2. Diagram of the plate under the action of an unevenly distributed load over the entire plate surface

Source: made by D.A. Surnin

Выражениями (10), (11), (12) можно воспользоваться при получении решений для свободно опертой ортотропной прямоугольной пластинки при действии нагрузки, равномерно распределенной вдоль оси x и распределенной вдоль оси y по любому закону. С той целью нагрузку $q(x, y)$ надо представить в виде тригонометрического ряда.

Так, в случае действия нагрузки, равномерно распределенной по всей поверхности пластинки, имеем

$$q(x, y) = q_0 \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \lambda y, \quad (16)$$

где $n = 1, 3, 5$.

При $r > s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{D_1} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s^4 \gamma_n} \times \left(2\gamma + P_2^2 ch P_1 x - P_1^2 ch P_2 x - P_2^2 k_5 sh P_1 x + P_1^2 k_6 sh P_2 x \right) \sin \lambda y. \quad (17)$$

При $r = s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{D_1} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \frac{1}{r^4 n} \left(1 - ch r x + \frac{1}{2} r x sh r x + k_7 sh r x + k_8 r x ch r x \right) \sin \lambda y. \quad (18)$$

При $r < s$:

$$w(x, y) = \frac{q_0}{D_1} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,..}^{\infty} \frac{1}{s^4 \gamma_1 \gamma_2 n} \times \left[2\gamma_1 \gamma_2 - 2\gamma_1 \gamma_2 X_1 + r^2 X_4 + \left(-r^2 \eta_3 + 2\gamma_1 \gamma_2 \eta_4 \right) X_2 + \right. \\ \left. + \left(r^2 \eta_4 + 2\gamma_1 \gamma_2 \eta_3 \right) X_3 \right] \sin \lambda y. \quad (19)$$

3. Результаты и обсуждение

В качестве примера для исследования напряженно-деформированного состояния рассмотрена ортотропная прямоугольная пластинка с отношением сторон $\frac{b}{a} = 1,5$. Материал пластинки — углепластик [24]:

$$E_1 = 1,4 \times 10^4 \text{ кН/см}^2; \quad E_2 = 0,097 \times 10^4 \text{ кН/см}^2; \quad G = 0,55 \times 10^3 \text{ кН/см}^2; \\ \mu_1 = 0,29; \quad \mu_2 = 0,02. \quad (20)$$

В табл. 1 и 2 приведены результаты расчета ортотропной прямоугольной пластинки при действии равномерно распределенной нагрузки.

Значения, приведенные в табл. 1 и 2, необходимо умножить: для w на $q_0 \frac{a^4}{D_2}$; для M_x на $q_0 a^2$;

для M_y на $q_0 a^2$; для N_x на $q_0 a$.

Результаты расчета (табл. 2) показали, что при вычислении прогиба достаточно взять три члена ряда; при вычислении M_x — 5 членов ряда; при вычислении M_y и N_x — 7 членов ряда.

Полученные выражения позволяют решать многочисленные задачи оптимального проектирования пластинок. В работе [20] указано, как можно решить задачу, если пластинка изготовлена из ортотропного материала так, что главные направления упругости материала не совпадают с направлениями координатных линий x и y .

Таблица 1 / Table 1

Результаты расчета ортотропной пластинки при действии равномерно распределенной нагрузки /
Calculation results of the orthotropic plate under the action of a uniformly distributed load

x	$w\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$M_x\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$M_y\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$N_x\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$N_y\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$N_{x,y}\left(x, \frac{b}{2}\right)$
0	0	0	0	0,517665	0	0
0,1a	0,000292	0,046344	0,001232	0,414555	0	0
0,2a	0,000553	0,082382	0,002209	0,312134	0	0
0,3a	0,000757	0,108186	0,002921	0,208866	0	0
0,4a	0,000886	0,123707	0,003355	0,104684	0	0
0,5a	0,0009305	0,1288888	0,0035014	0	0	0
0,6a	0,000886	0,123707	0,003355	– 0,104684	0	0
0,7a	0,000757	0,108186	0,002921	– 0,208866	0	0
0,8a	0,000553	0,082382	0,002209	– 0,312134	0	0
0,9a	0,000292	0,046344	0,001232	– 0,414555	0	0
a	0	0	0	– 0,517665	0	0

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Сурниным / S o u r c e: made by D.A. Surnin

Таблица 2 / Table 2

Максимальные значения перемещения, моментов и перерезывающей силы
в ортотропной пластинке при разном числе удерживающих членов ряда /
Maximum values of displacement, moments and shear force
in the orthotropic plate for different numbers of retained series terms

Число членов ряда / Number of terms in series	$w_{\max}$	$(M_x)_{\max}$	$(M_y)_{\max}$	$(N_x)_{\max}$	$N_y\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$N_{x,y}\left(x, \frac{b}{2}\right)$
1	0,00104302	0,1454828	0,0074583	0,60942727	0	0
3	0,0009305	0,1292586	0,0040447	0,52788353	0	0
5	0,0009277	0,1288888	0,00359	0,51996853	0	0
7	0,0009274	0,128863	0,0035014	0,51766495	0	0
9	0,0009274	0,1288558	0,0034744	0,5166987	0	0

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Сурниным / S o u r c e: made by D.A. Surnin

Положив во всех приведенных выражениях $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, получим решения для изотропной пластинки.

Для проверки достоверности и точности получаемых по данному методу результатов было проведено сравнение их с данными, опубликованными в научной литературе [20; 25].

Был выполнен расчет ортотропной прямоугольной пластинки с исходными параметрами по формуле (с применением двойного тригонометрического ряда), приведенной в [20]. При вычислении было взято 16 членов ряда. В результате расчетов получили максимальный прогиб $w_{\max} = 0,000967 q_0 \frac{a^4}{D_2}$.

Расхождение значений, полученных по формулам из работы [20], и значений, вычисленных с использованием формулы (19), составило 3,8 %.

Также был выполнен по полученным в данной работе выражениям расчет изотропной прямоугольной пластинки с исходными геометрическими параметрами и $\mu = 0,3$.

Результаты расчета представлены в табл. 3.

Таблица 3 / Table 3

**Результаты расчета изотропной пластинки при действии равномерно распределенной нагрузки /
Results of calculation of the isotropic plate under the action of a uniformly distributed load**

Число членов ряда / Number of terms in series	$w_{\max}$	$(M_x)_{\max}$	$(M_y)_{\max}$	$(N_x)_{\max}$	$N_y\left(x, \frac{b}{2}\right)$	$N_{x,y}\left(x, \frac{b}{2}\right)$
1	0,007919	0,084566	0,056979	0,474617	0	0
3	0,007727	0,081338	0,050424	0,431638	0	0
5	0,007724	0,081201	0,04998	0,426736	0	0
7	0,007724	0,081201	0,049894	0,425309	0	0
9	0,007724	0,081201	0,049894	0,424711	0	0

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Сурниным / S o u r c e: made by D.A. Surnin

Значения, приведенные в табл. 3, необходимо умножить: для w на $q_0 \frac{a^4}{D_2}$; для M_x на $q_0 a^2$; для M_y на $q_0 a^2$; для N_x на $q_0 a$.

Результаты расчета табл. 3 полностью совпадают с данными, приведенными в работе [25].

Анализ результатов выполненных расчетов показал, что при расчетах ортотропной прямоугольной пластинки по полученным формулам при действии полосовой нормально приложенной нагрузки получается более быстрая сходимость решений и значительно уменьшается вычислительная работа по сравнению с ранее применяемыми методами.

Проделав аналогичные операции, можно получить решения и при других вариантах граничных условий.

4. Заключение

В ходе проведенного исследования следует отметить следующее:

1. На основе операционного исчисления, связанного с преобразованием Лапласа, впервые получены в общем виде точные аналитические решения для ортотропной прямоугольной пластинки при действии полосовой нормально приложенной нагрузки.

2. Практический расчет пластин с использованием полученных решений не вызывает затруднений, так как расчет сводится к вычислению гипербола-тригонометрических функций при малых значениях аргумента, при больших значениях аргумента формулы упрощаются и расчет сводится к вычислению показательных и тригонометрических функций.

3. Представленные результаты показывают, что при расчетах ортотропной прямоугольной пластинки по полученным формулам при действии полосовой нормально приложенной нагрузки получается более быстрая сходимость решений и значительно уменьшается вычислительная работа по сравнению с ранее применяемыми методами.

4. Полученные аналитические выражения позволяют рассчитать ортотропную прямоугольную пластинку при любом положении полосовой нагрузки и при различных размерах участка нагружения, а также при действии локальных и сосредоточенных нагрузок.

5. Предложенный подход может быть использован при расчете ортотропных прямоугольных пластинок и при других вариантах граничных условий.

6. Результаты работы могут быть использованы инженерами, аспирантами и студентами.

Список литературы

1. Leng B., Xu H., Yan Y., Wang K., Yang G., Meng Y. An Analytical Solution for the Bending of Anisotropic Rectangular Thin Plates with Elastic Rotation Supports // Buildings. 2024. Vol. 14. No. 3. P. 756. <https://doi.org/10.3390/buildings14030756>

2. Lim C.W., Cui S., Yao W. On new symplectic elasticity approach for exact bending solutions of rectangular thin plates with two opposite sides simply supported // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. No. 16. P. 5396–5411. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.01.007>
3. Голоскоков Д.П., Матросов А.В. Метод начальных функций в расчете изгиба защемленной по контуру тонкой ортотропной пластинки // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2021. Т. 17. № 4. С. 330–344. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.402> EDN: RIFCWU
4. Eburlitu F., Alatanang L. Analytical bending solutions of clamped orthotropic rectangular thin plates with the symplectic superposition method // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2018. Vol. 39. No. 3. P. 311–323. <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380092>
5. Mbakogu F.C., Pavlovic M.N. Bending of clamped orthotropic rectangular plates: A variational symbolic solution // *Computers and Structures*. 2000. Vol. 77. No. 2. P. 117–128. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(99\)00217-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(99)00217-5) EDN: XNRNDF
6. Germider O.V., Popov V.N. Mathematical modeling of bending of a thin orthotropic plate clamped along the contour *Vestnik of Saint Petersburg University // Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2024. Vol. 20. No. 3. P. 310–323. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.301>
7. Коробко А.В., Савин С.Ю. Расчет прямоугольных ортотропных пластинок с однородными граничными условиями методом интерполяции по коэффициенту формы // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2011. № 1. С. 11–15. EDN: NDLOUX
8. Li R., Zhong Y., Tian B., Yu L. On the finite integral transform method for exact bending solutions of fully clamped orthotropic rectangular thin plates // *Applied Mathematics Letters*. 2009. Vol. 22. P. 1821–1827. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.07.003>
9. Li R., Tian B., Zhong Y. Analytical bending solutions of free orthotropic rectangular thin plates under arbitrary loading // *Meccanica*. 2013. Vol. 48. No. 10. P. 2497–2510. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9764-1>
10. An C., Gu J., Su J. Exact solution of bending problem of clamped orthotropic rectangular thin plates // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2016. Vol. 38. No. 2. P. 601–607. <https://doi.org/10.1007/s40430-015-0329-1> EDN: XPEDZJ
11. Zhang S., Xu L. Bending of rectangular orthotropic thin plates with rotationally restrained edges: A finite integral transform solution // *Applied Mathematical Modelling*. 2017. Vol. 46. P. 48–62. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.01.053>
12. Zhang S., Xu L. Analytical solutions for flexure of rectangular orthotropic plates with opposite rotationally restrained and free edges // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2018. Vol. 18. P. 965–972. <https://doi.org/10.1016/j.acme.2018.02.005>
13. He Y., Duan M., Su J. Bending of rectangular orthotropic plates with rotationally restrained and free edges: Generalized integral transform solutions // *Engineering Structures*. 2021. Vol. 247. Article no. 113129. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113129>
14. Xu Q., Yang Z., Ullah S., Zhang J., Gao Y. Analytical bending solutions of orthotropic rectangular thin plates with two adjacent edges free and the others clamped or simply supported using finite integral transform method // *Advances in Civil Engineering*. 2020. Vol. 2020. Article no. 8848879. <https://doi.org/10.1155/2020/8848879>
15. Fu G., Tuo Y., Su B., Shi C., Su J. Bending of variable thickness rectangular thin plates resting on a double-parameter foundation: Integral transform solution // *Engineering Computations*. 2022. Vol. 39. No. 7. P. 2689–2704. <https://doi.org/10.1108/EC-11-2021-0692>
16. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Анализ краевых эффектов и основного напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов с применением композиционных материалов по уточнённой теории // *Конструкции из композиционных материалов*. 2021. № 1 (161). С. 3–9. https://doi.org/10.52190/2073-2562_2021_1_3 EDN: SBEAFX
17. Сухотерин М.В., Сосновская А.А. Устойчивость высокоупругой прямоугольной пластинки с защемленно-свободными краями при одноосном сжатии // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2024. Т. 24. № 2. С. 276–283. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2024-24-2-276-283> EDN: KGNTES
18. Трещев А.А., Юценко Н.С. К расчету ортотропной пластины с учетом нелинейной зависимости жесткостных характеристик от вида напряженного состояния // *Фундаментальные поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2022–2023 годы : научные труды РААСН : в 2 томах*. Москва : Издательство АСВ, 2024. С. 429–437. EDN: IFGRJM
19. Eshmatov B.Kh., Mirsaidov M.M., Abdikarimov R.A., Vatin N.I. Buckling of a viscoelastic anisotropic fiber reinforced plate under rapidly increasing shear load // *Magazine of Civil Engineering*. 2024. Vol. 17. No. 5. Article no. 12910. <https://doi.org/10.34910/MCE.12910>
20. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. Москва, Ленинград : Гостехиздат, 1947. 355 с.
21. Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Копнов В.А., Поспелов А.Д., Синюков А.М. Пластинки и оболочки из стеклопластиков / под ред. И. И. Гольденблата. Москва : Высшая школа. 1970. 407 с.

22. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Москва : Наука, 1968. 416 с.
23. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1 : Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. Москва : Наука, 1969. 343 с. URL: <https://djvu.online/file/rt93OK3K3rn0L> (дата обращения: 20.05.2025).
24. Смердов А.А., Буянов И.А., Чуднов И.В. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2012. № 8. С. 70–77. EDN: PBJFXB
25. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва : Наука, 1966. 635 с.

References

1. Leng B., Xu H., Yan Y., Wang K., Yang G., Meng Y. An Analytical Solution for the Bending of Anisotropic Rectangular Thin Plates with Elastic Rotation Supports. *Buildings*. 2024;14(3):756. <https://doi.org/10.3390/buildings14030756>
2. Lim C.W., Cui S., Yao W. On new symplectic elasticity approach for exact bending solutions of rectangular thin plates with two opposite sides simply supported. *International Journal of Solids and Structures*. 2007;44(16):5396–5411. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.01.007>
3. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Method of initial functions in analyses of the bending of a thin orthotropic plate clamped along the contour. *Bulletin of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2021;17(4):330–344. (In Russ.) <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.402> EDN: RIFCWU
4. Eburlitu F., Alataancang L. Analytical bending solutions of clamped orthotropic rectangular thin plates with the symplectic superposition method. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2018;39(3):311–323. <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380092>
5. Mbakogu F.C., Pavlovic M.N. Bending of clamped orthotropic rectangular plates: A variational symbolic solution. *Computers and Structures*. 2000;77(2):117–128. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(99\)00217-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(99)00217-5) EDN: XNRNDF
6. Germider O.V., Popov V.N. Mathematical modeling of bending of a thin orthotropic plate clamped along the contour *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2024;20(3):310–323. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.301>
7. Korobko A.V., Savin S.Yu. Calculation of rectangular orthotropic plates with homogeneous boundary conditions with usage of interpolation technique by shape factor. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2011;1(1):11–15. (In Russ.) EDN: NDLOUX
8. Li R., Zhong Y., Tian B., Yu L. On the finite integral transform method for exact bending solutions of fully clamped orthotropic rectangular thin plates. *Applied Mathematics Letters*. 2009;22:1821–1827. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.07.003>
9. Li R., Tian B., Zhong Y. Analytical bending solutions of free orthotropic rectangular thin plates under arbitrary loading. *Meccanica*. 2013;48(10):2497–2510. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9764-1>
10. An C., Gu J., Su J. Exact solution of bending problem of clamped orthotropic rectangular thin plates. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2016;38(2):601–607. <https://doi.org/10.1007/s40430-015-0329-1> EDN: XPEDZJ
11. Zhang S., Xu L. Bending of rectangular orthotropic thin plates with rotationally restrained edges: A finite integral transform solution. *Applied Mathematical Modelling*. 2017;46:48–62. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.01.053>
12. Zhang S., Xu L. Analytical solutions for flexure of rectangular orthotropic plates with opposite rotationally restrained and free edges. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2018;18:965–972. <https://doi.org/10.1016/j.acme.2018.02.005>
13. He Y., Duan M., Su J. Bending of rectangular orthotropic plates with rotationally restrained and free edges: Generalized integral transform solutions. *Engineering Structures*. 2021;247:113129. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113129>
14. Xu Q., Yang Z., Ullah S., Zhang J., Gao Y. Analytical bending solutions of orthotropic rectangular thin plates with two adjacent edges free and the others clamped or simply supported using finite integral transform method. *Advances in Civil Engineering*. 2020;2020:8848879. <https://doi.org/10.1155/2020/8848879>
15. Fu G., Tuo Y., Su B., Shi C., Su J. Bending of variable thickness rectangular thin plates resting on a double-parameter foundation: Integral transform solution. *Engineering Computations*. 2022;39(7):2689–2704. <https://doi.org/10.1108/EC-11-2021-0692>
16. Firsanov V.V., Gavva L.M. Analysis of edge effects and main stress-strain state of structurally-anisotropic aircraft panels comprising composite materials in refined theory. *Composite materials constructions*. 2021;1(161):3–9. (In Russ.) https://doi.org/10.52190/2073-2562_2021_1_3 EDN: SBEAFX
17. Sukhoterin M.V., Sosnovskaya A.A. Stability of a highly elastic rectangular plate with clamped-free edges under uniaxial compression. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2024;24(2): 276–283. (In Russ.) <http://doi.org/10.17586/2226-1494-2024-24-2-276-283> EDN: KGNTES

18. Treshchev A.A., Yushchenko N.S. To calculation of orthotropic plate with considering the nonlinear dependence of rigidity characteristics on the type of stress state. *Fundamental search and applied research of the RAASN on scientific support for the development of architecture, urban planning and the construction industry of the Russian Federation in 2022-2023: scientific works of RAASN*. In 2 volumes. Moscow: ASV Publ.; 2024. P. 429–437. (In Russ.) EDN: IFGRJM
19. Eshmatov B.Kh., Mirsaidov M.M., Abdikarimov R.A., Vatin N.I. Buckling of a viscoelastic anisotropic fiber reinforced plate under rapidly increasing shear load. *Magazine of Civil Engineering*. 2024;17(5):12910. <https://doi.org/10.34910/MCE.129.10>
20. Lekhnitsky S.G. *Anisotropic plates*. Moscow, Leningrad. Gostekhizdat Publ.; 1947. (In Russ.)
21. Bazhanov V.L., Goldenblat I.I., Kopnov V.A., Pospelov A.D., Sinyukov A.M. *Fiberglass Plates and Shells*. I.I. Goldenblat (ed.). Moscow: Vysshaya Shkola Publ.; 1970. (In Russ.)
22. Aramanovich I.G., Lunts G.L., Elsgolts L.E. *Functions of a complex variable. Operational calculus. Stability theory*. Moscow: Nauka Publ.; 1968. (In Russ.)
23. Bateman G., Erdelyi A. *Tables of integral transforms*. Vol. 1. Fourier, Laplace, Mellin transforms. Moscow: Nauka Publ.; 1969. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/rt93OK3K3rn0L> (accessed: 20.05.2025).
24. Smerdov A.A., Buyanov I.A., Chudnov I.V. Analysis of optimal combinations of requirements to developed CFRP for large space-rocket designs. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2012;8:70–77. (In Russ.) EDN: PBJFXB
25. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York; 1959.