

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-4-283-293

EDN: CEBUAP

Научная статья / Research article

Использование объемных суперэлементов при нелинейных расчетах плитно-балочных конструкций в вычислительном комплексе ПРИНС

В.П. Агапов¹, А.С. Маркович^{1,2}✉¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ markovich-as@rudn.ru

Поступила в редакцию: 11 апреля 2025 г.

Доработана: 13 июня 2025 г.

Принята к публикации: 3 июля 2025 г.

Аннотация. Описана методика нелинейного статического расчета комбинированных плитно-балочных конструкций с использованием конечных элементов, построенных с применением трехмерной теории упругости и пластичности. При этом используются многослойные элементы плит и оболочек, а также многослойные объемные балочные элементы (суперэлементы), позволяющие рассчитывать конструкции, выполненные из неоднородных материалов, в том числе и железобетонные. В большинстве применяемых в настоящее время программных комплексах конечные элементы балок строятся либо на основе классической теории сопротивления материалов, либо на основе трехмерной теории упругости. При использовании трехмерной теории вводятся ограничения по форме и размерам поперечных сечений, а все характеристики приводятся к точкам, лежащим в торцевых сечениях балок на их осях. Оба этих подхода затрудняют одновременный учет физической и геометрической нелинейности, поэтому разработка альтернативных методик нелинейного статического расчета конструкций является актуальной задачей. Для устранения этого недостатка в данной работе предложен суперэлемент для моделирования железобетонных колонн и балок в составе комбинированных плитно-балочных расчетных схем. На сегодняшний день аналоги предлагаемого суперэлемента для расчета железобетонных конструкций отсутствуют в известных коммерческих конечно-элементных продуктах. Приведенная методика адаптирована к вычислительному комплексу ПРИНС, разрабатываемому авторами для использования в инженерно-технических и научных целях. Для демонстрации возможностей этого комплекса приведен тестовый пример расчета несущей способности двухэтажной рамы. Вычислительный комплекс ПРИНС может быть эффективно использован инженерами проектных и научных организаций для решения инженерных задач, связанных с расчетом железобетонных конструкций.

Ключевые слова: метод конечных элементов, вычислительный комплекс ПРИНС, строительные конструкции, массивные железобетонные сооружения, физическая нелинейность, пластичность, теория течения, механика деформируемых тел

Вклад авторов: Агапов В.П. — научное руководство, концепция исследования, валидация; Маркович А.С. — написание текста, концепция исследования, обзор литературы, научное рецензирование и редактирование. Все авторы ознакомлены с окончательной версией статьи и одобрили ее.

Для цитирования: Агапов В.П., Маркович А.С. Использование объемных суперэлементов при нелинейных расчетах плитно-балочных конструкций в вычислительном комплексе ПРИНС // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 4. С. 283–293. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-283-293>

Агапов Владимир Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovvp@mail.ru

Маркович Алексей Семенович, доктор технических наук, доцент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; профессор кафедры металлических и деревянных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 9203-1434; ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

© Агапов В.П., Маркович А.С., 2025

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Using Solid Superelements for Nonlinear Analysis of Slab-and-Beam Structures in the PRINS Software

Vladimir P. Agapov¹, Alexey S. Markovich^{1,2}

¹ RUDN University, Moscow, Russian Federation

² Moscow State University Of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ markovich-as@rudn.ru

Received: April 11, 2025

Revised: June 13, 2025

Accepted: July 3, 2025

Abstract. The article presents a methodology for nonlinear static analysis of slab-and-beam structures using finite elements constructed using the three-dimensional theory of elasticity and plasticity. Multilayer plate/shell elements and solid beam elements (superelements) are used to analyze structures made of heterogeneous materials, including reinforced concrete. In most currently used software products, beam finite elements are constructed either on the basis of the classical theory of strength of materials or on the basis of the three-dimensional elasticity theory. When using the three-dimensional theory, restrictions are introduced on the shape and size of cross-sections, and all characteristics are reduced to points lying in the end sections of the beams along their axes. Both of these approaches make it difficult to simultaneously take into account physical and geometric nonlinearity, therefore the development of alternative methods for nonlinear static analysis of structures is relevant. To avoid this drawback, a superelement for modeling reinforced concrete columns and beams as part of combined slab-and-beam systems is proposed in this article. To date, there are no alternatives of the proposed superelement for analyzing reinforced concrete structures in known commercial finite element products. The developed methodology is adapted to the PRINS software. An example of calculating the load-bearing capacity of a two-story frame using this software is given. The PRINS software can be used by engineers of design and scientific organizations to solve engineering problems related to the analysis of reinforced concrete structures.

Keywords: finite element method, PRINS computational program, building structures, solid reinforced concrete structures, physical nonlinearity, plasticity, flow theory, structural mechanics

Authors' contribution: Agapov V.P. — supervision, conceptualization, validation; Markovich A.S. — writing, conceptualization, literature review, peer review and editing. All authors read and approved the final version of the article.

For citation: Agapov V.P., Markovich A.S. Using solid superelements for nonlinear analysis of slab-and-beam structures in the PRINS software. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(4):283–293. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-4-283-293>

1. Введение

Предпосылки для расчета железобетонных конструкций в нелинейной постановке обусловлены развитием компьютерных технологий, с одной стороны, и развитием численных методов строительной механики, в первую очередь метода конечных элементов [1–4], — с другой. При этом нелинейное деформирование бетона с учетом реальных упругопластических свойств в условиях объемного напряженного состояния исследовалось учеными на протяжении XX века¹ [5–9].

Очевидно, что современные методы расчеты железобетонных конструкций должны разрабатываться на основании численных методов строительной механики с учетом нелинейных эффектов, присущих бетону и арматуре и установленных экспериментальным путем.

При выполнении нелинейных расчетов важной задачей является корректное вычисление усилий и напряжений, возникающих в бетоне и арматуре. При использовании одномерных стержневых конечных элементов балочного (рамного) типа для моделирования колонн или балок, в силу особенно-

¹ CEB, CEB-FIP Model Code 1990 / CEB Bulletin d'Information No. 213/214. Lausanne: Comite Euro-International du Beton, 1993. 437 p.

Vladimir P. Agapov, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovpb@mail.ru

Alexey S. Markovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Professor of the Department of Metal and Timber Structures, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9203-1434, ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

стей построения этих элементов, значения усилий в бетоне и арматуре, равно как и прочность конструкции, не могут быть точно определены. Один из путей решения этой задачи видится в использовании для моделирования тела колонн (и/или балок) конечных элементов сплошной среды (тип solid). С одной стороны, применение элементов сплошной среды ведет к неоправданному увеличению числа неизвестных расчетной схемы и количеству разрешающих уравнений, что требует дополнительных вычислительных ресурсов для решения задач большой размерности. С другой стороны, для моделирования арматуры, располагаемой в теле конструкции, обычно используются одномерные стержневые конечные элементы, заключенные в узлах элементов сплошной среды. Для учета всех особенностей расположения арматуры в теле бетона (длины, шага, защитного слоя и т.д.) от расчетчика требуются значительные временные затраты для построения корректной модели армированной конструкции.

Для устранения указанных недостатков авторами предлагается объемный суперэлемент, предназначенный для моделирования железобетонных колонн (и/или балок). Данный конечный элемент построен на основе объемной теории упругости и пластичности. Суперэлемент вдоль оси разбивается на определенное количество слоев, а в пределах слоя составляется из объемных элементов и включает в себя возможность автоматического задания параметров армирования и генерации арматурных стержней. Тем самым для пользователя исключается необходимость ручного построения арматурных стержней в теле бетонной конструкции, что существенным образом упрощает процесс создания расчетных моделей реальных конструкций.

2. Метод

Предлагается методика физически и геометрически нелинейного статического расчета железобетонных плитно-балочных конструкций с использованием разработанных ранее профессором В.П. Агаповым многослойных конечных элементов [10]. Методика заключается в следующем. Решение задачи с помощью вычислительной программы (решателя), исключая формирование блока исходных данных и визуализацию результатов, делится на два этапа: составление разрешающего уравнения и его решение. Авторы статьи для нелинейного статического расчета используют уравнение равновесия, полученное в работе [11] и имеющее вид

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{NL_1} + \mathbf{K}_{NL_2}) \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{P}, \quad (1)$$

где $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_{NL_1}$ и $\mathbf{K}_{NL_2}$ — матрицы жесткости нулевого, первого и второго порядков; $\mathbf{K}_\sigma$ — матрица начальных напряжений; $\Delta \mathbf{u}$ и $\Delta \mathbf{P}$ — векторы приращений узловых перемещений и нагрузок соответственно.

Формулы для вычисления всех приведенных выше матриц представлены в [11]. Особенностью предлагаемого алгоритма является использование для моделирования плитно-балочных конструкций конечных элементов, основанных на трехмерной теории упругости и пластичности. Для моделирования колонн и балок используется суперэлемент, составленный из объемных шестигранных конечных элементов (бетон) и одномерных стержневых элементов (арматура) (рис. 1), а для моделирования плит — многослойный элемент пластинки/оболочки (рис. 2), особенности построения которого рассмотрены в работе [12].

Арматура в плите представляется слоем эквивалентной толщины с однонаправленными свойствами.

Как видно из рис. 1, суперэлемент колонны (или балки) разбивается вдоль оси на определенное количество слоев, а в пределах слоя составляется из объемных элементов. Все характеристики суперэлемента приводятся к узлам, лежащим в его торцевых сечениях. Узлы сетки на торцах суперэлемента и плиты в месте стыка должны совпадать. Это обеспечивает совместность перемещений и в то же время податливость в месте соединения плиты с колонной.

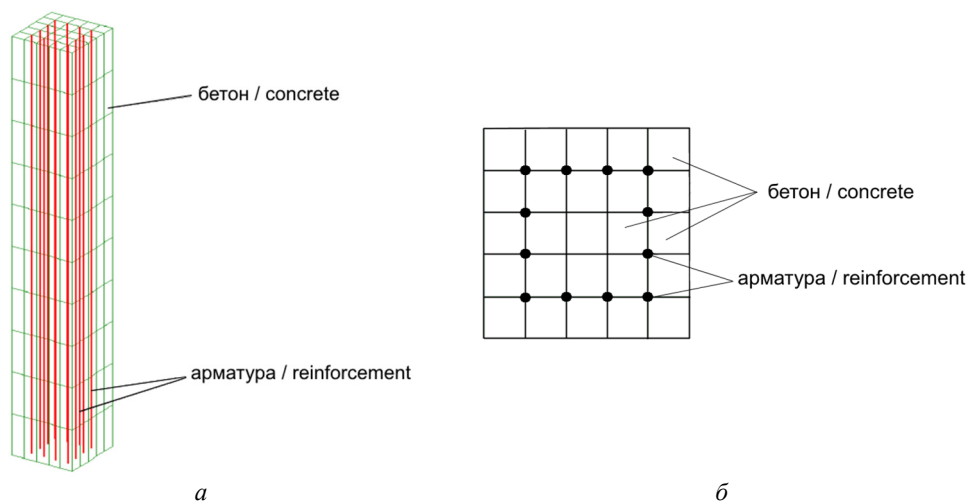


Рис. 1. Суперэлемент железобетонной колонны:
a — общий вид конечного элемента; *б* — расположение арматуры в поперечном сечении колонны
 И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем

Figure 1. Superelement of reinforced concrete column:
a — general view of the finite element; *б* — position of reinforcement in the cross section of the column
 S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich

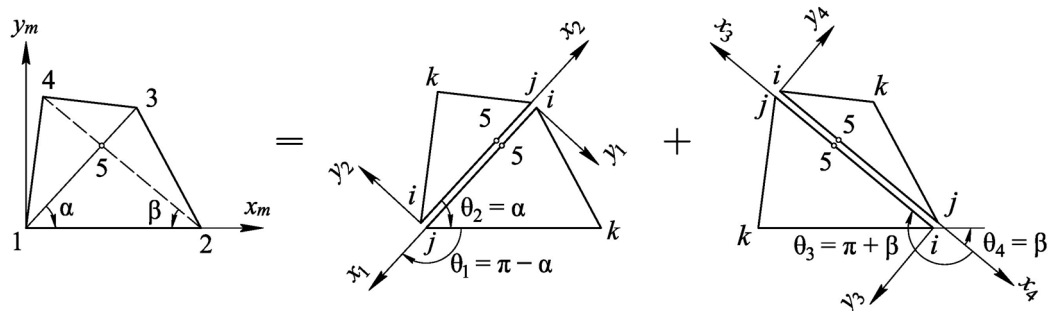


Рис. 2. Составной четырехугольный конечный элемент пластинки/оболочки
 И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем

Figure 2. Combined quadrilateral plate/shell finite element
 S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich

Так как способы вычисления матричных характеристик используемых конечных элементов подробно описаны в работах [10; 11], в данной статье они не рассматриваются. Отметим, однако, особенность вычисления матрицы жесткости нулевого порядка $\mathbf{K}$ при учете физической нелинейности. В этом случае не удастся получить аналитическое выражение для матрицы $\mathbf{K}$ в явном виде, так как ее элементы зависят от изменяющихся на шаге нагружения свойств материала. Однако ее можно найти в численном виде в начале и конце шага. Если обозначить эти матрицы, как $\mathbf{K}_0$ и $\mathbf{K}_1$ соответственно, то матрицу $\mathbf{K}$ можно приближенно найти как полусумму матриц $\mathbf{K}_0$ и $\mathbf{K}_1$:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1). \quad (2)$$

Представим матрицу $\mathbf{K}$ в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K}. \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) получаем

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1) - \mathbf{K}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0). \quad (4)$$

Учитывая формулу (4), уравнение (1) принимает вид

$$(\mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_{NL_1} + \mathbf{K}_{NL_2}) \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{P}. \quad (5)$$

Перенесем слагаемые матрицы жесткости, зависящие от шаговых перемещений, в правую часть уравнения (5) и будем решать это уравнение итерационным методом:

$$(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma)_j \Delta \mathbf{u}_j^{(i)} = \Delta \mathbf{P}_j - (\Delta \mathbf{K} + \mathbf{K}_{NL_1} + \mathbf{K}_{NL_2})_j^{(i-1)} \Delta \mathbf{u}_j^{(i-1)}. \quad (6)$$

Итерации повторяются до достижения заданной точности. По окончании итераций находятся приращения напряжений по формуле

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{ep} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (7)$$

где $\mathbf{C}_{ep}$ — упругопластическая матрица характеристик материалов.

Полные значения перемещений и напряжений вычисляются по формулам:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}. \quad (8)$$

При этом возможна коррекция напряжений в соответствии с заданной диаграммой напряжение — деформация. Поэтому при достижении сходимости по перемещениям в алгоритме, принятом в программе ПРИНС, осуществляются итерации равновесия по напряжениям с использованием формулы

$$(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma) \Delta \mathbf{u}_j^{(i)} = \mathbf{P}_j - \mathbf{F}_j^{(i-1)}, \quad (9)$$

где $\mathbf{P}_j$ — полный вектор узловой нагрузки, $\mathbf{F}_j^{(i-1)}$ — вектор узловых сил, обусловленных внутренними напряжениями.

3. Результаты и обсуждение

Для иллюстрации предложенной выше методики (см. уравнения (1)–(9)) решена задача по определению несущей способности двухэтажной железобетонной рамы при действии горизонтальной нагрузки. При таком воздействии основная нагрузка воспринимается колоннами, что дает возможность оценить влияние различных расчетных моделей колонн на окончательное напряженно-деформированное состояние конструкции. В связи с этим рассматривались две конечно-элементные схемы с различными способами моделирования колонн. В первой схеме колонны моделировались при помощи суперэлемента типа 46 (согласно спецификации конечных элементов в программе ПРИНС), а во второй схеме — стандартным балочным элементом типа 32. Плиты моделировались многослойным элементом пластинки/оболочки типа 26. Суперэлемент 46 позволяет учитывать как геометрическую, так и физическую нелинейности, тогда как в элементе 32 учитывается только геометрическая нелинейность.

Расчетные схемы при использовании элементов 46 и 32 показаны на рис. 3, а и б соответственно.

Отметим одну особенность расчетной схемы, приведенной на рис. 3, а. Суперэлементы колонн должны сопрягаться с плитой во всех узлах своих торцевых сечений. Это приводит к необходимости

генерировать на плите густую сетку конечных элементов в местах стыков. Если распространять эту сетку на всю плиту, это может привести к ее неоправданной густоте, и, как следствие, к неоправданному увеличению числа степеней свободы конструкции. Чтобы избежать этого, в вычислительном комплексе ПРИНС разработан модуль, который автоматически генерирует сетку конечных элементов с переменным шагом в окрестности стыка, что и отражено на рис. 3, а.

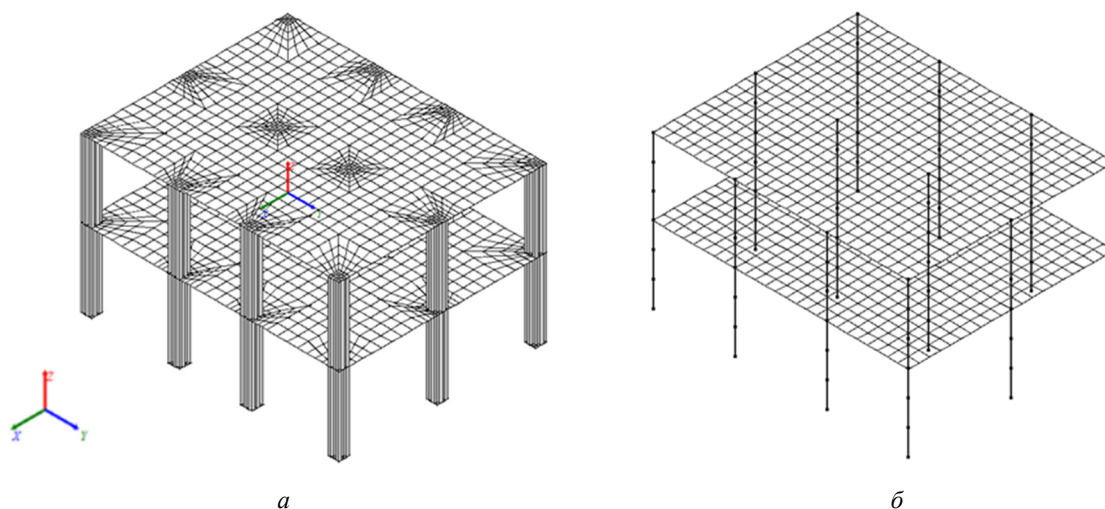


Рис. 3. Расчетные схемы рамы:

а — с использованием для моделирования колонн суперэлементов; б — то же элементов балочного типа

И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковым

Figure 3. Finite element model of the frame:

а — using superelements for modeling columns; б — the same for beam-type elements

S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich

В расчетах использовался бетон класса В25 и арматура класса А400. Размеры сечения колонн — 40×40 см при армировании стержнями диаметром 2 см по схеме, приведенной на рис. 1, б.

Для бетона колонн использовалась физическая модель нелинейно-упругого деформирования при хрупком разрушении [13]. Для плит применялась упругопластическая модель с модифицированным критерием текучести Губера — Мизеса [14]. При этом использовалась нелинейная диаграмма деформирования бетона согласно европейским стандартам². Для арматуры принималась диаграмма Прандтля.

Ветровая (горизонтальная) нагрузка принималась по Своду правил, действующему на территории Российской Федерации СП 20.13330.2020³ для четвертого ветрового района. Равнодействующая ветровой нагрузки прикладывалась в виде сосредоточенных сил в верхних сечениях колонн с наветренной стороны в направлении оси x . Расчет выполнялся шагово-итерационным методом до полного разрушения конструкции. Коэффициент к шаговой нагрузке принимался равным 0,1.

Ниже приводятся некоторые из результатов расчета по программе ПРИНС и дается их подробный анализ.

Так, на рис. 4 показаны деформации элементов рамы, соответствующие двум расчетным схемам. Отметим, что в предельном состоянии перемещения центральной точки плиты для рамы с колоннами балочного типа превышают более чем в 9 раз перемещения, отвечающие схеме, для моделирования колонн которой использовались суперэлементы (рис. 4).

² CEB, CEB-FIP Model Code 1990 / CEB Bulletin d'Information No. 213/214. Lausanne: Comite Euro-International du Beton, 1993. 437 p.

³ СП 20.13330.2020. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко АО «НИЦ «Строительство». 2020. 147 с.

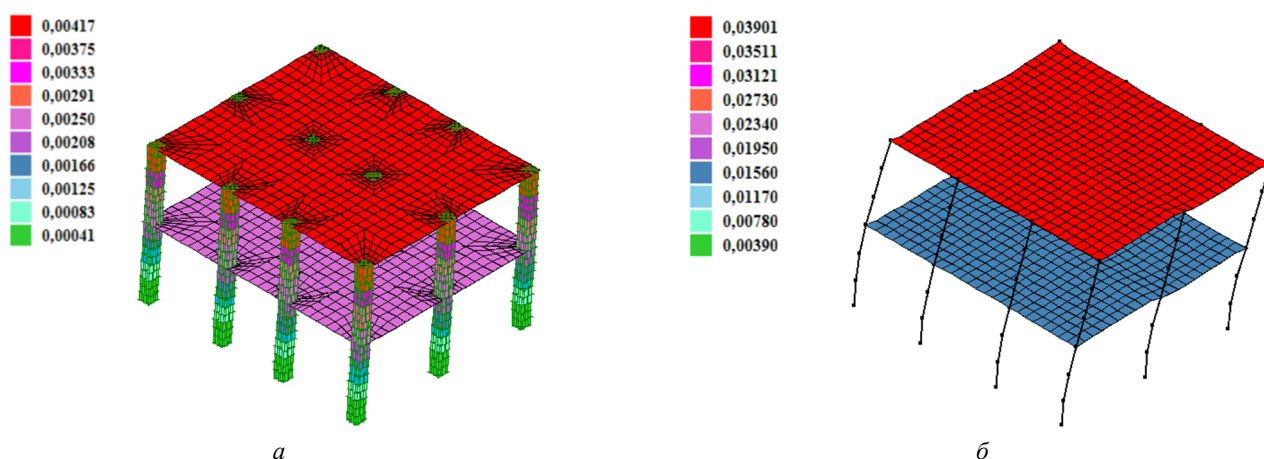


Рис. 4. Перемещения (м) центральной точки плиты на предпоследнем шаге нагружения:
a — с использованием для моделирования колонн суперэлементов; *б* — то же элементов балочного типа
 И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем

Figure 4. Displacement (m) of the central point of the slab at the penultimate loading step:
a — using superelements for modeling columns; *б* — the same for beam-type elements
 S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich

Применение для моделирования колонн суперэлементной технологии позволяет корректно оценивать напряжения, возникающие в теле колонны (в бетоне) и арматурной стали. Так, для рассматриваемой рамы на рис. 5 приведены нормальные напряжения в бетоне и арматуре колонн среднего ряда.

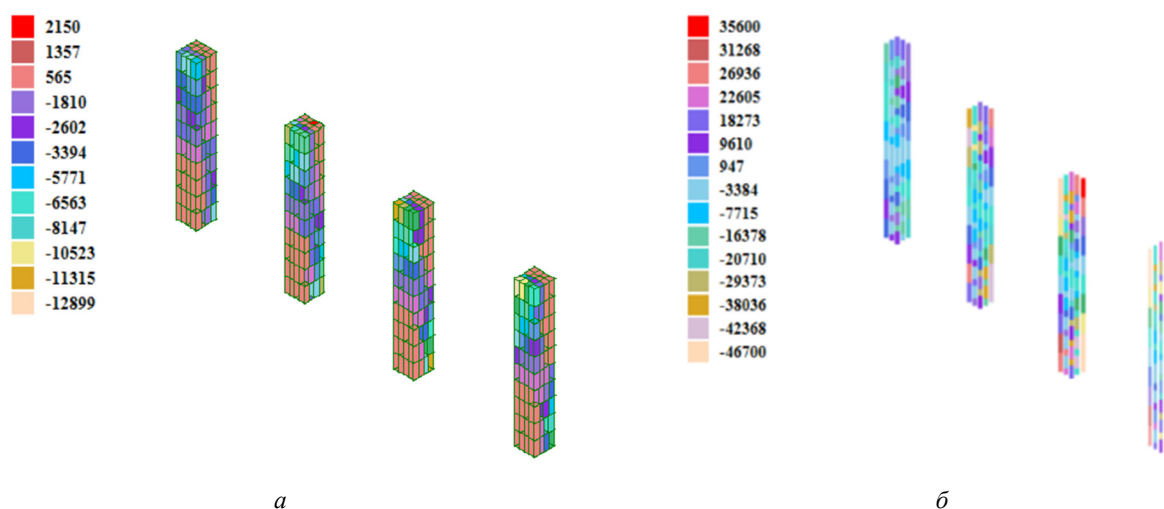


Рис. 5. Напряжения в суперэлементах (колоннах) среднего ряда:
a — нормальные напряжения σ_z (кПа) в бетоне; *б* — нормальные напряжения (кПа) в арматуре
 И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем

Figure 5. Stresses in the superelements (columns) of the middle row:
a — normal stresses σ_z (kPa) in the concrete; *б* — normal stresses (kPa) in the reinforcement
 S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich

Трещинообразование на верхних и нижних поверхностях плит первого этажа в предельном состоянии для двух вариантов расчетных схем рамы показано на рис. 6 и 7 соответственно.

Поля интенсивности напряжений σ_i , соответствующие трещинообразованию на верхних поверхностях плит (рис. 6), приведены на рис. 8.

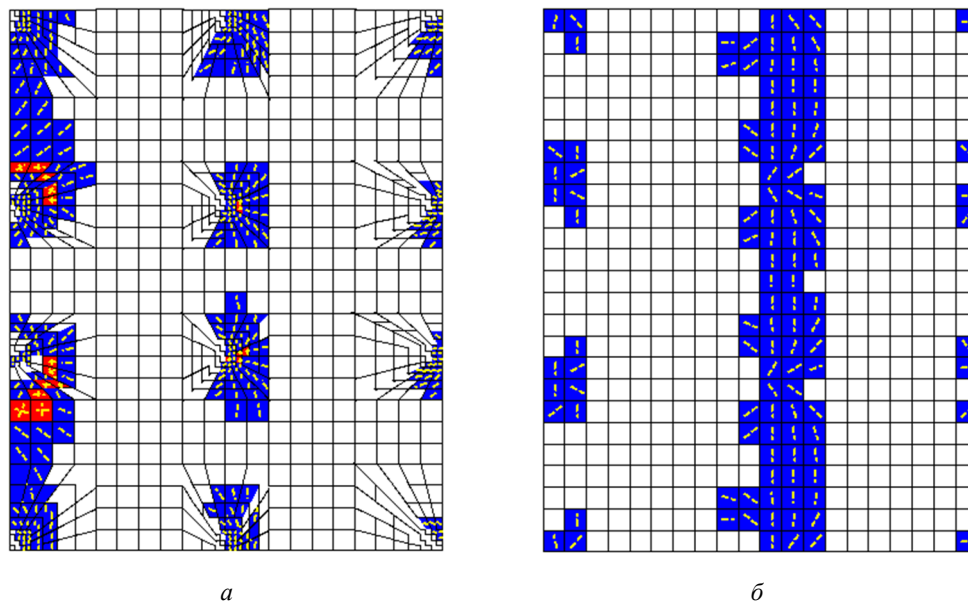


Рис. 6. Трещины на верхних поверхностях плит первого этажа:
a — с использованием для моделирования колонн суперэлементов; *б* — то же элементов балочного типа
 Источник: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем

Figure 6. Cracks on the upper surfaces of the first floor slabs:
a — using superelements for modeling columns; *б* — the same for beam-type elements
 Source: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich

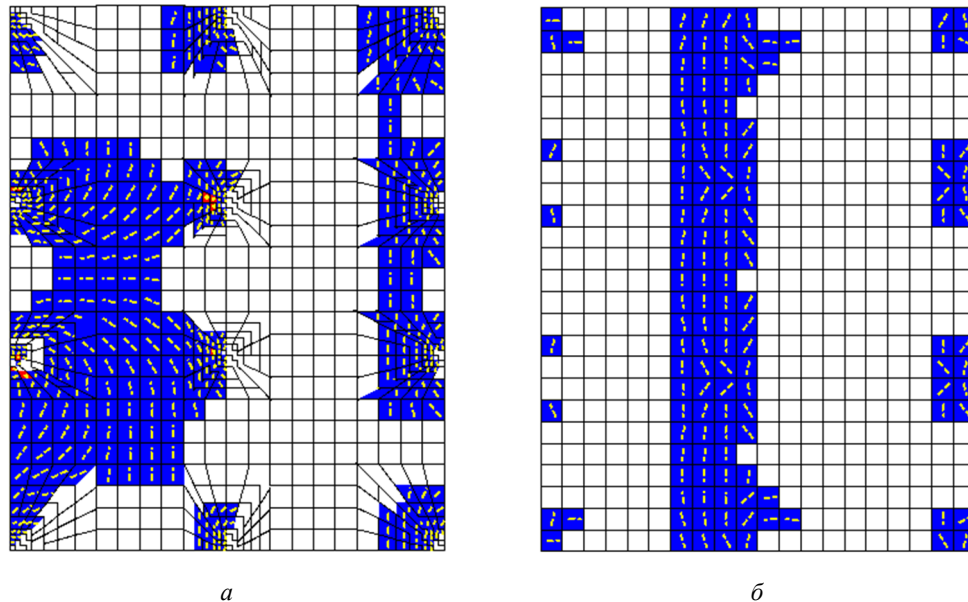


Рис. 7. Трещины на нижних поверхностях плит первого этажа:
a — с использованием для моделирования колонн суперэлементов; *б* — то же элементов балочного типа
 Источник: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем

Figure 7. Cracks on the lower surfaces of the first floor slabs:
a — using superelements for modeling columns; *б* — the same for beam-type elements
 Source: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich

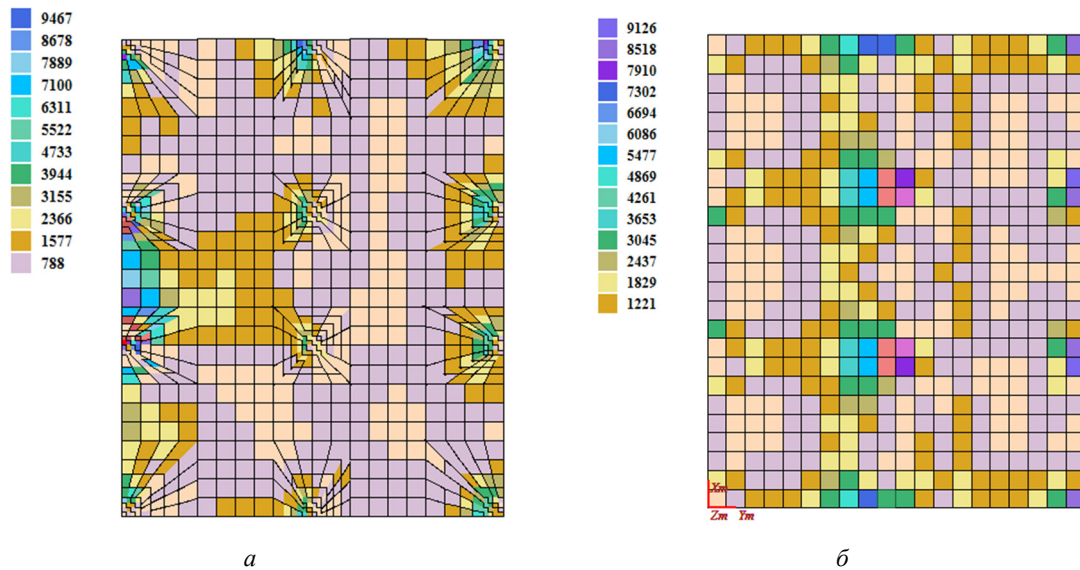


Рис. 8. Интенсивность напряжений σ_i (кПа) на верхних поверхностях плит первого этажа:
a — с использованием для моделирования колонн суперэлементов, *б* — то же элементов балочного типа
 И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем

Figure 8. Stress intensity σ_i (kPa) on the upper surfaces of the first floor slabs:
a — using superelements for modeling columns; *б* — the same for beam-type elements
 S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich

Предельный параметр нагрузки (коэффициент запаса прочности) для первой расчетной схемы рамы, в которой колонны моделировались суперэлементом (см. рис. 3, *a*), равнялся 13,5. При этом для второй схемы с колоннами стандартного балочного типа (см. рис. 3, *б*) составил 34. Равновесные кривые «перемещение — параметр нагрузки», отвечающие указанным расчетным схемам, для центральной точки плиты приведены на рис. 9.

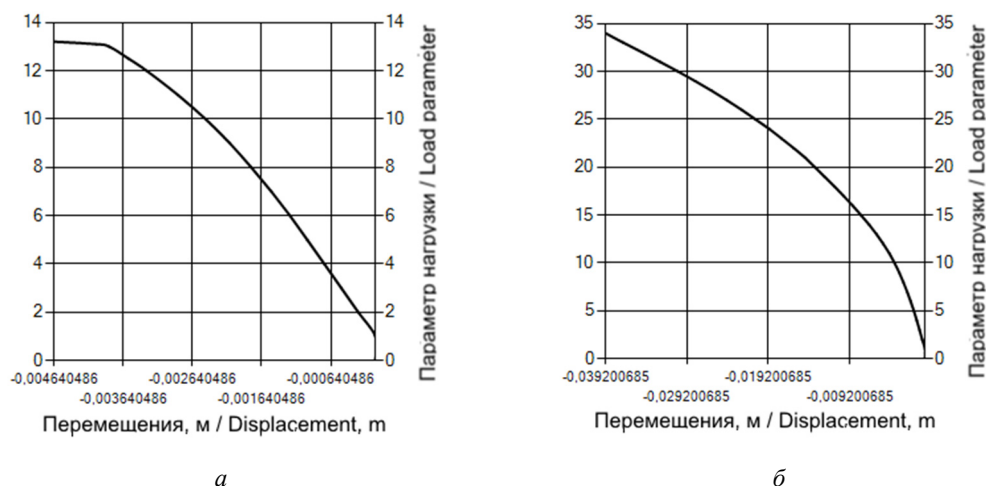


Рис. 9. Равновесные кривые «перемещение — параметр нагрузки»:
a — с использованием для моделирования колонн суперэлементов; *б* — то же для элементов балочного типа
 И с т о ч н и к: выполнено В.П. Агаповым, А.С. Марковичем

Figure 9. “Displacement — load parameter” equilibrium curves:
a — using superelements for modeling columns; *б* — the same for beam-type elements
 S o u r c e: made by V.P. Agapov, A.S. Markovich

4. Заключение

Как видно из рис. 4–9, результаты расчета по двум схемам различаются.

1. Основное различие заключается в существенном расхождении в величине предельного параметра нагрузки (коэффициента запаса прочности). Так, для рамы (см. рис. 3, *а*), в которой колонны моделировались с использованием суперэлементов, он равен 13,5, а для рамы с колоннами стандартного балочного (см. рис. 3, *б*) — 34. Такое расхождение объясняется тем, что в элементе 46 учитывается как геометрическая, так и физическая нелинейности, а в элементе 32 — только геометрическая. Поэтому можно было ожидать, что в раме с элементами 32 предельная нагрузка будет определяться несущей способностью плит, а не колонн, что и подтвердилось расчетами. В то время как в схеме с элементами 46 предельная нагрузка в большей степени, определяется прочностью колонн.

2. Отметим также, что в элементе 46, в отличие от элемента 32, естественным образом учитываются искривление оси, деформации поперечного сдвига, депланация и изменение формы и размеров поперечных сечений. Кроме того, в суперэлементах типа 46 имеется возможность анализа напряжений как в бетоне колонн (см. рис. 5, *а*), так и в арматуре (см. рис. 5, *б*). Таким образом, расчетная схема с применением предложенных суперэлементов является более адекватной рассматриваемой конструкции.

Тем самым предлагаемая методика расчета плитно-балочных систем позволяет существенным образом уточнить поведение конструкции в стадиях нагружения, предшествующих разрушению, исследовать действительное напряженно-деформированное состояние и более точно определять значение коэффициента запаса прочности.

Список литературы

1. *Bathe K.J., Wilson E.L.* Numerical methods in finite element analysis. N.J. : Prentice-Hall, 1976. 528 p. ISBN 0136271901, 9780136271901
2. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. McGraw-Hill, 2005. 631 p. <http://doi.org/10.1016/B978-075066431-8/50186-7>
3. *Crisfield M.A.* Non-linear finite element analysis of solids and structures. UK : John Wiley & Sons Ltd, 1977. 488 p.
4. *Oden J.T.* Finite elements in nonlinear continua. New York : McGraw, Hill Book Company, 1972. 464 p.
5. *Kupfer H., Hilsdorf H., Rusch H.* Behavior of Concrete under Biaxial Stresses // ACI Journal Proceedings. 1969. Vol. 66. No. 8. P. 656–666. <http://doi.org/10.14359/7388>
6. *Launay P., Gachon H.* Strain and Ultimate Strength of Concrete under Triaxial Stress // ACI Spec. Publ. 1972. Vol. 34. P. 269–282. URI: <http://www.lib.ncsu.edu/resolver/1840.20/29024> (accessed: 05.03.2025).
7. *Mills L.L., Zimmerman R.M.* Compressive Strength of Plain Concrete under Multiaxial Loading Conditions // ACI Journal. October 1970. Vol. 67. No. 10. P. 802–807. <http://doi.org/10.14359/7310>
8. *Корсун В.И., Недорезов А.В., Макаренко С.Ю.* Сопоставительный анализ критериев прочности для бетонов // Современное промышленное и гражданское строительство. 2014. Т. 10. № 1. С. 65–78. EDN: THXXCZ
9. *Hansen .C.* Triaxial test with concrete and cement paste: Report № 319. Lyngby : Technical University of Denmark, 1995. 54 p. ISBN 87-7740-156-5
10. *Агапов В.П., Васильев А.В.* Моделирование колонн прямоугольного сечения объемными элементами с использованием суперэлементной технологии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 4. С. 48–54. EDN: PFPUUT
11. *Агапов В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. Москва : АСВ, 2005. 245 с. ISBN 5-93093-303-0 EDN: QMECWX
12. *Agapov V.P., Markovich A.S.* The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable // South Florida Journal of Development. 2021. Vol. 2. No. 4. P. 5034–5048. <https://doi.org/10.46932/sfjdv2n4-007>

13. Агапов В.П., Маркович А.С. Расчет массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования // Промышленное и гражданское строительство. 2023. № 7. С. 43–49. <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2023.07.43-49> EDN: LRCNLR

14. Агапов В.П., Маркович А.С. Нелинейные модели бетонных и железобетонных конструкций. Теория и реализация в ВК ПРИНС. Москва : РУДН, 2023. 263 с. ISBN 978-5-209-11784-1

References

1. Bathe K.J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. N.J.: Prentice-Hall; 1976. ISBN 0136271901, 9780136271901

2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element for Solid and Structural Mechanics*. Sixth edition. McGraw-Hill; 2005. <http://doi.org/10.1016/B978-075066431-8/50186-7>

3. Crisfield M.A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons, 2012. ISBN 1118376013, 9781118376010

4. Oden J.T. *Finite elements in nonlinear continua*. New York: McGraw, Hill Book Company; 1972. Available from: <https://archive.org/details/finiteelementsof0000oden/page/n3/mode/2up> (accessed: 12.01.2025)

5. Kupfer H., Hilsdorf H., Rusch H. Behavior of Concrete under Biaxial Stresses. *ACI Journal Proceedings*. 1969;66(8):656–666. <http://doi.org/10.14359/7388>

6. Launay P., Gachon H. Strain and Ultimate Strength of Concrete under Triaxial Stress. *ACI Spec. Publ.* 1972;34:269–282. Available from: <http://www.lib.ncsu.edu/resolver/1840.20/29024> (accessed: 05.03.2025)

7. Mills L.L., Zimmerman R.M. Compressive strength of plain concrete under multiaxial loading conditions. *ACI Journal*. October 1970;67(10):802–807. <http://doi.org/10.14359/7310>

8. Korsun V.I., Nedorezov A.V., Makarenko S.Yu. Comparative analysis of the strength criteria for concrete. *Modern Industrial and Civil Construction*. 2014;10(1):65–78. (In Russ.) EDN: THXXCZ

9. Hansen T.C. *Triaxial test with concrete and cement paste*: Report No. 319. Lyngby: Technical University of Denmark, 1995. ISBN 87-7740-156-5

10. Agapov V.P., Vasiliev A.V. Modeling of rectangular columns with volumetric finite elements using super-element technology. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2012;(4):48–54. (In Russ.) EDN: PFPUUT

11. Agapov V.P. *Finite element method in statics, dynamics and stability of structures*. Moscow: ASV Publ.; 2004. (In Russ.) ISBN 5-93093-303-0 EDN: QMECWX

12. Agapov V.P., Markovich A.S. The family of multilayered finite elements for the analysis of plates and shells of variable thickness: La familia de elementos finitos multicapa para el análisis de placas y cascos de espesor variable. *South Florida Journal of Development*. 2021;2(4):5034–5048. <https://doi.org/10.46932/sfjdv2n4-007>

13. Agapov V.P., Markovich A.S. Calculation of Massive Reinforced Concrete Structures Including Cracks. *Industrial and Civil Engineering*. 2023;(7):43–49. (In Russ.) <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2023.07.43-49> EDN: LRCNLR

14. Agapov V.P., Markovich A.S. *Nonlinear models of concrete and reinforced concrete structures. Theory and implementation in PRINS software*: monograph. Moscow: RUDN; 2023. (In Russ.) ISBN 978-5-209-11784-1