

РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-1-37-47

УДК 624.074.43+539.3

EDN: IQCXLS

Научная статья / Research article

Определение оптимальных цилиндрических оболочек в форме поверхностей второго порядка

В.Н. Иванов^{id}, О.О. Алёшина^{id}✉, Е.А. Ларионов^{id}

Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация

✉ xiaofeng@yandex.ru

Поступила в редакцию: 11 сентября 2024 г.

Принята к публикации: 30 ноября 2024 г.

Аннотация. Тонкие оболочки со срединными цилиндрическими и коническими поверхностями пользуются наибольшей популярностью. Построено множество сооружений оболочечного типа в форме поверхностей вращения и поверхностей переноса, для которых имеется несколько десятков критериев оптимальности. Рассмотрены гиперболические, параболические, эллиптические и круговые цилиндрические своды на прямоугольных планах, для которых, как показало тщательное изучение опубликованных источников, отсутствуют сравнительные расчеты на прочность, устойчивость и динамику, хотя архитекторы уже пытаются расширить номенклатуру срединных поверхностей линейчатых оболочек нулевой гауссовой кривизны на прямоугольном плане за счет торсовых поверхностей. Исследованы пять тонких цилиндрических оболочек, очерченных по алгебраическим поверхностям второго порядка с разными образующими плоскими кривыми. Изучено напряженно-деформированное состояние гиперболического, параболического, эллиптического и кругового цилиндрических сводов на прямоугольных планах от действия статической нагрузки типа собственного веса при одинаковых размерах в плане, одинаковых стрел подъема, толщин и конструктивных материалов оболочек, то есть выполнен сравнительный расчет. Установлено, что наименьшие (максимальные) тангенциальные напряжения возникают в эллипсоидальной оболочке с неполным полуэллипсом, а наименьшие (максимальные) изгибные и суммарные напряжения возникают в параболической цилиндрической оболочке, что подтверждают результаты расчетов, ранее выполненных исследователями по аналитической безмоментной теории. Следовательно, в строительных конструкциях желательно использовать эллипсоидальные цилиндрические оболочки с неполным полуэллипсом в поперечном сечении. В настоящее время практически все задачи строительной механики оболочек решаются численными методами, поэтому для решения поставленной задачи был выбран метод конечного элемента в перемещениях.

Ключевые слова: алгебраические поверхности второго порядка, тонкая оболочка, гиперболическая цилиндрическая оболочка, параболическая цилиндрическая оболочка, круговая цилиндрическая оболочка, эллиптическая цилиндрическая оболочка

Иванов Вячеслав Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909, ORCID: 0000-0003-4023-156X; e-mail: i.v.ivn@mail.ru

Алёшина Ольга Олеговна, кандидат технических наук, ассистент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 8550-4986, ORCID: 0000-0001-8832-6790; e-mail: xiaofeng@yandex.ru

Ларионов Евгений Алексеевич, доктор технических наук, профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY AuthorID: 365207, ORCID: 0000-0002-4906-5919; e-mail: evgenylarionov39@yandex.ru

© Иванов В.Н., Алёшина О.О., Ларионов Е.А., 2025

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов: *Иванов В.Н.* — концепция исследования, построение поверхностей; *Алешина О.О.* — расчет, результаты напряженно-деформированного состояния. *Ларионов Е.А.* — сбор материалов для исследования.

Для цитирования: *Иванов В.Н., Алешина О.О., Ларионов Е.А.* Определение оптимальных цилиндрических оболочек в форме поверхностей второго порядка // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2025. Т. 21. № 1. С. 37–47. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-1-37-47>

Determination of Optimal Cylindrical Shells in the Form of Second-Order Surfaces

Vyacheslav N. Ivanov[✉], Olga O. Aleshina[✉], Evgeny A. Larionov[✉]

RUDN University, Moscow, Russian Federation

✉ xiaofeng@yandex.ru

Received: September 11, 2024

Accepted: November 30, 2024

Abstract. Thin shells with cylindrical and conical middle surfaces are most popular. Many shell-type structures have been built in the form of rotational and translational surfaces, for which there are several dozen optimality criteria. Hyperbolic, parabolic, elliptic, and circular cylindrical roofs with rectangular base are considered, for which, as evidenced by thorough literature review, there is no comparative analysis of strength, stability, and dynamics. Nevertheless, architects are already trying to expand the classification range of ruled middle surfaces of zero Gaussian curvature with a rectangular base by including torse surfaces. Five thin cylindrical shells outlined by second-order algebraic surfaces with different generating plane curves are studied. The stress-strain state of hyperbolic, parabolic, elliptic and circular cylindrical roofs with rectangular base subjected to static load of self-weight type is investigated. The roofs have the same dimensions of the base, the same height, thickness and structural material, that is, a comparative calculation is performed. It is established that the smallest (maximum) membrane stresses occur in the ellipsoidal shell with an incomplete half-ellipse, and the smallest (maximum) bending and equivalent stresses occur in the parabolic cylindrical shell, which is confirmed by the results of previously performed calculations using the analytical momentless theory. Therefore, it is recommended to use ellipsoidal cylindrical shells with an incomplete half-ellipse in cross-section for building structures. Currently, almost all problems of structural mechanics of shells are solved by numerical methods, therefore, the displacement-based finite element method was chosen to solve this problem.

Keywords: algebraic surfaces of the second order, thin shell, hyperbolic cylindrical shell, parabolic cylindrical shell, circular cylindrical shell, elliptic, cylindrical shell

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution: *Ivanov V.N.* — conceptualization, surface construction; *Aleshina O.O.* — strength analysis; *Larionov E.A.* — collecting materials for research.

For citation: Ivanov V.N., Aleshina O.O., Larionov E.A. Determination of optimal cylindrical shells in the form of second-order surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(1):37–47. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-1-37-47>

1. Введение

До настоящего времени самые востребованные тонкие оболочки — это цилиндрические, конические оболочки и оболочки вращения [1]. Историю изучения, развития и успешное применение цилиндрических оболочек в строительстве во всем мире можно отследить по обширной технической литературе. Для строительства разнообразных зданий и сооружений цилиндрической формы применяются различные материалы, такие как металл, кирпичная кладка и железобетон.

Vyacheslav N. Ivanov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Engineering Academy, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 3110-9909, ORCID: 0000-0003-4023-156X; e-mail: i.v.ivn@mail.ru

Olga O. Aleshina, Candidate of Technical Sciences, Assistant of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Engineering Academy, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 8550-4986, ORCID: 0000-0001-8832-6790; e-mail: xiaofeng@yandex.ru

Evgeny A. Larionov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Engineering Academy, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY AuthorID: 365207, ORCID: 0000-0002-4906-5919; e-mail: evgenylarionov39@yandex.ru

Поиск математических методов анализа с целью возведения цилиндрических оболочек начал проводиться начиная с 1920-х гг., в особенности в Германии [2]. В 1928 г. в Германии во Франкфурте-на-Майне было возведено здание рынка с покрытием, состоящим из параллельно совмещенных полуцилиндров, являющееся ярким примером экспрессионистской архитектуры того времени [3]. Испанский архитектор и инженер Эдуардо Торроха (Eduardo Torroja) также использовал цилиндрические оболочки в его проектах [4]. Архитектурно выразительные цилиндрические своды из кирпичной кладки, разработанные уругвайским инженером Эладио Диесте (Eladio Dieste), объединившим свойства железобетона и кирпича, построены по всей Южной Америке [5; 6]. Статья [7] знакомит с архитектурными достижениями Колумбии XX в. начиная с 1946 г., рассматриваются несколько зданий с железобетонными цилиндрическими покрытиями, часть из которых эксплуатируются до сих пор. В 1951 г. испанский инженер Феликс Кандела (Félix Candela) рассчитал и изготовил свою первую длинную цилиндрическую оболочку для крыши Альмасена (Almacén) в Пизе [8].

В соответствии с запросами практики были разработаны различные аналитические, полуаналитические и численные методы расчета тонкостенных и толстых, одно- и многослойных оболочек из физически линейных и нелинейных конструкционных материалов. Были составлены соответствующие вычислительные компьютерные программы, облегчающие работу проектировщиков. Представлены разнообразные критерии оптимальности для проектируемых тонких оболочек. Цилиндрические оболочки проектируют и строят обычно в форме действительных алгебраических цилиндрических поверхностей второго порядка (эллиптическая, круговая, гиперболическая и параболическая цилиндрические поверхности).

В [9] собрана и проанализирована информация о поведении цилиндрических оболочечных конструкций при различных условиях нагружения и работы в машиностроительной промышленности. Имеется много сравнительных расчетов на прочность, устойчивость и колебания цилиндрических оболочек, очерченных по алгебраическим поверхностям второго порядка, но все расчеты проводились для тонких оболочек одного типа [10; 11]. В [12] рассматривается развитие теории устойчивости цилиндрических оболочек, дается обзор текущего состояния и тенденций для дальнейших исследований цилиндрической оболочки, широко используемой в реальном машиностроении. В [13] для металлических цилиндрических корпусов при воздействии взрывоопасной нагрузки предложен инновационный критерий разрушения, учитывающий влияние времени. В [14] представлено исследование с использованием численного моделирования тонкостенного цилиндрического резервуара при различных взрывных нагрузках, учитывающее уровень внутренней жидкости и толщину стенок. В [15], применяя теорию оболочек с деформацией сдвига третьего порядка Редди, приведены численные результаты, показывающие влияние геометрических параметров, свойств материала, дефектов, температуры, видов нагрузок на нелинейную реакцию системы на изгиб и последующую деформацию цилиндрических оболочек. В [16] рассматривается возможность получения оптимальной конструкции металлической цилиндрической оболочки при комбинированном внешнем нагружении, используя многоцелевой критерий оптимальности, удовлетворяющий условию максимально допустимой осевой и кольцевой прочности при минимальной массе закрепленных цилиндров. Целью исследования [17] является изучение влияния свойств материала и конструктивных параметров на изгиб цилиндрических тонкостенных оболочек под действием внешнего гидростатического давления и определение оптимальных характеристик для возможности дальнейшего проектирования. В [18] проведен численный анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки с различным поперечным сечением и показано, что несущая способность круглой цилиндрической оболочки намного выше, чем у прямоугольной цилиндрической оболочки.

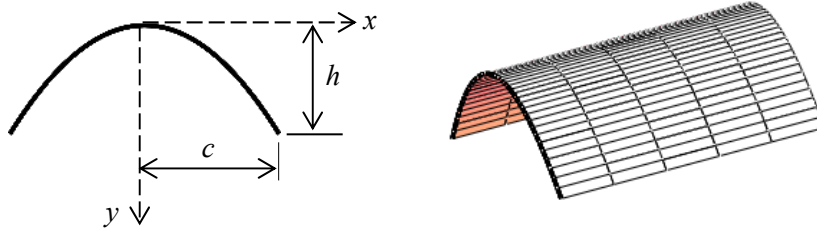
Цель исследования — с помощью программного комплекса [19] на базе метода конечных элементов [20] определить параметры напряженно-деформированного состояния двух эллиптических, круговой, гиперболической и параболической цилиндрических тонких оболочек, имеющих одинаковые габаритные (пролет и стрелу подъема) размеры, постоянные толщины и физико-механические характеристики конструкционного материала оболочек, подверженных действию одинаковой ста-

тической внешней нагрузки. Сравнивая полученные результаты расчетов, можно сделать выводы о выборе оптимальной цилиндрической оболочки в форме алгебраической поверхности 2-го порядка, а также сопоставить полученные результаты в цилиндрической оболочке с параболической образующей кривой с выводами ученого В.В. Новожилова [21].

2. Методы

Будем рассматривать тонкостенные оболочки, представленные на рис. 1–5, с размерами в плане — $d \times L$, шириной $d = 2c$, $c = 5$ м, длиной $L = 10$ м, высотой $h = 4$ м, толщиной 8 см, находящиеся под действием собственного веса конструкций при условии шарнирно-неподвижного опирания в основании со следующими характеристиками материала оболочек: модуль упругости $E_b = 30018,6$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$.

■ Параболическая цилиндрическая оболочка (рис. 1)



Образующая парабола / Generating parabola

$$y = ax^2; a = \frac{h}{c^2} = 0,16$$

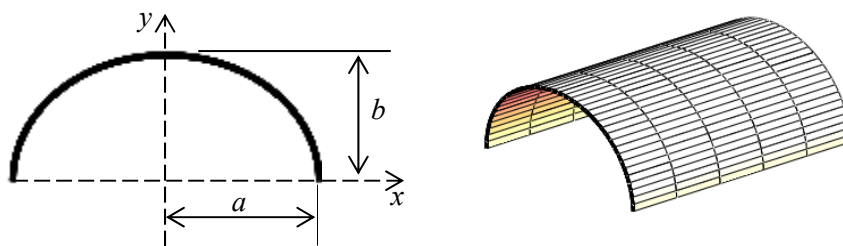
Рис. 1. Параболическая цилиндрическая оболочка

И с т о ч н и к: выполнено В.Н. Ивановым

Figure 1. Parabolic cylindrical shell

S o u r c e: made by V.N. Ivanov

■ Эллиптическая цилиндрическая оболочка (рис. 2)



Образующая полуэллипс / Generating half-ellipse

$$x = a \cos u, y = b \sin u, a = c = 5, b = h = 4$$

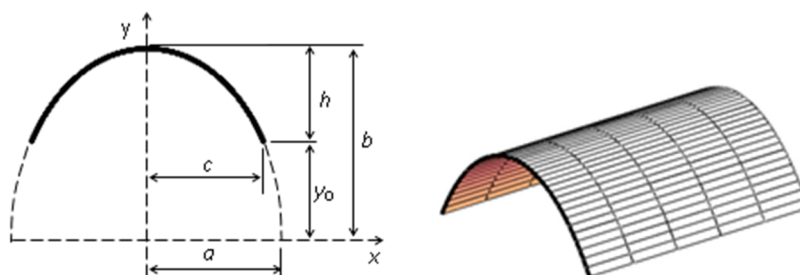
Рис. 2. Эллиптическая цилиндрическая оболочка

И с т о ч н и к: выполнено В.Н. Ивановым

Figure 2. Elliptical cylindrical shell

S o u r c e: made by V.N. Ivanov

■ **Эллиптическая цилиндрическая с сектором полуэллипса (рис. 3).** Форма усеченного эллипса определяется тремя параметрами a , u , u_0 . Один из параметров задается, два других определяются в соответствии с параметрами c , h . Принимаем параметр $u_0 = \pi/6$.



Образующая сектор полуэллипса / Generating half-ellipse sector

$$x = a \cos u; y = b \sin u; a = \frac{c}{\cos u_0} = 5,77; b = \frac{h}{1 - \sin u_0} = 8$$

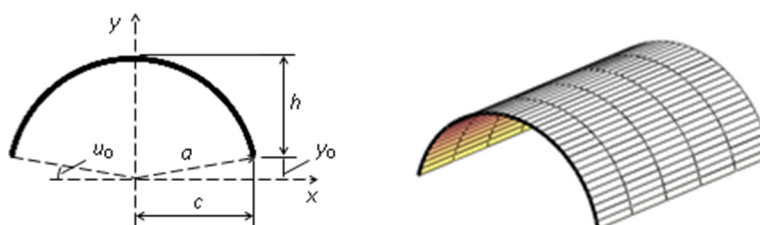
Рис. 3. Эллиптическая цилиндрическая оболочка с сектором полуэллипса

И с т о ч н и к: выполнено В.Н. Ивановым

Figure 3. Elliptic cylindrical shell with a half-ellipse sector

S o u r c e: made by V.N. Ivanov

■ Цилиндрическая поверхность с сектором окружности (рис. 4)



Образующая окружность / Generating circle

$$x = a \cos u; y = a \sin u; x^2 + y^2 = a^2; c^2 + (a - h)^2 = a^2; c^2 - 2ah + h^2 = 0; a = \frac{c^2 + h^2}{2h} = 5,125;$$

$$u_0 = \arccos \frac{c}{a} = 0,221 = 12,7^\circ$$

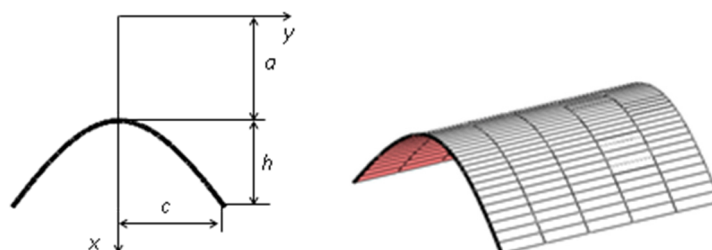
Рис. 4. Цилиндрическая поверхность с сектором окружности

И с т о ч н и к: выполнено В.Н. Ивановым

Figure 4. Cylindric surface with a circle sector

S o u r c e: made by V.N. Ivanov

■ Гиперболическая цилиндрическая поверхность (рис. 5)



Образующая гипербола / Generating hyperbola

$$x = achu; y = bshu; a + h = achu_0; a = \frac{h}{chu_0 - 1}; u_0 = 1; a = 7,36; b = \frac{c}{shu_0} = 4,26$$

Рис. 5. Гиперболическая цилиндрическая поверхность

И с т о ч н и к: выполнено В.Н. Ивановым

Figure 5. Hyperbolic cylindrical surface

S o u r c e: made by V.N. Ivanov

Анализ напряженно-деформированного состояния оболочек (рис. 1–5) выполняется с помощью программы SCAD на базе метода конечных элементов в перемещениях. Для каждой оболочки была создана конечно-элементная математическая модель с разбиением на четырехугольные конечные элементы (КЭ) по криволинейным координатным линиям поверхности в направлении вдоль образующей — криволинейная координатная линия u и вдоль направляющей — v . Количество конечных элементов в расчетной схеме оболочки на рис. 1 — 1240, на рис. 2 — 2400, на рис. 3 — 1760, на рис. 4 — 1880, на рис. 5 — 3200.

3. Результаты и обсуждение

На рис. 6–10 представлены результаты расчета рассматриваемых тонких оболочек. Анализ полученных результатов напряженно-деформированного состояния пяти исследуемых оболочек (рис. 1–5) показывает, что в них при действии нагрузки типа собственного веса возникают в основном сжимающие напряжения с локальными растягивающими напряжениями в эллиптической цилиндрической оболочке (рис. 7), круговой цилиндрической оболочке (рис. 9) и гиперболической цилиндрической оболочке (рис. 10) вдоль образующей кривой. Вдоль направляющей оболочек возникают как сжимающие, так и растягивающие нормальные напряжения с увеличением числовых значений сжимающих напряжений в нижних частях оболочек в зонах опор.

3.1. Параболическая цилиндрическая оболочка

Вдоль координатной линии u при действии заданного типа нагрузки в параболической цилиндрической оболочке (рис. 6) числовые значения напряжений $\sigma(N_u)$ при сжатии — от $-3,63$ до $-28,26$ т/м².

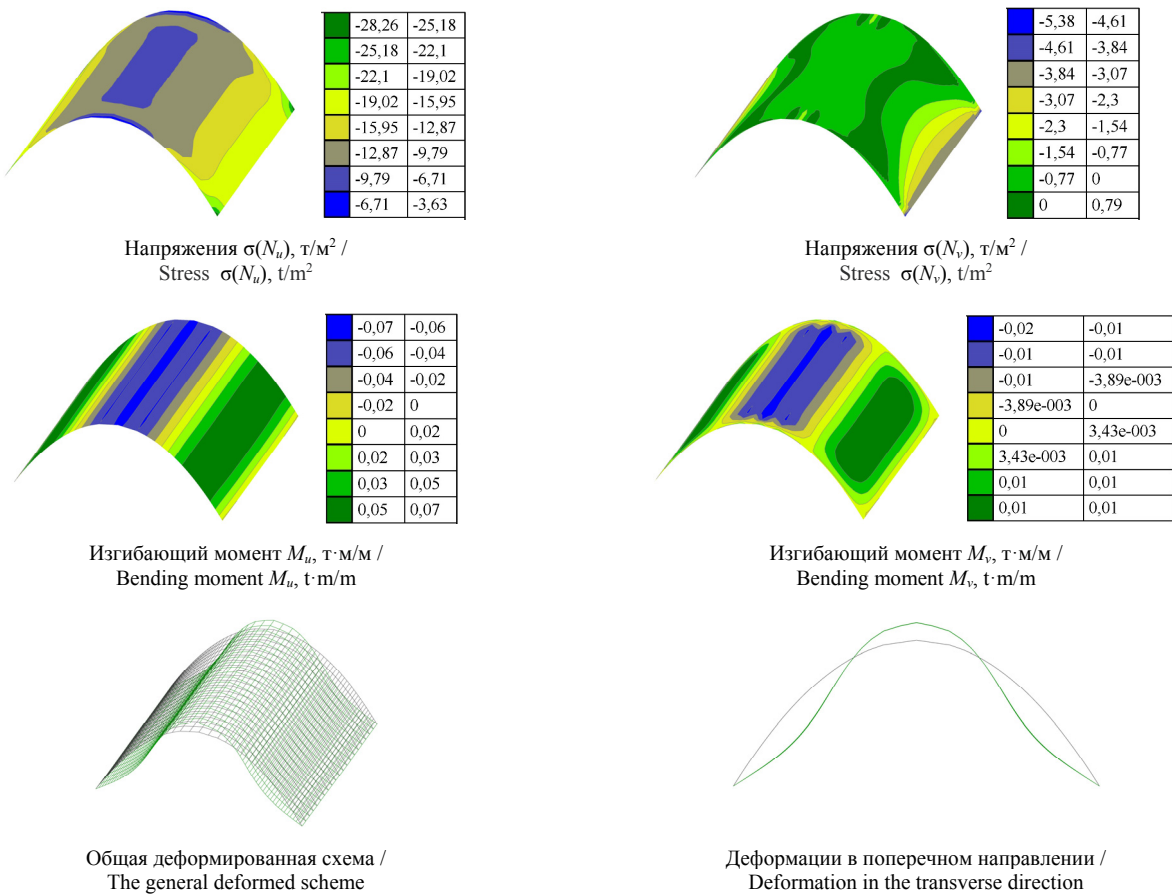


Рис. 6. Параболическая цилиндрическая оболочка

Источник: выполнено О.О. Алёшиной

Figure 6. Parabolic cylindrical shell

Source: made by O.O. Aleshina

Вдоль координатной линии v числовые значения напряжений при растяжении от 0,79 до 0,00 т/м², при сжатии от 0,00 до –5,38 т/м² с локализацией в опорных зонах. Перемещения в верхней зоне оболочки по вертикали около 1 мм.

3.2. Эллиптическая цилиндрическая оболочка

Вдоль координатной линии u при действии заданного типа нагрузки в эллиптической цилиндрической оболочке (рис. 7) числовые значения напряжений $\sigma(N_u)$ при сжатии от 0,00 до –38,30 т/м², при растяжении от 26,89 до 0,00 т/м², с локализацией максимальных растягивающих и сжимающих напряжений в краевых консольных зонах оболочки. Вдоль координатной линии v числовые значения напряжений при растяжении от 1,70 до 0,00 т/м², при сжатии от 0,00 до –4,00 т/м² с локализацией в опорных зонах. Перемещения в верхней зоне оболочки по вертикали около 11 мм.

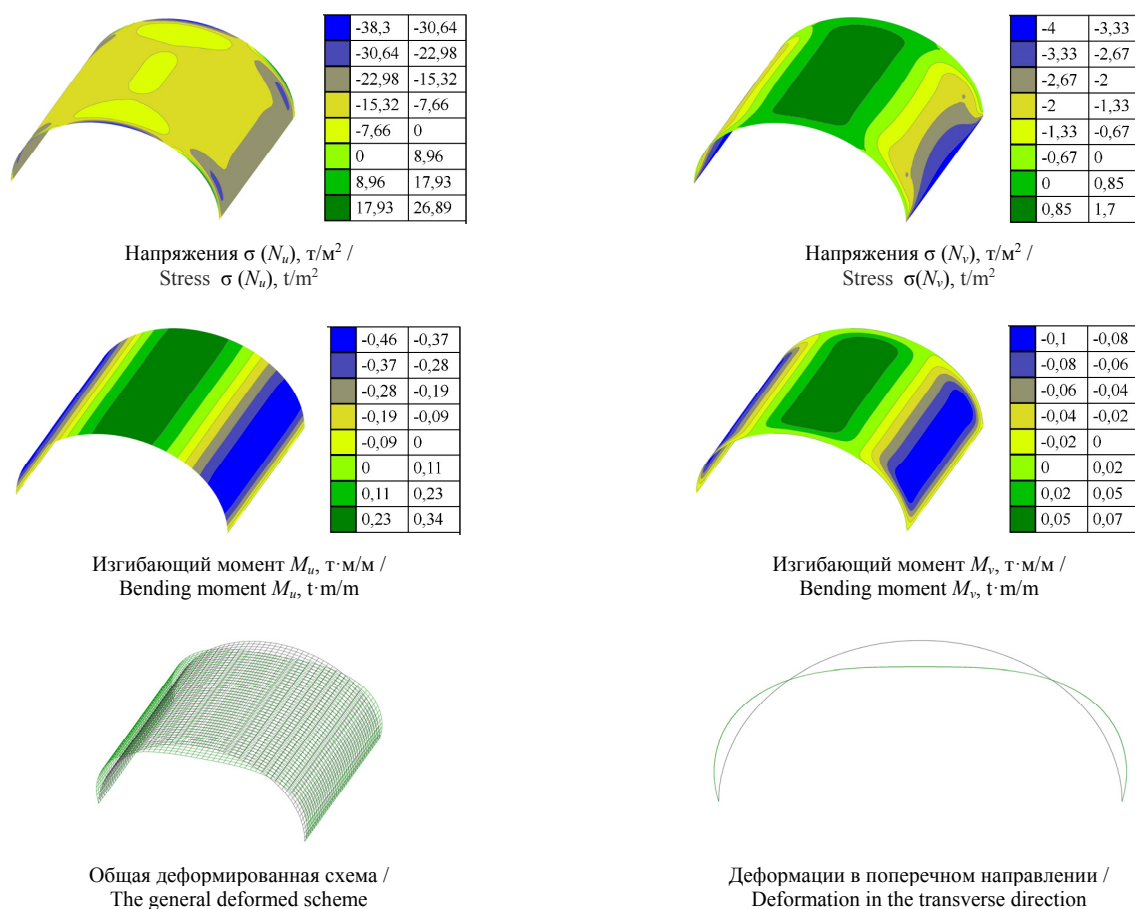


Рис. 7. Эллиптическая цилиндрическая оболочка

И с т о ч н и к: выполнено О.О. Алёшиной

Figure 7. Elliptical cylindrical shell

S o u r c e: made by O.O. Aleshina

3.3. Эллиптическая цилиндрическая с сектором полуэллипса

Вдоль координатной линии u при действии собственного веса конструкции в цилиндрической оболочке с полуэллипсом в поперечном сечении (рис. 8) числовые значения напряжений $\sigma(N_u)$ при сжатии от –5,41 до –21,19 т/м² с локализацией максимальных напряжений в опорных зонах оболочки. Вдоль координатной линии v числовые значения напряжений при растяжении от 0,42 до 0,00 т/м², при сжатии от 0,00 до –3,85 т/м² с локализацией в опорных зонах. Перемещения в верхней зоне оболочки по вертикали около 1,7 мм.

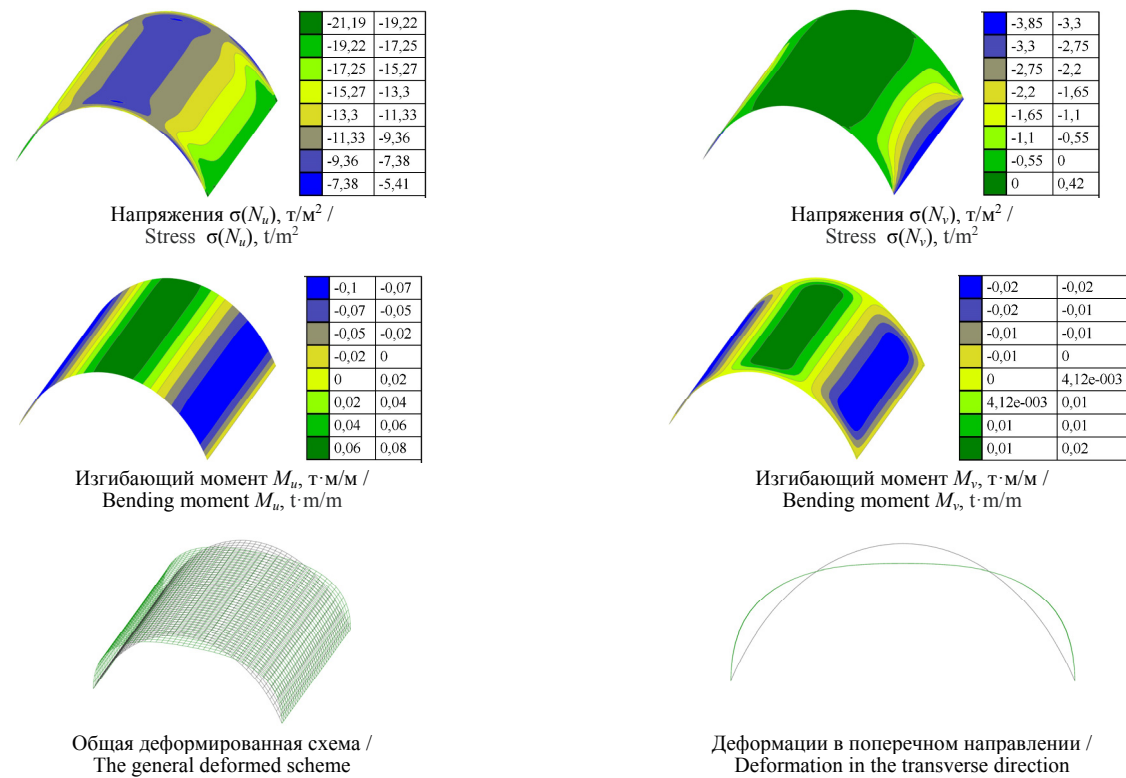


Рис. 8. Эллиптическая цилиндрическая с сектором полуэллипса

И с т о ч н и к: выполнено О.О. Алёшиной

Figure 8. Elliptic cylindrical with a half-ellipse sector

S o u r c e: made by O.O. Aleshina

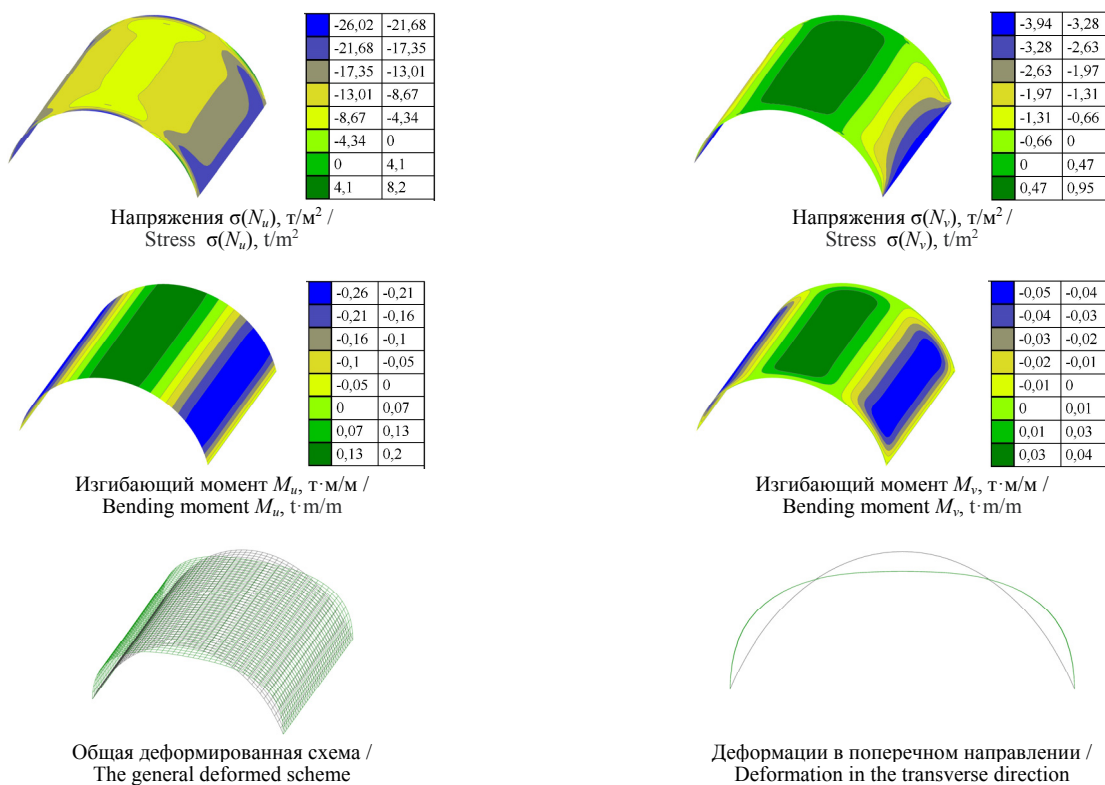


Рис. 9. Цилиндрическая поверхность с сектором окружности

И с т о ч н и к: выполнено О.О. Алёшиной

Figure 9. Cylindric surface with a circle sector

S o u r c e: made by O.O. Aleshina

3.4. Цилиндрическая поверхность с сектором окружности

Вдоль координатной линии u при действии собственного веса конструкции в цилиндрической оболочке с окружностью в поперечном сечении (рис. 9) числовые значения напряжений $\sigma(N_u)$ при сжатии от 0,00 до $-26,02$ т/м² с локализацией максимальных напряжений в опорных и консольных краевых зонах оболочки, при растяжении от 8,20 до 0,00 т/м² с концентрацией в консольных краевых зонах нижней части оболочки. Вдоль координатной линии v числовые значения напряжений при растяжении от 0,95 до 0,00 т/м², при сжатии от 0,00 до $-3,94$ т/м² с локализацией в опорных зонах. Перемещения в верхней зоне оболочки по вертикали около 5,2 мм.

3.5. Гиперболическая цилиндрическая оболочка

Вдоль координатной линии u при действии собственного веса конструкции в гиперболической цилиндрической оболочке (рис. 10) числовые значения напряжений $\sigma(N_u)$ при сжатии от 0,00 до $-31,88$ т/м² с локализацией максимальных напряжений в консольных краевых зонах нижней части оболочки, при растяжении от 8,21 до 0,00 т/м² с концентрацией в консольных краевых зонах верхней части оболочки. Вдоль координатной линии v числовые значения напряжений при растяжении от 1,04 до 0,00 т/м², при сжатии от 0,00 до $-5,46$ т/м² с локализацией в опорных зонах. Перемещения в верхней зоне оболочки по вертикали около 2,1 мм.

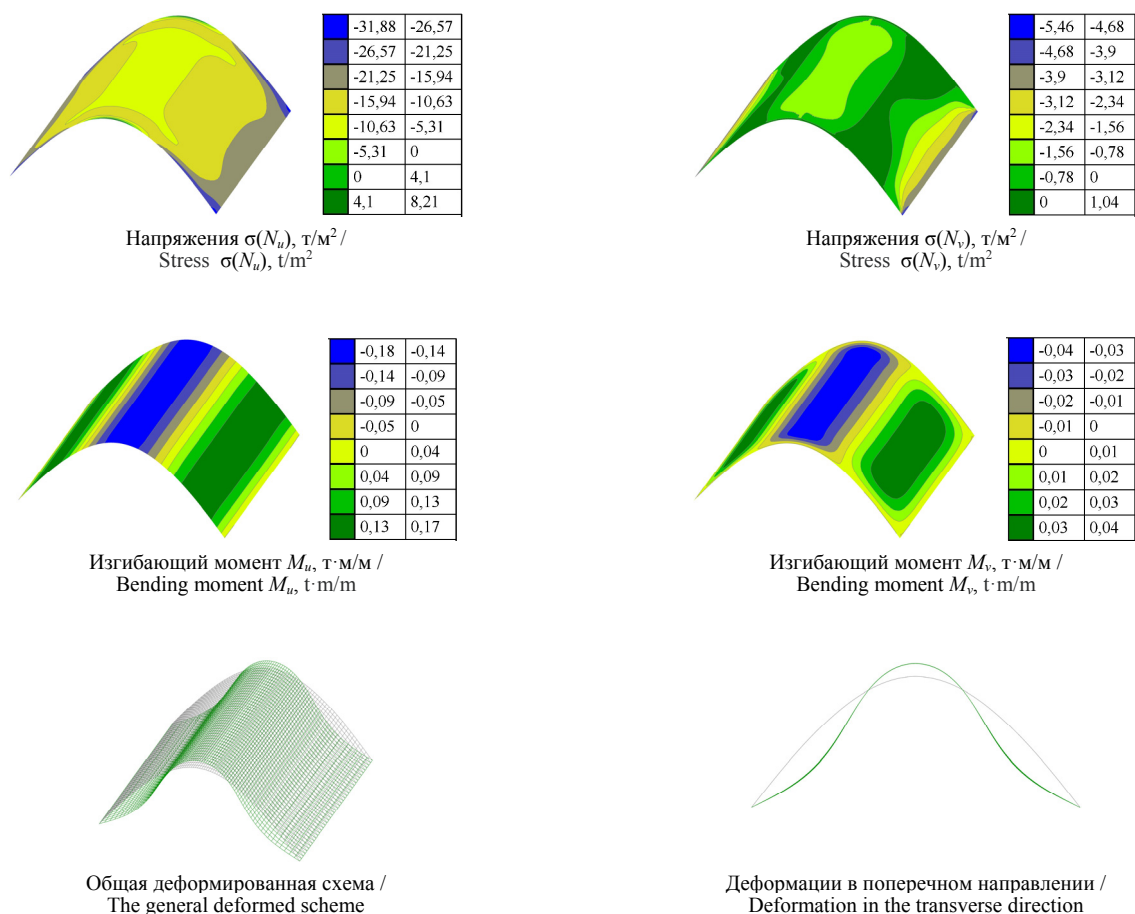


Рис. 10. Гиперболическая цилиндрическая оболочка

Источник: выполнено О.О. Алёшиной

Figure 10. Hyperbolic cylindrical shell

Source: made by O.O. Aleshina

Впервые проведен сравнительный расчет пяти тонких оболочек на действие статической нагрузки типа собственного веса. Все типы оболочек имеют одинаковые габаритные размеры: размеры в плане, высоту и толщину оболочки.

Установлено следующее:

1. Наименьшие (максимальные) тангенциальные напряжения возникают в эллипсоидальной оболочке с неполным полуэллипсом.
2. Наименьшие (максимальные) изгибные и суммарные напряжения возникают в параболической цилиндрической оболочке.
3. Суммарные (максимальные) напряжения в эллипсоидальной оболочке с неполным полуэллипсом превышают напряжения в параболической оболочке на 25 %.
4. Изгибные и суммарные (максимальные) напряжения в других типах оболочек значительно превышают аналогичные значения в параболической цилиндрической оболочке.

4. Заключение

В результате проведенного исследования следует отметить следующее.

1. Определены параметры образующих кривых цилиндрических оболочек, обеспечивающих заданные габариты оболочки.
2. Проведены расчеты цилиндрических оболочек с пятью типами образующих кривых на действие собственного веса оболочки.
3. Показано, что в цилиндрической оболочке с параболической образующей кривой возникают наименьшие (максимальные) напряжения, что подтверждает выводы ученого В.В. Новожилова.
4. В строительных конструкциях также могут использоваться эллипсоидальные цилиндрические оболочки с неполным полуэллипсом.
5. В цилиндрических оболочках с полным полуэллипсом возникают значительные опорные нормальные к поверхности реакции, что приводит к увеличению изгибающих моментов.

References / Список литературы

1. Vekariya M.S., Makwana E.A.H. A Review on Thin-shell Structures: Advances and Trends. *International Journal of Research Publication and Reviews*. 2021;2(12):1593–1608. ISSN 2582-7421
2. Martínez M.M., Valiente E.E. Las Bóvedas Cilíndricas y Su Evolución Hasta Las Cáscaras Cilíndricas Largas De Cubierta De Félix Candela. *Análisis Geométrico y Mecánico. EGA Revista de expresión gráfica arquitectónica*. 2017; 22(30):160. <https://doi.org/10.4995/EGA.2017.7846>
3. Peseke H., Grohmann M., Bollinger K. The Grossmarkthalle (wholesale market hall) in Frankfurt/Main. An early reinforced concrete shell structure. *Proceedings of the IASS Symposium 2009, Valencia, 28 September — 2 October 2009*, Universidad Politécnica de Valencia, Spain, 2010.
4. Martínez M., Valiente E., Gonzalez-Fierro G., Kevin M.G. The preservation of the architectural heritage of the twentieth century: the laminar structures of reinforced concrete. *Conference: XVI International Forum. World heritage and knowledge*. Capri, Italia, 2018.
5. Pedreschi R., Theodossopoulos D. The double-curvature masonry vaults of Eladio Dieste. *Proceedings of The Institution of Civil Engineers-structures and Buildings*. 2007;160(1):3–11. <https://doi.org/10.1680/stbu.2007.160.1.3>
6. Florio Wilson (2019). Investigations on the Design Process of Eladio Dieste: 3D Parametric Modelling of Modern Latin American Architectural Heritage. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. 2019;XLII-2/W15:775–782. <https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLII-2-W15-775-2019>
7. Galindo-Díaz J. Cylindrical shells in Colombian architecture in the 20th century. *Revista de Arquitectura*. 2018; 20(2):36–50. <http://doi.org/10.14718/RevArq.2018.20.2.2057>
8. Martínez M. Application of the beam method to structural calculation of the long cylindrical concrete shells in the work of Felix Candela. *Revista de la construcción*. 2019;18:145–155. <http://doi.org/10.7764/RDLC.18.1.134>
9. Ganendra B., Prabowo A., Muttaqie T., Adiputra R., Ridwan R., Fajri A., Thang Do Q., Carvalho H., Baek S. Thin-walled cylindrical shells in engineering designs and critical infrastructures: A systematic review based on the loading response. *Curved and Layered Structures*. 2023;10(1):20220202. <https://doi.org/10.1515/cls-2022-0202> EDN: XYJUCO

10. Bakusov P.A., Semenov A.A. Analysis of the stability of the computational algorithm to a change in the geometric parameters of cylindrical shell structures. *PNRPU mechanics bulletin*. 2021;(1):12–21. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.1.02> EDN: ZIPFYC

Бакусов П.А., Семенов А.А. Анализ устойчивости вычислительного алгоритма к изменению геометрических параметров цилиндрических оболочечных конструкций // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 1. С. 12–21. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.1.02> EDN: ZIPFYC

11. Soldatos K.P. Review of three dimensional analysis of circular cylinders and cylindrical shells. *Applied Mechanics Reviews*. 1994;47(10):501–516. <https://doi.org/10.1115/1.3111064> EDN: XROROQ

12. Pasternak H., Li Z., Juozapaitis A., Daniunas A. Ring stiffened cylindrical shell structures: State-of-the-art review. *Applied Sciences*. 2022;12:11665. <https://doi.org/10.3390/app122211665> EDN: CBGDOZ

13. Li Y., Wang W., Chen Z. An Innovative failure criterion for metal cylindrical shells under explosive loads. *Materials*. 2022;15:4376. <https://doi.org/10.3390/ma15134376> EDN: FVSLVE

14. Al-Yacoubi A.M., Hao L.J., Liew M.S., Ratnayake R.M.C., Samarakoon S.M.K. Thin-walled cylindrical shell storage tank under blast impacts: Finite element analysis. *Materials*. 2021;14:7100. <https://doi.org/10.3390/ma14227100> EDN: DBXXOD

15. Khoa N.D., Thiem H.T., Duc N.D. Nonlinear buckling and postbuckling of imperfect piezoelectric S-FGM circular cylindrical shells with metal-ceramic-metal layers in thermal environment using Reddy's third-order shear deformation shell theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2019;26(3):248–259. <https://doi.org/10.1080/15376494.2017.1341583>

16. Eslami G., Kabir M.Z. Multi-objective optimization of orthogonally stiffened cylindrical shells using optimality criteria method. *Scientia Iranica*. 2015;22(3):717–727.

17. Mohammad M., Seyed D. Effects of material properties and dimensions on buckling behavior of thin-walled cylindrical shell under hydrostatic pressure and axial force using an Abaqus developed plugin. 2024. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-4920346/v1>

18. Wang P., Niu Q., Liu M., Li Z., Cao X., Zhang H. Numerical analysis on natural vibration of cylindrical shell with different cross-section. *MATEC Web of Conferences*. 2023;380:01015. <https://doi.org/10.1051/mateconf/202338001015> EDN: DAQCOH

19. Karpilovsky V.S., Kriksunov E.Z., Malyarenko A.A., Mikitarenko M.A., Perelmuter A.V., Perelmuter M.A. *The SCAD computing complex*. Moscow: SCAD SOFT Publ.; 2021. (In Russ.) ISBN 978-5-903683-07-9

Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Микитаренко М.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. Вычислительный комплекс SCAD. Москва : СКАД СОФТ, 2021. 656 с. ISBN 978-5-903683-07-9

20. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method. Vol. 1. The basis*. Oxford: Butterworth-Heinemann; 2000. ISBN 0-7506-5049-4

21. Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhailovsky E.I. *Linear theory of thin shells*. Leningrad: Politehnika Publ.; 1991. (In Russ.) ISBN 5-7325-0127-4

Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Ленинград : Политехника, 1991. 656 с. ISBN 5-7325-0127-4