

РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-2-138-154

EDN: NQBZIK

Научная статья / Research article

Системы аппроксимирующих функций при использовании вариационных методов для расчета тонкостенных строительных конструкций

В.В. Карпов 

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, *Санкт-Петербург, Российская Федерация*

✉ vvkarpov@lan.spbgasu.ru

Поступила в редакцию: 12 февраля 2025 г.

Доработана: 7 апреля 2025 г.

Принята к публикации: 12 апреля 2025 г.

Аннотация. Исследуется вопрос использования аппроксимирующих функций в задачах расчета тонкостенных строительных конструкций и анализируются требования, которым они должны удовлетворять. Сформулировано правило, позволяющее отличить главные краевые условия от естественных. Показано, что аппроксимирующие функции должны удовлетворять главным краевым условиям, а естественные краевые условия входят в уравнения равновесия и выполняются автоматически при решении краевой задачи. Точность их выполнения зависит от точности решения самой задачи. На примере показано, к каким ошибкам может приводить использование аппроксимирующих функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям, но не удовлетворяющих условиям полноты. Рассмотрены некоторые системы функций, для которых доказано условие полноты в энергетическом пространстве. На примере ортогональных многочленов Лежандра приводится методика формирования аппроксимирующих функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям и условиям полноты системы функций. Показана эффективность использования полученных аппроксимирующих функций при решении краевых задач методом Б. Г. Галеркина.

Ключевые слова: аппроксимация, метод Б.Г. Галеркина, главные краевые условия, естественные краевые условия, полнота функций, многочлены Лежандра, сходимость

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Карпов В.В. Системы аппроксимирующих функций при использовании вариационных методов для расчета тонкостенных строительных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 2. С. 138–154. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-138-154>

Карпов Владимир Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры информационных систем и технологий, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Российская Федерация, 190005, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4; eLIBRARY SPIN-код: 7406-9199, ORCID: 0000-0001-7911-4067; e-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru

© Карпов В.В., 2025



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Systems of Approximating Functions when Using Variational Methods for Calculating Thin-Walled Building Structures

Vladimir V. Karpov 

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russian Federation

✉ vvkarpov@lan.spbgasu.ru

Received: February 12, 2025

Revised: April 7, 2025

Accepted: April 12, 2025

Abstract. The question of the use of approximating functions in the calculation of thin-walled building structures is investigated and the requirements that they must satisfy are analyzed. A rule is formulated that allows one to distinguish between the principal boundary conditions and natural ones. It is shown that the approximating functions must satisfy the principal boundary conditions, while the natural boundary conditions are included in the equilibrium equations and are satisfied automatically when solving a boundary value problem. The accuracy of their fulfillment depends on the accuracy of the solution of the problem itself. An example shows what errors can result from the use of approximating functions that satisfy the specified boundary conditions, but do not satisfy the completeness conditions. Some systems of functions for which the completeness condition in the energy space has been proven are considered. Using the example of Legendre or-thogonal polynomials, a technique is given for forming approximating functions that satisfy the specified boundary conditions and the completeness conditions of a system of functions. The efficiency of using the obtained approximating functions in solving boundary value problems using the Galerkin method is shown.

Keywords: approximation, Galerkin method, principal boundary conditions, natural boundary conditions, completeness of functions, Legendre polynomials, convergence

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

For citation: Karpov V.V. Systems of approximating functions when using variational methods for calculating thin-walled building structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(2):138–154. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-138-154>

1. Введение

Вариационные методы Ритца и Б.Г. Галеркина (полуаналитические методы) находят большое применение при расчетах тонкостенных строительных конструкций (балка, плита, оболочка) [1–4]. Приближенное решение для этих методов берется в виде суммы произведений неизвестных числовых параметров и известных аппроксимирующих функций. Аппроксимирующие функции должны удовлетворять главным краевым условиям. Естественные краевые условия при решении задачи будут удовлетворяться автоматически. Однако если аппроксимирующие функции удовлетворяют еще и естественным краевым условиям, то процесс сходимости приближенного решения к точному ускорится.

По сравнению с методом конечных элементов (МКЭ) применение вариационных методов позволяет для определения функций перемещений получать систему алгебраических уравнений, порядок которой сравнительно мал. А иногда для получения достаточной точности достаточно в разложении искомых функций по аппроксимирующим функциям брать всего один член.

Условие полноты систем аппроксимирующих функций гарантирует сходимость приближенного решения к точному, поэтому применение вариационных методов может быть использовано для обоснования точности решений, полученных МКЭ.

Наиболее часто в качестве аппроксимирующих функций используют тригонометрические функции [5–8]. Они обладают хорошей наглядностью, но для непериодических решений обладают худшей сходимостью, чем алгебраические функции.

Vladimir V. Karpov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Information Systems and Technologies, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 4, 2-nd Krasnoarmeiskaja St, St.Petersburg, 190005, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 7406-9199, ORCID: 0000-0001-7911-4067; e-mail: vvkarpov@lan.spbgasu.ru

Описанию различных аппроксимирующих функций посвящено несколько публикаций. Самый полный перечень аппроксимирующих функций, удовлетворяющих самым разнообразным краевым условиям, дается в работе В.З. Власова [9]. В 40–50-х гг. прошлого столетия большую популярность при расчете тонкостенных строительных конструкций получили вариационные методы: метод Б.Г. Галеркина, метод Власова — Канторовича, метод Ритца.

Первоначально для цилиндрических и призматических оболочек В.З. Власов на основе применения функций поперечных колебаний балок разработал аппроксимирующие функции для различных видов граничных условий.

Общий аналитический метод решения краевых задач по теории цилиндрических оболочек открытого профиля основан на применении к интегрированию дифференциальных уравнений оболочки в частных производных фундаментальных функций поперечных колебаний балки. Эти функции в методе В.З. Власова определяются по граничным условиям, заданным на поперечных криволинейных краях оболочки и должны удовлетворять однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 X_n}{\partial \alpha^4} - \lambda_n^4 X_n = 0,$$

где

$$\lambda_n = \frac{Rm_n}{l},$$

и однородным граничным условием, заданным на краях $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_1 = 1/R$.

О.Д. Ониашвили распространил применение вариационного метода на класс пологих оболочек двоякой кривизны, что дает возможность приближенного решения статических и динамических задач при произвольных граничных условиях, заданных на контуре [10]. Рассматривались уравнения в смешанной форме.

Искомые функция напряжений в срединной поверхности оболочки $\Phi(x, y)$ и функция прогиба $W(x, y)$ О.Д. Ониашвили были представлены в виде сумм произведения неизвестных числовых параметров и двух известных функций, одна из которых зависит от переменной x , а вторая зависит от y . И для задания этих функций использовались линейные комбинации фундаментальных функций поперечных колебаний балки, заведомо удовлетворяющих заданным граничным условиям, причем не только главным граничным условиям, но и естественным.

Напомним, что эту методику О.Д. Ониашвили предлагал в 1949 г. Эта методика решения вариационных задач с успехом применяется и сейчас, только ужесточились требования, предъявляемые к аппроксимирующим функциям. Они должны удовлетворять еще и условиям полноты в рассматриваемом энергетическом пространстве. Это условие гарантирует сходимость приближенного решения к точному.

Под вариационным методом в работе О.Д. Ониашвили понимается применение метода Б.Г. Галеркина к уравнениям в смешанной форме.

Для разных форм закрепления краев оболочки выписываются фундаментальные функции (системы функций). Так как принимается

$$\Phi(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} \varphi_{mn};$$

$$W(x, y) = \sum_m \sum_n B_{mn} w_{mn},$$

и, кроме того,

$$\varphi_{mn} = X_n(x) Y_m(y);$$

$$w_{mn} = \chi_n(x) \Psi_m(y),$$

то для различных видов закрепления краев оболочки находятся функции $X_n(x), Y_m(y), \chi_n(x), \Psi_m(y)$ из комбинаций фундаментальных функций

$$Z_n(\alpha) = c_1 \sin(\lambda_n \alpha) + c_2 \cos(\lambda_n \alpha) + c_3 \operatorname{sh}(\lambda_n \alpha) + c_4 \operatorname{ch}(\lambda_n \alpha);$$

$$Z_m(\beta) = C_1 \sin(\mu_m \beta) + C_2 \cos(\mu_m \beta) + C_3 \operatorname{sh}(\mu_m \beta) + C_4 \operatorname{ch}(\mu_m \beta).$$

Эти функции являются соответственными решениями дифференциальных уравнений

$$Z_n^{IV}(\alpha) = \alpha_n^4 Z_n(\alpha);$$

$$Z_m^{IV}(\beta) = \mu_m^4 Z_m(\beta).$$

В этих уравнениях α_n и μ_m — некоторые параметры, связанные в задаче о колебаниях балки с частотой собственных колебаний. Произвольные постоянные c и C определяются из условий опирания концов простой балки.

С начала 60-х годов прошлого столетия появились более четкие требования к аппроксимирующим функциям. Они должны удовлетворять главным краевым условиям, любая их последовательность должна быть линейно независимой, и они должны быть полны в рассматриваемом энергетическом пространстве.

Последнее требование обеспечивает сходимость приближенного решения к точному. К работам этого направления можно отнести работы С.Г. Михлина [11], Н.И. Ахиезера [12], И.К. Даугавета [13] и др.

Построению аппроксимирующих функций посвящено несколько публикаций (Г.Р. Коперник и В.В. Петров [14], В.Н. Филатов [15], В.П. Ильин и В.В. Карпов [16], П.А. Бакусов и А.А. Семенов [17] и др.).

В данной работе будет показано, к каким ошибкам может привести использование в качестве аппроксимирующих функций, удовлетворяющих краевым условиям, но не обладающих условием полноты. Основой же данной публикации являются составленные из многочленов Лежандра аппроксимирующие функции для различных краевых условий, удовлетворяющих всем требованиям, предъявляемым к ним.

2. Теория и методы

2.1. Погрешность, к которой приводит использование аппроксимирующих функций, удовлетворяющих краевым условиям, но не обладающих условием полноты

Тригонометрические функции, используемые в строительной механике в качестве аппроксимирующих функций, обладают хорошей наглядностью, но могут не удовлетворять условиям полноты.

В качестве примера рассмотрим расчет балки длиной 4 м, жестко закрепленной на концах и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки q .

Уравнение равновесия такой балки примет вид

$$EJW^{IV} - q = 0. \quad (1)$$

Известно точное решение задачи

$$W(x) = \frac{q}{24EJ} (x^4 - 8x^3 + 16x^2).$$

Используя метод Б.Г. Галеркина, найдем приближенное решение уравнения (1) при краевых условиях

$$W(0) = W'(0) = 0; \quad W(4) = W'(4) = 0. \quad (2)$$

Аппроксимирующие функции возьмем в виде

$$(4-x)^2 x^{2+i}; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Такая система функций, как описана в работе С.Г. Михлина [11], является полной в рассматриваемом пространстве.

Возьмем первое приближение

$$W(x) = W_1 (4-x)^2 x^2.$$

В соответствии с методом Б.Г. Галеркина для определения W_1 имеем уравнение

$$\int_0^4 \left(24W_1 - \frac{q}{EJ} \right) (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx = 0,$$

откуда $W_1 = \frac{q}{24EJ}.$

Следовательно,

$$W(x) = \frac{q}{24EJ} (x^4 - 8x^3 + 16x^2), \quad (3)$$

что совпадает с точным решением

$$W(0) = W(4) = 0; \quad W(2) = 0,666 \cdot \frac{q}{EJ}.$$

Найдем вторую производную $W(x)$, которая выражает изгибающий момент в балке и является важной характеристикой ее НДС:

$$W''(x) = \frac{q}{24EJ} (12x^2 - 48x + 72). \quad (4)$$

Теперь

$$W''(0) = W''(4) = 3 \cdot \frac{q}{EJ}, \quad W''(2) = \frac{q}{EJ}. \quad (5)$$

В строительной механике для расчета плит и оболочек часто используются в качестве аппроксимирующих функций тригонометрические функции. Так, при жестко закрепленных концах при $x = 0, x = 4$ используются функции

$$\sin^2 \frac{(2i-1)\pi x}{4}.$$

Эти аппроксимирующие функции не обладают условием полноты, но удовлетворяют краевым условиям (2).

Возьмем первое приближение

$$W(x) = W_1 \sin^2 \frac{\pi x}{4}. \quad (6)$$

В этом случае приближенное решение будет иметь вид

$$W(x) = \frac{q}{EJ} \frac{64}{\pi^4} \sin^2 \frac{\pi x}{4}.$$

Здесь

$$W(0) = W(4) = 0; \quad W(2) = 0,657 \cdot \frac{q}{EJ},$$

что близко к точному решению.

Найдем вторую производную от полученного решения:

$$W''(x) = \frac{q}{EJ} \frac{8}{\pi^2} \cos \frac{2\pi x}{4}. \quad (7)$$

Теперь

$$W''(0) = W''(4) = 0,81 \cdot \frac{q}{EJ}; \quad W''(2) = -0,81 \cdot \frac{q}{EJ}, \quad (8)$$

что существенно отличается от точного решения.

Таким образом, применение тригонометрических функций, не обладающих условиями полноты, при расчете строительных конструкций вариационными методами, при кажущейся высокой точности в значениях перемещений, в моментах может привести к существенным ошибкам.

2.2. Аппроксимирующие функции, составленные из многочленов Лежандра

Как уже говорилось ранее, полнота системы аппроксимирующих функций гарантирует сходимость приближенного решения, полученного вариационными методами Ритца или Б.Г. Галеркина, к точному решению.

Полнота системы функций $\{\sin \pi j \eta\}$, $j = 1, 2, \dots$ доказана в работе Н.И. Ахиезера [12], системы функций $\{\omega(\eta) \eta^{j-1}\}$; $j = 1, 2, \dots$ в работе Л.В. Канторовича и В.И. Крылова [18], системы функций

$$\left\{ \sqrt{2j+1} \int_0^\eta (\eta-t) P_j(2t-1) dt \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где $P_j(\eta)$ — многочлены Лежандра, в работе С.Г. Михлина [11].

В работе Н.К. Даугавета [13] показано, что аппроксимация многочленами непериодических функций дает более быструю сходимость по сравнению с тригонометрической аппроксимацией.

Сконструируем системы аппроксимирующих функций из алгебраических многочленов для некоторых видов граничных условий. Наиболее удобными для этой цели являются многочлены Лежандра [19; 21], образующие на отрезке $[-1, 1]$ полную систему функций. В [21] описаны многочлены Лежандра, заданные на отрезке $[0, 1]$ и образующие на нем полную систему функций.

В работе Д.С. Кузнецова¹ приводятся многочлены Лежандра $P_n(x)$, заданные на отрезке $[-1, 1]$ и равные 1 или -1 на концах отрезка. Эти полиномы определяются формулой Родрига

¹ Кузнецов Д.С. Специальные функции. Москва : Высшая школа, 1962. 249 с.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right).$$

Также многочлены Лежандра в качестве аппроксимирующих функций используются в работах [22–27].

Г. Корн и Т. Корн приводят рекуррентную формулу² для определения ортогональных многочленов Лежандра

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) + \frac{x^2 - 1}{n+1} \cdot \frac{dP_n(x)}{dx}. \quad (10)$$

Эти многочлены заданы на отрезке $[-1, 1]$ и на концах отрезка принимают значения 1 или -1 . Эти многочлены образуют на отрезке $[-1, 1]$ полную систему функций. Вот некоторые из них:

$$\begin{aligned} P_0 = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{3}(4x^2 - 1); \quad P_3(x) = 2x^3 - x; \quad P_4(x) = \frac{1}{5}(16x^4 - 12x^2 + 1); \\ P_5(x) = \frac{1}{3}(16x^5 - 16x^3 + 3x); \quad P_6(x) = \frac{16}{3} \left(\frac{11}{6}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{23}{32}x^2 - \frac{1}{32} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Будем рассматривать смещенные многочлены Лежандра

$$\bar{P}_n(x) = P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x); \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Эти многочлены будут равны нулю при $x = -1$ и $x = 1$. Получим некоторые из них:

$$\begin{aligned} \bar{P}_2(x) = \frac{1}{3}(4x^2 - 4); \quad \bar{P}_3(x) = 2x^3 - 2x; \quad \bar{P}_4(x) = \frac{1}{15}(48x^4 - 56x^2 + 8); \\ \bar{P}_5(x) = \frac{1}{3}(16x^5 - 22x^3 + 6x); \quad \bar{P}_6(x) = \frac{16}{3} \left(\frac{11}{6}x^6 - \frac{44}{15}x^4 + \frac{187}{160}x^2 - \frac{11}{160} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Перейдем от отрезка $[-1, 1]$ к отрезку $[0, 1]$, сделав замену $\xi = \frac{x+1}{2}$ или $x = 2\xi - 1$. Теперь многочлены примут вид

$$\begin{aligned} \bar{P}_2(\xi) = \frac{1}{3}(4(2\xi - 1)^2 - 4) = \frac{16}{3}\xi(\xi - 1); \quad \bar{P}_3(\xi) = 2(8\xi^3 - 12\xi^2 + 4\xi) = 8\xi(2\xi^2 - 3\xi + 1); \\ \bar{P}_4(\xi) = \frac{32}{15}(24\xi^4 - 48\xi^3 + 29\xi^2 - 5\xi); \\ \bar{P}_5(\xi) = \frac{8}{3}(64\xi^5 - 160\xi^4 + 138\xi^3 - 47\xi^2 + 5\xi); \\ \bar{P}_6(\xi) = \frac{16}{3} \left(\frac{11 \cdot 64}{6}\xi^6 - \frac{11 \cdot 192}{6}\xi^5 + \frac{11792}{30}\xi^4 - \frac{2992}{15}\xi^3 + \frac{5313}{40 \cdot 3}\xi^2 - \frac{1540}{32 \cdot 15}\xi \right). \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 1 приведены графики этих многочленов.

² Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Москва : Наука, 1973. 832 с.

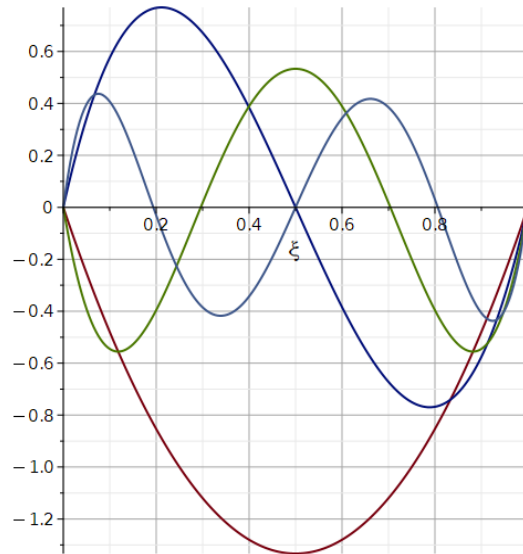


Рис. 1. Смещенные многочлены Лежандра

И с т о ч н и к: выполнено В.В. Карповым

Figure 1. Shifted Legendre Polynomials

S o u r c e: made by V.V. Karpov

Эти многочлены при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ равны нулю. От отрезка $[0, 1]$ можно перейти к отрезку $[0, a]$, если сделать замену

$$\xi = \frac{y}{a}; \quad 0 \leq y \leq a.$$

Например:

$$\bar{P}_2(\xi) = \frac{16}{3}\xi(\xi-1) = \frac{16}{3}\frac{y}{a}\left(\frac{y}{a}-1\right) = \frac{16}{3a^2}y(y-a);$$

$$\bar{P}_3(\xi) = 8\xi(2\xi^2-3\xi+1) = 8\frac{y}{a}\left(2\frac{y^2}{a^2}-3\frac{y}{a}+1\right) = \frac{8}{a^3}y(2y^2-3ya+a^2);$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_4(\xi) &= \frac{32}{15}(24\xi^4-48\xi^3+29\xi^2-5\xi) = \frac{32}{15}\left(24\frac{y^4}{a^4}-48\frac{y^3}{a^3}+29\frac{y^2}{a^2}-5\frac{y}{a}\right) = \\ &= \frac{32}{15a^4}(24y^4-48y^3a+29y^2a^2-5ya^3). \end{aligned}$$

Многочлены (14), заданные на отрезке $[0, 1]$ и равные нулю на концах этого отрезка, могут быть использованы для аппроксимации перемещений $U(\xi)$ и $V(\xi)$, если край конструкции закреплен жестко или шарнирно-неподвижно, а для аппроксимации прогиба $W(\xi)$ из них необходимо также сконструировать аппроксимирующие функции, удовлетворяющие заданным краевым условиям.

Теперь из многочленов (14) получим аппроксимирующие функции, удовлетворяющие условиям

$$W(0) = 0; \quad W'(0) = 0; \quad W''(1) = 0; \quad W'''(1) = 0. \quad (15)$$

Эти условия означают, что при $\xi = 0$ край жестко закреплен, а при $\xi = 1$ — свободен.

Рассмотрим $\bar{P}_2(\xi) = \frac{16}{3}\xi(\xi-1)$. Эта функция удовлетворяет условию $W'''(1) = 0$, но и $W'''(0) = 0$, а это не требуется, поэтому примем

$$W_{12}'''(\xi) = \frac{16}{3}(\xi-1).$$

Проинтегрируем это соотношение:

$$W_{12}''(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^2}{2} - \xi + C_1\right).$$

Используя условие $W_{12}''(1) = 0$, найдем $C_1 = 1/2$.

Далее

$$W_{12}'(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{2}\xi + C_2\right).$$

Используя условие $W_{12}'(0) = 0$, найдем $C_2 = 0$.

Далее получим

$$W_{12}(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^4}{24} - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^2}{4} + C_3\right).$$

Используя условие $W_{12}(0) = 0$, найдем $C_3 = 0$.

Следовательно,

$$W_{12}(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^4}{24} - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^2}{4}\right).$$

Поступая аналогичным способом, и используя многочлены (14), далее получаем

$$W_{13}(\xi) = \frac{4}{15}\xi^5 - \xi^4 + \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{2}{3}\xi^2;$$

$$W_{14}(\xi) = \frac{32}{15}\left(\frac{1}{5}\xi^6 - \frac{4}{5}\xi^5 + \frac{29}{24}\xi^4 - \frac{5}{6}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^2\right);$$

$$W_{15}(\xi) = \frac{8}{3}\left(\frac{32}{105}\xi^7 - \frac{8}{6}\xi^6 + \frac{23}{10}\xi^5 - \frac{47}{24}\xi^4 + \frac{5}{6}\xi^3 - \frac{3}{20}\xi^2\right);$$

$$W_{16}(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{22}{63}\xi^8 - \frac{16 \cdot 11}{15 \cdot 7}\xi^7 + \frac{1474}{15 \cdot 30}\xi^6 - \frac{748}{15 \cdot 15}\xi^5 + \frac{1771}{80 \cdot 12}\xi^4 - \frac{77}{48 \cdot 3}\xi^3 + \frac{11}{80 \cdot 2}\xi^2\right).$$

Аппроксимирующие функции, удовлетворяющие условиям (15), приведены на рис. 2, а.

Используя многочлены (14), получим аппроксимирующие функции для $W(\xi)$, удовлетворяющие краевым условиям при $\xi = 0$ и $\xi = 1$:

$$W_n(0) = W_n''(0) = 0; \quad W_n(1) = W_n''(1) = 0. \quad (16)$$

Эти краевые условия соответствуют шарнирно-неподвижному закреплению краев.

Примем

$$W_{2_1}''(\xi) = \frac{16}{3}(\xi^2 - \xi).$$

Проинтегрируем это соотношение два раза

$$W_{2_1}'(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{2} + C_1\right);$$

$$W_{2_1}(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^4}{12} - \frac{\xi^3}{6} + C_1\xi + C_2\right).$$

Из условия $W_{2_1}(0) = 0$ находим $C_2 = 0$, из условия $W_{2_1}(1) = 0$ находим $C_1 = 1/12$. Следовательно,

$$W_{2_1}(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^4}{12} - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi}{12}\right).$$

Поступая аналогичным способом, используя многочлены (14), далее получаем

$$W_{2_2}(\xi) = 8\left(\frac{\xi^5}{10} - \frac{\xi^4}{4} + \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi}{60}\right);$$

$$W_{2_3}(\xi) = \frac{32}{15}\left(\frac{4}{5}\xi^6 - 12\frac{\xi^5}{5} + 29\frac{\xi^4}{12} - 5\frac{\xi^3}{6} + \frac{1}{60}\xi\right);$$

$$W_{2_4}(\xi) = \frac{8}{3}\left(\frac{32}{21}\xi^7 - 16\frac{\xi^6}{3} + 69\frac{\xi^5}{10} - 47\frac{\xi^4}{12} + \frac{5}{6}\xi^3 + C_1\xi + C_2\right).$$

Аппроксимирующие функции, удовлетворяющие условию (16), приведены на рис. 2, б.

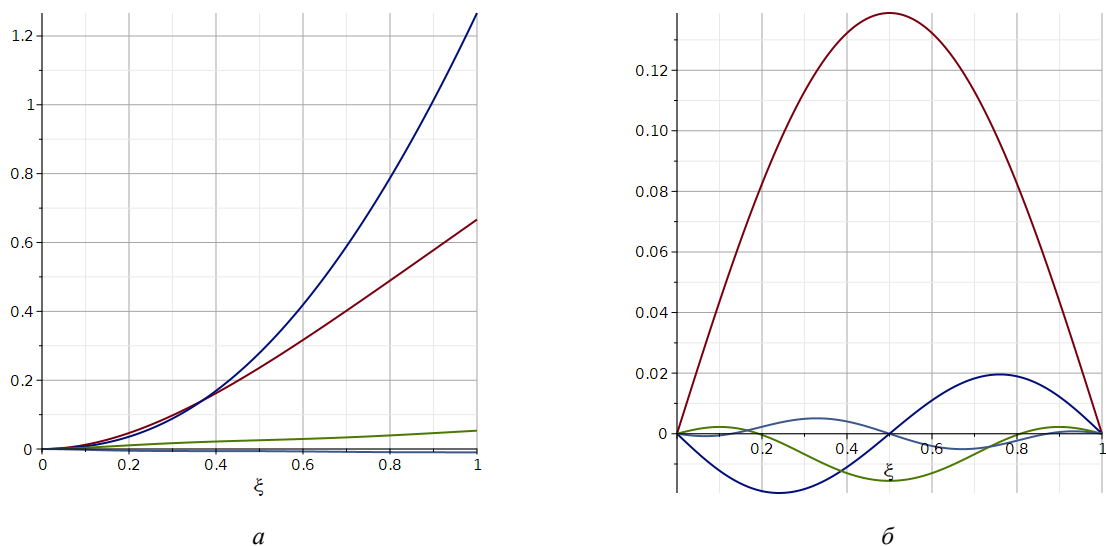


Рис. 2. Аппроксимирующие функции:

a — при жестком (левый край) и свободном (правый край) закреплении; b — при шарнирно-неподвижном закреплении

Источник: выполнено В.В. Карповым

Figure 2. Approximating functions:

a — with fixed support (left edge) and free end (right edge); b — with pinned supports

Source: made by V.V. Karpov

Используя многочлены (14), получим аппроксимирующие функции для $W(\xi)$, удовлетворяющие условиям

$$W(0) = W'(0) = 0; \quad W(1) = W''(1) = 0, \quad (17)$$

то есть при $\xi = 0$ край жестко защемлен, а при $\xi = 1$ закреплен шарнирно-неподвижно.

Примем

$$W_{31}''(\xi) = \frac{1}{\xi}(\bar{P}_2(\xi) + A\bar{P}_3(\xi)) = \frac{16}{3}(\xi - 1) + A \cdot 8(2\xi^2 - 3\xi + 1).$$

При этом условие $W_{31}''(1) = 0$ выполняется. Проинтегрируем $W_{31}''(\xi)$ два раза:

$$W_{31}'(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^2}{2} - \xi\right) + 8A\left(\frac{2}{3}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \xi\right) + C_1;$$

$$W_{31}(\xi) = \frac{16}{3}\left(\frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{2}\right) + 8A\left(\frac{2}{12}\xi^4 - \frac{3}{6}\xi^3 + \frac{\xi^2}{2}\right) + C_1\xi + C_2.$$

Из условия $W'(0) = 0$ находим $C_1 = 0$, а из условия $W(0) = 0$ находим $C_2 = 0$. Используя условие $W(1) = 0$, находим A :

$$\frac{16}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) + 8A\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0; \quad A = \frac{4}{3};$$

Окончательно получим

$$W_{31}(\xi) = \frac{8}{9}(2\xi^4 - 5\xi^3 + 3\xi^2).$$

Поступая аналогичным способом, используя многочлены (14), далее получаем

$$W_{32}(\xi) = \frac{24}{7}\xi^5 - \frac{212}{21}\xi^4 + \frac{206}{21}\xi^3 - \frac{22}{7}\xi^2 = \frac{2}{7}\left(12\xi^5 - \frac{106}{3}\xi^4 + \frac{103}{3}\xi^3 - 11\xi^2\right);$$

$$W_{33}(\xi) = \frac{32}{15}\left(\frac{24}{20}\xi^5 - 4\xi^4 + \frac{29}{6}\xi^3 - \frac{5}{2}\xi^2\right) + \frac{56}{45} \cdot \frac{8}{3}\left(\frac{64}{30}\xi^6 - 8\xi^5 + \frac{23}{2}\xi^4 - \frac{47}{6}\xi^3 + \frac{5}{2}\xi^2\right).$$

Аппроксимирующие функции, удовлетворяющие условиям (17), показаны на рис. 3, а.

Если конструкция при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ жестко закреплена, то есть аппроксимирующие функции должны удовлетворять условию $W(0) = W'(0) = 0; \quad W(1) = W'(1) = 0$, то, как было уже сказано ранее, в качестве аппроксимирующих функций, удовлетворяющих условиям полноты [11], можно принять

$$W_i(\xi) = (1 - \xi)^2 \cdot \xi^{2+i}; \quad i = 0, 1, 2, \text{ а также используя многочлены (14)}$$

$$\bar{P}_2(\xi) = \frac{16}{3}\xi(\xi - 1); \quad \bar{P}_3(\xi) = 8\xi(2\xi^2 - 3\xi + 1);$$

$$\bar{P}_4(\xi) = \frac{32}{15}(24\xi^4 - 48\xi^3 + 29\xi^2 - 5\xi);$$

$$\bar{P}_5(\xi) = \frac{8}{3}(64\xi^5 - 160\xi^4 + 138\xi^3 - 47\xi^2 + 5\xi),$$

получим выражения

$$W_{41}(\xi) = \frac{16}{3}\xi^2(\xi-1)^2;$$

$$W_{42}(\xi) = 8\xi^2(2\xi^2 - 3\xi + 1)^2;$$

$$W_{43}(\xi) = \frac{32}{15}(24\xi^4 - 48\xi^3 + 29\xi^2 - 5\xi)^2;$$

$$W_{44}(\xi) = \frac{8}{3}(64\xi^5 - 160\xi^4 + 138\xi^3 - 47\xi^2 + 5\xi)^2.$$

Вид этих аппроксимирующих функций показан на рис. 3, б.

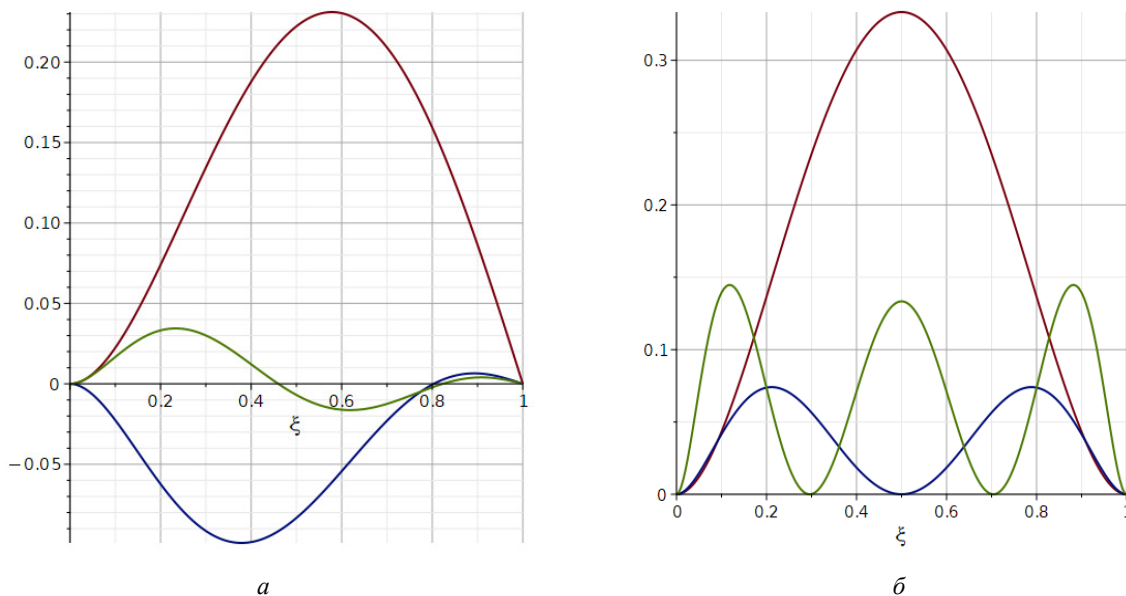


Рис. 3. Аппроксимирующие функции:
a — при жестком (левый край) и шарнирно-неподвижном (правый край) закреплении; *б* — жестком закреплении
 Источник: выполнено В.В. Карповым

Figure 3. Approximating functions:
a — with fixed (left edge) and pinned (right edge) supports; *b* — with fixed support
 Source: made by V.V. Karpov

3. Результаты и обсуждение

Некоторые примеры использования аппроксимирующих функций, обладающих условием полноты

Теперь проанализируем некоторые аппроксимирующие функции, составленные из многочленов Лежандра, которые образуют полную систему функций в рассматриваемом пространстве.

Эти функции заданы на отрезке $[0, 1]$, поэтому точное решение для балки при соответствующих формах закрепления концов будем находить для отрезка $[0, 1]$.

Рассмотрим шарнирно-неподвижное закрепление на концах балки. Должны выполняться краевые условия

$$W(0) = W''(0) = 0; \quad W(1) = W''(1) = 0. \quad (18)$$

Общее решение уравнения

$$W^{IV} - \frac{q}{EI} = 0 \quad (19)$$

будет иметь вид

$$W(x) = \frac{q}{EI} \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4. \quad (20)$$

При этом

$$\begin{aligned} W'(x) &= \frac{q}{EI} \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3; \\ W''(x) &= \frac{q}{EI} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2; \\ W'''(x) &= \frac{q}{EI} x + C_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Частное решение, удовлетворяющее краевым условиям (18), примет вид

$$W(x) = \frac{q}{EI \cdot 12} \left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x}{2} \right). \quad (22)$$

Аппроксимирующие функции для этого вида закрепления краев конструкции, составленные из многочленов Лежандра, будут иметь вид (первый член системы функций)

$$\varphi_1(x) = \frac{16}{3 \cdot 6} \left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x}{2} \right). \quad (23)$$

Примем

$$W(x) = W_1 \varphi_1(x)$$

и найдем решение уравнения (19). Значение W_1 найдем из условия, откуда

$$\int_0^1 \left(\frac{16}{3 \cdot 6} 12 W_1 - \frac{q}{EI} \right) \left(\frac{16}{18} \left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x}{2} \right) \right) dx = 0.$$

Таким образом,

$$W_1 = \frac{q}{EI \cdot 12} \frac{18}{16}.$$

Следовательно,

$$W(x) = \frac{q}{EI \cdot 12} \left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x}{2} \right), \quad (24)$$

что совпадает с точным решением (22).

Рассмотрим еще один вид закрепления краев конструкции

$$W(0) = W'(0) = 0; \quad W''(1) = W'''(1) = 0. \quad (25)$$

В этом случае частное решение уравнения (19) при краевых условиях (25) примет вид

$$W(x) = \frac{q}{EI} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right). \quad (26)$$

Первый член системы аппроксимирующих функций для этого вида закрепления краев конструкции, составленной из многочленов Лежандра, имеет вид

$$\varphi_1(x) = \frac{16}{3} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right). \quad (27)$$

Примем

$$W(x) = W_1 \varphi_1(x)$$

и найдем решение уравнения (19). Значение W_1 найдем из условия

$$\int_0^1 \left(\frac{16}{3} W_1 - \frac{q}{EI} \right) \frac{16}{3} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right) dx = 0.$$

Отсюда

$$W_1 = \frac{q}{EI} \frac{3}{16}.$$

Следовательно,

$$W(x) = \frac{q}{EI} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} \right). \quad (28)$$

Функция (28) совпадает с (26), то есть приближенное решение, найденное, когда аппроксимирующие функции составлены из многочленов Лежандра, совпадает с точным решением.

4. Заключение

Представленные исследования показали, что нельзя использовать в качестве аппроксимирующих функции, удовлетворяющие заданным краевым условиям, но не удовлетворяющие условиям полноты. Возможно, такая аппроксимация дает хорошие результаты в перемещениях, но в моментах приводит к существенным погрешностям.

1. Для формирования аппроксимирующих функций наиболее удобными являются ортогональные многочлены Лежандра, для которых доказано выполнение условий полноты.

2. На основе смещенных многочленов Лежандра получены аппроксимирующие функции, удовлетворяющие всем требованиям, предъявляемым к ним.

Список литературы

1. *Salmanizadeh A., Kiani Y., Eslami M.R.* Vibrations of functionally graded material conical panel subjected to instantaneous thermal shock using Chebyshev-Ritz route // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2022. Vol. 144. P. 422–432. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.08.040> EDN: SZOESD
2. *Gao C., Pang F., Cui J., Li H., Zhang M., Du Y.* Free and forced vibration analysis of uniform and stepped combined conical-cylindrical-spherical shells: A unified formulation // *Ocean Engineering*. 2022. Vol. 260. P. 111842. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111842> EDN: CTVJOW
3. *Трепутнева Т.А., Моисеенко М.О., Попов О.Н., Барашков В.Н., Песцов Д.Н.* Напряжённо-деформированное состояние подкреплённых тонкостенных элементов конструкций // *Вестник Томского государственного архитектур-*

турно-строительного университета. 2021. Т. 23. № 4. С. 69–78. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2021-23-4-69-78> EDN: IYLNVB

4. *Sowiński K.* The Ritz method application for stress and deformation analyses of standard orthotropic pressure vessels // *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 162. P. 107585. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107585> EDN: ALNABX

5. *Amabili M.* Non-linearities in rotation and thickness deformation in a new third-order thickness deformation theory for static and dynamic analysis of isotropic and laminated doubly curved shells // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015. Vol. 69. P. 109–128. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.026>

6. *Bakulin V.N., Nedbay A.Y.* Dynamic stability of a cylindrical shell reinforced by longitudinal ribs of piecewise-constant thickness under axial loading // *Doklady Physics*. 2020. Vol. 65. No. 12. P. 436–441. <https://doi.org/10.1134/S1028335820120034> EDN: EQBNOB

7. *Razov I., Sokolov V., Dmitriev A., Ogorodnova J.* Parametric vibrations of the underground oil pipeline // *E3S Web of Conferences*. 2022. Vol. 363. P. 01038. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236301038>

8. *Waqas H.M., Shi D., Khan S.Z., Helal M., Fathallah E.* Analytical modeling of cross-ply cylindrical composite submersible shell with elastic buckling using first order shear deformation theory // *Frontiers in Materials*. 2022. Vol. 9. P. 1004752. <https://doi.org/10.3389/fmats.2022.1004752> EDN: DGVOQA

9. *Власов В.З.* Избранные труды : в 3 т. Москва : Изд-во АН СССР, 1962. 528 с. URL: <https://thelibrary.net/1240368-vlasov-vz-izbrannye-trudy-v-3-t-moskva> (дата обращения: 20.02.2025).

10. *Онишвили О.Д.* Некоторые динамические задачи теории оболочек. Москва : Изд-во АН СССР, 1957. 199 с.

11. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. Москва : Наука, 1966. 432 с. URL: [https://publ.lib.ru/ARCHIVES/M/MIHLIN_Solomon_Grigor'evich_\(matematik\)/](https://publ.lib.ru/ARCHIVES/M/MIHLIN_Solomon_Grigor'evich_(matematik)/) (дата обращения: 20.02.2025).

12. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. 2-е изд. Москва : Наука, 1965. 407 с. URL: <https://djvu.online/file/XiWds81QZnYso> (дата обращения: 20.02.2025).

13. *Даугавет И.К.* О быстроте сходимости метода Галеркина для обыкновенных дифференциальных уравнений // *Известия вузов. Математика*. 1958. № 5. С. 158–165.

14. *Коперник Г.Р., Петров В.В.* О построении аппроксимирующих функций при расчете гибких пластинок и пологих оболочек вариационными методами // *Механика деформируемых сред*. 1974. Т. 1. С. 117–123. EDN: UNCUVN

15. *Филатов В.Н.* Построение систем аппроксимирующих функций с помощью модификации статического метода В.З. Власова, служащих для решения задач теории гибких пластин. Саратов, СПИ. Деп. ВИНТИ (7427-B85), 1985. 26 с.

16. *Ильин В.П., Карпов В.В.* Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. Ленинград : Стройиздат, 1986. 168 с. EDN: UGDTQF

17. *Бакусов П.А., Семенов А.А.* Устойчивость сегментов тороидальных оболочек при изменении угла отклонения от вертикальной оси // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2017. № 3. С. 17–36. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.3.02> EDN: ZJZRMV

18. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. 5-е изд. Москва, Ленинград : Физматгиз, 1962. 708 с. URL: <https://djvu.online/file/LmWkpF1c2N3Z3> (дата обращения: 20.02.2025).

19. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions: Vol. I. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. 302 p. URL: <https://djvu.online/file/yJMgdNZWJk89f> (дата обращения: 20.02.2025).

20. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions: Vol. II. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. 396 p. URL: <https://djvu.online/file/t7CNNO9bH0KS9> (дата обращения: 20.02.2025).

21. *Люстерник Л.А., Червоненкис О.А., Янпольский А.Р.* Математический анализ. Вычисление элементарных функций. Москва : Физматгиз, 1963. 248 с.

22. *Qu Y., Long X., Wu S., Meng G.* A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia // *Composite Structures*. 2013. Vol. 98. P. 169–191. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.001>

23. *Feng K., Xu J.* Buckling Analysis of Composite Cylindrical Shell Panels by Using Legendre Polynomials Hierarchical Finite-Strip Method // *Journal of Engineering Mechanics*. 2017. Vol. 143. No. 4. P. 04016121. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001181](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001181)

24. *Yshii L.N., Santana R.C., Monteiro F.A.C., Lucena Neto E.* Buckling of Cylindrical Panels by a Ritz Scheme // *Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. Brazil, 2017. <https://doi.org/10.20906/CPS/CILAMCE2017-0613>

25. *Zappino E., Li G., Pagani A., Carrera E., Miguel A.G. de.* Use of higher-order Legendre polynomials for multi-layered plate elements with node-dependent kinematics // *Composite Structures*. 2018. Vol. 202. P. 222–232. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.01.068> EDN: YEGXYT

26. *Li G., Miguel A.G. de, Pagani A., Zappino E., Carrera E.* Finite beam elements based on Legendre polynomial expansions and node-dependent kinematics for the global-local analysis of composite structures // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2019. Vol. 74. P. 112–123. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.11.006> EDN: PCPGRL

27. Raghieb R., Naciri I., Khalfi H., Elmaimouni L., Yu J., Bybi A., Sahal M. Free Vibration Modeling in a Functionally Graded Hollow Cylinder Using the Legendre Polynomial Approach // *Architecture and Engineering*. 2023. Vol. 8. No. 4. P. 82–98. <https://doi.org/10.23968/2500-0055-2023-8-4-82-98> EDN: AJNBMP

References

1. Salmanizadeh A., Kiani Y., Eslami M.R. Vibrations of functionally graded material conical panel subjected to instantaneous thermal shock using Chebyshev-Ritz route. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2022;144:422–432. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.08.040> EDN: SZOESD
2. Gao C., Pang F., Cui J., Li H., Zhang M., Du Y. Free and forced vibration analysis of uniform and stepped combined conical-cylindrical-spherical shells: A unified formulation. *Ocean Engineering*. 2022;260:111842. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111842> EDN: CTVJOW
3. Treputneva T.A., Moiseenko M.O., Popov O.N., Barashkov V.N., Pestsov D.N. Stress-strain state of reinforced thin-walled structural elements. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta — Journal of Construction and Architecture*. 2021;23(4):69–78. (In Russ.) <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2021-23-4-69-78> EDN: IYLNVB
4. Sowiński K. The Ritz method application for stress and deformation analyses of standard orthotropic pressure vessels. *Thin-Walled Structures*. 2021;162:107585. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107585> EDN: ALNABX
5. Amabili M. Non-linearities in rotation and thickness deformation in a new third-order thickness deformation theory for static and dynamic analysis of isotropic and laminated doubly curved shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015;69:109–128. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.026>
6. Bakulin V.N., Nedbay A.Y. Dynamic stability of a cylindrical shell reinforced by longitudinal ribs of piecewise-constant thickness under axial loading. *Doklady Physics*. 2020;65(12):436–441. <https://doi.org/10.1134/S1028335820120034> EDN: EQBNOB
7. Razov I., Sokolov V., Dmitriev A., Ogorodnova J. Parametric vibrations of the underground oil pipeline. *E3S Web of Conferences*. 2022;363:01038. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236301038>
8. Waqas H.M., Shi D., Khan S.Z., Helal M., Fathallah E. Analytical modeling of cross-ply cylindrical composite submersible shell with elastic buckling using first order shear deformation theory. *Frontiers in Materials*. 2022;9:1004752. <https://doi.org/10.3389/fmats.2022.1004752> EDN: DGVOQA
9. Vlasov V.Z. *Selected works*: in 3 volumes. Moscow: USSR Academy of Sciences Publ.; 1962. (In Russ.) Available from: <https://thelibrary.net/1240368-vlasov-vz-izbrannye-trudy-v-3-h-tomah.html> (accessed: 20.02.2025).
10. Oniashvili O.D. *Some dynamic problems of shell theory*. Moscow: USSR Academy of Sciences Publ.; 1957. (In Russ.)
11. Mikhlin S.G. *Numerical implementation of variational methods*. Moscow: Nauka Publ.; 1966. (In Russ.) Available from: [https://publ.lib.ru/ARCHIVES/M/MIHLIN_Solomon_Grigor'evich_\(matematik\)/](https://publ.lib.ru/ARCHIVES/M/MIHLIN_Solomon_Grigor'evich_(matematik)/) (accessed: 20.02.2025).
12. Akhiezer N.I. *Lectures on the theory of approximation*. 2nd Moscow: Nauka Publ.; 1965. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/XiWds81QZnYso> (accessed: 20.02.2025).
13. Daugavet I.K. On the speed of convergence of Galerkin's method for ordinary differential equations. *Izvestiya vuzov. Mathematics*. 1958;(5):158–165. (In Russ.)
14. Kopernik G.R., Petrov V.V. On the construction of approximating functions in the calculation of flexible plates and hollow shells by variational methods. *Mechanics of deformable media*. 1974;1:117–123. (In Russ.) EDN: UNCUVN
15. Filatov V.N. *Construction of systems of approximating functions using a modification of V.Z. Vlasov's static method used to solve problems in the theory of flexible plates*. Saratov, SPI. Dept. VINITI (7427-B85), 1985. (In Russ.)
16. Ilyin V.P., Karpov V.V. *Stability of ribbed shells under large displacements*. Leningrad: Stroyizdat Publ.; 1986. (In Russ.) EDN: UGDTQF
17. Bakusov P.A., Semenov A.A. Stability of toroidal shell segments at variation of a deflection angle. *PNRPU mechanics bulletin*. 2017;(3):17–36. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.3.02> EDN: ZJZRMV
18. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Approximate methods of higher analysis*. 5th ed. Moscow, Leningrad: Fizmatgiz Publ.; 1962. (In Russ.) Available from: <https://djvu.online/file/LmWkpF1c2N3Z3> (accessed: 20.02.2025).
19. Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*: Vol. I. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. Available from: <https://djvu.online/file/yJMgdNZWJk89f> (accessed: 20.02.2025).
20. Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*: Vol. II. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. Available from: <https://djvu.online/file/t7CNNO9bH0KS9> (accessed: 20.02.2025).
21. Lyusternik L.A., Chervonenkis O.A., Yanpolsky A.R. *Mathematical analysis. Calculation of elementary functions*. Moscow: Fizmatgiz Publ.; 1963. (In Russ.)
22. Qu Y., Long X., Wu S., Meng G. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia. *Composite Structures*. 2013;98:169–191. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.001>

23. Feng K., Xu J. Buckling Analysis of Composite Cylindrical Shell Panels by Using Legendre Polynomials Hierarchical Finite-Strip Method. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017;143(4):04016121. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001181](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001181)
24. Yshii L.N., Santana R.C., Monteiro F.A.C., Lucena Neto E. Buckling of Cylindrical Panels by a Ritz Scheme. *Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. Brazil, 2017. <https://doi.org/10.20906/CPS/CILAMCE2017-0613>
25. Zappino E., Li G., Pagani A., Carrera E., De Miguel A.G. Use of higher-order Legendre polynomials for multi-layered plate elements with node-dependent kinematics. *Composite Structures*. 2018;202:222–232. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.01.068> EDN: YEGXYT
26. Li G., Miguel A.G. de, Pagani A., Zappino E., Carrera E. Finite beam elements based on Legendre polynomial expansions and node-dependent kinematics for the global-local analysis of composite structures. *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2019;74:112–123. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.11.006> EDN: PCPGRL
27. Raghib R., Naciri I., Khalfi H., Elmaimouni L., Yu J., Bybi A., Sahal M. Free Vibration Modeling in a Functionally Graded Hollow Cylinder Using the Legendre Polynomial Approach. *Architecture and Engineering*. 2023;8(4):82–98. <https://doi.org/10.23968/2500-0055-2023-8-4-82-98> EDN: AJNBMP