

Динамическое нагружение стержневых систем с конечным числом степеней свободы

С.П. Иванов^{1,2}[✉], О.Г. Иванов¹[✉], А.С. Иванова¹

¹ Поволжский государственный технологический университет, Йошкар-Ола, Российская Федерация

² Марийский государственный университет, Йошкар-Ола, Российская Федерация

✉ IvanovSP@volgatech.net

Поступила в редакцию: 1 февраля 2025 г.

Доработана: 28 марта 2025 г.

Принята к публикации: 2 апреля 2025 г.

Аннотация. Исследование устойчивости систем с конечным числом степеней свободы под действием динамических нагрузок является одной из важных проблем строительной механики. Такие системы находят широкое применение в механических системах, используемых в различных областях: строительстве, машиностроении, авиастроении, кораблестроении, приборостроении, биомеханике. При сейсмических воздействиях необходимо проверять на динамическую устойчивость элементы конструкции здания. Вопрос определения критического состояния систем с конечным числом степеней свободы при действии динамических нагрузок решается в данной работе. Представлена методика расчета на динамическую устойчивость стержневых систем с одной и двумя степенями свободы. Рассмотрены стержневые системы с конечным числом степеней свободы, на которые в продольном направлении действует динамическая сжимающая нагрузка. В шарнирах стержни соединены между собой упругими пружинами, которые противодействуют потере устойчивости системы. Для решения задачи составлены обыкновенные дифференциальные уравнения, а именно составляется уравнение для системы с одной степенью свободы и система двух уравнений для трехстержневой системы (система с двумя степенями свободы). Полученные уравнения позволяют исследовать устойчивость системы с конечным числом степеней свободы. Для решения задачи используется численный метод. Численное интегрирование уравнений выполнено методом Рунге — Кутты. По результатам расчетов построены графики зависимости отклонения стержневых систем от действующей динамической нагрузки. Изменение «времени t_1 » показывает величину динамического коэффициента k_d . Исследовано влияние на критерии динамической устойчивости стержневой системы с одной и двумя степенями свободы, параметра скорости изменения сжимающей нагрузки, начального несовершенства.

Ключевые слова: устойчивость, стержневая система, сжимающая нагрузка

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов: Иванов С.П. — научное руководство, обоснование и концепция исследования, рецензирование и редактирование, выводы; Иванов О.Г. — выполнение численных экспериментов, редактирование, написание текста; Иванова А.С. — обзор литературы, обработка данных экспериментов.

Для цитирования: Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С. Динамическое нагружение стержневых систем с конечным числом степеней свободы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 2. С. 128–137. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-128-137>

Иванов Сергей Павлович, доктор технических наук, заведующий кафедрой сопротивления материалов и прикладной механики, Поволжский государственный технологический университет, Российская Федерация, 424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д. 3; профессор кафедры электро-механики, Марийский государственный университет, Российская Федерация, 424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д. 1; eLIBRARY SPIN-код: 5963-6739, ORCID: 0000-0002-5206-9574; e-mail: IvanovSP@volgatech.net

Иванов Олег Геннадьевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры сопротивления материалов и прикладной механики ПГТУ, Поволжский государственный технологический университет, Российская Федерация, 424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д. 3; eLIBRARY SPIN-код: 5052-9077, ORCID: 0009-0005-2401-6423; e-mail: IvanovOG@volgatech.net

Иванова Анастасия Сергеевна, старший преподаватель, кафедра сопротивления материалов и прикладной механики ПГТУ, Поволжский государственный технологический университет, Российская Федерация, 424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д. 3; eLIBRARY SPIN-код: 9568-3451, ORCID: 0009-0005-3787-5067; e-mail: IvanovaAS@volgatech.net

© Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С., 2025

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Dynamic Loading of Bar Systems with a Finite Number of Degrees of Freedom

Sergei P. Ivanov^{1,2}, Oleg G. Ivanov¹, Anastasia S. Ivanova¹

¹Volga Region State Technological University, Yoshkar-Ola, Russian Federation

²Mari State University, Yoshkar-Ola, Russian Federation

✉ IvanovSP@volgatech.net

Received: February 1, 2025

Revised: March 28, 2025

Accepted: April 2, 2025

Abstract. The study of the stability of systems with a finite number of degrees of freedom under the influence of dynamic loads is an important problem of structural mechanics. Such systems are widely used in mechanical systems in various fields: construction, mechanical engineering, aircraft construction, shipbuilding, instrument engineering, and biomechanics. In case of seismic impacts, it is necessary to check the building's structural elements for dynamic stability. The issue of determining the critical state of systems with a finite number of degrees of freedom under dynamic loads is solved in this paper. The article presents a method for analyzing the dynamic stability of bar systems with one and two degrees of freedom. Bar systems with a finite number of degrees of freedom, which are subjected to a dynamic compressive load in the longitudinal direction, are considered. In the hinges, the bars are connected by elastic springs that counteract the instability of the system. To solve the problem, ordinary differential equations are composed. One equation is composed for a single-degree-of-freedom system and a system of two equations for a three-bar system (a two-degree-of-freedom system). The obtained equations allow to study the stability of a system with a finite number of degrees of freedom. Numerical method is used to solve the problem. Numerical integration of the equations is performed by the Runge — Kutta method. Based on the calculation results, graphs of the relationships between the deflection of the bar systems and the acting dynamic load are constructed. The change in the “ t_1 time” shows the value of the dynamic coefficient k_d . The influence of the parameter of the rate of change of the compressive load and the initial imperfection on the criteria of dynamic stability of bar systems with one and two degrees of freedom is investigated.

Keywords: stability, bar system, compressive load

Conflicts of interest. The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution: *Ivanov S.P.* — supervision, rationale, conceptualization, review and editing, conclusions; *Ivanov O.G.* — numerical experiments, editing, writing the text; *Ivanova A.S.* — literature review, experiment data processing.

For citation: Ivanov S.P., Ivanov O.G., Ivanova A.S. Dynamic loading of bar systems with a finite number of degrees of freedom. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(2):128–137. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-128-137>

1. Введение

Как систему с конечным числом степеней свободы можно рассматривать механическую стержневую систему, если жесткость стержней значительно превышает жесткость упругих опор. Роль упругих пружин могут выполнять различные стержневые системы (балки, рамы, фермы как статически определимые, так и статически неопределимые), имеющие конечную жесткость. При наличии большой скорости нагружения элементы стержня не успевают переместиться в направлении, перпендикулярном к оси стержня. На основании этого сжимающее усилие может достигнуть критической величины и даже превысить ее в несколько раз, раньше, чем отклонения достигнут заметных величин. Под действием динамических нагрузок рассматривалась устойчивость пластинчатых систем в [1–3]. При действии продольной нагрузки на стержневую систему с промежуточными упругими опорами возникает задача устойчивости систем с конечным числом степеней свободы, а при действии нагрузки быстро изменяющейся во времени ставится задача динамической устойчивости.

Sergei P. Ivanov, Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Materials Resistance and Applied Mechanics, Volga State University of Technology, 3 Lenin Sq, 424000, Yoshkar-Ola, Russian Federation; Professor of the Department of Electrical Mechanics, Mari State University, 1 Lenin Sq, 424000, Yoshkar-Ola, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5963-6739, ORCID: 0000-0002-5206-9574; e-mail: IvanovSP@volgatech.net

Oleg G. Ivanov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Materials Resistance and Applied Mechanics, Volga State University of Technology, 3 Lenin Sq, 424000, Yoshkar-Ola, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 5052-9077, ORCID: 0009-0005-2401-6423; e-mail: IvanovOG@volgatech.net

Anastasia S. Ivanova, Senior Lecturer of the Department of Materials Resistance and Applied Mechanics, Volga State University of Technology, 3 Lenin Sq, 424000, Yoshkar-Ola, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9568-3451, ORCID: 0009-0005-3787-5067; e-mail: IvanovaAS@volgatech.net

Устойчивость геометрически и физически нелинейных цилиндрических оболочек при действии локальных поперечных динамических нагрузок различных типов была исследована в [4–7]. Устойчивость стержневых систем рассматривалась в [8–12]. В [13] изложены результаты численного анализа динамической потери устойчивости нелинейно-деформируемых сетчатых пластин из композиционного материала. Статическая и динамическая устойчивость пластин рассматривалась в [14–17]. Вопросам динамической и статической устойчивости стержней, пластин и оболочек посвящены работы иностранных авторов [18–23]. Поведение сжатых стержневых систем с конечным числом степеней при внезапном нагружении рассматривалось А.В. Александровым, В.Д. Потаповым, В.Б. Зылевым¹. Дальнейшая разработка методики расчета на динамическую устойчивость стержневых систем с конечным числом степеней свободы является актуальной задачей.

Цель исследования — разработка методики расчета на динамическую устойчивость стержневых систем с конечным числом степеней свободы.

2. Постановка задачи

1. Рассмотрим известную статическую задачу устойчивости стержневой системы с одной степенью свободы (рис. 1) при действии продольной статической силы $P(t) = P$. Данную задачу можно решить тремя способами: статическим, энергетическим и динамическим.

Статическая величина критической силы составляет

$$P_{кр} = r/l, \quad (1)$$

где r — жесткость опорной пружины, характеризует величину момента, возникающего в основании при повороте опорного сечения θ на единицу.

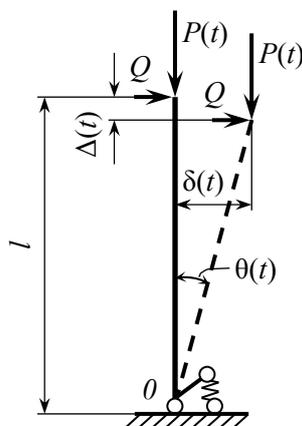


Рис. 1. Схема действия нагрузки на систему с одной степенью свободы

И с т о ч н и к: выполнено С.П. Ивановым, О.Г. Ивановым

Figure 1. Load diagram of the system with one degree of freedom

S o u r c e: made by S.P. Ivanov, O.G. Ivanov

Рассмотрим динамическое нагружение продольной силой $P(t)$, зависящей от времени t (рис. 1). Возможное движение системы характеризуется поворотом стержня относительно опорной точки O . Нелинейное дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = P(t)l \sin\theta - r\theta + Ql \cos\theta, \quad (2)$$

¹ Александров А.В., Потапов В.Д., Зылев В.Б. Строительная механика : в 2 кн. Кн. 2 : Динамика и устойчивость упругих систем: учеб. пособие для вузов. Москва : Высшая школа, 2008. 384 с.

где θ — угол поворота стержня, $I = ml^3/3$ — момент инерции массы m стержня относительно опорной точки O , Q — малая величина поперечной нагрузки, приложенной к верхней точке стержня для учета начального несовершенства.

Сжимающая нагрузка зависит от времени t в следующей форме:

$$P(t) = kt, \tag{3}$$

где k измеряется в кН/с, характеризует скорость изменения сжимающей нагрузки.

Введем новый параметр времени

$$t_1 = \frac{P(t)}{P_{кр}} = \frac{kt}{P_{кр}}. \tag{4}$$

Запишем уравнение (1) через новый параметр (4), используя правило замены переменных в дифференциальных выражениях

$$\frac{1}{S_1} \frac{d^2\theta}{dt_1^2} = (t_1 \sin \theta - \theta) + \frac{Q}{P_{кр}} \cos \theta, \tag{5}$$

где S_1 — величина, учитывающая скорость изменения сжимающей нагрузки и равная

$$S_1 = \frac{P_{кр}^3 l}{Ik^2} = \frac{r^3}{Il^2 k^2} = 3 \frac{r^3}{ml^5 k^2}. \tag{6}$$

S_1 обратно пропорциональна величине k^2 .

2. Перейдем к рассмотрению системы с двумя степенями свободы (рис. 2). Из решения статической задачи получаем два значения критической силы. Минимальная величина $P_{кр} = r/l$ и соответствует симметричной форме потери устойчивости.

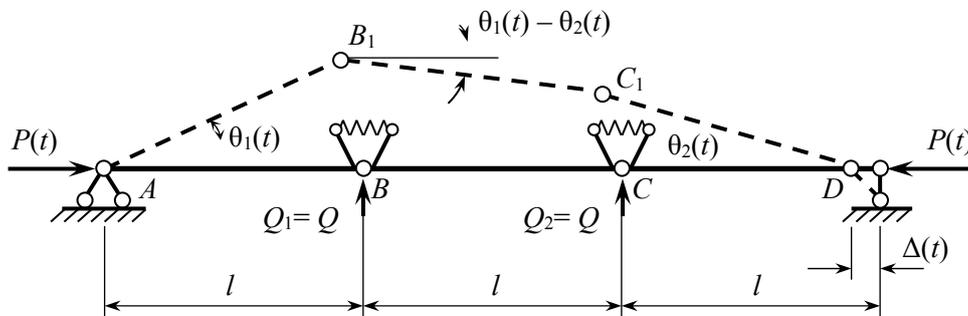


Рис. 2. Схема действия нагрузки на систему с двумя степенями свободы

Источники: выполнено С.П. Ивановым, О.Г. Ивановым

Figure 2. Load diagram of the system with two degrees of freedom

Source: made by S.P. Ivanov, O.G. Ivanov

На систему действует продольная динамическая сила $P(t)$. Составим возможные движения системы, характеризуемые поворотом θ_1 , θ_2 стержней относительно опорных точек A и D . Среднее звено BC совершает движение поворотное и поступательное. Моменты инерции I масс крайних звеньев и I_0 массы среднего звена выражаются по следующим формулам:

$$I = \int_0^l mx^2 dx = \frac{ml^3}{3}, \quad I_0 = \int_{-l/2}^{l/2} mx^2 dx = \frac{ml^3}{12}. \tag{7}$$

Запишем уравнения движения стержневой системы с учетом геометрической нелинейности:

$$4I \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + I \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -[5r\theta_1 - 2P(t)l \sin \theta_1] + [4r\theta_2 - P(t)l \sin \theta_2] + Ql \cos \theta_1,$$

$$I \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + 4I \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = [4r\theta_1 - P(t)l \sin \theta_1] - [5r\theta_2 - 2P(t)l \sin \theta_2] + Ql \cos \theta_2, \quad (8)$$

здесь r — жесткости пружин, действующие в шарнирах B и C ; $P(t)$ — динамическая нагрузка определяется по формуле (3).

Поделив первое и второе уравнения (8) на $P_{кр}$ и вводя новый параметр времени t_1 по формуле (4), получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{S_2} \frac{d^2\theta_1}{dt_1^2} = (3t_1 \sin \theta_1 - 8\theta_1) + (7\theta_2 - 2t_1 \sin \theta_2) + \frac{Q}{P_{кр}} \cos \theta_1,$$

$$\frac{1}{S_2} \frac{d^2\theta_2}{dt_1^2} = (7\theta_1 - 2t_1 \sin \theta_1)\theta_1 + (3t_1 \sin \theta_2 - 8\theta_2) + \frac{Q}{P_{кр}} \cos \theta_2, \quad (9)$$

где

$$S_2 = \frac{6P_{кр}^3}{5mlk^2} = \frac{6r^3}{5ml^5k^2}. \quad (10)$$

Начальное несовершенство учитывалось малыми величинами поперечных нагрузок $Q^* = Q/P_{кр}$, прикладываемых к шарнирам B и C .

3. Примеры реализации задач

1. Дифференциальное уравнение (5) реализовывалось численным методом Рунге — Кутта. По результатам расчета на рис. 3 представлены графики изменения угла θ от изменения динамической нагрузки $t_1 = P(t)/P_{кр}$.

Проанализируем результаты, представленные на рис. 3. Из сравнения графиков 1 и 2 видно, что при одинаковой скорости изменения нагрузки $S_1 = 0,1$, но разной величины $Q^* = 0,01$ и $Q^* = 0,02$ более быстрый рост угла θ наблюдается при большей величине $Q^* = 0,02$. С увеличением скорости изменения динамической нагрузки $S_1 = 0,05$ при тех же значениях $Q^* = 0,02$ и $0,01$ кривые 3 и 4 смещаются правее. Так, при отклонении стержня с угла $\theta = 0,07$ рад. наблюдается очень быстрый рост кривых 1 и 2, 3 и 4. Из графиков 1 и 2, 3 и 4 следует: при $\theta = 0,04$ рад. величина t_1 составляет соответственно 5 и 6; 7 и 8. Это значит, что при увеличении скорости действия нагрузки увеличивается величина динамической нагрузки, которая превышает статическую критическую силу в несколько раз.

2. Система дифференциальных уравнений (8) интегрировалась численным методом. Начальное несовершенство учитывалось нагрузкой $Q^* = Q/P_{кр}$. Результаты представлены на рис. 4.

Рассматривая график 1, видно, что при $S_2 = 0,2$ и $Q^* = 0,2$ кривая 1 зависимости $\theta — t_1$ резко начинает уходить вверх, начиная с угла $\theta = 1$ рад, величина $t_1 \approx 5$. Кривые 2 и 3 достаточно близко проходят друг от друга. При одинаковых скоростях $S_2 = 0,1$, но разных величин $Q^* = 0,2$ и $0,3$ у графика 2 начинается более быстрый рост угла θ при $t_1 \approx 6$. Принимая за критерий $\theta = 1$, у всех кривых 1–4 наблюдается асимптотический рост угла θ , соответственно имеем значения $t_1 = 5; 5,93; 6,5; 7,42$. Это значит, что при этих значениях кривые начинают резко уходить вверх. Так, при $t_1 = 6$ величина угла $\theta = 2,2$ рад. (продолжение кривой 1).

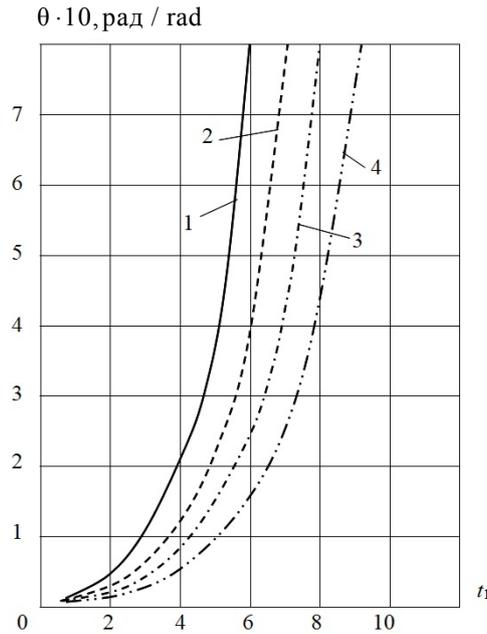


Рис. 3. Графики зависимости угла θ от параметра времени t_1 для системы с одной степенью свободы:

1 — при значениях $S_1 = 0,1$ и $Q^* = 0,02$; 2 — при значениях $S_1 = 0,1$ и $Q^* = 0,01$;
 3 — при значениях $S_1 = 0,05$ и $Q^* = 0,02$; 4 — при значениях $S_1 = 0,05$ и $Q^* = 0,01$
 Источники: выполнено С.П. Ивановым, О.Г. Ивановым, А.С. Ивановой

Figure 3. Graphs of the relationship between the angle θ and the time parameter t_1 for a system with one degree of freedom:

1 — for values $S_1 = 0.1$ and $Q^* = 0.02$; 2 — for values $S_1 = 0.1$ and $Q^* = 0.01$;
 3 — for values $S_1 = 0.05$ and $Q^* = 0.02$; 4 — for values $S_1 = 0.05$ and $Q^* = 0.01$
 Source: made by S.P. Ivanov, O.G. Ivanov, A.S. Ivanova

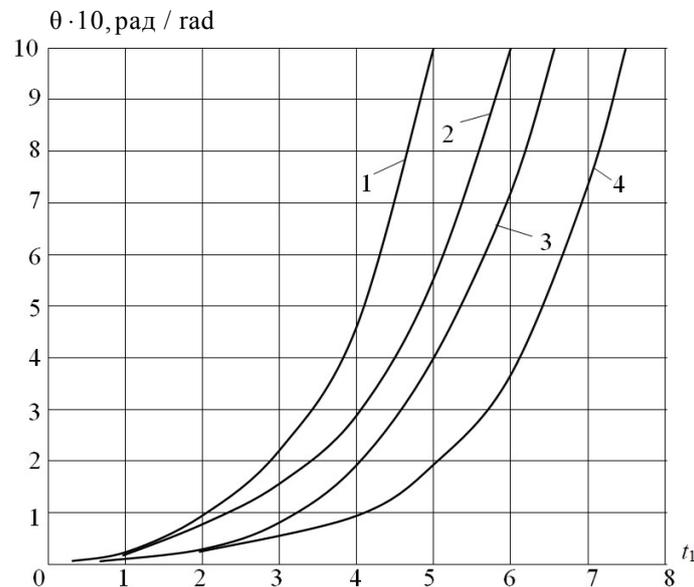


Рис. 4. Графики зависимости углов θ от параметра времени t_1 :

1 — при значениях $S_2 = 0,2$ и $Q^* = 0,2$; 2 — при значениях $S_2 = 0,1$ и $Q^* = 0,3$;
 3 — при значениях $S_2 = 0,1$ и $Q^* = 0,2$; 4 — при значениях $S_2 = 0,1$ и $Q^* = 0,1$
 Источники: выполнено С.П. Ивановым, О.Г. Ивановым, А.С. Ивановой

Figure 4. Graphs of the relationships between the angles θ and the time parameter t_1 :

1 — at values $S_2 = 0.2$ and $Q^* = 0.2$; 2 — at values $S_2 = 0.1$ and $Q^* = 0.3$;
 3 — at values $S_2 = 0.1$ and $Q^* = 0.2$; 4 — at values $S_2 = 0.1$ and $Q^* = 0.1$
 Source: made by S.P. Ivanov, O.G. Ivanov, A.S. Ivanova

На рис. 5 построены графики 1 и 2 при действии сжимающей нагрузки $P(t)$ соответственно на систему с одной и двумя степенями свободы при одинаковых величинах $S = 0,1$ и $Q^* = 0,1$. Из сравнения графиков 1 и 2 видно, что при одинаковых данных угол θ начинает быстрее расти в системе с одной степенью свободы. Так, при $\theta = 1$ рад. величина $t_1 = 5$ (кривая 1) и $t_1 = 7$ (кривая 2). Соотношение между параметрами, учитывающими скорость изменения сжимающей нагрузки, составляет $S_1/S_2 = 2,5$. Параметр k^2 , для обеих стержневых систем будет одинаков при $S_1 = 2,5 \cdot S_2$. Принято следующее обозначение:

$$S = \frac{r^3}{ml^5 k^2}. \quad (11)$$

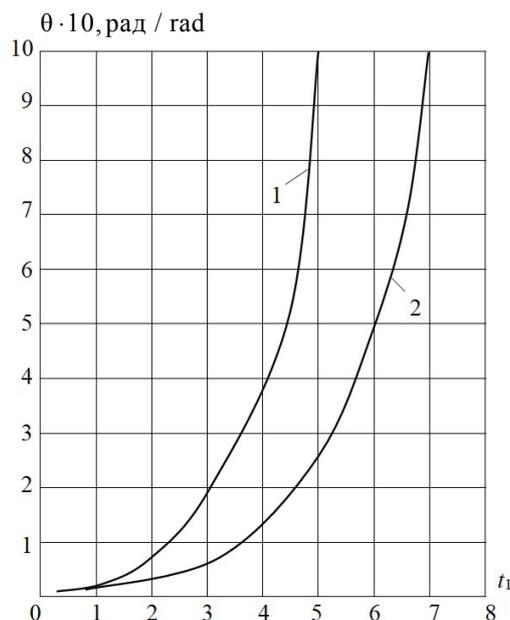


Рис. 5. Диаграммы «угол поворота θ — время t_1 » для сжатых стержневых систем с конечным числом степеней свободы при динамическом нагружении
Источник: выполнено С.П. Ивановым, О.Г. Ивановым, А.С. Ивановой

Figure 5. “Rotation angle θ — time t_1 ” diagrams for compressed bar systems with a finite number of degrees of freedom under dynamic loading
Source: made by S.P. Ivanov, O.G. Ivanov, A.S. Ivanova

4. Заключение

В результате проведенного исследования получены дифференциальные уравнения, описывающие зависимость $\theta - t_1$ при динамическом нагружении для стержневых систем с конечным числом степеней свободы: с одной и двумя степенями свободы.

Следует отметить следующее:

1. Во всех случаях при увеличении скорости нагружения в несколько раз увеличивается динамическая нагрузка по отношению к статической критической силе, что подтверждается расчетами, выполненными А.С. Вольмиром для систем с бесконечным числом степеней свободы. Такой вывод можно сделать, так как систему с бесконечным числом степеней свободы можно заменить системой с конечным числом степеней свободы.

3. При одинаковых скоростях нагружения и одинаковой величине Q^* график зависимости $\theta - t_1$ находится левее для системы с одной степенью свободы по сравнению с графиком для системы с двумя степенями свободы.

Список литературы

1. Иванов С.П., Иванова А.С. Приложение вариационного метода В.З. Власова к решению нелинейных задач пластинчатых систем: монография. Йошкар-Ола : ПГТУ, 2015. 248 с. ISBN 978-5-8158-1591 EDN: VRJXVX
2. Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С. Устойчивость пластин под действием сдвигающих нагрузок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 6. С. 68–73. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-6-68-73> EDN: ZRPHEB
3. Иванов С.П., Иванова А.С., Иванов О.Г. Устойчивость геометрически нелинейных пластинчатых систем под действием динамических нагрузок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 3. С. 219–225. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-219-225> EDN: FVXXHV
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. Москва : Наука, 1967. 984 с. <https://djvu.online/file/7kElR8yCOmeCg>
5. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. Москва : Наука, 1972. 432 с. <https://djvu.online/file/nAycMFOD1SE33>
6. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы : монография. Москва : Госстройиздат, 1958. 502 с. <https://dwg.ru/dnl/10477>
7. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. Москва : Стройиздат, 1978. 204 с. https://techlibrary.ru/b1/2t1u1l1a1z_2x.2h_2w1s1o1p1c2c_1o1flm1j1o1flk1o1p1k_1s1t1r1p1j1t1flm2d1o1p1k_1n1flw1a1o1j1l1j_1978.pdf
8. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела : сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. Т. III. Москва : Наука, 1981. 480 с. URL: <https://djvu.online/file/gZaPLb2PDUM9> (дата обращения: 22.01.2025).
9. Егоров А.В., Егоров В.Н. Расчетно-экспериментальное исследование продольной устойчивости конструкции тонкостенного плоского стержня // Инженерный журнал: наука и инновации, 2023. № 3. С. 1–16. <http://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-3-2256> EDN: VFTQTU
10. Языев С.Б., Чепурненко А.С., Аваков А.А. Численно-аналитический расчет продольного изгиба призматических упругих стержней при действии осевой сжимающей нагрузки с учетом собственного веса // Вестник МГСУ, 2021. Т. 16. № 1. С. 30–40. <http://doi.org/10.22227/1997-0935.2021.1.30-40> EDN: FNGVRD
11. Рзаев Н.С. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки из разномодульного материала, лежащей на вязкоупругом основании // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 3. С. 289–299. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-289-299> EDN: QZUUZM
12. Ilgaton M.A. Bending and stability of a cantilever bar under the action of pressure on its surface and longitudinal force // Mechanics of Solids. 2021. Vol. 56. P. 495–504. <http://doi.org/10.3103/S0025654421040087> EDN: INNNKM
13. Трушин С.И., Журавлева Т.А., Сысоева Е.В. Динамическая потеря устойчивости нелинейно-деформируемых сетчатых пластин из композиционного материала с различными конфигурациями решетки // Научное обозрение. 2016. № 4. С. 44–51. EDN: VXMUOT
14. Колмогоров Г.Л., Мельникова Т.Е., Азина Е.О. Применение метода Бубнова-Галеркина для оценки устойчивости анизотропных пластин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 4. С. 29–33. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-4-29-33>
15. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Численный анализ устойчивости подкрепленных пластин с некротными критическими нагрузками // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 54–61. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-54-61>
16. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Грудцына И.Е. Геометрически нелинейный расчет на устойчивость подкрепленной пластины с учетом взаимодействия собственных форм выпучивания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 1. С. 3–18. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18>
17. Медведский А.Л., Мартыросов М.И., Хомченко А.В., Дедова Д.В. Численный анализ поведения трехслойной панели с сотовым наполнителем при наличии дефектов под действием динамической нагрузки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 4. С. 357–365. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-357-365>
18. Breslavsky I.D., Amabili M., Legrand M. Physically and geometrically non-linear vibrations of thin rectangular plates // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2014. Vol. 58. P. 30–40. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.08.009> EDN: YDWOYH
19. Vescovini R., Dozio L. Exact refined buckling solutions for laminated plates under uniaxial and biaxial loads // Composite Structures. 2015. Vol. 127. P. 356–368. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.003>
20. Nazarimofrad E., Barkhordar A. Buckling analysis of orthotropic rectangular plate resting on Pasternak elastic foundation under biaxial in-plane loading // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2016. Vol. 23. No. 10. P. 1144–1148. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1059528>

21. Srividhya S., Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. Nonlocal nonlinear analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory // *International Journal of Engineering Science*. 2018. Vol. 125. P. 1–22. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.12.006>
22. Shiva K., Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. Nonlocal buckling analysis of laminated composite plates considering surface stress effects // *Composite Structures*. 2019. Vol. 226. Article No. 111216. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111216>
23. Pagani A., Daneshkhalah E., Xu X., Carrera E. Evaluation of geometrically nonlinear terms in the large-deflection and post-buckling analysis of isotropic rectangular plates // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2020. Vol. 121. Article No. 103461. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103461> EDN: YWBBVY

References

1. Ivanov S.P., Ivanova A.S. *Application of the variational method of V.Z. Vlasov to solving nonlinear problems of plate systems*: monograph. Yoshkar-Ola: PGTU Publ.; 2015. (In Russ.) ISBN 978-5-8158-1591-9 EDN: VRJXVX
2. Ivanov S.P., Ivanov O.G., Ivanova A.S. Stability of plates under the action of shear loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2017;6:68–73. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-6-68-73> EDN: ZRPHEB
3. Ivanov S.P., Ivanova A.S., Ivanov O.G. Stability of geometrically nonlinear plate systems under the action of dynamic loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Building*. 2020;16(3):219–225. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-3-219-225> EDN: FVXXHV
4. Volmir A.S. *Stability of deformable systems*. Moscow: Nauka Publ.; 1967. (In Russ.)
5. Volmir A.S. *Nonlinear dynamics of plates and shells*. Moscow: Nauka Publ.; 1972. (In Russ.) <https://djvu.online/file/nAycMFOD1SE33>
6. Vlasov V.Z. *Thin-walled spatial systems*. Moscow: Gosstroizdat Publ.; 1958. (In Russ.)
7. Lukash P.A. *Fundamentals of nonlinear structural mechanics*. Moscow: Stroyizdat Publ.; 1978. (In Russ.) https://techlibrary.ru/b1/2t1u11a1z_2x.2h_2w1s1o1p1c2c_1o1f1m1j1o1f1k1o1p1k_1s1t1r1p1j1t1f1m2d1o1p1k_1n1f1w1a1o1j1l1j_1978.pdf
8. Filin A.P. *Applied mechanics of a solid deformable body: Resistance of materials with elements of the theory of continuous media and structural mechanics*. Vol. III. Moscow: Nauka Publ.; 1981. (In Russ.)
9. Egorov A.V., Egorov V.N. Computational and experimental study of longitudinal stability of the thin-walled flat bar structure. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2023;3:1–16. (In Russ.) <http://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-3-2256> EDN: VFTQTU
10. Yazyayev S.B., Chepurmenko A.S., Avakov A.A. Numerical and analytical calculation of the buckling of elastic prismatic rods under the action of axial compressive loading with account for the dead load. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2021;16(1):30–40. (In Russ.) <http://doi.org/10.22227/1997-0935.2021.1.30-40> EDN: FNGVRD
11. Rzaev N.S. Dynamic stability of a cylindrical shell made of a material of different modulus placed on a viscous-elastic foundation. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024;20(3):289–299. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-3-289-299> EDN: QZUUZM
12. Ilgamov M.A. Bending and stability of a cantilever bar under the action of pressure on its surface and longitudinal force. *Mechanics of Solids*. 2021;56:495–504. <http://doi.org/10.3103/S0025654421040087> EDN: INNNKM
13. Trushin S.I., Zhuravleva T.A., Sysoeva E.V. Dynamic buckling of nonlinearly deformable reticulate plates from composite material with different lattice configurations. *Science Review*. 2016;4:44–51. (In Russ.) EDN: VXMUOT
14. Kolmogorov G.L., Melnikova T.E., Azina E.O. Application of the Bubnov-Galerkin method for assessment of stability of non-isotropic plates. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Building*. 2017;4:29–33. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2017-4-29-33> EDN: ZHAIYP
15. Manuilov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Numerical analysis of stability of the stiffened plates subjected aliquant critical loads. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2020;16(1):54–61. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-54-61> EDN: VAIDVE
16. Manuilov G.A., Kositsyn S.B., Grudtsyna I.E. Geometrically nonlinear analysis of the stability of the stiffened plate taking into account the interaction of eigenforms of buckling. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(1):3–18. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-1-3-18> EDN: LLKKIK
17. Medvedskiy A.L., Martirosov M.I., Khomchenko A.V., Dedova D.V. Numerical analysis of the behavior of a three-layer honeycomb panel with interlayer defects under action of dynamic load. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021;17(4):357–365. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2021-17-4-357-365> EDN: UYBBRC

18. Breslavsky I.D., Amabili M., Legrand M. Physically and geometrically non-linear transformations of thin rectangular plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2014;58:30–40. <http://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.08.009> EDN: YDWOYH
19. Vescovini R., Dozio L. Exact refined buckling solutions for laminated plates under uniaxial and biaxial loads. *Composite Structures*. 2015;127:356–368. <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.003>
20. Nazarimofrad E., Barkhordar A. Buckling analysis of orthotropic rectangular plate resting on Pasternak elastic foundation under biaxial in-plane loading. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016;23(10):1144–1148. <http://doi.org/10.1080/15376494.2015.1059528>
21. Srividhya S., Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. Nonlocal nonlinear analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory. *International Journal of Engineering Science*. 2018;125:1–22. <http://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.12.006>
22. Shiva K., Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. Nonlocal buckling analysis of laminated composite plates considering surface stress effects. *Composite Structures*. 2019;226:111216. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111216>
23. Pagani A., Daneshkhah E., Xu X., Carrera E. Evaluation of geometrically nonlinear terms in the large-deflection and post-buckling analysis of isotropic rectangular plates. *Inter-national Journal of Non-Linear Mechanics*. 2020;121:1–11. <http://doi.org/10.21822/2073-6185-2022-49-3-116-122> EDN: XNLIYD