

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ANALYSIS AND DESIGN OF BUILDING STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2025-21-2-83-95

EDN: MOLUMW

Научная статья / Research article

## Конечный элемент для расчета неоднородно-армированных сталефибробетонных балок

А.С. Маркович<sup>1,2</sup>, В.П. Агапов<sup>1</sup>, Д.А. Голишевская<sup>1</sup>✉<sup>1</sup> Российский университет дружбы народов, Москва, Российская Федерация<sup>2</sup> Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

✉ miloserdova-da@rudn.ru

Поступила в редакцию: 3 января 2025 г.

Доработана: 24 марта 2025 г.

Принята к публикации: 3 апреля 2025 г.

**Аннотация.** Разработана методика расчета и построения физически нелинейного конечного элемента балки многослойного армирования, позволяющего вычислять значения перемещений, деформаций и напряжений в характерном слое. Для установки действительного напряженно-деформированного состояния изгибаемых неоднородных дисперсно-армированных бетонных элементов проведено экспериментальное исследование сталефибробетонной балки с неравномерным по высоте сечения фибровым армированием (от 0,5 до 2,0 %). Определены деформации и перемещения балки в характерных точках, а также получены нормальные растягивающие и сжимающие напряжения. Полученные экспериментальные данные были использованы для верификации конечного элемента балки многослойного армирования. Разработанный конечный элемент балки основан на модифицированной теории расчета многослойных балок, предложенной П.М. Варваком. Модель многослойной балки учитывает искривление поперечного сечения при действии касательных напряжений за счет включения в функционал полной потенциальной энергии обобщенного компонента деформации сдвига. В дополнение к экспериментальным данным выполнены нелинейные расчеты многослойной балки в программном комплексе Ansys. Расхождение результатов расчета при использовании разработанного конечного элемента с экспериментальными данными составило от 6 до 11 %, а с результатами расчетов, полученных в Ansys, — от 11 до 15 %. Разработанный конечный элемент интегрирован в вычислительный комплекс ПРИНС, и в составе этой программы может быть использован для расчета неоднородных дисперсно-армированных элементов.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, сталефибробетон, многослойная балка, неравномерное армирование, напряженно-деформированное состояние

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов:** Маркович А.С. — научное руководство, концепция исследования; Агапов В.П. — научное рецензирование и редактирование; Голишевская Д.А. — обзор литературы, проведение эксперимента, разработка конечного элемента, написание текста.

**Для цитирования:** Маркович А.С., Агапов В.П., Голишевская Д.А. Конечный элемент для расчета неоднородно-армированных сталефибробетонных балок // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2025. Т. 21. № 2. С. 83–95. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-83-95>

**Маркович Алексей Семенович**, доктор технических наук, доцент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; доцент кафедры фундаментального образования, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация, 129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26; eLIBRARY SPIN-код: 9203-1434, ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

**Агапов Владимир Павлович**, доктор технических наук, профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; eLIBRARY SPIN-код: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovvp@mail.ru

**Голишевская Дарья Александровна**, кандидат технических наук, ассистент кафедры технологий строительства и конструкционных материалов; eLIBRARY SPIN-код: 1276-6516, ORCID: 0000-0003-0835-528X; e-mail: miloserdova-da@rudn.ru

© Маркович А.С., Агапов В.П., Голишевская Д.А., 2025

 This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

# Finite Element for the Analysis of Reinforced Concrete Beams with Non-Uniform Steel Fiber Reinforcement

Alexey S. Markovich<sup>1,2</sup> , Vladimir P. Agapov<sup>1</sup> , Darya A. Golishevskaya<sup>1</sup>  

<sup>1</sup> RUDN University, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

✉ miloserdova-da@rudn.ru

Received: January 3, 2025

Revised: March 24, 2025

Accepted: April 3, 2025

**Abstract.** A method has been developed for calculating and constructing a physically nonlinear finite element of a multilayer reinforcement beam, which allows to calculate the values of displacements, strains and stresses in a characteristic layer. To establish the actual stress-strain state of bent heterogeneous fiber reinforced concrete elements, an experimental study of a steel-fiber-concrete beam with non-uniform fiber reinforcement along the cross-section height (from 0.5 to 2.0%) was carried out. Strains and displacements of the beam at characteristic points are determined, and normal tensile and compressive stresses are obtained. The experimental data obtained were used to verify the finite element of the multilayer reinforcement beam. The developed finite element of the beam was based on the modified theory of calculation of multilayer beams proposed by P.M. Varvak. The multilayer beam model takes into account the curvature of the cross section under the action of shear stresses by including the generalized component of shear strain in the functional of the total potential energy. In addition to the experimental data, nonlinear analysis of a multilayer beam was performed in the Ansys software package. The discrepancy between the calculation results using the developed finite element and the experimental data ranged from 6 to 11%, and from 11 to 15% with the calculation results obtained in Ansys. The developed finite element is integrated into the PRINCE computing complex, and as part of this program it can be used to calculate heterogeneous fiber-reinforced elements.

**Keywords:** finite element method, multi-layered beam, non-uniform reinforcement, stress-strain state

**Conflicts of interest.** The authors declare that there is no conflict of interest.

**Authors' contribution:** Markovich A.S. — supervision, conceptualization; Agapov V.P. — review and editing; Golishevskaya D.A. — literature review, experimental investigation, finite element development, writing the text.

**For citation:** Markovich A.S., Agapov V.P., Golishevskaya D.A. Finite element for the analysis of reinforced concrete beams with non-uniform steel fiber reinforcement. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2025;21(2):83–95. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2025-21-2-83-95>

## 1. Введение

При проектировании бетонных конструкций на основе дисперсного армирования возникает необходимость учета неоднородного распределения армирующего материала по высоте сечения элемента. Данная задача может быть решена при использовании объемных конечных элементов, в своей основе реализующих те или иные критерии прочности и (или) пластичности бетона и армирующего материала. Для решения этой задачи можно воспользоваться указанными объемными конечными элементами в таких расчетных комплексах, как Ansys и Abaqus<sup>1</sup>. Однако данные программные комплексы могут быть недоступны широкому кругу инженеров-проектировщиков ввиду их высокой стоимости. Кроме того, использование объемных конечных элементов зачастую ведет к увеличению размерности решаемых задач, что приводит к существенным временным затратам и повышенным требованиям к производительности используемых компьютеров. В связи с этим проблема разработки

**Alexey S. Markovich**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Associate professor of the Department of Fundamental Education, National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26 Yaroslavl Highway, Moscow, 129337, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 9203-1434, ORCID: 0000-0003-3967-2114; e-mail: markovich-as@rudn.ru

**Vladimir P. Agapov**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 2422-0104, ORCID: 0000-0002-1749-5797; e-mail: agapovpb@mail.ru

**Darya A. Golishevskaya**, Candidate of Technical Sciences, Assistant of the Department of Construction Technology and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 1276-6516, ORCID: 0000-0003-0835-528X; e-mail: miloserdova-da@rudn.ru

<sup>1</sup> ANSYS Theory Reference. Release 5.6. PA: ANSYS Inc. Canonsburg; 1999. ABAQUS 6.11. Theory manual. DS Simulia; 2011.

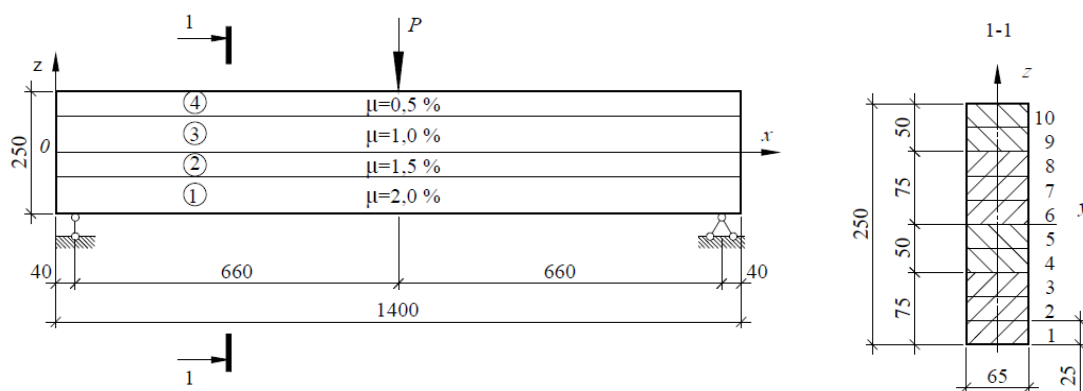
простых в реализации и доступных широкому кругу пользователей конечных элементов остается актуальной задачей [1–4].

В ряде исследований, проведенных отечественными и зарубежными учеными, рассматриваются случаи однородного распределения дисперсной арматуры по сечению элемента [5–7], в то время как практика проектирования требует более гибкого подхода [8]. Существуют методики расчета, которые не учитывают возможность создания зон с различной концентрацией армирующих волокон в пределах одного конструктивного элемента [9; 10]. Некоторые ученые рассматривают влияние на прочность и деформативность различных комбинаций армирующих волокон, но равномерно распределенных в сечении элемента [12–14]. Однако именно неоднородное армирование позволяет оптимизировать расход материалов и повысить несущую способность конструкции [15]. Отсутствие комплексного подхода к расчету дисперсно-армированных элементов с учетом неоднородного армирования по высоте сечения элемента затрудняет их широкое применение, несмотря на очевидные технико-экономические и прочностные преимущества.

В связи с этим крайне важным является исследование напряженно-деформированного состояния многослойных балок, имеющих неоднородное дисперсное армирование. Авторами работы поставлена задача разработать методику расчета неоднородно-армированных элементов и в качестве примера для исследования была выбрана сталефибробетонная балка, имеющая неоднородное армирование.

## 2. Материалы и методы

Объектом исследования является сталефибробетонная балка размером  $65 \times 250 \times 1400$  мм ( $b \times h \times L$ ), имеющая неоднородное армирование по высоте сечения волокном анкерного типа (рис. 1). Балка была условно поделена на 10 слоев: в нижней части было выполнено максимальное дисперсное армирование, равное 2,0 %, а в верхней части минимальное — 0,5 %. Для изготовления указанной балки использовался мелкозернистый бетон, позволяющий обеспечить высокую степень насыщения волокнами и высокую дисперсность армирования. В качестве дисперсного армирования применялась стальная фибра анкерного профиля (длина волокна 30 мм, диаметр волокна 0,3 мм).



**Рис. 1.** Распределение содержания стального волокна анкерного типа по высоте сталефибробетонной балки

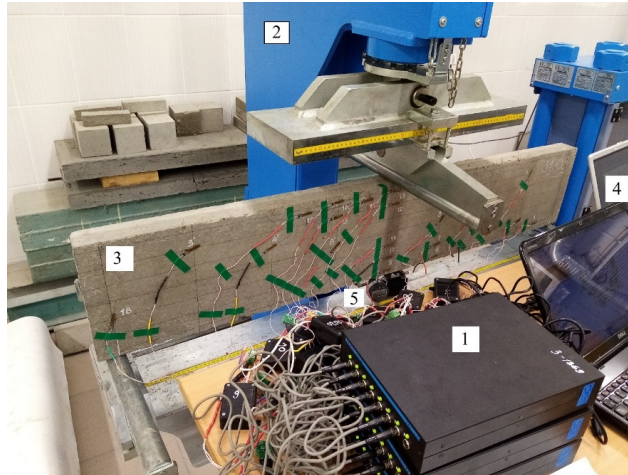
И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Голишевской

**Figure 1.** Distribution of hooked-end steel fiber content along the height of the steel fiber-reinforced concrete beam

S o u r c e: made by D.A. Golishevskaya

Для исследования напряженно-деформированного состояния неоднородно-армированной сталефибробетонной балки были использованы средства тензометрии. Для этого на контрольный образец балки был наклеен 21 тензорезистор ВХ 120-20АА в направлении главных деформаций. Тензорезисторы были подключены к многоканальной тензометрической станции Zetlab ZET 017-T32 по

полной мостовой схеме. Испытания балки проводились на специальной установке Matest (рис. 2), позволяющей проводить испытания крупноразмерных элементов на изгиб. В процессе испытаний в реальном времени синхронно с нагрузкой регистрировались деформации и перемещения балки.



**Рис. 2.** Экспериментальная неоднородно-армированная сталефибробетонная балка и используемое оборудование:

- 1 — тензометрическая станция Zetlab ZET 017-T32; 2 — гидравлический пресс Matest;  
3 — образец-балка с тензорезисторами BX 120-20AA;  
4 — персональный компьютер для обработки данных; 5 — цифровой прогибомер

Источники: фото Д.А. Голишевской

**Figure 2.** Experimental non-uniformly reinforced steel fiber-reinforced concrete beam and the equipment used:

- 1 — Zetlab ZET 017-T32 strain gauge station; 2 — Matest hydraulic press;  
3 — beam specimen with BX 120-20AA strain gauges;  
4 — personal computer for data processing; 5 — digital deflectometer

Source: photo by D.A. Golishevskaya

Для построения конечного элемента балки неоднородного армирования была использована теория расчета многослойных балок, приведенная в работе П.М. Варвака<sup>1</sup>. Данная теория была модифицирована авторами в соответствии с общими положениями и принципами метода конечных элементов.

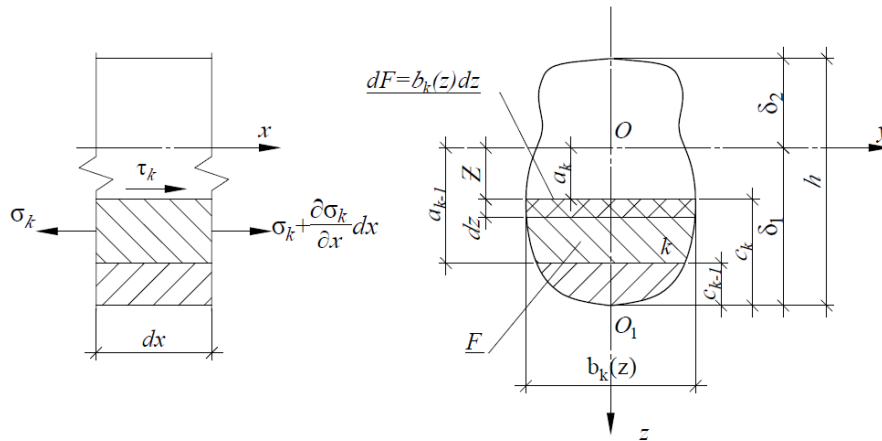
Для модели многослойной балки (рис. 3, 4), в которой полагается, что поперечные сечения искривляются за счет влияния касательных напряжений, принимается следующая формула (2), которая следует из условия (1) равновесия части  $F$  элемента  $dx$  балки:

$$\tau_k \cdot b_k + \int_F \frac{\partial \sigma_k}{\partial x} dF = 0; \quad (1)$$

$$\tau_k = -\frac{d\kappa}{dx} \frac{1}{b_k} \int_{-\delta_2}^z E_k b_k z dz, \quad (2)$$

где  $\kappa(x) = \frac{d^2 w}{dx^2}$  — кривизна нейтрального слоя балки при изгибе;  $E_k = E_k(z)$  — модуль упругости в направлении оси  $x$ .

<sup>1</sup> Варвак П.М., Бузун И.М., Городецкий А.С., Пискунов В.Г., Толокнов Ю.Н. Метод конечных элементов : учебное пособие для вузов. Киев : Головное издательство издательского объединения «ВИЦА ШКОЛА», 1981. 176 с.

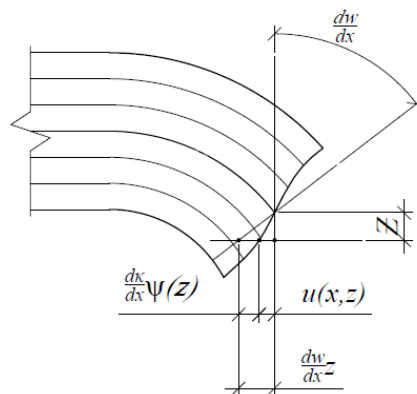


**Рис. 3.** Поперечное сечение многослойной балки

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Голишевской

**Figure 3.** Cross-section of a multi-layered beam

S o u r c e: made by D.A. Golishevskaja



**Рис. 4.** Схема смещения слоев многослойной балки при изгибе

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Голишевской

**Figure 4.** Diagram of layer displacement in a multi-layered beam under bending

S o u r c e: made by D.A. Golishevskaja

Продольные деформации и деформации поперечного сдвига для  $k$ -го слоя определяются следующими уравнениями:

$$\varepsilon_k = \frac{\partial u_k}{\partial x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} z + \frac{d^2 \kappa}{dx^2} \psi_k(z); \quad (3)$$

$$\gamma_k = \frac{\partial u_k}{\partial z} + \frac{\partial w_k}{\partial x} = \frac{\tau_k}{G_k} = \frac{d\kappa}{dx} \frac{d\psi_k(z)}{dz};$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial z} = -\frac{\partial w_k}{\partial x} + \frac{d\kappa}{dx} \frac{d\psi_k(z)}{dz}, \quad (4)$$

где  $G_k = G_k(z)$  — модуль сдвига; функция  $\psi_k(z) = \int_0^z \frac{1}{G_k b_k} \left( \int_{-\delta_1}^z E_k b_k \tilde{z} d\tilde{z} \right) dz$  учитывает компонент сдвига;

$u_k$  — горизонтальное перемещение;  $w_k$  — вертикальное перемещение, которое принимается постоянным по высоте.

Согласно закону Гука, с учетом выражений (3) и (4) напряжения будут иметь вид

$$\sigma_k = -E_k \left[ \frac{d^2 w}{dx^2} Z - \frac{d^2 \kappa}{dx^2} \psi_k(z) \right]; \quad (5)$$

$$\tau_k = G_k \frac{d\kappa}{dx} \frac{d\psi_k(z)}{dz}. \quad (6)$$

Выражение для потенциальной энергии деформации многослойной балки можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_k \varepsilon_k + \tau_k \gamma_k) dV = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \int_F \sigma_k \left[ -\frac{d^2 w}{dx^2} z + \frac{d^2 \kappa}{dx^2} \psi_k(z) \right] dF + \int_F \tau_k \frac{d\kappa}{dx} \frac{d\psi_k(z)}{dz} dF \right\} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^l \left( M \frac{d^2 w}{dx^2} - \bar{M} \frac{d^2 \kappa}{dx^2} - \bar{Q} \frac{d\kappa}{dx} \right) dx, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $l$  — длина балки;  $F$  — площадь поперечного сечения;  $M$  — изгибающий момент;  $\bar{Q}$  — поперечная сила;  $\bar{M}$  и  $\bar{Q}$  — обобщенные изгибающий момент и поперечная сила, возникающие вследствие деформации сдвига поперечных сечений и отвечающие принятым выражениям для деформаций.

Тогда функционал полной потенциальной энергии многослойной балки с учетом искривления сечения за счет действия касательных напряжений записывается следующим образом:

$$\Pi = W - A = \frac{1}{2} \int_0^l \left( M \kappa - \frac{\bar{M}}{c_1} \bar{\kappa} + \frac{\bar{Q}}{c_1} \bar{\varphi} \right) dx - \int_0^l q w dx, \quad (8)$$

где  $q = q_z(x)$  — интенсивность распределенной поперечной нагрузки, нормальной к оси  $x$ .

Аппроксимация перемещений по области КЭ обусловлена функционалом полной потенциальной энергии (8), который учитывает кривизны изгиба  $\kappa$  и сдвига  $\bar{\kappa}$ . Выражения моментов  $M$  и  $\bar{M}$  также записаны через кривизны  $\kappa$  и  $\bar{\kappa}$ .

Так, в каждом  $i$ -м узле КЭ ( $i = 1, 2$ ) назначаются по две независимые группы степеней свободы (изгибная и сдвиговая) (рис. 5):

$$\{z_{i,l}\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{z}_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\varphi}_i \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

где  $w(x)$  — перемещение;  $\bar{w}(x) = c_1 \kappa(x)$  — обобщенное перемещение, связанное с учетом поперечного сдвига;  $\varphi = \frac{dw}{dx}$  — угол поворота сечения;  $\bar{\varphi} = \frac{d\bar{w}}{dx}$  — аналог угла поворота сечения, связанный с учетом поперечного сдвига.

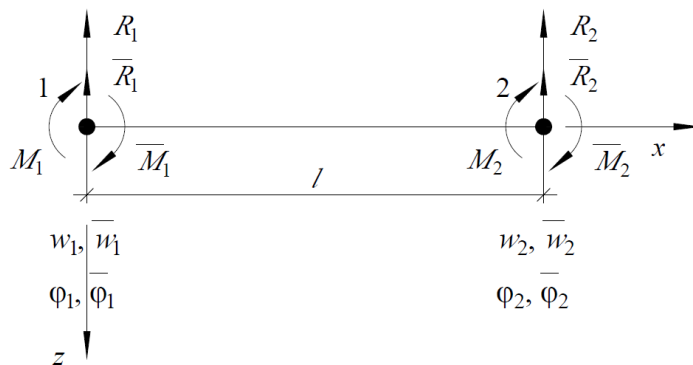
С учетом принятых обозначений выражения для изгибающих моментов и поперечных сил записываются в следующем виде:

$$M = D_{11}(\kappa + \bar{\kappa}); \quad \bar{M} = -D_{11}(c_1 \kappa + c_2 \bar{\kappa}); \quad Q = -\frac{D_{11}}{c_1} \bar{\varphi}; \quad \bar{Q} = D_{11} \bar{\varphi}. \quad (10)$$

Жесткости  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \int_F E_k z^2 dF = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} E_k b_k z^2 dz; \quad D_{12} = -\int_F E_k \psi_k(z) z dF = -\sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} E_k b_k \psi_k(z) z dz; \\ D_{22} &= \int_F E_k \psi_k^2(z) dF = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} E_k b_k \psi_k^2(z) dz; \quad c_1 = \frac{D_{12}}{D_{11}}; \quad c_2 = \frac{D_{22}}{D_{12}}. \end{aligned} \quad (11)$$





**Рис. 5.** Конечный элемент многослойной балки

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Голишевской

**Figure 5.** Finite element of a multi-layered beam

S o u r c e: made by D.A. Golishevskaya

Матрица жесткости конечного элемента получена на основании вариационного принципа Лагранжа. Коэффициенты матрицы в общем случае равны

$$r_{ij} = \int_0^l \sigma_k(x) \epsilon_k(x) dx = \int_0^l \left[ M_k \kappa_k - \frac{\overline{M}_k}{c_1} \overline{\kappa}_k + \frac{\overline{Q}_k}{c_1} \overline{\varphi}_k \right] dx. \quad (12)$$

Система уравнений равновесия МКЭ имеет следующий вид:

$$[R]\{z\} = \{P\}, \quad (13)$$

где  $\{P\}$  — вектор внешней узловой нагрузки;  $\{z\}$  — вектор узловых перемещений.

$$\{z\} = \{w_1 \quad \varphi_1 \quad w_2 \quad \varphi_2 \quad \overline{w}_1 \quad \overline{\varphi}_1 \quad \overline{w}_2 \quad \overline{\varphi}_2\}^T. \quad (14)$$

Матрица жесткости конечного элемента  $[R]$  имеет размерность  $8 \times 8$  и формируется следующим образом:

$$[R] = \begin{bmatrix} [r_1] & [r_2] \\ [r_2] & [r_3] \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где подматрицы  $[r_1]$  и  $[r_3]$  отвечают состоянию изгиба и сдвига, а подматрица  $[r_2]$  определяет взаимодействие этих состояний.

$$[r_1] = \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \end{bmatrix}$$

$$[r_2] = \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \end{bmatrix}$$

$$[r_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} \left( \frac{12c_2}{l^3} + \frac{6}{5l} \right) & \frac{1}{c_1} \left( \frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) & -\frac{1}{c_1} \left( \frac{12c_2}{l^3} + \frac{6}{5l} \right) & \frac{1}{c_1} \left( \frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) \\ \frac{1}{c_1} \left( \frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) & \frac{1}{c_1} \left( \frac{4c_2}{l} + \frac{2l}{15} \right) & -\frac{1}{c_1} \left( \frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) & \frac{1}{c_1} \left( \frac{2c_2}{l} + \frac{l}{30} \right) \\ -\frac{1}{c_1} \left( \frac{12c_2}{l^3} + \frac{6}{5l} \right) & -\frac{1}{c_1} \left( \frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) & \frac{1}{c_1} \left( \frac{12c_2}{l^3} + \frac{6}{5l} \right) & -\frac{1}{c_1} \left( \frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) \\ \frac{1}{c_1} \left( \frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) & \frac{1}{c_1} \left( \frac{2c_2}{l} + \frac{l}{30} \right) & -\frac{1}{c_1} \left( \frac{6c_2}{l^2} + \frac{1}{10} \right) & \frac{1}{c_1} \left( \frac{4c_2}{l} + \frac{2l}{15} \right) \end{bmatrix}$$

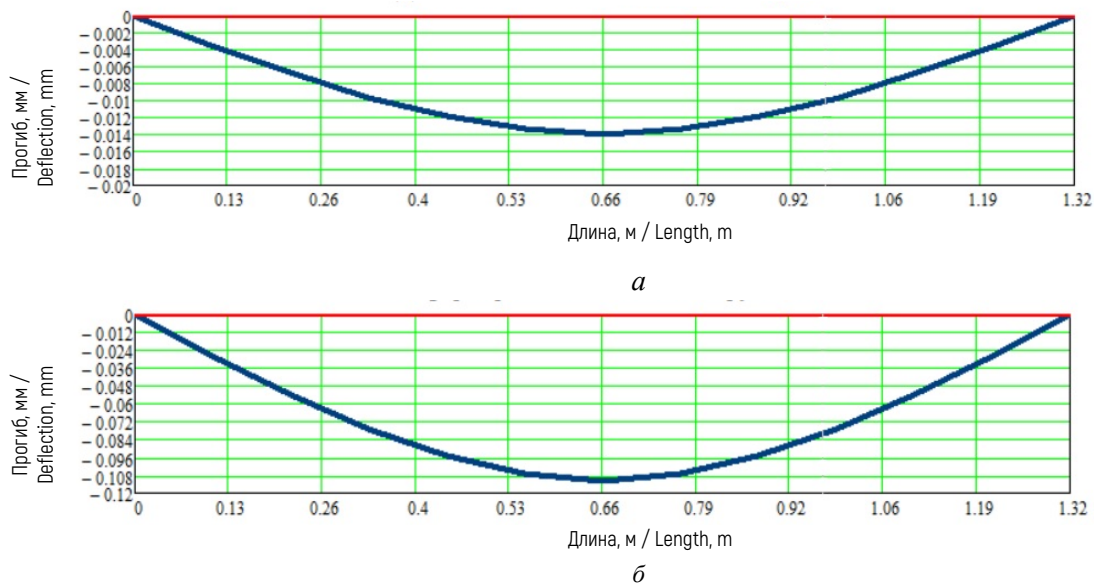
### 3. Результаты и обсуждение

Для выполнения физически нелинейных расчетов использовался модифицированный метод Ньютона — Рафсона, позволяющий повысить сходимость результатов за счет энергетической коррекции вектора приращения перемещений.

На основании приведенного выше алгоритма разработан конечный элемент многослойной балки, интегрированный в вычислительный комплекс ПРИНС [16].

В целях отладки предложенного конечного элемента были использованы результаты эксперимента, проведенного авторами в лаборатории строительных конструкций и материалов инженерной академии РУДН им. Патриса Лумумбы.

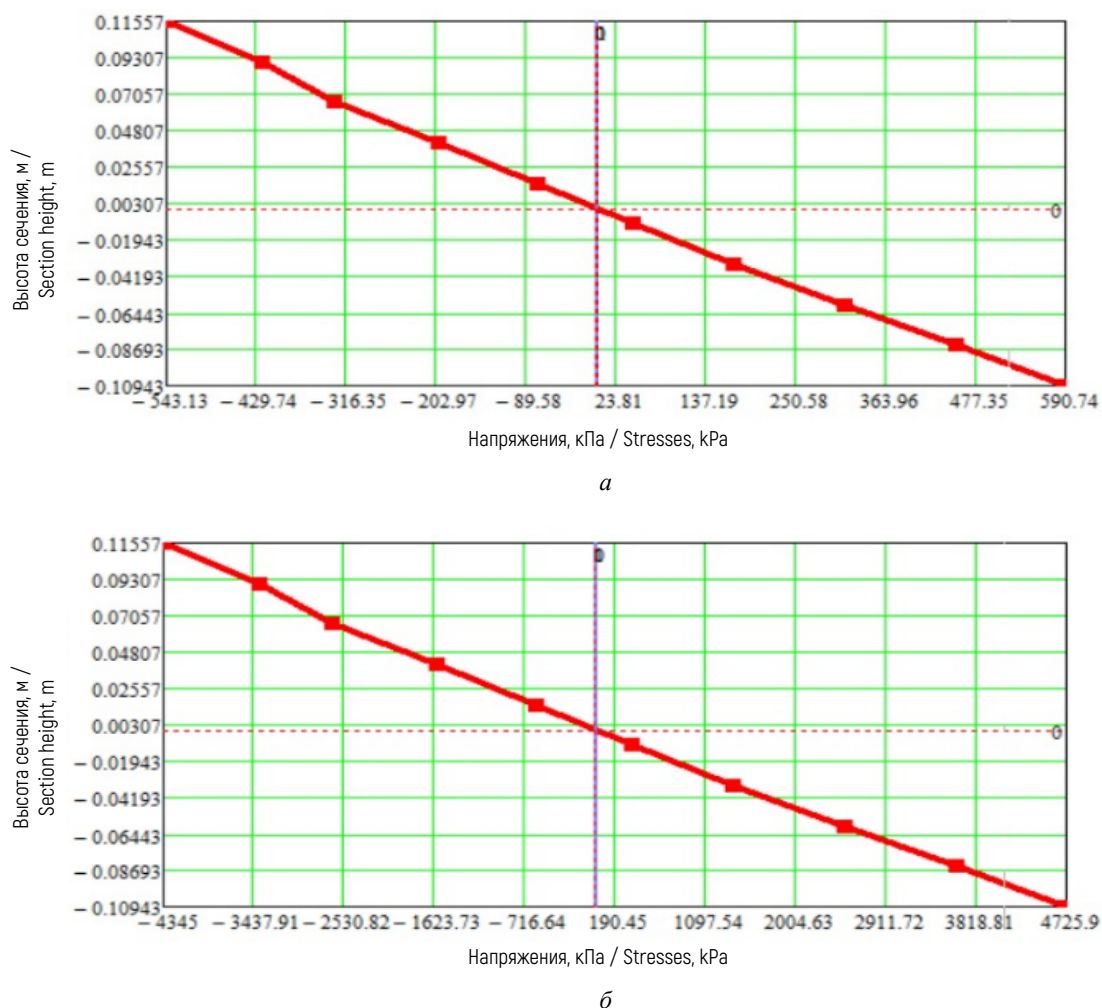
Для этого была рассмотрена неоднородно армированная сталефибробетонная балка. Геометрические размеры, количество армирующих слоев и их физико-механические характеристики соответствовали параметрам экспериментальной балки (см. рис. 1). Основные результаты расчета представлены на рис. 6 и 7.



**Рис. 6.** Деформированная схема исследуемой балки:  
а — прогибы при нагрузке  $P = 1,2$  кН; б — прогибы при нагрузке  $P = 9,6$  кН  
Источник: выполнено Д.А. Голишевской

**Figure 6.** Deformed shape of the investigated beam:  
а — deflections at load  $P = 1.2$  kN; б — deflections at load  $P = 9.6$  kN  
Source: made by D.A. Golishevskaya





**Рис. 7.** Эпюры максимальных нормальных напряжений:

*a* — при нагрузке  $P = 1,2$  кН; *б* — при нагрузке  $P = 9,6$  кН

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Голишевской

**Figure 7.** Diagram of maximum normal stresses:

*a* — at load  $P = 1,2$  кН; *б* — at load  $P = 9,6$  кН

S o u r c e: made by D.A. Golishevskaya

Для верификации полученных результатов (рис. 6, 7) в дополнение к экспериментальным данным были выполнены нелинейные расчеты исследуемой балки в программном комплексе Ansys. Конечно-элементная модель балки состояла из 3920 объемных восьмиузловых элементов и имела 31 360 узловых неизвестных. Для моделирования сталефибробетона применялся объемный восьмиузловой КЭ Conс65, использующий в своей основе трехосный критерий прочности бетона Виллама и Варнке [17].

Основные результаты расчета в программном комплексе Ansys представлены на рис. 8 и 9.

Сопоставление экспериментальных данных и результатов расчетов балки по разработанному КЭ и с применением программы Ansys приведено в таблице.

Расхождения в значениях, полученных по результатам конечно-элементных расчетов и экспериментальных данных, не превышают 6 % при нагрузке 1,2 кН и 11 % при нагрузке 9,6 кН. Результаты конечно-элементных расчетов расходятся между собой на 11 % при величине нагрузки 1,2 кН и 15,1 % при значении нагрузки 9,6 кН.

## Сводные данные результатов неоднородно-армированной сталефибробетонной балки

| Полученные результаты                                                   | Значение прогиба балки в середине пролета (мм) при нагрузке, кН |                    | Нормальные растягивающие напряжения $\sigma_{fb}$ , кПа при нагрузке, кН |                    | Нормальные сжимающие напряжения $\sigma_{fb}$ , кПа при нагрузке, кН |                    |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------------------------------------------------------------|--------------------|----------------------------------------------------------------------|--------------------|
|                                                                         | 1,2                                                             | 9,6                | 1,2                                                                      | 9,6                | 1,2                                                                  | 9,6                |
| Результаты эксперимента                                                 | 0,0132                                                          | 0,102              | +555,13                                                                  | +4265,0            | -511,84                                                              | -3938,4            |
| Результаты расчета по разработанному КЭ балки многослойного армирования | 0,0140                                                          | 0,112              | +590,74                                                                  | +4725,9            | -543,13                                                              | -4345              |
| Результаты расчета в программе Ansys                                    | 0,0155                                                          | 0,132              | +539,49                                                                  | +4315,6            | -522,7                                                               | -4036,1            |
| Расхождение, %                                                          | $\frac{6,0}{10,7}$                                              | $\frac{9,8}{15,1}$ | $\frac{6,4}{9,5}$                                                        | $\frac{10,8}{9,5}$ | $\frac{5,8}{3,9}$                                                    | $\frac{10,3}{7,7}$ |

Источники: выполнено Д.А. Голишевской

## Summary data of results for the non-uniformly reinforced steel fiber-reinforced concrete beam

| Obtained results                                                                   | Beam deflection value at mid-span (mm) under load |                    | Normal tensile stresses $\sigma_{fb}$ , kPa under load |                    | Normal compressive stresses $\sigma_{fb}$ , kPa under load |                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------|--------------------------------------------------------|--------------------|------------------------------------------------------------|--------------------|
|                                                                                    | 1.2 kN                                            | 9.6 kN             | 1.2 kN                                                 | 9.6 kN             | 1.2 kN                                                     | 9.6 kN             |
| Experimental results                                                               | 0.0132                                            | 0.102              | +555.13                                                | +4265.0            | -511.84                                                    | -3938.4            |
| Calculation results using the developed FE model for a multi-layer reinforced beam | 0.0140                                            | 0.112              | +590.74                                                | +4725.9            | -543.13                                                    | -4345              |
| Calculation results in Ansys                                                       | 0.0155                                            | 0.132              | +539.49                                                | +4315.6            | -522.7                                                     | -4036.1            |
| Discrepancy, %                                                                     | $\frac{6.0}{10.7}$                                | $\frac{9.8}{15.1}$ | $\frac{6.4}{9.5}$                                      | $\frac{10.8}{9.5}$ | $\frac{5.8}{3.9}$                                          | $\frac{10.3}{7.7}$ |

Source: made by D.A. Golishevskaya

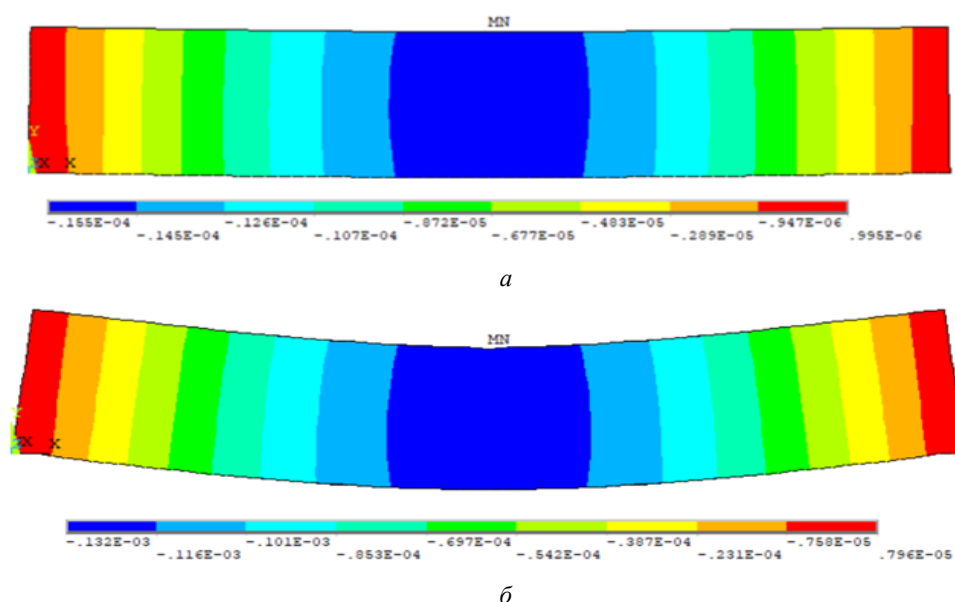
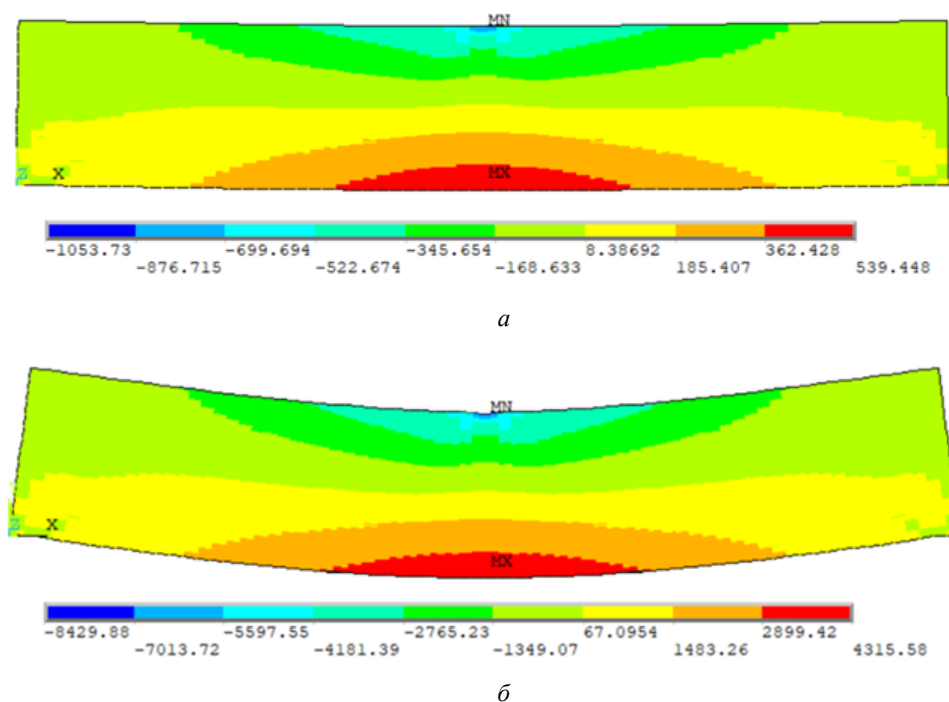


Рис. 8. Поля вертикальных перемещений [мм], полученные для нагрузки:  
 а — 1,2 кН; б — 9,6 кН

Источники: выполнено Д.А. Голишевской

Figure 8. Vertical displacement distribution [mm] obtained for the following loads:  
 а — 1.2 kN; б — 9.6 kN

Source: made by D.A. Golishevskaya



**Рис. 9.** Поля нормальных напряжений [кПа], полученные для нагрузки:

*a* — 1,2 кН; *б* — 9,6 кН

И с т о ч н и к: выполнено Д.А. Голишевской

**Figure 9.** Normal stress distribution [kPa] obtained for the following loads:

*a* — 1.2 kN; *б* — 9.6 kN

S o u r c e: made by D.A. Golishevskaja

#### 4. Заключение

В результате проведенной работы авторами разработан физически нелинейный стержневой конечный элемент балки многослойного армирования. Для верификации предложенного конечного элемента многослойной балки были использованы экспериментальные данные неоднородно-армированной сталефибробетонной балки и результаты физически нелинейного расчета аналогичной балки в программном комплексе Ansys, выполненные авторами. Полученные результаты позволяют сформулировать следующие выводы:

1. Разработан физически нелинейный метод расчета неоднородно-армированных сталефибробетонных элементов, на основании которого разработана методика численного расчета и построен конечный элемент неоднородно-армированной балки.
2. Точность разработанного конечного элемента неоднородно-армированной балки подтверждается приемлемой сходимостью результатов расчета с экспериментальными данными и результатами верификационного расчета в программе Ansys.
3. Данный конечный элемент адаптирован к ВК ПРИНС и в составе этого вычислительного комплекса может быть использован сотрудниками научных и проектных организаций для расчета сталефибробетонных конструкций.

#### Список литературы

1. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. McGraw-Hill, 2005. 631 p. <http://doi.org/10.1016/B978-075066431-8/50186-7>
2. Bathe K.J., Wilson E.L. Numerical methods in finite element analysis. N.J. : Prentice-Hall, 1976. 528 p. ISBN 0136271901, 9780136271901

3. *Crisfield M.A.* Non-linear finite element analysis of solids and structures. John Wiley & Sons, 2012. 544 p. ISBN 1118376013, 9781118376010
4. *Oden J.T.* Finite elements in nonlinear continua. New York : McGraw, Hill Book Company, 1972. 464 p. URL: <https://archive.org/details/finiteelementsof0000oden/page/n3/mode/2up> (accessed: 12.01.2025)
5. *Hassanvand P., Rezaie F., Kioumars M.* Experimental Investigation of the Effect of Steel Fibers on the Flexural Behavior of Corroded Prestressed Reinforced Concrete Beams // *Materials*. 2023. Vol. 16. No. 4. Article no. 1629. <http://doi.org/10.3390/ma16041629> EDN: DJMEES
6. *Siddika A., Al Mamun M.A., Alyousef R., Amran Y.H.M.* Strengthening of reinforced concrete beams by using fiber-reinforced polymer composites: A review // *Journal of Building Engineering*. 2019. Vol. 25. Article no. 100798. <http://doi.org/10.1016/j.job.2019.100798>
7. *Ashour S.A., Wafa F.F., Kamal M.I.* Effect of the concrete compressive strength and tensile reinforcement ratio on the flexural behavior of fibrous concrete beams // *Engineering Structures*. 2000. Vol. 22. Issue 9. P. 1145–1158. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(99\)00052-8](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(99)00052-8)
8. *Çankaya M.A., Akan Ç.* An experimental and numerical investigation on the bending behavior of fiber reinforced concrete beams // *Technical Journal of Turkish Chamber of Civil Engineers*. 2023. Vol. 34. No. 1. P. 59–78. <http://doi.org/10.18400/tjce.1209152> EDN: ZFPRNR
9. *Пухаренко Ю.В., Жаворонков М.И., Пантелеев Д.А.* Совершенствование методов определения силовых и энергетических характеристик трещиностойкости фибробетона // *Вестник МГСУ*. 2019. Т. 14. № 3. С. 301–310. <http://doi.org/10.22227/1997-0935.2019.3.301-310> EDN: VOUYOL
10. *Travush V.I., Konin D.V., Krylov A.S.* Strength of reinforced concrete beams of high-performance concrete and fiber reinforced concrete // *Magazine of Civil Engineering*. 2018. No. 1 (77). P. 90–100. <http://doi.org/10.18720/MCE.77.8> EDN: XPKZNN
11. *Пухаренко Ю.В., Пантелеев Д.А., Морозов В.И., Магдеев У.Х.* Прочность и деформативность полиармированного фибробетона с применением аморфной металлической фибры // *Academia. Архитектура и строительство*. 2016. № 1. С. 107–111. EDN: VNRSEL
12. *Пухаренко Ю.В., Аубакирова И.У.* Полидисперсное армирование строительных композитов // *Строительные материалы, оборудование, технологии 21 века*. 2011. № 2. С. 25–26. EDN: TGRYPX
13. *Mailyan L.R., Beskopylny A.N., Meskhi B., Shilov A.V., Stel'makh S.A., Shcherban' E.M., Smolyanichenko A.S., El'shaeva D.* Improving the Structural Characteristics of Heavy Concrete by Combined Disperse Reinforcement // *Appl. Sci*. 2021. Vol. 11. Article no. 6031. <https://doi.org/10.3390/app11136031> EDN: LMMNFR
14. *Клюев С.В., Лесовик Р.В., Клюев А.В., Бондаренко Д.О.* К вопросу применения нескольких видов фибр для дисперсно армированных бетонов // *Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова*. 2012. № 4. С. 81–83. EDN: PKRWEL
15. *Попов В.М., Кондратюк В.В.* Особенности расчета изгибаемых элементов сталефибробетонных конструкций по нормальным сечениям // *Жилищное строительство*. 2022. № 4. С. 46–54. <https://doi.org/10.31659/0044-4472-2022-4-46-54> EDN: RXQTVY
16. *Агапов В.П.* Программа для статических и динамических расчетов конструкций методом конечных элементов (ПРИНС) / Российское агентство по патентам и товарным знакам. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. № 2000610429. Москва, 2000.
17. *Willam K.J., Warnke E.P.* Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete // *Proceedings of IABSE, Structural Engineering Report 19, Section III*, 1975. P. 1–30. URL: <https://bechtel.colorado.edu/~willam/constitutivemodel.pdf> (accessed: 12.01.2025).

## References

1. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* *The Finite Element for Solid and Structural Mechanics*. Sixth edition. McGraw-Hill; 2005. <http://doi.org/10.1016/B978-075066431-8/50186-7>
2. *Bathe K.J., Wilson E.L.* *Numerical methods in finite element analysis*. N.J.: Prentice-Hall; 1976. ISBN 0136271901, 9780136271901
3. *Crisfield M.A.* *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons, 2012. ISBN 1118376013, 9781118376010
4. *Oden J.T.* *Finite elements in nonlinear continua*. New York: McGraw, Hill Book Company; 1972. Available from: <https://archive.org/details/finiteelementsof0000oden/page/n3/mode/2up> (accessed: 12.01.2025)
5. *Hassanvand P., Rezaie F., Kioumars M.* Experimental Investigation of the Effect of Steel Fibers on the Flexural Behavior of Corroded Prestressed Reinforced Concrete Beams. *Materials*. 2023;16(2):1629. <http://doi.org/10.3390/ma16041629> EDN: DJMEES
6. *Siddika A., Al Mamun M.A., Alyousef R., Amran Y.H.M.* Strengthening of reinforced concrete beams by using fiber-reinforced polymer composites: A review. *Journal of Building Engineering*. 2019;25:100798. <http://doi.org/10.1016/j.job.2019.100798>

7. Ashour S.A., Wafa F.F., Kamal M.I. Effect of the concrete compressive strength and tensile reinforcement ratio on the flexural behavior of fibrous concrete beams. *Engineering Structures*. 2000;22:1145–1158. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(99\)00052-8](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(99)00052-8)
8. Çankaya M.A., Akan Ç. An experimental and numerical investigation on the bending behavior of fiber reinforced concrete beams. *Technical Journal of Turkish Chamber of Civil Engineers*. 2023;34(1):59–78. <http://doi.org/10.18400/tjce.1209152> EDN: ZFPRNR
9. Pukhareenko Yu.V., Zhavoronkov M.I., Pantelev D.A. Improvement of methods for determining power and energy characteristics of fibre-reinforced concrete crack resistance. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2019;14(3):301–310. (In Russ.) <http://doi.org/10.22227/1997-0935.2019.3.301-310> EDN: VOUYOL
10. Travush V.I., Konin D.V., Krylov A.S. Strength of reinforced concrete beams of high-performance concrete and fiber reinforced concrete. *Magazine of Civil Engineering*. 2018;1:90–100. <http://doi.org/10.18720/MCE.77.8> EDN: XPKZNZ
11. Pukhareenko Yu.V., Pantelev D.A., Morozov V.I., Magdeev U.H. The strength and deformability of poly-reinforcement with amorphous metallic fiber. *Academia. Architecture and construction*. 2016;(1):107–111. (In Russ.) EDN: VNRSEL
12. Pukhareenko Yu.V. Aubakirova I.U. The polydisperse reinforcing of the building composites. *Construction materials, equipment, technologies of the 21st century*. 2011;(2):25–26. (In Russ.) EDN: TGRYPX
13. Mailyan L.R., Beskopylny A.N., Meskhi B., Shilov A.V., Stel'makh S.A., Shcherban E.M., Smolyanichenko A.S., El'shaeva D. Improving the structural characteristics of heavy concrete by combined disperse reinforcement. *Appl. Sci*. 2021;11:6031. <https://doi.org/10.3390/app11136031> EDN: LMMNFR
14. Klyuev S.V., Lesovik R.V., Klyuev A.V., Bondarenko D.O. On the issue of using several types of fibers for dispersed reinforced concrete. *Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*. 2012;(4):81–83. (In Russ.) EDN: PKRWEL
15. Kurbatov L.G., Kopansky G.V., Khagai O.N. Flexural strength of steel fiber reinforced concrete with uneven distribution of fibers along the height of the section. *LenZNIIEP*. 1976:18–21. (In Russ.) <https://doi.org/10.31659/0044-4472-2022-4-46-54> EDN: RXQTVY
16. Agapov V.P. Program for static and dynamic calculations of structures using the finite element method (PRINS). Russian Agency for Patents and Trademarks. Certificate of official registration of a computer program. No. 2000610429. Moscow; 2000.
17. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *Proceedings of IABSE. Structural Engineering Report 19, Section III*. 1975:1–30. Available from: <https://bechtel.colorado.edu/~willam/constitutivemodel.pdf> (accessed: 12.01.2025).