Строительная механика инженерных конструкций и сооружений
Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings

2024. 20(5). 433–440
ISSN 1815-5235 (Print), 2587-8700 (Online)
HTTP://JOURNALS.RUDN.RU/STRUCTURAL-MECHANICS

РАСЧЕТ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК
ANALYSIS OF THIN ELASTIC SHELLS

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-5-433-440
УДК 624.074.43+539.3
EDN: CQAEAZ

Научная статья / Research article

Динамический отклик пологих оболочек двоякой кривизны на периодическое внешнее воздействие

А.А. Семенов

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, *Санкт-Петербург, Россия*
✉ sw.semenov@gmail.com

Поступила в редакцию: 11 июля 2024 г.
Принята к публикации: 18 октября 2024 г.

Аннотация. Пологие оболочки двоякой кривизны часто используются как элементы строительных конструкций и подвергаются различным внешним воздействиям, в том числе динамическим периодическим нагрузкам. В работе предлагается расширение предложенного автором ранее подхода к моделированию процесса деформирования тонких оболочек на класс задач с периодическими воздействиями. Используется математическая модель на основе гипотез Тимошенко — Рейсснера, учитывающая поперечные сдвиги, геометрическую нелинейность и инерцию вращения. В расчетном алгоритме применяется в своей основе метод Л.В. Канторовича и метод Розенброка для решения жестких систем ОДУ. Расчеты выполнены в Maple. Получены динамические отклики для изотропной пологой оболочки двоякой кривизны при разных значениях частоты, показаны поля вертикальных перемещений при пиковых значениях амплитуды колебаний.

Ключевые слова: оболочки, динамическая нагрузка, метод Канторовича, колебания, функционал

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Статья публикуется по результатам исполнения гранта СПбГАСУ 2024 года.

Для цитирования: *Семенов А.А.* Динамический отклик пологих оболочек двоякой кривизны на периодическое внешнее воздействие // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 5. С. 433–440. http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-5-433-440

Семенов Алексей Александрович, доктор технических наук, профессор, кафедра информационных систем и технологий, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 9057-9882, ORCID: 0000-0001-9490-7364; e-mail: sw.semenov@gmail.com

Dynamic Response of Doubly-Curved Shallow Shells to Periodic External Action

Alexey A. Semenov

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, *Saint Petersburg, Russia*
✉ sw.semenov@gmail.com

Received: July 11, 2024
Accepted: October 18, 2024

Abstract. Shallow shells of double curvature are often used as elements of building structures and are subjected to various external effects, including dynamic periodic loads. The paper proposes to extend the previously proposed approach to modeling the process of deformation of thin shells to a class of problems with periodic effects. A mathematical model is used based on the Timoshenko — Reissner hypotheses, taking into account transverse shears, geometric nonlinearity and rotational inertia. The calculation algorithm is based on the method of L.V. Kantorovich and the Rosenbrock method for solving rigid ODE systems. The calculations are performed in Maple. Dynamic responses are obtained for an isotropic shallow shell of double curvature at different frequency values, and vertical displacement fields are shown at peak values of the oscillation amplitude.

Keywords: shells, dynamic load, Kantorovich method, vibrations, functional

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

Funding. The article is published based on the results of the implementation of the 2024 SPbGASU grant.

For citation: Semenov A.A. Dynamic response of doubly-curved shallow shells to periodic external action. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2024;20(5):433–440. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-5-433-440

1. Введение

Тонкостенные оболочки, являясь элементами различных конструкций, могут быть подвержены воздействию нагрузок, зависящих от времени, что приводит к необходимости исследования их устойчивости в задаче динамики [1–7] и колебаний [1; 6; 8–15].

Функционал полной энергии деформации оболочки при динамическом нагружении включает в себя кинетическую и потенциальную энергии оболочки, а также работу внешних сил. Математические модели деформирования конструкций на основе функционала энергии деформации использовались в работах [6; 11; 14–19]. Нахождением первой вариации этого функционала и приравниванием ее к нулю выводятся уравнения движения оболочки (система дифференциальных уравнений в частных производных при заданных краевых и начальных условиях). Эти уравнения представляют собой уравнения равновесия оболочки (задача статики), дополненные инерционными членами [20]. Таким образом, точность математической модели деформирования оболочки при динамическом нагружении зависит от точности тех же соотношений, которые используются в задачах статики. Основу этих соотношений составляют применяемые гипотезы теории оболочек.

Если учитываются поперечные сдвиги, то тогда в выражении кинетической энергии деформации оболочки будет учитываться инерция вращения. Влияние учета поперечных сдвигов на процесс деформирования пластин и оболочек рассматривалось в работах [21; 22] и др.

Среди работ, в которых исследуются пологие оболочки двоякой кривизны, следует отметить [6; 11; 15; 23–27].

Динамическое нагружение может быть разных видов, например, ударная нагрузка [5; 28–30], линейно возрастающая [31; 32] или периодическое воздействие [7; 19; 32; 33]. Процессы, возникающие в ортотропной оболочечной конструкции при таких нагрузках, изучены пока еще недостаточно.

Alexey A. Semenov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Information Systems and Technologies, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 9057-9882, ORCID: 0000-0001-9490-7364; e-mail: sw.semenov@gmail.com

Современное состояние вопросов динамики тонкостенных оболочек можно найти в обширных обзорных статьях [8; 13; 17; 18; 34–38].

Моделирование процесса потери устойчивости при действии динамической нагрузки является сложной задачей, поскольку в таком случае система обыкновенных дифференциальных уравнений становится жесткой и ее решение требует применения специальных численных методов и существенно больших вычислительных мощностей.

Azarboni, Ansari и Nazarinezhad [26] численно исследуют нелинейное деформирование пологих оболочек двоякой кривизны при динамическом нагружении. Для решения уравнений движения применяется метод Галеркина, используется тригонометрическая аппроксимация. Найдены значения критических нагрузок, фазовый портрет и другие характеристики системы.

Lavrenčič и Brank [3] изучают процесс потери устойчивости оболочки с помощью неявных численных схем. Расчетные примеры включают в себя в том числе классические задачи: например, потеря устойчивости цилиндрической оболочки под действием осевой нагрузки. Результаты, полученные для задачи динамики, сравниваются с результатами для задачи статики (используется метод продолжения решения).

Чаще всего для решения таких систем применяется метод Рунге — Кутта [2; 10; 12; 26; 32; 39] 4 порядка точности, однако при использовании явной схемы метода Рунге – Кутта приходится брать очень мелкий шаг по временной координате. Это вызвано тем, что уравнения движения для оболочечных конструкций относятся к так называемым жестким системам уравнений. Для решения жестких систем уравнений существуют специальные методы, например, методы Гира, Розенброка, BDF.

Цель данного исследования — развитие методов и моделей расчета тонкостенных ортотропных оболочек на новые виды динамических воздействий, важные для обеспечения безопасной работы конструкций, в частности периодического воздействия.

2. Методы

Будем рассматривать тонкостенные оболочечные конструкции произвольного вида толщиной h, находящиеся под действием внешней механической нагрузки, которая будет зависеть от времени, то есть $P_x = P_x(x, y, t)$, $P_y = P_y(x, y, t)$, $q = q(x, y, t)$.

Срединную поверхность оболочки примем за координатную поверхность. Оси x, y направим по линиям главных кривизн, ось z — по нормали к срединной поверхности в сторону вогнутости.

Функционал полной энергии деформации тонкостенной оболочки при динамическом нагружении имеет следующий вид:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (E_k - E_s)\, dt, \tag{1}$$

где E_k — кинетическая энергия деформации системы; $E_s = E_p - A$ — разность потенциальной энергии деформации системы и работы внешних сил, соответствующая функционалу; t — время.

Для математической модели деформирования оболочек Тимошенко — Рейсснера учитывается наличие поперечных сдвигов, что позволяет также учесть инерцию вращения [40]. В таком случае для оболочки постоянной толщины кинетическая энергия будет записана в виде [40; 41]

$$E_k = \frac{\rho}{2}\int_{a_1}^{a}\int_{0}^{b}\left\{h\left(\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right) + \frac{h^3}{12}\left(\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t}\right)^2\right)\right\} AB\,dx\,dy. \tag{2}$$

Функционал статической задачи $E_s = E_p - A$ равен разности потенциальной энергии деформации системы и работы внешних сил, для оболочки постоянной толщины равен

$$E_s = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a}\int_{0}^{b}\Big(N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\left(N_{xy}+N_{yx}\right)\gamma_{xy} + M_x\chi_1 + M_y\chi_2 + \left(M_{xy}+M_{yx}\right)\chi_{12} +$$

$$+Q_x\left(\Psi_x - \theta_1\right) + Q_y\left(\Psi_y - \theta_2\right) - 2\left(P_xU + P_yV + qW\right)\Big) ABdxdy. \quad (3)$$

В соответствии с методом Л.В. Канторовича в (1) подставляются разложения в ряды для неизвестных функций перемещений. После этого становится возможным вычисление интегралов по переменным x и y и задача сводится к одномерному функционалу относительно функций $U_{ij}(t) - \Psi_{yij}(t)$. Далее для построения системы уравнений используется известное уравнение Эйлера — Лагранжа [42]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{X}_j(t)} + \frac{\partial E_s}{\partial X_j(t)} = 0, \;\; j = 1, 2, ..., 5N, \quad (4)$$

где $X(t) = \left(U_{ij}(t), V_{ij}(t), W_{ij}(t), \Psi_{xij}(t), \Psi_{yij}(t)\right)^T$, $i, j = 1,..,\sqrt{N}$, а точкой обозначена производная по времени. В начальный момент времени все компоненты вектора X и их первые производные по времени принимаются равными нулю (начальные условия).

Далее решение рассматриваемой задачи сводится к решению начальной задачи для системы ОДУ. Следует отметить, что в полученной таким образом модели производные по временной координате от искомых функций имеют второй порядок. Путем замены переменных такая система сводится к нормальному виду.

Полученная таким образом система ОДУ может быть решена специальными средствами, предназначенными для жестких систем уравнений, встроенными в программные комплексы, например, в Maple, MatLab и др.

В данной работе процесс формирования системы ОДУ был запрограммирован автором в среде аналитических вычислений Maple. Полученная система ОДУ решалась численно методом Розенброка [43; 44], который эффективен при решении жестких систем.

3. Результаты и обсуждение

Для демонстрации применимости предложенной математической модели и алгоритма проведем расчеты устойчивости оболочечных конструкций из изотропного материала (стали С345 ($E = 2{,}1\cdot10^5$ МПа, $\mu = 0{,}3$, $\rho = 7800$ кг/м^3)).

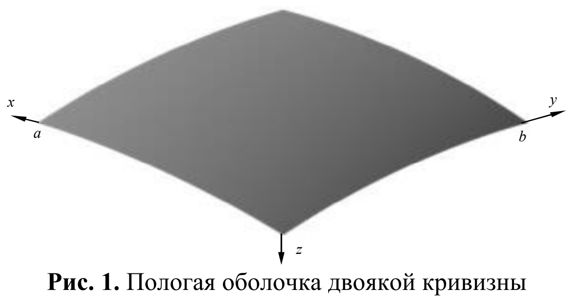

Рис. 1. Пологая оболочка двоякой кривизны
И с т о ч н и к : выполнено А.А. Семеновым
Figure 1. Doubly-curved shallow shell
S o u r c e : made by A.A. Semenov

Для исследования процесса деформирования рассмотрим следующий вариант оболочечной конструкции: пологая оболочка двоякой кривизны (рис. 1), толщина $h = 0{,}09$ м, протяженность вдоль криволинейных осей координат $a = b = 18$ м, радиусы главных кривизн $R_1 = R_2 = 45{,}27$ м, закрепление контура шарнирно-неподвижное. Для дальнейших вычислений в методе Л.В. Канторовича примем $N = 9$.

Исследовать будем реакцию конструкции на периодическое вынужденное воздействие $q = q_0 \sin \omega_0 t + q_{sv}$, q_0 = 10 МПа, изменяя при этом параметр частоты ω_0 от 32,5 до 260 рад/с с шагом 32,5 рад/с (q_{sv} — составляющая нагрузки от собственного веса). Количество точек решения (значений времени, при которых получены расчетные данные) для каждого варианта задачи составляет 2000. Шаг по времени 0,0002 с.

На рис. 2 показаны динамические отклики системы, полученные при указанных параметрах. Красными кривыми показаны перемещения в центральной точке (то есть при $x = a/2$, $y = b/2$), синими кривыми – в точке четверти ($x = a/4$, $y = b/4$).

Анализируя полученные данные, можно заметить, что с увеличением значения частоты колебательный процесс на рассматриваемом участке становится с меньшей амплитудой, при этом видно, что она начинает нарастать.

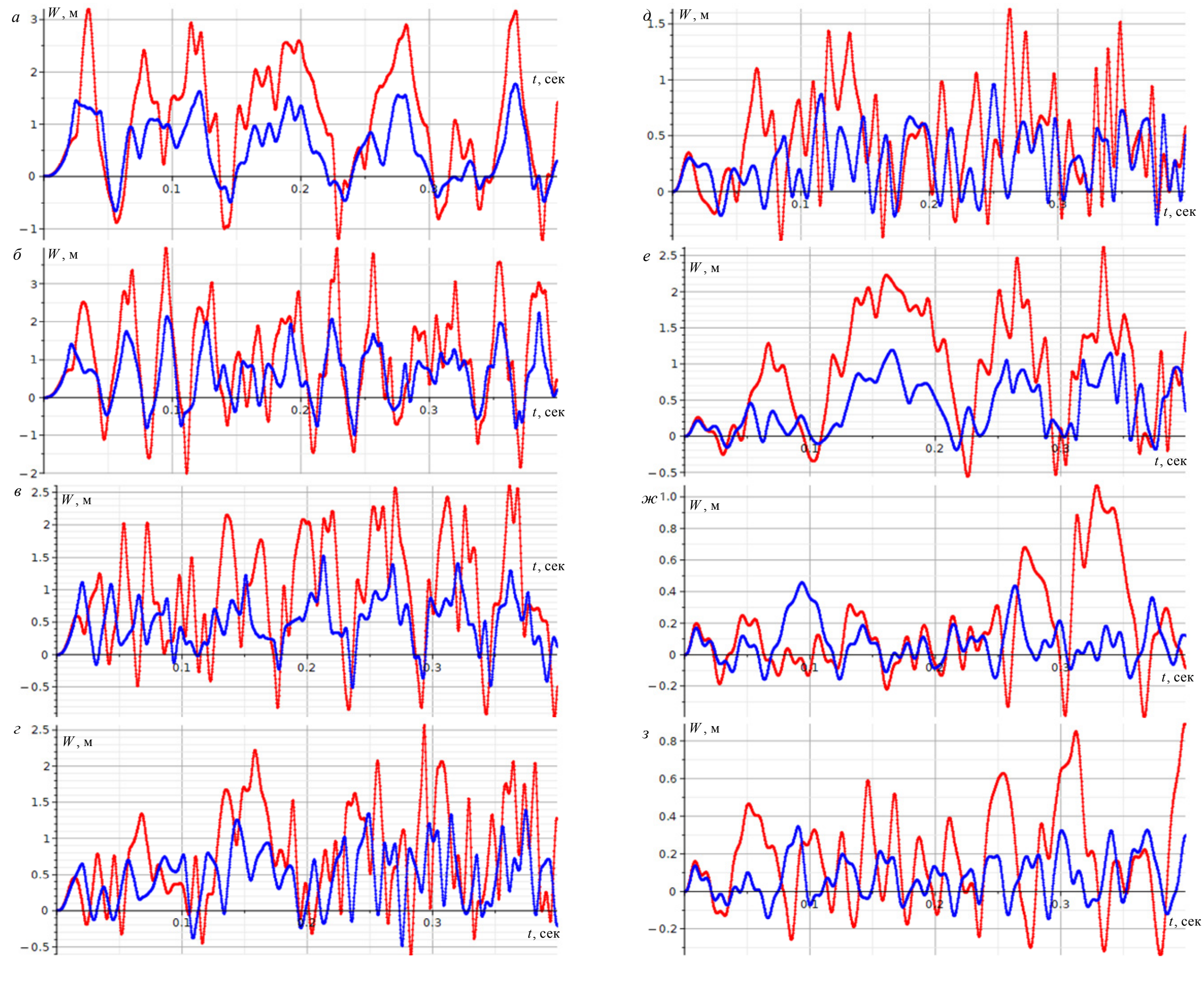

Рис. 2. Динамический отклик конструкции при:
а — ω_0 = 32,5 рад/с; *б* — ω_0 = 65 рад/с, *в* — ω_0 = 97,5 рад/с; *г* — ω_0 = 130 рад/с;
д — ω_0 = 162,5 рад/с; *е* — ω_0 = 195 рад/с; *ж* — ω_0 = 227,5 рад/с; *з* — ω_0 = 260 рад/с
Источник: выполнено А.А. Семеновым

Figure 2. Dynamic response of the shell at:
а — ω_0 = 32.5 rad/s; *б* — ω_0 = 65 rad/s; *в* — ω_0 = 97.5 rad/s; *г* — ω_0 = 130 rad/s;
д — ω_0 = 162.5 rad/s; *е* — ω_0 = 195 rad/s; *ж* — ω_0 = 227.5 rad/s; *з* — ω_0 = 260 rad/s
Source: made by A.A. Semenov

Далее рассмотрим подробнее вариант задачи при значении частоты 65 рад/с. Выявим на графике (рис. 3, *а*) пиковые значения амплитуды, соответствующие максимумам в центральной точке: 1) $t = 0{,}095$ с, $W_c = 3{,}945$ м; 2) $t = 0{,}111$ с, $W_c = -2{,}014$ м, и построим соответствующие им поля прогибов (рис. 3, *б, в*).

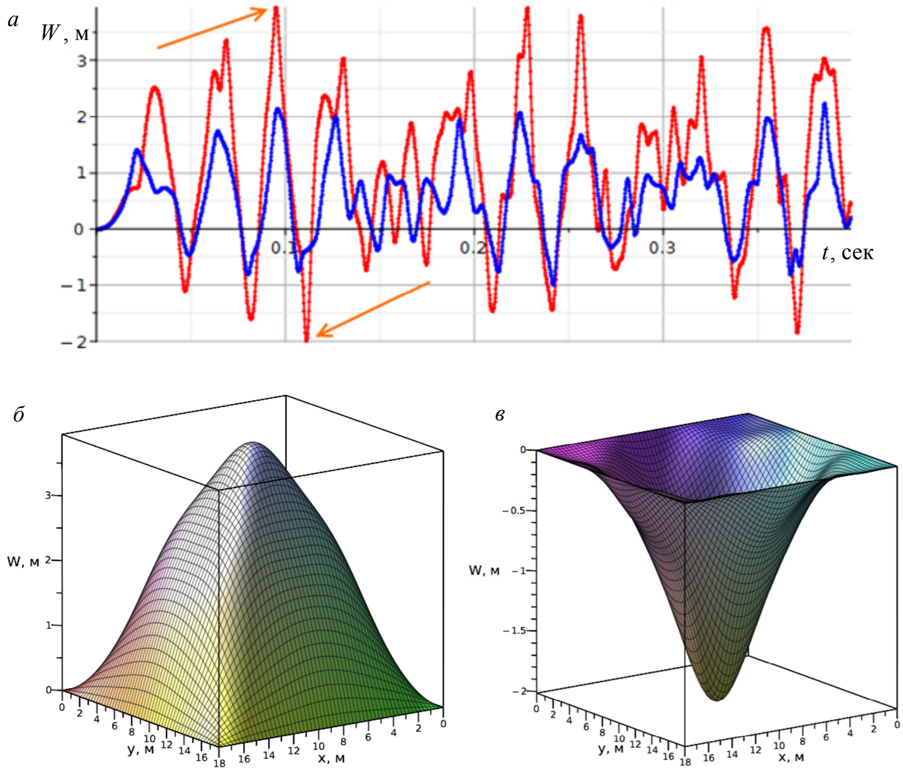

Рис. 3. Результаты для конструкции при $\omega_0 = 65$ рад/с:
а — динамический отклик с указанием пиковых значений амплитуды;
б — поле прогибов в момент времени $t = 0{,}095$ с; *в* — поле прогибов в момент времени $t = 0{,}111$ с
Источник: выполнено А.А. Семеновым

Figure 3. Numerical results for the shell at $\omega_0 = 65$ rad/s:
а — dynamic response with indication of peak amplitude values;
б — deflections at the time $t = 0.095$ s; *в* — deflections at the time $t = 0.111$ s
Source: made by A.A. Semenov

Полученные изображения позволяют оценить характер распределения прогибов по области конструкции.

4. Заключение

В результате выполненного исследования следует отметить следующее:

1) расчеты показали, что все рассмотренные виды нагружения приводят к колебательному процессу, который носит существенно нелинейный характер;

2) показано, что в разных точках конструкции колебания могут совершаться в противофазе, что повышает риск достижения предельно допустимых значений напряжений;

3) выявлено, что с увеличением значения частоты колебательный процесс на рассматриваемом участке проходит с меньшей амплитудой, при этом видно, что она начинает нарастать;

4) полученные результаты позволяют расширить применимость разработанных моделей и алгоритмов расчета на более широкий класс задач и подготовить основу для дальнейших исследований.

Список литературы / References

1. Bich D.H., Ninh D.G. Research on dynamical buckling of imperfect stiffened three-layered toroidal shell segments containing fluid under mechanical loads. *Acta Mechanica.* 2017;228(2):711–730. http://doi.org/10.1007/s00707-016-1724-0

2. Gao K., Gao W., Wu D., Song C. Nonlinear dynamic stability of the orthotropic functionally graded cylindrical shell surrounded by Winkler-Pasternak elastic foundation subjected to a linearly increasing load. *Journal of Sound and Vibration.* 2018;415:147–168. http://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.11.038

3. Lavrenčič M., Brank B. Simulation of shell buckling by implicit dynamics and numerically dissipative schemes. *Thin-Walled Structures.* 2018;132:682–699. http://doi.org/10.1016/j.tws.2018.08.010

4. Luo K., Liu C., Tian Q., Hu H. Nonlinear static and dynamic analysis of hyper-elastic thin shells via the absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dynamics.* 2016;85(2):949–971. http://doi.org/10.1007/s11071-016-2735-z

5. Ren S., Song Y., Zhang A.-M., Wang S., Li P. Experimental study on dynamic buckling of submerged grid-stiffened cylindrical shells under intermediate-velocity impact. *Applied Ocean Research*. 2018;74:237–245. http://doi.org/10.1016/j.apor.2018.02.018

6. Sirivolu D., Hoo Fatt M.S. Dynamic stability of double-curvature composite shells under external blast. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2015;77:281–290. http://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.09.005

7. Sofiyev A.H., Kuruoglu N. Domains of dynamic instability of FGM conical shells under time dependent periodic loads. *Composite Structures*. 2016;136:139–148. http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.060

8. Amabili M., Païdoussis M.P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction. *Applied Mechanics Reviews*. 2003;56(4):349–381. http://doi.org/10.1115/1.1565084

9. Dey T., Ramachandra L.S. Dynamic stability of simply supported composite cylindrical shells under partial axial loading. *Journal of Sound and Vibration.* 2015;353:272–291. http://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.05.021

10. Dung D.V., Nam V.H. An analytical approach to analyze nonlinear dynamic response of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells subjected to time dependent axial compression and external pressure. Part 2: Numerical results and discussion. *Vietnam Journal of Mechanics.* 2014;36(4):255–265. http://doi.org/10.15625/0866-7136/36/4/3986

11. Kiani Y., Sadighi M., Eslami M.R. Dynamic analysis and active control of smart doubly curved FGM panels. *Composite Structures*. 2013;102:205–216. http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.02.031

12. Krysko V.A., Awrejcewicz J., Shchekaturova T.V. Chaotic vibrations of spherical and conical axially symmetric shells. *Archive of Applied Mechanics.* 2005;74(5–6):338–358. http://doi.org/10.1007/BF02637035

13. Moussaoui F., Benamar R. Non-Linear Vibrations of Shell-Type Structures: A Review with Bibliography. *Journal of Sound and Vibration.* 2002;55(1):161–184. http://doi.org/10.1006/jsvi.2001.4146

14. Qu Y., Wu S., Chen Y., Hua H. Vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells based on a modified variational approach. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2013;69:72–84. http://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.01.026

15. Ungbhakorn V., Singhatanadgid P. A Scaling Law for Vibration Response of Laminated Doubly Curved Shallow Shells by Energy Approach. *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* 2009;16(5):333–344. http://doi.org/10.1080/15376490902970430

16. Abrosimov N.A., Novosel'tseva N.A. Computer Modeling of the Dynamic Strength of Metal-Plastic Cylindrical Shells Under Explosive Loading. *Mechanics of Composite Materials.* 2017;53(2):139–148. http://doi.org/10.1007/s11029-017-9648-x

17. Kumar Y. The Rayleigh–Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review. *Journal of Vibration and Control.* 2017;24(7):1205–1227. http://doi.org/10.1177/1077546317694724

18. Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review). *International Applied Mechanics.* 2012;48(6):613–687. http://doi.org/10.1007/s10778-012-0544-8

19. Dey T., Jansen E., Kumar R., Rolfes R. Instability characteristics of variable stiffness laminated composite curved panels under non-uniform periodic excitation. *Thin-Walled Structures.* 2022;171:108735. http://doi.org/10.1016/j.tws.2021.108735

20. Karpov V.V. *The strength and stability of reinforced shells of revolution. In two parts. Part 1. Models and algorithms of research of the strength and stability of supported shells of revolution*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2010. (In Russ.) EDN: UIRNWJ

Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. Ч. 1: Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010. 288 с. EDN: UIRNWJ

21. Ng T.Y., Lam K.Y., Reddy J.N. Dynamic stability of cylindrical panels with transverse shear effects. *International Journal of Solids and Structures.* 1999. Vol. 36. No. 23. P. 3483–3496. http://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00161-9

22. Yu Y.-Y., Lai J.-L. Influence of Transverse Shear and Edge Condition on Nonlinear Vibration and Dynamic Buckling of Homogeneous and Sandwich Plates. *Transactions of the ASME.* 1966;33(4):934–936. http://doi.org/ 10.1115/1.3625205

23. Bacciocchi M., Eisenberger M., Fantuzzi N., Tornabene F., Viola E. Vibration analysis of variable thickness plates and shells by the Generalized Differential Quadrature method. *Composite Structures*. 2016;156:218–237. http://doi.org/ 10.1016/j.compstruct.2015.12.004

24. Patel S.N., Datta P.K., Sheikh A.H. Buckling and dynamic instability analysis of stiffened shell panels. *Thin-Walled Structures*. 2006;44(3):321–333. http://doi.org/10.1016/j.tws.2006.03.004

25. Zhang J., van Campen D.H. *S*tability and bifurcation of doubly curved shallow panels under quasi-static uniform load. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2003;38(4):457–466. http://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00069-5

26. Azarboni H.R., Ansari R., Nazarinezhad A. Chaotic dynamics and stability of functionally graded material doubly curved shallow shells. *Chaos, Solitons & Fractals.* 2018;109:14–25. http://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.02.011

27. Khudayarov B.A., Ruzmetov K.Sh., Turaev F.Zh., Vaxobov V.V., Hidoyatova M.A., Mirzaev S.S., Abdikarimov R. Numerical modeling of nonlinear vibrations of viscoelastic shallow shells. *Engineering Solid Mechanics*. 2020:199–204. http://doi.org/10.5267/j.esm.2020.1.004

28. Bazhenov V.G., Baranova M.S., Kibets A.I., Lomunov V.K., Pavlenkova E.V. Buckling of elastic-plastic cylindrical and conical shells under axial impact loading. *Scientific Notes of Kazan University. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2010;152(4):86–105. EDN: NPULEB

Баженов В.Г., *Баранова М.С.*, *Кибец А.И.*, *Ломунов В.К.*, *Павленкова Е.В.* Выпучивание упругопластических цилиндрических и конических оболочек при осевом ударном нагружении // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2010. Т. 152. № 4. С. 86–105. EDN: NPULEB

29. Wei Z.G., Yu J.L., Batra R.C. Dynamic buckling of thin cylindrical shells under axial impact. *International Journal of Impact Engineering.* 2005;32(1–4):575–592. http://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2005.07.008

30. Zhang J., Li S. Dynamic buckling of FGM truncated conical shells subjected to non-uniform normal impact load. *Composite Structures*. 2010;92(12):2979–2983. http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.009

31. Eshmatov B., Abdikarimov R., Amabili M., Vatin N. Nonlinear vibrations and dynamic stability of viscoelastic anisotropic fiber reinforced plates. *Magazine of Civil Engineering*. 2023;118(1):11811. http://doi.org/10.34910/MCE.118.11

32. Phu K.V., Bich D.H., Doan L.X. Nonlinear Forced Vibration and Dynamic Buckling Analysis for Functionally Graded Cylindrical Shells with Variable Thickness Subjected to Mechanical Load. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering.* 2022;46:649–665. http://doi.org/10.1007/s40997-021-00429-1

33. Keshav V., Patel S.N., Kumar R., Watts G. Effect of Cutout on the Stability and Failure of Laminated Composite Cylindrical Panels Subjected to In-Plane Pulse Loads. *International Journal of Structural Stability and Dynamics.* 2022; 22(08):2250087. http://doi.org/10.1142/S0219455422500870

34. Kogan E.A., Yurchenko A.A. Nonlinear Oscillations of a Three-Layer and Multi-Layer Plates and Shells During Periodic Impacts (Survey). *News of MSTU "MAMI": Natural Sciences*. 2014;4(1):55–70. (In Russ.) EDN: SKYBIX

Коган Е.А., *Юрченко А.А.* Нелинейные колебания трехслойных и многослойных пластин и оболочек при периодических воздействиях (обзор) // Известия МГТУ «МАМИ»: Естественные науки. 2014. Т. 4. № 1 (19). С. 55–70. EDN: SKYBIX

35. Alijani F., Amabili M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2014;58:233–257. http://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.09.012

36. Krivoshapko S.N. Research on General and Axisymmetric Ellipsoidal Shells Used as Domes, Pressure Vessels, and Tanks. *Applied Mechanics Reviews.* 2007;60(6):336–355. http://doi.org/10.1115/1.2806278

37. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009. *Composite Structures.* 2010;93(1):14–31. http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014

38. Sahu S.K., Datta P.K. Research Advances in the Dynamic Stability Behavior of Plates and Shells: 1987–2005 – Part I: Conservative Systems. *Applied Mechanics Reviews.* 2007;60(2):65–75. http://doi.org/10.1115/1.2515580

39. Prado Z. del, Gonçalves P.B., Païdoussis M.P. Non-linear vibrations and instabilities of orthotropic cylindrical shells with internal flowing fluid. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2010;52(11):1437–1457. http://doi.org/10.1016/ j.ijmecsci.2010.03.016

40. Volmir A.S. *Stability of deformable systems.* Moscow: Nauka Publ.; 1967. (In Russ.)

Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

41. Karpov V.V., Aristov D.I., Ovcharov A.A. Features of the stress-strain state of panels of ribbed shells of revolution under dynamic loading. *Vestnik TGASU*. 2007;(1):94–101. (In Russ.) EDN: JUCZAN

Карпов В.В., *Аристов Д.И.*, *Овчаров А.А.* Особенности напряженно-деформированного состояния панелей ребристых оболочек вращения при динамическом нагружении // Вестник ТГАСУ. 2007. № 1. С. 94–101. EDN: JUCZAN.

42. Semenov A. Dynamic Buckling of Stiffened Shell Structures with Transverse Shears under Linearly Increasing Load. *Journal of Applied and Computational Mechanics.* 2022;8(4):1343–1357. http://doi.org/10.22055/jacm.2022.39718.3452

43. Hairer E., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II* : Springer Series in Computational Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg; 1991. http://doi.org/10.1007/978-3-662-09947-6

44. Shampine L.F., Corless R.M. Initial value problems for ODEs in problem solving environments. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2000;125(1–2):31–40. http://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00456-8