

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI: 10.22363/1815-5235-2024-20-6-509-525

УДК 539.3

EDN: CEORTO

Научная статья / Research article

Исследование напряженно-деформированного состояния изгиба длинной полосы из разномодульного трещиноватого материала применительно к образованию трещин в растянутой зоне бетона

Е.М. Зверяев^{ORCID}

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
ЦНИИ строительных конструкций им. В.А. Кучеренко, Москва, Россия
✉ zveriaev@mail.ru

Поступила в редакцию: 3 сентября 2024 г.

Принята к публикации: 4 декабря 2024 г.

Аннотация. Задача нахождения напряженно-деформированного состояния полосы из разномодульного материала может быть вопреки существующему мнению о существенной нелинейности поставлена как линейная для двухслойной полосы. Дифференциальные уравнения теории упругости первого порядка плоской задачи для полосы сводятся к безразмерному виду и заменяются интегральными уравнениями относительно поперечной координаты подобно тому, как это делается в методе простых итераций Пикара. При этом в интегральных уравнениях перед знаком интеграла появляется как множитель малый параметр, с помощью которого обеспечивается сходимость решений в соответствии с принципом сжатых отображений, называемым также теоремой Банаха о фиксированной точке. Исходная система уравнений теории упругости расщеплена на интегрируемые уравнения поперечного изгиба, продольного растяжения-сжатия и краевого эффекта. Найденные решения удовлетворяют всем граничным условиям задачи теории упругости. Записана определяющая положение нейтральной оси при изгибе формула. Для разномодульного материала, такого как бетон, нейтральная линия при изгибе существенно сдвигается вверх в области сжатия, в результате чего на нижней растянутой грани возникают большие перемещения и создаются условия для раскрытия вертикальных трещин. Объяснено появление наклонных трещин около опор.

Ключевые слова: метод Сен-Венана — Пикара — Банаха, SVPB, принцип сжатых отображений, малый параметр, слоистая полоса, нейтральная линия, итерации, разномодульный трещиноватый материал, краевой эффект

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Зверяев Е.М. Исследование напряженно-деформированного состояния изгиба длинной полосы из разномодульного трещиноватого материала применительно к образованию трещин в растянутой зоне бетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 6. С. 509–525. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-509-525>

Зверяев Евгений Михайлович, доктор технических наук, профессор кафедры технологий строительства и конструкционных материалов, инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 4893-2337, ORCID: 0000-0001-8097-6684; e-mail: zveriaev@mail.ru

© Зверяев Е.М., 2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

Study of Stress-Strain State of Long Cracked Multi-Modulus Strip in Bending in Relation to Crack Formation in Tensile Zone of Concrete

Evgeniy M. Zveryaev 

RUDN University, *Moscow, Russia*

Kucherenko Institute of Building Structures, *Moscow, Russia*

✉ zveriaev@mail.ru

Received: September 3, 2024

Accepted: December 4, 2024

Abstract. The problem of strength analysis of a multi-modulus strip, in contradiction to the existing standpoint of essential nonlinearity, may be formulated as a linear problem for a two-layer strip. First order differential equations of the theory of elasticity for the plane strip problem are transformed to dimensionless form and are replaced by integral equations with respect to the transverse coordinate, similar to how it is done in the Picard's method of simple iterations. In this case, a small parameter appears as a multiplier in the integral equations before the integral sign, which ensures the convergence of solutions in accordance with the contraction mapping principle, also called the Banach fixed point theorem. The original system of equations of elasticity theory is splitted into integratable equations of bending, axial tension-compression and edge effect. The found solutions satisfy all boundary conditions of the elasticity theory problem. The formula determining the position of the neutral axis during bending is written. For a multi-modulus material, such as concrete, the neutral line shifts upward significantly in the compression region during bending, resulting in large displacements at the lower edge in tension and creating conditions for opening of vertical cracks. The occurrence of inclined cracks near supports is explained.

Keywords: Saint-Venant — Picard — Banach (SVPB) method, contraction mapping principle, small parameter, layered strip, neutral line, iterations, cracked multi-modulus material, edge effect

Conflicts of interest. The author declares that there is no conflict of interest.

For citation: Zveryaev E.M. Study of stress-strain state of long cracked multi-modulus strip in bending in relation to crack formation in tensile zone of concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2024; 20(6):509–525. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-6-509-525>

1. Введение

Конструкционные материалы в процессе эксплуатации испытывают различные нагрузки, вызывающие сжимающие или растягивающие напряжения. Выбор структуры материала зависит от условий эксплуатации элемента сооружения или конструкции, а также от вида нагрузки и сопротивляемости материала в том или ином направлении. Считается, что в некоторых задачах для описания напряженно-деформированного состояния твердого тела может оказаться недостаточно линейного представления Гука. Практика показывает, что во многих случаях различная сопротивляемость конструкционных материалов сжимающим и растягивающим напряжениям зависит даже не от анизотропии свойств конструкции вдоль осей главных напряжений, а скорее от микрповреждений и неоднородностей, расположенных случайно по всему объему материала. Естественно предположить, что наличие микродефектов может сказаться не лучшим образом на «работоспособности» материала, а зачастую приводит его к разрушению раньше предназначенного срока. Все сказанное в полной мере относится к старейшему и, пожалуй, наиболее сложному композиционному материалу — бетону.

Разномодульная теория упругости берет свое начало с работ [1–4], относящихся к концу 60-х годов прошлого столетия и спровоцировавших ряд публикаций [5–21], продолжающихся до настоящего времени. В [5; 12] считается, что определяющие соотношения основаны на обобщении клас-

Evgeniy M. Zveryaev, DSc. In Engineering, Professor of the Department of Construction Technologies and Structural Materials, Academy of Engineering, RUDN University, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN-code: 4893-2337, ORCID: 0000-0001-8097-6684; e-mail: zveriaev@mail.ru

сического упругого потенциала, характеризующего зависимость свойств материала от вида напряженного состояния. В этом случае в качестве параметра, характеризующего вид напряженного состояния, предлагается взять отношение среднего напряжения к интенсивности напряжений. Монография [6] посвящена построению обобщенных классических теорий тонкостенных тел, таких как пластины и оболочки, при некоторых предложенных автором соотношениях упругости для разномодульных тел. Автор отмечает, что для уточнения предложенных теорий и построения корректных механических моделей разномодульных материалов требуются новые экспериментальные исследования. В [7; 8] рассматривается поведение тел из разномодульного материала с позиций теории возмущений. Подобным образом свойства линейных физических соотношений разномодульного материала исследуются в [9]. В [10] предложена конструктивная теория для поперечно-изотропных бимодульных материалов с классом стационарных волновых решений. Работы [11–15] посвящены разработке определяющих соотношений разномодульной теории упругости. Статья [16] посвящена решению задачи определения температурных напряжений в балке.

В [17] предложен метод эквивалентного сечения, который используется для преобразования бимодулярной криволинейной балки в классическую с особым модулем; упрощенное решение для изгибных напряжений определено путем изменения параметров, относящихся к характеристикам сечения. Для получения явного выражения нейтрального слоя используется метод возмущений. После нахождения положения нейтрального слоя метод функции напряжения используется для получения решения для напряжений и перемещений при выполнении граничных условий и условий непрерывности. На основе решения упругости рассматривается задача начальных напряжений в бимодулярном многосвязном теле. Сравнение двух решений показывает, что упрощенное решение очень хорошо согласуется с упругим. Кроме того, также обсуждаются учет касательного напряжения и применение метода эквивалентного сечения в железобетонных криволинейных балках. Результаты показывают, что бимодулярность материалов оказывает определенное влияние на изгибные свойства бимодулярной изогнутой балки. В [18] проведен анализ вязкости разрушения двухфазной стали с использованием метода предельной работы разрушения.

В [19] на основе классической гипотезы Кирхгофа предложена упрощенная механическая модель, пригодная для решения задач для бимодульных тонких пластин малого прогиба. В [20] представлены результаты численного счета для бимодулярной круглой пластины.

В некоторых работах основная проблема разномодульных задач сводится к обобщению классического упругого потенциала, содержащего две константы (сдвиговой и объемный модули) на среды, разносопротивляющиеся растяжению и сжатию.

В экспериментальных работах тем или иным способом разыскиваются модули упругости в сжатой и растянутой зоне тела. Например, в [21] рассмотрена и численно с помощью метода конечных элементов просчитана модель нелинейной упругости, основанная на использовании параметра трехосности для описания вида напряженного состояния материала. Отмечается, что экспериментальные исследования деформирования слоистых композиционных материалов часто показывают сложную зависимость жесткостных и прочностных характеристик от типа нагружения. Утверждается, что учесть подобные эффекты в прикладных расчетах возможно лишь с использованием моделей нелинейной упругости. Трудности, с которыми столкнулись авторы упомянутых работ, заключаются в отсутствии решений теории упругости, с одной стороны, достаточно простых, с другой стороны, свободных от каких-либо априорных гипотез.

В настоящей работе на основе непротиворечивого решения уравнений линейной теории упругости [22; 23] для длинной упругой двухслойной полосы из разномодульного материала без каких-либо априорных допущений и предположений об искомым неизвестных находятся все неизвестные задачи и формула для нейтральной линии, разделяющей участки сжатия и растяжения. Решения представляются асимптотическими рядами по малому параметру и вследствие этого являются сходящимися в силу теоремы Банаха о неподвижной точке.

2. Произвольно нагруженная по длинным сторонам двухслойная разномодульная полоса

Длинная прямоугольная полоса рассматривается в прямоугольной системе координат x^* , z^* (рис. 1), так что $0 \leq x^* \leq l$, $-h \leq z^* \leq h$.

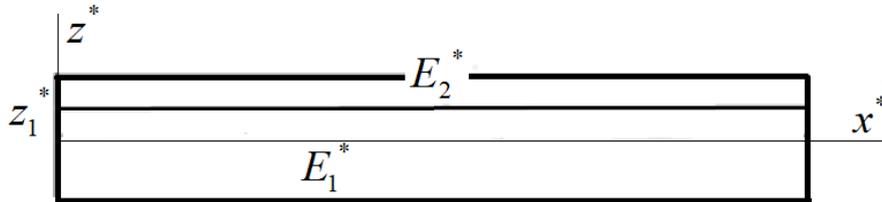


Рис. 1. Полоса из разномодульного материала, представленная как двухслойная полоса

И с т о ч н и к: выполнено Е.М. Зверевым

Figure 1. A strip of multi-modulus material presented as a two-layer strip

S o u r c e: made by E.M. Zveryaev

Длинные стороны полосы $z^* = \pm h$ несут произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть так или иначе закреплены или тоже нагружены. Известные уравнения плоской задачи теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} = 0;$$

$$E^* \varepsilon_x = \sigma_x^* - \nu \sigma_z^*, \quad E^* \varepsilon_z = \sigma_z^* - \nu \sigma_x^*, \quad \gamma = \frac{2(1+\nu)}{E^*} \tau^*;$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*},$$

описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы в безразмерных координатах $x = x^* / l$, $z = z^* / h$, перемещениях $u = u^* / h$, $w = w^* / h$ вдоль осей x^* , z^* соответственно и нормальных $\sigma_x = \sigma_x^* / E_h^*$, $\sigma_z = \sigma_z^* / E_h^*$ и касательных $\tau = \tau^* / E_h^*$ напряжениях (размерные перемещения и напряжения отмечены звездочкой) принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \tau' = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} + \varepsilon \sigma_x' = 0;$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_z), \quad \tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma, \quad \sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu \varepsilon_x);$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon u', \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon w'. \tag{1}$$

Здесь E — безразмерный модуль упругости, определенный формулой $E^* = E(z) E_h^*$, где E_h^* — некоторое значение модуля Юнга или какое-либо другое подходящее по размерности и смыслу значение; $E(z)$ — безразмерная заданная по слоям функция, которая может быть разрывной, так же как и ее первая производная; $\nu = \nu(z)$ — коэффициент Пуассона, считающиеся для анизотропного или компо-

зитного материала функциями координат; $\varepsilon_x, \varepsilon_z$ — безразмерные по определению продольная и поперечная деформации; γ — сдвиг, также по определению безразмерная величина. Штрихом обозначена операция дифференцирования по безразмерному аргументу x , и введено обозначение для малого параметра $\varepsilon = h/l$. Более того, в общем случае коэффициенты E и ν могут также зависеть от продольной координаты x .

Примем, что нижний слой при $-1 \leq z \leq z_1, 0 \leq x \leq 1$ имеет жесткость E_1 и коэффициент Пуассона ν_1 , верхний слой при $z_1 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ имеет жесткость E_2 и коэффициент Пуассона ν_2 . Для простоты записи с тем, чтобы выделить основную идею работы, заключающейся в исследовании разномодульности трещиноватой среды, примем E_1, E_2, ν не зависящими от координат x и z .

Расположив уравнения системы (1) в определенной последовательности и задав в качестве известных величин начального приближения некоторые $w_{(0)} = w_0(x)$ и $\tau_{(0)} = \tau_0(x)$, можно свести вычисления к методу последовательных приближений в соответствии со следующей схемой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} &= -\varepsilon w_0' + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_0, \quad \frac{\partial \sigma_{z(0)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau_0', \quad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_{(0)}'; \\ \sigma_{x(0)} &= E \varepsilon_{x(0)} + \nu \sigma_{z(0)}, \quad \varepsilon_{z(0)} = -\nu \varepsilon_{x(0)} + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{z(0)}; \\ \frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} &= \varepsilon_{z(0)}, \quad \frac{\partial \tau_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \sigma_{x(0)}', \quad \frac{\partial \sigma_{z(1)}}{\partial z} = -\varepsilon \tau_{(1)}', \quad \frac{\partial u_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon w_{(1)}' + \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{(1)} \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Здесь и далее нижним индексом в скобках обозначен номер приближения и штрихом — операция дифференцирования по координате x .

В силу независимости величин начального приближения от z все неизвестные вычисляются в результате интегрирования по z :

$$\begin{aligned} u_{(0)} &= -\varepsilon w_0' z + \tau_0 \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + u_0; \\ \varepsilon_{x(0)} &= -\varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \varepsilon u_0'; \\ \sigma_{z(0)} &= -\varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z0}; \\ \sigma_{x(0)} &= -E \varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon \tau_0' \left[E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz - \nu z \right] + E \varepsilon u_0' + \nu \sigma_{z0}; \\ \varepsilon_{z(0)} &= \nu \varepsilon^2 w_0'' z - \varepsilon \tau_0' \left[\nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \frac{1-\nu^2}{E} z \right] - \nu \varepsilon u_0' + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{z0}; \\ w_{(1)} &= \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z \nu z dz - \varepsilon \tau_0' \left[\int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz + \int_0^z \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz \right] + \sigma_{z0} \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz - \varepsilon u_0' \int_0^z \nu dz + w_0; \\ \tau_{(1)} &= \varepsilon^3 w_0''' \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[\int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z \nu z dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^z E dz - \varepsilon \sigma_{z0}' \int_0^z \nu dz + \tau_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{z(1)} = & -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^z \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0'''' \left[\int_0^z \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^z \int_0^z \nu z dz dz \right] + \\
 & + \varepsilon^3 u_0'''' \int_0^z \int_0^z E dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' \int_0^z \int_0^z \nu dz dz - \varepsilon \tau_0' z + \sigma_{z0}; \\
 u_{(1)} = & -\varepsilon w_0' z + \tau_0 \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + u_0 - \varepsilon^3 w_0'''' \left[\int_0^z \int_0^z \nu z dz dz \varepsilon^3 + \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \int_0^z E z dz dz \right] + \\
 & + \varepsilon^2 \tau_0'' \left\{ \int_0^z \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} z dz dz + \int_0^z \int_0^z \nu \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz \right\} - \frac{2(1+\nu)}{E} \left[\int_0^z \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^z \int_0^z \nu z dz dz \right] + \\
 & + \varepsilon^2 u_0'' \left\{ \int_0^z \int_0^z \nu dz dz - \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \int_0^z E dz dz \right\} - \varepsilon \sigma_{z0}' \left\{ \frac{2(1+\nu)}{E} \int_0^z \int_0^z \nu dz dz + \int_0^z \int_0^z \frac{1-\nu^2}{E} dz dz \right\}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Последнее выражение из (2) показывает, что к полученным величинам нулевого приближения из первой формулы для $u_{(0)}$ в первой итерации к одноименным добавляются члены, имеющие относительный множитель ε^2 , то есть к w_0' добавляется $\varepsilon^3 w_0''''$, к τ_0 добавляется $\varepsilon^2 \tau_0''$ и к u_0 добавляется $\varepsilon^2 u_0''$. Коэффициенты при этих добавочных членах в силу выбора единиц измерения при формировании безразмерных величин имеют порядок ε^0 . Поэтому добавочные величины, если они не являются быстро меняющимися, т.е. не увеличиваются в ε^{-1} раз при дифференцировании, будут $O(\varepsilon^2)$ и могут быть отброшены.

3. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы

На лицевых поверхностях полосы $z^* = \pm h$ должны удовлетворяться граничные условия, соответствующие условиям нагружения. В безразмерном виде эти условия записываются так:

$$\sigma_z = Z_+(x), \quad \tau = X_+(x) \quad \text{при } z = 1; \quad \sigma_z = Z_-(x), \quad \tau = X_-(x) \quad \text{при } z = -1, \quad (3)$$

где безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на жесткость E_h . Условия (3) будем удовлетворять величинами первого приближения из общих решений (2) в предположении, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины. Полученная таким образом система уравнений

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^3 w_0'''' \int_0^1 E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[\int_0^1 E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^1 E dz - \varepsilon \sigma_{z0}' \int_0^1 \nu dz + \tau_0 = X_+, \\
 \varepsilon^3 w_0'''' \int_0^{-1} E z dz - \varepsilon^2 \tau_0'' \left[\int_0^{-1} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz \right] - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^{-1} E dz - \varepsilon \sigma_{z0}' \int_0^{-1} \nu dz + \tau_0 = X_-, \\
 -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^z \int_0^z E z dz dz + \varepsilon^3 \tau_0'''' \left[\int_0^z \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^z \int_0^z \nu z dz dz \right] + \\
 + \varepsilon^3 u_0'''' \int_0^z \int_0^z E dz dz + \varepsilon^2 \sigma_{z0}'' \int_0^z \int_0^z \nu dz dz - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z0} = Z_+,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon^4 w_0'''' \int_0^z E z dz + \varepsilon^3 \tau_0''' \left[\int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z \nu z dz \right] + \\
 & + \varepsilon^3 u_0''' \int_0^z E z dz + \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \int_0^z \nu z dz + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_-
 \end{aligned} \tag{4}$$

может быть разрешена относительно основных неизвестных $\tau_0(x)$, $\sigma_{z_0}(x)$, $w_0(x)$, $u_0(x)$ после вычисления в общем случае шестнадцати интегральных коэффициентов:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \int_0^1 E z dz & \int_0^1 E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz & \int_0^1 E dz & \int_0^1 \nu dz \\ \int_0^{-1} E z dz & \int_0^{-1} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz & \int_0^{-1} E dz & \int_0^{-1} \nu dz \\ \int_0^z E z dz & \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z \nu z dz & \int_0^z E z dz & \int_0^z \nu z dz \\ \int_0^{-z} E z dz & \int_0^{-z} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-z} \nu z dz & \int_0^{-z} E z dz & \int_0^{-z} \nu z dz \end{array} \right\}$$

от заданных функций $E(z)$ и $\nu(z)$.

Примем (рис. 1), что нижний слой при $-1 \leq z \leq z_1$, $0 \leq x \leq 1$ имеет жесткость E_1 , верхний слой при $z_1 \leq z \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ имеет жесткость E_2 ; E_1 и E_2 — константы. Положим для сокращения вычислений и изложения $\nu = const$ во всей полосе. Вычислим входящие в уравнения интегральные коэффициенты (5) при искомах неизвестных w_0 , u_0 , τ_0 и σ_{z_0}

• при $z \geq 0$

$$\int_0^1 E z dz = (E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + E_2 \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^1 \nu z dz = \frac{2+\nu}{2},$$

$$\int_0^1 E dz = (E_1 - E_2) z_1 + E_2, \quad \int_0^1 \nu dz = \nu;$$

• при $z \leq 0$

$$\int_0^{-1} E z dz = \frac{1}{2} E_1, \quad \int_0^{-1} E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^{-1} \nu z dz = \frac{2+\nu}{2}, \quad \int_0^{-1} E dz = -E_1, \quad \int_0^{-1} \nu dz = -\nu;$$

• при $z \geq 0$

$$\int_0^z E z dz = (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + E_2 \frac{1}{6}, \quad \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz - \int_0^z \nu z dz = \frac{2+\nu}{6},$$

$$\int_0^z E z dz = \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + E_2 \frac{1}{2}, \quad \int_0^z \nu z dz = \frac{1}{2} \nu;$$

• при $z \leq 0$

$$\int_0^{-z} \int_0^z E z dz dz = -\frac{1}{6} E_1, \quad \int_0^{-z} \int_0^z E \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz dz dz - \int_0^{-z} \int_0^z \nu z dz dz = -\frac{2+\nu}{6},$$

$$\int_0^{-z} \int_0^z E_1 dz dz = \frac{1}{2} E_1, \quad \int_0^{-z} \int_0^z \nu dz dz = \frac{1}{2} \nu$$

и подставим их в уравнения (4)

$$\varepsilon^3 w_0''' \left[(E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + E_2 \frac{1}{2} \right] - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} - \varepsilon^2 u_0'' [(E_1 - E_2) z_1 + E_2] - \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_+;$$

$$\varepsilon^3 w_0''' E_1 \frac{1}{2} - \varepsilon^2 \tau_0'' \frac{2+\nu}{2} + \varepsilon^2 u_0'' E_1 + \nu \varepsilon \sigma_{z_0}' + \tau_0 = X_-;$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \left[(E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + E_2 \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} +$$

$$+\varepsilon^3 u_0''' \left[\frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + E_2 \frac{1}{2} \right] + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} - \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_+;$$

$$\varepsilon^4 w_0'''' E_1 \frac{1}{6} - \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{6} + \varepsilon^3 u_0''' E_1 \frac{1}{2} + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' \frac{1}{2} + \varepsilon \tau_0' + \sigma_{z_0} = Z_-.$$

Складывая и вычитая попарно первые два и последние два уравнения и поменяв порядок записи уравнений, получим

$$\varepsilon^3 w_0''' \left[(E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] - (2+\nu) \varepsilon^2 \tau_0'' - \varepsilon^2 u_0'' (E_1 - E_2) (z_1 + 1) + 2\tau_0 = X_+ + X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \left[(E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + (E_1 + E_2) \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^3 \tau_0''' \frac{2+\nu}{3} +$$

$$+\varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2z_1 - z_1^2 - 1) - 2\varepsilon \tau_0' = Z_+ - Z_-,$$

$$\varepsilon^3 w_0''' (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - \varepsilon^2 u_0'' [(E_1 - E_2) z_1 - (E_1 - E_2)] - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}' = X_+ - X_-,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} [(E_1 - E_2) (2 - z_1) z_1 + E_1 + E_2] + \nu \varepsilon^2 \sigma_{z_0}'' + 2\sigma_{z_0} = Z_+ + Z_-.$$

Примем в соответствии с описанием метода SVPB [22] $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$ в первой паре уравнений, где τ_0^s — медленно меняющаяся функция; τ_0^q — быстро меняющаяся функция. (Медленно меняющейся функцией называется такая функция, применение к которой оператора $\partial/\partial x$ не меняет ее асимптотического порядка по ε . Быстро меняющейся функцией называется такая, применение к которой оператора $\varepsilon \partial/\partial x$ также не меняет ее асимптотического порядка по ε .)

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 w_0'''' \frac{1}{2} [(E_1 - E_2)z_1^2 + (E_1 + E_2)] - (2 + \nu)\varepsilon^2 (\tau_0^{s''} + \tau_0^{q''}) - \\ & - \varepsilon^2 u_0'' [(E_1 - E_2)z_1 + E_1 + E_2] + 2(\tau_0^s + \tau_0^q) = X_+ + X_-, \\ & - \varepsilon^4 w_0'''' \left[(E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + (E_1 + E_2) \frac{1}{6} \right] + \frac{2 + \nu}{3} \varepsilon^3 (\tau_0^{s''''} + \tau_0^{q''''}) + \\ & + \varepsilon^3 u_0'''' \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2z_1 - z_1^2 - 1) - 2\varepsilon (\tau_0^{s'} + \tau_0^{q'}) = Z_+ - Z_-, \end{aligned}$$

и запишем их отдельно для быстро меняющихся

$$(2 + \nu)\varepsilon^3 \tau_0^{q''} - 6\varepsilon \tau_0^{q'} = 0, \quad (5)$$

$$-(2 + \nu)\varepsilon^2 \tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0, \quad (6)$$

отмеченных верхним индексом q , и медленно меняющихся неизвестных

$$\varepsilon^3 w_0^{s''''} \left[(E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] - \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + E_1 + E_2] + 2\tau_0^s = X_+ + X_-, \quad (7)$$

$$- \varepsilon^4 w_0^{s''''} \left[(E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} \right) + (E_1 + E_2) \frac{1}{6} \right] + \varepsilon^3 u_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (2z_1 - z_1^2 - 1) - 2\varepsilon \tau_0^{s'} = Z_+ - Z_-, \quad (8)$$

$$\varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1^2 - 1) - \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)] - 2\nu \varepsilon \sigma_{z_0}^{s'} = X_+ - X_-, \quad (9)$$

$$- \varepsilon^4 w_0^{s''''} (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) + \varepsilon^3 u_0^{s''''} [(E_1 - E_2)(2 - z_1)z_1 + (E_1 + E_2)] + 2\sigma_{z_0}^s = Z_+ + Z_-, \quad (10)$$

отмеченных верхним индексом s . Уравнения (5) и (6) несовместны, так как не могут одновременно обращаться в ноль для одной и той же функции τ_0^q . Ниже при выполнении условий на коротких сторонах в п. 4 будет предложено разрешение этой ситуации.

Продифференцируем первое уравнение по x и умножим на ε . Затем исключим $\tau_0^{s'}$ из первых двух. Получим уравнение, связывающее w_0^s с u_0^s :

$$\begin{aligned} & \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{3} [(E_1 - E_2)z_1^3 - (E_1 + E_2)] + \varepsilon^3 u_0^{s''''} \left[\frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1 - z_1^2 - 1) - (E_1 + E_2) \right] = \\ & = Z_+ - Z_- - \varepsilon (X_+' + X_-'). \end{aligned} \quad (11)$$

Из уравнения (10) замечаем, что $\sigma_{z_0}^s \sim \varepsilon^4$. Поэтому эту величину можно отбросить как малую порядка ε^2 в уравнении (9):

$$\varepsilon^3 w_0^{s''''} \frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1^2 - 1) - \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)] = X_+ - X_-. \quad (12)$$

Из системы уравнений (11), (12) находим разрешающее уравнение для w_0^s :

$$\varepsilon^4 C w_0^{s''''} = Z_+ - Z_- - \varepsilon (X_+' + X_-') + \varepsilon \frac{(X_+' - X_-')}{[(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)]} \left[\frac{1}{2} (E_1 - E_2) (z_1 - z_1^2 - 1) - (E_1 + E_2) \right]. \quad (13)$$

Здесь введено обозначение

$$C = (Z_+ - Z_-) + \varepsilon (X_+' + X_-') + \varepsilon \frac{(X_+ - X_-)' }{D} \left[(E_1 - E_2) \left(2z_1 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - (E_1 + E_2) \right]. \quad (14)$$

И разрешающее уравнение для функции u_0^s

$$\varepsilon^3 u_0^{s''''} = \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{2} \frac{(E_1 - E_2)}{[(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)]} (z_1^2 - 1) - \varepsilon \frac{(X_+' - X_-')}{[(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)]}, \quad (15)$$

выраженную через функцию w_0^s . Уравнения (13) и (15) могут быть легко проинтегрированы.

Величины τ_0^s и $\sigma_{z_0}^s$ при известных $w_0^{s''''}$ и $u_0^{s''}$ находятся из уравнений (7) и (8):

$$2\tau_0^s = X_+ + X_- - \varepsilon^3 w_0^{s''''} \left[(E_1 - E_2) \frac{z_1^2}{2} + (E_1 + E_2) \frac{1}{2} \right] + \varepsilon^2 u_0^{s''} [(E_1 - E_2)z_1 + E_1 + E_2]; \quad (16)$$

$$2\sigma_{z_0}^s = Z_+ + Z_- + \varepsilon^4 w_0^{s''''} (E_1 - E_2) \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_1^3}{3} - \frac{1}{6} \right) - \varepsilon^3 u_0^{s''''} [(E_1 - E_2)(2 - z_1)z_1 + (E_1 + E_2)]. \quad (17)$$

4. Нейтральная линия в полосе из разномодульного материала

Рассмотрим случай изгиба полосы нагрузкой $X_+ = X_- = Z_- = 0$, $Z_+ = -p$. Для простоты примем $p = const$. Уравнения (13) и (15) принимают вид

$$\varepsilon^4 w_0^{s''''} = \frac{p}{C}, \quad \varepsilon^3 u_0^{s''''} = \varepsilon^4 w_0^{s''''} \frac{1}{2} \frac{(E_1 - E_2)}{[(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)]} (z_1^2 - 1). \quad (18)$$

Нейтральная линия должна удовлетворять условию отсутствия продольной деформации $\varepsilon_{x(0)}$, определенной второй формулой в списке (2):

$$-\varepsilon^2 w_0^{s''} z + \varepsilon \tau_0^s \int_0^z \frac{2(1+\nu)}{E} dz + \varepsilon u_0^{s'} = 0. \quad (19)$$

Из формул (13), (15)–(17) следуют оценки

$$w_0^s \sim \varepsilon^{-4} p, \quad u_0^s \sim \varepsilon^{-3} p, \quad \tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0^{s''''} \text{ или } \tau_0^s \sim \varepsilon^{-1} p, \quad \sigma_{z_0}^s \sim p. \quad (20)$$

Следовательно, средний член в уравнении (19), соответствующий касательному напряжению, может быть отброшен как малая величина $O(\varepsilon^2)$, и уравнение нейтральной линии будет выглядеть так:

$$-\varepsilon^2 w_0^{s''} z + \varepsilon u_0^{s'} = 0. \quad (21)$$

Таким образом, задача нахождения нейтральной линии в полосе сводится к решению уравнений (18) при заданных условиях на коротких сторонах полосы. Примем их соответствующими условиям свободного опирания полосы и балки (рис. 2).



Рис. 2. Напряжения на коротких сторонах полосы, которые должны быть обращены в ноль при свободном опирании

И с т о ч н и к: выполнено Е.М. Зверьяевым

Figure 2. Stresses on the short sides of the strip, which must be zero when freely supported

S o u r c e: made by E.M. Zveryaev

При $x = 0; 1$ напряжения $\sigma_x = \tau = 0$. Кроме того, вертикальное перемещение полосы на концах должно отсутствовать. С помощью формул (2) запишем эти условия в развернутом виде:

$$\left\{ \varepsilon^2 w_0'' \int_0^z v z dz - \varepsilon \tau_0' \left[\int_0^z \frac{1-v^2}{E} z dz + \int_0^z v \int_0^z \frac{2(1+v)}{E} dz dz \right] + \sigma_{z0} \int_0^z \frac{1-v^2}{E} dz - \varepsilon u_0' \int_0^z v dz + w_0 \right\}_{x=0;1} = 0;$$

$$\left\{ -E \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon (\tau_0^{s'} + \tau_0^{q'}) (2+v) \right\} z + E \varepsilon u_0' + v \sigma_{z0} \Big|_{x=0;1} = 0; \tag{22}$$

$$\left\{ \varepsilon^3 w_0'''' \int_0^z E z dz - \varepsilon^2 (\tau_0^{s''} + \tau_0^{q''}) (2+v) \frac{z^2}{2} - \varepsilon^2 u_0'' \int_0^z E dz - v \varepsilon \sigma_{z0}' z + \tau_0 \right\}_{x=0;1} = 0. \tag{23}$$

На основании асимптотических оценок (20) можно в условиях (22) отбросить величины $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с главными:

$$\{w_0\}_{x=0;1} = 0,$$

$$\left\{ -E \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0^{q'} (2+v) \right\} z + E \varepsilon u_0' \Big|_{x=0;1} = 0$$

и потребовать обращения в ноль коэффициентов при каждой степени z во втором условии из (22) на краях $x = 0; 1$:

$$w_0 = 0, u_0^{s'} = 0; \tag{24}$$

$$-E \varepsilon^2 w_0'' + \varepsilon \tau_0^{q'} (2+v) = 0. \tag{25}$$

Вычислим интегралы в выражении (23) и с помощью соотношения (6) и оценки (20) для $\tau_0^s \sim \varepsilon^{-1} p$ приведем к виду:

$$\tau_{(1)} = \left(\frac{1}{2} E_1 \varepsilon^3 w_0'''' - \tau_0^q \right) z^2 - \varepsilon^2 u_0'' E_1 z - v \varepsilon \sigma_{z0}' z + \tau_0 = 0 \text{ при } 0 < z < z_1;$$

$$\tau_{(1)} = \left(\frac{1}{2} E_2 \varepsilon^3 w_0'''' - \tau_0^q \right) (z^2 - z_1^2) - \varepsilon^2 u_0'' E_2 (z - z_1) - v \varepsilon \sigma_{z0}' (z - z_1) + \tau_0 = 0 \text{ при } z_1 < z < 1;$$

$$\tau_{(1)} = \left(\frac{1}{2} E_1 \varepsilon^3 w_0'''' - \tau_0^q \right) z^2 + \varepsilon^2 u_0'' E_1 z + v \varepsilon \sigma_{z0}' z + \tau_0 = 0 \text{ при } -1 < z < 0. \tag{26}$$

Очевидно, что здесь τ_0^q является решением уравнения (6). Уравнение (5) может быть записано так:

$$U = (2 + \nu)\varepsilon^3 \tau_0^{q''''} - 2\varepsilon \tau_0^{q'} - 4\varepsilon \tau_0^{q'}.$$

То есть первые два члена при выполнении уравнения (6) обращаются в ноль, а оставшийся член $-4\varepsilon \tau_0^{q'}$ дает реакцию в опоре.

Приравнявая в условиях (26) коэффициенты при каждой степени z и разности степеней $(z - z_1)$, получим условия на на краях $x = 0; 1$. Первые условия в скобках служат для определения функции краевого эффекта $\tau_0^q = \tau_0^q(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_1 \varepsilon^3 w_0^{''''} - \tau_0^q &= 0 \text{ при } 0 < z < z_1; \\ \frac{1}{2} E_2 \varepsilon^3 w_0^{''''} - \tau_0^q &= 0 \text{ при } z_1 < z < 1; \\ \frac{1}{2} E_1 \varepsilon^3 w_0^{''''} - \tau_0^q &= 0 \text{ при } -1 < z < 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Несмотря на то, что функция $\tau_0^q = \tau_0^q(x)$ в этих условиях определяется как разрывная, в формулах (27) $\tau_{(1)}$ непрерывна по координате z .

Величина τ_0^q из условия совместности уравнений (25) и (27) должна быть $O(\varepsilon^3)$. На основании этой оценки условие (25) после отбрасывания $\varepsilon \tau_0^{q'} \sim \varepsilon^2 p$ приобретает вид

$$w_0^{s''} = 0. \quad (28)$$

Это условие вместе с первым условием из (24) совпадает с классическими условиями свободного опирания балки на концах $x = 0; 1$. Теперь уравнения (18) могут быть проинтегрированы при условиях (28) и (24) для первого уравнения и условия (24) для второго. Получаем решение для w_0^s, u_0^s

$$w_0^s = \varepsilon^{-4} \frac{P}{24C} (x^4 - 2x^3 + x) \quad u_0^s = \varepsilon w_0^{s'} \frac{E_1 - E_2}{2[(E_1 - E_2)z_1 + (E_1 + E_2)]} (z_1^2 - 1).$$

Подставив $w_0^{s''}$ и $u_0^{s'}$ в уравнение нейтральной линии (21), получим довольно простое уравнение для определения координаты нейтральной линии z_1 :

$$z_1^2 - 2 \frac{E_1 + E_2}{E_2 - E_1} z_1 + 1 = 0.$$

Отсюда получаем подходящее значение координаты нейтральной линии (см. рис. 1)

$$z_1 = \frac{E_1 + E_2}{E_2 - E_1} - \sqrt{\left(\frac{E_1 + E_2}{E_2 - E_1}\right)^2 - 1}.$$

График координаты нейтральной линии $z_1 = z_1(E_1)$ приведен на рис. 3. Принято $E_h = E_2$. На рис. 4 изображен элемент изогнутой полосы/балки со смещенной нейтральной линией FG вследствие раз-

номодульности. На графике видно, что при смещенной вверх нейтральной линии в искривленном элементе полосы $AMEC$ между нормальными к нейтральной линии AC и ME удлинение нижнего слоя CD намного больше укорочения верхнего слоя BA . Например, при $E_1 = 0.1$, когда модули жесткости слоев отличаются в 10 раз, удлинение нижнего волокна CD в 3 раза больше, чем укорочение верхнего волокна BA . При таких перемещениях в нижней части полосы/балки в трещиноватом нижнем слое возможно объединение мелких трещин в большие, изображенные на рис. 4 пунктирными линиями, и их раскрытие.

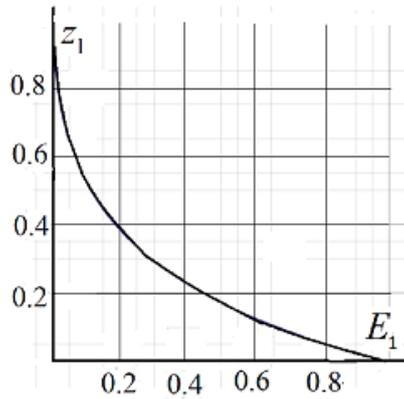


Рис. 3. Зависимость координаты нейтральной линии Z_1 от соотношения жесткостей слоев
Источник: выполнено Е.М. Зверьяевым

Figure 3. Dependence of the coordinate of the neutral line Z_1 on the ratio of the stiffness of the layers
Source: made by E.M. Zveryaev

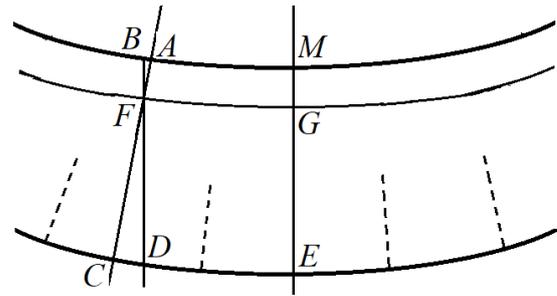


Рис. 4. Появление поперечных трещин в растянутой зоне бетона
Источник: выполнено Е.М. Зверьяевым

Figure 4. The appearance of transverse cracks in the stretched area of concrete
Source: made by E.M. Zveryaev

На рис. 5, заимствованном из [24], показаны результаты испытания опытных балок, где авторы отмечают: «...первые нормальные трещины при силовом воздействии появлялись во всех балках без исключения при нагрузке $N_i = 7,5 \pm 0,7$ кН. На последующих этапах загрузки появились новые нормальные трещины, дальнейший характер развития которых, как и уровень появления и развития наклонных трещин, находился в определенной зависимости от класса рабочей арматуры, процента стального армирования и вида композитной арматуры, наклеенной на растянутую грань балок».

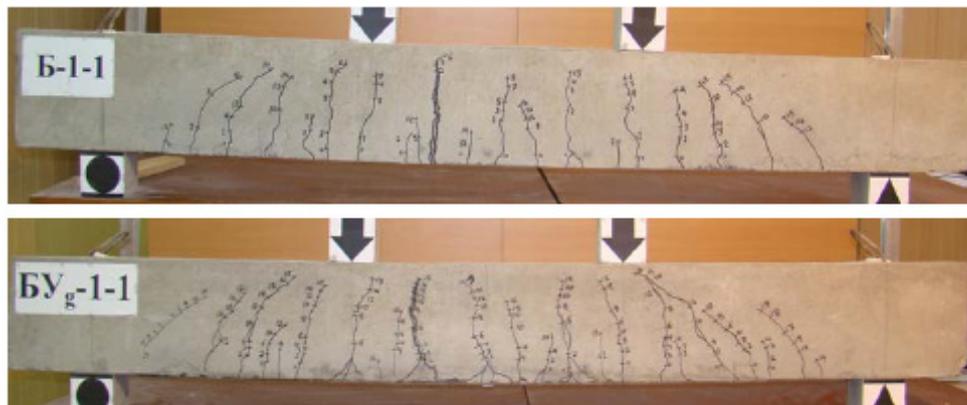


Рис. 5. Расположение трещин в железобетонной балке
Источник: выполнено Д.Р. Маляном, П.П. Польским, А. Михубом [24]

Figure 5. The location of cracks in a reinforced concrete beam
Source: made by D.R. Mailyan, P.P. Polskoy, A. Mihoub [24]

То есть трещины типа изображенных на рис. 4 в разномодульной полосе появляются даже в усиленных арматурой балках. Верхний слой, где бетон подвержен сжатию из-за смещения нейтральной линии, довольно узкий, и, соответственно, смещение нейтральной линии вверх довольно велико. Заметим, что в настоящей статье не учтено безусловно имеющее место изменение модуля упругости в растянутой зоне от некоторой конечной величины до, скорее всего, нуля в нижней части балки.

Для того чтобы объяснить появление наклонных трещин около опор, обратимся к рис. 6. На нем изображены классические эпюры моментов M и поперечных сил Q_{kl} . Последняя изображается прямой линией, достигающей своего наибольшего значения на концах балки. Под ней изображена суммарная эпюра поперечных сил с поправкой от краевого эффекта, описываемого уравнением (6).

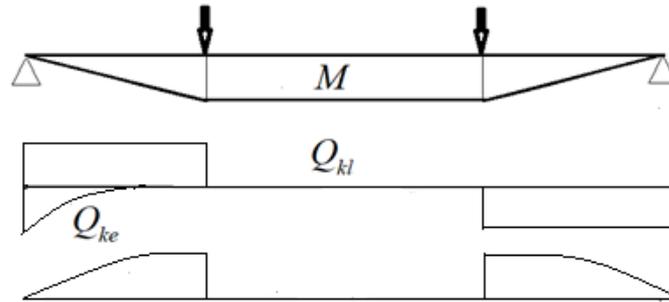


Рис. 6. Уточненная эпюра поперечных сил в полосе по сравнению с балочной
И с т о ч н и к: выполнено Е.М.Зверевым

Figure 6. Расположение трещин в железобетонной балке
S o u r c e: made by E.M. Zveryaev

Из эпюр следует, что в области опор моментные нормальные и касательные напряжения малы.

Рассмотрим балку, не по теории балок принятую в сопротивлении материалов, а по теории упругости как длинную прямоугольную полосу на треугольных призмах-опорах. В этом случае надо выполнить граничные условия отсутствия нормальных и касательных напряжений на торцевых поверхностях полосы. Эта задача решена в [25]. Формула для поперечного напряжения σ_z :

$$\sigma_z = p \left[\frac{3}{4} \left(z - \frac{z^3}{3} \right) + \frac{1}{2} \right] - p \left\{ \frac{\kappa}{\varepsilon} \exp \left(-\frac{\kappa}{\varepsilon} x \right) + \frac{\kappa}{\varepsilon} \exp \left[-\frac{\kappa}{\varepsilon} (1-x) \right] \right\} \left[\frac{3}{4} \left(z - \frac{z^3}{3} \right) - \frac{1}{2} \right],$$

где $\kappa^2 = \frac{2}{2-\nu}$ указывает на отсутствие напряжений в верхних углах полосы. Таким образом, в торцах полосы-балки около опор можно выделить мало напряженные области, идеализованные в виде треугольников ABC и DGM (рис. 7), при этом считать их квазижесткими телами, в которые закреплена средняя часть балки с проекцией в плоскости рисунка в виде трапеции $CMDM$.

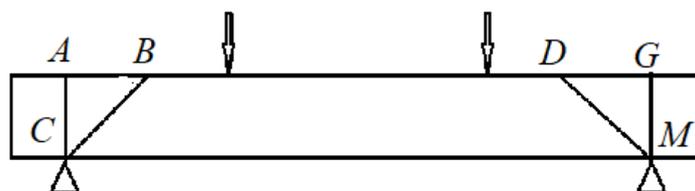


Рис. 7. Квазижесткое включение, образующееся в полосе при свободном опирании
И с т о ч н и к: выполнено Е.М. Зверевым

Figure 7. Quasi-rigid inclusion forming in the strip with free support
S o u r c e: made by E.M. Zveryaev

5. Заключение

Задача нахождения напряженно-деформированного состояния полосы из разномодульного материала вопреки существующему мнению о существенной нелинейности может быть поставлена как линейная для двухслойной полосы.

В ходе проведенного исследования получены следующие результаты.

1. В статье определены изгибная и продольная жесткость двухслойной полосы/балки.
2. Найдена определяющая положение нейтральной оси при изгибе простая формула.
3. Для разномодульного материала, такого как бетон, нейтральная линия при изгибе существенно сдвигается вверх в области сжатия, в результате чего на нижней растянутой грани возникают большие перемещения и создаются условия для раскрытия вертикальных трещин.
4. Объяснено появление наклонных трещин около опор.
5. Получены формулы для всех перемещений и напряжений задачи.
6. Построенное с помощью метода малого параметра решение учитывает все особенности исходной задачи теории упругости и является асимптотически сходящимся в силу теоремы Банаха о неподвижной точке.

Для удобного использования предполагается в дальнейшем формулы переписать для новой системы координат: ось $y = 0$ совместить с нейтральной линией полосы/балки. Это упростит запись формул и вычисления по ним. Также приведенный анализ показывает, что надо провести в дальнейшем исследование трещинообразования для стремящегося к нулю в силу разрушения мостиков по краям трещин на нижней грани полосы модуля упругости.

Также возможно рассмотрение трехслойной полосы с учетом арматуры и четырехслойной с учетом подкрепления полосы композиционными материалами.

Список литературы

1. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разнотвердых к растяжению и сжатию // Инженерный журнал. Механика твердого тела. 1966. № 2. С. 44–53.
2. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. К разномодульной теории упругости // Инженерный журнал Механика твердого тела. 1966. № 6. С. 64–67.
3. Шапиро Г.С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инженерный журнал Механика твердого тела. 1966. № 2. С. 123–125.
4. Матченко Н.М., Толоконников Л.А. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах // Инженерный журнал Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 108–110.
5. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения механики разномодульных тел. М., 1980 (Препринт / АН СССР. Ин-т проблем механики; № 159)
6. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. Москва : Наука, 1982. 320 с. URL: <https://reallib.org/reader?file=449586&pg=3> (дата обращения: 15.06.2024).
7. Isabekian N., Metellus A.-M. Energie de deformation d'un materiau elastique possedant des modules differents en traction et on compression, en theorie des petites perturbations. C R. Acad. Sc. Paris, Serie A. 233 C0. 1978. Vol. 286.
8. Isabekian N., Metellus A.-M. Sur le comportement d'un materiau elastique anisotrope possedant des modules differents en traction et en compression, en theorie des petites perturbations. C R. Acad. Sc. Paris, Serie A-491 A3. 1978. Vol. 286.
9. Wesolowski Z. Piecewise linear elastic material // Archiwum mecbaniki stosowanej. 1970. Vol. 22. No. 3.
10. Benveniste Y. A constitutive theory for transversely isotropic bimodulus materials with a class of steady wave solutions // Acta Mechanica. 1983. Vol. 46. P. 137–153. <https://doi.org/10.1007/BF01176770>
11. Jones R.M. Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression // AIAA J. 1977. Vol. 15. No. 1. P. 16–23. <http://doi.org/10.2514/3.7297>
12. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного материала // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 6. С. 29–34.
13. Березин А.В. О законах деформирования разномодульных дилатирующих сред // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2007. № 2. С. 70–72. EDN: IAFRVN
14. Цвелодуб И.Ю. О разномодульной теории упругости // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 1. С. 157–164.

15. Adamov A.A. Methodological problems in experimental studies and verification of the governing equations of the theory of elasticity for an isotropic body with different moduli in tension and compression // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2020. Vol. 61. No. 6. С. 979–985. <https://doi.org/10.1134/S0021894420060115>. EDN: JRGLER
16. Guo Y., Wen S.-R., Sun J.-Y., He X.-T. Theoretical Study on Thermal Stresses of Metal Bars with Different Moduli in Tension and Compression // *Metals*. 2022. Vol. 12. Article no. 347. <https://doi.org/10.3390/met12020347>
17. He X.-T., Xu P., Sun J.-Y., Zheng Z.-L. Analytical Solutions for Bending Curved Beams with Different Moduli in Tension and Compression // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2015. Vol. 22. Issue 5. P. 325–337. <https://doi.org/10.1080/15376494.2012.736053>
18. Sunil Kumar M.R., Schmidova E., Konopik P., Melzer D., Bozkurt F., Londe N.V. Fracture toughness analysis of automotive-grade dual-phase steel using essential work of fracture (EWF) method // *Metals*. 2020. Vol. 10. Issue 8. Article no. 1019. <http://doi.org/10.3390/met1008101>
19. He X., Chen Q., Sun J., Zheng Z., Chen Sh. Application of the Kirchhoff hypothesis to bending thin plates with different moduli in tension and compression // *Journal of mechanics of materials and structures*. 2010. Vol. 5. No. 5. P. 765–769. <https://doi.org/10.2140/jomms.2010.5.755>
20. He X., Wang X.-G., Pang B., Ai J., Sun J. Variational Solution and Numerical Simulation of Bimodular Functionally Graded Thin Circular Plates under Large Deformation // *Mathematics*. 2023. Vol. 11. Issue 14. Article no. 3083. <http://doi.org/10.3390/math11143083>
21. Федоренко А.Н., Федулов Б.Н., Ломакин Е.В. Задача потери устойчивости тонкостенных конструкций из композиционных материалов, свойства которых зависят от типа нагружения // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета // Механика*. 2019. № 3. С. 104–111. <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.3.11>
22. Зверьяев Е.М. Метод Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // *ПММ*. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 823–833. <http://doi.org/10.1134/S0032823519050126> EDN: WZNTUO
23. Зверьяев Е.М., Рынковская М.И., Хоа В.Д. Построение решения уравнений теории упругости слоистой полосы на основе принципа сжатых отображений // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2023. Т. 19. № 5. С. 421–449. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-421-449>
24. Маилян Д.Р., Польской П.П., Михуб А. Особенности трещинообразования и разрушения усиленных железобетонных балок с различными видами арматуры и композитных материалов // *Инженерный вестник Дона*. 2013. № 2 (25). EDN: QLISND
25. Зверьяев Е.М. Метод вычисления концентрации напряжений в угловых точках длинной упругой полосы // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2018. № 6. С.7–14. EDN: MHPNZR

References

1. Ambartsumyan S.A., Khachatryan A.A. Basic Equations of Elastic Theory for Materials with Tension–Compression Asymmetry. *Engineering Journal. Mechanics of Solids*. 1966;2:44–53. (In Russ.)
2. Ambartsumyan S.A., Khachatryan A.A. On the multimodular theory of elasticity. *Engineering Journal Mechanics of Solids*. 1966;(6):64–67. (In Russ.)
3. Shapiro G.S. On deformations of bodies with different resistance to tension and compression. *Engineering Journal Mechanics of Solids*. 1966;(2):123–125. (In Russ.)
4. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A. On the relationship between stresses and strains in isotropic media of different moduli. *Engineering journal Mechanics of solids*. 1968;(6):108–110. (In Russ.)
5. Lomakin E.V. *Defining relations of mechanics of different-module bodies*. Moscow, 1980 (Preprint/USSR Academy of Sciences. Institute for Problems in Mechanics; No. 159) (In Russ.)
6. Ambartsumyan S.A. *Different-module theory of elasticity*. Moscow: Nauka Publ.; 1982. (In Russ.) Available from: <https://reallib.org/reader?file=449586&pg=3> (accessed: 15.06.2024).
7. Isabekian N., Metellus A.-M. Energie de deformation d'un materiau elastique possedant des modules differents en traction et on compression, en theorie des petites perturbations. *C R. Acad. Sc. Paris*. 1978;286, Serie A. 233 C0.
8. Isabekian N., Metellus A.-M. Sur le comportement d'un materiau elastique anisotrope possedant des modules differents en traction et en compression, en theorie des petites perturbations. *C R. Acad. Sc. Paris*. 1978;286:491–494.
9. Wesolowski Z. Piecewise linear elastic material. *Archiwum mechaniki stosowanej*. 1970;22(3).
10. Benveniste Y. A constitutive theory for transversely isotropic bimodulus materials with a class of steady wave solutions. *Acta Mechanica*. 1983;46:137–153. <https://doi.org/10.1007/BF01176770>
11. Jones R.M. Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression. *AIAA J*. 1977;15: 16–23. <https://doi.org/10.2514/3.7297>
12. Lomakin E.V., Rabotnov Yu.N. Relations of the theory of elasticity for an isotropic material of different modulus. *Izvestiya AN SSSR. Mechanics of solids*. 1978;(6):29–34.

13. Berezin A.V. On the laws of deformation of dilating media of different modulus. *Problems of mechanical engineering and automation*. 2007;(2):70–72. (In Russ.) EDN: IAFRVN
14. Tselodub I.Yu. On the multimodular theory of elasticity. *PMTF*. 2008;49(1):157–164. (In Russ.) EDN: JRGLER
15. Adamov A.A. Methodological problems in experimental studies and verification of the governing equations of the theory of elasticity for an isotropic body with different moduli in tension and compression. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2020;61(6):979–985. <https://doi.org/10.1134/S0021894420060115> (In Russ.) EDN: JRGLER
16. Guo Y., Wen S.-R., Sun J.-Y., He X.-T. Theoretical Study on Thermal Stresses of Metal Bars with Different Moduli in Tension and Compression. *Metals*. 2022;12(2):347. <https://doi.org/10.3390/met12020347>
17. He X.-T., Xu P., Sun J.-Y., Zheng Z.-L. Analytical Solutions for Bending Curved Beams with Different Moduli in Tension and Compression. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2015;22(5):325–337. <https://doi.org/10.1080/15376494.2012.736053>
18. Sunil Kumar M.R., Schmidova E., Konopik P., Melzer D., Bozkurt F., Londe N.V. Fracture toughness analysis of automotive-grade dual-phase steel using essential work of fracture (EWF) method. *Metals*. 2020;10(8):1019. <https://doi.org/10.3390/met1008101>
19. He X., Chen Q., Sun J., Zheng Z., Chen Sh. Application of the Kirchhoff hypothesis to bending thin plates with different moduli in tension and compression. *Journal of mechanics of materials and structures*. 2010;5(5):765–769. <https://doi.org/10.2140/jomms.2010.5.755>
20. He X., Wang X.-G., Pang B., Ai J., Sun J. Variational Solution and Numerical Simulation of Bimodular Functionally Graded Thin Circular Plates under Large De-formation. *Mathematics*. 2023;11(14):3083. <https://doi.org/10.3390/math11143083>
21. Fedorenko A.N., Fedulov B.N., Lomakin E.V. Buckling problem of composite thin-walled structures with properties dependent on loading types. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2019;(3):104–111. (In Russ.) <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.3.11>
22. Zveryaev E.M. Saint-Venant–Picard–Banach method for integrating thin-walled systems equations of the theory of elasticity. *Mechanics of Solids*. 2020;55(7):1042–1050. <https://doi.org/10.3103/S0025654420070225>
23. Zveryaev E.M., Rynkovskaya M.I., Hoa V.D. Generation a solution to the equations of elasticity theory for a layered strip basing on the mapping contraction principle. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023;19(5):421–449. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-5-421-449>
24. Mailyan D.R., Polskoy P.P., Mihoub A. Features of crack formation and destruction of reinforced concrete beams with different types of reinforcement and composite materials. *Engineering Bulletin of the Don*. 2013;2(25):102. (In Russ.) EDN: QLISND
25. Zveryaev E.M. Method for calculating stress concentration at corner points of a long elastic strip. *Structural mechanics and calculation of structures*. 2018;(6):7–14. (In Russ.) EDN: MHPNZR