ISSN 1810-3189 (print) ISSN 2782-294X (online) Подписной индекс 72674

ФИЗИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ И РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

PHYSICS OF WAVE PROCESSES AND RADIO SYSTEMS

2024 Том 27 | Vol. 27 N^º 4 | No. 4

ФИЗИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ И РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ PHYSICS OF WAVE PROCESSES AND RADIO SYSTEMS Периодическое печатное издание, журнал

2024. Том 27, № 4 (108)

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

Журнал включен в библиографические базы данных ВИНИТИ (http://www.viniti.ru), ULRICHS Periodical Directory (http://www.ulrichsweb.com), РИНЦ (https://www.elibrary.ru) и DOAJ (https://doaj.org).

Учредители и издатели журнала:

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

Главный редактор:

д.ф.-м.н., проф. Клюев Д.С. Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Самара, Россия)

Зам. главного редактора:

д.ф.-м.н., проф. Ивахник В.В. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева (г. Самара, Россия)

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н., проф. Бобрешов А.М. Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Россия)

д.т.н., проф. *Бузов А.Л.* АО «Самарское инновационное предприятие радиосистем» (г. Самара, Россия)

проф. Ван Лил Э. Лёвенский католический университет (г. Лёвен, Бельгия)

доктор наук по физике, проф. Грефе М. Технический университет Дармштадта (г. Дармштадт, Германия)

акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. *Гуляев Ю.В.* Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН (г. Москва, Россия)

д.т.н., проф. *Дмитриков В.Ф.* Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций имени проф. М.А. Бонч-Бруевича (г. Санкт-Петербург, Россия)

член-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф. *Иванов Д.В.* Поволжский государственный технологический университет (г. Йошкар-Ола, Россия)

д.т.н., проф. *Кузаев Г.А.* Норвежский университет естественных и технических наук (г. Тронхейм, Норвегия)

д.т.н., проф. *Мещанов В.П.* ООО НПП «Ника-СВЧ» (г. Саратов, Россия)

д.т.н., проф. *Морозов Г.А.* Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева (г. Казань, Россия)

д.т.н., проф. *Морозов О.Г.* Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева (г. Казань, Россия)

д.ф.-м.н. Нещерет А.М. АО «Самарское инновационное предприятие радиосистем» (г. Самара, Россия) акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. *Никитов С.А.* Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН (г. Москва, Россия)

д.ф.-м.н., доц. Осипов О.В. Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Самара, Россия)

д.т.н., проф. *Пономарев Л.И.* Московский авиационный институт (государственный технический университет) (г. Москва, Россия)

д.ф.-м.н., проф. *Потапов А.А.* Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН (г. Москва, Россия)

лект. Сидоров К.А. Кардиффский университет (г. Кардифф, Великобритания)

д.ф.-м.н., проф. *Чернокожин Е.В.* Тель-Авивский университет (г. Тель-Авив, Израиль)

д.ф.-м.н., проф. *Черняков М.С.* Бирмингемский университет (г. Бирмингем, Великобритания)

Ответственный секретарь:

д.ф.-м.н., доц. *Табаков Д.П.* Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики (г. Самара, Россия)

Выпускающий редактор: Мурзинова Т.А.

Лит. редактирование и корректура: Мурзиновой Т.А.

Информация на английском языке: Стрельникова М.С.

Компьютерный набор и верстка: Градинарь И.М.

Адрес редакции:

443010, Россия, Самарская обл., г. Самара, ул. Льва Толстого, д. 23 Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, к. 342 Тел. (846) 339-11-21, e-mail: klyuevd@yandex.ru URL: https://journals.ssau.ru/pwp

Адрес издателя:

 (\mathbf{i})

(cc)

443086, Россия, Самарская обл., г. Самара, Московское шоссе, д. 34, корп. 22a, 3126, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Центр периодических изданий Самарского университета. Тел. (846) 334-54-06, e-mail: murzinova.tatjana@yandex.ru

Издается с 1998 г. Выходит 1 раз в квартал.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, регистрационный номер серии ПИ № ФС 77-68199 от 27.12.2016 Подписной индекс 72674 в объединенном интернет-каталоге «Пресса России»

Все статьи распространяются по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная. Для подробной информации посетите https://creativecommons.org/licenses/by/4.0

© Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 2024 © Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2024

Подписано в печать 25.12.2024. Дата выхода в свет 28.12.2024 Формат 60 × 84/8. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 13 Цена свободная. 0+. Тираж 100 экз. Заказ № Отпечатано с готового оригинала-макета в типографии ООО «Слово» 443070, Российская Федерация, г. Самара, ул. Песчаная, д. 1. Тел. (846) 244-43-47, e-mail: izdatkniga@yandex.ru

FIZIKA VOLNOVYH PROCESSOV I RADIOTEHNIČESKIE SISTEMY PHYSICS OF WAVE PROCESSES AND RADIO SYSTEMS Periodical Printed Publication, Journal

2024, vol. 27, no. 4 (108)

The journal is included by the Higher Attestation Commission into the List of leading scientific journals and publications in the Russian Federation, where basic scientific results of doctoral theses should be published (Bulletin of the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science).

The journal is included in bibliographic databases VINITI (http://www.viniti.ru), ULRICHS Periodical Directory (http://www.ulrichsweb.com), RSCI (https://www.elibrary.ru), and DOAJ (https://doaj.org).

Journal Founders and Publishers

Samara National Research University Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics

Editor in Chief:

prof. D.S. Klyuev Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara, Russia)

Deputy Chief Editor:

prof. *V.V. Ivakhnik* Samara National Research University (Samara, Russia)

Editorial Board:

prof. A.M. Bobreshov Voronezh State University (Voronezh, Russia)

prof. A.L. Buzov Samara Innovative Business Radio Systems (Samara, Russia)

prof. *M.S. Cherniakov* University of Birmingham (Birmingham, UK)

prof. *E.V. Chernokozhin* Tel Aviv University (Tel Aviv, Israel)

prof. V.F. Dmitrikov The Bonch-Bruevich Saint Petersburg State University of Telecommunications (Saint Petersburg, Russia)

prof. *M. Gräfe* Technical University of Darmstadt (Darmstadt, Germany)

academician of RAS, prof. Yu.V. Gulyaev Institute of Radio Engineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

corresp. member of RAS, prof. *D.V. Ivanov* Volga State University of Technology (Yoshkar-Ola, Russia)

prof. *G.A. Kouzaev* Norwegian University of Science and Technology (Trondheim, Norway)

prof. V.P. Meshchanov JSC NPP «Nika-SVCh» (Saratov, Russia) prof. *G.A. Morozov* Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI (Kazan, Russia)

prof. O.G. Morozov Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI (Kazan, Russia)

A.M. Neshcheret Samara Innovative Business Radio Systems (Samara, Russia)

academician of RAS, prof. S.A. Nikitov Institute of Radio Engineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

asst. prof. O.V. Osipov Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara, Russia)

prof. L.I. Ponomarev Moscow Aviation Institute (State Technical University) (Moscow, Russia)

prof. A.A. Potapov Institute of Radio Engineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

PhD, lecturer K.A. Sidorov Cardiff University (Cardiff, UK)

prof. E. Van Lil KU Leuven (Leuven, Belgium)

Executive Editor:

asst. prof. D.P. Tabakov Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics (Samara, Russia)

Commissioning Editor: T.A. Murzinova

Proofreading: T.A. Murzinova

Language Editor: M.S. Strelnikov

Typesetting: *I.M. Gradinar*

Editorial Office: 23, L. Tolstoy St., Rm. 342, Samara, 443010, Samara Region, Russia Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatic. Tel. (846) 339-11-21, e-mail: klyuevd@yandex.ru URL: https://journals.ssau.ru/index.php/pwp

Publisher Office: 34, bldg. 22a, Moskovskoye shosse, rm. 312b, Samara, 443086, Samara Region, Russia, Samara National Research University, Center of Periodical Publications of Samara University. Tel. (846) 334-54-06, e-mail: murzinova.tatjana@yandex.ru

Published since 1998. Frequency 1 time a quarter. Edition is registered by The Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media – PI N^o FS 77-68199 of 27.12.2016 Subscription index in the united internet-catalog «Press of Russia» 72674



All articles are licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License. For more information, see https://creativecommons.org/licenses/by/4.0

© Samara National Research University, 2024

© Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 2024

Содержание

А.Р. Багров, Е.К. Башкиров Динамика перепутывания кубитов в трехкубитной модели Джейнса – Каммингса для бисепарабельных начальных состояний
В.В. Ивахник, Д.Р. Капизов, В.И. Никонов Шестиволновое взаимодействие на резонансной нелинейности в волноводе с бесконечно проводящими поверхностями
И.С. Полянский Внешние барицентрические координаты для произвольных многоугольников и приближенный метод их вычисления
В.В. Яцышен, И.И. Бородина Отражение света круговой поляризации от полупроводникового кристалла CdS вблизи экситонного резонанса с учетом пространственной дисперсии
А.Т. Албузов, П.Е. Шахов, В.И. Филатов Модель расчета линии радиосвязи на основе данных дистанционного зондирования земли50
Е.В. Аверина, К.В. Смусева, П.А. Токарев, Г.К. Усков Влияние кросс-поляризации двухполяризационных антенных элементов на эргодическую пропускную способность многоканальной системы
В.Р. Скрынский Радиолокационный комплекс для беспилотных летательных аппаратов
Е.О. Хабаров, В.Д. Мартышенко Сравнительный анализ алгоритмов поэлементного приема в каналах с межсимвольной интерференцией73
А.М. Афанасьев, Ю.С. Бахрачева Решение задач геокриологии на основе обобщенной теории Фурье для температурных волн в полупространстве
Н.А. Полуэктова, Д.А. Шишкина, Д.П. Григорьев Влияние гибридного покрытия из пористого кремния и квантовых точек WS ₂ и MoS ₂ на электрические
характеристики фоточувствительных структур
К сведению авторов

Contents

Alexander R. Bagrov, Eugene K. Bashkirov Dynamics of qubit entanglement in three-qubit Jaynes–Cummings model for biseparable intial states7
Valery V. Ivakhnik, Darkhan R. Kapizov, Vladimir I. Nikonov Six-wave interaction on resonant nonlinearity in a waveguide with infinitely conducting surfaces
<i>Ivan S. Polyansky</i> External barycentric coordinates for arbitrary polygons and an approximate method for calculating them
Valeriy V. Yatsyshen, Irina I. Borodina Reflection of circularly polarized light from a CdS semiconductor crystal near the exciton resonance taking into account spatial dispersion
<i>Adrey T. Albuzov, Pavel E. Shakhov, Vladimir I. Filatov</i> Model calculation of a radio communication line based on remote sensing data
<i>Ekaterina V. Averina, Ksenia V. Smuseva, Pavel A. Tokarev, Grigory K. Uskov</i> Influence of crosspolarization of dual-polarized antenna elements on the ergodic capacity of a multichannel system
<i>Vladislav R. Skrynskij</i> Radar system for unmanned aerial vehicles68
<i>Eugene O. Khabarov, Vladimir D. Martyshenko</i> Comparative analysis of elementwise reception-algorithms in intersymbol interference channels73
Anatoly M. Afanasyev, Yulia S. Bakhracheva Solving geocryology problems based on generalized Fourier theory for temperature waves in half-space
Natalia A. Poluektova, Daria A. Shishkina, Danil P. Grigoriev The effect of a hybrid coating of porous silicon and WS_2 and MoS_2 quantum dots on the electrical characteristics of photosensitive structures
Information for authors

Физика волновых процессов и радиотехнические системы $2024 T 27 N^2 4 C 7 19$

2024. T. 27, Nº 4. C. 7–19

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.7-19 УДК 537.86:530.145 Оригинальное исследование Дата поступления 4 апреля 2024 Дата принятия 6 мая 2024 Дата публикации 28 декабря 2024

Динамика перепутывания кубитов в трехкубитной модели Джейнса – Каммингса для бисепарабельных начальных состояний

А.Р. Багров 💿, Е.К. Башкиров 💿

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34

Аннотация - Обоснование. Для работы квантового компьютера должен быть реализован набор универсальных вентилей, например двухкубитный вентиль типа контролируемое отрицание плюс однокубитные вращения. В качестве универсальной альтернативы возможно использование трехкубитных вентилей. В этой связи представляется весьма актуальной задача исследования динамики систем трех кубитов в микроволновых резонаторах, в частности изучение наиболее эффективных схем генерации, управления и контроля перепутанных состояний кубитов. Цель. Исследовать особенности динамики перепутывания пар кубитов для системы, в которой два кубита заперты в одномодовом резонаторе и взаимодействуют с модой теплового поля, а третий кубит находится в свободном состоянии. Методы. Для анализа динамики рассматриваемой системы исследовано решение квантового уравнения Лиувилля для полной матрицы плотности. Найдено точное решение указанного уравнения в случае начальных бисепарабельных состояний кубитов. Точное решение уравнения эволюции использовано для вычисления критерия перепутывания пар кубитов отрицательности. Проведено численное моделирование отрицательности для бисепарабельных состояний кубитов, а также различных значений интенсивности теплового поля резонатора. Результаты. Показано, что для интенсивных тепловых полей резонатора наблюдается эффект мгновенной смерти перепутывания, при этом интервалы времени между смертью и возрождением перепутывания кубитов существенно зависят от выбора их начального бисепарабельного состояния. Найдено, что для одного из бисепарабельных состояний перепутывание кубитов, запертых в резонаторе, не возникает ни при каких интенсивностях поля резонатора. Заключение. Установлено, что особенности динамики перепутывания кубитов, в частности интервалы времени между смертью и рождением перепутывания кубитов, определяются выбором начального бисепарабельного состояния кубитов, а также значениями интенсивности поля резонатора. Полученные результаты могут быть использованы для эффективного контроля и управления степенью перепутывания кубитов в трехкубитных системах в микроволновых резонаторах.

Ключевые слова – кубиты; резонатор; квантовое тепловое поле; бисепарабельные состояния; перепутывание; отрицательность; мгновенная смерть перепутывания.

Введение

Многокубитные перепутанные состояния ключевой ресурс для многих квантовых информационных задач [1-4]. В настоящее время известны различные типы и классы перепутанных состояний [5-7]. К наиболее известным перепутанным состояниям относятся белловские перепутанные состояния, бисепарабельные перепутанные состояния, истинно перепутанные состояния Гринбергера - Хорна - Цайлингера (GHZ-состояния), истинно перепутанные состояния Вернера (W-состояния) и др. Для каждого из указанных состояний предложены многочисленные способы применения в области физики квантовых вычислений, в частности для коррекции ошибок, квантовых коммуникаций, квантовой криптографии, квантовой метрологии и др. [8-11]. В последнее время появилось множество экспериментальных работ, в которых показана возможность генерации многокубитных перепутанных состояний для кубитов различной физической природы [1-4]. В настоящее время предложен ряд количественных критериев перепутывания двухкубитных систем: отрицательность и ее расширения, согласованность, G-согласованность, геометрическая мера перепутывания и др. [5-7; 12-16]. Однако для многокубитных квантовых систем ситуация становится более сложной, поскольку для таких систем существует несколько различных классов перепутанных состояний [17-19]. Трудности теоретического описания перепутанных состояний существенно возрастают с увеличением числа кубитов в системе. Поэтому в настоящее время особый интерес вызывает изучение динамики перепутывания трехкубитных систем. Для трехкубитных систем существуют три типа чистых перепутанных состояний: сепарабельные или полностью разделимые, бисепарабельные и истинно перепутанные состояния. Мы имеем дело с сепарабельным состоянием, если трехкубитный вектор состояния

🖀 bashkirov.ek@ssau.ru (Башкиров Евгений Константинович)

системы является тензорным произведением трех однокубитных векторов состояния. Если трехкубитное состояние сепарабельное по отношению к двум подсистемам, одна из которых состоит из двух перепутанных кубитов, а вторая - из независимого кубита, то состояние называется бисепарабельным. Состояния, которые не являются ни сепарабельными, ни бисепарабельными, называются истинно перепутанными. Для трехкубитных систем существуют два типа истинно перепутанных состояний, которые представляют собой так называемые состояния GHZ- и W-типа. Для трехкубитных смешанных состояний также существуют сепарабельные, бисепарабельные или истинно запутанные состояния. Если тип чистого состояния многокубитной системы определяется свойствами вектора состояния, то для смешанных состояний аналогичные свойства должны выполняться для выпуклой суммы чистых состояний. Перепутанные состояния трехкубитных систем можно использовать для квантовой обработки информации, детерминированной телепортации, плотного кодирования и т. д. Трехкубитные перепутанные состояния различных типов в настоящее время экспериментально реализованы для различных типов кубитов, в частности для ионов в магнитных ловушках и сверхпроводящих цепях [8; 9]. В работе [20] было предсказано, что перепутывание пары кубитов, взаимодействующих с полем резонатора, может полностью исчезнуть за времена, значительно меньшие времени декогеренции. Это явление получило название внезапной смерти запутанности. Позднее этот эффект для двухкубитной системы был обнаружен экспериментально [21]. Для трехкубитной системы эффект был впервые предсказан в [22]. В настоящее время изучению данного эффекта уделяется особое внимание, поскольку указанный эффект оказывает существенное влияние на динамику систем кубитов, используемых в устройствах квантовой обработки информации (см. ссылки в [23]). В ряде недавних работ эффект мгновенной смерти перепутывания рассматривался для различных систем кубитов, взаимодействующих с тепловыми шумами резонаторов [12-16]. Недавно в работе [24] мы исследовали динамику перепутывания кубитов для трехкубитной модели, в которой два кубита заперты в резонаторе и взаимодействуют с модой теплового поля этого резонатора, а третий кубит находится в свободном состоянии. В частности, нами исследовались особенности проявления эффекта мгновенной смерти и рождения перепутывания кубитов в такой модели. Однако в указанной работе мы ограничились рассмотрением динамики модели для начального истинно перепутанного состояния кубитов W-типа. Представляет значительный интерес расширить данное исследование, включив в рассмотрение возможные начальные бисепарабельные состояния кубитов.

В настоящей работе нами найдена точная динамика трехкубитной модели, состоящей из свободного кубита и пары кубитов, резонансно взаимодействующих с модой поля идеального резонатора. Рассмотрение проведено для начальных бисепарабельных состояний кубитов и теплового шума резонатора. Точное решение использовано для расчета параметра перепутывания пар кубитов. Проведен анализ особенностей проявления эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов в рассматриваемой модели.

1. Модель и точное решение квантового уравнения Лиувилля

Рассмотрим модель, которая состоит из трех одинаковых кубитов Q_1 , Q_2 и Q_3 . Пусть два кубита Q_2 и Q_3 находятся внутри резонатора и резонансно взаимодействуют с его квантованным электромагнитным полем, а первый кубит Q_1 может свободно перемещаться вне резонатора. Гамильтониан взаимодействия такой системы в стандартных приближениях имеет вид

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar \gamma \sum_{i=2}^{3} \left(\hat{\sigma}_i^+ \hat{a} + \hat{\sigma}_i^- \hat{a}^+ \right). \tag{1}$$

где $\hat{\sigma}_i^{\pm}$ – повышающий и понижающий операторы в *i*-м кубите; \hat{a} и \hat{a}^{+} – операторы уничтожения и рождения фотонов в моде резонатора; γ – константа кубит-фотонной связи.

В качестве начальных состояний кубитов выберем бисепарабельные состояния:

$$|\psi_1(0)\rangle = \cos\alpha |+,-,-\rangle + \sin\alpha |-,+,-\rangle, \qquad (2)$$

$$|\psi_{2}(0)\rangle = \cos\alpha |+,-,+\rangle + \sin\alpha |-,+,+\rangle.$$
(3)

В качестве начального состояния поля резонатора определим тепловое состояние с матрицей плотности вида

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n \mid n > < n \mid.$$
(4)

Здесь p_n^n – весовые коэффициенты:

$$p_n = \frac{\overline{n}^n}{\left(1 + \overline{n}\right)^{n+1}},$$

где \overline{n} – среднее число тепловых фотонов, которое задается следующей формулой:

$$\overline{n} = \left(\exp\left[\hbar \omega_{cav} / k_B T \right] - 1 \right)^{-1}.$$

Здесь k_B – постоянная Больцмана; T – температура резонатора; ω_{cav} – частота резонатора.

Найдем решение квантового уравнения Лиувилля для начальных состояний кубитов (2) и (3) и теплового состояния поля резонатора. Для каждого начального состояния кубитов мы вначале вычислим временную волновую функцию для фоковского начального состояния поля |n>, где n=0,1,2...,а затем обобщим полученное решение на случай теплового поля. Для чистых начальных состояний кубитов и чистого фоковского состояния поля рассматриваемая система в каждый момент времени также будет находиться в чистом состоянии. Поэтому состояние системы в произвольный момент времени t можно будет задать волновой функцией $|\psi_n(t)>$. Временная волновая функция «три кубита + мода поля» подчиняется уравнению Шредингера, которое в картине взаимодействия может быть записано как:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_n(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_{int} |\psi_n(t)\rangle.$$
(5)

Заметим, что решение уравнения Шредингера (5) для каждого из начальных состояний кубитов необходимо искать независимо для различных чисел фотонов в моде.

Рассмотрим начальное бисепарабельное состояние кубитов (2). В рассматриваемом случае решение уравнения (5) для числа фотонов в моде n = 0 можно определить как

$$\begin{split} |\psi_{n=0}(t) &>= \cos \alpha |+, -, -, 0\rangle + \\ + y_1(t) |-, +, -, 0\rangle + y_2(t) |-, -, +, 0\rangle + \\ + y_3(t) |-, -, -, 1\rangle, \\ \text{гдe} \end{split}$$
(6)

$$y_{1}(t) = \cos^{2}\left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}}\right)\sin\alpha,$$

$$y_{2}(t) = -\sin^{2}\left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}}\right)\sin\alpha,$$

$$y_{3}(t) = -\frac{i\sin(\sqrt{2}\gamma t)}{\sqrt{2}}\sin\alpha.$$
(7)

Для числа фотонов в моде n = 1 соответствующее решение принимает вид

$$|\psi_{n=1}(t)\rangle = x_{1}^{1}(t) |1, 1, 0, 0\rangle + x_{2}^{1}(t) |1, 0, 1, 0\rangle +$$

$$+ x_{3}^{1}(t) |1, 0, 0, 1\rangle + z_{1}^{1}(t) |0, 1, 1, 0\rangle +$$

$$+ z_{2}^{1}(t) |0, 1, 0, 1\rangle + z_{3}^{1}(t) |0, 0, 1, 1\rangle +$$

$$(8)$$

$$+ z_4^1(t) | 0, 0, 0, 2\rangle,$$

где

$$x_{1}^{1}(t) = -\frac{i\cos\alpha\sin(\sqrt{2\gamma}t)}{\sqrt{2}}, \qquad (9)$$

$$x_{3}^{1}(t) = \cos\alpha\cos(\sqrt{2\gamma}t), \quad x_{2}^{1}(t) = -\frac{i\cos\alpha\sin(\sqrt{2\gamma}t)}{\sqrt{2}}, \qquad (1)$$

$$z_{1}^{1}(t) = -\frac{i\sin(\sqrt{6\gamma}t)\sin\alpha}{\sqrt{6}}, \quad z_{2}^{1}(t) = \sin\alpha\cos^{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}\gamma}t\right), \qquad (2)$$

$$z_{3}^{1}(t) = -\sin\alpha\sin^{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}\gamma}t\right), \qquad (3)$$

$$z_{4}^{1}(t) = -\frac{i\sin(\sqrt{6\gamma}t)\sin\alpha}{\sqrt{3}}.$$

Наконец, для $n \ge 2$ имеем:

$$|\psi_{n\geq 2}(n,t)\rangle = X_{1}^{1}(n,t) |1,1,1,n-2\rangle +$$

$$+ X_{2}^{1}(n,t) |1,1,0,n-1\rangle + X_{3}^{1}(n,t) |1,0,1,n-1\rangle +$$

$$+ X_{4}^{1}(n,t) |1,0,0,n\rangle + Y_{1}^{1}(n,t) |0,1,1,n-1\rangle +$$

$$+ Y_{2}^{1}(n,t) |0,1,0,n\rangle + Y_{3}^{1}(n,t) |0,0,1,n\rangle +$$

$$+ Y_{4}^{1}(n,t) |0,0,0,n+1\rangle,$$

$$H10$$

где

$$X_{1}^{1}(n,t) = \frac{2\sqrt{n(n-1)}\cos\alpha\sin^{2}\left(\gamma t\sqrt{n-\frac{1}{2}}\right)}{1-2n}, \quad (11)$$

$$X_{2}^{1}(n,t) = -\frac{i\sqrt{n}\cos\alpha\sin(\gamma t\sqrt{4n-2})}{\sqrt{4n-2}}, \quad X_{3}^{1}(n,t) = -\frac{i\sqrt{n}\cos\alpha\sin(\gamma t\sqrt{4n-2})}{\sqrt{4n-2}}, \quad X_{4}^{1}(n,t) = \frac{\left(n-1+n\cos(\gamma t\sqrt{4n-2})\right)\cos\alpha}{2n-1}, \quad X_{1}^{1}(n,t) = -\frac{i\sqrt{n}\sin\alpha\sin(\gamma t\sqrt{4n+2})}{\sqrt{4n+2}}, \quad Y_{2}^{1}(n,t) = \sin\alpha\cos^{2}\left(\gamma t\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right), \quad Y_{3}^{1}(n,t) = -\sin\alpha\sin^{2}\left(\gamma t\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right), \quad Y_{4}^{1}(n,t) = -\frac{i\sqrt{n+1}\sin\alpha\sin(\gamma t\sqrt{4n+2})}{\sqrt{4n+2}}.$$

В случае сепарабельного начального состояния кубитов (3) соответствующее решение уравнения (5) есть:

- для
$$n = 0$$

 $|\Psi_n \rangle_0(t) = x_1^2(t) |1, 1, 0, 0\rangle + x_2^2(t) |1, 0, 1, 0\rangle + (12)$

$$+ x_{3}^{2}(t) | 1,0,0,1\rangle + z_{1}^{2}(t) | 0,1,1,0\rangle + z_{2}^{2}(t) | 0,1,0,1\rangle + z_{3}^{2}(t) | 0,0,1,1\rangle + z_{4}^{2}(t) | 0,0,0,2\rangle,$$

где

$$x_1^2(t) = -\cos\alpha \sin^2\left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}}\right),\tag{13}$$

$$\begin{aligned} x_{2}^{2}(t) &= \cos\alpha\cos^{2}\left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}}\right), \ x_{3}^{2}(t) = -\frac{i\cos\alpha\sin(\sqrt{2}\gamma t)}{\sqrt{2}}, \\ z_{1}^{2}(t) &= \frac{1}{3}\left(2 + \cos\left(\sqrt{6}\gamma t\right)\right)\sin\alpha, \\ z_{2}^{2}(t) &= -\frac{i\sin\alpha\sin(\sqrt{6}\gamma t)}{\sqrt{6}}, \\ z_{3}^{2}(t) &= -\frac{i\sin\alpha\sin(\sqrt{6}\gamma t)}{\sqrt{6}}, \\ z_{4}^{2}(t) &= \frac{1}{3}\sqrt{2}\sin\alpha\left(\cos\left(\sqrt{6}\gamma t\right) - 1\right); \\ &- & \text{для } n \ge 1 \\ |\psi_{n\ge1}(n,t)\rangle &= X_{1}^{2}(n,t)|+,+,+,n-1\rangle + \\ &+ X_{2}^{2}(n,t)|+,+,-,n\rangle + X_{3}^{2}(n,t)|+,-,+,n\rangle + \\ &+ X_{4}^{2}(n,t)|+,-,-,n+1\rangle + Y_{1}^{2}(n,t)|-,+,+,n+1\rangle + \\ &+ Y_{2}^{2}(n,t)|-,+,-,n+1\rangle + Y_{2}^{2}(n,t)|-,-,+,n+1\rangle + \end{aligned}$$

$$+Y_2^2(n,t)|-,+,-,n+1\rangle+Y_3^2(n,t)|-,-,+,$$

+ $Y_4^2(n,t)|-,-,-,n+2\rangle,$ где

$$\begin{aligned} X_1^2(n,t) &= -\frac{i\sqrt{n}\cos\alpha\sin\left(\gamma t\sqrt{4n+2}\right)}{\sqrt{4n+2}}, \end{aligned} \tag{15} \\ X_2^2(n,t) &= -\cos\alpha\sin^2\left(\gamma t\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right), \end{aligned} \\ X_3^2(n,t) &= \cos\alpha\cos^2\left(\gamma t\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right), \end{aligned} \\ X_4^2(n,t) &= -\frac{i\sqrt{n+1}\cos\alpha\sin\left(\gamma t\sqrt{4n+2}\right)}{\sqrt{4n+2}}, \end{aligned} \\ Y_1^2(n,t) &= \frac{\sin\alpha\left(n+2+(n+1)\cos\left(\gamma t\sqrt{4n+6}\right)\right)}{2n+3}, \end{aligned}$$

$$Y_{2}^{2}(n,t) = -\frac{i\sqrt{n+1}\sin\alpha\sin(\gamma t\sqrt{4n+6})}{\sqrt{4n+6}},$$

$$Y_{3}^{2}(n,t) = -\frac{i\sqrt{n+1}\sin\alpha\sin(\gamma t\sqrt{4n+6})}{\sqrt{4n+6}},$$

$$Y_{4}^{2}(n,t) = -\frac{2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\sin\alpha\sin^{2}\left(\gamma t\sqrt{n+\frac{3}{2}}\right)}{2n+3}$$

Теперь, зная явный вид волновых функций благодаря выражениям (6)–(15), можно построить матрицу плотности полной системы «три кубита + мода поля» для теплового состояния поля резонатора:

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)|.$$
(16)

Матрица плотности (13) для начального состояния (2) может быть переписана в виде

$$\begin{split} \rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}\left(t\right) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \mid \psi_{n \geq 2}\left(n, t\right) \rangle \langle \psi_{n \geq 2}\left(n, t\right) \mid + \quad (17) \\ &+ p_1 \mid \psi_{n=1}\left(t\right) \rangle \langle \psi_{n=1}\left(t\right) \mid + p_0 \mid \psi_{n=0}\left(t\right) \rangle \langle \psi_{n=0}\left(t\right) \mid, \\ &\text{а для состояния (3) как:} \end{split}$$

$$\begin{split} \rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}\left(t\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mid \psi_{n \ge 1}\left(n, t\right) \rangle \langle \psi_{n \ge 1}\left(n, t\right) \mid + \qquad (18) \\ &+ p_0 \mid \psi_{n=0}\left(t\right) \rangle \langle \psi_{n=0}\left(t\right) \mid . \end{split}$$

2. Вычисление отрицательности

Для вычисления любых известных критериев перепутывания трехкубитной подсистемы необходимо вычислить редуцированную матрицу плотности трех кубитов следующим образом:

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3} = Tr_F \rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}.$$
(19)

При исследовании динамики перепутывания кубитов для бисепарабельных начальных состояний (2) и (3) наиболее информативным критерием перепутывания является отрицательность пар кубитов [25; 26]. Для нахождения указанного параметра необходимо вычислить редуцированную матрицу плотности соответствующей пары кубитов:

$$\rho_{Q_i Q_j} = Tr_k \rho_{Q_1 Q_2 Q_3} (i, j, k = 1, 2, 3; \quad i \neq j \neq k).$$

Определим критерий отрицательности стандартным образом:

$$\varepsilon_{ij} = -2\sum_{l} \left(v_{ij} \right)_{l}^{-}, \tag{20}$$

где v_{ij} – отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы

1

плотности $\rho_{Q_i Q_j}^T(t)$, которая имеет для состояний (2)-(3) следующий вид:

$$\rho_{Q_{i}Q_{j}}^{T}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{Q_{i}Q_{j}} & 0 & 0 & \left(\rho_{23}^{Q_{i}Q_{j}} \right)^{*} \\ 0 & \rho_{22}^{Q_{i}Q_{j}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33}^{Q_{i}Q_{j}} & 0 \\ \rho_{23}^{Q_{i}Q_{j}} & 0 & 0 & \rho_{44}^{Q_{i}Q_{j}} \end{pmatrix}.$$
 (21)

Для состояния (2) и кубитов Q_1 и Q_2 элементы матрицы плотности (21) выражаются следующим образом:

$$\begin{split} \rho_{11}^{Q_1Q_2}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_1^1(n,t) \right|^2 + \left| X_2^1(n,t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left| x_1^1(t) \right|^2, \\ \rho_{22}^{Q_1Q_2}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_3^1(n,t) \right|^2 + \left| X_4^1(n,t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| x_2^1(t) \right|^2 + \left| x_3^1(t) \right|^2 \right) + p_0 \cos^2 \alpha, \\ \rho_{33}^{Q_1Q_2}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| Y_1^1(n,t) \right|^2 + \left| Y_2^1(n,t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| z_1^1(t) \right|^2 + \left| z_2^1(t) \right|^2 \right) + p_0 \left| y_1(t) \right|^2, \\ \rho_{44}^{Q_1Q_2}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| Y_3^1(n,t) \right|^2 + \left| Y_4^1(n,t) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| z_3^1(t) \right|^2 + \left| z_4^1(t) \right|^2 \right) + p_0 \left(\left| y_2(t) \right|^2 + \left| y_3(t) \right|^2 \right), \\ \rho_{23}^{Q_1Q_2}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[X_4^1(n,t) Y_2^{1*}(n,t) + \\ &+ X_3^1(n,t) Y_1^{1*}(n,t) \right] + p_1 \left(x_2^1(t) z_1^{1*}(t) + x_3^1(t) z_2^{1*}(t) \right) + \\ &+ p_0 \cos \alpha y_1^*(t). \end{split}$$

Для состояния (2) и кубитов Q_1 и Q_3 элементы матрицы плотности (18) есть:

$$\begin{split} \rho_{11}^{Q_1 Q_3} \left(t \right) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_1^1 \left(n, t \right) \right|^2 + \left| X_3^1 \left(n, t \right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left| x_2^1 \left(t \right) \right|^2, \\ \rho_{22}^{Q_1 Q_3} \left(t \right) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_2^1 \left(n, t \right) \right|^2 + \left| X_4^1 \left(n, t \right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| x_1^1 \left(t \right) \right|^2 + \left| x_3^1 \left(t \right) \right|^2 \right) + p_0 \cos^2 \alpha, \end{split}$$

$$\begin{split} \rho_{33}^{Q_{1}Q_{3}}\left(t\right) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_{n} \bigg[\left|Y_{1}^{1}\left(n,t\right)\right|^{2} + \left|Y_{3}^{1}\left(n,t\right)\right|^{2} \bigg] + \\ &+ p_{1} \bigg(\left|z_{1}^{1}\left(t\right)\right|^{2} + \left|z_{3}^{1}\left(t\right)\right|^{2} \bigg) + p_{0} \left|y_{2}\left(t\right)\right|^{2}, \\ \rho_{44}^{Q_{1}Q_{3}}\left(t\right) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_{n} \bigg[\left|Y_{2}^{1}\left(n,t\right)\right|^{2} + \left|Y_{4}^{1}\left(n,t\right)\right|^{2} \bigg] + \\ &+ p_{1} \bigg(\left|z_{2}^{1}\left(t\right)\right|^{2} + \left|z_{4}^{1}\left(t\right)\right|^{2} \bigg) + p_{0} \bigg(\left|y_{1}\left(t\right)\right|^{2} + \left|y_{3}\left(t\right)\right|^{2} \bigg), \\ \rho_{23}^{Q_{1}Q_{3}}\left(t\right) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_{n} \bigg[X_{2}^{1}\left(n,t\right)Y_{1}^{1*}\left(n,t\right) + \\ &+ X_{4}^{1}\left(n,t\right)Y_{3}^{1*}\left(n,t\right) \bigg] + p_{1} \bigg(x_{1}^{1}\left(t\right)z_{1}^{1*}\left(t\right) + x_{3}^{1}\left(t\right)z_{3}^{1*}\left(t\right) \bigg) + \\ &+ p_{0}\cos\alpha y_{2}^{*}\left(t\right). \end{split}$$

Для состояния (2) и кубитов Q_2 и Q_3 элементы матрицы плотности (21) выражаются следующим образом:

$$\begin{split} \rho_{11}^{Q_2 Q_3} \left(t \right) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_1^1 \left(n, t \right) \right|^2 + \left| Y_1^1 \left(n, t \right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left| z_1^1 \left(t \right) \right|^2 , \\ \rho_{22}^{Q_2 Q_3} \left(t \right) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_2^1 \left(n, t \right) \right|^2 + \left| Y_2^1 \left(n, t \right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| x_1^1 \left(t \right) \right|^2 + \left| z_2^1 \left(t \right) \right|^2 \right) + p_0 \left| y_1 \left(t \right) \right|^2 , \\ \rho_{33}^{Q_2 Q_3} \left(t \right) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_3^1 \left(n, t \right) \right|^2 + \left| Y_3^1 \left(n, t \right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| x_2^1 \left(t \right) \right|^2 + \left| z_3^1 \left(t \right) \right|^2 \right) + p_0 \left| y_2 \left(t \right) \right|^2 , \\ \rho_{44}^{Q_2 Q_3} \left(t \right) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[\left| X_4^1 \left(n, t \right) \right|^2 + \left| Y_4^1 \left(n, t \right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_1 \left(\left| x_3^1 \left(t \right) \right|^2 + \left| z_4^1 \left(t \right) \right|^2 \right) + p_0 \left(\cos^2 \alpha + \left| y_3 \left(t \right) \right|^2 \right) , \\ \rho_{23}^{Q_2 Q_3} \left(t \right) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n \left[X_2^1 \left(n, t \right) X_3^{1*} \left(n, t \right) + \\ &+ Y_2^1 \left(n, t \right) Y_3^{1*} \left(n, t \right) \right] + p_1 \left(x_1^1 \left(t \right) x_2^{1*} \left(t \right) + z_2^1 \left(t \right) z_3^{1*} \left(t \right) \right) + \\ &+ p_0 y_1 \left(t \right) y_2^{*} \left(t \right) . \end{split}$$

Для состояния (3) и кубитов Q_1 и Q_2 элементы матрицы плотности (21) определяются как

$$\rho_{11}^{Q_1 Q_2}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_1^2(n,t) \right|^2 + \left| X_2^2(n,t) \right|^2 \right] +$$

Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика перепутывания кубитов в трехкубитной модели Джейнса – Каммингса ... Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Dynamics of qubit entanglement in three-qubit Jaynes-Cummings model ...

$$\begin{split} &+ p_{0} \left| x_{1}^{2}(t) \right|^{2}, \\ &\rho_{22}^{Q_{1}Q_{2}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n} \left[\left| X_{3}^{2}(n,t) \right|^{2} + \left| X_{4}^{2}(n,t) \right|^{2} \right] + \\ &+ p_{0} \left(\left| x_{2}^{2}(t) \right|^{2} + \left| x_{3}^{2}(t) \right|^{2} \right), \\ &\rho_{33}^{Q_{1}Q_{2}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n} \left[\left| Y_{1}^{2}(n,t) \right|^{2} + \left| Y_{2}^{2}(n,t) \right|^{2} \right] + \\ &+ p_{0} \left(\left| z_{1}^{2}(t) \right|^{2} + \left| z_{2}^{2}(t) \right|^{2} \right), \\ &\rho_{44}^{Q_{1}Q_{2}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n} \left[\left| Y_{3}^{2}(n,t) \right|^{2} + \left| Y_{4}^{2}(n,t) \right|^{2} \right] + \\ &+ p_{0} \left(\left| z_{3}^{2}(t) \right|^{2} + \left| z_{4}^{2}(t) \right|^{2} \right), \\ &\rho_{23}^{Q_{1}Q_{2}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n} \left[X_{4}^{2}(n,t) Y_{2}^{2^{*}}(n,t) + \\ &+ X_{3}^{2}(n,t) Y_{1}^{2^{*}}(n,t) \right] + p_{0} \left(x_{2}^{2}(t) z_{1}^{2^{*}}(t) + x_{3}^{2}(t) z_{2}^{2^{*}}(t) \right) \end{split}$$

Для состояния (3) и кубитов Q_1 и Q_3 элементы матрицы плотности (21) имеют вид

$$\begin{split} \rho_{11}^{Q_1 Q_3} \left(t \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_1^2 \left(n, t \right) \right|^2 + \left| X_3^2 \left(n, t \right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_0 \left| x_2^2 \left(t \right) \right|^2 , \\ \rho_{22}^{Q_1 Q_3} \left(t \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_2^2 \left(n, t \right) \right|^2 + \left| X_4^2 \left(n, t \right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_0 \left(\left| x_1^2 \left(t \right) \right|^2 + \left| x_3^2 \left(t \right) \right|^2 \right) , \\ \rho_{33}^{Q_1 Q_3} \left(t \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| Y_1^2 \left(n, t \right) \right|^2 + \left| Y_3^2 \left(n, t \right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_0 \left(\left| z_1^2 \left(t \right) \right|^2 + \left| z_3^2 \left(t \right) \right|^2 \right) , \\ \rho_{44}^{Q_1 Q_3} \left(t \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| Y_2^2 \left(n, t \right) \right|^2 + \left| Y_4^2 \left(n, t \right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_0 \left(\left| z_2^2 \left(t \right) \right|^2 + \left| z_4^2 \left(t \right) \right|^2 \right) , \\ \rho_{23}^{Q_1 Q_3} \left(t \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[X_2^2 \left(n, t \right) Y_1^{2^*} \left(n, t \right) + \\ &+ X_4^2 \left(n, t \right) Y_3^{2^*} \left(n, t \right) \right] + p_0 \left(x_1^2 \left(t \right) z_1^{2^*} \left(t \right) + x_3^2 \left(t \right) z_3^{2^*} \left(t \right)). \end{split}$$

Для состояния (3) и кубитов Q_2 и Q_3 элементы матрицы плотности (21), соответственно, есть:

$$\begin{split} \rho_{11}^{Q_2 Q_3} \left(t\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_1^2 \left(n, t\right) \right|^2 + \left| Y_1^2 \left(n, t\right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_0 \left| z_1^2 \left(t\right) \right|^2, \\ \rho_{22}^{Q_2 Q_3} \left(t\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_2^2 \left(n, t\right) \right|^2 + \left| Y_2^2 \left(n, t\right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_0 \left(\left| x_1^2 \left(t\right) \right|^2 + \left| z_2^2 \left(t\right) \right|^2 \right), \\ \rho_{33}^{Q_2 Q_3} \left(t\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_3^2 \left(n, t\right) \right|^2 + \left| Y_3^2 \left(n, t\right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_0 \left(\left| x_2^2 \left(t\right) \right|^2 + \left| z_3^2 \left(t\right) \right|^2 \right), \\ \rho_{44}^{Q_2 Q_3} \left(t\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\left| X_4^2 \left(n, t\right) \right|^2 + \left| Y_4^2 \left(n, t\right) \right|^2 \right] + \\ &+ p_0 \left(\left| x_3^2 \left(t\right) \right|^2 + \left| z_4^2 \left(t\right) \right|^2 \right), \\ \rho_{23}^{Q_2 Q_3} \left(t\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[X_2^2 \left(n, t\right) X_3^{2^*} \left(n, t\right) + \\ &+ Y_2^2 \left(n, t\right) Y_3^{2^*} \left(n, t\right) \right] + p_0 \left(x_1^2 \left(t\right) x_2^{2^*} \left(t\right) + z_2^2 \left(t\right) z_3^{2^*} \left(t\right) \end{split}$$

Для всех рассматриваемых случаев матрица плотности (21) имеет всего одно собственное значение, которое может быть меньше нуля. В этом случае формула для отрицательности (20) принимает вид

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{\left(\rho_{44}^{Q_i Q_j} - \rho_{11}^{Q_i Q_j}\right)^2 + 4\rho_{23}^{Q_i Q_j} - \rho_{11}^{Q_i Q_j} - \rho_{44}^{Q_i Q_j}}.$$
 (22)

Результаты численных расчетов отрицательности пар кубитов (22) для начальных бисепарабельных состояний (2) и (3) представлены на рис. 1–4.

3. Результаты и обсуждение

На рис. 1, *а* показана зависимость параметра перепутывания ε_{12} для кубитов Q_1 и Q_2 от безразмерного времени γt для бисепарабельного начального состояния кубитов (2) с $\alpha = \pi/4$ и различных значений среднего числа фотонов в моде резонатора. Для сравнения, на рис 1, *б* представлены аналогичные зависимости для модели, состоящей из трех кубитов, запертых в одномодовом резонаторе и резонансно взаимодействующих с выделенной модой поля (соответствующие формулы для отрицательностей представлены в нашей предыдущей работе [27]). При усреднении по состояниям третьего кубита состояния кубитов Q_1 и Q_2 в начальный момент времени максимально



Рис. 1. Графики зависимости критерия отрицательности $\varepsilon_{12}(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального бисепарабельного состояния (2) с изменением среднего числа тепловых фотонов \overline{n} в модели с двумя кубитами в резонаторе (*a*) и с тремя кубитами в резонаторе (*b*) при $\alpha = \pi/4$. На обоих графиках: $\overline{n} = 0,0001$ (сплошная линия), $\overline{n} = 1$ (пунктирная линия), $\overline{n} = 4$ (точечная линия) Fig. 1. Graphs of the dependence of the negativity criterion $\varepsilon_{12}(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial biseparable state (2) with achange in the average number of thermal photons \overline{n} in the model with two qubits in the resonator (*a*) and with three qubits in the resonator (*b*) at $\alpha = \pi/4$. On both graphs: $\overline{n} = 0,0001$ (solid line), $\overline{n} = 1$ (dashed line), $\overline{n} = 4$ (dotted line)



Рис. 2. Графики зависимости критерия отрицательности $\varepsilon_{13}(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального бисепарабельного состояния (2) с изменением среднего числа тепловых фотонов \overline{n} в модели с двумя кубитами в резонаторе (*a*) и с тремя кубитами в резонаторе (*b*) при $\alpha = \pi/4$. На обоих графиках: $\overline{n} = 0,0001$ (сплошная линия), $\overline{n} = 0,5$ (пунктирная линия), $\overline{n} = 1$ (точечная линия) Fig. 2. Graphs of the dependence of the negativity criterion $\varepsilon_{13}(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial biseparable state (2) with achange in the average number of thermal photons \overline{n} in the model with two qubits in the resonator (*a*) and with three qubits in the resonator (*b*) at $\alpha = \pi/4$. On both charts: $\overline{n} = 0,0001$ (solid line), $\overline{n} = 0,5$ (dashed line), $\overline{n} = 1$ (dotted line)

перепутаны. Этому соответствует начальное значение $\varepsilon_{12} = 1$. Из рисунка хорошо видно, что на некоторых временах перепутывание резко исчезает и остается нулевым в течение конечного времени, прежде чем возродиться. Это означает наличие в системе эффекта мгновенной смерти перепутывания. Из рисунка также видно, что с увеличением среднего числа тепловых фотонов максимальная степень перепутывания кубитов быстро уменьшается. Важно отметить, что эффект мгновенной смерти перепутывания отсутствует в случае малых интенсивностей теплового поля $(\overline{n} \rightarrow 0)$ при любых значениях начального параметра α как в модели с двумя кубитами в резонаторе, так и с тремя. С увеличением числа тепловых фотонов в моде промежутки времени, для которых в системе

отсутствует перепутывание, увеличиваются. Отличие в поведении отрицательности для модели трех кубитов, запертых в резонаторе, сводится к уменьшению периода осцилляций и увеличению времени смерти перепутывания. На рис. 2, а показана зависимость параметра перепутывания ε_{13} для кубитов Q_1 и Q_3 от безразмерного времени уt для бисепарабельного начального состояния кубитов (2) с $\alpha = \pi / 4$ и различных значений теплового поля резонатора. Соответственно, на рис. 2, б показаны аналогичные зависимости для модели с тремя кубитами в резонаторе. В отличие от предыдущего случая, в начальный момент времени пара кубитов Q₁ и Q₃ находится в сепарабельном состоянии, что соответствует начальному значению $\varepsilon_{13} = 0$.



Рис. 3. Графики зависимости критерия отрицательности $\varepsilon_{23}(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального бисепарабельного состояния (2) с изменением среднего числа тепловых фотонов \overline{n} в модели с двумя кубитами в резонаторе (*a*) и с тремя кубитами в резонаторе (*b*) при $\alpha = \pi/4$. На графиках обоих: $\overline{n} = 0,0001$ (сплошная линия), $\overline{n} = 0,1$ (пунктирная линия), $\overline{n} = 0,5$ (точечная линия)

Fig. 3. Graphs of the dependence of the negativity criterion $\varepsilon_{23}(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial biseparable state (2) with a change in the average number of thermal photons \overline{n} in the model with two qubits in the resonator (*a*) and with three qubits in the resonator (*b*) at $\alpha = \pi/4$. On both graphs: $\overline{n} = 0,0001$ (solid line), $\overline{n} = 0,1$ (dashed line), $\overline{n} = 0,5$ (dotted line)



Рис. 4. Графики зависимости критерия отрицательности $\varepsilon_{12}(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального бисепарабельного состояния (3) с изменением среднего числа тепловых фотонов \overline{n} в модели с двумя кубитами в резонаторе (*a*) и с тремя кубитами в резонаторе (*b*) при $\alpha = \pi/4$. На обоих графиках: $\overline{n} = 0,0001$ (сплошная линия), $\overline{n} = 1$ (пунктирная линия), $\overline{n} = 4$ (точечная линия) Fig. 4. Graphs of the dependence of the negativity criterion $\varepsilon_{12}(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial biseparable state (3) with achange in the average number of thermal photons \overline{n} in the model with two qubits in the resonator (*a*) and with three qubits in the resonator (*b*) at $\alpha = \pi/4$. On both graphs: $\overline{n} = 0,0001$ (solid line), $\overline{n} = 1$ (dashed line), $\overline{n} = 4$ (dotted line)



Рис. 5. Графики зависимости критерия отрицательности $\varepsilon_{13}(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального бисепарабельного состояния (3) с изменением среднего числа тепловых фотонов \overline{n} в модели с двумя кубитами в резонаторе (*a*) и с тремя кубитами в резонаторе (*b*) при $\alpha = \pi/4$. На обоих графиках: $\overline{n} = 0,0001$ (сплошная линия), $\overline{n} = 0,5$ (пунктирная линия), $\overline{n} = 1$ (точечная линия) Fig. 5. Graphs of the dependence of the negativity criterion $\varepsilon_{13}(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial biseparable state (3) with a change in the average number of thermal photons \overline{n} in the model with two qubits in the resonator (*a*) and with three qubits in the resonator (*b*) at $\alpha = \pi/4$. On both graphs: $\overline{n} = 0,0001$ (solid line), $\overline{n} = 0,5$ (dashed line), $\overline{n} = 1$ (dotted line)

Максимальная степень перепутывания кубитов для модели с тремя кубитами в общем резонаторе существенно меньше соответствующей величины для модели с двумя кубитами в резонаторе. Остальные выводы, касающиеся поведения отрицательности пары кубитов Q₁ и Q₂, для обеих рассмотренных моделей оказываются справедливыми и для кубитов Q₁ и Q₃. На рис. 3, а показана зависимость параметра перепутывания ε_{23} для кубитов Q_2 и Q_3 от безразмерного времени үt для бисепарабельного начального состояния кубитов (2) с $\alpha = \pi / 4$ и различных значений среднего числа фотонов в моде резонатора. Для сравнения, на рис. 3, б представлены аналогичные зависимости для модели, состоящей из трех кубитов в общем резонаторе. Аналогично предыдущему случаю в начальный момент времени пара кубитов Q_1 и Q_3 находится в сепарабельном состоянии. На рис. 3 хорошо видно, что максимальная степень перепутывания кубитов Q₂ и Q₃ для рассматриваемой модели на порядок меньше аналогичной величины для модели с тремя кубитами в резонаторе. Интересной особенностью динамики перепутывания кубитов Q_2 и Q_3 выбранного бисепарабельного состояния (2) является отсутствие какого-либо перепутывания даже при относительно небольших значениях интенсивности теплового поля, в то время как в модели с тремя кубитами в резонаторе с той же интенсивностью теплового поля перепутывание для данной пары наблюдается.

На рис. 4, а построена зависимость параметра перепутывания ε_{12} для кубитов Q_1 и Q_2 от безразмерного времени уt для бисепарабельного начального состояния кубитов (3) с $\alpha = \pi / 4$ и различных значений среднего числа фотонов в моде резонатора. Для сравнения, на рис. 4, б представлены аналогичные зависимости для модели, состоящей из трех кубитов в общем резонаторе. При усреднении по состояниям третьего кубита, как и в случае начального состояния (2), кубиты Q₁ и Q₂ в начальный момент времени максимально перепутаны. Сравнение рис. 1 и 4 выявляет, что для начального состояния кубитов (3) существенно возрастает длительность временных интервалов, на которых состояния кубитов распутаны, а также присутствует эффект мгновенной смерти перепутывания даже в случае малых интенсивностей теплового поля. На рис. 5, а отражена зависимость параметра перепутывания ε_{13} для кубитов Q_1 и Q_3 от безразмерного времени γt для бисепарабельного начального состояния кубитов (3)

с $\alpha = \pi/4$ и различных значений интенсивностей поля резонатора. Видно, что в случае малых интенсивностей теплового поля присутствует эффект мгновенной смерти перепутывания в отличие от аналогичной пары кубитов для начального состояния (2). На рис. 5, б приведены аналогичные зависимости для модели с тремя кубитами в резонаторе. Для рассматриваемых кубитов Q₁ и Q₃ начальное состояние является сепарабельным, для которого є₁₃ = 0. Для состояния (3) максимальная степень перепутывания кубитов для модели с тремя кубитами в общем резонаторе также существенно меньше соответствующей величины для модели с двумя кубитами в резонаторе. Для кубитов Q₁ и Q₃ существенно возрастают промежутки времени, для которых перепутывание кубитов Q₁ и Q₃ отсутствует. Наиболее интересными представляются расчеты отрицательности пары кубитов Q₂ и Q₃ для начального бисепарабельного состояния (3). Указанные расчеты указывают на отсутствие в рассматриваемой модели перепутывания кубитов в процессе их эволюции при любых интенсивностях теплового поля. В то время как для модели с тремя кубитами в общем резонаторе поведение отрицательности тех же кубитов Q₂ и Q3 полностью аналогично поведению отрицательности кубитов Q₁ и Q₃.

15

Заключение

В настоящей работе мы исследовали динамику системы трех идентичных кубитов, два из которых заперты в идеальном резонаторе и резонансно взаимодействуют с модой электромагнитного поля этого резонатора, а третий кубит находится в свободном состоянии. Получено точное решение квантового уравнения Лиувилля рассматриваемой модели для начальных бисепарабельных состояний кубитов и теплового поля резонатора. На основе точного решения рассчитаны отрицательности всех пар кубитов. Расчеты проведены для двух типов бисепарабельных состояний и тепловых состояний электромагнитного поля резонатора для различных средних чисел фотонов. Проведено также сравнение динамики перепутывания кубитов для рассматриваемой модели и модели, в которой три кубита заперты в общем резонаторе. Показано, что тепловое поле резонатора не разрушает полностью начальное перепутывание пар кубитов даже для относительно высоких интенсивностей теплового шума резонатора. Для сепарабельных состояний кубитов взаимодействие с тепловым полем индуцирует их перепутывание в

процессе эволюции. Отмечено, что для больших интенсивностей теплового поля резонатора имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания. Указанный эффект отсутствует только для начального бисепарабельного состояния (2) для всех пар кубитов в случае малых интенсивностей теплового поля при любых значениях начального параметра α . Расчеты также показали, что продолжительность промежутков времени между мгновенной смертью и возобновлением перепутывания кубитов существенно зависит от выбора начального бисепарабельного состояния кубитов.

Список литературы

- 1. Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation // Reviews of Modern Physics. 2014. Vol. 88. P. 153–186. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153
- Superconducting qubits: Current state of play / M. Kjaergaard [et al.] // Annual Reviews of Condensed Matter Physics. 2020. Vol. 11. P. 369–395. DOI: https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605
- Superconducting quantum computing: A review / H.-L. Huang [et al.] // Science China Information Sciences. 2020. Vol. 63. P. 180501. DOI: https://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9
- Shi J. Entanglement research for the coupled superconducting phase qubit and a two-level system // Advances in Condensed Matter Physics. 2020. Vol. 2020. P. 3838106. DOI: https://doi.org/10.1155/2020/3838106
- Quantum entanglement / R. Horodecki [et al.] // Reviews of Modern Physics. 2009. Vol. 81, no. 2. P. 865–942. DOI: https://doi.org/10.1103/ RevModPhys.81.865
- Bruss D., Leuchs G., Quantum Information: From Foundations to Quantum Technology Applications. Cambridge: Wiley-VCH, 2019. 892 p.
- Luo M.-X., Fe S.-M. Genuinely multipartite entanglement vias shallow quantum circuits // Advanced Quantum Technologies. 2023. Vol. 6, no. 2. P. 2200089. DOI: https://doi.org/10.1002/qute.202200089
- Generation of three-qubit entangled states using superconducting phase qubits / M. Neeley [et al.] // Nature. 2010. Vol. 467, no. 7315. P. 570–573. DOI: https://doi.org/10.1038/nature09418
- 9. Dissipative preparation of W states in trapped ion systems / D.C. Cole [et al.] // New Journal of Physics. 2021. Vol. 23, no. 7. P. 073001. DOI: https://doi.org/10.1088/1367-2630/ac09c8
- 10. Gühne O., Tôth G. Entanglement detection // Physics Reports. 2009. Vol. 474, no. 1-6. P. 1-75. DOI: https://doi.org/10.1016/j. physrep.2009.02.004
- 11. Entanglement certification from theory to experiment / N. Friis [et al.] // Nature Reviews Physics. 2019. Vol. 1. P. 72-87. DOI: https:// doi.org/10.1038/s42254-018-0003-5
- 12. Башкиров Е.К. Тепловое перепутывание в двухатомной модели Тависа Каммингса с учетом диполь-дипольного взаимодействия // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2023. Т. 26, N° 2. С. 9–17. DOI: https://doi. org/10.18469/1810-3189.2023.26.2.9-17
- 13. Башкиров Е.К. Перепутывание двух сверхпроводящих кубитов, индуцированное тепловым шумом резонатора со средой Керра, при наличии начальной атомной когерентности // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т.25, № 1. С. 7–15. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.1.7-15
- 14. Захаров Р.К., Башкиров Е.К. Влияние расстройки и керровской нелинейности на атом-атомное перепутывание в двойной двухфотонной модели Джейнса Каммингса // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2021. Т. 24, № 1. С.9–14. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.1.9-14
- 15. Башкиров Е.К. Перепутывание атомов, индуцированное тепловым шумом при наличии начальной атомной когерентности // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, N^e 3. С. 10–17. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.10-17
- 16. Башкиров Е.К., Гуслянникова М.О. Перепутывание атомов с двухфотонными переходами при наличии динамического штарковского сдвига энергетических уровней // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2019. Т. 22, № 3. С. 36–43. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.3.36-43
- 17. Filippov S.N. Quantum mappings and characterization of entangled quantum states // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 241, no. 2. P. 210-236. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04418-3
- 18. Quantum fidelity measures for mixed states / Y.-C. Liang [et al.] // Reports on Progress in Physics. 2019. Vol. 82, no. 7. P. 076001. DOI: https://doi.org/10.1088/1361-6633/ab1ca4
- 19. Ma M., Li Y., Shang J. Multipartite entanglement measures: A review // arXiv:2309.09459. 2023. P. 1-14. DOI: https://doi.org/10.48550/ arXiv:2309.09459
- 20. Yu T., Eberly J.H. Finite-time disentanglement via spontaneous emission // Physical Review Letters. 2003. Vol. 93, no. 14. P. 140404. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.140404
- Environment-induced sudden death of entanglement / M.P. Almeida [et al.] // Science. 2007. Vol. 316, no. 5824. P. 579–582. DOI: https:// doi.org/10.1126/science.1139892
- 22. Ge M., Zhu L.-F., Qui L. Three-qubit entanglement sudden death // Communications in Theoretical Physics. 2008. Vol. 49, no. 6. P. 1443–1448. DOI: https://doi.org/10.1088/0253-6102/49/6/20
- 23. Xie S., Younis D., Eberly J.H. Evidence for unexpected robustness of multipartite entanglement against sudden death from spontaneous emission // Physical Review Research. 2023. Vol. 5, no. 3. P. L032015. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.5.L032015

- 24. Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика теплового перепутывания пар кубитов в трехкубитной модели Тависа Каммингса // Журнал технической физики. 2024. Т. 94, № 4. (Принято к печати).
- 25. Peres A. Separability criterion for density matrices // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77, no. 8. P. 1413-1415. DOI: https://doi. org/10.1103/PhysRevLett.77.1413
- 26. Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of mixed states: Necessary and sufficient condition // Physics Letters A. 1996. Vol. 223, no. 1-2. P. 1-8. DOI: https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2
- 27. Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика трехкубитной модели Тависа Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, Nº 1-2. С. 95-105. DOI: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105

Информация об авторах

Багров Александр Романович, магистрант физического факультета Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия. В 2023 г. окончил бакалавриат физического факультета Самарского университета по специальности «Физика». Автор 6 научных работ.

Область научных интересов: квантовая оптика и квантовая радиофизика, квантовая информатика.

E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1098-0300

Башкиров Евгений Константинович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия. В 1978 г. окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета и в 1984 г. – аспирантуру при Московском государственном университете. Автор более 360 научных работ.

Область научных интересов: квантовая оптика и квантовая радиофизика, квантовая информатика, теория неравновесных явлений.

E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2569-1322

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2024, vol. 27, no. 4, pp. 7-19

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.7-19 UDC 537.86:530.145 **Original Research**

Received 4 April 2024 Accepted 6 May 2024 Published 28 December 2024

Dynamics of qubit entanglement in three-qubit Jaynes–Cummings model for biseparable intial states

Alexander R. Bagrov 🗅, Eugene K. Bashkirov 🗅

Samara National Research University 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russia

Abstract - Background. To operate a quantum computer, a set of universal gates must be implemented, such as a two-cubit gate of the controlled negation type plus one-cubit spins. As a universal alternative, three-cubic-bit gates may be used. In this regard, it seems very relevant to investigate the dynamics of three-qubit systems in microwave resonators, in particular to study the most efficient schemes for generating, controlling, and monitoring entangled qubit states. Aim. To investigate the features of the dynamics of entangled pairs of qubits for a system in which two qubits are locked in a single-mode resonator and interact with the thermal field mode, and the third qubit is in a free state. Methods. To analyze the dynamics of the considered system, the solution of the quantum Liouville equation for the full density matrix is investigated. The exact solution of the above equation in the case of initial biseparable states of the qubits is found. The exact solution of the evolution equation is used to calculate the criterion of entanglement of qubit pairs - negativity. Numerical simulations of negativity for biseparable qubit states as well as different values of the thermal field intensity of the resonator have been carried out. Results. It is shown that for intense thermal fields of the resonator the effect of instantaneous death of entanglement is observed, while the time intervals between death and revival of entanglement of qubits depend essentially on the choice of their initial biseparable state. It is found that for one of the biseparable states, entanglement of qubits trapped in the resonator does not occur at any field intensities of the resonator. Conclusion. It is found that the peculiarities of the dynamics of entanglement of qubits, in particular the time intervals between the death and birth of entangled qubits, are determined by the choice of the initial biseparable state of qubits, as well as by the values of the field intensity of the resonator. The results obtained can be used to effectively control and manage the degree of qubit entanglement in three-qubit systems in microwave resonators.

Keywords - qubits; resonator; quantum thermal field; biseparable states; entanglement; negativity; sudden death of entanglement.

References

- 1. I. M. Georgescu, S. Ashhab, and F. Nori, "Quantum simulation," *Reviews of Modern Physics*, vol. 88, pp. 153–186, 2014, doi: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153.
- M. Kjaergaard et al., "Superconducting qubits: Current state of play," Annual Reviews of Condensed Matter Physics, vol. 11, pp. 369–395, 2020, doi: http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605.
- 3. H.-L. Huang et al., "Superconducting quantum computing: A review," *Science China Information Sciences*, vol. 63, p. 180501, 2020, doi: http://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9.
- 4. J. Shi, "Entanglement research for the coupled superconducting phase qubit and a two-level system," Advances in Condensed Matter Physics, vol. 2020, p. 3838106, 2020, doi: https://doi.org/10.1155/2020/3838106.
- R. Horodecki et al., "Quantum entanglement," *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, no. 2, pp. 865–942, 2009, doi: https://doi.org/10.1103/ RevModPhys.81.865.
- 6. D. Bruss and G. Leuchs, Quantum Information: From Foundations to Quantum Technology Applications. Cambridge: Wiley-VCH, 2019.
- M.-X. Luo and S.-M. Fe, "Genuinely multipartite entanglement vias shallow quantum circuits," Advanced Quantum Technologies, vol. 6, no. 2, p. 2200089, 2023, doi: https://doi.org/10.1002/qute.202200089.
- 8. M. Neeley et al., "Generation of three-qubit entangled states using superconducting phase qubits," *Nature*, vol. 467, no. 7315, pp.570-573, 2010, doi: https://doi.org/10.1038/nature09418.
- 9. D. C. Cole et al., "Dissipative preparation of W states in trapped ion systems," *New Journal of Physics*, vol. 23, no. 7, p. 073001, 2021, doi: https://doi.org/10.1088/1367-2630/ac09c8.
- 10. O. Gühne and G. Tôth, "Entanglement detection," *Physics Reports*, vol. 474, no. 1-6, pp. 1-75, 2009, doi: https://doi.org/10.1016/j. physrep.2009.02.004.
- 11. N. Friis et al., "Entanglement certification from theory to experiment," *Nature Reviews Physics*, vol. 1, pp. 72–87, 2019, doi: https://doi.org/10.1038/s42254-018-0003-5.
- 12. E. K. Bashkirov, "Thermal entanglement in two-atom Tavis-Cummings model with taking into account the dipole-dipole interaction," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 26, no. 2, pp. 9–17, 2023, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.2.9-17. (In Russ.)
- E. K. Bashkirov, "Entanglement of two superconducting qubits induced by a thermal noise of a cavity with Kerr medium taking into account the atomic coherence," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 25, no. 1, pp. 7–15, 2022, doi: https://doi. org/10.18469/1810-3189.2022.25.1.7-15. (In Russ.)
- 14. R. K. Zakharov and E. K. Bashkirov, "Influence of detuning and Kerr nonlinearity on atom-atom entanglement in the double two-photon Jaynes-Cummings model," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 24, no. 1, pp. 9–14, 2021, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.1.9-14. (In Russ.)
- 15. E. K. Bashkirov, "Entanglement of atoms induced by thermal noise in the presence of initial atomic coherence," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 23, no. 3, pp. 10-17, 2020, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.10-17. (In Russ.)
- E. K. Bashkirov and M. O. Guslyannikova, "The entanglement of atoms with two-photon transitions in the presence of ac Stark shift of energy levels," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 22, no. 3, pp. 36–43, 2019, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.3.36-43. (In Russ.)
- 17. S. N. Filippov, "Quantum mappings and characterization of entangled quantum states," *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 241, no. 2, pp. 210–236, 2019, doi: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04418-3.
- Y.-C. Liang et al., "Quantum fidelity measures for mixed states," Reports on Progress in Physics, vol. 82, no. 7, p. 076001, 2019, doi: https:// doi.org/10.1088/1361-6633/ab1ca4.
- 19. M. Ma, Y. Li, and J. Shang, "Multipartite entanglement measures: A review," *arXiv:2309.09459*, pp. 1-14, 2023, doi: https://doi. org/10.48550/arXiv.2309.09459.
- 20. T. Yu and J. H. Eberly, "Finite-time disentanglement via spontaneous emission," *Physical Review Letters*, vol. 93, no. 14, p. 140404, 2003, doi: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.140404.
- M. P. Almeida et al., "Environment-induced sudden death of entanglement," Science, vol. 316, no. 5824, pp. 579–582, 2007 doi: https:// doi.org/10.1126/science.1139892.
- 22. M. Ge, L.-F. Zhu, and L. Qui, "Three-qubit entanglement sudden death," Communications in Theoretical Physics, vol. 49, no. 6, pp. 1443-1448, 2008, doi: https://doi.org/10.1088/0253-6102/49/6/20.
- S. Xie, D. Younis, and J. H. Eberly, "Evidence for unexpected robustness of multipartite entanglement against sudden death from spontaneous emission," *Physical Review Research*, vol. 5, no. 3, p. L032015, 2023, doi: https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.5.L032015.
- 24. A. R. Bagrov and E. K. Bashkirov, "Dynamics of thermal entanglement of pairs of qubits in the three-qubit Tavis-Cummings model," *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, vol. 94, no. 4, 2024, to be published. (In Russ.)
- 25. A. Peres, "Separability criterion for density matrices," *Physical Review Letters*, vol. 77, no. 8, pp. 1413–1415, 1996, doi: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413.
- 26. R. Horodecki, M. Horodecki, and P. Horodecki, "Separability of mixed states: Necessary and sufficient condition," *Physics Letters A*, vol. 223, no. 1–2, pp. 1–8, 1996, doi: https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2.
- A. R. Bagrov and E. K. Bashkirov, "Dynamics of the three-qubit Tavis-Cummings model," Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya, vol. 28, no. 1-2, pp. 95-105, 2022, doi: https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105. (In Russ.)

Information about the Authors

Alexander R. Bagrov, master's student of the Physical Department, Samara National Research University, Samara, Russia. In 2023, he graduated from the Faculty of Physics of the Samara National Research University. Author of 6 scientific papers.

Research interests: quantum optics and quantum radiophysics, quantum informatics.

E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru *ORCID*: https://orcid.org/0000-0002-1098-0300

Eugene K. Bashkirov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, Samara, Russia. In 1978, he graduated from the Faculty of Physics of the Kuibyshev State University and in 1984 – postgraduate studies at the Moscow State University. Author of more than 360 scientific papers.

Research interests: quantum optics and quantum radiophysics, quantum informatics, theory of nonequilibrium phenomena. E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2569-1322

РЕКЛАМА

Неганов, В.А.

Современная теория и практические применения антенн: монография / В.А. Неганов, Д.П. Табаков, Г.П. Яровой; предисл. акад. Ю.В. Гуляева; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радиотехника, 2009. – 720 с.

нов В.А., Табаков Д.П., Яровой Г.П. Современная теория и практические применения антенн

ISBN 978-5-88070-222-0

УДК 621.396.67 ББК 32.845

Рассмотрены основные разделы теории и техники антенн. Освещены вопросы расчета и построения различных типов антенн (от вибраторных до рупорных и антенных решеток, включая фазированные). Основное внимание уделено антеннам СВЧ и расчетам их электромагнитных полей в ближней зоне, т. е. вопросам электромагнитной совместимости.

Принципиальное отличие книги от известных заключается в последовательном применении метода физической регуляризации (самосогласованного метода) к расчету электромагнитного поля антенн, позволя-

ющего осуществлять непрерывный переход с излучающей поверхности антенны к пространству вне ее. С помощью самосогласованного метода получены новые результаты по теории антенн: установлены связь между поверхностной плотностью тока на вибраторной антенне и напряженностью электромагнитного поля, однонаправленный режим излучения для кольцевой (рамочной антенны), режимы стоячих и бегущих волн в цилиндрической спиральной антенне, входное сопротивление практически для всех типов антенн. Теоретический материал подкреплен примерами применения многолучевых антенн.

Предназначено для разработчиков антенно-фидерных устройств, аспирантов и докторантов, занимающихся вопросами проектирования антенных систем различного назначения, студентов радиотехнических специальностей высших учебных заведений. Физика волновых процессов и радиотехнические системы

2024. T. 27, Nº 4. C. 20-28

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.20-28 УДК 621.373.826 Оригинальное исследование

Дата поступления 6 июня 2024 Дата принятия 8 июля 2024 Дата публикации 28 декабря 2024

Шестиволновое взаимодействие на резонансной нелинейности в волноводе с бесконечно проводящими поверхностями

В.В. Ивахник, Д.Р. Капизов, В.И. Никонов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева 443086, Россия, г. Самара, Мосморочае имеео 24

Московское шоссе, 34

Аннотация – Обоснование. При использовании шестиволновых преобразователей излучения, реализуемых в волноводах, в системах нелинейной адаптивной оптики, для обработки в реальном времени изображений необходимо знание соответствия между комплексными амплитудами сигнальной и объектной волн. Цель. Изучение влияния на качество обращения волнового фронта при шестиволновом взаимодействии на резонансной нелинейности в волноводе с бесконечно проводящими поверхностями интенсивности, пространственной структуры волн накачки, характеристик нелинейной среды. Методы. Используя разложение взаимодействующих волн по модам волновода, получены выражения для функции размытия точки шестиволнового преобразователя излучения, которые проанализированы численным методом. Результаты. При учете, что одна из волн накачки возбуждает нулевую моду волновода, а изменение амплитуды другой волны накачки на грани волновода меняется по гауссову закону, получены зависимости полуширины центрального максимума модуля функции размытия точки от интенсивности одномодовой волны накачки, ширины гауссовой волны накачки, характеристик нелинейной среды. Заключение. Показано, что параметры нелинейной среды, интенсивность одномодовой волны накачки слабо влияют на качество обращения волнового фронта. Уменьшение ширины гауссовой волны накачки улучшает качество обращения волнового фронта.

Ключевые слова – шестиволновой преобразователь излучения; обращение волнового фронта; резонансная нелинейность; волновод с бесконечно проводящими поверхностями.

Введение

Интерес к изучению шестиволновых взаимодействий обусловлен возможностью их широкого применения для получения волны с обращенным волновым фронтом (ОВФ), волны с удвоенным обращенным волновым фронтом, для обработки в реальном времени пространственных и временных сигналов, для изучения структуры вещества и т. д. [1-7]. Традиционно многоволновые (трех-, четырех-, шестиволновые) взаимодействия рассматриваются в нелинейных средах, не ограниченных в поперечном направлении. Это обусловлено простотой реализации многоволновых взаимодействий в таких нелинейных средах. Однако необходимость получения больших коэффициентов преобразования при многоволновом взаимодействии с учетом использования сравнительно маломощных источников излучения привлекает внимание к изучению многоволновых взаимодействий в волноводах, в которых возможно существенно повысить эффективность преобразования за счет увеличения области взаимодействия без существенного изменения в пределах этой области интенсивности взаимодействующих волн.

Если исследованию различных аспектов четырехволнового взаимодействия в волноводах с различным типом нелинейности посвящено достаточно большое количество работ, то число работ, в которых рассматривается шестиволновое взаимодействие в волноводах, по мнению авторов, весьма ограничено [8–10].

В настоящей работе анализируется качество ОВФ при вырожденном шестиволновом взаимодействии $\omega + \omega - \omega + \omega - \omega = \omega$ на резонансной нелинейности в двумерном волноводе с бесконечно проводящими поверхностями с учетом пространственной структуры, интенсивности волн накачки.

1. Функция размытия точки шестиволнового преобразователя излучения

Шестиволновое взаимодействие рассмотрим в волноводе, расположенном вдоль оси Z между плоскостями z = 0 и $z = \ell$. Волновод состоит из вещества с показателем преломления n(x), коэффициентом поглощения α_0 и ансамбля частиц с коэффициентом поглощения $\alpha_1 \ll \alpha_0$. Ансамбль частиц описывается трехуровневой схемой энергетических уровней с возбужденными синглетными уровнями или четырехуровневой схемой энергетических уровней. В стационарном состоянии коэффициент поглощения ансамбля частиц есть [11; 12]:

$$\alpha_1 = \alpha_{10} \frac{1 + aI}{1 + bI + cI^2}.$$
 (1)

Здесь *I* = *AA*^{*} – интенсивность излучения; *a*, *b*, *c* – коэффициенты, определяемые сечением поглощения (излучения) и вероятностью безызлучательных переходов между энергетическими уровнями.

На переднюю грань волновода падают первая волна накачки с комплексной амплитудой A_1 и сигнальная волна с комплексной амплитудой A_3 . На заднюю грань волновода падает вторая волна накачки с комплексной амплитудой A_2 . В волноводе наводится нелинейная поляризация, пропорциональная $(A_1A_1^* + A_2A_2^*) A_1A_2A_3^*$, которая является источником объектной волны с комплексной амплитудой A_6 , сопряженной амплитуде сигнальной волны.

В приближении заданного поля по волнам накачки уравнения, описывающие шестиволновое взаимодействие, линеаризуются относительно комплексных амплитуд сигнальной и объектной волн, поэтому связь между этими амплитудами на передней грани волновода однозначно определяется выражением

$$A_{6}(x) = \int G(x, x_{1}) A_{3}^{*}(x_{1}) dx_{1}.$$
 (2)

Здесь $G(x, x_1)$ – функция размытия точки (ФРТ).

Как и при рассмотрении четырехволнового взаимодействия [13–15], используя разложение взаимодействующих волн по модам волновода, не содержащего ансамбля частиц, в приближении малого коэффициента преобразования $\left(\left|A_6\right|^2 \ll \left|A_3\right|^2\right)$ запишем при двух приближениях выражения для ФРТ шестиволнового преобразователя излучения.

1. Первая волна накачки возбуждает одну моду волновода с номером *n*:

$$A_1(x,z) = a_{1n}^0 f_n(x) \exp(-i\beta_n z),$$

и ее интенсивность намного больше интенсивности второй волны накачки.

Тогда выражение для ФРТ шестиволнового преобразователя излучения имеет вид

$$G_{1}\left(x, x_{0}, z=0\right) = k\left(a_{1n}^{0}\right)^{3} \sum_{r=0}^{M} \frac{\tilde{f}_{r}\left(x\right)}{\beta_{r}} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{M} \sum_{m=0}^{M} a_{2m}^{0} \tilde{f}_{s}\left(x_{0}\right) \int_{0}^{\ell} \gamma_{nnnmsr}\left(z\right) \exp\left[-i\Delta_{nnnmsr}z\right] dz.$$

$$(3)$$

Здесь

$$\begin{split} \gamma_{nnnmsr}\left(z\right) &= 4\alpha_{10}c\int\left\{\tilde{f}_{n}^{3}\left(x\right)\tilde{f}_{m}\left(x\right)\tilde{f}_{s}^{*}\left(x\right)\tilde{f}_{r}^{*}\left(x\right)dx\right\}\\ &\left\{\left[1+b\tilde{f}_{n}^{2}\left(x\right)\exp\left[-i\left(\beta_{n}-\beta_{n}^{*}\right)z\right]+\right.\\ &\left.+c\tilde{f}_{n}^{4}\left(x\right)\exp\left[-2i\left(\beta_{n}-\beta_{n}^{*}\right)z\right]\right]^{2}\right\} \end{split}$$

 интеграл перекрытия, характеризующий эффективность взаимодействия шести мод волновода;

$$\Delta_{nnnmsr} = \left(2\beta_n - \beta_n^* - \beta_m - \beta_s^* + \beta_r\right)$$

волновая расстройка;

 $f_r(x,z) = \tilde{f}_r(x) \exp(-i\beta_r z)$ – *г*-я мода волновода; β_r – постоянная распространения *г*-й моды; $k = \omega/c$; *М* – число мод волновода, учитываемых при анализе качества ОВФ; a_{2m}^0 – коэффициенты в разложении амплитуды второй волны накачки по модам волновода.

2. Вторая волна накачки возбуждает одну моду волновода с номером *m*:

$$A_2(x,z) = a_{2m}^0 f_m(x) \exp(i\beta_m z)$$

и ее интенсивность намного больше интенсивности первой волны накачки.

Выражение для ФРТ шестиволнового преобразователя излучения запишется следующим образом:

$$G_{2}\left(x, x_{0}, z=0\right) = k\left(a_{2m}^{0}\right)^{3} \sum_{r=0}^{M} \frac{\tilde{f}_{r}\left(x\right)}{\beta_{r}} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{M} \sum_{n=0}^{M} a_{1n}^{0} \tilde{f}_{s}\left(x_{0}\right) \int_{0}^{\ell} \gamma_{nmmsr}\left(z\right) \exp\left[-i\Delta_{nmmsr}z\right] dz.$$

$$\exists \text{ J} \text{ BLEC} b$$

$$(4)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{nnnmsr}(z) &= 4\alpha_{10}c \int \left\{ \tilde{f}_m^3(x) \tilde{f}_n(x) \tilde{f}_s(x) \tilde{f}_r(x) dx \right\} / \\ \left\{ \left[1 + b \tilde{f}_m^2(x) \exp\left[i \left(\beta_m - \beta_m^*\right)z\right] + c \tilde{f}_m^4(x) \exp\left[2i \left(\beta_m - \beta_m^*\right)z\right] \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

- интеграл перекрытия;

 $\Delta_{nmmsr} = \beta_n - 2\beta_m + \beta_m^* - \beta_s^* + \beta_r$

– волновая растройка; a_{1n}^0 – коэффициенты в разложении амплитуды первой волны накачки по модам волновода.

В случае если обе волны одномодовые с равными номерами мод (n = m) из (3), (4), выражения для ФРТ имеют вид

$$G_{1,2}^{nn}\left(x,x_{0},z=0\right) = k\left(a_{1n,2n}^{0}\right)^{3}a_{2n,1n}^{0} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{M} \frac{\tilde{f}_{r}\left(x\right)}{\beta_{r}}\tilde{f}_{r}\left(x_{0}\right) \int_{0}^{\ell} \gamma_{nnnrr}\left(z\right) \exp\left[-i\Delta_{nnnrr}z\right] dz.$$
(5)

При записи (5) считали, что номера мод сигнальной и объектной волн совпадают (s = r).

Выражения (3)-(5) позволяют проанализировать качество ОВФ шестиволнового преобразователя излучения в многомодовом волноводе с резонансной нелинейностью в зависимости от пространственной структуры волн накачки, их интенсивности, характеристик нелинейной среды, параметров волновода.

2. Обсуждение результатов

Шестиволновое взаимодействие рассмотрим в слабо поглощающем, длинном волноводе ($\tilde{\alpha}_0 = = \alpha_0 \ell \ll 1$). Считаем, если интенсивность первой волны намного больше интенсивности второй волны накачки, то при $\operatorname{Re}(\Delta_{nnnmsr}) \neq 0$ выполняются условия $\operatorname{Re}(\Delta_{nnnmsr}\ell) \gg 1$, если интенсивность второй волны намного больше интенсивности первой волны накачки, то при $\operatorname{Re}(\Delta_{nmmsr}) \neq 0$ имеем $\operatorname{Re}(\Delta_{nmmsr}\ell) \gg 1$.

В качестве волновода рассмотрим двумерный волновод шириной 2*a* с бесконечно проводящими поверхностями, заполненный средой с показателем преломления *n*₁.

Модами такого волновода являются функции [16]:

$$\tilde{f}_r(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left[\frac{\pi(r+1)}{2a}(x+a)\right].$$
(6)

Постоянная распространения *r*-й приосевой моды волновода есть

$$\beta_r \simeq kn_1 - \frac{1}{2kn_1} \left[\frac{\pi (r+1)}{2a} \right]^2 - i\alpha_0.$$
⁽⁷⁾

С учетом (7) волновая расстройка имеет вид

$$\Delta_{nnnmsr} = \Delta_{nmmmsr} = -\frac{1}{2kn_1} \left[\frac{\pi}{2a} \right]^2 \times$$

$$\times \left[\left(n+1 \right)^2 - \left(m+1 \right)^2 - \left(s+1 \right)^2 + \left(r+1 \right)^2 \right] - i4\alpha_0.$$
(8)

При условии одномодовых волн накачки с номерами мод n = m = 0 выражение для ФРТ шестиволнового преобразователя излучения (5) с точностью до постоянного множителя преобразуется как

$$G_{1,2}^{(00)}\left(x, x_0 = 0, z = 0\right) =$$
(9)



Рис. 1. Зависимость нормированного на максимальное значение приведенного интеграла перекрытия от номера моды объектной волны при $\tilde{\alpha}_0 = 10^{-2}$, $\mu = 0, 1$, $\tilde{I}_1 = 0, 1$ (•), 10 (•), 50 (**A**) Fig. 1. Dependence of the normalized to the maximum value of the reduced overlap integral on the mode number of the object wave at $\tilde{\alpha}_0 = 10^{-2}$, $\mu = 0, 1$, $\tilde{I}_1 = 0, 1$ (•), 10 (•), 50 (**A**)

$$=\sum_{r=0}^{M}\sin\left[\frac{\pi(r+1)}{2a}(x+a)\right]\sin\left[\frac{\pi(r+1)}{2}\right]\tilde{\gamma}_{0000rr}.$$

Здесь

$$\tilde{\gamma}_{0000rr} = \int_{0}^{\infty} \gamma_{0000rr} \left(z \right) \exp\left(-4\alpha_0 z \right) dz$$

- приведенный интеграл перекрытия.

Из выражения (9) следует, что вид ФРТ полностью определяется зависимостью приведенного интеграла перекрытия от номера моды объектной волны. При одномодовых волнах накачки с равными номерами мод n = m = 0 идеальное качество ОВФ будет наблюдаться при условии

$\tilde{\gamma}_{0000rr} = \text{const.}$

Если при малой интенсивности одномодовой волны накачки $\tilde{I}_{1,2} \leq 0,1$ (где $\tilde{I}_1 = b(a_{10}^0)^2 a^{-1}$ (при условии $A_1A_1^* \gg A_2A_2^*$) и $\tilde{I}_2 = b(a_{20}^0)^2 a^{-1}$ (при условии $A_2A_2^* \gg A_1A_1^*$)) и $\mu = c/b^2 = 0,1$, лишь для нулевой моды объектной волны наблюдается резкое отклонение интеграла перекрытия от постоянного значения, то с увеличением интенсивности волны накачки число мод объектной волны, для которых наблюдается отклонение интеграла перекрытия от постоянного значения, возрастает (рис. 1).

На рис. 2 приведены характерные нормированные графики зависимости модуля ФРТ

$$\tilde{G} = \left| \frac{G(x, x_0 = 0, z = 0)}{G(x = 0, x_0 = 0, z = 0)} \right|,$$

расположенной на оси волновода ($x_0 = 0$), от нормированной поперечной координаты ($x_1 = x / a$) при условии одномодовых волн накачки с номе-



Рис. 2. Зависимость нормированного модуля ФРТ от поперечной координаты при $\tilde{\alpha}_0 = 10^{-2}$, $\mu = 0, 1$, $\tilde{I}_{1,2} = 0, 1$ (*a*), 10^2 (*b*), 10^4 (*b*) Fig. 2. Dependence of the normalized modulus of the FRT on the transverse coordinate at $\tilde{\alpha}_0 = 10^{-2}$, $\mu = 0, 1$, $\tilde{I}_{1,2} = 0, 1$ (*a*), 10^2 (*b*), 10^4 (*c*)

рами мод n = m = 0. Модуль ФРТ с ростом поперечной координаты уменьшается, наблюдаются центральный и боковые максимумы. Численный анализ модуля ФРТ при различных параметрах волн накачки, характеристик нелинейной среды проводился с учетом 30 мод волновода.

При $\tilde{I}_{1,2} < 10^2$ основная доля энергии преобразованного изображения точечного сигнала сосредоточена в пределах центрального максимума ФРТ. В этом случае количественной величиной, характеризующей качество ОВФ, может выступать полуширина центрального максимума модуля ФРТ (Δx), значение которой находится из решения уравнения [13; 14]:

$$\left| G_{1,2} \left(x = \Delta x, x_0 = 0, z = 0 \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| G_{1,2} \left(x = 0, x_0 = 0, z = 0 \right) \right|.$$
(10)

В диапазоне изменения нормированной интенсивности одномодовой волны накачки от 0,1 до 10^2 как при $\mu = 0,1$, так и при $\mu = 1$ полуширина модуля ФРТ слабо зависит от интенсивности и при $\tilde{\alpha}_0 = 10^{-2}$, $\mu = 0,1$ составляет $\Delta x \simeq 0,039a$. Заметим, что в приближении приосевых мод волновода при идеальном ОВФ (считаем $\tilde{\gamma}_{0000rr}$ = = const) полуширина модуля ФРТ с учетом 30 мод волновода равна $\Delta x \simeq 0,038a$. Преобразование при идеальном ОВФ дельта-функции, описывающей сигнальную волну, в функцию конечной ширины связано с учетом конечного числа мод волновода.

При дальнейшем увеличении интенсивности одномодовой волны накачки $\tilde{I}_{1,2} > 10^2$ наряду с уменьшением полуширины центрального максимума модуля ФРТ наблюдается увеличение значений боковых максимумов. Так, при $\tilde{\alpha}_0 = 10^{-2}$, $\mu = 0,1$, $\tilde{I}_{1,2} = 10^4$ полуширина центрального максимума модуля ФРТ равна $\Delta x \simeq 0,029a$, а отношение величин первого побочного к центрального максимуму составляет 0,63. Причем в диапазоне интенсивностей волн накачки от $\tilde{I}_{1,2} = 10^2$ до $\tilde{I}_{1,2} = 10^4$ при параметре $\mu = 1$ скорость изменения полуширины центрального максимума ФРТ с ростом интенсивности волны накачки больше, чем при параметре $\mu = 0,1$. В этом диапазоне нормированной интенсивности волны накачки с ро-

Таблица 1. Максимальное и минимальное значения полуширины модулей ФРТ в диапазоне изменения ширины гауссовой волны накачки $0,125a \le \delta \le 5a$ при параметре $\mu = 0,1$ **Table 1.** Maximum and minimum values of the half-widths of the PSF modules in the range of variation of the width of the Gaussian pump wave $0,125a \le \delta \le 5a$ with the parameter $\mu = 0,1$

Приближение	Интенсивность накачки	Первая волна накачки	Вторая волна накачки	Максимальное значение полуширины	Минимальное значение полуширины
$A_1 A_1^* \gg A_2 A_2^*$	$\tilde{I}_1 = 0, 1$	одномодовая	гауссова	0,042a	0,038a
	$\tilde{I}_1 = 10$	одномодовая	гауссова	0,042a	0,038a
$A_1 A_1^* \ll A_2 A_2^*$	$\tilde{I}_2 = 0, 1$	гауссова	одномодовая	0,044 <i>a</i>	0,038a
	$I_2 = 10$	гауссова	одномодовая	0,043a	0,038a

Таблица 2. Максимальное и минимальное значения полуширины модулей ФРТ в диапазоне изменения нормированной интенсивности одномодовой волны накачки $0,1 \le \tilde{I}_{1,2} \le 10$ при $\mu = 0,1$ Table 2. Maximum and minimum values of the half-widths of the PSF modules in the range of variation

of the normalized intensity of a single-mode pump wave $0, 1 \le \tilde{I}_{1,2} \le 10$ at $\mu = 0, 1$

Приближение	Ширина волны накачки	Первая волна накачки	Вторая волна накачки	Максимальное значение полуширины	Минимальное значение полуширины
$A_1 A_1^* \gg A_2 A_2^*$	$\xi = 0, 3$	одномодовая	гауссова	0,038a	0,038a
	$\xi = 3$	одномодовая	гауссова	0,04 <i>a</i>	0,039a
$A_1 A_1^* \ll A_2 A_2^*$	$\xi = 0, 3$	гауссова	одномодовая	0,038a	0,038a
	$\xi = 3$	гауссова	одномодовая	0,04 <i>a</i>	0,039 <i>a</i>

стом номера моды объектной волны происходит увеличение приведенного интеграла перекрытия $\tilde{\gamma}_{0000rr}$. Возрастает вклад в ФРТ высоких мод волновода.

По-видимому, при больших интенсивностях одномодовой волны накачки $\tilde{I}_{1,2} > 10^3$ в качестве количественной характеристики качества ОВФ может быть использована не полуширина центрального максимума, а, например, полуширина огибающей модуля ФРТ или величина отрезка, в пределах которого сосредоточена основная доля энергии преобразованного изображения точки [17]. С увеличением интенсивности одномодовой волны накачки полуширина огибающей модуля ФРТ вначале увеличивается. Так, при $\tilde{\alpha}_0 = 10^{-2}$, $\mu = 0,1$ полуширина огибающей модуля ФРТ при изменении $\tilde{I}_{1,2}$ от 10^3 до 10^5 увеличивается на 30 % соответственно. При дальнейшем росте интенсивности волны накачки ($\tilde{I}_{1,2} > 10^6$) полуширина огибающей модуля ФРТ перестает изменяться.

Для изучения влияния пространственной структуры волны накачки на качество ОВФ будем считать, что одна из волн накачки возбуждает нулевую моду волновода, а распределение амплитуды другой волны накачки на грани волновода описывается гауссовой функцией $A_1(x, z = 0) \sim \exp(-x^2 / \delta^2)$ (или $A_2(x, z = \ell) \sim \exp(-x^2 / \delta^2)$, δ – ширина волны накачки). Причем интенсивность одномодовой волны накачки намного больше интенсивности накачки, распределение амплитуды которой описывается гауссовой функцией. Из численного анализа выражений (3), (4) следует, что, как и в случае одномодовых волн накачки с равными номерами мод, модуль ФРТ с ростом поперечной координаты уменьшается.

В таблицах 1–3 приведены максимальное и минимальное значения полуширин модулей ФРТ в определенных диапазонах ширин гауссовых волн накачки (таблица 1), нормированных интенсивностей одномодовых волн накачки (таблица 2), соотношения между значением линейной и нелинейной составляющих знаменателя коэффициента поглощения (таблицы 3).

Из данных, приведенных в таблицах, следует, что в рассматриваемых диапазонах изменения параметров нелинейной среды, волн накачки наибольшее влияние на качество ОВФ оказывает ширина гауссовой волны накачки. Изменение ширины гауссовой волны накачки в диапазоне $0,125a \le \le \delta \le 5a$ приводит к относительному изменению полуширины модуля ФРТ почти на 15 %. Качество ОВФ с уменьшением ширины гауссовой волны накачки улучшается и при $\delta \le 0,3a$ соответствует качеству при идеальном ОВФ. При этом изменение нормированной интенсивности одномодовой волны накачки в диапазоне $0,1 \le \tilde{I}_{1,2} \le 10$, параметров

24

Таблица 3. Максимальное и минимальное значения полуширины модулей ФРТ в диапазоне изменения параметра 0,1 $\leq \mu \leq 3$ при нормированной интенсивности одномодовых волн накачки $\tilde{I}_{1,2} = 1$ **Table 3.** Maximum and minimum values of half-widths of PSF modules in the range of parameter variation 0,1 $\leq \mu \leq 3$ at normalized intensity of single-mode pump waves $\tilde{I}_{1,2} = 1$

Приближение	Ширина волны накачки	Первая волна накачки	Вторая волна накачки	Максимальное значение полуширины	Минимальное значение полуширины
$A_1 A_1^* \gg A_2 A_2^*$	$\xi = 0, 3$	одномодовая	гауссова	0,038a	0,038a
	$\xi = 3$	одномодовая	гауссова	0,04 <i>a</i>	0,039a
$A_1 A_1^* \ll A_2 A_2^*$	$\xi = 0, 3$	гауссова	одномодовая	0,038a	0,038a
	$\xi = 3$	гауссова	одномодовая	0,04 <i>a</i>	0,039a

среды с резонансной нелинейностью в диапазоне 0,1≤µ≤3 приводит к относительному изменению полуширины модуля ФРТ менее чем на 3 %.

Для объяснения зависимостей полуширины ФРТ от ширины гауссовой волны накачки представим ФРТ в виде когерентной суммы ФРТ, соответствующих одномодовым волнам накачки.

1. В случае когда интенсивность первой одномодовой волны накачки с номером моды n = 0намного больше интенсивности второй волны накачки, условие

$$\operatorname{Re}(\Delta_{000msr}) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \left[1 - (m+1)^2 - (s+1)^2 + (r+1)^2 \right] = 0$$
(11)

выполняется в двух случаях:

1) номер моды второй волны накачки равен нулю (m = 0), а номера мод сигнальной и объектной волн совпадают (r = s);

2) номер моды сигнальной волны равен нулю (s = 0), совпадают номера мод объектной волны и второй волны накачки (r = m). Тогда выражение для ФРТ (3) с точностью до постоянного множителя можно записать следующим образом:

$$G_{1}^{(1)}(x, x_{0} = 0, z = 0) =$$

$$= a_{20} \sum_{r=0}^{M} \sin\left[\frac{\pi(r+1)}{2a}(x+a)\right] \sin\left[\frac{\pi(r+1)}{2}\right] \tilde{\gamma}_{0000rr} +$$

$$+ \sum_{r=2}^{M} a_{2r} \sin\left[\frac{\pi(r+1)}{2a}(x+a)\right] \tilde{\gamma}_{0000rr}.$$
(12)

Первое слагаемое в выражении (12), величина которого пропорциональна нулевому коэффициенту в разложении амплитуды второй волны накачки по модам волновода, описывает ФРТ, соответствующую одномодовым волнам накачки с номерами мод n = m = 0, а второе слагаемое равно сумме мод волновода с коэффициентами $a_{2r}\tilde{\gamma}_{0000rr}$. При $\delta < a$ сложение центральных максимумов мод волновода происходит в противофазе, поэтому в диапазоне ширины гауссовой волны накачки $0,2a < \delta < a$ второе слагаемое в (12) оказывается намного меньше первого. Это объясняет слабую зависимость качества ОВФ от ширины второй гауссовой волны накачки при условии одномодовой первой волны накачки.

2. В случае когда интенсивность второй одномодовой волны накачки с номером моды m = 0намного больше интенсивности первой волны накачки, условие

$$\operatorname{Re}(\Delta_{n000sr}) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\left(n+1 \right)^{2} - 1 - \left(s+1 \right)^{2} + \left(r+1 \right)^{2} \right] = 0$$
(13)

может быть выполнено, если:

1) номер моды первой волны накачки равен нулю (n = 0), а номера мод сигнальной и объектной волн совпадают (r = s);

2) номер моды объектной волны равен нулю (r = 0), совпадают номера мод сигнальной волны и первой волны накачки (s = n). В этом случае выражение для ФРТ (4) с точностью до постоянного множителя запишется как

$$G_{2}^{(2)}(x, x_{0} = 0, z = 0) =$$

$$= a_{10} \sum_{r=0}^{N} \sin\left[\frac{\pi(r+1)}{2a}(x+a)\right] \sin\left[\frac{\pi(r+1)}{2}\right] \gamma_{0000rr} +$$

$$+ \sin\left[\frac{\pi}{2a}(x+a)\right] \sum_{n=2}^{N} a_{1n} \sin\left[\frac{\pi(n+1)}{2}\right] \gamma_{0000nn}.$$
(14)

Как и в случае $|A_1|^2 \ll |A_2|^2$, функция размытия точки шестиволнового преобразователя излучения представляет сумму двух функций: «пьедестала», вид которого определяется нулевой модой волновода, а высота – суммой амплитуд мод в разложении гауссовой волны накачки по модам волновода, и монотонно спадающей с ростом поперечной координаты ФРТ, соответствующей одномодовым волнам накачки с номерами мод n = m = 0. В диапазоне изменения ширины гауссовой волны накачки $0,125a \le \delta \le 5a$ высота «пьедестала» гораздо меньше амплитуды нулевой моды в разложении гауссовой волны накачки по модам волновода

$$\sum_{n=2}^{N} a_{1n} \left(-1\right)^{\frac{n}{2}} \gamma_{0000nn} \ll a_{10}.$$

Это объясняет слабую зависимость качества ОВФ от ширины первой гауссовой волны накачки при условии одномодовой второй волны накачки.

Заключение

В приближении заданного поля по волнам накачки с использованием метода функции размытия точки проанализировано качество ОВФ при шестиволновом взаимодействии в двумерном волноводе с бесконечно проводящими поверхностями с резонансной нелинейностью. Для одномодовых волн накачки с номерами мод n = m = 0 определен диапазон изменения нормированной интенсивности волны накачки, в пределах которого не наблюдается изменения качества ОВФ. Показано, что при $\tilde{I}_{1,2} > 10^2$ рост интенсивности одномодовой волны накачки не только уменьшает полуширину центрального максимума функции размытия точки, но и приводит к увеличению ее побочных максимумов.

С учетом, что одна из волн накачки возбуждает нулевую моду волновода, а изменение амплитуды другой волны накачки на грани волновода меняется по гауссову закону, показано, что при нормированной интенсивности одномодовой волны накачки $0,1 \leq \tilde{I}_{1,2} \leq 10$ параметры нелинейной среды, интенсивность волны накачки слабо влияют на качество ОВФ. Уменьшение ширины гауссовой волны накачки улучшает качество ОВФ, приводит в диапазоне ширин гауссовой волны накачки $0,125a \leq \delta \leq 5a$ к относительному изменению полуширины модуля ФРТ почти на 15 %.

Список литературы

- Ивахник В.В., Никонов В.И. Удвоенное сопряжение волнового фронта при невырожденном шестифотонном взаимодействии // Оптика и спектроскопия. 1993. Т. 75, N° 2. С. 385–391. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=37622858
- 2. Карпук С.М., Рубанов А.С., Толстик А.Л. Удвоенное фазовое сопряжение при квадратичной записи динамических голограмм в резонансных средах // Оптика и спектроскопия. 1996. Т. 80, № 2. С. 276–280. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=29196117
- Diffractive optics implementation of six-wave mixing / V. Astinov [et al.] // Optics Letter. 2000. Vol. 25, no. 11. P. 853–855. DOI: https:// doi.org/10.1364/OL.25.000853
- Miller R.J.D., Paarmann A., Prokhopenko V.I. Diffractive optics based four-wave, six-wave, ..., v-wave nonlinear spectroscopy // Accounts of Chemical Research. 2009. Vol. 42, no. 9. P. 1442–1451. DOI: https://doi.org/10.1021/ar900040f
- Romanov O.G., Gorbach D.V., Tolstik A.L. Frequency transformation of optical vortices upon nondegenerate multiwave interaction in dye solutions // Optics and Spectroscopy. 2010. Vol. 108, no. 5. P. 768–773. DOI: https://doi.org/10.1134/S0030400X10050152
- Gaižauskas E., Steponkevičius K., Vaičaitis V. Fifth-order intensity autocorrelations based on six-wave mixing of femtosecond laser pulses // Physical Review A. 2016. Vol. 93, no. 2. P. 023813. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.023813
- Optically induced second harmonic generation by six-wave mixing: A novel probe of solute orientation dynamics / S. Lin [et al.] // The Journal of Physical Chemistry A. 1999. Vol. 103, no. 20. P. 3830–3836. DOI: https://doi.org/10.1021/jp9845221
- Six-wave mixing induced by free-carrier plasma in silicon nanowire waveguides / H. Zhou [et al.] // Laser Photonics Reviews. 2016. Vol. 10, no. 6. P. 1054–1061. DOI: https://doi.org/10.1002/lpor.201600124
- Ивахник В.В., Капизов Д.Р., Никонов В.И. Шестиволновое взаимодействие с удвоенным обращением волнового фронта в многомодовых волноводах с керровской, тепловой нелинейностями // Компьютерная оптика. 2023. Т. 47, N^o 5. С. 702–709. DOI: https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-1313
- 10. Optimized design of six-wave fiber optical parametric amplifiers by using a genetic algorithm / P. Li [et al.] // Applied Optics. 2017. Vol. 56, no. 15. P. 4406-4411. DOI: https://doi.org/10.1364/AO.56.004406
- 11. Тихонов Е.А., Шпак М.Т. Нелинейные оптические явления в органических соединениях. Киев: Н. Думка, 1979. 374 с.
- 12. Excited-state absorption and pump propagation effects on optical phase conjugation in a saturable absorber / S. Miyanaga [et al.] // Journal of the Optical Society of America B. 1993. Vol. 10, no. 6. P. 1069–1076. DOI: https://doi.org/10.1364/JOSAB.10.001069
- 13. Функция размытия точки четырехволнового преобразователя излучения в многомодовом волноводе с керровской нелинейностью / Е.В. Воробьева [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2021. Т. 24, № 1. С. 15–21. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.1.15-21
- 14. Ивахник В.В., Капизов Д.Р., Никонов В.И. Качество обращения волнового фронта при четырехволновом взаимодействии в многомодовом волноводе с тепловой нелинейностью // Компьютерная оптика. 2022. Т. 46, Nº 1. С. 48–55. DOI: https://doi. org/10.18287/2412-6179-CO-1011
- 15. Воробьева Е.В., Ивахник В.В., Капизов Д.Р. Пространственные и временные характеристики четырехволнового преобразователя излучения в параболическом волноводе с резонансной нелинейностью // Компьютерная оптика. 2023. Т. 47, Nº 1. C. 27–35. DOI: https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-1199
- 16. Маркузе Д. Оптические волноводы. М.: Мир, 1974. 576 с.
- Ивахник В.В. Обращение волнового фронта при четырехволновом взаимодействии. Самара: Самарский университет, 2010. 246 с.

Информация об авторах

Ивахник Валерий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой оптики и спектроскопии Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия. *Область научных интересов*: нелинейная оптика, динамическая голография.

E-mail: ivakhnik@ssau.ru SPIN-κο∂ (eLibrary): 2791-2471 AuthorID (eLibrary): 20229 ResearcherID (WoS): AAH-3584-2019

Капизов Дархан Рахметулович, аспирант 4-го года обучения кафедры оптики и спектроскопии Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: нелинейная оптика, динамическая голография. E-mail: darkhankapizov@gmail.com SPIN-код (eLibrary): 6771-2032 AuthorID (eLibrary): 1109458

Никонов Владимир Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры оптики и спектроскопии Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия. *Область научных интересов*: нелинейная оптика, динамическая голография.

E-mail: nikon5919@mail.ru SPIN-κοd (eLibrary): 1965-3523 AuthorID (eLibrary): 191191 ResearcherID (WoS): S-8516-2016

> Physics of Wave Processes and Radio Systems 2024, vol. 27, no. 4, pp. 20-28

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.20-28 UDC 621.373.826 Original Research Received 6 June 2024 Accepted 8 July 2024 Published 28 December 2024

Six-wave interaction on resonant nonlinearity in a waveguide with infinitely conducting surfaces

Valery V. Ivakhnik, Darkhan R. Kapizov, Vladimir I. Nikonov

Samara National Research University 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russia

Abstract - **Background**. When using six-wave radiation converters implemented in waveguides, in nonlinear adaptive optics systems, real-time image processing, it is necessary to know the correspondence between the complex amplitudes of the signal and object waves. Aim. Study of the intensity, spatial structure of pump waves, characteristics of the nonlinear medium influence on the quality of wavefront rotation during six-wave interaction on resonant nonlinearity in a waveguide with infinitely conducting surfaces. **Methods**. Using the expansion of interacting waves into waveguide modes, expressions for the point blur function of a six-wave radiation converter are obtained, which are analyzed numerically. **Results**. Assuming that one of the pump waves excites the zero mode of the waveguide, and the change in the amplitude of the other pump wave on the edge of the waveguide changes according to the Gaussian law, the dependences of the half-width of the central maximum of the modulus of the point blur function on the intensity of the single-mode pump wave, the width of the Gaussian pump wave, and the characteristics of the nonlinear medium are obtained. **Conclusion**. It is shown that the parameters of the nonlinear medium and the intensity of the single-mode pump wave front circulation. Reducing the width of the Gaussian pump wave improves the quality of wavefront circulation.

Keywords - six-wave radiation converter; wavefront reversal; resonant nonlinearity; waveguide with infinitely conducting surfaces.

nikon5919@mail.ru (Vladimir I. Nikonov)

© BY © Valery V. Ivakhnik, Darkhan R. Kapizov, Vladimir I. Nikonov, 2024

References

- V. V. Ivakhnik and V. I. Nikonov, "Doubled phase conjugation with frequency conversion under degenerate six-wave interaction," Optika i spektroskopiya, vol. 75, no. 2, pp. 385-391, 1993, url: https://elibrary.ru/item.asp?id=37622858. (In Russ.)
- S. M. Karpuk, A. S. Rubanov, and A. L. Tolstik, "Double phase conjugation in quadratic recording of dynamic holograms in resonance media," *Optika i spektroskopiya*, vol. 80, no. 2, pp. 276–280, 1996, url: https://elibrary.ru/item.asp?id=29196117. (In Russ.)

- V. Astinov et al., "Diffractive optics implementation of six-wave mixing," Optics Letter, vol. 25, no. 11, pp. 853–855, 2000, doi: https:// doi.org/10.1364/OL.25.000853.
- R. J. D. Miller, A. Paarmann, and V. I. Prokhopenko, "Diffractive optics based four-wave, six-wave, ..., v-wave nonlinear spectroscopy," Accounts of Chemical Research, vol. 42, no. 9, pp. 1442–1451, 2009, doi: https://doi.org/10.1021/ar900040f.
- O. G. Romanov, D. V. Gorbach, and A. L. Tolstik, "Frequency transformation of optical vortices upon nondegenerate multiwave interaction in dye solutions," *Optics and Spectroscopy*, vol. 108, no. 5, pp. 768–773, 2010, doi: https://doi.org/10.1134/S0030400X10050152.
- E. Gaižauskas, K. Steponkevičius, and V. Vaičaitis, "Fifth-order intensity autocorrelations based on six-wave mixing of femtosecond laser pulses," *Physical Review A*, vol. 93, no. 2, p. 023813, 2016, doi: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.023813.
- S. Lin et al., "Optically induced second harmonic generation by six-wave mixing: A novel probe of solute orientation dynamics," *The Journal of Physical Chemistry A*, vol. 103, no. 20, pp. 3830–3836, 1999, doi: https://doi.org/10.1021/jp9845221.
- 8. H. Zhou et al., "Six-wave mixing induced by free-carrier plasma in silicon nanowire waveguides," *Laser Photonics Reviews*, vol. 10, no. 6, pp. 1054–1061, 2016, doi: https://doi.org/10.1002/lpor.201600124.
- V. V. Ivakhnik, D. R. Kapizov, and V. I. Nikonov, "Six-wave interaction with double wavefront reversal in multimode waveguides with Kerr and thermal nonlinearities," *Komp'yuternaya optika*, vol. 47, no. 5, pp. 702–709, 2023, doi: https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-1313. (In Russ.)
- 10. P. Li et al., "Optimized design of six-wave fiber optical parametric amplifiers by using a genetic algorithm," *Applied Optics*, vol. 56, no. 15, pp. 4406-4411, 2017, doi: https://doi.org/10.1364/AO.56.004406.
- 11. E. A. Tikhonov and M. T. Shpak, Nonlinear Optical Phenomena in Organic Compounds. Kiev: N. Dumka, 1979. (In Russ.)
- 12. S. Miyanaga et al., "Excited-state absorption and pump propagation effects on optical phase conjugation in a saturable absorber," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 10, no. 6, pp. 1069–1076, 1993, doi: https://doi.org/10.1364/JOSAB.10.001069.
- E. V. Vorob'eva et al., "Point spread function of a four-wave radiation converter in a multimode waveguide with Kerr nonlinearity," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 24, no. 1, pp. 15–21, 2021, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.1.15-21. (In Russ.)
- V. V. Ivakhnik, D. R. Kapizov, and V. I. Nikonov, "Quality of wavefront reversal for four-wave interaction in a multimode waveguide with thermal nonlinearity," *Komp'yuternaya optika*, vol. 46, no. 1, pp. 48–55, 2022, doi: https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-1011. (In Russ.)
- E. V. Vorob'eva, V. V. Ivakhnik, and D. R. Kapizov, "Spatial and time characteristics of a four-wave radiation converter in a parabolic waveguide with resonant nonlinearity," *Komp'yuternaya optika*, vol. 47, no. 1, pp. 27–35, 2023, doi: https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-1199. (In Russ.)
- 16. D. Marcuse, Optical Waveguides. Moscow: Mir, 1974. (In Russ.)
- 17. V. V. Ivakhnik, Wavefront Reversal in Four-Wave Interaction. Samara: Samarskiy universitet, 2010. (In Russ.)

Information about the Authors

Valery V. Ivakhnik, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Optics and Spectroscopy, Samara National Research University, Samara, Russia.

Research interests: nonlinear optics, dynamic holography. E-mail: ivakhnik@ssau.ru SPIN-code (eLibrary): 2791-2471 AuthorID (eLibrary): 20229 ResearcherID (WoS): AAH-3584-2019

Darkhan R. Kapizov, 4th year postgraduate student of the Department of Optics and Spectroscopy, Samara National Research University, Samara, Russia.

Research interests: nonlinear optics, dynamic holography. E-mail: darkhankapizov@gmail.com SPIN-code (eLibrary): 6771-2032 AuthorID (eLibrary): 1109458

Vladimir I. Nikonov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Optics and Spectroscopy, Samara National Research University, Samara, Russia.

Research interests: nonlinear optics, dynamic holography. E-mail: nikon5919@mail.ru SPIN-code (eLibrary): 1965-3523 AuthorID (eLibrary): 191191 ResearcherID (WoS): S-8516-2016

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

2024. T. 27, Nº 4. C. 29–39

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.29-39 УДК 535.1 Оригинальное исследование Дата поступления 28 апреля 2024 Дата принятия 29 мая 2024 Дата публикации 28 декабря 2024

Внешние барицентрические координаты для произвольных многоугольников и приближенный метод их вычисления

И.С. Полянский 💿

Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации 302015, Россия, г. Орел, ул. Приборостроительная, 35

Аннотация - Обоснование. В статье для обобщения применимости барицентрического метода в решении внешних краевых и начально краевых задач математической физики введено понятие внешних барицентрических координат. Цель работы состоит в формировании простого аналитического соотношения, позволяющего с заданной точностью вычислять барицентрические координаты, внешние относительно заданной произвольной многоугольной области. Методы. Соответствующее соотношение сформировано при составлении приближенно аналитического правила вычисления, которое основывается на решении методом Фредгольма внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Основу этого решения составляет разложение ядра интегрального уравнения Фредгольма второго рода по многочленам Лежандра первого и второго рода, формируемое с применением формулы Гейне. Результаты. Произведена оценка скорости сходимости полученного приближенно аналитического вычисления внешних барицентрических координат при установлении экспоненциальной сходимости в гильбертовом пространстве и полиномиальной в пространстве непрерывных функций. Уточнены алгоритмические особенности реализации составленного приближенно аналитического решения при структурированном представлении псевдокодов программ вычисления внешних барицентрических координат, сформированных преимущественно для системы компьютерной алгебры MathCad. Работоспособность продемонстрирована на конкретных примерах. Заключение. Автор статьи считает, что приведенные подробные результаты алгоритмической реализации вычисления внешних барицентрических координат вызовут интерес и сделают материал публикации доступнее широкому кругу читателей, что приведет к развитию барицентрического метода в решении краевых и начально краевых задач математической физики.

Ключевые слова – внешние барицентрические координаты; внешняя задача Дирихле; уравнение Лапласа; произвольный многоугольник; логарифмический потенциал двойного слоя; уравнение Фредгольма; многочлены Лежандра.

Введение

Теоретическое изучение колебательно-волновых процессов неизбежно связано с исследованием соответствующих краевых и начально краевых задач математической физики [1-4]. Одним из вычислительно эффективных методов их численного решения является барицентрический метод (БМ) [3]. С учетом выделенных в работах [4-9] алгоритмических особенностей реализаций вычислительная эффективность БМ основывается на формировании глобальной системы базисных функций для заданной области анализа Ω, граница $\partial \Omega$ которой параметризуется в кусочно-линейном представлении. Глобальные для Ω базисные функции составляются [6] с применением классических интерполяционных методов [5] в вводимой для Ω барицентрической системы координат [10-13]. Относительно простое аналитическое соотношение, позволяющее с заданной точностью составлять для $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ барицентрическую систему координат, получено в [13].

В целом текущие математические представления БМ [3-13] определяют его вычислительно эффективную применимость относительно численного решения внутренних краевых и начально краевых задач математической физики. Одно из направлений развития БМ состоит в формировании теоретических решений, унифицирующих его относительно исследования внешних краевых и начально краевых задач математической физики. Первичный этап в получении подобных решения состоит в введении понятия внешних барицентрических координат для Ω , задаваемой произвольной многоугольной областью, и формировании простого аналитического соотношения, позволяющего с заданной точностью составлять для $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ ($\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial \Omega$) барицентрическую систему координат.

Получение указанных теоретических решений составляет цель настоящей статьи. В основу их формирования положим результаты [13–15].

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2 : 0 \in \Omega$ – односвязная область, ограниченная замкнутой ломаной линией без самопересечений при

$$\partial \Omega = \bigcup_{i=0}^{N-1} \Gamma_i,$$
где

$$\Gamma_i = \left\{ x_i(t) = e_i t + P_i, \ t \in \left[0, e_i = P_{i+1 \mod N} - P_i \right] \right\}$$

 $\{P_0, P_1, ..., P_{N-1}\}$ – множество неповторяющихся вершин Ω , нумерация которых определена в порядке положительного обхода Ω [16].

1]};

Определение 1. Внешними барицентрическими координатами $\overline{\zeta}_i$ для Ω назовем набор $\overline{\zeta} = (\overline{\zeta}_i)_N$ функций $\overline{\zeta}_i(x) \in [0,1]$ $(x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$, которые удовлетворяют условиям:

$$\Delta \overline{\zeta}_{i}(x), \ x \in \mathbb{R}^{2} \setminus \overline{\Omega};$$

$$\overline{\zeta}_{i}(x) = t, \ x \in \Gamma_{i-1};$$

$$\overline{\zeta}_{i}(x) = 1 - t, \ x \in \Gamma_{i};$$

$$\overline{\zeta}_{i}(x) = 0, \ x \in \partial \Omega \setminus \{\Gamma_{i-1}, \Gamma_{i}\}.$$

$$(1)$$

Решение внешней задачи Дирихле (1) по аналогии с [13] выполним известным методом Фредгольма при представлении функции $\overline{\zeta}_i(x)$ в виде логарифмического потенциала двойного слоя [15, с. 93]:

$$\overline{\zeta}_{i}\left(x\right) = \int_{\partial\Omega} \Phi_{i}\left(y\right) \left[1 - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \ln\left|x - y\right|}{\partial v_{y}}\right] dl_{y}, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$; $\partial / \partial v_y$ – частная производная по внутренней нормали v_y к $\partial \Omega$ в точке $y \in \partial \Omega$; dl_y – дифференциал кривой $\partial \Omega$; $\Phi_i(y)$ – неизвестная плотность на границе $\partial \Omega$ области Ω , однозначно определяемая из интегрального уравнения Фредгольма II рода [13, с. 93]:

$$\Phi_{i}(x) + 2\int_{\partial\Omega} \Phi_{i}(y) \left[1 - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \ln|x - y|}{\partial v_{y}} \right] dl_{y} = 2U_{i}(x) \quad (3)$$
$$x \in \partial\Omega, \quad i = \overline{0, N-1}.$$

В выражении (3) через $U_i(x)$ обозначены заданные в (1) значения $\overline{\zeta}_i(x)$ на $\partial \Omega$.

Следуя результатам [13; 14], для удобства представления решения задачи (2), (3) построим $\Omega \subset \mathbb{C}: 0 \in \Omega$ на комплексной плоскости \mathbb{C} . При этом, с учетом параметризации $\partial \Omega$ и граничных условий из (1), интегральное уравнение (3) запишем в виде

$$\varphi_{j}^{i}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{0}^{1} \varphi_{k}^{i}(s) K_{jk}(t,s) ds = u_{j}^{i}(t), \qquad (4)$$

где

$$j = \overline{0, N-1}; \ \varphi_j^i(t) = \Phi_i(x_j(t));$$

 $u_{j}^{i}(t) = 2U_{i}(x_{j}(t));$

 $K_{jk}(t,s)$ – ядро интегрального уравнения (4), которое с учетом [13; 14] при $t,s \in [0,1]$ определяется соотношением

$$K_{jk}(t,s) = \begin{cases} 2|e_k| - \pi^{-1} \times \\ \times \operatorname{Im}\left[e_k / (e_k s + P_k - e_j t - P_j)\right], \quad j \neq k; \\ 2|e_k|, \quad j = k. \end{cases}$$
(5)

Решение интегрального уравнения (4) относительно $\phi_j^i(t)$ позволяет задать $\overline{\zeta}_i(x)$ при вычислении интеграла:

$$\overline{\zeta}_{i}\left(x\right) = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{0}^{1} \varphi_{j}^{i}\left(t\right) H_{j}\left(t,x\right) dt,\tag{6}$$

где

$$H_{j}(t,x) = \left| e_{j} \right| - \operatorname{Im}\left[e_{j} / \left(e_{j}t + P_{j} - x \right) \right] / 2\pi.$$
(7)

2. Приближенно аналитическое определение внешних барицентрических координат

Решение интегрального уравнения (4) по аналогии с [13; 14] предполагается выполнить с применением формулы Гейне [17, с. 169] при разложении ядра $K_{ik}(t,s)$ в виде

$$K_{jk}(t,s) = \lambda_{0}^{jk}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\lambda_{n}^{jk}(t)L_{n}(2s-1); \qquad (8)$$

$$\lambda_{0}^{jk}(t) = 2\begin{cases} |e_{k}| + \pi^{-1} \times \\ \times \operatorname{Im} \left[Q_{0} \left(2(e_{j}t + R_{jk}) / e_{k} - 1 \right) \right], & j \neq k, \\ |e_{k}|, & j = k; \end{cases}$$

$$\lambda_{n}^{jk}(t) = \begin{cases} 2\pi^{-1} \operatorname{Im} \left[Q_{n} \left(2(e_{j}t + R_{jk}) / e_{k} - 1 \right) \right], & j \neq k, \\ 0, & j = k; \end{cases}$$

n > 0,

где $R_{jk} = P_j - P_k$; $L_n(\tau)$ и $Q_n(z)$ – многочлены Лежандра первого и второго рода соответственно, задаваемые с учетом известных [14; 17; 18] рекуррентных соотношений.

Разложение (8) ядра (5) интегрального уравнения (4) на две системы линейно независимых интегрируемых с квадратом функций { $\lambda_n^{jk}(t)$ }, { $L_n(2s-1)$ } (n = 0, 1, ...) и результаты лемм [13] позволяют задать приближенно аналитическое решение внешней задачи Дирихле (1) при введении следующих представлений. Неизвестную функцию плотности $\varphi_j^i(t)$ в интегральном уравнении (4) формализуем выражением

$$\varphi_{j}^{i}\left(t\right) = u_{j}^{i}\left(t\right) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{\infty} S_{kn}^{i} \sqrt{2n+1} \lambda_{n}^{jk}\left(t\right), \tag{9}$$

где

$$S_{kn}^{i} = \sqrt{2n+1} \int_{0}^{1} \varphi_{k}^{i}(s) L_{n}(2s-1) ds.$$
 (10)

Определение S_{kn}^i выполним, применив метод PG-ядер [19], в котором при подстановке (9) в (4) задачу нахождения коэффициентов S_{kn}^i сведем к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\mathbf{S}^{i}\left(\mathbf{E}+\mathbf{T}\right)=\mathbf{U}^{i},\tag{11}$$

где Е – единичная матрица размера

$$\left[N(M+1)\right]\times\left[N(M+1)\right];$$

Т – блочная матрица, составленная из элементов

$$T_{nm}^{jk} = \sqrt{2n+1}\sqrt{2m+1} \int_{0}^{1} \lambda_{m}^{jk}(t) L_{n}(2t-1) dt$$

(n, m = 0, 1, ...);

Sⁱ – блочный вектор искомых коэффициентов разложения Sⁱ_{kn}; **U**ⁱ – блочный вектор, сформированный элементами [13]:

$$U_{kn}^{i} = \sqrt{2n+1} \int_{0}^{1} u_{k}^{i}(t) L_{n}(2t-1) dt =$$

$$\begin{cases}
1, (i = k \lor i = k-1) \land n = 0, \\
-1/\sqrt{3}, i = k \land n = 1, \\
1/\sqrt{3}, i = k-1 \land n = 1, \\
0, \quad \text{иначе.}
\end{cases}$$
(12)

Вычисление

$$T_{nm}^{jk} = \sqrt{2n+1}\sqrt{2m+1} \int_{0}^{1} \lambda_{m}^{jk}\left(t\right) L_{n}\left(2t-1\right) dt$$

может быть выполнено аналитически с применением результатов лемм [14] или численно по квадратурному методу Гаусса – Лежандра [3].

Перепишем уравнение (4) в операторной форме:

$$\boldsymbol{\varphi}^{i} + \mathcal{K} \boldsymbol{\varphi}^{i} = \mathbf{u}^{i}, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\varphi}^i = (\varphi^i_j)_N$; $\mathbf{u}^i = (u^i_j)_N$; $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_{jk})_{N \times N}$ – матричный оператор;

$$\mathcal{K}\boldsymbol{\varphi}^{i} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{K}_{0k} \boldsymbol{\varphi}_{k}^{i}; ...; \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{K}_{N-1k} \boldsymbol{\varphi}_{k}^{i}\right);$$

$$\left(\mathcal{K}_{jk}\varphi_{k}^{i}\right)\left(t\right) = \int_{0}^{1} K_{jk}\left(t,s\right)\varphi_{k}^{i}\left(s\right)ds$$

 - линейный ограниченный оператор на пространстве функций из *C*([0,1]) [13; 14].

Следуя [13; 14], введем в рассмотрение линейный ограниченный оператор:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{jk}^{M} \varphi_{k}^{i} \end{pmatrix} (t) \equiv$$

$$\sum_{n=0}^{M} (2n+1) \lambda_{n}^{jk} (t) \int_{0}^{1} \varphi_{k}^{i} (s) L_{n} (2s-1) ds,$$

$$(14)$$

и определим уравнение:

$$\boldsymbol{\varphi}_{M}^{i} + \mathcal{K}^{M} \boldsymbol{\varphi}_{M}^{i} = \mathbf{u}^{i}, \qquad (15)$$

где $\boldsymbol{\phi}_{M}^{i} = (\phi_{jM}^{i})_{N}$ обозначает приближение функции плотности ϕ_{j}^{i} выражением (9) при замене бесконечной суммы по индексу *n* конечной с ограничением числа слагаемых до *M*.

С применением формулы Гейне [17, с. 169] запишем разложение (7) в виде

$$H_{j}(t,x) = |e_{j}| - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[e_{j} \left(e_{j}t + P_{j} - x \right)^{-1} \right] =$$
(16)
$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\overline{\lambda}_{n}^{j}(x) L_{n}(2t-1);$$

$$\overline{\lambda}_{n}^{j}(x) = \begin{cases} |e_{j}| + \pi^{-1} \operatorname{Im} \left[Q_{n} \left(2\left(x - P_{j} \right) / e_{j} - 1 \right) \right], & n = 0; \\ \pi^{-1} \operatorname{Im} \left[Q_{n} \left(2\left(x - P_{j} \right) / e_{j} - 1 \right) \right], & n > 0, \end{cases}$$

для которого введем в рассмотрение операторы [14]:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}\phi^{i} \end{pmatrix} (x) \equiv \sum_{j=0}^{N-1} \int_{0}^{1} H_{j}(t,x) \phi_{j}^{i}(t) dt;$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}^{M}\phi^{i} \end{pmatrix} (x) \equiv$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Biggl\{ \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \overline{\lambda}_{n}^{j}(x) \int_{0}^{1} L_{n}(2t-1) \phi_{j}^{i}(t) dt \Biggr\}.$$

$$(17)$$

Обозначим единичный оператор символом *I*.

Уточним определение норм некоторой векторной функции $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_j)_N$ в пространствах C([0,1]) и $L_2([0,1])$ [19]:

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}\right\|_{C} = \max_{\substack{t \in [0,1]\\j \in \left\{0, N-1\right\}}} \left|\phi_{j}\left(t\right)\right|; \quad \left\|\boldsymbol{\varphi}\right\|_{L_{2}} = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} \int_{0}^{1} \left[\phi_{j}\left(t\right)\right]^{2} dt. \quad (18)$$

Для введенных представлений сформулируем основной результат настоящей статьи следующим утверждением.

Теорема 1. $\exists \tilde{M} \in \mathbb{N} : \forall M \geq \tilde{M}$ решение

$$\overline{\zeta}_{i}^{M}\left(x\right) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{M} \sqrt{2n+1} \overline{\lambda}_{n}^{j}\left(x\right) S_{kn}^{i}$$
(19)

внешней задачи Дирихле (1) существует и единственно, при этом справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \left\| \overline{\zeta}_{i}^{M} - \overline{\zeta}_{i} \right\|_{C} &\leq \operatorname{const} \max_{j \in \{0, N-1\}} \left\{ 2 \overline{\omega}_{j}^{-1} + \left| e_{j} \right| \right\} \times \end{aligned}$$
(20)

$$\times \left[\left(M + 0, 5 \right)^{-1} + \left(M + 1, 5 \right)^{-1} \right]; \\ \left\| \overline{\zeta}_{i}^{M} - \overline{\zeta}_{i} \right\|_{L_{2}} &= \operatorname{const} M 2^{-M} \times \\ \times \left(2M + 1 \right)^{-1} \left(2M + 3 \right)^{-1/2}, \end{aligned}$$
(21)

где const - положительна и не зависит от М.

В выражениях (19)-(21) приняты обозначения [13; 14]:

$$\begin{split} \varpi_{j} &= \min\left\{\Theta_{j}, \pi\left(\pi + \left|\pi - \alpha_{j}\right|\right)^{-1}\right\};\\ \Theta_{j} &= \begin{cases} \left|\sin\alpha_{j}\right|, \ \alpha_{j} \in \left(0, \pi/2\right) \cup \left(3\pi/2, 2\pi\right),\\ 1, \qquad \alpha_{j} \in \left[\pi/2, \pi\right) \cup \left(\pi, 3\pi/2\right], \end{cases} [20]; \end{split}$$

 α_i – внутренний угол Ω при вершине P_i .

Доказательство. Подставив разложение (16) в (6), получим

$$\overline{\zeta}_i\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2n+1\right) \sum_{j=0}^{N-1} \overline{\lambda}_n^j\left(x\right) \int_0^1 \varphi_j^i\left(t\right) L_n\left(2t-1\right) dt.$$
(22)

Принимая во внимание (10), перепишем (22) в виде

$$\overline{\zeta}_{i}\left(x\right) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2n+1} \overline{\lambda}_{n}^{j}\left(x\right) S_{kn}^{i}.$$
(23)

Из [21, с. 76] известно, что для интегрального оператора \mathcal{K} существует обратный оператор $(\mathcal{I} + \mathcal{K})^{-1}$ ввиду справедливости разложения (8) его ядра. Указанное обеспечивает разрешимость уравнения (13) в виде $\mathbf{\phi}^i = (\mathcal{I} + \mathcal{K})^{-1} \mathbf{u}^i$ и с учетом справедливости (23) определяет существование и единственность решения (19) внешней задачи Дирихле (1) для $M \to \infty$. Принимая во внимание результаты доказательства теоремы 2 в [14], определим следующую оценку в C([0,1]):

$$\begin{aligned} \left\| \overline{\zeta}_{i}^{M} - \overline{\zeta}_{i} \right\|_{C} &\leq \left\| \rho \mathcal{H} \right\|_{C} \left\| \boldsymbol{\xi}_{M}^{i} - \boldsymbol{\xi}_{i} \right\|_{C} + \\ &+ \left\| \boldsymbol{\xi}_{M}^{i} \right\|_{C} \left\| \rho \left(\mathcal{H}^{M} - \mathcal{H} \right) \right\|_{C}, \end{aligned}$$
Even $\boldsymbol{\varphi}^{i} = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}^{i} = \boldsymbol{\xi}^{i} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(t) - 2\sqrt{t - t^{2}} = \operatorname{Record}_{C}$

где $\mathbf{\phi}^{i} = \mathbf{\xi}_{i} \rho$, $\mathbf{\phi}_{M}^{i} = \mathbf{\xi}_{M}^{i} \rho$, $\rho \equiv \rho(t) = 2\sqrt{t - t^{2}}$ – весовая функция [13].

Учитывая представления (8), (9), (19), результаты [13; 14] для заданной параметризации $\partial \Omega$ и $\overline{\zeta}_i(x) \leq 1$ при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, установим справедливость следующих неравенств:

$$\begin{split} & \left\| \rho \mathcal{H} \right\|_{C} = \tag{25} \\ &= \max_{\substack{t \in [0,1] \\ j \in [0,N-1] \\ x \in \mathbb{R}^{2} \setminus \Omega}} \left| 2\rho(t) \left(\left| e_{j} \right| - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[\frac{e_{j}}{e_{j}t + P_{j} - x} \right] \right) \right| \leq \\ &\leq \max_{j \in \{0,N-1\}} \left| e_{j} \right| + \frac{1}{\pi} \max_{x \in \mathbb{R}^{2} \setminus \overline{\Omega}} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{0}^{1} \left| \frac{e_{j} \sqrt{t - t^{2}}}{e_{j}t + P_{j} - x} \right| dt \leq \\ &\leq \max_{j \in \{0,N-1\}} \left| e_{j} \right| + \min_{j \in [0,N-1]} \left\{ \frac{\alpha_{j}}{2\pi} \right\} + 1; \\ & \left\| \xi_{M}^{i} \right\|_{C} = \left\| \left[\rho(\mathcal{I} + \mathcal{K}^{M}) \right]^{-1} \mathbf{u}^{i} \right\|_{C} \leq \tag{26} \\ &\leq 2 \left\| \left[\rho(\mathcal{I} + \mathcal{K}^{M}) \right]^{-1} \right\|_{C} = \operatorname{const} \max_{j \in \{0,N-1\}} \left\{ 2\varpi_{j}^{-1} + \left| e_{j} \right| \right\}; \\ & \left\| \rho(\mathcal{H}^{M} - \mathcal{H}) \right\|_{C} \leq \tag{27} \\ &\leq \max_{x \in \mathbb{R}^{2} \setminus \overline{\Omega}} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{0}^{1} \left| \frac{\rho(t)}{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_{n} \left(2\frac{x - P_{j}}{e_{j}} - 1 \right) \times \\ &\times L_{n} \left(2t - 1 \right) - \frac{e_{j}}{x - e_{j}t + P_{j}} \right) \right\| \leq \\ &\leq \frac{\operatorname{const}}{2\pi} \left[\left(M + 0, 5 \right)^{-1} + \left(M + 1, 5 \right)^{-1} \right]. \\ & \left\| \xi_{M}^{i} - \xi_{i} \right\|_{C} \leq \operatorname{const} \max_{j \in \{0,N-1\}} \left\{ 2\varpi_{j}^{-1} + \left| e_{j} \right| \right\} \times \tag{28} \\ &\times \frac{\left\| \rho(\mathcal{K} - \mathcal{K}^{M}) \right\|_{C} \left\| \rho(\mathcal{I} + \mathcal{K})^{-1} \right\|_{C}^{2} \left\| \rho(\mathcal{K} - \mathcal{K}^{M}) \right\|_{C}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание результаты [13; 14] для (24)–(28), окончательно определим справедливость оценки (20), что и требовалось доказать относительно полиномиальной сходимости в *C*([0,1]) решения (19) внешней задачи Дирихле (1).

С учетом результатов [13; 14] и полученных соотношений (25)–(28) зададим следующие оценки в $L_2([0,1])$:

$$\begin{aligned} \left| \overline{\zeta}_{i}^{M} - \overline{\zeta}_{i} \right|_{L_{2}} &\leq \left\| \rho \mathcal{H} \right\|_{L_{2}} \left\| \mathbf{\xi}_{M}^{i} - \mathbf{\xi}_{i} \right\|_{L_{2}} + \\ + \left\| \mathbf{\xi}_{M}^{i} \right\|_{L_{2}} \left\| \rho \left(\mathcal{H}^{M} - \mathcal{H} \right) \right\|_{L_{2}}; \end{aligned}$$

$$(29)$$

$$\left\|\rho\left(\mathcal{H}^{M}-\mathcal{H}\right)\right\|_{C} \leq \frac{\operatorname{const} M2^{-M}}{\left(2M+1\right)\sqrt{2M+3}}^{-1};$$
(32)

$$\begin{aligned} \left\| \boldsymbol{\xi}_{M}^{i} - \boldsymbol{\xi}_{i} \right\|_{L_{2}} &\leq \\ \leq \operatorname{const} \frac{\left\| \boldsymbol{\rho} \left(\mathcal{K} - \mathcal{K}^{M} \right) \right\|_{L_{2}} \left\| \boldsymbol{\rho} \left(\mathcal{I} + \mathcal{K} \right)^{-1} \right\|_{L_{2}}^{2}}{1 - \left\| \boldsymbol{\rho} \left(\mathcal{I} + \mathcal{K} \right)^{-1} \right\|_{L_{2}} \left\| \boldsymbol{\rho} \left(\mathcal{K} - \mathcal{K}^{M} \right) \right\|_{L_{2}}} &\leq \\ \leq \frac{\operatorname{const} M2^{-M}}{(2M+1)\sqrt{2M+3}}^{-1}. \end{aligned}$$
(33)

Принимая во внимание результаты [13; 14] для (29)–(33), окончательно определим справедливость оценки (21), что и требовалось доказать относительно экспоненциальной сходимости в $L_2([0,1])$ решения (19) внешней задачи Дирихле (1). Теорема доказана.

3. Алгоритмическая реализация вычисления внешних барицентрических координат и тестовые примеры

Для наглядной демонстрации предпочтительности, работоспособности предложенного решения, а также с целью выделения общих алгоритмических особенностей практической реализации приведем структурированные псевдокоды программы вычисления внешних барицентрических координат, сформированные с синтаксисом преимущественно для САПР MathCad. Также для наглядности представим результаты работы программы в САПР MathCad на произвольном многоугольнике.

Псевдокоды программы отразим поэтапным решением, взаимосвязанным с материалом пп. 1 и 2.

1. Задание Ω многоугольной областью:

число вершин и индексы: N := 32, i := 0..N − 1,
 j := 0..N − 1;

 положение вершин с нумерацией в порядке положительного обхода Ω:

$$\begin{split} P_0 &\coloneqq \begin{pmatrix} 10\\1 \end{pmatrix}, \ P_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 10\\2.5 \end{pmatrix}, \ P_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 8\\2 \end{pmatrix}, \ P_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 8\\5 \end{pmatrix}, \\ P_4 &\coloneqq \begin{pmatrix} 6.5\\8.5 \end{pmatrix}, \ P_5 \coloneqq \begin{pmatrix} 10.5\\9 \end{pmatrix}, \ P_6 &\coloneqq \begin{pmatrix} 8\\6 \end{pmatrix}, \ P_7 \coloneqq \begin{pmatrix} 9\\5 \end{pmatrix}, \end{split}$$

$$\begin{split} P_8 \coloneqq \begin{pmatrix} 11.5\\ 9.5 \end{pmatrix}, \ P_9 \coloneqq \begin{pmatrix} 6.5\\ 10.5 \end{pmatrix}, \ P_{10} \coloneqq \begin{pmatrix} 6.5\\ 12 \end{pmatrix}, \ P_{11} \coloneqq \begin{pmatrix} 8\\ 13 \end{pmatrix}, \\ P_{12} \coloneqq \begin{pmatrix} 9.5\\ 15.5 \end{pmatrix}, \ P_{13} \coloneqq \begin{pmatrix} 9\\ 16 \end{pmatrix}, \ P_{14} \coloneqq \begin{pmatrix} 8.5\\ 17 \end{pmatrix}, \ P_{15} \coloneqq \begin{pmatrix} 8\\ 18 \end{pmatrix}, \\ P_{16} \coloneqq \begin{pmatrix} 6.5\\ 18.5 \end{pmatrix}, \ P_{17} \coloneqq \begin{pmatrix} 5\\ 18 \end{pmatrix}, \ P_{18} \coloneqq \begin{pmatrix} 4.5\\ 17 \end{pmatrix}, \ P_{19} \coloneqq \begin{pmatrix} 4\\ 16 \end{pmatrix}, \\ P_{20} \coloneqq \begin{pmatrix} 3.5\\ 15.5 \end{pmatrix}, \ P_{21} \coloneqq \begin{pmatrix} 4.5\\ 13 \end{pmatrix}, \ P_{22} \coloneqq \begin{pmatrix} 5.5\\ 12 \end{pmatrix}, \\ P_{23} \coloneqq \begin{pmatrix} 5.5\\ 10.5 \end{pmatrix}, \ P_{24} \coloneqq \begin{pmatrix} 0.5\\ 7.5 \end{pmatrix}, \ P_{25} \coloneqq \begin{pmatrix} 1.5\\ 6 \end{pmatrix}, \\ P_{26} \coloneqq \begin{pmatrix} 5.5\\ 9.5 \end{pmatrix}, \ P_{27} \coloneqq \begin{pmatrix} 3.5\\ 4.5 \end{pmatrix}, \ P_{28} \coloneqq \begin{pmatrix} 3.5\\ 1 \end{pmatrix}, \\ P_{29} \coloneqq \begin{pmatrix} 4.5\\ 1 \end{pmatrix}, \ P_{30} \coloneqq \begin{pmatrix} 6\\ 4 \end{pmatrix}, \ P_{31} \coloneqq \begin{pmatrix} 7\\ 1 \end{bmatrix}; \end{split}$$

– для выполнения условия $\Omega \subset \mathbb{R}^2 : 0 \in \Omega$ осуществляется центрирование точек:

$$\tilde{P} := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} P_i = \begin{pmatrix} 6.515625\\ 9.546875 \end{pmatrix}, P_j := P_j - \tilde{P};$$

– построение Ω на $\mathbb C$ и определение элементов, применяемых для параметризации $\partial \Omega$:

$$\begin{split} &Z_j := \left(P_j\right)_0 + i \left(P_j\right)_1, \quad e_j := z_{\text{mod}\left(j+1,N\right)} - z_j, \\ &R_{ii} := z_i - z_j. \end{split}$$

2. Формирование вспомогательных вычислительных функций:

 рекуррентное вычисление многочленов Лежандра первого и второго рода:

L(x,n) := if n = -1then return 0 else if n = 0then return 1 else if n = 1then return xelse $p0 \leftarrow 1$ $p1 \leftarrow x$ for $i \leftarrow 1$ to n-1 do $p \leftarrow \frac{(2i+1) \cdot x \cdot p1 - i \cdot p0}{i+1}$ $p0 \leftarrow p1$ $p1 \leftarrow p$ return p $Q(x,n) \coloneqq \text{if } n = -1$ then return $1 - 0.5 \ln(1 - x^2)$ else if n = 0then return $\operatorname{arccoth}(x)$ else if n = 1then return $x \operatorname{arccoth}(x) - 1$ else $p0 \leftarrow \operatorname{arccoth}(x)$ $p1 \leftarrow x \operatorname{arccoth}(x) - 1$ for $i \leftarrow 1$ to n - 1 do $p \leftarrow \frac{(2i+1) \cdot x \cdot p1 - i \cdot p0}{i+1}$ $p0 \leftarrow p1$ $p1 \leftarrow p$ return p

- ядро (5) интегрального уравнения (4):

$$K(t,s,j,k) := \begin{cases} 2|e_k| - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}\left[\frac{e_k}{e_k s + Z_k - e_j t - Z_j}\right], & j \neq k, \\ 2|e_k|, & j = k; \end{cases}$$

разложение (8) ядра (5) для заданного M (для примера положим M := 4):

 $\lambda(t, j, k, n) := \text{if } j = k$ then if n = 0then return $2|e_k|$ else return 0 else

$$r \leftarrow \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[Q \left(2 \frac{e_j t + R_{jk}}{e_k} - 1, n \right) \right]$$

if $n = 0$

then $r \leftarrow r + |e_k|$ return 2r

$$\begin{split} \tilde{K}(t,s,j,k) &\coloneqq \sum_{n=0}^{M} \Big[(2n+1)\lambda(t,i,j,n)L(2s-1,n) \Big], \\ \tilde{K}(0.2,0.8,1,3) &= 7.630364353568128, \\ K(0.2,0.8,1,3) &= 7.630398154688569; \\ &- \varphi \text{ункция } H_j(t,x) \text{ в (7):} \\ H(j,t,x) &\coloneqq \Big| e_j \Big| -\frac{1}{2\pi} \text{Im} \Bigg[\frac{e_j}{e_j t + Z_j - x} \Bigg]; \\ &- \text{разложение (16) } \varphi \text{ункции } H_j(t,x) \\ \bar{\lambda}(j,n,x) &\coloneqq r \leftarrow \frac{1}{\pi} \text{Im} \Bigg[Q \Bigg[2 \frac{x - Z_j}{e_j} - 1, n \Bigg] \Bigg] \end{split}$$

if
$$n = 0$$

then $r \leftarrow r + |e_j|$
return r
 $\tilde{H}(j,t,x) \coloneqq \sum_{n=0}^{M} [(2n+1)\overline{\lambda}(j,n,x)L(2t-1,n)],$
 $\tilde{H}(1,0.2,0.1+0.2i) = 2.1025188715423075,$
 $H(1,0.2,0.1+0.2i) = 2.102518880606145;$
– элементы T_{nm}^{jk} блочной матрицы **T** в состав-
ляемой СЛАУ:
 $T(j,k,n,m) = \sqrt{2n+1}\sqrt{2m+1} \times \times \int_{0}^{1} \lambda(t,j,k,m)L(2t-1,n)dt;$

– вспомогательная функция определения индекса в диапазоне от $\begin{bmatrix} 0; N-1 \end{bmatrix}$ и элементы U_{kn}^i блочного вектора \mathbf{U}^i , вычисляемые по правилу (12):

$$U(k,i,n) := \text{if } k = i$$

then if $n = 0$
then return 1
else if $n = 1$ then return $-1/\sqrt{3}$
else return 0
else if $k = \text{sp}(i-1,N)$
then if $n = 0$
then return 1
else if $n = 1$ then return $1/\sqrt{3}$
else return 0

$$\operatorname{sp}(i,n) = \begin{cases} \operatorname{mod}(i,n), & i > 0, \\ \operatorname{mod}(n+i,n), & i \leq 0. \end{cases}$$

 3. Составление СЛАУ (11) и ее решение при Sⁱ_{kn}:
 – число элементов в блочных векторах и матрицах составляемой СЛАУ:

$$NM := N(M+1) = 160;$$

- вычисление **T** и **U**^{*i*}:
T := for $q \leftarrow 0$ to $NM - 1$ do
 $j \leftarrow \operatorname{ceil}\left(\frac{q+1}{M+1}\right) - 1$
 $n \leftarrow \operatorname{mod}(q, M+1)$
for $g \leftarrow 0$ to $NM - 1$ do
 $k \leftarrow \operatorname{ceil}\left(\frac{g+1}{M+1}\right) - 1$
 $m \leftarrow \operatorname{mod}(g, M+1)$
 $T_{qg} = T(j, k, n, m)$
return T



M = 1



Рис. 1. Результаты расчета $\overline{\zeta}_1(x)$ для Ω Fig. 1. Calculation results of $\overline{\zeta}_1(x)$ for Ω

$$\mathbf{U}^{i} \coloneqq \text{for } q \leftarrow 0 \text{ to } NM - 1 \text{ do}$$

$$j \leftarrow \text{ceil}\left(\frac{q+1}{M+1}\right) - 1$$

$$n \leftarrow \text{mod}(q, M+1)$$

$$f_{q} = U(k, i, n)$$
return f

– формирование единичной матрицы ${\bf E}$ и решение СЛАУ (11) при определении S^i_{kn} :

$$\mathbf{E} := \operatorname{diag}(\mathbf{1}); \quad \tilde{\mathbf{S}}^{i} := (\mathbf{E} + \mathbf{T})^{-1} \mathbf{U}^{i};$$

$$\mathbf{S}^{i} := \operatorname{for} \quad q \leftarrow 0 \quad \operatorname{to} \quad NM - 1 \quad \operatorname{do}$$

$$j \leftarrow \operatorname{ceil}\left(\frac{q+1}{M+1}\right) - 1$$

$$n \leftarrow \operatorname{mod}(q, M+1)$$

$$S_{jn} = \tilde{S}_{q}^{i}$$

return S



M = 3



4. Вычисленная функция плотности $\phi_{j}^{i}(t)$ по правилу (9):

$$u(i,j,t) \coloneqq \begin{cases} 2(1-t), & i=j, \\ 2t, & \operatorname{sp}(i-1,N) = j, \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases}$$

$$\varphi(i,j,t) \coloneqq u(i,j,t) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{M} \left[\sqrt{2n+1} \lambda(t,j,k,n) S_{kn}^i \right];$$

5. Определение внешних барицентрических координат по правилу (19):

$$\overline{\zeta}(i,x) \coloneqq \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{M} \left[\sqrt{2n+1}\overline{\lambda}(j,n,x) S_{jn}^i \right].$$

На рис. 1 приведены результаты расчета линий уровня внешней барицентрической координаты (БК) $\overline{\zeta}_1(x)$ для рассматриваемого в приведенном листинге Ω при различных M.


На рис. 2 показаны результаты расчета линий уровня различных внешних БК для рассматриваемого в приведенном листинге Ω.

Заключение

Сформированное решение позволяет с экспоненциальной скоростью сходимости и высокой вычислительной устойчивостью определять внешние барицентрические координаты для произвольных многоугольников. Высокая точность полученного приближенно аналитического решения обеспечивает нахождение внешних барицентрических координат для $M \in [5;8]$. Прочие достоинства заданного решения соответствуют выводам [13].

Главный результат настоящей статьи состоит в формировании теоретического решения, составляющего исходную основу для задания глобальных базисных функций в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ при численном решении внешних краевых и начально краевых задач математической физики в приближении барицентрического метода. Автор статьи считает, что приведенные подробные результаты алгоритмической реализации вычисления внешних барицентрических координат вызовут интерес и сделают материал публикации доступнее широкому кругу читателей, позволят просто интерпретировать текущий результат в практическую реализацию решений [13; 14] и приведут к развитию барицентрического метода в направлениях, указанных в настоящей публикации, а также в работах [3; 22].

Список литературы

- 1. Табаков Д.П., Морозов С.В., Клюев Д.С. Применение тонкопроволочного интегрального представления электромагнитного поля к решению задачи дифракции электромагнитных волн на проводящих телах // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т. 25, № 2. С. 7–14. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.7-14
- Смирнов Ю.Г., Тихонов С.В. Распространение электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн в плоском волноводе, покрытом графеном, с учетом нелинейности // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2023. Т. 26, N° 4. С. 68–77. DOI: https://doi. org/10.18469/1810-3189.2023.26.4.68-77
- Ильинский А.С., Полянский И.С. Барицентрический метод в решении краевых задач математической физики // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, N° 6. С. 834–845. DOI: https://doi.org/10.31857/S0374064122060097
- 4. Полянский И.С. Барицентрический метод в вычислительной электродинамике. Орел: Академия ФСО России, 2017. 148 с.
- 5. Полянский И.С. О применении барицентрического метода в численном решении внутренней задачи электродинамики // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21, № 3. С. 36–42. URL: https://journals.ssau.ru/pwp/article/ view/7016
- 6. Ильинский А.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. О сходимости барицентрического метода в решении внутренних задач Дирихле и Неймана в R2 для уравнения Гельмгольца // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, N° 1. С. 3–18. DOI: https://doi.org/10.35634/vm210101
- 7. Электродинамический анализ зеркальных антенн в приближении барицентрического метода / И.С. Полянский [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 4. С. 36-47. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.36-47
- Ilinskiy A.S., Polyansky I.S., Stepanov D.E. Application of the barycentric method to electromagnetic wave diffraction on arbitrarily shaped screens // Computational Mathematics and Modeling. 2021. Vol. 32, no. 1. P. 7–21. DOI: https://doi.org/10.1007/s10598-021-09513-2
- 9. К вопросу сходимости барицентрического метода в решении задач дифракции на проводящих тонких экранах / А.С. Ильинский [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 3. С. 34–43. DOI: https://doi. org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.34-43
- Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области. Часть 1 // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2015. Т. 78, № 1. С. 30–36. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/baritsentricheskie-koordinaty-puassona-dlya-mnogomernoy-approksimatsii-skalyarnogopotentsiala-vnutri-proizvolnoy-oblasti-chast-1
- Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области. Часть 2 // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2015. Т. 78, № 1. С. 36–42. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/baritsentricheskie-koordinaty-puassona-dlya-mnogomernoy-approksimatsii-skalyarnogopotentsiala-vnutri-proizvolnoy-oblasti-chast-2
- 12. Полянский И.С. Барицентрические координаты Пуассона Римана // Труды СПИИРАН. 2016. Т. 49, № 6. С. 32–48. DOI: https:// doi.org/10.15622/sp.49.2
- Ильинский А.С., Полянский И.С. Приближенный метод определения гармонических барицентрических координат для произвольных многоугольников // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, N° 3. С. 391–408. DOI: https://doi.org/10.1134/S0044466919030098
- 14. Полянский И.С., Логинов К.О. Приближенный метод решения задачи конформного отображения произвольного многоугольника на единичный круг // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32, N° 1. С. 107–129. DOI: https://doi.org/10.35634/vm220108
- 15. Kress R. Linear Integral Equations. New York: Springer, 1999. 367 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0559-3
- Радыгин В.М., Полянский И.С. Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. Т. 39, № 1. С. 25–35. DOI: https://doi.org/10.17223/19988621/39/3
- 17. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра / пер. с англ. Н.Я. Виленкина. М.: Наука, 1965. 296 с.
- 18. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.
- 19. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. (Введение в теорию). М.: Наука, 1979. 408 с.
- 20. Арушанян И.О. О численном решении граничных интегральных уравнений II рода в областях с угловыми точками // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36, № 6. С. 773–782. URL:
- 21. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / пер. с англ. Б.В. Боярского, И.И. Данилюка; под ред. И.Н. Векуа. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 292 с.
- 22. Полянский И.С., Касибин С.В. Барицентрический метод в решении задач электродинамического анализа зеркальных и полосковых антенн // Радиотехника, электроника и связь: тезисы докладов VII Международной научно-технической конференции. Омск, 2023. С. 127–128.

Информация об авторе

Полянский Иван Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации, г. Орел, Россия. Область научных интересов: математическое моделирование, динамические системы, дифференциальные уравнения, методы оптимизации, оптимальное управление, конформные отображения, вычислительная электродинамика, цифровая обработка сигналов.

E-mail: van341@mail.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1282-1522 SPIN-код (eLibrary): 3238-3737 AuthorID (eLibrary): 651387 ResearcherID (WoS): R-1427-2017

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2024, vol. 27, no. 4, pp. 29-39

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.29-39 UDC 535.1 Original Research Received 28 April 2024 Accepted 29 May 2024 Published 28 December 2024

External barycentric coordinates for arbitrary polygons and an approximate method for calculating them

Ivan S. Polyansky 💿

Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation 35, Priborostroitelnaya Street, Oryol, 302015, Russia

Abstract – **Background.** In the article, the concept of external barycentric coordinates is introduced to generalize the applicability of the barycentric method in solving external boundary value and initial boundary value problems of mathematical physics. **Aim** of the work is to form a simple analytical relation that allows calculating barycentric coordinates external to a given arbitrary polygonal area with a given accuracy. **Methods.** The corresponding ratio is formed when drawing up an approximate analytical calculation rule, which is based on the solution by the Fredholm method of the external Dirichlet problem for the Laplace equation. The basis of this solution is the decomposition of the kernel of the Fredholm integral equation of the second kind by Legendre polynomials of the first and second kind, formed using the Heine formula. **Results.** The convergence rate of the obtained approximate analytical calculation of the external barycentric coordinates is estimated when establishing exponential convergence in Hilbert space and polynomial convergence in the space of continuous functions. The algorithmic features of the implementation of an approximate analytical solution with a structured representation of pseudocodes of programs for calculating external barycentric coordinates, formed mainly for the MathCad computer algebra system, are clarified. The efficiency is demonstrated by specific examples. **Conclusion**. The author of the article hopes that the detailed results of the algorithmic implementation of the calculation of external barycentric coordinates will arouse interest and make the publication material more accessible to a wide range of readers, which will lead to the development of the barycentric method in solving boundary and initial boundary value problems of mathematical physics.

Keywords – external barycentric coordinates; external Dirichlet problem; Laplace equation; arbitrary polygon; logarithmic potential of the double layer; Fredholm equation; Legendre polynomials.

≤ van341@mail.ru (Ivan S. Polyansky)

© Ivan S. Polyansky, 2024

References

- 1. D. P. Tabakov, S. V. Morozov, and D. S. Klyuev, "Application of the thin-wire integral representation of the electromagnetic field to solving the problem of diffraction of electromagnetic waves on conducting bodies," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 25, no. 2, pp. 7–14, 2022, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.7-14. (In Russ.)
- Yu. G. Smirnov and S. V. Tikhonov, "Electromagnetic TE- and TM-waves propagation in a plane waveguide covered with graphene characterized by nonlinear conductivity," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 26, no. 4, pp. 68–77, 2023, doi: https://doi. org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.7-14. (In Russ.)
- 3. A. S. Ilinskiy and I. S. Polyansky, "Barycentric method in solving boundary value problems of mathematical physics," *Differentsial'nye uravneniya*, vol. 58, no. 6, pp. 834–845, 2022, doi: https://doi.org/10.31857/S0374064122060097. (In Russ.)
- 4. I. S. Polyansky, Barycentric Method in Computational Electrodynamics. Oryol: Akademiya FSO Rossii, 2017. (In Russ.)
- 5. I. S. Polyansky, "About application the barycentric method in the numerical solution of internal problem of electrodynamics," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 21, no. 3, pp. 36-42, 2018, url: https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7016. (In Russ.)
- A. S. Ilinskiy, I. S. Polyansky, and D. E. Stepanov, "On the convergence of the barycentric method in solving internal Dirichlet and Neumann problems in R2 for the Helmholtz equation," *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*, vol. 31, no. 1, pp. 3–18, 2021, doi: https://doi.org/10.35634/vm210101. (In Russ.)
- 7. I. S. Polyansky et al., "Electrodynamic analysis of mirror antennas in the approximation of the barycentric method," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 23, no. 4, pp. 36–47, 2020, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.36-47. (In Russ.)

38

- A. S. Ilinskiy, I. S. Polyansky, and D. E. Stepanov, "Application of the barycentric method to electromagnetic wave diffraction on arbitrarily shaped screens," *Computational Mathematics and Modeling*, vol. 32, no. 1, pp. 7–21, 2021, doi: https://doi.org/10.1007/s10598-021-09513-2.
- 9. A. S. Ilinskiy et al., "On the convergence the barycentric method in solving diffraction problems on conductive thin screens," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 23, no. 3, pp. 34-43, 2020, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.4-43. (In Russ.)
- I. S. Polyansky, "Poisson barycentric coordinates for multivariate approximation of scalar potential within an arbitrary area (part 1)," Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, vol. 78, no. 1, pp. 30–36, 2015, url: https://cyberleninka.ru/article/n/ baritsentricheskie-koordinaty-puassona-dlya-mnogomernoy-approksimatsii-skalyarnogo-potentsiala-vnutri-proizvolnoy-oblastichast-1. (In Russ.)
- I. S. Polyansky, "Poisson barycentric coordinates for multivariate approximation of the scalar potential within an arbitrary area (part 2)," Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, vol. 78, no. 1, pp. 36–42, 2015, url: https://cyberleninka.ru/ article/n/baritsentricheskie-koordinaty-puassona-dlya-mnogomernoy-approksimatsii-skalyarnogo-potentsiala-vnutri-proizvolnoyoblasti-chast-2. (In Russ.)
- 12. I. S. Polyansky, "Barycentric Poisson-Riemann coordinates," *Trudy SPIIRAN*, vol. 49, no. 6, pp. 32-48, 2016, doi: https://doi.org/10.15622/sp.49.2. (In Russ.)
- A. S. Ilinskiy and I. S. Polyansky, "An approximate method for determining harmonic barycentric coordinates for arbitrary polygons," *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, vol. 59, no. 3, pp. 391–408, 2019, doi: https://doi.org/10.1134/S0044466919030098. (In Russ.)
- 14. I. S. Polyansky and K. O. Loginov, "An approximate method for solving the problem of conformal mapping of an arbitrary polygon onto a unit circle," Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki, vol. 32, no. 1, pp. 107–129, 2022, doi: https://doi.org/10.35634/vm220108. (In Russ.)
- 15. R. Kress, Linear Integral Equations. New York: Springer, 1999, doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0559-3.
- V. M. Radygin and I. S. Polyansky, "A modified method of sequential conformal mappings of predetermined polygonal regions," Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, vol. 39, no. 1, pp. 25–35, 2016, doi: https://doi.org/10.17223/19988621/39/3. (In Russ.)
- 17. G. Beytmen and A. Erdeyi, Higher Transcendental Functions. Hypergeometric Function. Legendre Function, N. Ya. Vilenkin, Eng. trans., Moscow: Nauka, 1965. (In Russ.)
- 18. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Tables of Integrals, Sums, Series and Products. Moscow: Fizmatlit, 1963. (In Russ.)
- 19. M. L. Krasnov, Integral Equations. (Introduction to Theory). Moscow: Nauka, 1979. (In Russ.)
- I. O. Arushanyan, "On the numerical solution of boundary integral equations of the second kind in domains with corner points," Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki, vol. 36, no. 6, pp. 773–782, 1996. (In Russ.)
- 21. F. Trikomi, Integral Equations, B. V. Boyarsky and I. I. Danilyuk, Eng. trans., I. N. Vekua, Ed., Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1960. (In Russ.)
- I. S. Polyansky and S. V. Kasibin, "Barycentric method in solving problems of electrodynamic analysis of mirror and strip antennas," Radiotekhnika, elektronika i svyaz': tezisy dokladov VII Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii, Omsk, pp. 127–128, 2023. (In Russ.)

Information about the Author

Ivan S. Polyansky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, employee of the Academy of the Federal Security Service of the Russian Federation, Oryol, Russia.

Research interests: mathematical modeling, dynamic systems, differential equations, optimization methods, optimal control, conformal mapping, computational electrodynamics, digital signal processing.

E-mail: van341@mail.ru *ORCID*: https://orcid.org/0000-0002-1282-1522 *SPIN-code (eLibrary)*: 3238-3737 *AuthorID (eLibrary)*: 651387 *ResearcherID (WoS)*: R-1427-2017

Физика волновых процессов и радиотехнические системы 2024. T. 27, Nº 4. C. 40-49

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.40-49 УДК 535.33:535.015 Оригинальное исследование

Дата поступления 9 июля 2024 Дата принятия 12 августа 2024 Дата публикации 28 декабря 2024

Отражение света круговой поляризации от полупроводникового кристалла CdS вблизи экситонного резонанса с учетом пространственной дисперсии

В.В. Яцышен 💿, И.И. Бородина 💿

Волгоградский государственный университет 400062, Россия, г. Волгоград, Университетский пр., 100

Аннотация - Обоснование. Исследование материалов с помощью поляризованного излучения позволяет получать дополнительную информацию о свойствах материала благодаря векторному характеру электромагнитного поля. В этой связи наибольшее применение получил эллипсометрический метод анализа оптических свойств материалов. Использование света круговой поляризации несет дополнительную информацию из-за изменения эллипса поляризации при отражении. Цель. В работе приводятся результаты расчетов частотных и угловых спектров эллипсометрических параметров отраженного света для полупроводникового кристалла CdS вблизи экситонного резонанса с учетом пространственной дисперсии. Методы. Пространственная дисперсия приводит к возникновению дополнительных волн в среде, что требует использования дополнительных граничных условий для однозначного решения задачи об отражении света от такой среды. Из уравнений Максвелла выводится дисперсионное уравнение, которое в случае р-поляризованного излучения приводит к существованию трех волн, одна из которых - продольная. С учетом полной системы граничных условий проводится решение задачи об отражении и прохождении. Результаты. Показано, что эллипсометрические параметры обладают высокой чувствительностью к характеристикам среды с пространственной дисперсией и могут служить для интерпретации экспериментальных данных. Найдено, что при отражении света круговой поляризации от среды с пространственной дисперсией характер эллипса поляризации может меняться от левой круговой до правой эллиптической поляризации, что может служить дополнительным источником информации о полупроводниковом кристалле вблизи экситонного резонанса. Заключение. Использование эллипсометрического метода совместно с эллиптически поляризованным излучением дает возможность более детального изучения сред с пространственной лисперсией.

Ключевые слова - пространственная дисперсия; дополнительные граничные условия; экситонный резонанс; эллипсометрический метод; круговая и эллиптическая поляризация света.

Введение

Исследование оптических свойств материалов вблизи фононных, экситонных и плазмонных резонансов является актуальной задачей по причине того, что в этом случае в среде возникают коллективные возбуждения - поляритоны или плазмоны, имеющие смешанный электромагнитный и механический характер. Так, вблизи экситонного резонанса в ряде полупроводников необходим учет пространственной дисперсии [1; 4; 5]. Такой учет приводит к возникновению дополнительных волн, одна из которых является продольной волной. Для корректного описания задачи об отражении определяются дополнительные граничные условия (ДГУ) [1]. Для описания ряда метаматериалов требуется построение математическая модели, которая учитывает гетерогенность, киральность и частотную дисперсию среды [8]. Необходимо отметить, что киральность по сути является эффектом пространственной дисперсии. Возбуждение поверхностных плазмонов и поляритонов вблизи

фононных и плазмонных резонансов лежит в основе уникального метода диагностики резонансных сред – метода спектроскопии поверхностного плазмонного резонанса [3; 7], в этом случае возникают узкие резонансные линии в спектре отражения, которые несут информацию об исследуемой среде.

Использование поляризованного излучения при оптической диагностике материалов позволяет получать дополнительную информацию о свойствах материала из-за векторного характера электромагнитного поля. Наибольшее распространение получил эллипсометрический метод анализа оптических свойств материалов [2; 6], позволяющий анализировать сразу два эллипсометрических параметра. Еще большую информацию относительно оптических свойств дает использование света круговой поляризации - в этом случае при отражении возникает свет эллиптической поляризации, ориентация которого несет полезную информацию относительно исследуемой среды [9; 10].

■ yatsyshen.valeriy@volsu.ru (Яцышен Валерий Васильевич)

Учет пространственной дисперсии при анализе оптических свойств полупроводниковых материалов приводит к возникновению дополнительных волн, одна из которых является продольной волной [1; 4; 5]. Для корректного описания задачи об отражении требуются дополнительные граничные условия (ДГУ) [1]. В настоящей работе приведены результаты расчета эллипсометрических параметров при отражении света круговой поляризации от среды с пространственной дисперсией.

1. Постановка задачи

На границу кристалла CdS вблизи экситонного резонанса падает световая волна с левой круговой поляризацией. Требуется найти частотно-угловые спектры эллипсометрических параметров отраженной волны, а также провести анализ изменения формы эллипса поляризации при изменении частоты и угла падения.

2. Методы решения

Задача решается на основе уравнений Максвелла в среде с пространственной дисперсией.

Диэлектрическая проницаемость кристалла CdS вблизи экситонного резонанса имеет вид [8]:

$$\varepsilon(\omega, k) = \varepsilon_0 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma + \frac{\omega^2}{D_0}p^2}.$$
 (1)

Здесь ω_0 – частота экситонного резонанса; ω_p – плазменная частота; ω – частота падающего света; ε_0 – диэлектрическая проницаемость кристалла при $\omega \rightarrow \infty$; γ – параметр затухания; p – показатель преломления; D_0 – параметр пространственной дисперсии:

$$D_0 = \frac{m_e^* c^2}{\hbar \omega};$$

c ∂t

 m_e^- – эффективная масса экситона; c – скорость света.

В основе анализа распространения электромагнитных волн в среде лежат уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$
(2)

Решение этих уравнений ищем в виде нормальных волн:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i \left(\vec{k} \vec{r} - \omega t \right), \tag{3}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp i \left(\vec{k} \vec{r} - \omega t \right).$$

В качестве плоскости падения мы выбираем плоскость XZ. Поэтому у-составляющая волнового вектора для всех возникающих волн будет равна нулю – $k_y = 0$. Задача разбивается на 2 случая – sи р-поляризацию. В первом случае имеем следующие значения для компонент поля \vec{E} : $E_y \neq 0$, $E_x = E_z = 0$. Для р-поляризации – $E_y = 0$, $E_x \neq 0$, $E_z \neq 0$.

Подстановка предполагаемого вида решения (3) в уравнения Максвелла (2) для случая s-поляризации приводит к дисперсионному уравнению:

$$k^2 = k_0^2 \varepsilon \left(\omega, k \right). \tag{4}$$

Здесь $k_0 = \omega / c$.

В случае р-поляризации для нахождения дисперсионного уравнения получаем следующее условие:

$$\varepsilon \left(k_0^2 \varepsilon - k^2 \right) = 0. \tag{5}$$

Из (5) вытекает существование трех нормальных волн в среде с пространственной дисперсией для р-поляризации: двух поперечных, дисперсионное уравнение для которых совпадает с уравнением (4), и одной продольной с дисперсионным уравнением

 $\varepsilon(\omega,k)=0.$

Мы рассматриваем случай, когда частота падающего света ω близка к частоте экситона ω_0 . В таком случае формулу (1) для диэлектрической проницаемости можно преобразовать к виду

$$\varepsilon(\omega,k) = \varepsilon_0 + \frac{B_0}{-2Y_0 - i\Gamma_0 + \frac{1}{D_0}p^2}.$$

Здесь

$$B_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}, \quad Y_0 = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \quad \Gamma_0 = \frac{\gamma}{\omega_0}$$

Показатели преломления для поперечных волн находятся как корни следующего биквадратного уравнения:

$$p^4 - 2F_1 p^2 + F_2 = 0. ag{6}$$

Для продольной волны получается следующее уравнение:

$$p^2 = F_3. (7)$$

В формулах (6), (7) введены следующие обозначения:

$$F_1 = Y_0 D_0 + \frac{\varepsilon_0}{2} + i \frac{\Gamma_0 D_0}{2},$$



Рис. 1. Зависимость действительных частей величин N_i от частоты. Угол падения $g = 45^{\circ}$ Fig. 1. Dependence of the real parts of the N_i quantities on the frequency. Angle of incidence $g = 45^{\circ}$

$$\begin{split} F_2 &= 2Y_0 D_0 \varepsilon_0 - B_0 D_0 + i \Gamma_0 D_0 \varepsilon_0 \\ F_3 &= \frac{1}{\varepsilon_0} F_2. \end{split}$$

Дополнительное граничное условие мы выбрали в виде следующего условия на поляризацию при z = 0 [1]:

$$\vec{P} + \frac{1}{k_0 T} \frac{\partial \vec{P}}{\partial z} = 0.$$

Для s-поляризации используется только y-составляющая уравнения (8), а для p-поляризации – x и z-составляющие. При учете дополнительного граничного условия (8), а также обычного условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} задача об отражении решается однозначно.

3. Результаты

Расчет частотно-угловых спектров эллипсометрических параметров проводился для следующих значений параметров, относящихся к полупроводниковому кристаллу CdS:

$$\varepsilon_0 = 8,3, \ \hbar\omega_0 = 2,5524 \ \text{eV}, \ B_0 = 1,25 \cdot 10^{-2},$$

 $D_0 = 1,8 \cdot 10^5, \ T = 13,8 - 18,3i.$

Результаты расчетов спектров эллипсометрических параметров приведены ниже на графиках 1–10.

На рис. 1-2 показаны частотные зависимости действительных и мнимых частей величин Ni, которые определяются как относительные значения *z*-компонент волновых векторов $\vec{k_i}$ нормальных световых волн в среде с пространственной дисперсией:

$$N_i = \frac{k_{iz}}{k_0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Из этих рисунков видно, что после значения частоты $\hbar\omega_0 = 2,5524$ eV в среде распространяются сразу три волны, в то время как до этой частоты – только одна первая поперечная волна, две другие, включая продольную, здесь имеют большие мнимые части Im(N_i) и поэтому не распространяются.

4. Обсуждение результатов

Из рис. З видно, что угловые зависимости эллипсометрического параметра ρ при различных частотах значительно отличаются друг от друга, в то время как частотные зависимости испытывают наибольшие изменения в диапазоне частот $\hbar \omega =$ = 2,554–2,555 eV (см. рис. 6).



Рис. 2. Зависимость мнимых частей величин N_i от частоты. Угол падения $g = 45^{\circ}$ Fig. 2. Dependence of the imaginary parts of the N_i quantities on the frequency. Angle of incidence $g = 45^{\circ}$



Рис. 3. Зависимость эллипсометрического параметра ρ от угла падения *g* для различных значений частоты: $\hbar\omega_1 = 2,5544$ eV, $\hbar\omega_2 = 2,55455$ eV, $\hbar\omega_3 = 2,5545$ eV

Fig. 3. Dependence of the ellipsometric parameter ρ on the angle of incidence g for different frequency values: $\hbar\omega_1 = 2,5544$ eV, $\hbar\omega_2 = 2,55455$ eV, $\hbar\omega_3 = 2,55455$ eV



Рис. 4. Зависимость эллипсометрического параметра Δ от угла падения *g* для различных значений частоты: $\hbar\omega_1 = 2,5544$ eV, $\hbar\omega_2 = 2,5545$ eV, $\hbar\omega_3 = 2,55455$ eV





Рис. 5. Зависимость эллипсометрического параметра Δ от частоты при различных углах падения $g = 45^{\circ}$, 50°, 60°, 70°, 75° Fig. 5. Dependence of the ellipsometric parameter Δ on the frequency at different angles of incidence $g = 45^{\circ}$, 50°, 60°, 70°, 75°



Рис. 6. Зависимость эллипсометрического параметра ρ от частоты при различных углах падения $g = 45^{\circ}$, 50° , 60° , 70° , 75° Fig. 6. Dependence of the ellipsometric parameter ρ on the frequency at different angles of incidence $g = 45^{\circ}$, 50° , 60° , 70° , 75°



Рис.7. Круговая левая поляризация падающей волны Fig. 7. Circular left polarization of the incident wave



Рис. 8. Левая эллиптическая поляризация отраженной волны: $\hbar \omega = 2,554 \text{ eV}$, $\rho = 0,844$, $\Delta = 0,354$, $g = 45^{\circ}$ Fig. 8. Left elliptical polarization of the reflected wave: $\hbar \omega = 2,554 \text{ eV}$, $\rho = 0,844$, $\Delta = 0,354$, $g = 45^{\circ}$





46



Рис. 10. Правая эллиптическая поляризация отраженной волны: $\hbar \omega = 2,5545 \text{ eV}, \rho = 2,173, \Delta = -2,653, g = 75^{\circ}$ Fig. 10. Right elliptical polarization of the reflected wave: $\hbar \omega = 2,5545 \text{ eV}, \rho = 2,173, \Delta = -2,653, g = 75^{\circ}$

Следует обратить особое внимание на сильную изменчивость второго эллипсометрического параметра Δ (рис. 3) как от угла падения, так и от частоты (рис. 5). Это приводит к тому, что отраженный эллипс поляризации может значительно менять свою конфигурацию в зависимости от частоты и угла падения. Это продемонстрировано на рис. 7–10. Первоначально на среду падала световая волна круговой поляризации.

Из приведенных рисунков видно, что характер эллипса поляризации существенно зависит от частоты падающего излучения и от угла падения.

Заключение

В работе приводятся результаты расчетов частотных и угловых спектров эллипсометрических параметров отраженного света для полупроводникового кристалла CdS вблизи экситонного резонанса с учетом пространственной дисперсии. Показано, что эллипсометрические параметры обладают высокой чувствительностью к характеристикам среды с пространственной дисперсией и могут служить для интерпретации экспериментальных данных.

Список литературы

- Agranovich V.M., Gartstein Yu.N. Spatial dispersion and negative refraction of light // Physics-Uspekhi. 2006. Vol. 49, no. 10. P. 1029. DOI: https://doi.org/10.1070/PU2006v049n10ABEH006067
- Yatsishen V.V., Amelchenko Yu.A. Ellipsometry of biological objects in the mode of attenuated total reflection (ATR) using a circularly polarized laser light // Progress in Biomedical Optics and Imaging – Proceedings of SPIE. 2020. Vol. 11458. P. 114580S. DOI: https:// doi.org/10.1117/12.2564203
- Yatsyshen V.V. The use of plasmon resonance spectroscopy to analyze the parameters of thin layers // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1515, no. 2. P. 022047. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1515/2/022047
- 4. Janaszek B., Tyszka-Zawadzka A., Szczepanski P. Influence of spatial dispersion on propagation properties of waveguides based on hyperbolic metamaterial // Materials. 2021. Vol. 14, no. 22. P. 6885. DOI: https://doi.org/10.3390/ma14226885
- Kinsler P. A new introduction to spatial dispersion: Reimagining the basic concepts // Photonics and Nanostructures Fundamentals and Applications. 2021. Vol. 43. P. 100897. DOI: https://doi.org/10.1016/j.photonics.2021.100897
- 6. Яцышен В.В., Потапова И.И. Математическое моделирование частотной зависимости эллипсометрических параметров световой волны, отраженной от нанокомпозитного слоя // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. 2022. № 11-2. С. 170–173.

Яцышен В.В., Бородина И.И. Отражение света круговой поляризации от полупроводникового кристалла CdS ... Yatsyshen V.V., Borodina I.I. Reflection of circularly polarized light from a CdS semiconductor crystal ...

- 7. Yatsyshen V.V. Application of nanocomposite materials in plasmon surface resonance spectroscopy // Journal of Physics: Conference Series. 2022. Vol. 2373. P. 042012. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2373/4/042012
- 8. Исследование кирального метаматериала СВЧ-диапазона на основе равномерной совокупности С-образных проводящих элементов / И.Ю. Бучнев [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2023. Т. 26, Nº 1. С. 79-92. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.1.79-92
- 9. Яцышен В.В., Бородина И.И. Особенности спектра отраженного и прошедшего света круговой поляризации для тонкого слоя анизотропного кристалла типа вюрцита вблизи фононного резонанса // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2023. Т. 26, Nº 4. С. 10-16. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.4.10-16
- 10. Бородина И.И., Яцышен В.В. Частотная зависимость групповой скорости поверхностных поляритонов в одноосном кристалле типа вюрцита // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2024. Т. 27, Nº 1. С. 19-25. DOI: https:// doi.org/10.18469/1810-3189.2024.27.1.19-25

Информация об авторах

Яцышен Валерий Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры судебной экспертизы и физического материаловедения Волгоградского государственного университета, г. Волгоград, Россия.

Область научных интересов: радиофизика и квантовая радиофизика, оптические свойства конденсированных сред, фотонные кристаллы, метаматериалы.

E-mail: yatsyshen.valeriy@volsu.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4185-2333 SPIN-код (eLibrary): 9693-4494 AuthorID (eLibrary): 148248 ResearcherID (WoS): AAZ-6993-2021 AuthorID (Scopus): 8442731600

48

Бородина Ирина Игоревна, аспирант кафедры судебной экспертизы и физического материаловедения Волгоградского государственного университета, г. Волгоград, Россия.

Область научных интересов: оптические свойства конденсированных материалов, включая нанокомпозиты, метаматериалы. E-mail: ipotapova28@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0009-0008-4207-0660

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2024, vol. 27, no. 4, pp. 40-49

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.40-49 UDC 535.33:535.015 **Original Research**

Received 9 July 2024 Accepted 12 August 2024 Published 28 December 2024

Reflection of circularly polarized light from a CdS semiconductor crystal near the exciton resonance taking into account spatial dispersion

Valeriy V. Yatsyshen 🗅, Irina I. Borodina 🗅

Volgograd State University 100, University Avenue, Volgograd, 400062, Russia

Abstract - Background. The study of materials using polarized radiation allows one to obtain additional information about the properties of the material due to the vector nature of the electromagnetic field. In this regard, the most widely used method is the ellipsometric method for analyzing the optical properties of materials. The use of circularly polarized light carries additional information due to the change in the polarization ellipse upon reflection. Aim. The paper presents the results of calculations of the frequency and angular spectra of the ellipsometric parameters of reflected light for a CdS semiconductor crystal near the exciton resonance, taking into account spatial dispersion. Methods. Spatial dispersion leads to the appearance of additional waves in the medium, which requires the use of additional boundary conditions to uniquely solve the problem of light reflection from such a medium. From Maxwell's equations a dispersion equation is derived, which in the case of p-polarized radiation leads to the existence of three waves, one of which is longitudinal. Taking into account the complete system of boundary conditions, the problem of reflection and transmission is solved. Results. It is shown that ellipsometric parameters are highly sensitive to the characteristics of a medium with spatial dispersion and can serve to interpret experimental data. It was found that when circularly polarized light is reflected from a medium with spatial dispersion, the nature of the polarization ellipse can change from left-handed circular to right-handed elliptical polarization, which can serve as an additional source of information about the semiconductor crystal near the exciton resonance. Conclusion. The use of the ellipsometric method in conjunction with elliptically polarized radiation makes it possible to study media with spatial dispersion in more detail.

Keywords – spatial dispersion; additional boundary conditions; exciton resonance; ellipsometric method; circular and elliptical polarization of light.

[≤] yatsyshen.valeriy@volsu.ru (Valeriy V. Yatsyshen)

References

- 1. V. M. Agranovich and Yu. N. Gartstein, "Spatial dispersion and negative refraction of light," Physics-Uspekhi, vol. 49, no. 10, p. 1029, 2006, doi: https://doi.org/10.1070/PU2006v049n10ABEH006067.
- 2. V. V. Yatsishen and Yu. A. Amelchenko, "Ellipsometry of biological objects in the mode of attenuated total reflection (ATR) using a circularly polarized laser light," Progress in Biomedical Optics and Imaging - Proceedings of SPIE, vol. 11458, pp. 114580, 2020, doi: https://doi.org/10.1117/12.2564203.
- V. V. Yatsyshen, "The use of plasmon resonance spectroscopy to analyze the parameters of thin layers," Journal of Physics: Conference 3 Series, vol. 1515, no. 2, p. 022047, 2020, doi: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1515/2/022047.
- 4. B. Janaszek, A. Tyszka-Zawadzka, and P. Szczepanski, "Influence of spatial dispersion on propagation properties of waveguides based on hyperbolic metamaterial," Materials, vol. 14, no. 22, p. 6885, 2021, doi: https://doi.org/10.3390/ma14226885.
- 5. P. Kinsler, "A new introduction to spatial dispersion: Reimagining the basic concepts," Photonics and Nanostructures Fundamentals and Applications, vol. 43, p. 100897, 2021, doi: https://doi.org/10.1016/j.photonics.2021.100897.
- 6. V. V. Yatsyshen and I. I. Potapova, "Mathematical modeling of the frequency dependence of the ellipsometric parameters of a light wave reflected from a nanocomposite layer," Sovremennaya nauka: aktual'nye problemy teorii i praktiki. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki, no. 11-2, pp. 170-173, 2022. (In Russ.)
- 7. V. V. Yatsyshen, "Application of nanocomposite materials in plasmon surface resonance spectroscopy," Journal of Physics: Conference Series, vol. 2373, p. 042012, 2022, doi: https://doi.org/10.1088/1742-6596/2373/4/042012.
- 8. I. Yu. Buchnev et al., "Investigation of the microwave chiral metamaterial based on a uniform set of C-shaped conductive inclusions," Physics of Wave Processes and Radio Systems, vol. 26, no. 1, pp. 79-92, 2023, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.1.79-92. (In Russ.)
- 9. V. V. Yatsyshen and I. I. Borodina, "Peculiarities of the spectrum of reflected and transmitted light of circular polarization for a thin layer of an anisotropic wurtzite-type crystal near phonon resonance," Physics of Wave Processes and Radio Systems, vol. 26, no. 4, pp. 10-16, 2023, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.4.10-16. (In Russ.)
- 10. I. I. Borodina and V. V. Yatsyshen, "Frequency dependence of the group velocity of surface polaritons in a single-axle crystal of the Würcite type," Physics of Wave Processes and Radio Systems, vol. 27, no. 1, pp. 19-25, 2024, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2024.27.1.19-25. (In Russ.)

Information about the Authors

Valeriy V. Yatsyshen, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Forensic Science and Physical Materials Science, Volgograd State University, Volgograd, Russia.

Research interests: radiophysics and quantum radiophysics, optical properties of condensed matter, photonic crystals, metamaterials. E-mail: yatsyshen.valeriy@volsu.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4185-2333 SPIN-code (eLibrary): 9693-4494 AuthorID (eLibrary): 148248 ResearcherID (WoS): AAZ-6993-2021 AuthorID (Scopus): 8442731600

Irina I. Borodina, postgraduate student of the Department of Forensic Science and Physical Materials Science, Volgograd State University, Volgograd, Russia.

Research interests: optical properties of condensed materials, including nanocomposites, metamaterials.

E-mail: ipotapova28@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0009-0008-4207-0660

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

2024. T. 27, Nº 4. C. 50-58

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.50-58 УДК 621.396.4 Оригинальное исследование Дата поступления 30 марта 2024 Дата принятия 30 апреля 2024 Дата публикации 28 декабря 2024

Модель расчета линии радиосвязи на основе данных дистанционного зондирования земли

А.Т. Албузов¹, П.Е. Шахов¹, В.И. Филатов² 💿

¹ Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия» 394064, Россия, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54а ² Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана 105005, Россия, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5

Аннотация - Обоснование. В процессе функционирования современных комплексов и средств специализированного назначения в условиях прямой видимости между радиосредствами не всегда возможна передача данных, что существенно снижает эффективность системы передачи данных и увеличивает время для поиска новых мест размещения приемопередающих средств. Причина данной проблемы может крыться в особенностях рельефа местности, который оказывает интерференционное и дифракционное влияние на распространение радиосигнала. При этом значительный интерес для решения данной проблемы могут представлять анализ и цифровая модель рельефа местности из данных дистанционного зондирования земли и реализации на его основе автоматизированных расчетов по поиску наилучших с точки зрения электромагнитной совместимости координат в требуемых районах. Цель. Основная цель работы определяется необходимостью разработки алгоритмов и программной реализации инструмента, который в итоге позволит при заданных характеристиках аппаратных средств оперативно и достоверно проанализировать возможность и оценить параметры для организации устойчивой радиосвязи еще на этапе планирования с использованием спутниковых интерактивных карт. Метод. В статье представлены разработанные алгоритмы и скриншоты реализации программы расчета интерференционного влияния рельефа с учетом подстилающей поверхности на интервале линии радиосвязи. Результаты. Представлены результаты программной реализации, которая осуществляет расчет существенной зоны распространения радиосигнала в соответствии с радиочастотой, классифицирует канал в зависимости от наличия в существенной зоне препятствий рельефа, определяет точку отражения на радиотрассе по принципу равенства углов падения и отражения и проверяет ее принадлежность направлениям диаграмм антенн, осуществляет учет коэффициента отражения у подстилающей поверхности водного объекта в точке отражения и рассчитывает величину интерференционных потерь. Заключение. Разработана программа, позволяющая определять напряженность поля излучателя в любой точке участка местности с учетом препятствий.

Ключевые слова – существенная зона распространения сигнала; ослабление радиосигнала; рельеф местности; цифровая модель рельефа; SRTM.

Введение

Устойчивая и непрерывная радиосвязь - залог эффективности применения современных средств специализированного назначения. Для оперативной оценки условий применения средств радиосвязи необходимы инструменты, позволяющие проводить оценку физико-географических условий района и влияния на каналы радиосвязи условий пересеченной местности. Как показывает практика, нередко при использовании комплексов и средств специализированного назначения в условиях, удовлетворяющих критерию оптической (прямой) видимости между средствами, радиосвязь отсутствует, что приводит к поиску новых вариантов размещения с последующим перемещением, повторным развертыванием средств, или работа осуществляется в неавтоматизированном режиме, если линия радиосвязи используется для внутрикомплексного обмена, что существенно

снижает эффективность. Как показала практика, наибольшим спросом пользуется программное обеспечение, позволяющее применять спутниковые интерактивные карты, которые дают возможность при выборе мест размещения средств достаточно детально анализировать пригодность выбираемых мест для размещения по таким критериям, как наличие транспортной доступности, наличие естественных препятствий ландшафта и местности.

Существующие стандарты и рекомендации [1; 2] по расчету линий радиосвязи обладают сложным изложением материала и сориентированы для проектировочных работ с результатами в виде оптимальных высот размещения антенных устройств в линии радиосвязи для ее устойчивого функционирования. При применении мобильных средств и комплексов специализированного назначения, как правило, высота антенных устройств неизменна, лица, определяющие места размещения средств, ищут компромисс между всеми факторами, влияющими на эффективность в условиях крайне ограниченного времени и ограниченных возможностей территориального маневра силами и средствами.

1. Теоретические положения модели

Качественная и устойчивая радиосвязь не обуславливается лишь наличием оптической (прямой) зоны видимости между точками приема и передачи. Рельеф местности в зависимости от его конфигурации оказывает интерференционное и дифракционное влияние на радиосигнал. Как минимум лучевую модель распространения радиосигнала можно использовать при полном отсутствии препятствий в существенной зоне распространения, что все равно требует проведения расчетов и оценки. Таким образом, существенную пользу окажет программное обеспечение, доступное для пользователя и устанавливаемое на портативные средства с операционной системой типа Android, а не только на специализированные стационарные ЭВМ и ноутбуки, которые также могут быть с различными операционными системами. С этой точки зрения и с точки зрения кросс-платформенности представляет интерес реализация на языке программирования Java. Существенный интерес представляет рассмотрение возможности генерации рельефа местности из данных дистанционного зондирования Земли и реализации на его основе автоматизированных расчетов. По оценке научного геоинформационного центра РАН, а также на основе проведенных исследований точности модели Shuttle Radar Topographic Mission (SRTM) [3] с абсолютными высотами земной поверхности в углах с точностью до З угловых секунд (или примерно 90 × 90 м) в самой крупной в России широтно ориентированной близ 52-55° с. ш. зоне разница между SRTM-матрицей и отметками государственной геодезической сети изменяется от -3,5 до -4,5 м, а в нулевых зонах от -0,5 до +0,5 м и т. д. (рис. 1). Другим типом международных файлов DEM SRTM являются файлы цифровой модели рельефа, которые опубликованы с точностью до 1 угловой секунды (или примерно 30 × 30 м) и демонстрируют улучшенный характер данных SRTM с самым высоким разрешением из тех, которые сейчас открыто публикуются.

Таким образом, целью работы являлась разработка алгоритмов и программная реализация инструмента, позволяющего при заданных харак-



Рис. 1. Фрагмент карты зональности систематических ошибок на матрице высот SRTM с точностью до 3 угловых секунд (или примерно 90 × 90 м) в пределах территории Северной Евразии Fig. 1. Fragment of the map of zonality of systematic errors on the SRTM height matrix with an accuracy of up to 3 arc seconds (or approximately 90 × 90 m) within the territory of Northern Eurasia

теристиках средств оперативно и достоверно проанализировать возможность организации устойчивой радиосвязи еще на этапе планирования с использованием спутниковых интерактивных карт.

Обращение к данным DEM SRTM осуществляется с геодезическими координатами мест размещения средств, получение которых легко реализовать использованием современных интерактивных карт.

Уравнение передачи [1-4; 7] связывает мощность сигнала на входе приемника с энергетическими параметрами и затуханием (ослаблением) радиоволн на интервалах. В соответствии с этим мощность сигнала на входе приемника сравнивается с потерями на интервале для получения запаса уровня сигнала, от которого будет зависеть качество радиосвязи в развертываемой линии.

Исходя из анализа существующих рекомендаций по расчету [7; 8] и теоретических положений по распространению радиоволн [4–6], отметим затрудняющие оперативное определение условий и оценку обстановки особенности по всем этапам проведения расчетов.

Первоначальный этап – предварительное определение мест размещения средств, построение профиля местности на интервале линии внутрикомплексной радиосвязи с учетом эквивалентного радиуса Земли и вертикального градиента диэлектрической проводимости для соответствующего географического региона, расчет существенной зоны распространения радиосигнала, классифицирование канала. Кроме построения профиля местности также классифицирование канала усложняется необходимостью проведения





Рис. 2. Расположение существенной зоны распространения радиосигнала при разности высот антенн Fig. 2. Location of the significant radio signal propagation zone with a difference in antenna heights

52



Рис. 3. Алгоритм извлечения данных о высотах рельефа местности из файла DEM SRTM и генерации профиля рельефа местности между средствами радиосвязи

Fig. 3. Algorithm for extracting terrain elevation data from a DEM SRTM file and generating a terrain profile between radio communication facilities



Fig. 4. Algorithm for calculating losses in a radio communication line



(Продолжение) **Рис. 4**. Алгоритм расчета потерь в линии радиосвязи (*Continuation*) **Fig. 4**. Algorithm for calculating losses in a radio communication line

Таблица. Перечень и описание созданных классов Table. List and description of created classes

Наименование класса	Описание класса
SRTMEle	Методы класса возвращают значения высот на интервале радиотрассы, обращение к классу и его методам осуществляется в других классах и методах для программного преобразования координат, программных геометрических расчетов, расчетов потерь в линии радиосвязи и визуального отображения результатов расчета в интерфейсе пользователя, получение значений высот осуществляется на основе передаваемых в методы класса геодезических координат точки
SpaceXYZ	Методы класса возвращают значения прямоугольных пространственных координат, расчет производится на основе передаваемых в методы класса геодезических координат выбираемых точек
SRTM_Distance Calculation	Методы класса возвращают расстояние между двумя точками, расчет осуществляется на основе передаваемых в методы класса прямоугольных пространственных координат точек
SRTMGeodezCoordCalc_ fromXYZSpace	Методы класса возвращают геодезические координаты (широту и долготу), расчет осуществляется на основе передаваемых в методы класса прямоугольных пространственных координат точек
SRTMSk42Coord	Методы класса возвращают плоские прямоугольные координаты СК42, расчет осуществляется на основе предаваемых в методы класса геодезических координат
ArrHeight CalculationGeodez	Методы класса возвращают массив данных точек с выбираемым шагом дискретизации рельефа местности на радиотрассе, массив содержит информацию о высоте точки, ее геодезических и плоских пространственных координатах, обращение к классу и его методам осуществляется в интересах дальнейших преобразований, геометрических расчетов, расчетов потерь в линии радиосвязи и визуального отображения результатов расчета в интерфейсе пользователя

геометрических расчетов при разности высот антенных устройств (рис. 2).

Указанные на рис. 2 обозначения характеризуют следующие параметры: $h_{\mu, cp, \Phi p}$ – высота нижней границы существенной зоны распространения радиосигнала (первой зоны Френеля), которая отсекает часть препятствия, $H_{1,2abcA\Phi y}$ – высоты мачт соответствующих антенно-фидерных устройств, $\Delta h_{\mu, cp, \Phi p}$ – величина смещения нижней границы зоны вниз или вверх.

Второй этап расчета – расчет влияния на распространение радиосигнала атмосферы и рельефа местности. На данном этапе необходимо произвести расчет потерь свободного пространства, расчет потерь в атмосфере и в соответствии с проведенной классификацией канала и анализа профиля на первоначальном этапе определить величину интерференционных и дифракционных потерь. При открытом интервале рассчитывается интерференционное влияние рельефа (точки отражения (Продолжение) **Таблица**. Перечень и описание созданных классов (*Continuation*) **Table**. List and description of created classes

Наименование класса	Описание класса
ArrHeightWater	Методы класса возвращают массив данных, который содержит информацию об абсолютном уровне водного объекта и координаты границ водного объекта, которые определяются пользователем на интерактивной карте на радиотрассе
CalculationRadioLinkFild	Методы класса возвращают: значения координат для визуального отображения в интерфейсе пользователя существенной зоны распространения радиосигнала в соответствии с его радиочастотой; абсолютные высоты антенно-фидерных устройств; в соответствии с шагом дискретизации рельефа массив отрезков для запрограммированных геометрических расчетов в целях классификации канала и поиска точки отражения и ее принадлежности к участку местности; координаты точек отражения на основе равенства углов падения и отражения радиосигнала; значение разности хода ЭМВ, величину сдвига фаз, множитель интерференционного ослабления; величину ослабления радиосигнала с учетом ослабления свободного пространства; величину просвета на радиотрассе в каждой точке в соответствии с выбираемым шагом дискретизации и классификацию канала радиосвязи
XYPolyReliefCalculation	Методы класса возвращают значения координат полиномов для визуального отображения в интерфейсе пользователя профиля рельефа местности, профиля водного объекта в соответствии с шагом дискретизации рельефа



Рис. 5. Выбор мест размещения средств и получение их геодезических координат на интерактивной карте Fig. 5. Selecting locations for the placement of funds and obtaining their geodetic coordinates on an interactive map



Рис. 6. Определение границ водного объекта и получение их геодезических координат на интерактивной карте Fig. 6. Determining the boundaries of a water body and obtaining their geodetic coordinates on an interactive map



Рис. 7. Интерфейс программы (окно с отображением сгенерированного рельефа местности и расчетом канала линии радиосвязи в соответствии с установленными параметрами приемной и передающей аппаратуры)

Fig. 7. Program interface (window displaying the generated terrain and calculating the radio communication channel in accordance with the set parameters of the receiving and transmitting equipment)

с большой вероятностью должны присутствовать на радиотрассе), при полузакрытом интерференционное влияние рельефа и дифракционное и при закрытом – дифракционное. Данный этап существенно осложняется: поиском точек отражения, необходимостью учета подстилающей поверхности в точках отражения и их принадлежности направлению диаграммы направленности антенных устройств с целью оценки ослабления отраженного сигнала и необходимостью аппроксимации полузатеняющих и затеняющих препятствий для применения соответствующих методов расчета.

На заключительном этапе расчета требуется определить запас уровня q_i и в соответствии с уравнением качества, которое связывает качество связи по каналам на интервале Q с уровнем сигнала на входе приемника P_{np} , определяется потеря надежности на интервале радиолинии по графикам зависимости, приведенным в [4; 7]. Если величина потери надежности связи на интервале $T_i \% < T_i \%_{3ad}$, то качество связи на интервале УКВрадиолинии удовлетворяет заданным требованиям на качество связи. Для линий связи с внутрикомплексной передачей данных величина потери допускается не более 5 %.

2. Разработка алгоритмов модели

На рис. 3 приведен разработанный алгоритм извлечения данных о высотах рельефа местности из файла DEM SRTM с разрешением 1 угловая секунда.

На рис. 4 показаны разработанные алгоритмы расчета потерь в линии радиосвязи в целях их программной реализации.

На момент публикации статьи осуществлена программная реализация в части, касающейся генерации профиля рельефа соответствующих геоде-

56

зическим координатам мест размещения средств, а также расчета интерференционных потерь в линии радиосвязи. В таблице приведено описание созданных классов при разработке программы.

3. Программная реализация модели

Выбор мест размещения средств радиосвязи, определение границ водного объекта на радиотрассе и получение их геодезических координат на интерактивной карте отображены на рис. 5, 6.

Интерфейс разработанной программы с получаемыми результатами расчета и генерации рельефа местности приведен на рис. 7. Полученные результаты генерации рельефа местности между выбранными местами размещения средств соответствуют визуально определяемым на топографической карте с масштабом 1:100000 уровням высот. Программа осуществляет расчет существенной зоны распространения радиосигнала в соответствии с радиочастотой, классифицирует канал в зависимости от наличия в существенной зоне препятствий рельефа, определяет точку отражения на радиотрассе по принципу равенства углов падения и отражения и проверяет ее принадлежность направлениям диаграмм антенн, осуществляет учет коэффициента отражения у подстилающей поверхности водного объекта в точке отражения и рассчитывает величину интерференционных потерь. Программа также осуществляет точный пересчет геодезических координат мест размещения средств радиосвязи в плоские прямоугольные координаты, которые при необходимости могут быть использованы пользователем.

Заключение

Таким образом, проанализированы существующие рекомендации, методики по расчету линии радиосвязи, структура файлов DEM SRTM, проведена разработка алгоритмов и на их основе программная реализация расчета интерференционного влияния рельефа местности в линии радиосвязи.

Список литературы

- 1. Цифровые радиорелейные линии. Показатели качества. Методы расчета. М.: Стандартинформ, 2010.
- 2. Распространение радиоволн за счет дифракции. Рекомендации МСЭ-Р Р.526-10. М.: Стандартинформ, 2007.
- Орлянкин В.Н., Алешина А.Р. Использование матриц высот SRTM в предварительных расчетах и картографировании глубин потенциального паводкового затопления речных пойм // Исследование Земли из космоса. 2019. N° 5. С. 72–81. DOI: https://doi. org/10.31857/S0205-96142019572-81
- 4. Военные системы радиорелейной и тропосферной связи / под ред. А.П. Родимова. Л.: ВАС, 1984. 414 с.
- 5. Радиорелейные и спутниковые системы передачи / под ред. А.С. Немировского. М.: Радио и связь, 1986. 213 с.
- 6. Теория электрической связи / под ред. Д.Д. Кловского. М.: Радио и связь, 1999. 432 с.
- 7. Математическая модель канала связи с беспилотным летательным аппаратом / Н.С. Архипов [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2021. Т. 24, № 3. С. 71–79. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.3.71-79
- Нестеров В.Н., Ли А.Р. Технологический метод проектирования измерительных приборов и систем для работы в неизвестных заранее условиях эксплуатации // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2019. Т. 22, № 2. С. 69–76. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.2.69-76

Информация об авторах

Албузов Адрей Таирович, кандидат военных наук, преподаватель кафедры Военного учебно-научного центра Военновоздушных сил «Военно-воздушная академия», г. Воронеж, Россия.

Область научных интересов: радиофизика, распространение радиоволн, теория радиосвязи. *E-mail*: albuzov81@mail.ru

Шахов Павел Евгениевич, курсант Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия», г. Воронеж, Россия.

Область научных интересов: радиофизика, распространение радиоволн, теория радиосвязи. *E-mail*: vva@mil.ru

Филатов Владимир Иванович, кандидат технических наук, доцент кафедры ИУ-10 Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия.

Область научных интересов: радиофизика, распространение радиоволн, теория радиосвязи.

E-mail: vfil10@mail.ru

SPIN-код (eLibrary): 9514-7430

ORCID: https://orcid.org/0009-0004-6892-2236

Албузов А.Т. и др. Модель расчета линии радиосвязи на основе данных дистанционного зондирования земли Albuzov A.T. et al. Model calculation of a radio communication line based on remote sensing data

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.50-58 UDC 621.396.4 Original Research

Received 30 March 2024 Accepted 30 April 2024 Published 28 December 2024

Model calculation of a radio communication line based on remote sensing data

Adrey T. Albuzov¹, Pavel E. Shakhov¹, Vladimir I. Filatov² 10

¹ Military Educational and Scientific Center of the Air Force «Air Force Academy» 54a, Staryh Bolshevikov Street, Voronezh, 394064, Russia ² Bauman Moscow State Technical University 5, 2nd Baumanskaya Street, Moscow, 105005, Russia

Abstract - Background. In the process of functioning of modern complexes and specialized equipment in conditions of direct visibility between radio facilities, data transmission is not always possible, which significantly reduces the efficiency of the data transmission system and increases the time to search for new locations for transceivers. The reason for this problem may lie in the peculiarities of the terrain, which has an interference and diffraction effect on the propagation of the radio signal. At the same time, analysis and a digital terrain model from earth remote sensing data and the implementation of automated calculations based on it to find the best coordinates in terms of electromagnetic compatibility in the required areas may be of significant interest for solving this problem. Aim. The main purpose of the work is determined by the need to develop algorithms and software implementation of the tool, which will eventually allow, given the characteristics of the hardware, to promptly and adequately analyze the possibility and evaluate the parameters for organizing stable radio communications even at the planning stage using interactive satellite maps. Methods. The article presents the developed algorithms and screenshots of the implementation of the program for calculating the interference effect of the relief, taking into account the underlying surface in the radio communication interval. Results. The results of the program implementation are presented, which calculate the essential propagation zone of the radio signal in accordance with the radio frequency, classifies the channel depending on the presence of terrain obstacles in the essential zone, determines the reflection point on the radio path according to the principle of equality of angles of incidence and reflection and verifies its belonging to the directions of antenna diagrams, takes into account the reflection coefficient at the underlying surface of a water body at the reflection point and calculates the amount of interference losses. Conclusion. A program has been developed that allows you to determine the intensity of the emitter field at any point of the terrain, taking into account obstacles.

Keywords – significant signal propagation zone; radio signal attenuation; terrain; digital terrain model; SRTM.

✓ vfil10@mail.ru (Vladimir I. Filatov)

© BY © Adrey T. Albuzov et al., 2024

References

- 1. Digital Radio Relay Lines. Quality Indicators. Calculation Methods. Moscow: Standartinform, 2010. (In Russ.)
- 2. Propagation of Radio Waves Due to Diffraction. Recommendations, ITU-P P.526-10. Moscow: Standartinform, 2007. (In Russ.)
- 3. V. N. Orlyankin and A. R. Aleshina, "Using SRTM height matrices in preliminary calculations and mapping the depths of potential flood inundation of river floodplains," Issledovanie Zemli iz kosmosa, no. 5, pp. 72-81, 2019, doi: https://doi.org/10.31857/S0205-96142019572-81. (In Russ.)
- 4. P. Rodimov, Ed. Military Radio Relay and Tropospheric Communication Systems. Leningrad: VAS, 1984. (In Russ.)
- 5. S. Nemirovsky, Ed. Radio Relay and Satellite Transmission Systems. Moscow: Radio i svyaz', 1986. (In Russ.)
- 6. D. D. Klovsky, Ed. Electrical Communication Theory. Moscow: Radio i svyaz', 1999. (In Russ.)
- 7. N. S. Arkhipov et al., "Mathematical model of a communication channel with an unmanned aerial vehicle," Physics of Wave Processes and Radio Systems, vol. 24, no. 3, pp. 71-79, 2021, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.3.71-79. (In Russ.)
- 8. V. N. Nesterov and A. R. Li, "Technological method for the design of measuring instruments and systems for operation in previously unknown operating conditions," Physics of Wave Processes and Radio Systems, vol. 22, no. 2, pp. 69-76, 2019, doi: https://doi. org/10.18469/1810-3189.2019.22.2.69-76. (In Russ.)

Information about the Authors

Andrey T. Albuzov, Candidate in Military Sciences, lecturer of the Military Educational and Scientific Center of the Air Force «Air Force Academy», Voronezh, Russia.

Research interests: radiophysics, radio wave propagation, radio communication theory. *E-mail*: albuzov81@mail.ru

Pavel E. Shakhov, cadet of the Military Educational and Scientific Center of the Air Force «Air Force Academy», Voronezh, Russia. Research interests: radiophysics, radio wave propagation, radio communication theory. E-mail: vva@mil.ru

Vladimir I. Filatov, Candidate in Engineering Sciences, associate professor at the Department of IU-10, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.

Research interests: radiophysics, radio wave propagation, radio communication theory.

E-mail: vfil10@mail.ru

SPIN-code (eLibrary): 9514-7430

ORCID: https://orcid.org/0009-0004-6892-2236

58

Физика волновых процессов и радиотехнические системы 2024. T. 27, Nº 4. C. 59-67

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.59-67 УДК 621.396.677 Оригинальное исследование

Дата поступления 28 июня 2024 Дата принятия 29 июля 2024 Дата публикации 28 декабря 2024

Влияние кросс-поляризации двухполяризационных антенных элементов на эргодическую пропускную способность многоканальной системы

Е.В. Аверина¹, К.В. Смусева² , П.А. Токарев², Г.К. Усков²

¹ АО «Концерн "Созвездие"» 394018, Россия, г. Воронеж, ул. Плехановская, 14 ² Воронежский государственный университет 394018, Россия, г. Воронеж, Университетская пл., 1

Аннотация - Обоснование. В качестве излучающих устройств для современных и перспективных систем радиосвязи используются антенные решетки на основе двухполяризационных элементов. Основным фактором, снижающим эффективность такого подхода, является наличие пространственной корреляции и кросс-поляризации между элементами в составе решетки. Данные эффекты могут приводить к значительному снижению пропускной способности системы связи. Цель. Вывести соотношения на основе модели Кронекера, позволяющие учитывать поляризационные свойства антенных элементов при расчете эргодической пропускной способности многоканальной системы связи. Исследовать влияние величины кросс-поляризационного параметра антенного элемента на пропускную способность. Оценить поляризационные характеристики синтезированных реальных антенных элементов различного типа и их влияние на величину пропускной способности. Методы. При выводе основных соотношений использованы методы статистической радиофизики и электромагнитного анализа канала распространения. При синтезе двухполяризационных антенных элементов использованы методы электродинамического анализа на базе уравнений Максвелла. Результаты. На основе анализа с помощью выведенных соотношений установлено, что влияние кросс-поляризационных свойств антенных элементов решетки на пропускную способность многоканальной системы связи становится значительным при уменьшении величины кросс-поляризационного параметры ниже 10 дБ. Показано, что синтезированные реальные антенные элементы различного типа обладают высокой развязкой по поляризации, что приведет к незначительному снижению пропускной способности системы. Заключение. Выведенные соотношения и разработанная методика дают возможность оценить изменение пропускной способности системы связи при учете кросс-поляризационных свойств двухполяризационных элементов антенной решетки. Это позволит оптимальным образом подобрать излучающие элементы для заданной системы. При этом разработанные антенные элементы различного типа удовлетворяют наложенным ограничениям по кросс-поляризации.

Ключевые слова - кросс-поляризация; антенные решетки; кросс-диполи; патч-антенны; эргодическая пропускная способность.

Введение

Современные многоканальные радиосредства сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазона в качестве приемо-передающих устройств все чаще используют антенные решетки. Для систем беспроводной связи с целью повышения пропускной способности без увеличения апертуры решетки в последнее время применяют двухполяризационные излучающие элементы (кросс-диполи, патчи и т. д.).

При этом зачастую уменьшают расстояние между антенными элементами, что приводит к проявлению эффекта взаимного влияния. В работе [1] выведены соотношения, показывающие, насколько диаграмма направленности (ДН) изолированного антенного элемента будет отличаться от ДН того же элемента в составе антенной решетки (парциальной диаграммы направленности). В [2] показано, что взаимное влияние может занижать уровень пропускной способности системы.

Однако кроме искажения диаграммы направленности из-за взаимного расположения элементов основным фактором, снижающим эффективность системы связи, является наличие пространственной корреляции и кроссполяризации между элементами в составе решетки [3]. Уровень пространственной корреляции зависит в основном от канала распространения, в то время как кросс-поляризация является характеристикой антенной системы и зависит от ее конструкции.

Таким образом, целью работы стали разработка методики учета поляризационных свойств антенных элементов при расчете эргодической пропускной способности многоканальной системы и исследование влияния поляризационных параметров реальных элементов на пропускную способность различных каналов связи.

1. Эргодическая пропускная способность системы massive MIMO

Эргодическая пропускная способность системы massive MIMO определяется соотношением [4]:

$$C = \frac{1}{K} \mathbf{E} \left[\log_2 \det \left(\mathbf{I} + \frac{P}{N\sigma^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^{\mathrm{H}} \right) \right],$$

где E[...] – знак усреднения; *Р* – суммарная передаваемая мощность; К - количество пользователей с одной антенной; N - количество элементов антенной решетки; σ^2 – дисперсия шума; **H** – канальная матрица.

Для расчета канальной матрицы при проведении аналитических исследований часто используют модель Кронекера. Канальная матрица, исходя из модели Кронекера, может быть представлена следующим образом:

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_{rx}^{1/2} \mathbf{H}_0 \mathbf{R}_{tx}^{1/2},$$

где \mathbf{R}_{rx} и \mathbf{R}_{tx} – матрицы взаимных корреляций антенных элементов на приемной и передающей сторонах соответственно, а элементы матрицы **H**₀ - независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. В основе модели Кронекера лежит предположение о независимости коэффициентов корреляции для двух антенных элементов на передаче или на приеме соответственно. Корреляция между пользователями, снабженными одной антенной, пренебрежимо мала, поэтому далее предполагается, что $\mathbf{R}_{rx} \equiv \mathbf{I}$, $\mathbf{R}_{tx} \equiv \mathbf{R}.$

Воспользовавшись известными допущениями о свойствах канала и некоторых параметрах системы, в частности предположением, что на решетку воздействуют плоские волны, выражения для элементов введенной матрицы можно записать как функцию геометрических параметров решетки, комплексных диаграмм направленности излучающих элементов и вероятностного распределения углов прихода сигнала. Так, для плоской решетки будем иметь:

$$R_{mn} = \int_{-\pi/2-\pi}^{\pi/2} \int_{-\pi/2-\pi}^{\pi} E_m(\theta, \phi) E_n^*(\theta, \phi) \times$$

 $\times \rho(\theta, \phi) \cos(\theta) a \phi a \theta.$

Здесь R_{mn} – элемент матрицы **R**; $E_m(\theta, \phi)$, $E_{n}^{*}(\theta,\phi)$ – комплексные диаграммы направленности *m*-го и *n*-го излучателей с учетом их расположения относительного фазового центра; $\rho(\theta, \phi)$ – совместная плотность вероятности углов прихода сигнала по азимуту и углу места. Если считать решетку эквидистантной с расстоянием между элементами d_v , d_z по горизонтали и вертикали соответственно, плотности вероятности углов прихода по азимуту и углу места независимыми ($\rho(\theta, \phi) =$ $= p_{\theta}(\theta) p_{\phi}(\phi)$), а диаграммы направленности каждого независимого излучателя равными $|E_m(\theta, \varphi)| =$ $= |E_n(\theta, \phi)| = |E(\theta, \phi)|$, то выражение для коэффициента корреляции между элементами с координатами (m,n) и (k,l) будет определяться соотношением

$$R(m, n, k, l) =$$

$$= \int_{-\pi/2 - \pi}^{\pi/2} \int_{-\pi/2 - \pi}^{\pi} \exp(j2\pi((m-k)d_y \cos\theta)\sin\varphi + (n-l)d_z \sin\theta))p_{\theta}(\theta)p_{\phi}(\varphi) \times$$

$$\times \cos\theta \mid F(\theta, \varphi)\mid^2 d\varphi d\theta$$
(1)

 $\times \cos\theta | E(\theta, \varphi) |^2 d\varphi d\theta.$

2. Пространственная корреляция двухполяризационных элементов при наличии кросс-поляризации

Если антенные элементы решетки двухполяризационные, то в таком случае корреляционная матрица будет иметь блочную структуру:

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{\nu\nu} & \mathbf{R}'_{\nu h} \\ \mathbf{R}'_{h\nu} & \mathbf{R}'_{hh} \end{bmatrix},\tag{2}$$

где через нижние индексы обозначена поляризация соответствующих элементов. В отсутствие кросс-поляризации между элементами матрица будет иметь вид

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{vv} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{hh} \end{bmatrix},$$

где значения элементов матриц-блоков **R**_{vv}, **R**_{hh} определяются выражением (1). Найдем значения элементов матриц-блоков из (2) через поляризационные свойства излучающих элементов с учетом наличия кросс-поляризации.

Кросс-поляризация между двумя различными портами двухполяризационного излучающего элемента обычно описывается параметром XPI, который определяется соотношением

$$XPI_{v} = \frac{E_{vv}(\theta, \phi)}{E_{vh}(\theta, \phi)}, \quad XPI_{h} = \frac{E_{hh}(\theta, \phi)}{E_{hv}(\theta, \phi)}$$

где E_{vv} , E_{vh} , E_{hh} , E_{hv} – со-поляризационная и кросс-поляризационная диаграммы направленности каждого порта соответственно. Из определения видно, что в общем случае параметры XPI_v , XPI_h являются функциями азимута и угла места, но при дальнейшем выводе мы опустим эту зависимость. Тогда для расчета кросс-поляризационной компоненты диаграммы направленности элемента можно воспользоваться соотношениями:

$$E_{vh} = \frac{E_{vv}}{XPI_v}, \quad E_{hv} = \frac{E_{hh}}{XPI_h}.$$

Сначала найдем нормировочные множители для каждого порта, удовлетворяющие условию сохранения излучаемой мощности:

$$\begin{split} E_{\nu}^{2} &= E_{\nu h}^{2} \left(1 + XPI_{\nu}^{2}\right) \rightarrow \\ \rightarrow &E_{\nu h} = \frac{E_{\nu}}{\sqrt{1 + XPI_{\nu}^{2}}}, \quad E_{\nu \nu} = \frac{\left|XPI_{\nu}\right|E_{\nu}}{\sqrt{1 + XPI_{\nu}^{2}}}; \\ &E_{h}^{2} &= E_{h\nu}^{2} \left(1 + XPI_{h}^{2}\right) \rightarrow \\ \rightarrow &E_{h\nu} = \frac{E_{h}}{\sqrt{1 + XPI_{h}^{2}}}, \quad E_{hh} = \frac{\left|XPI_{h}\right|E_{h}}{\sqrt{1 + XPI_{h}^{2}}}. \end{split}$$

Здесь E_v , E_h – диаграмма направленности однополяризационного элемента.

Напряженность поля каждой компоненты с учетом эффекта кросс-поляризации:

$$\begin{split} E'_{\nu} &= E_{\nu\nu} + E_{h\nu} = \frac{E_{\nu} |XPI_{\nu}|}{\sqrt{1 + XPI_{\nu}^{2}}} + \frac{E_{h}}{\sqrt{1 + XPI_{h}^{2}}}, \quad (3) \\ E'_{h} &= E_{hh} + E_{\nu h} = \frac{E_{h} |XPI_{h}|}{\sqrt{1 + XPI_{h}^{2}}} + \frac{E_{\nu}}{\sqrt{1 + XPI_{\nu}^{2}}}, \\ E'_{\nu} E'_{h}^{*} &= \left(\frac{E_{\nu} |XPI_{\nu}|}{\sqrt{1 + XPI_{\nu}^{2}}} + \frac{E_{h}}{\sqrt{1 + XPI_{h}^{2}}}\right) \times \\ &\times \left(\frac{E_{h}^{*} |XPI_{h}|}{\sqrt{1 + XPI_{h}^{2}}} + \frac{E_{\nu}^{*}}{\sqrt{1 + XPI_{\nu}^{2}}}\right) = \\ &= \frac{E_{\nu}^{2} |XPI_{\nu}|}{1 + XPI_{\nu}^{2}} + \frac{E_{h}^{2} |XPI_{h}|}{1 + XPI_{h}^{2}}, \\ E'_{\nu} E'_{\nu}^{*} &= \left(\frac{E_{\nu} |XPI_{\nu}|}{\sqrt{1 + XPI_{\nu}^{2}}} + \frac{E_{h}}{\sqrt{1 + XPI_{h}^{2}}}\right)^{2} = \quad (4) \\ &= \frac{E_{\nu}^{2} XPI_{\nu}^{2}}{1 + XPI_{\nu}^{2}} + \frac{E_{h}^{2}}{1 + XPI_{h}^{2}}, \end{split}$$

$$E'_{h}E'_{h}^{*} = \left(\frac{E_{h}|XPI_{h}|}{\sqrt{1 + XPI_{h}^{2}}} + \frac{E_{v}}{\sqrt{1 + XPI_{v}^{2}}}\right)^{2} = (5)$$
$$= \frac{E_{h}^{2}XPI_{h}^{2}}{\sqrt{1 + XPI_{h}^{2}}} + \frac{E_{v}^{2}}{\sqrt{1 + XPI_{v}^{2}}}$$

1+ *XPI*² 1+ *XPI*² . При выводе мы воспользовались условием

$$E_{v}E_{h}^{*}=E_{h}E_{v}^{*}=0.$$

Тогда коэффициенты корреляционных матрицподблоков (2) будут иметь вид

$$\begin{aligned} R_{vv}'(m,n,k,l) &= \qquad (6) \\ &= \int_{-\pi/2-\pi}^{\pi/2} \exp(j2\pi((m-k)d_y\cos\theta)\sin\varphi + \\ &+ (n-l)d_z\sin\theta))p_{\theta}(\theta)p_{\phi}(\varphi)\cos\theta \times \\ &\times |E_v'(\theta,\varphi)|^2 d\varphi d\theta = \\ &= \frac{XPI_v^2}{1+XPI_v^2}R_{vv} + \frac{1}{1+XPI_h^2}R_{hh}; \\ R_{hh}'(m,n,k,l) &= \qquad (7) \\ &= \int_{-\pi/2-\pi}^{\pi/2} \int_{-\pi/2-\pi}^{\pi} \exp(j2\pi((m-k)d_y\cos\theta)\sin\varphi + \\ &+ (n-l)d_z\sin\theta))p_{\theta}(\theta)p_{\phi}(\varphi)\cos\theta \times \\ &\times |E_h'(\theta,\varphi)|^2 d\varphi d\theta = \\ &= \frac{XPI_h^2}{1+XPI_h^2}R_{hh} + \frac{1}{1+XPI_v^2}R_{vv}; \\ R_{vh}'(m,n,k,l) &= R_{hv}'(m,n,k,l) = \qquad (8) \\ &= \int_{-\pi/2-\pi}^{\pi/2} \int_{-\pi/2-\pi}^{\pi} \exp(j2\pi((m-k)d_y\cos\theta)\sin\varphi + \\ &+ (n-l)d_z\sin\theta))p_{\theta}(\theta)p_{\phi}(\varphi)\cos\theta \times \\ &\times E_v'(\theta,\varphi)E_h'^*(\theta,\varphi)d\varphi d\theta = \\ &= \frac{|XPI_v|}{1+XPI_v^2}R_{vv} + \frac{|XPI_h|}{1+XPI_h^2}R_{hh}. \\ &= \sum_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{v}^{\pi} \exp(v_v + \frac{|XPI_h|}{1+XPI_h^2}R_{hh}. \end{aligned}$$

Если допустить, что $XPI_v = XPI_h = XPI = \text{const},$ $\mathbf{R}_{vv} = \mathbf{R}_{hh}$, то для выражения (2) получим:

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{vv} & \frac{2XPI}{1+XPI^2} \mathbf{R}_{vv} \\ \frac{2XPI}{1+XPI^2} \mathbf{R}_{vv} & \mathbf{R}_{vv} \end{bmatrix}.$$
 (9)

Итак, для расчета матрицы пространственной корреляции двухполяризационной антенной решетки с учетом кросс-поляризации необходимо иметь со-поляризационные диаграммы направ-



Рис. 1. Зависимость эргодической пропускной способности от уровня кросс-поляризации Fig. 1. Dependence of ergodic capacity on the level of crosspolarization

ленности и значения XPI_v , XPI_h . Если эти значения являются функциями углов, то при расчетах необходимо использовать соотношения (3)–(5). Если эти значения – постоянные величины, то можно воспользоваться соотношениями (6)–(8). И наконец, при равенстве со- и кроссполяризационных свойств портов различной поляризации для расчетов применяется соотношение (9).

Из соотношения (9) видно, что если кроссполяризация у двухполяризационного элемента незначительная (*XPI* $\rightarrow \infty$), то пространственная корреляция между элементами разной поляризации стремится к нулю. При наличии кроссполяризации из-за увеличения пространственной корреляции уменьшается число степеней свободы системы, что приведет к уменьшению ее разрешающей способности.

Воспользовавшись выведенными соотношениями и моделью Кронекера, методом Монте-Карло были рассчитаны зависимость пропускной способности для плоской антенной решетки размером 4×8 с расстояниями между элементами $d_v = 0, 5\lambda$, $d_z = 2\lambda$ от величины кросс-поляризации XPI. В качестве антенного элемента использовался идеальный двухполяризационный патч с поворотом плоскости поляризации ±45°. Вероятностное распределение углов прихода по углу места описывалось законом Лапласа, по азимуту - законом фон Мизеса. При расчете использовались допущения для выражения (9). На рис. 1 представлена полученная зависимость. Видно, что уменьшение XPI менее 10 дБ приводит к снижению пропускной способности системы.

3. Моделирование с реальными излучающими элементами

Для оценки величины кросс-поляризационного параметра XPI реальных антенных элементов и его влияния на пропускную способность в среде CST Studio Suite были синтезированы модели двухполяризационного двухпортового stacked патч-элемента [2] и кросс-дипольного элемента с поляризациями ±45°.

Полученные с помощью электродинамического моделирования путем решения системы уравнений Максвелла (метод моментов) диаграммы направленности со-поляризационная и кроссполяризационная для каждого порта представлены на рис. 2.

Видно, что со-поляризационные диаграммы каждого элемента совпадают между собой в направлении основного излучения. Поэтому можно считать $E_{yy} = E_{hh} = E(\theta, \varphi)$.

На основе полученных диаграмм направленности порта каждой поляризации были рассчитаны угловые зависимости *XPI*_v, *XPI*_h для кроссдипольной и патч-антенны (рис. 3).

Из рис. З видно, что зависимости для XPI_v и XPI_h с графической точностью совпадают как для патч-элемента, так и для кросс-дипольного элемента. Незначительно отличие в видах XPI_v и XPI_h для кросс-дипольного элемента можно объяснить несимметричностью его системы запитки.

Таким образом, можно считать, $XPI_v = XPI_h = XPI(\theta, \varphi)$. И наконец, XPI сложным образом зависят от θ , φ . Исходя из этого, соотношения для расчета элементов матрицы пространственной корреляции будут иметь вид

$$\begin{split} \mathbf{R}'_{vv} &= \mathbf{R}'_{hh} = \mathbf{R}_{vv}, \\ R'_{vh}(m,n,k,l) &= R'_{hv}(m,n,k,l) = \\ &= \int_{-\pi/2-\pi}^{\pi/2} \int_{-\pi/2-\pi}^{\pi} \exp(j2\pi((m-k)d_y\cos\theta)\sin\varphi + \\ &+ (n-l)d_z\sin\theta))p_{\theta}(\theta)p_{\phi}(\varphi)\cos\theta \times \\ &\times E^2(\theta,\varphi) \frac{2\times \left|XPI(\theta,\varphi)\right|}{1+XPI^2(\theta,\varphi)} d\varphi d\theta. \end{split}$$

Используя данные соотношения и имеющиеся требуемые зависимости для реальных антенных элементов – кросс-диполя и патча, было рассчитано изменение пропускной способности рассмотренной выше антенной решетки при учете наличия кросс-поляризации. Результаты для обоих типов элементов представлены в таблице.

Полученные результаты показывают, что синтезированные излучающие элементы имеют хорошую



Рис. 2. Диаграммы направленности кросс-дипольного (а – со-поляризационная, б – кросс-поляризационная компоненты) и stacked-патч элементов (в – со-поляризационная, г – кросс-поляризационная компоненты) для первого (черная линия) и второго (серая линия) порта. Пунктирной линией обозначены срезы вдоль направления поляризации порта, сплошной – перпендикулярно)

Fig. 2. Antenna patterns of cross-dipole (a – co-polarization, b – cross-polarization components) and stacked-patch elements (c – co-polarization, d – cross-polarization components) for the first (black line) and the second (grey line) port. Dotted line indicates slices along the direction of port polarization, solid line – perpendicular)



Рис. 3. Диаграммы XPI кросс-дипольного (*a*) и stacked патч-элементов (*б*) для первого (черная линия (XPI_h) и второго (серая линия (XPI_y)) порта. Пунктирной линией обозначены срезы вдоль направления поляризации порта, сплошной – перпендикулярно) Fig. **3.** XPI patterns of cross-dipole (*a*) and stacked patch elements (*b*) for the first (black line (XPI_h) and the second (grey line (XPI_y)) port. Dotted line indicates slices along the direction of port polarization, solid line – perpendicular).



Таблица. Эргодическая пропускная способность антенной решетки с реальными антенными элементами Table. Ergodic capacity of an antenna array with real antenna elements

Рис. 4. Среднее значение *XPI* сдвоенного кросс-дипольного (*a*) и stacked патч-элементов (*б*) для первого (черная линия (*XPI*_{*h*}) и второго (серая линия (*XPI*_{*v*}) порта. Пунктирной линией обозначены срезы вдоль направления поляризации порта, сплошной – перпендикулярно)

Fig. 4. Average XPI value of dual cross-dipole (*a*) and stacked patch elements (*b*) for the first (black line (XPI_h) and the second (grey line (XPI_v) port. The dotted line indicates slices along the polarization direction of the port, the solid line - perpendicularly)

развязку по поляризации, которая приведет лишь к незначительному уменьшению пропускной способности системы massive MIMO.

Как показано в работе [2], оптимальные параметры диаграммы направленности антенного элемента в составе решетки, обеспечивающие максимальную пропускную способность, невозможно достичь одиночным антенным элементом. Для уменьшения ширины диаграммы направленности по углу места часто сдваивают (или страивают) антенные элементы. В работе [2] приведены зависимости эргодической пропускной способности от расстояния между сдвоенными элементами.

Для оценки вклада в данные зависимости эффекта кросс-поляризации были синтезированы аналогичные сдвоенные патч- и кроссдипольные элементы и рассчитан их коэффициент кросс-поляризации.

На рис. 4 приведены усредненные (в диапазоне ±40 от направления главного излучения) значения XPI_v и XPI_h в зависимости от расстояния между элементами.

Из рисунков видно, во-первых, что при сдваивании патч-элементов зависимости остаются одинаковыми до расстояния между элементам около 0,75λ₀, далее проявляются незначительные отклонения, связанные с появлением боковых лепестков. При этом для кросс-дипольных элементов при расстоянии больше 0,75 λ_0 зависимости хотя и имеют схожий характер, но значительно отличаются по величине.

Несмотря на несимметричность XPI_v и XPI_h , их значения как для сдвоенных кросс-диполей, так и для патч-антенн превышают 12 дБ, что, как было показано ранее, не вносит потерь в величину пропускной способности канала.

Заключение

Выведенные соотношения и разработанная методика дают возможность оценить изменение пропускной способности системы связи при учете кросс-поляризационных свойств двухполяризационных элементов антенной решетки. Это позволит оптимальным образом подобрать излучающие элементы для заданной системы. На основе анализа с помощью выведенных соотношений установлено, что влияние кросс-поляризационных свойств антенных элементов решетки на пропускную способность многоканальной системы связи становится значительным при уменьшении величины кросс-поляризационного параметры ниже 10 дБ. Показано, что синтезированные реальные антенные элементы различного типа обладают

64

65

высокой развязкой по поляризации, что приведет к незначительному снижению пропускной способности системы. Это позволяет их использовать в качестве излучателей для многоканальных систем связи на основе антенных решеток.

Финансирование

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-19-00891, https:// rscf.ru/project/24-19-00891/.

Благодарности

Для выполнения численных расчетов в работе использовалось оборудование учебно-научного дизайн-центра проектирования радиоэлектронных систем СВЧ-, терагерцового и оптического диапазонов на отечественной электронной компонентной базе ФГБОУ ВО «ВГУ» в рамках реализации федерального проекта «Подготовка кадров и научного фундамента для электронной промышленности».

Список литературы

- 1. Исследование коэффициентов взаимного влияния в двухполяризационных антенных решетках / О.В. Бажанова [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2023. Т. 26, № 4. С. 78–87. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.4.78-87
- Аверина Л.И., Смусева К.В., Усков Г.К. Проектирование антенных решеток для систем massive MIMO СВЧ-диапазона // Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии. 2024. Т. 7, № 3. С. 485–500. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=68637757
- Cheng X., He Y., Guizani M. 3-D Geometrical model for multi-polarized MIMO systems // IEEE Access. 2017. Vol. 5. P. 11974–11984. DOI: https://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2715280
- 4. Oliveri G., Gottardi G., Massa A. A new meta-paradigm for the synthesis of antenna arrays for future wireless communications // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2019. Vol. 67, no. 6. P. 3774–3788. DOI: https://doi.org/10.1109/TAP.2019.2906433

Информация об авторах

Аверина Екатерина Викторовна, старший конструктор АО «Концерн "Созвездие"», г. Воронеж, Россия.

Область научных интересов: цифровые антенные решетки, адаптивное диаграммообразование, отказоустойчивость многоканальной системы.

E-mail: fairy_asol@mail.ru SPIN-код (eLibrary): 3324-9686 AuthorID (eLibrary): 1251086

С**мусева Ксения Владимировна**, аспирант, преподаватель кафедры электроники физического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия.

Область научных интересов: сверхширокополосные системы радиолокации и связи, антенны и антенные решетки, излучение и рассеяние электромагнитных волн.

E-mail: smusevaz@gmail.com ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8515-2841 SPIN-код (eLibrary): 6428-9273 AuthorID (eLibrary): 1038558 ResearcherID (WoS): ABF-1963-2020

Токарев Павел Андреевич, аспирант кафедры электроники физического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия.

Область научных интересов: гибридное диаграммообразование, технология Massive MIMO, миллиметровые волны, многопользовательские системы связи, цифровые антенные решетки, алгоритмы прекодирования.

E-mail: tokarevpavel1996@mail.ru SPIN-код (eLibrary): 2598-7927 AuthorID (eLibrary): 1240826

Усков Григорий Константинович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой электроники физического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия.

Область научных интересов: нелинейные явления в усилительных каскадах, генерация сверхкоротких импульсов, сверхширокополосные системы связи и радиолокации, антенны и антенные решетки для систем связи.

E-mail: uskov@phys.vsu.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8250-2511 SPIN-код (eLibrary): 8126-6222 AuthorID (eLibrary): 528904 ResearcherID (WoS): H-1344- 2013

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2024, vol. 27, no. 4, pp. 59-67

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.59-67 UDC 621.396.677 Original Research Received 28 June 2024 Accepted 29 July 2024 Published 28 December 2024

Influence of crosspolarization of dual-polarized antenna elements on the ergodic capacity of a multichannel system

Ekaterina V. Averina¹, Ksenia V. Smuseva², Pavel A. Tokarev², Grigory K. Uskov²

 ¹ JSC «Concern "Sozvezdie"» 14, Plekhanovskaya Street, Voronezh, 394018, Russia
 ² Voronezh State University 1, Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russia

Abstract - Background. Antenna arrays based on dual-polarization elements are used as radiating devices for modern and perspective radio communication systems. The main factor reducing the effectiveness of this approach is the presence of spatial correlation and cross-polarization between elements in the array. These effects can lead to a significant reduction in communication system capacity. Aim. Derive relationships based on the Kronecker model that allow to take into account the polarization properties of antenna elements when calculating the ergodic capacity of a multi-channel communication system. Investigate the influence of the cross-polarization parameter of the antenna element on the capacity. Assess the polarization characteristics of synthesized real antenna elements of various types and their impact on the capacity value. Methods. When deriving the basic relationships, methods of statistical radiophysics and electromagnetic analysis of the propagation channel were used. When synthesizing dual-polarization antenna elements, electrodynamic analysis methods based on Maxwell's equations were used. Results. Based on the analysis using the derived relationships, it was established that the influence of the cross-polarization properties of the array antenna elements on the capacity of a multi-channel communication system becomes significant when the value of the cross-polarization parameters decreases below 10 dB. It is shown that synthesized real antenna elements of various types have high polarization isolation, which will lead to a slight decrease in the system capacity. Conclusion. The derived relationships and the developed methodology make it possible to estimate the change in the capacity of the communication system when taking into account the cross-polarization properties of the dual-polarization elements of the antenna array. This will allow to optimally select radiating elements for a given system. At the same time, the developed antenna elements of various types satisfy the imposed cross-polarization restrictions.

Keywords - cross-polarization; antenna arrays; cross-dipoles; patch antennas; ergodic capacity.

≤ smusevaz@gmail.com (Ksenia V. Smuseva)

© BY © Ekaterina V. Averina et al., 2024

References

- 1. V. Bazhanova et al., "Investigation of mutual coupling coefficients in dual-polarized antenna arrays," Physics of Wave Processes and Radio Systems, vol. 26, no. 4, pp. 78–87, 2023, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2023.26.4.78-87. (In Russ.)
- L. I. Averina, K. V. Smuseva, and G. K. Uskov, "Design of antenna arrays for massive MIMO systems in the microwave range," Infokommunikatsionnye i radioelektronnye tekhnologii, vol. 7, no. 3, pp. 485–500, 2024, url: https://elibrary.ru/item.asp?id=68637757. (In Russ.)
- X. Cheng, Y. He, and M. Guizani, "3-D Geometrical model for multi-polarized MIMO systems," IEEE Access, vol. 5, pp. 11974–11984, 2017, doi: https://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2715280.
- 4. G. Oliveri, G. Gottardi, and A. Massa, "A new meta-paradigm for the synthesis of antenna arrays for future wireless communications," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 67, no. 6, pp. 3774–3788, 2019, doi: https://doi.org/10.1109/TAP.2019.2906433.

Information about the Authors

Ekaterina V. Averina, senior designer of JSC «Concern "Sozvezdie"», Voronezh, Russia. Research interests: digital antenna arrays, adaptive beamforming, fault tolerance of a multi-channel system. E-mail: fairy_asol@mail.ru SPIN-code (eLibrary): 3324-9686 AuthorID (eLibrary): 1251086

Ksenia V. Smuseva, graduate student, teacher of the Department of Electronics, Faculty of Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Research interests: ultra-wideband radar and communication systems, antennas and antenna arrays, radiation and scattering of electromagnetic waves.

E-mail: smusevaz@gmail.com ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8515-2841 SPIN-code (eLibrary): 6428-9273 AuthorID (eLibrary): 1038558 ResearcherID (WoS): ABF-1963-2020

Pavel A. Tokarev, graduate student of the Department of Electronics, Faculty of Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia. *Research interests*: hybrid beamforming, Massive MIMO technology, millimeter waves, multi-user communication systems, digital antenna arrays, precoding algorithms. *E-mail*: tokarevpavel1996@mail.ru *SPIN-code (eLibrary)*: 2598-7927 *AuthorID (eLibrary)*: 1240826

Grigory K. Uskov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Electronics, Faculty of Physics, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Research interests: nonlinear phenomena in amplification stages, generation of ultrashort pulses, ultra-wideband communication and radar systems, antennas and antenna arrays for communication systems.

E-mail: uskov@phys.vsu.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8250-2511 SPIN-code (eLibrary): 8126-6222 AuthorID (eLibrary): 528904 ResearcherID (WoS): H-1344-2013

Реклама

Неганов, В.А.

Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики: линии передачи, антенны, дифракция электромагнитных волн / В.А. Неганов. – М.: САЙНС-ПРЕСС, 2008. – 432 с., 122 ил.



ISBN 978-5-88070-161-2

УДК 537.87 ББК 32.84 Н 41

Изложены основы физической регуляризации некорректных задач электродинамики, связанной с особенностями физических и математических моделей задач (физические допущения, некорректные математические выкладки, отсутствие предельного перехода). Подход, по мнению автора, обладает большими возможностями, чем метод регуляризации Тихонова А.Н. интегральных уравнений Фредгольма первого рода, названный в книге методом математической регуляризации. Метод физи-

ческой регуляризации (МФР) применен к анализу волноведущих и излучающих структур, а также задачам дифракции электромагнитных волн на некоторых телах. МФР позволил впервые корректно осуществить анализ полей в ближних зонах некоторых антенн, устранить несамосогласованное приближение Кирхгофа в задачах дифракции, установить связь поверхностной плотности тока проводимости с напряженностями электрического и магнитного полей для диполя Герца и т. п.

Для специалистов в области радиотехники и радиофизики СВЧ, электромагнитной совместимости РТС, математической теории дифракции и математического моделирования электродинамических структур самого широкого назначения. Может быть полезна преподавателям вузов, докторантам, аспирантам и студентам старших курсов соответствующих специальностей. Физика волновых процессов и радиотехнические системы

2024. T. 27, Nº 4. C. 68-72

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.68-72 УДК 621.396.969 Оригинальное исследование Дата поступления 18 сентября 2024 Дата принятия 21 октября 2024 Дата публикации 28 декабря 2024

Радиолокационный комплекс для беспилотных летательных аппаратов

В.Р. Скрынский

МИРЭА – Российский технологический университет 119454, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, 78

Аннотация – Обоснование. Разработка радиолокационного комплекса для обнаружения воздушных, морских, и наземных объектов, а также определение их расстояния, скорости и геометрических параметров с автоматизированной обработкой. Цель. Создание бортового радиолокационного комплекса бокового обзора с синтезированной апертурой, установленного на беспилотном летательном аппарате. Методы. Применение методов цифровой обработки сигналов для формирования радиоголограмм и извлечения информации об объектах. Использование алгоритмов для автоматической обработки и анализа полученных данных в реальном времени. Результаты. Описана структурно-функциональная схема радиолокационной аппаратуры бортового радиолокационного комплекса бокового обзора Х-диапазона, состоящего из антенны, приемо-передающего блока, контейнера с цифровым ядром и микронавигационной системы. В режиме высокого разрешения формируемая на борту радиоголограмма, сбрасываемая по каналу связи на пункт управления и обработки. Формирование радиолокационного изображения и вторичная обработка выполняются на наземном пункте в автоматическом режиме. Заключение. По результатам исследований показана возможность реализации получения радиолокационного изображения и вторичная обработка выполняются на наземном пункте в обработки. Формирование в режиме реального времени на борту носителя, а также установка рассмотренного бортового радиолокационного времени и вторичноя аппарате совместно с автоматизированным пунктом обработки и анализа информации.

Ключевые слова – радиолокация; радиолокационная станция с синтезированной апертурой; радиоголограмма; радиолокационное изображение; цифровая обработка сигналов; автоматизация технологического процесса обработки информации.

Введение

В данной работе рассматривается создание бортового радиолокационного комплекса (БРЛК) бокового обзора с синтезированной апертурой, установленного на беспилотном летательном аппарате (БЛА), а также автоматизированная обработка полученной информации на наземном комплексе. Возможность установки такого БРЛК на БЛА позволяет реализовать следующие характеристики интересующих потенциальных потребителей целей при ведении радиолокационного наблюдения:

обеспечить возможность обнаружения и распознавания круглосуточно в любых погодных условиях как движущихся, так и стационарных наземных и надводных целей на дальности до 100 км с высоким разрешением (до 0,3 м) при обеспечении широкой полосы захвата (до 40 км);

 сформировать радиолокационные изображения как на борту БЛА (с разрешением в единицы метров), так и на наземном пункте обработки;

 обеспечить передачу информации о параметрах обнаруженных целей в сопряженные системы бортового радиоэлектронного оборудования (БРЭО) БЛА или наземный пункт обработки информации.

1. Состав и основные характеристики радиолокационной системы

Радиолокационная система состоит из следующих элементов:

1. Бортовая аппаратура РЛК, включающая в свой состав следующие элементы:

антенная система;

- приемо-передающее устройство;

аппаратура формирования и обработки сигналов;

- вычислительный комплекс.

2. Наземный автоматизированный пункт обработки и анализа информации, который может быть интегрирован в наземный мобильный пункт управления, состоящий из:

- аппаратных и общепрограммных средств;

 программных компонентов первичной обработки информации;

 программных компоненов вторичной обработки информации;

 средств диспетчеризации и управления технологическими процессами обработки и анализа информации.

3. Высокоскоростная радиолиния (ВРЛ) со скоростью передачи информации 1,2 Гбит/с.

Skrynskij@mirea.ru (Скрынский Владислав Романович)

Таблица 1. Основные характеристики РЛК в составе БЛА **Table 1.** The main characteristics of the RLC as part of the UAV

Параметр	Значение
Импульсная мощность	1440 Вт
Рабочая частота	9600 МГц
Полоса частот	600 МГц
Максимальная рабочая дальность	до 100 км
Полоса захвата	40 км
Предельное пространственное разрешение по азимуту	0,3 м
Предельное пространственное разрешение по дальности	0,3 м
Вероятность обнаружения объекта не хуже	0,96
Габаритные размеры АФАР	500 × 250 × 100 мм
Габаритные размеры приемо-передающей и вычислительной аппаратуры	350 × 400 × 120 мм
Энергопотребление	не более 1500 Вт
Масса (в зависимости от конфигурации)	35-80 кг

Основные технические характеристики рассматриваемой бортовой аппаратуры приведены в таблице 1.

При работе РЛК возможны формирование радиолокационного излучения (РЛИ) в реальном времени на борту БЛА и сброс РЛИ по каналам связи БЛА на пункт обработки и анализа информации, где она подвергается различным этапам автоматизированной обработки и анализа в соответствии с заложенными технологическими процессами. В процессе обработки проводится обнаружение и распознавание интересующих потребителя объектов. На основе полученных результатов обработки оператор принимает решение о формировании и выдаче целеуказаний или проведении дополнительного мониторинга в режиме высокого разрешения [1].

В режиме высокого разрешения формируемая на борту радиоголограмма (РГГ) (информация) сбрасывается по каналу связи БЛА на пункт обработки и анализа информации. Формирование РЛИ и автоматизированная обработка и анализ проводятся с применением других технологических процессов обработки и анализа информации.

2. Режимы работы БРЛК

Бортовая аппаратура комбинированного РЛК для БЛА предусматривает два режима работы:

- 1. Боковое визирование;
- 2. Визирование в передней полусфере.

Боковое визирование – съемка радиолокатором с синтезированной апертурой (PCA), которая обеспечивает получение двумерного яркостного радиолокационного изображения местности для контроля местоположения объекта и коррекции его координат по радиолокационной карте выбранного участка.

При боковом визировании радиолокатор осуществляет съемку поверхности с высоким пространственным разрешением, близким к оптическим средствам. Некоторые характеристики радиолокационного изображения существенно зависят от высоты съемки. В частности, рассматриваемая аппаратура обеспечивает получение кадра изображения размером 0,8 × 0,8 км – на высоте БЛА 100 м, до 7 × 7 км – на высоте БЛА 500 м при использовании антенны с косекансной диаграммой направленности в вертикальной плоскости [2].

Пространственное расширение PCA, устанавливаемое программным путем, составляет от 0,4 м до нескольких метров с возможным дополнительным увеличением (укрупнением) элементов разрешения.

Энергетические показатели РСА в рабочем диапазоне дальностей достаточно высокие, так, радиометрическая чувствительность составляет порядка –17 дБ при хорошем разрешении.

Визирование в передней полусфере – импульсно-доплеровский режим (ИДР) радиолокатора со сканированием антенного луча, обеспечивающий получение информации о поверхности и расположенных на ней объектах.

При импульсно-доплеровском режиме радиолокатора предусматривается съемка поверхности по курсу движения БЛА, для чего осуществляется электронное сканирование антенного луча в двух плоскостях. В качестве антенного устройства **Таблица 2.** Основные характеристики приемо-передающего блока Х-диапазона **Table 2.** Main characteristics of the X-band receiving and transmitting unit

Параметр	Значение
Центральная часть сигнала	9800 МГц
Коэффициент усиления зеркальной антенны в максимуме ДН	20 дБ
Максимальная ширина спектра зондирующего ЛЧМ сигнала	600 МГц
Импульсная мощность передатчика	не менее 320 Вт
Вид модуляции сигнала	ЛЧМ
Скважность	не менее 16
Длительность импульса	5-60 мкс
Шум-фактор приемного канала	не более 4,5 дБ
Потребление по сети 27 В	не более 70 Вт
Macca	10-14 кг

используется двумерная активная фазированная антенная решетка (АФАР). Диаметр апертуры антенны – 250 мм, коэффициент усиления излучающей системы – 26 дБ, а ширина диаграммы направленности (ДН) в каждой плоскости составляет порядка 5°.

Полоса захвата по дальности в диапазоне рабочих высот РЛС составляет 3-14 км. Величина азимутного следа ДН на дальности 5 км – порядка 600 м. Пространственное разрешение радиолокатора по наклонной дальности – более 0,25 м (устанавливается программным обеспечением).

3. Технический облик БРЛК бокового обзора

В локаторе предлагается использовать зеркальную антенну с секторальным рупором в качестве облучателя [3; 5], которая имеет косекансную диаграмму направленности в вертикальной плоскости.

Характеристики зеркальной антенны:

- полоса пропускания: 9,3-10,3 ГГц;

ширина луча в Е-плоскости (вертикальной):
 49° по уровню 8 дБ;

– ширина луча в Н-плоскости (горизонтальной): 7,0-8,4° дБ;

- УБЛ в обоих плоскостях: минус 22 дБ.

- масса антенны: не более 2,5 кг.

Приемо-передающий блок объединяет основные аналоговые компоненты радиолокационной аппаратуры:

- усилитель мощности;

- приемо-передающий модуль.

Усилитель мощности зондирующего сигнала (УМ ЗС), на его выходе формируется мощный сиг-

нал на несущей частоте, который по фидерному тракту передается в зеркальную антенну, размещаемую на боковой части БЛА. В усилитель мощности также конструктивно входит циркулятор [6; 7].

Приемо-передающий модуль (маломощная часть приемопередатчика), в который функционально и конструктивно входят следующие устройства:

– предварительный усилитель мощности (ПУМ);

 приемник вместе с устройством управления коэффициентом усиления приемника.

Управление коэффициентом усиления приемника позволяет согласовать динамический диапазон АЦП с уровнем входного сигнала;

 многофункциональный высокочастотный генератор, предназначенный для генерации сетки когерентных сигналов, необходимых для переноса зондирующего сигнала на высокую частоту и обратно.

Основные характеристики приемо-передающего блока X-диапазона представлены в таблице 2.

Контейнер с цифровым ядром объединяет все цифровые компоненты PCA:

специальный вычислитель – ЭВМ управления, реализующая алгоритм автоматического управления съемкой заданных объектов. Программное обеспечение этого компьютера позволяет управлять радиолокатором во всех режимах функционирования;

 цифровой модуль формирования сигнала – многофункциональный формирователь зондирующего сигнала, который реализует формирование пачки зондирующего сигнала в соответствии с заданием, полученным от управляющего компьютера;

70

- аналого-цифровой сигнальный процессор с мезонинными модулями ЦАП и АЦП, который производит оцифровку аналогового сигнала, поступающего от приемо-передающего устройства радиолокатора, буферизацию и первичную обработку сигнала. На несущем модуле установлен процессор, реализующий обработку радиолокационной информации в реальном времени [4].

4. Описание автоматизированного пункта обработки и анализа информации

В наземном пункте для автоматизации процесса обработки и анализа информации БРЛК предлагается использовать различные программные компоненты обработки РЛИ в связке со специальным настраиваемым (адаптируемым) программным обеспечением автоматизации технологических процессов обработки и анализа информации. Для каждого режима обработки информации должен быть выстроен отдельный технологический процесс. В зависимости от поступивших исходных данных и требуемого представления результатов обработки информации специальное программное обеспечение в автоматизированном режиме применяет заложенный сценарий обработки информации. Применение специального программного обеспечения автоматизации технологических процессов обработки и анализа информации на наземном пункте БРЛК позволит решить следующие задачи:

повышение автоматизации выполнения технологических процессов обработки и анализа информации БРЛК на наземном пункте и снижение вероятности ошибки оператора;

 сокращение времени обработки информации БРЛК на наземном пункте;

 автоматизация нештатных процессов обработки информации БРЛК на наземном пункте;

 снижение количества привлекаемого персонала для обработки информации на БРЛК наземного пункта.

Заключение

По результатам исследований разработаны предложения по составу и облику БРЛК для БЛА, в том числе обеспечивающего возможность реализации получения РЛИ в режиме реального времени на борту носителя.

Возможность установки рассмотренного БРЛК на БЛА совместно с автоматизированным пунктом обработки и анализа информации позволяют реализовать следующие характеристики интересующих потенциальных потребителей целей при ведении радиолокационного наблюдения:

 обеспечить возможность обнаружения и распознавания круглосуточно в любых погодных условиях как движущихся, так и стационарных наземных и надводных целей на дальности до 100 км с высоким разрешением (до 0,3 м) при обеспечении полосы захвата до 40 км;

 сформировать радиолокационные изображения как на борту БЛА (с разрешением в единицы метров), так и на наземном автоматизированном пункте обработки и анализа информации;

 обеспечить передачу информации о параметрах обнаруженных целей в сопряженные системы бортового радиоэлектронного оборудования БЛА или наземный автоматизированный пункт обработки и анализа информации.

Список литературы

- 1. Воронцова С.А. Улучшение характеристик РСА землеобзора за счет применения двухпозиционного режима их работы // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2017. Nº 1. C. 24–30. URL: https://rts-md.mivlgu.ru/jornalRTS/article/ view/13
- Добриков В.А., Авдеев В.А., Гаврилов Д.А. Определение траектории авиационного носителя радиолокатора с синтезированной апертурой // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 1. С. 10–14. URL: https://pribor.ifmo.ru/ru/ article/4650/opredelenie_traektorii_aviacionnogo_nositelya_radiolokatora_s_sintezirovannoy_aperturoy.htm
- 3. Кузнецов В.А., Гончаров С.А. Структурно-параметрический синтез малогабаритной радиолокационной станции с синтезированной апертурой беспилотного летательного аппарата ближнего действия // Системы управления, связи и безопасности. 2017. № 3. С. 28–72.
- 4. Имитационная математическая модель построения двумерных радиолокационных изображений воздушных объектов в интересах оценки качества распознавания / В.П. Бердышев [и др.] // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. 2018. Т. 11, № 7. С. 764–774.
- 5. Антенна кругового обзора на основе линейно расширяющихся симметричных щелевых линий / В.П. Заярный [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2019. Т. 22, № 3. С. 10–14. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.3.10-14
- Углов Г.А., Белова Ю.В. Особенности разработки широкополосных смесителей частоты с подавлением зеркального канала в диапазоне частот 9–27 ГГц // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 3. С. 68–73. DOI: https:// doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.68-73
- Способы частотно-поляризационного разделения сигналов в зеркальных антеннах систем спутниковой связи / Д.Д. Габриэльян [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т. 25, N° 2. С. 83–90. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.83-90
Информация об авторах

Скрынский Владислав Романович, ведущий инженер инновационно-инжинирингового центра микросенсорики МИРЭА -Российского технологического университета, г. Москва, Россия.

Область научных интересов: распространение радиоволн, радиопередающие и радиоприемные устройства, радиотехнические системы зондирования, локации и навигации.

E-mail: skrynskij@mirea.ru

Physics of Wave Processes and Radio Systems

2024, vol. 27, no. 4, pp. 68-72

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.68-72 UDC 621.396.969 **Original Research**

Received 18 September 2024 Accepted 21 October 2024 Published 28 December 2024

Radar system for unmanned aerial vehicles

Vladislav R. Skrynskij

MIREA - Russian Technological University 78, Vernadsky Avenue, Moscow, 119454, Russia

Abstract - Background. Development of radar complex for detection of air, sea, and ground objects, as well as determination of their distance, speed and geometric parameters with automated processing. Aim. Creation of an airborne side-scan radar complex with synthetic aperture mounted on an unmanned aerial vehicle. Methods. Application of digital signal processing methods for formation of radio holograms and extraction of information about objects. Use of algorithms for automatic processing and analysis of the obtained data in real time. Results. The structural-functional scheme of the X-band side-scan radar system consisting of an antenna, a receiving and transmitting unit, a container with a digital core and a micronavigation system is described. In high-resolution mode, a radar hologram formed on board and dropped via a communication channel to the control and processing station. Radar image formation and secondary processing is performed at the ground station in automatic mode. Conclusion. According to the results of the research it is shown that it is possible to realise real-time radar reception on board the carrier, as well as to install the considered airborne side-scan radar complex on an unmanned aerial vehicle together with an automated point of information processing and analysis.

Keywords - radar; synthetic aperture radar; radar hologram; radar image; digital signal processing; automation of technological process of information processing.

≤ skrynskij@mirea.ru (Vladislav R. Skrynskij)

© BY © Vladislav R. Skrynskij, 2024

References

- 1. S. A. Vorontsova, "Improving the characteristics of land survey SAR through the use of a two-position mode of their operation," Radiotekhnicheskie i telekommunikatsionnye sistemy, no. 1, pp. 24-30, 2017, url: https://rts-md.mivlgu.ru/jornalRTS/article/view/13. (In Russ.)
- 2. V. A. Dobrikov, V. A. Avdeev, and D. A. Gavrilov, "Definition of aviation carrier trajectory of synthesied-aperture radar," Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie, vol. 52, no. 1, pp. 10-14, 2009, url: https://pribor.ifmo.ru/ru/article/4650/opredelenie_ traektorii_aviacionnogo_nositelya_radiolokatora_s_sintezirovannoy_aperturoy.htm. (In Russ.)
- 3. V. A. Kuznetsov and S. A. Goncharov, "Structural-parametric synthesis of a small-sized radar station with a synthetic aperture of a short-range unmanned aerial vehicle," Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti, no. 3, pp. 28-72, 2017. (In Russ.)
- 4. V. P. Berdyshev et al., "Simulation mathematical model for constructing two-dimensional radar images of airborne objects in the interests of assessing the quality of recognition," Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Tekhnika i tekhnologii, vol. 11, no. 7, pp. 764-774, 2018. (In Russ.)
- 5. V. P. Zayarnyy et al., "All-arround looking antenna based on linear expanding symmetric slot lines," Physics of Wave Processes and Radio Systems, vol. 22, no. 3, pp. 10-14, 2019, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.3.10-14. (In Russ.)
- 6. G. A. Uglov and Yu. V. Belova, "Features of the development of broadband frequency mixers with suppression of the mirror channel in the range frequencies 9-27 GHz," Physics of Wave Processes and Radio Systems, vol. 23, no. 3, pp. 68-73, 2020, doi: https://doi. org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.68-73. (In Russ.)
- 7. D. D. Gabriel'ean et al., "Receiving and transmitting feed of reflector antennas for satellite communication systems," Physics of Wave Processes and Radio Systems, vol. 25, no. 2, pp. 83-90, 2022, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.2.83-90. (In Russ.)

Information about the Authors

Vladislav R. Skrynskij, leading engineer of the Innovation and Engineering Center of Microsensorics, MIREA - Russian Technological University, Moscow, Russia.

Research interests: radio wave propagation, radio transmitting and receiving devices, radio systems for sensing, location and navigation. E-mail: skrynskij@mirea.ru

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

2024. T. 27, Nº 4. C. 73-82

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.73-82 УДК 621.391 Оригинальное исследование

Дата поступления 11 июня 2024 Дата принятия 12 августа 2024 Дата публикации 28 декабря 2024

Сравнительный анализ алгоритмов поэлементного приема в каналах с межсимвольной интерференцией

Е.О. Хабаров, В.Д. Мартышенко 💿

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики 443010, Россия, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23

Аннотация – Обоснование. Многие современные системы связи работают по каналам с межсимвольной интерференцией. В этом плане представляет интерес сравнительный анализ алгоритмов поэлементного приема при работе в таких каналах. Цель. Целью данной работы являются характеристики качества субоптимальных демодуляторов на основе правила обобщенного максимального правдоподобия и демодуляторов на основе линейных выравнивателей. Методы. Для получения этих характеристик качества был использован метод имитационного компьютерного моделировании были использованы модели однолучевого и двухлучевого канала связи при повышенной удельной скорости манипуляции (быстрее чем скорость Найквиста). Результаты. Были рассмотрены оптимальные и субоптимальные алгоритмы переборного типа, а также алгоритмы на основе линейных выравнивателей. Получены характеристики качества на основе имитационного моделирования. Заключение. Результаты имитационного моделирования показали, что применение обратной связи по решению улучшает помехоустойчивость переборных алгоритмов, несмотря на эффект размножения ошибок. Демодуляторы на основе линейных выравнивателей имеют характеристики качества, сопоставимые с демодуляторами переборного типа. При этом также наблюдалось положительное влияние обратной связи по решению.

Ключевые слова – межсимвольная интерференция; максимум правдоподобия; последовательная система связи; повышенная скорость манипуляции; многолучевое распространение; вероятностные характеристики; имитационное моделирование.

Введение

В данной статье анализируются методы обработки сигнальных последовательностей в последовательных (одноканальных – mono-Carrier) системах связи. В таких системах нередко возникает явление межсимвольной интерференции (МСИ), которое характерно для широкого класса каналов связи. Примерами таких каналов могут служить декаметровый (ДКМВ) канал связи, тропосферные линии связи, каналы мобильной связи, а также каналы, имеющие неравномерную амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) в полосе Найквиста.

Основными причинами указанного явления считаются диффузное временное рассеяние, которое приводит к перекрытию элементов сигнальной последовательности во времени; многолучевое распространение сигнала, характерное для ДКМВ-каналов и каналов мобильной связи; ограничение полосы занимаемых частот и неравномерность АЧХ, которая приводит к искажению формы автокорреляционной функции (АКФ) единичного сигнального элемента.

Особо следует отметить процесс передачи сигнальных последовательностей по каналам с ограниченной полосой пропускания с повышенной удельной скоростью модуляции (быстрее т. н. скорости Найквиста [1–4]):

$$\nu = \frac{V}{F} > \nu_N \quad (Бод/\Gamma ц), \tag{1}$$

где V (Бод) – скорость манипуляции; F (Гц) – полоса занимаемых сигналом частот; $v_N = 2$ (Бод/Гц) – предельная удельная скорость манипуляции, при которой отсутствует межсимвольная интерференция (т. н. скорость Найквиста).

Превышение величины v_N может возникнуть вследствие как сужения полосы канала, так и осуществляться преднамеренно с целью повышения скорости передачи информации.

Следствием возникновения МСИ является нарушение взаимной ортогональности элементов сигнальной последовательности, или, что эквивалентно, нарушение свойства отсчетности автокорреляционной функции (АКФ) единичного сигнального элемента (СЭ):

$$\begin{split} \Psi_{l,\lambda} &= \Psi\left(\left(l - \lambda \right) T \right) = \end{split}$$
(2)
$$&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(t - lT \right) \phi\left(t - \lambda T \right) dt \neq 0 \text{ при } l \neq \lambda, \end{split}$$

© ву © Хабаров Е.О., Мартышенко В.Д., 2024

где l, λ – номера элементов сигнальной последовательности; T = 1/V – тактовый интервал; $\Psi(\tau)$ – АКФ единичного СЭ; $\psi_{l,\lambda}$ – скалярное произведение между элементами сигнальной последовательности с номерами l и λ соответственно; $\varphi(t)$ – единичный СЭ.

1. Влияние МСИ на дистанционные характеристики сигнальных последовательностей

Нарушение взаимной ортогональности, в свою очередь, приводит к ухудшению дистанционных характеристик, т. е. различимости отличающихся друг от друга сигнальных последовательностей.

Данное утверждение можно пояснить следующим образом.

Рассмотрим два варианта сигнальной последовательности:

$$s_k(t) = \sum_{l=-L}^{L} b_{m,k,l} \varphi(t - lT), \qquad (3)$$

$$s_{j}(t) = \sum_{l=-L}^{L} b_{\mu,j,l} \varphi(t-lT), \qquad (4)$$

где l – номер СЭ в последовательности; m, μ – номер позиции СЭ; M – позиционность сигнальной системы; $k \in 1; M^{2L+1}$, $j \in 1; M^{2L+1}$ – номера вариантов сигнальных последовательностей; $b_{k,l}$, $b_{j,l}$ – амплитуды соответствующих элементов сигнальных последовательностей $s_k(t)$ и $s_j(t)$, принадлежащие конечному дискретному множеству.

Используя соотношения (1) и (2), сформируем разностный сигнал:

$$\Delta_{kj}(t) = \mathbf{s}_k(t) - \mathbf{s}_j(t) = \sum_{l=-L}^{L} \delta_{k,j,l} \varphi(t - lT).$$
⁽⁵⁾

где разностные амплитуды $\delta_{k,j,l} = b_{m,k,l} - b_{\mu,j,l}$.

Тогда квадрат нормы разностного сигнала в гильбертовом пространстве определится следующим образом:

$$\left\|\boldsymbol{\Delta}_{kj}\right\|^{2} = \sum_{l=-L}^{L} \sum_{\lambda=-L}^{L} \delta_{k,j,l} \delta_{k,j,\lambda} \psi_{l,\lambda},\tag{6}$$

где Δ_{kj} – векторное представление разностного сигнала (5); $\psi_{l,\lambda}$ – скалярные произведения, определяемые соотношением (2).

Зафиксируем разностную амплитуду центрального элемента сигнальной последовательности:

$$\delta_{kj0} = \delta_0 = \text{const} \neq 0.$$
 (7)
Введем обозначение

$$\psi_{l,\lambda=l} = \psi_0 = \left\| \mathbf{\phi} \right\|^2 = E_{\phi}.$$
(8)

Данная величина определяет квадрат нормы вектора единичного СЭ, или, что эквивалентно, его энергию.

Преобразуем квадратичную форму (6) следующим образом:

$$\left| \boldsymbol{\Delta}_{kj} \right\|^2 = \Lambda + \sum_{l=-L}^{L} \delta_l^2 \boldsymbol{\psi}_0, \tag{9}$$

где величина

$$\Lambda = \sum_{\substack{l=-L \ \lambda \neq l}}^{L} \sum_{\substack{\lambda = -L \\ \lambda \neq l}}^{L} \delta_{k,j,l} \delta_{k,j,\lambda} \psi_{l,\lambda}$$

включает в себя скалярные произведения только не совпадающих во времени СЭ.

Если элементы сигнальной последовательности ортогональны, а АКФ единичного СЭ обладает свойством отсчетности, то получим:

$$\Lambda = 0, \ \left\| \Delta_{kj} \right\|^2 = \sum_{l=-L}^{L} \delta_l^2 \psi_0.$$
 (10)

Очевидно, что в этом случае минимум квадрата расстояния между сигнальными последовательностями с номерами k и j (дистанционной характеристики) достигается, когда амплитуды всех соответствующих, за исключением центрального, СЭ совпадают:

$$d_{\min}^{2} = \min_{k,j} \left\{ \left\| \mathbf{\Delta}_{kj} \right\|^{2} \right\} = \delta_{0}^{2} \psi_{0}.$$
(11)

Если же взаимная ортогональность СЭ нарушается, то величина $\Lambda \neq 0$, причем может быть как положительной, так и отрицательной. В этом случае минимум дистанционной характеристики определяется как

$$d_{\min}^{2} = \delta_{0} \psi_{0} - \max_{k,j} \left\{ \sum_{\substack{l=-L \ \lambda = -L \\ \lambda \neq l}}^{L} \delta_{k,j,l} \delta_{k,j,\lambda} \psi_{l,\lambda} \right\}.$$
(12)

Из соотношения (12) следует, что наличие МСИ может приводить к ухудшению дистанционной характеристики сигнальной системы, и, как следствие, к ухудшению помехоустойчивости телекоммуникационной системы.

2. Оптимальные и субоптимальные демодуляторы при наличии МСИ

Рассмотрим сигнальную последовательность вида (3) в смеси с аддитивным шумом:

$$z(t) = s_k(t) + n(t) = \sum_{l=-L}^{L} b_{kl} \varphi(t - lT) + n(t), \qquad (13)$$

где n(t) – аддитивный белый гауссовский шум.

Задача состоит в принятии решения относительно амплитуды центрального элемента сигнальной последовательности. При этом минимальная вероятность ошибки обеспечивается при использовании правила максимального правдоподобия [5; 8; 9]:

$$\hat{b}_{0} = \arg\max_{m} \left\{ w \left(z(t) \middle| b_{0} = b_{0,m} \right) \right\},$$
(14)

где \hat{b}_0 – решение относительно амплитуды центрального элемента сигнальной последовательности; $q \in \overline{1:Q}$ – номер варианта сигнальной амплитуды; Q – позиционность сигнальной системы; $w(z(t)|b_0 = b_{0q})$ – условная плотность вероятности принимаемой смеси.

Если применить формулу полной вероятности и усреднить функцию $w(z(t)|b_0 = b_{0q})$ по всем вариантам предшествующих и последующих сигнальных последовательностей, то правило (14) можно преобразовать следующим образом:

$$\hat{b}_{0} = \arg \max_{m} \left\{ \sum_{k=1}^{M^{2L+1}} w(z(t) | b_{0} = b_{0m}, \mathbf{b}_{k}) \right\},$$
(15)

где $\mathbf{b}_k = \begin{bmatrix} b_{-L,k}, ... b_{-1,k}, b_{1,k}, ... b_{L,k} \end{bmatrix}$ – вектор амплитуд сопровождающих СЭ (как предшествующих демодулируемому СЭ, так и последующих за ним), *m* – в данном случае номер варианта центрального СЭ.

Если предположить, что аддитивная помеха в канале связи представляет собой белый гауссовский шум (АБГШ), а комбинации сопровождающих СЭ равновероятны, то правило (15) можно привести к:

$$\hat{b}_{0} = \arg\max_{m} \left\{ \sum_{k=1}^{M^{2L+1}} e^{-\frac{\left\|\mathbf{z} - \mathbf{s}_{k,m}\right\|^{2}}{2\sigma^{2}}} \right\},$$
(16)

где **z** – векторное представление принимаемой смеси (13); $\mathbf{s}_{k,q}$ – векторное представление сигнальной последовательности, у которой центральный элемент имеет номер *m*, а вектор сопровождающих СЭ – номер *k*; σ^2 – дисперсия флуктуационной аддитивной помехи.

Как следует из соотношения (16), процедура принятия решения по данному алгоритму требует суммирования большого числа экспонент с различными показателями степени. Кроме того, на приеме необходимо учитывать величину дисперсии аддитивного шума.

Если учесть, что функция плотности вероятности гауссовского случайного процесса имеет ярко выраженный нелинейный характер, можно выделить максимальное слагаемое в сумме, которая входит в соотношение (16):

$$\hat{b}_{0} = \arg\max_{m} \left\{ \max_{k} \left\{ \sum_{k=1}^{M^{2L+1}} e^{-\frac{\left\| \mathbf{z} - \mathbf{s}_{k,m} \right\|^{2}}{2\sigma^{2}}} \right\} \right\}.$$
(17)

Если применить логарифмирование, то решающее правило (17) можно свести к сравнению гильбертовых или евклидовых метрик:

$$\hat{b}_{0} = \arg\min_{m} \left\{ \min_{k} \left\{ \left\| \mathbf{z} - \mathbf{s}_{k,m} \right\|^{2} \right\} \right\},$$
(18)
$$m \in \overline{1; M}, \ k \in \overline{1; M^{2L}}.$$

При рассмотрении решающих правил (14)–(18) предполагалось, что интервал анализа принимаемой смеси не ограничен во времени: $T_A \in (-\infty, \infty)$.

На практике этот интервал приходится ограничивать, например, можно положить интервал анализа равным интервалу рассеяния демодулируемого СЭ: $T_A \in T_{0}$.

Тогда, используя (18), можно сформулировать следующий алгоритм принятия решения относительно амплитуды *b*₀:

$$\hat{b}_{0} = \arg\min_{m} \left\{ \min_{k} \left\{ \int_{T_{\varphi}} \left(z(t) - s_{k,m}(t) \right)^{2} dt \right\} \right\}, \quad (19)$$

 $m \in 1; M, k \in 1; M^{2Q},$

где Q – полный интервал рассеяния одиночного СЭ, выраженный в тактовых интервалах (полная память канала).

На принятие решения по алгоритму (19) существенное влияние оказывают последействия от СЭ, предшествующих демодулируемому. Указанные последействия можно скомпенсировать за счет обратной связи по решению (ОСР):

$$\tilde{z}(t) = s_{k,m}(t) - \sum_{q-Q}^{-1} \hat{b}_q \varphi(t - (l-q)T) + n(t), \qquad (20)$$

где \dot{b}_q – решения относительно амплитуд предшествующих СЭ.

Тогда при принятии решения по алгоритму (19) можно ограничиться перебором только последующих СЭ:

22

$$\hat{b}_{0} = \arg\min_{m} \left\{ \min_{k} \left\{ \int_{T_{0}} \left(\tilde{z}(t) - s_{k,m}(t) \right)^{2} dt \right\} \right\}, \quad (21)$$

 $m \in \overline{1;M}, k \in \overline{1;M^Q},$

где $\tilde{z}(t)$ определяется соотношением (20).

Данный алгоритм получил название «прием в целом с поэлементным принятием решения», или алгоритм Кловского – Николаева (АКН) [1; 2].

Как будет показано ниже, применение алгоритма (21) позволяет не только уменьшить вычислительную сложность алгоритма, но и улучшить различимость сигнальных последовательностей, отличающихся амплитудой анализируемого СЭ, и, как следствие, повысить помехоустойчивость системы связи.

3. Демодуляторы на основе выравнивающих фильтров

Рассмотренные в предыдущей главе демодуляторы обеспечивают хорошую помехоустойчивость в каналах с МСИ. Например, опытные образцы модемов на основе АКН (21) показали высокие результаты в каналах ДКМВ-диапазона.

Однако информационная сложность указанного алгоритма растет по показательному закону при увеличении памяти канала Q и позиционности сигнальной системы M.

В силу этих причин широкое применение нашли линейные выравниватели – ЛВ (Equalizers), реализационная сложность которых растет по линейному закону при увеличении Q и не зависит от M [7; 10–12].

На практике наиболее широкое применение нашли выравниватели на основе следующих критериев оптимальности:

 Критерий минимума среднеквадратического отклонения (СКО), обусловленного как аддитивным шумом на выходе ЛВ, так и остаточной МСИ:

$$\varepsilon_{\min}^2 = \min\left\{ (b_0 - \hat{b}_0)^2 \right\},$$
 (22)

где $\hat{b}_0 = s(t - t_0) \otimes \Theta(t); s(t)$ – сигнальная последовательность; $\Theta(t)$ – импульсная характеристика (ИХ) ЛВ; t_0 – задержка в ЛВ.

 Критерий максимума отношения сигнал/ шум на выходе ЛВ при полном подавлении откликов от сопровождающих СЭ:

$$\rho_{\max} = \max\left\{\frac{\sigma_w^2}{\sigma_v^2}\right\}$$
(23)

при $w_l = 0$ для l = -L, ..., -1, 1, ...L.

Можно показать, что структура оптимального ЛВ представляет собой каскадное соединение фильтра, согласованного с ЕСЭ, и трансверсального фильтра с отводами через *T*, которые оптимизированы в соответствии с тем или иным критерием.

В настоящее время нашли применение т. н. «полные» ЛВ, подавляющие как последействия СЭ, предшествующих демодулируемому, так и преддействия СЭ, последующих за ним. Кроме того, широко используются выравниватели с ОСР (Decision-Feed-Back-Equalizers – DFBE), в которых последействия от предыдущих СЭ компенсируются за счет ОСР, а преддействия от последующих СЭ подавляются ЛВ.

В данном случае применение ОСР, как и для переборного алгоритма, позволяет не только упростить реализацию ЛВ, но и улучшить помехоустойчивость системы связи.

4. Характеристики помехоустойчивости

Анализ характеристик качества рассмотренных выше алгоритмов осуществлялся методом программного моделирования в системе MATLAB.

При этом использовалась сигнальная последовательность со спектром типа «симметрично суженная октава» с полосой *F* = 0,75*F*_N Гц при скорости манипуляции

$$V = \frac{8}{3}F$$
Бод $= \frac{4}{3}V_N$.

Таким образом, в этом случае МСИ на передаче вводится принудительно.

В процессе моделирования использовались два варианта канала связи: однолучевой и двухлучевой с интерферирующими лучами равной интенсивности, – сдвинутых друг относительно друга на интервал $T_p = 1,5$. Параметры единичного СЭ предполагались фиксированными и известными на приемной стороне.

Отношение сигнал/шум – SNR (Signal-Noise-Ratio) – изменялось в пределах от 5 до 15 дБ с шагом через 0,25 дБ.

Для каждого фиксированного значения SNR коэффициент ошибок определялся на основе сигнальной матрицы, содержащей 4096 строк по 512 СЭ.

На рис. 1 представлены характеристики помехоустойчивости субоптимальных алгоритмов при работе в однолучевом канале связи.



Рис. 1. Характеристики субоптимальных алгоритмов переборного типа в однолучевом канале Fig. 1. The characteristics of suboptimal sorting algorithms in one-path-channel



Кривая 1 характеризует помехоустойчивость алгоритма (19), предусматривающего полный перебор как предшествующих, так и последующих сопровождающих (СЭ). Кривая 2 определяет помехоустойчивость алгоритма (21) (АКН) в случае идеальной ОСР, при которой амплитуды предшествующих СЭ поступают в цепь обратной связи без ошибок (т. е. со входа модулятора), а кривая 3 соответствует демодуляции с реальной ОСР, при которой решения относительно амплитуд предшествующих СЭ поступают с выхода демодулятора (при наличии ошибок).

На рис. 2 приведены аналогичные характеристики применительно к двухлучевому каналу.



Рис. 3. Характеристики линейных выравнивателей в однолучевом канале Fig. 3. The characteristics of linear equalizers in one-path-channel



При этом необходимо отметить, что в однолучевом канале при наличии МСИ средней интенсивности результаты примерно одинаковы при несущественном проигрыше АКН с реальной обратной связью в силу эффекта размножения ошибок.

При работе в двухлучевом канале в области низких отношений сигнал/шум алгоритм 19 и АКН с реальной ОСР примерно эквивалентны, при ослаблении шума АКН имеет лучший результат. При этом идеальная обратная связь обеспечивает энергетический выигрыш около 1 дБ.

На рис. 3 и 4 соответственно представлены аналогичные характеристики ЛВ, в основе которых лежит критерий минимума СКО (MSE-критерий).



Рис. 5. Характеристики выравнивателей с ОСР в однолучевом канале **Fig. 5.** The characteristics of decision-feed-back equalizers in one-path-channel



При этом кривые 1 на обоих рисунках определяют помехоустойчивость «полного» ЛВ, оптимизированного в соответствии с критерием (22), а кривые 2 и 3 определяют помехоустойчивость ЛВ с идеальной и реальной ОСР соответственно.

Если в однолучевом канале результаты примерно эквивалентны, то при интенсивной МСИ де-

модуляторы с ОСР обеспечивают энергетический выигрыш до 1,5 дБ. При этом наблюдается существенное влияние эффекта размножения ошибок.

На рис. 5 и 6 представлены кривые помехоустойчивости выравнивателей с обратной связью по решению (DFBE) на основе алгоритма (23). При этом в области умеренных отношений сигнал/шум энергетический проигрыш носит несущественный характер (до 0,5 дБ в двухлучевом канале).

Из анализа представленных результатов следует, что в каналах с существенной МСИ демодуляторы с ОСР имеют лучшие результаты в плане помехоустойчивости наряду с существенными реализационными преимуществами.

Заключение

В данной статье рассмотрены алгоритмы поэлементного приема сигнальных последовательностей при наличии межсимвольной интерференции. Показано, что это явление приводит к нарушению ортогональности элементов последовательности и, как следствие, к ухудшению помехоустойчивости.

Были рассмотрены как оптимальные (по критерию минимума вероятности ошибки на бит), так и субоптимальные алгоритмы переборного типа. Кроме того, были приведены алгоритмы демодуляции на основе выравнивающих (корректирующих) фильтров.

Сравнительный анализ помехоустойчивости приведенных алгоритмов проводился методом имитационного компьютерного моделирования. При этом рассматривались однолучевой канал связи, в котором МСИ обусловлена ограничением полосы занимаемых частот, а также двухлучевой канал связи с интерферирующими лучами.

Результаты моделирования выявили, что применительно к переборным демодуляторам использование обратной связи по решению позволяет улучшить помехоустойчивость, несмотря на эффект размножения ошибок.

Что касается демодуляторов на основе ЛВ, то они показали результаты, сопоставимые с характеристиками алгоритмов переборного типа. При этом также наблюдалось положительное влияние обратной связи по решению.

Список литературы

- 1. Кловский Д.Д. Передача дискретных сообщений по радиоканалам. М.: Радио и связь, 1982. 304 с.
- Николаев Б.И. Последовательная передача дискретных сообщений по непрерывным каналам с памятью. М.: Радио и связь, 1988. 264 с.
- Хабаров Е.О., Максимов Е.В. Особенности сигнально-кодовой конструкции, устойчивой к общим замираниям в декаметровом канале связи // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, №. 2. С. 29–36. DOI: https://doi. org/10.18469/1810-3189.2020.23.2.29-36
- 4. ICI cancellation techniques based on data repetition for OFDM systems in radio access network slicing and virtualization for 5G vertical industries / M. Wen [et al.] // Radio Access Network Slicing and Virtualization for 5G Vertical Industries. Hoboken: John Wiley & Sons, 2021. P. 1–24. DOI: https://doi.org/10.1002/9781119652434.ch1
- Cuc A.-M., Morgoş F.L., Grava C. Performances analysis of turbo codes, LDPC codes and polar codes using AWGN channel with and without inter symbol interference // 2022 International Symposium on Electronics and Telecommunications (ISETC). 2022. P. 1–4. DOI: https://doi.org/10.1109/ISETC56213.2022.10010114
- Wu L., Wang P. Channel Interference technology research based on wireless communitation network // 2021 IEEE International Conference on Power Electronics, Computer Applications (ICPECA). 2021. P. 1028-1031. DOI: https://doi.org/10.1109/ ICPECA51329.2021.9362639
- Song E., Kim J., Kim J. A passive equalizer optimization method based on time-domain inter-symbol interference (ISI) cancellation technique // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. 2017. Vol. 60, no. 3. P. 807-810. DOI: https://doi.org/10.1109/ TEMC.2017.2749519
- 8. Proakis J.G. Digital Communications. Fourth edition. New York: McGraw-Hill, 2001. 798 p.
- 9. Ungerboeck G. Nonlinear equalization of binary signals in Gaussian noise // IEEE Transactions on Communication Technology. 1975. Vol. 19, no. 6. P. 1128–1137. DOI: https://doi.org/10.1109/TCOM.1971.1090785
- Junior R.P., da Rocha C.A.F., Chang B.S. Multiple independent interfrences cancellation for SC-FDE systems using widely linear iterative equalizers // 2018 IEEE 10th Latin-American Conference on Communications (LATINCOM). 2018. P. 1–6. DOI: https://doi. org/10.1109/LATINCOM.2018.8613234
- 11. Signal integrity analysis of through-silicon-via (TSV) with passive equalizer to separate return path and mitigate the inter-symbol interference (ISI) for next generation bandwidth memory / H. Kim [et al.] // IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology. 2023. Vol. 13, no. 12. P. 1973-1988. DOI: https://doi.org/10.1109/TCPMT.2023.3334789
- 12. Djigan V. Fast RLS algorithms in combined adaptive array and fracionally-spased feed-forward/feed-backward equalizer // 2020 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). 2020. P. 1–6. DOI: https://doi.org/10.1109/EWDTS50664.2020.9225028

Информация об авторах

Хабаров Евгений Оттович, доктор технических наук, профессор кафедры теоретических основ радиотехники и связи Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: межсимвольная интерференция, сигнально-кодовые конструкции, каналы с многолучевым распространением, передача с повышенной удельной скоростью манипуляции.

E-mail: khabarof@rambler.ru SPIN-κο∂ (eLibrary): 5103-6220 ResearcherID (WoS): KLY-8641-2024

Мартышенко Владимир Дмитриевич, аспирант кафедры теоретических основ радиотехники и связи Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: межсимвольная интерференция, сигнально-кодовые конструкции, каналы с многолучевым распространением.

E-mail: vladmart0225@mail.ru ORCID: https://orcid.org/0009-0002-1484-7870 SPIN-код (eLibrary): 3794-1830 AuthorID (eLibrary): 1245231 ResearcherID (WoS): KJO-2701-2024

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2024, vol. 27, no. 4, pp. 73-82

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.73-82 UDC 621.391 Original Research Received 11 June 2024 Accepted 12 August 2024 Published 28 December 2024

Comparative analysis of elementwise receptionalgorithms in intersymbol interference channels

Eugene O. Khabarov, Vladimir D. Martyshenko 💿

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russia

Abstract - **Background**. Many modern communication-systems work on channels with intersymbol interference. Therefore comparative analysis of elementwise reception-algorithms is topical by work in such channels. **Aim**. The Aim of this work is qualitative properties of suboptimal demodulators on maximum-likelihood-rule based and demodulators on linear equalizers based. **Methods**. The method of simulation computer modeling was used for acquisition these qualitative properties. By modeling the models of one-path as well as multi-path channels by how specific keying rate (faster than Nyquist-rate) were used. **Results**. Optimal and suboptimal sorting-algorithms as well as algorithms on linear equalizer based were consider. The qualitative properties on simulation computer modeling based were received. **Conclusion**. The results of simulation modeling reveal, what decision feed-back noise immunity is improved, in spite of error extension. The demodulators, on linear equalizer based, have comparable qualitative properties with sorting demodulators. Herewith the positive impact of decision feed-back was observed.

Keywords - intersymbol interference; maximum likelihood; sequential communication; how keying rate; multi-Path radiowave propagation; probability-performance; imitation-modeling.

khabarof@rambler.ru (Eugene O. Khabarov)

© BY © Eugene O. Khabarov, Vladimir D. Martyshenko, 2024

References

- 1. D. D. Klovskiy, Transmission of Discrete Messages via Radio Channels. Moscow: Radio i svyaz', 1982. (In Russ.)
- 2. B. I. Nikolaev, Serial Transmission of Discrete Messages over Continuous Channels with Memory. Moscow: Radio i svyaz', 1988. (In Russ.)
- E. O. Khabarov and E. V. Maksimov, "The peculiarity of signal-coded-construction with higher stability of fading in decameter channel," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 23, pp. 29–36, 2020, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.2.29-36. (In Russ.)
- 4. M. Wen et al., "ICI cancellation techniques based on data repetition for OFDM systems in radio access network slicing and virtualization for 5G vertical industries," in *Radio Access Network Slicing and Virtualization for 5G Vertical Industries*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2021, pp. 1–24, doi: https://doi.org/10.1002/9781119652434.ch1.
- A.-M. Cuc, F. L. Morgoş, and C. Grava, "Performances analysis of turbo codes, LDPC codes and polar codes using AWGN channel with and without inter symbol interference," 2022 International Symposium on Electronics and Telecommunications (ISETC), pp. 1–4, 2022, doi: https://doi.org/10.1109/ISETC56213.2022.10010114.
- L. Wu and P. Wang, "Channel Interference technology research based on wireless communitation network," 2021 IEEE International Conference on Power Electronics, Computer Applications (ICPECA), pp. 1028–1031, 2021, doi: https://doi.org/10.1109/ ICPECA51329.2021.9362639.
- E. Song, J. Kim, and J. Kim, "A passive equalizer optimization method based on time-domain inter-symbol interference (ISI) cancellation technique," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 60, no. 3, pp. 807–810, 2017, doi: https://doi.org/10.1109/ TEMC.2017.2749519.

- 8. J. G. Proakis, Digital Communications, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2001.
- 9. G. Ungerboeck, "Nonlinear equalization of binary signals in Gaussian noise," *IEEE Transactions on Communication Technology*, vol. 19, no. 6, pp. 1128–1137, 1975, doi: https://doi.org/10.1109/TCOM.1971.1090785.
- R. P. Junior, C. A. F. de Rocha, and B. S. Chang, "Multiple independent interfrences cancellation for SC-FDE systems using widely linear iterative equalizers," 2018 IEEE 10th Latin-American Conference on Communications (LATINCOM), pp. 1–6, 2018, doi: https://doi. org/10.1109/LATINCOM.2018.8613234.
- H. Kim et al., "Signal integrity analysis of through-silicon-via (TSV) with passive equalizer to separate return path and mitigate the inter-symbol interference (ISI) for next generation bandwidth memory," *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*, vol. 13, no. 12, pp. 1973–1988, 2023, doi: https://doi.org/10.1109/TCPMT.2023.3334789.
- 12. V. Djigan, "Fast RLS algorithms in combined adaptive array and fracionally-spased feed-forward/feed-backward equalizer," 2020 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), pp. 1–6, 2020, doi: https://doi.org/10.1109/EWDTS50664.2020.9225028.

Information about the Authors

Eugene O. Khabarov, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Theoretical Foundations of Radio Engineering and Communication, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

Research interests: intersymbol interference, signal-coded-constructions, the channels with multi-path of radio-wave propagation, the transmission by high specific keying-rate.

E-mail: khabarof@rambler.ru SPIN-code (eLibrary): 5103-6220 ResearcherID (WoS): KLY-8641-2024

Vladimir D. Martyshenko, Graduate student of the Department of Theoretical Foundations of Radio Engineering and Communication, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

Research interests: intersymbol interference, signal-code structures, multipath channels.

E-mail: vladmart0225@mail.ru ORCID: https://orcid.org/0009-0002-1484-7870 SPIN-code (eLibrary): 3794-1830 AuthorID (eLibrary): 1245231 ResearcherID (WoS): KJO-2701-2024

Реклама

Антипов, О.И. Детерминированный хаос и фракталы в дискретно-нелинейных системах / О.И. Антипов, В.А. Неганов, А.А. Потапов. - М.: Радиотехника, 2009. - 235 с., ил.



ISBN 978-5-88070-237-4

УДК 530.1:621.372+621.396 ББК 32.96

В монографии рассмотрены явления детерминированного хаоса и фрактальности в дискретно-нелинейных системах на примере устройств импульсной силовой электроники, приведены некоторые основные определения современной нелинейной динамики и некоторые математические методы целочисленных и дробных мер.

Представленные явления стохастической работы могут наблюдаться в широком классе систем с переменной структурой, действие которых может быть описано системами дифференциальных уравнений с пере-

менными коэффициентами, скачкообразно меняющими свои значения с течением времени в зависимости от состояния системы. Объектами исследования явились импульсные стабилизаторы напряжения различных типов и структур. Научной новизной является применение как фрактальных, так и мультифрактальных мер детерминированного хаоса к анализу стохастической работы импульсных стабилизаторов.

Для специалистов, интересующихся проблемами детерминированного хаоса, численным моделированием дискретно-нелинейных систем.

82

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

2024. T. 27, Nº 4. C. 83-93

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.83-93 УДК 536.25:53.02 Оригинальное исследование Дата поступления 14 апреля 2024 Дата принятия 15 мая 2024 Дата публикации 28 декабря 2024

Решение задач геокриологии на основе обобщенной теории Фурье для температурных волн в полупространстве

А.М. Афанасьев 💿, Ю.С. Бахрачева 💿

Волгоградский государственный университет 400062, Россия, г. Волгоград, Университетский пр., 100

Аннотация - Обоснование. В настоящее время в геокриологии для прогнозирования сезонных изменений состояния мерзлых пород и грунтов широко применяют полученные еще Фурье формулы, моделирующие колебания температуры в поверхностном слое земной коры, вызываемые годовыми колебаниями температуры ее поверхности. Существенный недостаток такого подхода к моделированию проявляется в том, что в действительности состояние среды характеризуется не только полем температуры, но и полем влагосодержания, которого теория Фурье не содержит. Цель. Требуется дать обобщение известной в математической физике задаче Фурье о колебаниях температурного поля в полупространстве, введя в рассмотрение наряду с температурным полем поле влагосодержания и проведя учет связанных с этим полем явлений испарения и конденсации. Методы. В рамках теории А.В. Лыкова разработана пространственно одномерная математическая модель процессов распространения тепла и влаги в однородном полупространстве, граница которого находится в состоянии тепло- и массообмена с воздушной средой. Методом комплексных амплитуд получены формулы для асимптотических по времени колебаний температуры и влагосодержания в материале, наполняющем полупространство, при условии что температура воздуха изменяется по гармоническому закону, а водяной пар как вблизи поверхности материала, так и за пределами пограничного слоя находится в состоянии, близком к насыщению. Результаты. Согласно полученным результатам, поле температуры представляется суперпозицией двух затухающих гармонических волн, у которых одна и та же частота, но разные коэффициенты затухания и фазовые скорости. Такую же структуру имеет и поле влагосодержания. Для материала с характеристиками глины и при конкретных значениях всех определяющих процесс величин для каждой из волн проведен расчет глубины проникновения и времени запаздывания колебаний на заданной глубине относительно колебаний температуры воздуха, дано сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. Заключение. Построенное решение и следующие из него выводы являются развитием известных в литературе исследований Фурье, посвященных колебаниям температурного поля в поверхностном слое земной коры и справедливых лишь в ситуации, когда материал не содержит влаги, а по гармоническому закону изменяется не температура воздуха, а температура поверхности материала. Результаты работы могут быть использованы в геокриологии в качестве теоретического инструмента при моделировании сезонных колебаний теплофизического состояния мерзлых пород и грунтов.

Ключевые слова – уравнения Лыкова; задача для полупространства; гармонический режим; асимптотическое решение; затухающие волны; глубина проникновения; время запаздывания; дисперсия; законы Фурье; геокриология.

Введение

К числу классических задач математической физики относятся задачи о построении пространственно одномерных асимптотических решений уравнения диффузии в полупространстве и пластине при гармонических по времени граничных условиях Дирихле, Неймана и смешанного типа. Решения такого рода задач имеют вид бегущих затухающих гармонических волн, распространение которых сопровождается дисперсией, а глубина проникновения быстро уменьшается с ростом частоты. В теории электромагнетизма в качестве примера здесь можно указать на работы [1, с. 457-460; 2, с. 449-457], в которых исследуется явление скин-эффекта, в теории теплопроводности - на работы [3, с. 542-549; 4, с. 99-103; 5, с. 656-659; 6, c. 238-247; 7, c. 85-87, c. 109-112; 8, c. 131-140; 9, с. 298-313], объектом исследования в которых являются волны температуры. Одним из наиболее известных результатов, касающихся температурных волн, являются полученные еще Фурье и Пуассоном формулы, моделирующие колебания температуры в поверхностном слое земной коры, вызванные суточными и годовыми колебаниями температуры окружающей среды. В настоящее время формулы Фурье и являющиеся их следствием законы Фурье [6, с. 244-245] нашли широкое применение в мерзлотоведении (геокриологии), где они используются для решения различных проблем, связанных с организацией хозяйственной деятельности в области распространения мерзлых пород [10]. Существенным недостатком формул Фурье, который ограничивает их применение для решения указанных проблем, является то, что они

🖀 a.m.afanasiev@yandex.ru (Афанасьев Анатолий Михайлович)

С Афанасьев А.М., Бахрачева Ю.С., 2024

не учитывают наличия в почве влаги и связанных с ней процессов испарения и конденсации. В работах авторов [11; 12] предпринята попытка этот недостаток устранить. Там разработан общий алгоритм для решения задачи Фурье о температурных колебаниях в однородном полупространстве с учетом содержащейся в материале влаги. Однако полученное авторами общее решение было проанализировано ими лишь для случая простейшей модели тепломассопереноса, в которой не учитываются явления термодиффузии и внутреннего испарения. Другим недостатком указанных работ является то, что они не содержит численных расчетов, позволяющих сравнить предсказанные теорией результаты с опытными данными. В настоящей статье мы проанализируем модель общего вида, проведем и сопоставим с известными экспериментальными данными конкретные расчеты при характерных для практики значениях переменных.

1. Постановка задачи для уравнений распространения тепла и влаги

Будем рассматривать однородное полупространство x > 0, граница которого x = 0 обдувается воздушным потоком, имеющим за пределами пограничного слоя температуру $T_{\rm B}$ и влажность φ . Наполняющий полупространство материал состоит из твердой основы (капиллярно-пористое тело) и воды. Примем, что плотность теплового потока Q и плотность потока влаги J на поверхности x = 0(интенсивности тепло- и массообмена) не зависят от положения переменной точки на поверхности и являются функциями только времени τ . Тогда поля температуры T и влагосодержания U будут зависеть только от x и τ , т. е. искомыми функциями будут $T(x, \tau)$ и $U(x, \tau)$.

Известно, что совместные начально-краевые задачи для полей *T* и *U*, в отличие от задач для одного только поля *T*, большей частью формулируются как *нелинейные* и что одной из основных причин нелинейности является формула для интенсивности массообмена *J*. Здесь мы примем для этой величины выражение в форме *закона испарения Дальтона*:

$$J(\tau) = \alpha_{\rm m} \left[P\left(T(0,\tau)\right) - \varphi P\left(T_{\rm B}(\tau)\right) \right];$$
$$P(T) = 6,03 \cdot 10^{-3} \exp \frac{17,3 T}{T + T_{\rm 1}}.$$

Здесь $\alpha_{\rm m}$ – коэффициент массообмена по перепаду давления пара; P(T) – функция, моделирующая известную из опыта зависимость относительного давления насыщенного водяного пара от его температуры Т при общем нормальном давлении; *T*₁ = 238 °C − постоянная. Формула справедлива лишь в ситуации, когда водяной пар вблизи поверхности x = 0 является насыщенным. В настоящей статье мы будем изучать ситуацию, когда температура поверхности $T(0, \tau)$ и температура воздуха $T_{\rm B}(\tau)$ совершают малые колебания вблизи одной и той же температуры T₀. Для малых отклонений указанных температур от Т₀ зависимость J(т) можно линеаризовать, разложив функцию P(T) в ряд Тейлора в окрестности точки T_0 . Выполнив линеаризацию и приняв φ = 1, т. е. считая, что водяной пар находится в насыщенном состоянии не только вблизи поверхности материала, но и за пределами пограничного слоя, получим приближенную формулу для закона Дальтона:

$$J(\tau) = \tilde{\alpha}_{\rm m} \left[T(0,\tau) - T_{\rm B}(\tau) \right];$$
$$\tilde{\alpha}_{\rm m} = \alpha_{\rm m} P'(T_{\rm 0}).$$

Здесь $\tilde{\alpha}_m$ – коэффициент массообмена по перепаду температуры.

Отметим, что закон Дальтона для интенсивности массообмена, записанный в таком виде, совпадает по форме с законом Ньютона для интенсивности теплообмена:

$$Q(\tau) = \alpha_{\rm w} \left[T(0, \tau) - T_{\rm B}(\tau) \right],$$

который мы и будем использовать при формулировке граничных условий. В последней формуле α_w – коэффициент теплообмена поверхности образца с воздушной средой.

Линеаризация закона Дальтона позволяет переписать в линейном приближении всю систему уравнений и краевых условий, описывающих процессы распространения тепла и влаги в нашей задаче. Чтобы записать эту систему, введем следующие обозначения: c, ρ , λ , γ , a_m , δ – теплофизические характеристики материала, а именно удельная теплоемкость, плотность в сухом состоянии, коэффициент теплопроводности, критерий испарения, коэффициент диффузии влаги, относительный коэффициент диффузии влаги; $a_w = \lambda/(c\rho)$ – коэффициент диффузии тепла (коэфициент теплотроводности); r – удельная теплота парообразования воды. Необходимая нам система будет иметь следующий вид [13; 14]:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_{\rm w} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{r\gamma}{c} \frac{\partial U}{\partial \tau}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a_{\rm m} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{\rm m} \delta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \qquad (2)$$

$$\tilde{\alpha}_{\rm m} \left[T(0,\tau) - T_{\rm B}(\tau) \right] = a_{\rm m} \rho \left[\frac{\partial U}{\partial x}(0,\tau) + \delta \frac{\partial T}{\partial x}(0,\tau) \right]; \qquad (3)$$

$$\alpha_{\rm w} \left[T(0,\tau) - T_{\rm B}(\tau) \right] + \tag{4}$$

+
$$r(1-\gamma)\tilde{\alpha}_{\mathrm{m}}\left[T(0,\tau)-T_{\mathrm{B}}(\tau)\right] = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0,\tau).$$

Здесь (1) и (2) – уравнения для потоков тепла и влаги в области $0 < x < \infty$, занятой материалом, а (3) и (4) – граничные условия для этих потоков на поверхности x = 0. Условие (3) выражает равенство двух потоков влаги, отводимого от поверхности материала в воздух через пограничный слой и подводимого к этой поверхности изнутри материала, а условие (4) выражает соотношение между тепловыми потоками на поверхности x = 0, а именно между потоком тепла, отводимым по закону Ньютона с поверхности в воздух, потоком тепла, необходимым для испарения с поверхности подступающего к ней из материала потока жидкости, и потоком тепла, подходящим к поверхности изнутри материала.

2. Гармонические условия на границе и постановка задачи об асимптотике

Пусть при $\tau < 0$ температура материала и его влагосодержание имели постоянные по всему полупространству значения T_0 и U_0 , температура воздуха $T_{\rm B}$ равнялась температуре материала T_0 , а влажность воздуха φ была равна 1. Очевидно, что в таком состоянии система может находиться неограниченно долго, поскольку все уравнения нашей задачи оказываются удовлетворенными, причем для интенсивностей тепломассообмена мы будем иметь Q = 0 и J = 0.

Примем далее, что с момента $\tau = 0$ температура воздуха $T_{\rm B}$ начинает совершать вблизи T_{0} малые гармонические колебания по закону

$$T_{\rm B}(\tau) = T_0 + \Delta T_{\rm B} \sin(\omega \tau + \psi_{\rm B}), \tag{5}$$

где $\Delta T_{\rm B}$, ω , $\psi_{\rm B}$ – заданные величины, а влажность воздуха остается неизменной и сохраняет принятое выше значение $\varphi = 1$. Несложно убедиться, что тогда, рассмотрев систему (1)–(5), мы сможем поставить вопрос о нахождении решения этой системы вида

$$T(x,\tau) = T_0 + T(x)\sin(\omega\tau + \psi_t(x)), \qquad (6)$$
$$U(x,\tau) = U_0 + U(x)\sin(\omega\tau + \psi_u(x)),$$

в котором температура материала *T* и его влагосодержание *U* будут совершать при каждом *x* малые гармонические колебания вблизи своих первоначальных значений T_0 и U_0 , а интенсивности тепло- и массообмена Q и J будут совершать такие же колебания вблизи своих первоначальных значений Q = 0 и J = 0. В этом квазистационарном состоянии системы, которое приходит на смену ее исходному стационарному состоянию, нагревание поверхности материала и связанное с ним испарение влаги с поверхности будут периодически замещаться охлаждением поверхности и ее пропиткой, а средние за период колебаний температура и влагосодержание при любом x будут, как отмечалось выше, оставаться неизменными.

К сказанному добавим, что поскольку область построения решения является неограниченной, то от амплитуд колебаний нужно потребовать, чтобы они удовлетворяли условиям на бесконечности

$$T(x) \to 0$$
 и $U(x) \to 0$ при $x \to \infty$. (7)

Важно отметить, что, согласно проведенным построениям, существование стационарного и следующего за ним квазистационарного состояний с описанными выше свойствами возможно лишь при условии, что влажность воздуха как вблизи поверхности материала, так и за пределами пограничного слоя остается на уровне $\phi = 1$ во все время рассмотрения. Таким образом, полученные ниже результаты могут быть использованы для приближенного моделирования наблюдаемых на практике процессов лишь при большой влажности воздуха.

Сформулированная задача о нахождении решений вида (6) относится к числу задач без начальных данных [6]; искомые в этой задаче функции дают асимптотику полей T и U при $\tau \rightarrow \infty$.

3. Постановка задачи для комплексов

Построение асимптотического решения (6) проведем методом комплексных амплитуд. Вместо функций $T(x, \tau)$, $U(x, \tau)$ введем новые искомые функции $\tilde{T}(x, \tau)$, $\tilde{U}(x, \tau)$:

$$\begin{split} \tilde{T}(x,\tau) &= T(x,\tau) - T_0 = T(x) \sin\left(\omega\tau + \psi_t(x)\right), \\ \tilde{U}(x,\tau) &= U(x,\tau) - U_0 = U(x) \sin\left(\omega\tau + \psi_u(x)\right), \end{split} \tag{8}$$

которым, в свою очередь, сопоставим их комплексы $\dot{T}(x)$ и $\dot{U}(x)$:

$$\tilde{T}(x,\tau) \leftrightarrow \dot{T}(x) = T(x) \exp\left(i\psi_{t}(x)\right), \tag{9}$$
$$\tilde{U}(x,\tau) \leftrightarrow \dot{U}(x) = U(x) \exp\left(i\psi_{u}(x)\right).$$

Выражая в системе (1)–(4) функции T и U через \tilde{T} и \tilde{U} и пользуясь правилами работы с комплексами, вместо уравнений для \tilde{T} и \tilde{U} получим уравнения для комплексов этих функций \dot{T} и \dot{U} :

$$i\omega \dot{T}(x) = a_{\rm w} \frac{d^2 \dot{T}(x)}{dx^2} + i\omega \frac{r\gamma}{c} \dot{U}(x); \tag{10}$$

$$i\omega \dot{U}(x) = a_{\rm m} \frac{d^2 \dot{U}(x)}{dx^2} + a_{\rm m} \delta \frac{d^2 \dot{T}(x)}{dx^2};$$
 (11)

$$\tilde{\alpha}_{\rm m} \left[\dot{T}(0) - \Delta \dot{T}_{\rm B} \right] = a_{\rm m} \rho \left[\frac{d\dot{U}}{dx}(0) + \delta \frac{d\dot{T}}{dx}(0) \right]; \tag{12}$$

$$\tilde{\alpha}_{\rm w} \left[\dot{T}(0) - \Delta \dot{T}_{\rm B} \right] = \lambda \frac{d\dot{T}}{dx}(0). \tag{13}$$

Здесь обозначено

$$\tilde{\alpha}_{\rm w} = \alpha_{\rm w} + r(1-\gamma)\tilde{\alpha}_{\rm m}, \ \Delta \dot{T}_{\rm B} = \Delta T_{\rm B} \exp(i\psi_{\rm B})$$

 эффективный коэффициент теплообмена и заданное комплексное число соответственно.

В задаче для комплексов условие на бесконечности (7) будет выглядеть так:

$$\left|\dot{T}(x)\right| \to 0 \text{ и } \left|\dot{U}(x)\right| \to 0 \text{ при } x \to \infty.$$
 (14)

Решив задачу (10)–(14) для комплексов \dot{T} и \dot{U} , мы затем с помощью (8) и (9) найдем отвечающие этим комплексам асимптотические решения (6).

4. Решение задачи для комплексов

Пользуясь *методом Эйлера* [15], построим общее решение системы дифференциальных уравнений (10), (11), удовлетворяющее условиям на бесконечности (14), а затем из системы краевых условий (12), (13) найдем входящие в это общее решение произвольные постоянные, чем и завершится процесс нахождения решения для комплексов. В подробном виде эта процедура изложена авторами в статье [11], здесь же мы приведем лишь ее результаты. Для записи решения в указанной работе были введены следующие обозначения:

$$\nu = \left(1 + a_{\rm w}/a_{\rm m} + \delta r \gamma/c\right)/2; \tag{15}$$

$$T_{1,2} = \frac{r\gamma}{c} \frac{1}{1 - v \mp \sqrt{v^2 - a_w/a_m}};$$
(16)

$$\begin{split} \mu_{1,2} &= -\beta_{1,2}(1+i), \end{split} \tag{17} \\ \beta_{1,2} &= \sqrt{\omega/(2a_{\rm w})} \sqrt{\nu \pm \sqrt{\nu^2 - a_{\rm w}/a_{\rm m}}} \,. \end{split}$$

Величина v является безразмерной, $T_{1,2}$ имеет размерность °С, а размерностью $\beta_{1,2}$ является 1/м. Первые две величины – постоянные, определяемые свойствами материала, а третья величина кроме свойств материала зависит еще от частоты ω . Отметим, что во всех формулах под \sqrt{z} мы понимаем, как обычно, главное значение корня квадратного из комплексного числа z (Re $\sqrt{z} \ge 0$). Кроме указанных пяти величин, нахождение которых может быть произведено непосредственно по исходным данным, следует еще, согласно [11], определить две безразмерные и зависящие от частоты ω величины $C_{1,2}$, которые находятся как решение следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} T_1 - a_m \rho \mu_1 (1 + \delta T_1) / \tilde{\alpha}_m \end{bmatrix} C_1 +$$

$$+ \begin{bmatrix} T_2 - a_m \rho \mu_2 (1 + \delta T_2) / \tilde{\alpha}_m \end{bmatrix} C_2 = \Delta \dot{T}_B;$$

$$T_1 (1 - \lambda \mu_1 / \tilde{\alpha}_w) C_1 +$$

$$+ T_2 (1 - \lambda \mu_2 / \tilde{\alpha}_w) C_2 = \Delta \dot{T}_B.$$
(18)

После нахождения $C_{1,2}$ решение задачи (10)–(14) для комплексов \dot{T} и \dot{U} в матричном виде может быть записано как

$$\begin{vmatrix} \dot{T}(x) \\ \dot{U}(x) \end{vmatrix} = C_1 \begin{vmatrix} T_1 \exp(\mu_1 x) \\ \exp(\mu_1 x) \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} T_2 \exp(\mu_2 x) \\ \exp(\mu_2 x) \end{vmatrix} .$$
(19)

Приняв к сведению это решение из работы [11], мы должны теперь в качестве следующего шага перейти от комплексов (изображений) к вещественным функциям (оригиналам) и проанализировать зависимость этих функций от координаты, времени, частоты и характеристик материала. Рассмотрим сначала простую ситуацию, когда у = 0 и $\delta = 0$, что соответствует математической модели тепломассопереноса, в которой пренебрегают явлениями внутреннего парообразования и термодиффузии, вследствие чего функции Т и U оказываются связанными только через граничные уравнения (условия применимости такой модели к задачам практики и анализ получаемых при ее использовании решений можно найти в работе [16]). Решение для комплексов (15)-(19) в случае такой модели становится существенно более простым; переход от этого решения к оригиналам и анализ получаемых при этом функций проведены авторами в статье [12]. Здесь же мы впервые осуществим полный анализ решения для комплексов (15)-(19), которому будет отвечать математическая модель тепломассопереноса общего вида, свободная от указанных выше ограничений. Наше исследование будет выглядеть следующим образом: мы зафиксируем параметры материала и частоту, и, рассчитав при этих условиях коэффициенты в формуле (19), проанализируем зависимости полей *Т* и *U* от координаты и времени.

5. Расчет коэффициентов в формуле для комплексов

Материалом полупространства будем считать глину, ее теплофизические характеристики имеют следующие значения [13]: $\lambda = 0.93$ Вт/(м · °C); $c = 1.9 \cdot 10^3$ Дж/(кг · °C); $\rho = 1.5 \cdot 10^3$ кг/м³; $\gamma = 0.1$; $\delta = 1.5 \cdot 10^{-3}$ 1/°C); $a_{\rm m} = 2.6 \cdot 10^{-8}$ м²/с; $a_{\rm w} = 0.32 \times 10^{-6}$ м²/с.

Эти данные позволяют вычислить коэффициенты (15) и (16): $\nu = 6,7432;$ $T_1 = -10,347$ °C; $T_2 = 12,790 \cdot 10^3$ °C.

Рассчитаем теперь круговую частоту колебаний $\omega = 2\pi/T$, выбрав в качестве периода колебаний *T* один год, а затем найдем коэффициенты (17): $\omega = 1,9912 \cdot 10^{-7}$ с⁻¹; $\beta_1 = 1,9725$ 1/м; $\beta_2 = 0,55540$ 1/м.

При расчете коэффициентов тепло- и массообмена будем опираться на фундаментальное руководство по этому вопросу [17], на статью авторов [14], где для этих коэффициентов получены приближенные формулы, а также на имеющиеся в [13] опытные данные. На основании этих работ в качестве характерных значений коэффициентов тепло- и массообмена в опытах, где влажная глина будет обдуваться потоком воздуха, примем $\alpha_w = 5 \text{ BT/(M}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}); \alpha_m = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(M}^2 \cdot \text{c}).$

В качестве температуры, вблизи которой происходят колебания температуры воздуха, возьмем $T_0 = 20$ °C. Тогда расчет коэффициентов $\tilde{\alpha}_w$ и $\tilde{\alpha}_m$ приводит к таким значениям: $\tilde{\alpha}_w = 19,5$ BT/(м² · °C); $\tilde{\alpha}_m = 7,13 \cdot 10^{-6}$ кг/(м²·c·°C).

Наконец, в качестве характеристик колебаний температуры воздуха в формуле (5) примем $\Delta T_{\rm B} = 5$ °C, $\psi_{\rm B} = 0$.

Теперь мы можем обратиться к системе (18). После подсчета коэффициентов она приобретает такой вид:

$$(0,27501+i10,622)C_1 + (12851+i61,322)C_2 = 5;$$

 $(-11, 320 - i0, 97336)C_1 + (13129 + i338, 78)C_2 = 5.$

Здесь скобки и правые части уравнений имеют размерности °С. Решая эту систему, найдем, что

$$\begin{split} C_1 &= \left| C_1 \right| \exp(i \arg C_1); \end{split} \tag{20} \\ \left| C_1 \right| &= 9,306510^{-3}; \ \arg C_1 = -0,024990; \\ C_2 &= \left| C_2 \right| \exp(i \arg C_2); \\ \left| C_2 \right| &= 0,38875 \cdot 10^{-3}; \ \arg C_2 = -0,024554. \end{split}$$

Таким образом, все коэффициенты в решении для комплексов (19) нам стали известными.

6. Анализ поля влагосодержания

Обратимся сначала к полю *U*. Согласно формулам (19), (20) и (17),

$$\begin{split} U(x) &= C_1 \exp(\mu_1 x) + C_2 \exp(\mu_2 x) = \\ &= \left| C_1 \right| \exp(i \arg C_1) \exp\left[-\beta_1 (1+i)x \right] + \\ &+ \left| C_2 \right| \exp(i \arg C_2) \exp\left[-\beta_2 (1+i)x \right]. \end{split}$$

Выделяя в каждом из двух слагаемых модуль и аргумент, найдем соответствующие этим двум комплексам оригиналы; добавив к получившейся сумме постоянную U₀, будем иметь оригинал для поля влагосодержания в следующем виде:

$$U(x,\tau) - U_0 =$$

$$= |C_1| \exp(-\beta_1 x) \sin(\omega \tau + \arg C_1 - \beta_1 x) + (21)$$

$$+ |C_2| \exp(-\beta_2 x) \sin(\omega \tau + \arg C_2 - \beta_2 x).$$

Каждое из двух слагаемых в правой части этой формулы представляет собой бегущую затухающую гармоническую волну. Рассмотрим первое слагаемое. Согласно терминологии, принятой в теории волн, величина β_1 есть коэффициент затухания этой первой волны влагосодержания, а обратная величина $\Delta_1 = 1/\beta_1$ – ее глубина проникновения. Другими характеристиками волны являются ее фазовая скорость $V_1 = \omega/\beta_1$ и длина волны $\Lambda_1 = 2\pi/\beta_1$. Для гармонической волны общего вида в формулах для фазовой скорости и длины волны вместо коэффициента затухания β_1 должен стоять коэффициент фазы β'_1 , который является коэффициентом при координате x под знаком синуса, но в нашем случае эти два коэффициента совпадают.

Поскольку коэффициент β_1 является функцией частоты ω (его указанное выше значение мы нашли при конкретной частоте), то фазовая скорость и длина волны также оказываются зависящими от частоты, т. е. распространение волн влагосодержания сопровождается дисперсией.

Аналогичный комментарий можно дать и для второго слагаемого в формуле (21).

В формуле (21) мы имеем наложение двух бегущих затухающих гармонических волн. Эти две волны имеют одну и ту же частоту, но разные коэффициенты затухания и фазовые скорости, поэтому результат их наложения уже не будет волной того типа, к которому они принадлежат каждая по отдельности, хотя при любом х поле будет изменяться во времени по гармоническому закону. Мы можем записать этот закон, воспользовавшись формулой для суммы двух синусоид с разными амплитудами и разными начальными фазами. Чтобы сделать это, введем следующие обозначения:

$$A_{1}(x) = |C_{1}| \exp(-\beta_{1}x); \quad \phi_{1}(x) = \arg C_{1} - \beta_{1}x; \quad (22)$$
$$A_{2}(x) = |C_{2}| \exp(-\beta_{2}x); \quad \phi_{2}(x) = \arg C_{2} - \beta_{2}x.$$

Тогда формулу (21) для поля влагосодержания можно будет переписать так:

$$U(x,\tau) - U_0 = A(x) \sin\left[\omega\tau + \varphi(x)\right];$$
(23)

$$A(x) = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + A_2^2}, \qquad (24)$$

$$\sin \varphi(x) = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A},$$
$$\cos \varphi(x) = \frac{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}{A}.$$

Здесь величины A_1, A_2, ϕ_1, ϕ_2 являются функциями координаты *x* и вычисляются по формулам (22).

Обратим теперь внимание на то, что второе слагаемое в формуле (21), согласно (20), имеет незначительную амплитуду по сравнению с первым. Воспользовавшись этим, получим, что поле *U* приближенно можно считать «чистой» затухающей гармонической волной

$$U(x,\tau) - U_0 = (25)$$

= $\Delta U_{\pi} \exp(-x/\Delta_1) \sin\left[\omega(\tau - \Delta \tau_1) - \beta_1 x\right],$

где $\Delta U_{\rm n} = |C_1| = 9,31 \cdot 10^{-3}$ – амплитуда колебаний влагосодержания на поверхности $x = 0; \Delta_1 = 1/\beta_1 = 0,507$ м – глубина проникновения волны влагосодержания; $\Delta \tau_1 = -(\arg C_1)/\omega = 1,45$ сут – время запаздывания колебаний на поверхности x = 0 относительно колебаний температуры воздуха.

Общее время запаздывания колебаний на произвольной глубине *x* будет определяться формулой Δτ₁(*x*) = Δτ₁ + β₁*x*/ω.

Здесь с ростом глубины второе слагаемое в правой части быстро становится много больше первого; например, уже на глубине x = 1 м будем иметь $\beta_1 x / \omega = 3,82$ мес $\gg \Delta \tau_1$.

7. Анализ поля температуры

Аналогичным образом может быть проведен анализ и поля температуры. Согласно (19),

$$\dot{T}(x) = T_1 C_1 \exp(\mu_1 x) + T_2 C_2 \exp(\mu_2 x)$$

Поскольку множители T_1 и T_2 – вещественные, то оригинал для поля температуры будет иметь тот же вид (21), но только теперь слева будет стоять выражение $T(x,\tau) - T_0$, а справа к первому и ко второму слагаемым добавятся множители T_1 и T_2 соответственно. Анализ получившегося выражения не отличается от того анализа, который мы провели для поля влагосодержания. Завершая его, мы в конце должны будем заметить, что

$$T_1 |C_1| = -0,0963 \text{ °C}; \ T_2 |C_2| = 4,97 \text{ °C}.$$

Значит, для приближенного описания температурного поля мы можем ограничиться лишь вторым слагаемым в полученной формуле, и тогда эта приближенная формула, представляющая «чистую» затухающую гармоническую волну, будет выглядеть как

$$T(x,\tau) - T_0 =$$

= $\Delta T_{\pi} \exp(-x/\Delta_2) \sin \left[\omega(\tau - \Delta \tau_2) - \beta_2 x \right].$

Здесь $\Delta T_{\rm n} = T_2 |C_2| = 4,97 \,^{\circ}{\rm C}$ – амплитуда колебаний температуры на поверхности x = 0, которая мало отличается от амплитуды колебаний температуры воздуха $\Delta T_{\rm B} = 5 \,^{\circ}{\rm C}$; $\Delta_2 = 1/\beta_2 = 1,80 \,^{\circ}{\rm M}$ – глубина проникновения волны температуры; $\Delta \tau_2 = -(\arg C_2)/\omega = 1,43 \,^{\circ}{\rm сут}$ – время запаздывания колебаний на поверхности x = 0 относительно колебаний температуры воздуха.

Общее время запаздывания колебаний на произвольной глубине *x* будет определяться формулой $\Delta \tau_2(x) = \Delta \tau_2 + \beta_2 x / \omega$.

Здесь с ростом глубины второе слагаемое в правой части быстро становится много больше первого; например, уже на глубине x = 4 м будем иметь $\beta_2 x/\omega = 4,30$ мес $\gg \Delta \tau_2$.

Поскольку коэффициент β_2 является функцией частоты ю, то распространение волн температуры, как и волн влагосодержания, сопровождается дисперсией. Явление дисперсии тепловых волн в полупространстве, при условии, что материал не содержит влаги, исследовано А.В. Лыковым методом преобразования Лапласа в работе [6, с. 306-308]. Согласно полученным там результатам, фазовая скорость волны оказывается пропорциональной корню квадратному из произведения коэффициента диффузии тепла *a*_w на частоту. Можно убедиться, что в нашем случае, когда наличие влаги при расчете было учтено, это утверждение останется в силе, если только мы ограничимся приближением «чистой» затухающей гармонической волны.

8. Обсуждение результатов

Мы провели исследование установившихся полей температуры и влагосодержания в однородном полупространстве, граница которого обдувается воздушным потоком с изменяющейся по гармоническому закону температурой. Полученные решения представляются суперпозицией затухающих гармонических волн, имеющих одинаковую частоту, но разные фазовые скорости. Проведем сравнение результатов данной статьи с экспериментальными данными и результатами расчетов, основанных на других подходах к моделированию.

В простейшей модели (будем говорить, что это *модель* A) материал влаги не содержит, исследуется только поле температуры. Температурные волны для такого случая описываются известной в литературе *формулой* Фурье [6], которая в обозначениях, принятых в настоящей статье, выглядит так: $T(x, \tau) = T_0 +$ (26)

$$\begin{split} &+ \Delta T_{\pi} \exp(-\beta_{w} x) \sin \left[\omega \tau + \psi_{\pi} - \beta_{w} x \right]. \\ &\text{B этой формуле} \\ &\beta_{w} = \sqrt{\omega / (2a_{w})} \end{split} \tag{27}$$

– коэффициент затухания волны, а $\Delta T_{\rm n}$ и $\psi_{\rm n}$ есть амплитуда и начальная фаза колебаний температуры на поверхности материала (в отличие от нашего рассмотрения, в задаче Фурье изменяется по гармоническому закону и считается заданной не температура воздуха, а температура поверхности x = 0).

В двух других следующих по сложности моделях наличие в материале влаги учитывается в рамках теории тепломассопереноса А.В. Лыкова, но в одной из них полагают $\gamma = 0$ и $\delta = 0$, что соответствует пренебрежению явлениями внутреннего парообразования и термодиффузии (модель В), а в другой модели этими явлениями не пренебрегают и такого ограничения не вводят (модель С). Модель В исследовалась авторами в статьях [11; 12], ее формулы получаются как частный случай более общих формул настоящей статьи, в которой исследовалась модель С. В моделях А и В волны являются затухающими гармоническими, а в модели С они могут считаться такими лишь в рамках принятых в предыдущих двух пунктах приближений. Можно говорить, что полученные в рамках моделей В и С результаты, содержащие описание взаимосвязанных процессов распространения полей температуры и влагосодержания, представляют собой обобщение теории Фурье для температурных волн в полупространстве.

Ниже для каждой из моделей мы приводим итоговые формулы для характеристик полей. В случае модели *C*, принимая сформулированные выше приближения, мы считаем волны затухающими гармоническими. Нижний индекс указывает, о каком поле, T или U, идет речь в данной формуле, а верхний индекс определяет принадлежность формулы к моделям A, B или C. Формулы статьи [11] приведены в соответствие с обозначениями, принятыми в настоящей статье. Мы обозначили также $Lu = a_m / a_w - критерий Лыкова.$

а) Коэффициент затухания β:

$$\beta_T^A = \beta_T^B = \beta_w; \quad \beta_T^C = \beta_w \sqrt{\nu - \sqrt{\nu^2 - Lu^{-1}}}; \\ \beta_U^B = \beta_w \sqrt{Lu^{-1}}; \quad \beta_U^C = \beta_w \sqrt{\nu + \sqrt{\nu^2 - Lu^{-1}}}.$$

б) Время запаздывания колебаний Δτ на глубине х относительно колебаний на поверхности:

$$\Delta \tau_T^A = \Delta \tau_T^B = \frac{\beta_w x}{\omega}; \quad \Delta \tau_T^C = \frac{\beta_T^C x}{\omega};$$
$$\Delta \tau_U^B = \frac{\beta_w x}{\omega} \sqrt{L u^{-1}}; \quad \Delta \tau_U^C = \frac{\beta_U^C x}{\omega}.$$

 в) Время запаздывания колебаний Δt на поверхности относительно колебаний температуры воздуха:

$$\begin{split} \Delta t_T^B &= \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{\lambda \beta_w}{\tilde{\alpha}_w + \lambda \beta_w}\right); \ \Delta t_T^C &= -\frac{\arg C_2}{\omega}; \\ \Delta t_U^B &= \Delta t_T^B; \ \Delta t_U^C &= -\frac{\arg C_1}{\omega}. \end{split}$$

г) Амплитуды колебаний на поверхности ΔT и ΔU :

$$\begin{split} \Delta T^{B} &= \tilde{\alpha}_{w} \frac{\Delta T_{B}}{\sqrt{(\tilde{\alpha}_{w} + \lambda \beta_{w})^{2} + (\lambda \beta_{w})^{2}}}; \\ \Delta T^{C} &= \frac{r\gamma}{c} \frac{1}{1 - \nu + \sqrt{\nu^{2} - Lu^{-1}}} \big| C_{2} \big|; \\ \Delta U^{B} &= \frac{\tilde{\alpha}_{m} \lambda}{\tilde{\alpha}_{w} \rho \sqrt{a_{w} a_{m}}} \Delta T^{B}; \ \Delta U^{C} &= \big| C_{1} \big|. \end{split}$$

Ниже в таблице приведены результаты расчетов по этим формулам для разных моделей и в условиях, принятых в настоящей статье: материалом полупространства мы считаем влажную глину, в качестве периода колебаний выбираем один год, характеристиками воздуха являются $T_0 = 20$ °C и $\Delta T_{\rm B} = 5$ °C, расчет времени запаздывания $\Delta \tau$ производится на глубине x = 4 м.

Выводы из представленных данных.

1. Как видно из таблицы, модели *В* и *С* дают практически одинаковые результаты, поэтому при расчетах можно ограничиться более простой моделью *B*, в которой не учитываются явления термодиффузии и внутреннего парообразования.

Мололи	β, 1/м		Δτ, мес		Δt , сут		Амплитуды	
модель	Т	U	Т	U	Т	U	ΔT	ΔU
Α	0,558	-	4,30	-	-	-	Задается	-
В	0,558	1,96	4,30	15,2	1,39	1,39	4,88 °C	0,0112
С	0,555	1,97	4,31	15,3	1,43	1,45	4,97 °C	0,00931

Таблица. Результаты расчетов в рамках моделей A, B, C**Table.** Results of calculations within the framework of models A, B, C

2. Учет влаги с помощью модели *B*, согласно пунктам а) и б), не изменяет формул для характеристик температурного поля, полученных в рамках модели *A*, т. е. формул для глубины проникновения β и времени запаздывания колебаний $\Delta \tau$ на произвольной глубине относительно колебаний на поверхности. Следовательно, даже при наличии в почве влаги теория Фурье для тепловых волн должна приводить к удовлетворительному согласию с экспериментом.

3. Приведенные в таблице значения параметров β и Δτ для поля температуры находятся в хорошем согласии с данными наблюдений на метеорологических станциях [6].

Кроме геокриологии математическое моделирование процессов распространения тепла и влаги в полупространстве является актуальным также и в метеорологии и климатологии. Опытное отслеживание годовых колебаний температуры в поверхностном слое Земли позволяет сделать вывод, что температурные колебания суши затухают на глубине порядка 15-20 метров, в то время как в океанах глубина проникновеня тепловых волн оказывается намного больше (это различие возникает благодаря эффекту перемешивания [18]). За счет этого в летнее время океаны накапливают тепла значительно больше, чем суша, а это влияет на формирование климата, поскольку зимой океаны начинают согревать проходящие над ними массы воздуха.

Еще одно применение полученные в статье результаты могут найти при организации метода георазведки, в котором идентификация залежей нефти и газа производится по откликам находящейся поверх этих залежей среды на зондирующие электромагнитные импульсы [19]. Отклик среды определяется ее комплексной диэлектрической проницаемостью, которая изменяется под влиянием находящихся в контакте с ней углеводородов, на чем и основан метод. Но, как известно, присутствие в грунте даже небольшого количества воды существенным образом может изменять ее диэлектрическую проницаемость. Учет возникающей за счет этого погрешности измерений, при условии что влагосодержание грунта подвержено значительным сезонным колебаниям, в особенности в области распространения мерзлых пород, может быть произведено с помощью материалов настоящей статьи.

Анализ волновых процессов мы провели в рамках теории тепломассопереноса А.В. Лыкова. В качестве другого подхода к моделированию волновых явлений, сопровождающих процессы распространения тепла и влаги, можно указать на работу [20], где используются закон Дарси и уравнения теории двухфазной фильтрации.

В настоящей статье, расчетной основой которой является метод комплексных амплитуд, авторы продолжили исследование возможностей аналитических методов для решения совместных начально-краевых задач для уравнений распространения тепла и влаги. В предыдущих статьях, посвященных этому направлению [21; 22], ими был разработан расчетный алгоритм на основе метода разделения переменных. К исходной задаче для уравнений тепломассопереноса, содержащих не одну, а две искомые функции, этот классический алгоритм применен быть не может; данное затруднение преодолевается авторами с помощью идеи расщепления процесса по физическим факторам.

Заключение

Разработана система уравнений и краевых условий, моделирующих процессы распространения тепла и влаги в однородном, содержащем влагу полупространстве, граница которого обдувается воздухом с изменяющейся по гармоническому закону температурой. Использованы уравнения теории тепломассопереноса А.В. Лыкова, в которых учитываются явления термодиффузии и внутреннего парообразования, а краевые условия для потоков тепла и влаги формулируются на основе закона теплообмена Ньютона и закона испарения Дальтона соответственно. Получены асимптотические по времени распределения температуры и влагосодержания как функции координаты, времени, частоты и характеристик материала. Эти распределения представляют собой суперпозиции бегущих гармонических волн, имеющих различные коэффициенты затухания и фазовые скорости. Распространение таких волн сопровождается дисперсией. В рамках математических моделей тепломассопереноса различного уровня сложности проанализирована зависимость от условий опыта глубины проникновения волны, амплитуд колебаний температуры и влагосодержания на поверхности материала и времени запаздывания колебаний на произвольной глубине относительно колебаний на поверхности. Результаты расчетов в условиях, приблизительно соответствующих условиям наблюдений на метеорологических станциях, хорошо соотносятся с опытными данными. Разработанный в статье расчетный алгоритм может считаться обобщением теории Фурье для температурных колебаний в полупространстве при отсутствии влаги и при граничных условиях теплообмена первого рода. Материалы работы могут быть использованы в геокриологии в качестве теоретического инструмента при моделировании сезонных колебаний теплофизического состояния мерзлых пород и грунтов. С их помощью моделирование состояния грунтов можно будет производить с учетом содержащейся в них влаги, что ранее можно было делать лишь в рамках простейших моделей.

Список литературы

- 1. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 539 с.
- 2. Шимони К. Теоретическая электротехника. М.: Мир, 1964. 773 с.
- 3. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 886 с.
- Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики / пер. с нем. А.А. Самарского и Н.Н. Яненко; под ред. А.Н. Тихонова. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1950. 457 с.
- 5. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Часть 2 / пер. с нем. под общ. ред. Л.Э. Гуревича. М.; Л.: ОНТИ, гл. ред. общетех. лит-ры, 1937. 998 с.
- 6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
- 7. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел / пер. со второго англ. изд. под ред. А.А. Померанцева. М.: Наука, 1964. 488 с.
- 8. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена / пер. с англ. под ред. А.В. Лыкова. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961. 680 с.
- 9. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
- 10. Мерзлотоведение (краткий курс) / под ред. В.А. Кудрявцева. М.: МГУ, 1981. 240 с.
- 11. Афанасьев А.М., Бахрачева Ю.С. Обобщение задачи Фурье о температурных волнах в полупространстве // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2021. Т. 24, № 2. С. 13–21. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.2.13-21
- 12. Afanasiev A.M., Bakhracheva Yu.S. Solution of geocryology problems on the basis of formulas for decaying harmonic waves of heat and mass transfer in a homogeneous halfspace // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2023. Vol. 96, no. 2. P. 394–402. DOI: https://doi.org/10.1007/s10891-023-02700-5
- 13. Лыков А. В. Теория сушки. М.; Л.: Энергия, 1968. 471 с.
- 14. Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н. О краевых условиях массообмена в виде законов Ньютона и Дальтона ∥ Инженернофизический журнал. 2007. Т. 80, № 1. С. 27–34.
- 15. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 231 с.
- 16. Рудобашта С.П., Карташов Э.М., Зуев Н.А. Тепломассоперенос при сушке в осциллирующем электромагнитном поле ∥ Теоретические основы химической технологии. 2011. Т. 45, № 6. С. 641–647.
- 17. Нестеренко А.В. Основы термодинамических расчетов вентиляции и кондиционирования воздуха. М.: Высшая школа, 1971. 460 с.
- 18. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Т. З. М.: Мир, 1970. 344 с.
- Янушкевич В.Ф. Особенности распространения радиоимпульсных сигналов в анизотропной среде над углеводородными залежами // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20, N° 4. С. 35–39. URL: https://journals.ssau.ru/ pwp/article/view/7071
- 20. Филиппов А.И., Ахметова О.В. Одномерные монохроматические плоские фильтрационные волны // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88, № 2. С. 285–290.
- 21. Афанасьев А.М., Бахрачева Ю.С., Сипливый Б.Н. Применение метода Фурье для решения задач теории сушки электромагнитным излучением // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2019. Т. 22, № 3. С. 27-35. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2019.22.3.27-35
- 22. Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н. Применение метода функций Грина для решения пространственно одномерных задач теории сушки электромагнитным излучением // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 1. С. 73–83. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.1.73-83

Информация об авторах

Афанасьев Анатолий Михайлович, доктор технических наук, профессор кафедры информационной безопасности института приоритетных технологий Волгоградского государственного университета, г. Волгоград, Россия.

Область научных интересов: методы математической физики; аналитические и численные алгоритмы решения начальнокраевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных; математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса при сушке электромагнитным излучением.

E-mail: a.m.afanasiev@yandex.ru, afanasev.anatoliy@volsu.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3703-3167 SPIN-код (eLibrary): 3749-8456 AuthorID (eLibrary): 8317-433500 ResearcherID (WoS): A-8779-2018

Бахрачева Юлия Сагидулловна, кандидат технических наук, доцент кафедры информационной безопасности института приоритетных технологий Волгоградского государственного университета, г. Волгоград, Россия.

Область научных интересов: математическое моделирование технологических процессов и технических систем.

E-mail: bakhracheva@yandex.ru, bakhracheva@volsu.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0558-5736 SPIN-код (eLibrary): 5296-8187

AuthorID (eLibrary): 140281 ResearcherID (WoS): KHU-6620-2024

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2024, vol. 27, no. 4, pp. 83-93

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.83-93 UDC 536.25:53.02 Original Research Received 14 April 2024 Accepted 15 May 2024 Published 28 December 2024

Solving geocryology problems based on generalized Fourier theory for temperature waves in half-space

Anatoly M. Afanasyev 💿, Yulia S. Bakhracheva 💿

Volgograd State University 100, University Avenue, Volgograd, 400062, Russia

Abstract - Background. Currently, in geocryology, to predict seasonal changes in the state of frozen rocks and soils, Fourier formulas obtained earlier are widely used, modeling temperature fluctuations in the surface layer of the earth's crust caused by annual fluctuations in its surface temperature. A significant drawback of this approach to modeling is manifested in the fact that in reality the state of the medium is characterized not only by the temperature field, but also by the moisture content field, which Fourier theory does not contain. Aim. It is required to generalize the Fourier problem known in mathematical physics on fluctuations of the temperature field in half-space by introducing into consideration, along with the temperature field, the moisture content field and taking into account the phenomena of evaporation and condensation associated with this field. Methods. Within the framework of A.V. Lykov's theory, a spatially one-dimensional mathematical model of the processes of heat and moisture propagation in a homogeneous half-space, the boundary of which is in a state of heat and mass exchange with an airless medium, has been developed. By the method of complex amplitudes, formulas are obtained for time-asymptotic fluctuations in temperature and moisture content in a material filling a half-space, provided that the air temperature changes according to a harmonic law, and water vapor, both near the surface of the material and outside the boundary layer, is in a state close to saturation. Results. According to the results obtained, the temperature field is represented by a superposition of two damped harmonic waves, which have the same frequency, but different attenuation coefficients and phase velocities. The moisture retention field has the same structure. For a material with clay characteristics and with specific values of all the process-defining quantities for each of the waves, the depth of penetration and the delay time of vibrations at a given depth relative to fluctuations in air temperature are calculated, and the results obtained are compared with experimental data. Conclusion. The proposed solution and the following conclusions from it are the development of Fourier studies known in the literature on fluctuations in the temperature field in the surface layer of the Earth's crust and are valid only in a situation when the material does not contain moisture, and according to the harmonic law, the temperature of the surface of the material does not change. The results of the work can be used in geocryology as a theoretical tool for modeling seasonal fluctuations in the thermal state of frozen rocks and soils.

Keywords - Lykov equations; problem for half-space; harmonic regime; asymptotic solution; attenuating waves; depth of penetration; lag time; dispersion; Fourier laws; geocryology.

a.m.afanasiev@yandex.ru (Anatoly M. Afanasyev)

References

- 1. J. A. Stretton, Theory of Electromagnetism. Moscow: Gostekhizdat, 1948. (In Russ.)
- 2. K. Shimoni, Theoretical Electrical Engineering. Moscow: Mir, 1964. (In Russ.)
- 3. F. M. Mors and G. Feshbakh, Methods of Theoretical Physics, vol. 2. Moscow: Izd-vo inostr. lit-ry, 1960. (In Russ.)
- 4. A. Zommerfel'd, *Physics Partial Differential Equations*, A. N. Tikhonov, Ed., A. A. Samarskiy and N. N. Yanenko, Trans., Moscow: Izd-vo inostr. lit-ry, 1950. (In Russ.)
- 5. F. Frank and R. Mises, *Differential and Integral Equations of Mathematical Physics*, part 2, L. E. Gurevich, Trans., Moscow, Leningrad: ONTI, ch. ed. general technical Literary, 1937. (In Russ.)
- 6. A. N. Tikhonov and A. A. Samarskiy, Equations of Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1966. (In Russ.)
- 7. G. Karslou and D. Eger, Thermal Conductivity of Solids, A. A. Pomerantsev, Trans., Moscow: Nauka, 1964. (In Russ.)
- 8. E. R. Eckert and R. M. Drake, Theory of Heat and Mass Transfer, A. V. Lykova, Trans., Moscow, Leningrad: Gosenergoizdat, 1961. (In Russ.)
- 9. A. B. Lykov, Theory of Thermal Conductivity. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. (In Russ.)
- 10. V. A. Kudryavtseva, Ed. Permafrost Studies (short course). Moscow: MGU, 1981. (In Russ.)
- 11. A. M. Afanas'ev and Yu. S. Bakhracheva, "Generalization of the Fourier problem of temperature waves in half-space," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 24, no. 2, pp. 13–21, 2021, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2021.24.2.13-21. (In Russ.)
- A. M. Afanasiev and Yu. S. Bakhracheva, "Solution of geocryology problems on the basis of formulas for decaying harmonic waves of heat and mass transfer in a homogeneous halfspace," *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, vol. 96, no. 2, pp. 394–402, 2023, doi: https://doi.org/10.1007/s10891-023-02700-5.
- 13. A. B. Lykov, Theory of Drying. Moscow, Leningrad: Energiya, 1968. (In Russ.)
- 14. A. M. Afanas'ev and B. N. Siplivyy, "On the boundary conditions of mass transfer in the form of Newton's and Dalton's laws," *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, vol. 80, no. 1, pp. 27-34, 2007. (In Russ.)
- 15. A. N. Tikhonov, A. B. Vasil'eva, and A. G. Sveshnikov, Differential Equations. Moscow: Nauka, 1985. (In Russ.)
- S. P. Rudobashta, E. M. Kartashov, and N. A. Zuev, "Heat and mass transfer during in drying in an oscillating electromagnetic field," Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii, vol. 45, no. 6, pp. 641-647, 2011. (In Russ.)
- 17. A. V. Nesterenko, Fundamentals of Thermodynamic Calculations of Ventilation and Air Conditioning. Moscow: Vysshaya shkola, 1971. (In Russ.)
- 18. G. Jeffris and B. Svirls, Methods of Mathematical Physics, vol. 3. Moscow: Mir, 1970. (In Russ.)
- 19. V. F. Yanushkevich, "Peculiarities of distribution of radioimpulse signals in the anisotropic medium on hydrocarbon deposits," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 20, no. 4, pp. 35–39, 2017, url: https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7071. (In Russ.)
- 20. A. I. Filippov and O. V. Akhmetova, "One-dimensional monochromatic plane filtration waves," *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, vol. 88, no. 2, pp. 285–290, 2015. (In Russ.)
- A. M. Afanas'ev, Yu. S. Bakhracheva, and B. N. Siplivyy, "Application of the Fourier method to solve the problems of the theory of drying by electromagnetic radiation," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 22, no. 3, pp. 27–35, 2019, doi: https://doi. org/10.18469/1810-3189.2019.22.3.27-35. (In Russ.)
- A. M. Afanas'ev and B. N. Siplivyy, "Application of the Greene function method for solving spatially one dimensional problems of the theory of electromagnetic radiation drying," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 23, no. 1, pp. 73–83, 2020, doi: https://doi. org/10.18469/1810-3189.2020.23.1.73-83. (In Russ.)

Information about the Authors

Anatoly M. Afanasyev, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Information Security, Institute of Priority Technologies, Volgograd State University, Volgograd, Russia.

Research interests: methods of mathematical physics; analytical and numerical algorithms for solving initial boundary value problems for systems of partial differential equations; mathematical modeling of heat and mass transfer processes during drying by electromagnetic radiation.

E-mail: a.m.afanasiev@yandex.ru, afanasev.anatoliy@volsu.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3703-3167 SPIN-code (eLibrary): 3749-8456 AuthorID (eLibrary): 8317-433500 ResearcherID (WoS): A-8779-2018

Yulia S. Bakhracheva, Candidate of Technical Sciences, associate professor of the Department of Information Security, Institute of Priority Technologies, Volgograd State University, Volgograd, Russia.

Research interests: mathematical modeling of technological processes and technical systems.

E-mail: bakhracheva@yandex.ru, bakhracheva@volsu.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0558-5736

SPIN-code (eLibrary): 5296-8187

AuthorID (eLibrary): 140281

ResearcherID (WoS): KHU-6620-2024

Физика волновых процессов и радиотехнические системы 2024. Т. 27, № 4. С. 94–101

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.94-101 УДК 629.7.064.56 Оригинальное исследование

Дата поступления 14 июня 2024 Дата принятия 15 июля 2024 Дата публикации 28 декабря 2024

Влияние гибридного покрытия из пористого кремния и квантовых точек WS₂ и MoS₂ на электрические характеристики фоточувствительных структур

Н.А. Полуэктова 🗅, Д.А. Шишкина 🗅, Д.П. Григорьев 🗅

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34

Аннотация – Обоснование. В данной статье рассматривается исследование влияния гибридного покрытия квантовых точек и слоя пористого кремния на вольт-амперную характеристику фоточувствительных структур. Объектом исследования стали кремниевые солнечные элементы с пористым слоем и квантовыми точками WS₂ и MoS₂. Повышение энергетической эффективности солнечных батарей является актуальной задачей в связи с высоким спросом на альтернативные виды источников энергии. Квантовые точки благодаря свойствам наноразмерных структур в сочетании со слоем микро- и нанопор могут способствовать повышению КПД. Цель. Создание фоточувствительных структур с пористым кремнием и квантовыми точками и последующее исследование их вольт-амперных характеристик для выявления характера взаимодействия квантовых точек с пористыми структурами. Методы. Применялись эмпирические и аналитические методы. Результаты. Получены вольт-амперные характеристики фоточувствительных структур. Выявлена зависимость повышения значений тока насыщения от времени травления и глубины залегания квантовых точек. Заключение. Гибридное покрытие из пористого кремния и квантовых точек WS₂ и MoS₂ оказывает положительное влияние на электрические характеристики солнечных элементов. Однако требуются дальнейшие исследования зависимости повышения эффективности солнечных элементов от объема наносимых квантовых точек.

Ключевые слова - солнечный элемент; пористый кремний; квантовые точки; КПД; электрохимическое травление.

Введение

Применение кремниевых фоточувствительных структур актуально благодаря ширине запрещенной зоны кремния, равной 1,12 эВ, а также меньшей стоимости сырья. Области их использования весьма разнообразны: квантовая криптография [1], диагностика инфекций методом фотометрии [2], неинвазивный мониторинг концентрации глюкозы [3], солнечная энергетика [4] и др. Учитывая высокий спрос на альтернативные источники энергии, особый интерес представляет применение фоточувствительных структур на основе кремния в качестве солнечных элементов. За счет вышеперечисленных свойств материала они выигрывают в соотношении цены и энергетической эффективности у других типов солнечных элементов [5]. Однако кремниевые солнечные элементы требуют повышения коэффициента полезного действия (КПД), максимальные значения которого составляют 20-25 % только при соблюдении особых условий эксплуатации, в частности обеспечения падения солнечного излучения на поверхность панелей под углом 90°, что требует эксплуатации дорогостоящего оборудования.

Существуют более выгодные способы повышения эффективности кремниевых фоточувствительных структур. Одним из таких способов является создание специальных слоев на рабочей поверхности элементов. Например, антиотражающие покрытия на основе соединений оксида алюминия и кремния (Al₂O₃ и SiO₂) [6], алмазоподобного углерода [7], поливинилбутираля и наночастиц серебра (ПВБ-Ад) [8], а также пористого кремния [9] позволяют расширить спектр пропускаемого излучения. Кроме того, покрытия из пористого кремния способствуют повышению радиационной стойкости структур [10] и увеличивают площадь рабочей поверхности за счет своей морфологии [11]. Однако повысить эффективность пористого кремния можно путем добавления в него квантовых точек [12-14]. В данной работе показано исследование влияния гибридного покрытия квантовых точек и пористого кремния на вольт-амперную характеристику фоточувствительных структур.

1. Методика эксперимента

Создание экспериментальных образцов проходило в несколько этапов.

Таблица 1. Состав диффузанта	
Table 1. Composition of the diffusan	t

Раст	вор 1	Раствор 2		
Вещество	Кол-во, мл	Вещество	Кол-во, мл	
C ₂ H ₅ OH	3,5	C ₂ H ₅ OH	23,5	
HNO ₃	0,625	H ₃ PO ₄	3	
(C ₂ H ₅ O) ₄ Si	8,75	_	_	

Таблица 2. Данные о типе травления и нанесении суспензий с квантовыми точками Table 2. Data on the type of etching and application of quantum dot suspensions

№ образца	1	2	3	4
Время травления, мин	10	10	5	5
Материал квантовых точек	MoS ₂	WS ₂	MoS ₂	WS ₂

Первым этапом была предварительная подготовка кремниевых пластин с проводимостью р-типа размером 25×25 мм. Сначала пластины проходили очистку в ультразвуковой ванне на протяжении 10 мин и трижды промывались в бидистиллированной воде для удаления большей части пыли загрязнений. Затем была проведена очистка от возможных оставшихся частиц жира и пыли в кипящем растворе аммиака (NH₃), перекиси водорода (H₂O₂) и бидистиллированной воды в соотношении 1:1:4 соответственно. Кипячение проводилось на протяжении 7 мин, после чего образцы также трижды промывались в бидистиллированной воде и просушивались на фильтровальной бумаге.

Вторым этапом было проведение диффузии для создания p-n-перехода. Для этого на одну сторону кремниевых пластин, которая впоследствии будет рабочей, методом центрифугирования наносился диффузант.

Состав диффузантов приведен в табл. 1.

После просушки пластины помещались в диффузионную печь на 40 мин при температуре 1000 °С. Остывшие образцы промывались сначала в плавиковой кислоте (НF) для снятия окисла, затем – в бидистиллированной воде для удаления его остатков.

Третьим этапом создания фоточувствительных структур было электрохимическое анодное травление в вертикальной ячейке [15]. Электролитом служил раствор плавиковой кислоты и этилового спирта в соотношении 1:1. Процесс травления проводился при плотности тока $j = 10 \text{ мA/см}^2$ на протяжении 5 и 10 мин для двух групп образцов, соответственно. По окончании процесса образцы промывались в бидистиллированной воде и просушивались на фильтровальной бумаге.

Четвертым этапом было нанесение металлических контактов методом термического испарения в вакууме. В качестве материала для контактов был выбран алюминий. Контактная сетка на рабочей стороне фоточувствительных структур наносилась через маску. На тыльной стороне – сплошной контакт.

Завершающим, пятым этапом создания солнечных элементов было нанесение квантовых точек [16]. Для этого порошки микрочастиц дисульфида вольфрама (WS₂) и дисульфида молибдена (MoS₂) смешивались с изопропиловым спиртом (C₃H₈O) в соотношении 50 мг : 50 мл на протяжении 4 часов с помощью ультразвука. При такой обработке размер квантовых точек составлял порядка 6 мкм [17]. Полученные суспензии дважды наносились на изготовленные ранее фоточувствительные структуры методом адсорбции. В табл. 2 приведены данные о нанесении суспензий с разными материалами на образцы, анализ исследования которых будет представлен далее.

2. Результаты

Для оценки пористости фоточувствительных структур (*P*) после этапов предварительной подготовки и травления измерялись массы и толщины пластин. Расчет пористости производился по следующей формуле:

$$P = \frac{\Delta m}{\rho S d} 100 \%,$$

где Δm – разность масс, измеренных до и после травления; $\rho = 2,33$ г/см³ – плотность кремния; S = 6,25 см² – площадь пористого слоя; d – толщина пористого слоя.

Данные об изменении масс и толщин образцов, а также результаты расчета пористости представлены в табл. 3.

	, ·	и, мкм	Ρ, %
1	0,010	20	34,3
2	0,010	22	31,2
3	0,009	19	30,9
4	0,005	18	28,7

Таблица 3. Данные замеров массы и толщины структур. Результаты расчета пористости Table 3. Data of measurements of mass and thickness of structures. Results of calculation of porosity



Рис. 1. ВАХ образца № 1 после этапа травления (1) и сразу после первого нанесения квантовых точек (2) Fig. 1. I-V curve of sample #1 after the etching stage (1) and immediately after the first application of quantum dots (2)



Рис. 2. ВАХ образца № 2 после этапа травления (1) и сразу после первого нанесения квантовых точек (2) Fig. 2. I-V curve of sample #2 after the etching stage (1) and immediately after the first application of quantum dots (2)





96







Рис. 5. BAX образца N^o 1 через день после первого нанесения квантовых точек (1), сразу после первого нанесения квантовых точек (2) и сразу после второго нанесения квантовых точек (3) Fig. 5. I-V curve of sample #1 one day after the first application of quantum dots (1), immediately after the first application of quantum dots (2), and immediately after the second application of quantum dots (3)



Рис. 6. ВАХ образца N^o 2 через день после первого нанесения квантовых точек (1), сразу после первого нанесения квантовых точек (2) и сразу после второго нанесения квантовых точек (3) Fig. 6. I-V curve of sample #2 one day after the first application of quantum dots (1), immediately after the first application of quantum dots (2), and immediately after the second application of quantum dots (3)

В результате электрохимического травления были получены фоточувствительные структуры преимущественно с высокой пористостью 28–34 %, что положительно сказывается на их антиотражающих свойствах. Для оценки влияния квантовых точек на электрические характеристики солнечных элементов с пористым кремнием были сняты показания тока при контролируемом повышении напряжения.



Рис. 7. ВАХ образца № 3 через день после первого нанесения квантовых точек (1), сразу после первого нанесения квантовых точек (2) и сразу после второго нанесения квантовых точек (3)

Fig. 7. I-V curve of sample #3 one day after the first application of quantum dots (1), immediately after the first application of quantum dots (2), and immediately after the second application of quantum dots (3)





dots (2), and immediately after the second application of quantum dots (3)

На рис. 1–4 представлена вольт-амперная характеристика (ВАХ) фоточувствительных структур до нанесения квантовых точек и сразу после первого нанесения.

Из графиков видно, что нанесение квантовых точек поспособствовало повышению значений тока у всех образцов. Снижение значения тока образца № 3, соответствующее значению 1,13 В, можно объяснить сбоем измерительного оборудования, что подтверждается дальнейшими исследованиями.

На рис. 5-8 приведены ВАХ образцов с квантовыми точками. Измерения проводились сразу после первого нанесения, через день после первого нанесения и после второго нанесения квантовых точек, проводившегося через день после первого нанесения.

Анализируя полученные графики можно заключить, что эффект от введения квантовых точек в поры сохраняется со временем. Кроме того, структуры со временем травления, равным 10 мин, показали повышение тока насыщения, в то время как образцы со временем травления 5 мин практически не отреагировали на введение квантовых точек в поры. Такое явление можно объяснить более глубоким залеганием точек в порах образцов № 1 и № 2.

Заключение

Анализ вольт-амперных характеристик созданных фоточувствительных структур с гибридным покрытием из пористого кремния и квантовых точек WS_2 и MoS_2 показывает положительное влияние на выходные характеристики солнечных элементов. Однако требуются дальнейшие исследования зависимости повышения эффективности солнечных элементов от объема наносимых квантовых точек.

Список литературы

- Применение кремниевых лавинных фотодиодов для регистрации одиночных фотонов в установке по квантовой криптографии / Д.Б. Третьяков [и др.] // Фотоника 2021: тез. докл. Российской конференции и школы молодых ученых по актуальным проблемам полупроводниковой фотоэлектроники (с участием иностранных ученых). Новосибирск, 4–8 октября 2021 г. Новосибирск: СО РАН, 2021. С. 113. DOI: https://doi.org/10.34077/RCSP2021-113
- Анисько Ю.А., Щербакова Е.Н., Анисько Л.А. Применение фотометрии в диагностике инфекции COVID-19 // Новые направления развития приборостроения: мат. 15-й Межд. науч.-техн. конф. молодых ученых и студентов. Минск, 20–22 апреля 2022 г. Минск: БНТУ, 2022. С. 117. URL: https://rep.bntu.by/handle/data/111788
- 3. Спектрометрический метод и оптический сенсор повышения точности неинвазивного мониторинга концентраций крови / А. Зильгараева [и др.] // Вестник КазАТК. 2023. Т. 126, №. 3. С. 335-342. DOI: https://doi.org/10.52167/1609-1817-2023-126-3-335-342
- 4. Шульгина И.С. Солнечные элементы с графеном и углеродными нанотрубками на кремнии // Актуальные научные исследования: сб. ст. IV Межд. науч.-практ. конф. Пенза, 20 февраля 2022 г. Пенза: Наука и просвещение, 2022. С. 86–90. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48014853
- Федченко А.Я. Фотоэлектрическая солнечная энергия // Актуальные вопросы современной науки и образования: сб. ст. Х Межд. науч.-практ. конф. Пенза, 20 мая 2021 г. Пенза: Наука и просвещение, 2021. С. 10. URL: https://www.elibrary.ru/item. asp?id=45827818
- Оптические характеристики антиотражающих покрытий на основе Al₂O₃-SiO₂ для кремниевых солнечных элементов / C.X. Сулейманов [и др.] // Журнал прикладной спектроскопии. 2020. Т. 87, № 4. С. 667–671. URL: https://www.elibrary.ru/item. asp?id=43818140
- Нусупов К.Х., Бакранова Д.И., Наурызбекова Ш.А. Антиотражающие покрытия на основе алмазоподобного углерода для кремниевых солнечных батарей // Вестник Казахстанско-Британского технического университета. 2021. Т. 17, N^o 3. С. 80–84. URL: https://vestnik.kbtu.edu.kz/jour/article/view/190
- Корчагин В.Н., Сысоев И.А. Исследование функциональных покрытий на основе поливинилбутираля и наночастиц серебра для солнечных элементов // Computational Nanotechnology. 2020. Т. 7, № 1. С. 19–25. DOI: https://doi.org/10.33693/2313-223X-2020-7-1-19-25
- Васин А.В., Рыбин Н.Б. Исследование пористого кремния, перспективного в качестве антиотражающего покрытия ФЭП // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2022: сб. тр. V Межд. науч.-техн. форума. Рязань, 2-4 марта 2022 г. Рязань: Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина, 2022. С. 117–121. URL: https:// www.elibrary.ru/item.asp?id=49271473
- Ерофеев А.С., Шишкин И.А., Латухина Н.В. Деградация солнечных элементов на базе пористого кремния // Вестник молодых ученых и специалистов Самарского университета. 2020. Т. 16, N^o 1. С. 267–272. URL: https://journals.ssau.ru/smus/article/ download/9294/8540
- 11. Исследование оптических свойств фоточувствительных структур пониженной размерности на основе кремния / H.A. Полуэктова [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т. 25, N° 3. С. 16–23. DOI: https://doi. org/10.18469/1810-3189.2022.25.3.16-23
- 12. Корчагин В.Н., Сысоев И.А., Бобров А.А. Функциональные покрытия для солнечных элементов на основе поливинилбутираля и углеродных квантовых точек // Вестник Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого. 2023. Т. 130, № 1. С. 58–70. DOI: https://doi.org/10.34680/2076-8052.2023.1(130).58-70
- 13. Квантовые точки сульфида свинца: получение и практическое использование / Т.Г. Данилина [и др.] // Современные проблемы теоретической и экспериментальной химии: Межвузовский сб. науч. труд. XIV Всероссийской конф. молод. учен. с межд. участием. Саратов, 1–31 октября 2020 г. Саратов: Саратовский источник, 2020. С. 19–20. URL: https://www.elibrary.ru/item. asp?id=44299626
- 14. Рябко А.А. Физико-технологические основы формирования гибридных наносистем «Наностержни оксида цинка-коллоидные квантовые точки»: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2022. 16 с.
- 15. Исследование электрических свойств фоточувствительных структур пониженной размерности на основе кремния с покрытиями из фторидов редкоземельных элементов/ Н.А. Полуэктова [и др.]// Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т. 25, N^o 4. C. 67–73. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.4.67-73
- 16. Синтез и изучение ДПМ для применения в фотодетекторах / А.Р. Рымжина [и др.] // ХХІ Всероссийская молодежная самарская конкурс-конференция по оптике, лазерной физике и физике плазмы, посвященная 300-летию РАН: сб. тез. Самара, 14–18 ноября 2023 г. М.: Тровант, 2023. С. 259–260. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=61200077
- A systematic review on 2D MoS₂ for nitrogen dioxide (NO₂) sensing at room temperature / S. Kumar [et al.] // Materials Today Communications. 2023. Vol. 34. P. 105045. DOI: https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2022.105045

Информация об авторах

Полуэктова Наталья Алексеевна, аспирант кафедры наноинженерии Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия.

E-mail: natapolivekt37@gmail.com ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4189-6192 SPIN-код (eLibrary): 5791-7785 AuthorID (eLibrary): 1240561

Область научных интересов: физика полупроводников, методы создания, моделирования и исследования микро- и наноструктур, фотовольтаика.

Шишкина Дарья Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры наноинженерии Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: пористый кремний, кремниевые нанонити, оптические покрытия, фотоэлектрические преобразователи, биомедицина.

E-mail: daria.lizunkova@yandex.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4118-1429 SPIN-код (eLibrary): 5722-5240 AuthorID (eLibrary): 904558 ResearcherID (WoS): AAG-4607-2020

Григорьев Данил Павлович, аспирант кафедры радиоэлектронных систем, младший научный сотрудник института космического приборостроения ИКП 214 Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: электронные устройства детектирования космических микрочастиц. Обработка сигналов на базе нейронных сетей. Разработка прикладного программного обеспечения для вычислительных ядер на базе ПЛИС и устройств космической научной аппаратуры.

E-mail: grigorev.dp@ssau.ru ORCID: https://orcid.org/0009-0007-8413-379X SPIN-код (eLibrary): 3058-3584 AuthorID (eLibrary): 1111119

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2024, vol. 27, no. 4, pp. 94–101

DOI 10.18469/1810-3189.2024.27.4.94-101 UDC 629.7.064.56 Original Research Received 14 June 2024 Accepted 15 July 2024 Published 28 December 2024

The effect of a hybrid coating of porous silicon and WS₂ and MoS₂ quantum dots on the electrical characteristics of photosensitive structures

Natalia A. Poluektova 🗅, Daria A. Shishkina 🗅, Danil P. Grigoriev 🗅

Samara National Research University 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russia

Abstract - Background. This paper examines the effect of the hybrid coating of quantum dots and porous silicon on the voltampere characteristic of photosensitive structures. The object of the study was silicon solar cells with a porous layer and WS_2 and MOS_2 quantum dots. Increasing the energy efficiency of solar panels is an urgent task due to the high demand for alternative energy sources. Quantum dots, due to the properties of nanoscale structures, in combination with a layer of micro- and nanopores, can contribute to increased efficiency. Aim. Creation of photosensitive structures with porous silicon and quantum dots and subsequent investigation of their volt-ampere characteristics to identify the nature of the interaction of quantum dots with porous structures. Methods. Empirical and analytical methods were used in this work. Results. The volt-ampere characteristics of photosensitive structures are obtained. The dependence of the increase in saturation current values on the etching time and the depth of the quantum dots is revealed. Conclusion. The hybrid coating of porous silicon and WS_2 and MOS_2 quantum dots has a positive effect on the electrical characteristics of solar cells. However, further research is required on the dependence of increasing the efficiency of solar cells on the volume of applied quantum dots.

Keywords - solar cell; porous silicon; quantum dots; efficiency; electrochemical etching.

≤ grigorev.dp@ssau.ru (Danil P. Grigoriev)

© Natalia A. Poluektova et al., 2024

References

- 1. D. B. Tret'yakov et al., "Application of silicon avalanche photodiodes for recording single photons in a quantum cryptography facility," in Fotonika 2021: tez. dokl. Rossiyskoy konferentsii i shkoly molodykh uchenykh po aktual'nym problemam poluprovodnikovoy fotoelektroniki (s uchastiem inostrannykh uchenykh), Novosibirsk, Oct. 4–8, 2021, p. 113, doi: https://doi.org/10.34077/RCSP2021-113. (In Russ.)
- Yu. A. Anis'ko, E. N. Shcherbakova, and L. A. Anis'ko, "Application of photometry in the diagnosis of COVID-19 infection," in Novye napravleniya razvitiya priborostroeniya: mat. 15-y Mezhd. nauch.-tekhn. konf. molodykh uchenykh i studentov, Minsk, Apr. 20–22, 2022, p. 117, url: https://rep.bntu.by/handle/data/111788. (In Russ.)
- A. Zil'garaeva et al., "Spectrometric method and optical sensor to improve the accuracy of non-invasive monitoring of blood concentrations," *Vestnik KazATK*, vol. 126, pp. 335-342, 2023, doi: https://doi.org/10.52167/1609-1817-2023-126-3-335-342. (In Russ.)
- 4. I. S. Shul'gina, "Solar cells with graphene and carbon nanotubes on silicon," in Aktual'nye nauchnye issledovaniya: cb. st. IV Mezhd. nauch.-prakt. konf., Penza, Feb. 20, 2022, pp. 86-90, url: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48014853. (In Russ.)

100

- A. Ya. Fedchenko, "Photovoltaic solar energy," Aktual'nye voprosy sovremennoy nauki i obrazovaniya: sb. st. X Mezhd. nauch.-prakt. konf., Penza, May 20, 2021, p. 10, url: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45827818. (In Russ.)
- S. Kh. Suleymanov et al., "Optical characteristics of anti-reflection coatings based on Al₂O₃-SiO₂ for silicon solar cells," *Zhurnal prikladnoy spektroskopii*, vol. 87, no. 4, pp. 667–671, 2020, url: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43818140. (In Russ.)
- K. Kh. Nusupov, D. I. Bakranova, and Sh. A. Nauryzbekova, "Diamond-like carbon based anti-reflective coatings for silicone solar batteries," *Vestnik Kazakhstansko-Britanskogo tekhnicheskogo universiteta*, vol. 17, no. 3, pp. 80–84, 2021, url: https://vestnik.kbtu.edu.kz/ jour/article/view/190. (In Russ.)
- V. N. Korchagin and I. A. Sysoev, "Study of functional coatings based on polyvinyl butyral and silver nanoparticles for solar cells," Computational Nanotechnology, vol. 7, no. 1, pp. 19–25, 2020, doi: https://doi.org/10.33693/2313-223X-2020-7-1-19-25. (In Russ.)
- 9. A. V. Vasin and N. B. Rybin, "Study of porous silicon, promising as an anti-reflection coating for solar cells," in *Sovremennye tekhnologii* v nauke i obrazovanii STNO-2022: cb. tr. V Mezhd. nauch.-tekhn. foruma, Ryazan', March 2–4, 2022, pp. 117–121, url: https://www.elibrary. ru/item.asp?id=49271473. (In Russ.)
- A. S. Erofeev, I. A. Shishkin, and N. V. Latukhina, "Degradation of solar cells based on porous silicon," Vestnik molodykh uchenykh i spetsialistov Samarskogo universiteta, vol. 16, no. 1, pp. 267–272, 2020, url: https://journals.ssau.ru/smus/article/download/9294/8540. (In Russ.)
- 11. N. A. Poluektova et al., "Investigation of electrical properties of photosensitive structures of reduced dimension based on silicon," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 25, no. 3, pp. 16–23, 2022, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.3.16-23. (In Russ.)
- 12. V. N. Korchagin, I. A. Sysoev, and A. A. Bobrov, "Functional coatings for solar cells based on polyvinyl butyral and carbon quantum dots," *Vestnik Novgorodskogo gosudarstvennogo universiteta im. Yaroslava Mudrogo*, vol. 130, no. 1, pp. 58–70, 2023, doi: https://doi.org/10.34680/2076-8052.2023.1(130).58-70. (In Russ.)
- T. G. Danilina et al., "Lead sulfide quantum dots: production and practical use," in Sovremennye problemy teoreticheskoy i eksperimental'noy khimii: Mezhvuzovskiy sb. nauch. trud. XIV Vserossiyskoy konf. molod. uchen. s mezhd. uchastiem, Saratov, Oct. 1–31, 2020, pp. 19–20, url: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44299626. (In Russ.)
- 14. A. A. Ryabko, "Physical and technological basis for the formation of hybrid nanosystems "Zinc oxide nanorods-colloidal quantum dots", Cand. Tech. Sciences dissertation abstract, Saint Petersburg, 2022. (In Russ.)
- N. A. Poluektova et al., "Investigation of electrical properties of photosensitive structures of reduced dimension based on silicon coated with rare earth fluorides," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 25, no. 4, pp. 67–73, 2022, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.4.67-73. (In Russ.)
- 16. A. R. Rymzhina et al., "Synthesis and study of TMDs for use in photodetectors," in XXI Vserossiyskaya molodezhnaya samarskaya konkurskonferentsiya po optike, lazernoy fizike i fizike plazmy, posvyashchennaya 300-letiyu RAN: sb. tez., Samara, Nov. 14–18, 2023, pp. 259–260, url: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=61200077. (In Russ.)
- 17. S. Kumar et al., "A systematic review on 2D MoS₂ for nitrogen dioxide (NO₂) sensing at room temperature," *Materials Today Communications*, vol. 34, p. 105045, 2023, doi: https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2022.105045.

Information about the Authors

Natalia A. Poluektova, postgraduate student of the Department of Nanoengineering, Samara National Research University, Samara, Russia.

Research interests: semiconductor physics, methods of creation, modeling and research of micro- and nanostructures, photovoltaics. E-mail: natapolivekt37@gmail.com ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4189-6192 SPIN-code (eLibrary): 5791-7785

AuthorID (eLibrary): 1240561

Daria A. Shishkina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Nanoengineering, Samara National Research University, Samara, Russia.

Research interests: porous silicon, silicon nanowires, optical coatings, photovoltaic converters, biomedicine. E-mail: daria.lizunkova@yandex.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4118-1429 SPIN-code (eLibrary): 5722-5240

AuthorID (eLibrary): 904558 ResearcherID (WoS): AAG-4607-2020

Danil P. Grigoriev, postgraduate student of the Department of Radioelectronic Systems, junior researcher at the Space Instruments Engineering Institute (IKP-214), Samara National Research University, Samara, Russia.

Research interests: devices for detecting cosmic microparticles. Signal processing based on neural networks. Development of application software for FPGA-based computing cores and devices of space scientific equipment.

E-mail: grigorev.dp@ssau.ru ORCID: https://orcid.org/0009-0007-8413-379X SPIN-code (eLibrary): 3058-3584 AuthorID (eLibrary): 1111119

К сведению авторов

В журнале «Физика волновых процессов и радиотехнические системы (Physics of Wave Processes and Radio Systems)» могут быть опубликованы материалы, касающиеся оригинальных исследований и разработок, не публиковавшиеся ранее и не предназначенные для публикации в других изданиях. В зависимости от характера представляемых работ они классифицируются по следующим разделам: общая теория волновых процессов, математические методы в теории волновых процессов, вопросы анализа и синтеза радиотехнических устройств и систем, передача и обработка информации в радиотехнических системах, электродинамика и техника СВЧ и КВЧ, антеннофидерные системы и распространение радиоволн, теория средств функциональной электроники, нелинейная электродинамика и хаос в радиотехнических системах, экологические и медико-биологические аспекты теории волновых процессов.

Все статьи проходят рецензирование и проверку в программе «Антиплагиат».

Статья оформляется в соотвествии с правилами, размещенными на сайте https://journals.ssau.ru/ pwp/about/submissions. Рекомендуем создавать рукопись в предоставленном шаблоне.

Рукопись направляется в редакцию в формате Microsoft Word (иметь расширение *.doc, *.docx, *.rtf). Объем полного текста, в том числе таблицы и список литературы, не должен превышать 6000 слов и включать не более 10-ти рисунков.

Текст статьи должен содеражать УДК; тип статьи (оригинальное исследование или научный обзор); дату поступления (указывается дата отправки статьи в редакцию); автора, ответственного за переписку; название статьи; авторов; учреждения; аннотацию по структуре IMRAD, т. е. содержать обоснование (background), цель (aim), методы (methods), результаты (results), заключение (conclusion); ключевые слова; список литературы; краткие творческо-биографические справки (указываются ФИО полностью для русской версии и ФИО в формате Ivan I. Ivanov для английской, ученая степень, ученое звание, должность, место работы (включая город и страну), биографическая справка при желании, область научных интересов, е-mail, ORCID при наличии). Перечисленные элементы статьи должны быть обязательно приведены на английском языке.

Содержимое статьи должно быть структурированным по разделам, т. е. содержать «Введение», «1. Первый раздел», «2. Второй раздел» и т. д., «Заключение».

Все формулы, переменные, константы, а также размерности величин, содержащие надстрочные и(или) подстрочные символы, в том числе и в рисунках, должны быть набраны в редакторе формул MathType. Длина не должна превышать 75 мм при шрифте в 10 пт. Не допускается набор формул в текстовом виде без использования указанного редактора. Следующие за формулами знаки препинания предпочтительнее вносить непосредственно в формулы. Рукопись должна содержать лишь самые необходимые (оригинальные) конечные формулы, без промежуточных математических преобразований и выводов. Номера необходимо присваивать только тем формулам, на которые есть ссылки в тексте статьи.

Нумерация формул проставляется в круглых скобках (1), диапазон формул с использованием среднего тире без пробелов (1)–(3). Формула и номер выносятся на отдельную строку и разделяются горизонтальной табуляцией.

Ссылки на использованные источники обозначаются квадратными скобками [1], диапазон – через точку с запятой для двух источников [2; 3] и средним тире без пробелов внутри скобок для большего количества [1–3], перечисление – через точку с запятой [1; 3; 5], указание на конкретную страницу – через запятую после числового обозначения [1, с. 25].

Ссылки на рисунки в тексте обязательны и должны иметь сокращение «рис. 1». Буквенные обозначения выполняются курсивом, перед буквой необходимо поставить запятую (рис. 1, *a*). Можно указывать диапазоны с помощью среднего тире (рис. 1–3, рис. 2, *a*–*b*, рис. 2, *z*–*e*);

Рисунки следует представлять только в виде файлов графических форматов CDR, VSD, WMF или EPS (векторная графика). Формат CDR предпочтительней. Текст на рисунках печатается шрифтом Times New Roman (размер 8 или 10 пт). В случае большой сложности рисунков допускается представление в виде графических форматов JPEG (с минимальным сжатием) и Windows Bitmap (растровая графика). Все рисунки должны быть приложены в виде отдельных графических файлов (для растровой графики разрешение 600 dpi). Рисунки должны иметь подрисуночные подписи. Они обозначаются словом «Рис.» и номером рисунка, после которого ставится точка (Рис. 1. График ..., Рис. 2. Зависимость ... и т. д.). Для англоязычных подписей используется сокращение «Fig.». При наличии в статье только одного рисунка число 1 ставить не нужно.

Список литературы должен быть набран с соблюдением «ГОСТ Р 7.0.5-2008 Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления» для русскоязычного списка (https://protect. gost.ru/document.aspx?control=7&id=173511) и по стандарту «IEEE» для англоязычного списка (pdf-документ IEEE Reference Guide на странице https://journals.ieeeauthorcenter.ieee.org/create-your-ieee-journal-article/create-the-text-of-your-article/ieee-editorial-style-manual/).

При наличии DOI или URL у источника их упоминание является обязательным. Необходимо предоставлять полный формат DOI, включающий доменное имя (например, https://doi. org/10.18469/1810-3189.2023.26.2.9-17).

- Статьи должны присылаться с указанием авторов, заголовка статьи (перевод для References), полного названия журнала (транслитерация для русскоязычных названий в References), года, тома, номера или выпуска, страниц. Все выходные данные разделяются точками за исключением тома и номера, между которыми ставится запятая (например, Т. 31, № 7). В качестве разделителя между страницами используется среднее тире без пробелов, например, 67–78:

RU: Житнюк В.С., Мелков Г.А., Соловьев Д.А. Исследование включения полупроводникового диода в диэлектрический резонатор // Известия вузов. Радиоэлектроника. 1998. Т. 31, № 7. С. 76-79.

EN: V. S. Zhitnyuk, G. A. Melkov, and D. A. Solov'ev, "Study of the inclusion of a semiconductor diode in a dielectric resonator," *Izvestiya vuzov. Radioelektronika*, vol. 31, no. 7, pp. 76–79, 1998. (In Russ.)

- Книги должны быть с указанием авторов, названия, места издания, названия издателя, года, количества страниц. Если авторов трое, то они указываются в начале библиографического описания (Иванов В.П., Архатов З.И., Пономарев С.С. Исследования...); если авторов больше трех, то сначала идет название книги или статьи, а затем через косую фамилия первого автора и слова «и др.» в квадратных скобках, т. е. Исследования... / С.С. Иванов [и др.]. Место издания содержит полное название за исключением Москвы, Нижнего Новгорода и Санкт-Петербурга, которые записываются как М., Н.Новгород и СПб. соответственно. В References место издания указывается полностью:

RU: Марков Г.Т., Петров Б.М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Сов. радио, 1979. 374 с.

EN: G. T. Markov, B. M. Petrov, and G. P. Grudinskaya, *Electrodynamics and Propagation of Radio Waves*. Moscow: Sov. Radio, 1979. (In Russ.)

RU: Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media / I.V. Lindell [et al.]. London: Artech House, 1994. 291 p.

EN: I. V. Lindell et al., *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*. London: Artech House, 1994.

 Патенты должны присылаться с указанием авторов, названия, номера патента, даты опубликования:

RU: Патент RU 2402812 С1. Мультичастотная радиометка резонансного типа / В.А. Неганов, А.М. Плотников, К. Сеоно; 27.10.2010.

EN: V. A. Neganov, A. M. Plotnikov, and K. Seono "Multi-frequency rfid-tag of resonant type," RU Patent RU 2 402 812 C1, Dec. 27, 2010. (In Russ.)

Материалы, сопровождаемые актом экспертизы о возможности опубликования, сопроводительным письмом (составленное в свободной форме и подписанное всеми авторами) и согласием на обработку и публикацию персональных данных каждого соавтора, представляются в редакцию через форму на сайте журнала или на e-mail: klyuevd@yandex.ru).

Рукописи, в которых не соблюдены данные правила, возвращаются авторам без рассмотрения.

Редакция не ставит в известность авторов об изменениях и сокращениях рукописи, имеющих редакционный характер и не затрагивающих принципиальных вопросов.

Полные требования к оформлению статьи и шаблон можно найти на сайте https://journals.ssau.ru/pwp/about/submissions Реклама

Анализ и прогнозирование поведения временных рядов: бифуркации, катастрофы, синергетика, фракталы и нейронные сети / О.И. Антипов, В.А. Неганов. – М.: Радиотехника, 2011. – 350 с.

Физика волновых процессов и радиотехнические системы Physics of Wave Processes and Radio Systems

Антипов О.И., Неганов В.А.



ISBN 978-5-88070-294-7

УДК 530.1:621.372+621.396 ББК 32.96

Монография посвящена объединению нескольких направлений в науке: бифуркаций в нелинейных динамических (или детерминированных) системах, причем внимание уделяется бифуркациям-кризисам, которые отождествляются с катастрофами в синергетике – науке о самоорганизации в сложных системах, где велика роль коллективных, кооперативных эффектов, возникновения порядка – фрактальных структур в турбулентности (или хаосе). В синергетике общим является принцип подчинения, который позволяет исключать большое число переменных в сложных

системах и описывать в них сложные процессы. Использование в роли одной из основных количественных характеристик катастроф фрактального показателя Херста связывает фракталы с бифуркациями. Объединение этих четырех направлений позволяет упростить проектирование прогнозирующих нейронных сетей, которое в настоящее время отчасти является искусством.

Даны авторские модификации некоторых известных фрактальных методов, позволяющие проводить более глубокий анализ хаотических процессов. Эти результаты, на наш взгляд, должны являться необходимой частью полного алгоритма построения прогностических моделей, описанного в книге. В частности, описан авторский алгоритм определения временного лага, необходимого для реконструкции аттрактора динамической системы, и модификация метода ближайших ложных соседей, которую можно использовать в качестве индикатора приближающейся катастрофы.

Приведены конкретные примеры из таких областей науки, как радиотехника, экономика и медицина.

Монография представляет интерес для научных работников, аспирантов и докторантов, работающих в области прикладных задач анализа, моделирования и прогнозирования хаотических процессов в нелинейных системах из различных отраслей науки и техники.