

Спектральные решения для СМО с законами распределений в виде вероятностных смесей

В.Н. Тарасов , Н.Ф. Бахарева 

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Россия, г. Самара,
ул. Л. Толстого, 23

Аннотация – Обоснование. СМО являются основным математическим инструментарием моделирования систем передачи данных, которые недаром называют сетями массового обслуживания. Необходимость регулирования таких характеристик систем массового обслуживания, как время ожидания в очереди или длины очереди, обусловлена повышением качества функционирования систем передачи данных. Возможность регулирования этих характеристик позволяет минимизировать время ожидания в очереди в буферах передающих устройств, а также сами объемы буферной памяти. Для демонстрации такой возможности в работе рассмотрены системы массового обслуживания, сформированные как обычными законами распределений в виде вероятностных смесей, так и сдвинутыми во времени законами распределений. **Цель.** В качестве составляющих СМО в работе выбраны гиперэкспоненциальное и гиперэрланговское распределения второго порядка. На основе этих законов распределений построены численно-аналитические модели для двух систем массового обслуживания с обычными и сдвинутыми законами распределений с выводом решения для основной характеристики СМО – среднего времени ожидания в очереди. Как известно, остальные характеристики СМО являются производными от среднего времени ожидания. **Методы.** В работе использован сдвиг законов распределений вправо от нулевой точки. Для вывода решения для среднего времени ожидания в очереди использован классический метод спектрального решения интегрального уравнения Линдли на основе преобразования Лапласа законов распределений, формирующих рассмотренные СМО. Полученные расчетные формулы для среднего времени ожидания в очереди позволяют рассчитать характеристики таких систем для широкого диапазона изменения параметров телетрафика. **Результаты.** Полученные результаты могут быть использованы в современной теории телетрафика при проектировании и моделировании различных перспективных систем передачи данных, включая объемы буферной памяти передающих устройств. **Заключение.** Сдвиг законов распределений во времени приводит к уменьшению их коэффициентов вариаций. Из-за квадратичной зависимости среднего времени ожидания от коэффициентов вариаций временных интервалов поступления и обслуживания следует заметное уменьшение среднего времени ожидания в системах с временными сдвигами.

Ключевые слова – обычные и сдвинутые гиперэкспоненциальный и гиперэрланговский законы распределения; интегральное уравнение Линдли; метод спектрального разложения; преобразование Лапласа.

Введение

В исследовании систем $G/G/1$ важную роль играет метод спектрального решения интегрального уравнения Линдли. Наиболее доступно этот метод на конкретных примерах изложен в классике теории массового обслуживания [1].

Настоящая статья посвящена анализу СМО $H_2/HE_2/1$, образованные двумя потоками, описываемыми обычными и сдвинутыми вправо от нулевой точки функциями плотностей гиперэкспоненциального и гиперэрланговского законов распределений второго порядка.

В ранних работах авторов доступно показано, что в системах, образованных сдвинутыми законами распределений, при одинаковом коэффициенте загрузки по сравнению с обычными системами среднее время ожидания становится меньше. Это достигается за счет того, что коэффициенты вариации времен поступления c_λ и обслуживания c_μ

для сдвинутых законов распределений становятся меньше при вводе параметра сдвига $t_0 > 0$. Таким образом, операция сдвига закона распределения трансформирует обычные марковские системы массового обслуживания в немарковскую систему $G/G/1$.

Результаты работ [2–4] в области СМО со сдвинутыми распределениями совместно с [1] позволили развить метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли и на рассматриваемые системы $H_2/HE_2/1$.

В теории массового обслуживания исследования систем $G/G/1$ актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика, к тому же нельзя получить решения для таких систем в конечном виде для общего случая. Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли в исследовании систем $G/G/1$ играет важную роль, и большинство результатов в теории массового обслуживания по-

лучены именно с помощью данного метода. Одна из форм интегрального уравнения Линдли выглядит так [1]:

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u)dC(u), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

где $W(y)$ – функция распределения вероятностей (ФРВ) времени ожидания требования в очереди; $C(u) = P(\tilde{u} < u)$ – ФРВ случайной величины $\tilde{u} = \tilde{x} - \tilde{t}$, где, в свою очередь, \tilde{x} – случайное время обслуживания требования; \tilde{t} – случайная величина – интервал времени между поступлениями требований.

При кратком изложении метода решения уравнения Линдли будем придерживаться подхода и символики автора [1]. Для этого через $A^*(s)$ и $B^*(s)$ обозначим преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов между поступлениями и времени обслуживания соответственно. Суть решения интегрального уравнения Линдли методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1$ представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от s . Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение:

$$A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s),$$

где $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ – некоторые рациональные функции от s , которые можно разложить на множители. Функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять специальным условиям согласно [1].

1. Постановка задачи

В работе ставится задача нахождения решения для среднего времени ожидания требований в очереди в СМО $H_2/HE_2/1$ и $H_2^-/HE_2^-/1$ со сдвинутыми гиперэкспоненциальным (H_2^-) и гиперэрланговским (HE_2^-) входными распределениями с использованием классического метода спектрального разложения. Для других систем применение этого метода рассмотрено в работах [2–4]. Вопросы аппроксимации законов распределений подробно освещены в [5; 6; 8–10].

2. Решение поставленной задачи

Рассмотрим систему $H_2/HE_2/1$, образованную гиперэкспоненциальным и гиперэрланговским законами распределения с функциями плотности

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (1)$$

$$b(t) = 4q\mu_1^2 t e^{-2\mu_1 t} + 4(1-q)\mu_2^2 t e^{-2\mu_2 t}. \quad (2)$$

Законы распределения (1) и (2) являются наиболее общими распределениями неотрицательных непрерывных случайных величин, поскольку обеспечивают широкий диапазон изменения коэффициента вариации.

Преобразования Лапласа функций (1) и (2) имеет вид

$$A^*(s) = p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2},$$

$$B^*(s) = q \left(\frac{2\mu_1}{s + 2\mu_1} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{s + 2\mu_2} \right)^2.$$

Тогда спектральное разложение для системы $H_2/HE_2/1$ преобразуется как

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] \times \left[q \left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1 + s} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2 + s} \right)^2 \right] - 1.$$

Первый сомножитель в правой части в квадратных скобках равен

$$\left[p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] = \frac{\lambda_1 \lambda_2 - [p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2]s}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)} = \frac{a_0 - a_1 s}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)},$$

где промежуточные параметры $a_0 = \lambda_1 \lambda_2$, $a_1 = p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2$. Аналогично представим второй сомножитель

$$\left[q \left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1 + s} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2 + s} \right)^2 \right] = \frac{q(16\mu_1^2 \mu_2^2 + 16\mu_1^2 \mu_2 s + 4\mu_1^2 s^2)}{(2\mu_1 + s)^2 (2\mu_2 + s)^2} + \frac{(1-q)(16\mu_1^2 \mu_2^2 + 16\mu_1 \mu_2^2 s + 4\mu_1^2 s^2)}{(2\mu_1 + s)^2 (2\mu_2 + s)^2} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{(2\mu_1 + s)^2 (2\mu_2 + s)^2},$$

где промежуточные параметры $b_0 = 16\mu_1^2 \mu_2^2$, $b_1 = 16\mu_1 \mu_2 [q\mu_1 + (1-q)\mu_2]$, $b_2 = 4[q\mu_1^2 + (1-q)\mu_2^2]$. Тогда искомое выражение для спектрального разложения запишется как

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{(a_0 - a_1 s)(b_0 + b_1 s + b_2 s^2)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2} - \frac{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(2\mu_1 + s)^2(2\mu_2 + s)^2}. \quad (3)$$

Многочлен в числителе в правой части разложения (3), как правило, всегда имеет один нуль $s = 0$ [1]. В данном случае свободный член разложения также равен 0: $a_0 b_0 - 16\lambda_1 \lambda_2 \mu_1^2 \mu_2^2 \equiv 0$.

В числителе дроби в правой части разложения получили многочлен шестой степени $-s(s^5 - c_4 s^4 - c_3 s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0)$, коэффициенты которого равны:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_1 - a_1 b_0 + b_0(\lambda_1 + \lambda_2) - 16a_0 \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2), \\ c_1 &= a_0 b_2 - a_1 b_1 - b_0 - 4a_0(\mu_1^2 + \mu_2^2) + 16(\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2)\mu_1 \mu_2 - 16a_0 \mu_1 \mu_2, \\ c_2 &= 4(\lambda_1 + \lambda_2)[(\mu_1 + \mu_2)^2 + 2\mu_1 \mu_2] - 4(\mu_1 + \mu_2)(a_0 + 4\mu_1 \mu_2) - a_1 b_2, \\ c_3 &= 4(\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2) - 4[(\mu_1 + \mu_2)^2 + 2\mu_1 \mu_2] - a_0, \\ c_4 &= \lambda_1 + \lambda_2 - 4(\mu_1 + \mu_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты (4) получены с помощью символьных операций Mathcad, поскольку числитель разложения (3) даже после введения промежуточных параметров содержит 42 слагаемых. Видимо и отсутствие результатов по рассматриваемой системе объясняется большой трудоемкостью выкладок.

Выделим многочлен в числителе разложения (3):

$$s^5 - c_4 s^4 - c_3 s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0, \quad (5)$$

т. к. определение его корней составляет основную часть метода спектрального разложения.

Исследование многочлена (5) с коэффициентами (4) с использованием формул Виета подтверждает наличие четырех отрицательных действительных корней и одного положительного корня, либо вместо первых – двух отрицательных действительных корней и двух комплексно сопряженных корней с отрицательными вещественными частями. Исследование знака младшего коэффициента многочлена (5) показывает, что $c_0 > 0$ всегда в случае стабильной системы, когда $0 < \rho < 1$. С учетом знака минус в многочлене перед коэффициентом c_0 , формулы Виета не противоречат факту наличия четырех отрицательных корней у многочлена (5).

Обозначив отрицательные корни многочлена (5) либо их отрицательные вещественные части для удобства через $-s_1, -s_2, -s_3, -s_4$, а положительный корень через s_5 , отношение $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ окончательно можно разложить на следующие множители:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)(s-s_5)}{(\lambda_1-s)(\lambda_2-s)(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}. \quad (6)$$

С учетом специальных условий [1] за функцию $\psi_+(s)$ примем

$$\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2},$$

т. к. нули многочлена (5): $s = 0, -s_1, -s_2, -s_3, -s_4$, и двукратные полюсы $s = -2\mu_1, s = -2\mu_2$ лежат в области $\text{Re}(s) \leq 0$, а за функцию $\psi_-(s) -$

$$\psi_-(s) = -\frac{(\lambda_1-s)(\lambda_2-s)}{(s-s_5)},$$

т. к. ее нули и полюс лежат в области $\text{Re}(s) < D$.

Далее по методике спектрального разложения определим постоянную

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \frac{s_1 s_2 s_3 s_4}{16\mu_1^2 \mu_2^2}.$$

Постоянная K определяет вероятность того, что поступающее в систему требование заставит ее свободной. Через функцию $\psi_+(s)$ и постоянную K определим преобразование Лапласа ФРВ времени ожидания $W(y)$:

$$\begin{aligned} \Phi_+(s) &= \frac{K}{\psi_+(s)} = \\ &= \frac{s_1 s_2 s_3 s_4 (s+2\mu_1)^2 (s+2\mu_2)^2}{16\mu_1^2 \mu_2^2 (s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}. \end{aligned}$$

Тогда преобразованием Лапласа для функции плотности времени ожидания будет функция $s \cdot \Phi_+(s)$, т. е.

$$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 s_3 s_4 (s+2\mu_1)^2 (s+2\mu_2)^2}{16\mu_1^2 \mu_2^2 (s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}. \quad (7)$$

Искомое среднее время ожидания в очереди равно значению производной от преобразования Лапласа (9) функции плотности со знаком минус в точке $s = 0$:

$$-\left. \frac{dW^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}.$$

Окончательно, среднее время ожидания в очереди для СМО $M_2/M_2/1$

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}. \quad (8)$$

Из выражения (7) при необходимости также можно определить моменты высших порядков для времени ожидания. Вторая производная от преобразования (7) в точке $s = 0$ дает второй начальный момент времени ожидания, что позволяет определить дисперсию времени ожидания. Учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания вокруг его среднего значения [7], тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию. Это является важным результатом для анализа трафика, чувствительного к задержкам.

Теперь перейдем к исследованию системы $H_2/NE_2/1$ со сдвинутыми входными распределениями, т. е. к системе с запаздыванием во времени. Такую систему, в отличие от обычной системы, обозначим $H_2^-/NE_2^-/1$. Для этого введем в рассмотрение функции плотности распределения интервалов входного потока и времени обслуживания:

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_0)}, \quad (9)$$

$$b(t) = 4q\mu_1^2(t-t_0)e^{-2\mu_1(t-t_0)} + 4(1-q)\mu_2^2(t-t_0)e^{-2\mu_2(t-t_0)}. \quad (10)$$

Функции плотности (9) и (10) являются сдвинутыми вправо от нулевой точки на величину $t_0 > 0$ гиперэкспоненциальным и гиперэрланговским распределениями второго порядка. Для нахождения среднего времени ожидания в очереди для этой системы докажем следующее утверждение.

Утверждение. Спектральные разложения $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ для систем $H_2^-/NE_2^-/1$ и $H_2/NE_2/1$ полностью совпадают и имеют вид (6).

Доказательство. Для системы $H_2^-/NE_2^-/1$ спектральное разложение будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} &= \left[p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] e^{t_0 s} \times \\ &\times \left[q \left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1 + s} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2 + s} \right)^2 \right] e^{-t_0 s} - 1 = \\ &= \left[p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] \times \\ &\times \left[q \left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1 + s} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2 + s} \right)^2 \right] - 1. \end{aligned}$$

У экспонент показатели степени с противоположными знаками обнуляются, и операция сдвига тем самым нивелируется. Таким образом, спек-

тральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для двух рассматриваемых систем совпадают. Утверждение доказано.

Следствие. Расчетное выражение для среднего времени ожидания для системы со сдвинутыми распределениями будет иметь точно такой же вид, как у системы с обычными распределениями, но с измененными параметрами вследствие проведения операции сдвига во времени [2-4].

Теперь определим числовые характеристики, а через них – неизвестные параметры распределений (9) и (10) методом моментов. Для этого запишем их преобразования Лапласа:

$$A^*(s) = \left[p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + s} \right] e^{-t_0 s},$$

$$B^*(s) = \left[q \left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1 + s} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2 + s} \right)^2 \right] e^{-t_0 s}.$$

Первая производная функции $A^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$ дает значения среднего интервала поступления требований

$$\bar{\tau}_\lambda = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0, \quad (11)$$

а вторая производная дает второй начальный момент этого интервала

$$\bar{\tau}_\lambda^2 = t_0^2 + 2t_0 \left[\frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2} \right] + 2 \left[\frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{(1-p)}{\lambda_2^2} \right]. \quad (12)$$

Тогда квадрат коэффициента вариации интервала поступлений будет равен

$$c_\lambda^2 = \frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2p(1-q) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}. \quad (13)$$

Поступив аналогично с распределением (10), определим соответствующие характеристики для времени обслуживания.

$$\bar{\tau}_\mu = q\mu_1^{-1} + (1-q)\mu_2^{-1} + t_0, \quad (14)$$

$$\bar{\tau}_\mu^2 = t_0^2 + 2t_0 \left[\frac{q}{\mu_1} + \frac{(1-q)}{\mu_2} \right] + \frac{3}{2} \left[\frac{q}{\mu_1^2} + \frac{(1-q)}{\mu_2^2} \right], \quad (15)$$

$$c_\mu^2 = \frac{\mu_1^2 - 2q\mu_2(\mu_1 - \mu_2) + q(1-2q)(\mu_1 - \mu_2)^2}{2[t_0\mu_1\mu_2 + (1-q)\mu_1 + q\mu_2]^2}. \quad (16)$$

Механизм определения параметров распределений (1), (2), (9) и (10) как с использованием двух первых начальных моментов, так и с использованием трех начальных моментов подробно изложен в [3] и [4] соответственно. Здесь же приведем готовые выражения для этих параметров. Для распределения (9) неизвестные параметры находим по выражениям:

Таблица 1. Результаты экспериментов для системы $H_2/HE_2/1$
 Table 1. Experimental results for the $H_2/HE_2/1$ system

Входные параметры Input parameters		Среднее время ожидания Average waiting time	
ρ	(c_λ, c_μ)	СМО QS $H_2/HE_2/1$	СМО QS $H_2/H_2/1$
0,1	(1; 0,71)	0,086	–
	(1;1)	0,111	0,111
	(2;2)	0,446	0,445
	(4;4)	1,791	1,779
	(8;8)	7,173	7,112
0,5	(1; 0,71)	0,755	–
	(1;1)	1,000	1,000
	(2;2)	4,043	4,044
	(4;4)	16,235	16,129
	(8;8)	64,844	64,178
0,9	(1; 0,71)	6,771	–
	(1;1)	9,075	9,000
	(2;2)	36,169	36,200
	(4;4)	144,773	144,833
	(8;8)	577,875	577,861

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\bar{c}_\lambda - t_0)^2}{2[(\bar{c}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{c}_\lambda^2]}}$$

$$\lambda_1 = 2p / (\bar{c}_\lambda - t_0), \quad \lambda_2 = 2(1-p) / (\bar{c}_\lambda - t_0),$$

а для распределения (10) –

$$q = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3(\bar{c}_\mu - t_0)^2}{8[(\bar{c}_\mu - t_0)^2 + c_\mu^2 \bar{c}_\mu^2]}}$$

$$\mu_1 = 2q / (\bar{c}_\mu - t_0), \quad \mu_2 = 2(1-q) / (\bar{c}_\mu - t_0).$$

Из этих выражений следует, что параметр сдвига ограничен условием $t_0 < \bar{c}_\mu < \bar{c}_\lambda$. Кроме того, область применимости системы $H_2^-/HE_2^-/1$ определяется не отрицательностью двух подкоренных выражений для p и q .

Алгоритм расчета среднего времени ожидания при заданных входных параметрах $\bar{c}_\lambda, \bar{c}_\mu, c_\lambda, c_\mu, t_0$ сводится к последовательному определению неизвестных параметров распределений (9) и (10). Далее определяем коэффициенты многочлена (5) по приведенным выше выражениям (4) и находим нужные корни с отрицательными вещественными частями $-s_1, -s_2, -s_3, -s_4$. Подставив абсолютные значения этих корней в выражение (8), определяем среднее время ожидания. Наличие таких корней обусловлено существованием и единственностью спектрального разложения. Проведенные

многочисленные эксперименты только подтверждают данный факт.

3. Результаты вычислительных экспериментов

В табл. 1 и 2 приведены данные расчетов в пакете Mathcad для обычной системы $H_2/HE_2/1$ и системы с запаздыванием $H_2^-/HE_2^-/1$ для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$ для широкого диапазона изменения коэффициентов вариаций c_λ, c_μ и параметра сдвига t_0 . Результаты для обычной системы сравниваются с данными для близкой системы $H_2/H_2/1$. Прочерки в табл. 1 означают, что при таких значениях параметров система $H_2/HE_2/1$ неприменима. Результаты для системы с запаздыванием $H_2^-/HE_2^-/1$ сравниваются с результатами для обычной системы. Коэффициент загрузки ρ в обеих таблицах определяется отношением средних интервалов $\rho = \bar{c}_\mu / \bar{c}_\lambda$. В расчетах использовано нормированное время обслуживания $\bar{c}_\mu = 1$.

Результаты для систем $H_2/HE_2/1$ и $H_2/H_2/1$ совпадают до целых частей, но при этом диапазон параметров обслуживания для первой системы шире, чем для второй.

Система $H_2^-/HE_2^-/1$ применима и для малых значений коэффициентов вариаций, в частности, при $\rho = 0,9, c_\lambda = c_\mu = 0,2$ и $t_0 = 0,99$ среднее вре-

Таблица 2. Результаты экспериментов для системы $H_2^- / HE_2^- / 1$ Table 2. Experimental results for the $H_2^- / HE_2^- / 1$ system

Входные параметры Input parameters		Среднее время ожидания Average waiting time			
(c_λ, c_μ)	$(c_\lambda; c_\mu)$	СМО QS $H_2^- / HE_2^- / 1$			СМО QS $H_2 / HE_2 / 1$
		$t_0 = 0,99$	$t_0 = 0,5$	$t_0 = 0,01$	
0,1	(1;0,71)	0,03	0,04	0,09	0,09
	(1;1)	0,06	0,07	0,11	0,11
	(2;2)	0,23	0,36	0,44	0,45
	(4;4)	0,93	1,56	1,79	1,79
	(8;8)	3,74	6,38	7,16	7,17
0,5	(1;0,71)	0,26	0,48	0,75	0,76
	(1;1)	0,51	0,75	0,99	1,00
	(2;2)	2,04	3,15	4,03	4,04
	(4;4)	8,15	12,73	16,17	16,24
	(8;8)	32,62	51,07	64,58	64,84
0,9	(1;0,71)	2,49	6,00	6,77	6,77
	(1;1)	4,73	8,29	9,06	9,08
	(2;2)	18,92	33,20	36,14	36,17
	(4;4)	75,69	123,39	144,63	144,77
	(8;8)	302,78	528,43	577,29	577,88

мя ожидания составляет всего $\bar{W} = 0,187$ единицы времени. Таким образом, диапазон изменения параметров для системы $H_2^- / HE_2^- / 1$ гораздо шире, чем у обычной системы $H_2 / HE_2 / 1$.

Заключение

По результатам работы можно сделать следующие выводы.

Как и следовало ожидать, уменьшение коэффициентов вариации c_λ и c_μ за счет введения параметра сдвига $t_0 > 0$ в законы распределений входного потока и времени обслуживания, влечет за собой заметное уменьшение среднего времени ожидания в системах с запаздыванием. Тем самым, мы расширяем область применимости системы $H_2 / HE_2 / 1$ в теории телетрафика.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что получено спектральное раз-

ложение решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемых систем и с его помощью выведена расчетная формула для среднего времени ожидания в очереди для этой системы в замкнутой форме. Данные численных экспериментов подтверждают полную адекватность полученных теоретических результатов.

Практическое значение работы заключается в том, что полученные результаты с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого необходимо знать числовые характеристики интервалов входящего трафика и времени обслуживания на уровне двух первых моментов, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика.

Список литературы

1. Kleinrock L. Queueing Systems – Volume I: Theory. New York: Wiley, 1975. 417 p.
2. Тарасов В.Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 57–70. DOI: <https://doi.org/10.31857/S000523100002857-6>
3. Тарасов В.Н. Спектральное разложение для модели задержки на основе СМО с эрланговским и гиперэкспоненциальным распределениями // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т. 25, № 3. С. 24–28. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.3.24-28>

4. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Спектральное решение для системы с запаздыванием с гиперэрланговскими распределениями // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2022. Т. 25, № 4. С. 33–38. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.4.33-38>
5. Brännström N. A Queueing theory analysis of wireless radio systems: master's thesis applied to HS-DSCH. Luleå University of Technology, 2004. 79 p. URL: <http://tu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01>
6. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods // Operation Research. 1982. Vol. 30, no. 1. P. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
7. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM). URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>
8. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress. 1991. P. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
9. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
10. Алиев Т.И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2 (84). С. 88–93. URL: https://ntv.ifmo.ru/ru/article/4127/approksimaciya_veroyatnostnyh_raspredeleniy_v_modelyah_massovogo_obslyuzhivaniya.htm

Информация об авторах

Тарасов Вениамин Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: методы оценки производительности вычислительных систем и компьютерных сетей.

E-mail: v.tarasov@psuti.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9318-0797>

SPIN-код (eLibrary): 5520-9394

AuthorID (eLibrary): 448364

ResearcherID (WoS): O-5949-2015

Бахарева Надежда Федоровна, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и вычислительной техники Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: теория вычислительных систем и компьютерные сети.

E-mail: n.bakhareva@psuti.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9850-7752>

Physics of Wave Processes and Radio Systems

2025, vol. 28, no. 2, pp. 87–94

DOI [10.18469/1810-3189.2025.28.2.87-94](https://doi.org/10.18469/1810-3189.2025.28.2.87-94)

UDC 621.391.1:621.395

Original Research

Received 12 December 2024

Accepted 13 January 2025

Published 30 June 2025

Spectral solutions for QS with distribution laws in the form of probabilistic mixtures

Veniamin N. Tarasov , Nadezhda F. Bakhareva 

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics
23, L. Tolstoy Street,
Samara, 443010, Russia

Abstract – Background. QS are the main mathematical tool for modeling data transmission systems, which are not without reason called queuing networks. The need to regulate such characteristics of mass service systems as waiting time in a queue or queue length is due to the improvement of the quality of operation of data transmission systems. The ability to regulate these characteristics allows minimizing the waiting time in the queue in the buffers of transmitting devices, as well as the volumes of buffer memory itself. To demonstrate this possibility, the paper examines queuing systems formed by both conventional distribution laws in the form of probability mixtures and time-shifted distribution laws. **Aim.** In this work, the hyperexponential and hyper-Erlangian distributions of the second order were chosen as components of the QS. Based on these distribution laws, numerical-analytical models were constructed for two queuing systems with normal and shifted distribution laws, with the derivation of a solution for the main characteristic of the queuing system – the average waiting time in the queue. As is known, the remaining characteristics of the QS are derivatives of the average waiting time. **Methods.** The paper uses a shift of the distribution laws to the right from the zero point. To derive a solution for the average waiting time in a queue, the classical method of spectral solution of the Lindley integral equation is used based on the Laplace transform of the distribution laws that form the considered QS. The obtained calculation formulas for the average waiting time in a queue allow us to calculate the characteristics of such systems for a wide range of changes in teletraffic parameters. **Results.** The obtained results can be used in modern teletraffic theory in the design and modeling of various promising data transmission systems, including the volumes of

buffer memory of transmitting devices. **Conclusion.** The shift of the distribution laws in time leads to a decrease in their variation coefficients. Due to the quadratic dependence of the average waiting time on the variation coefficients of the arrival and service time intervals, a noticeable decrease in the average waiting time follows in systems with time shifts.

Keywords – ordinary and shifted hyper exponential and hyper-Erlang distribution laws; Lindley integral equation; spectral decomposition method; Laplace transform.

✉ v.tarasov@psuti.ru (Veniamin N. Tarasov)



© Veniamin N. Tarasov, Nadezhda F. Bakhareva, 2025

References

1. L. Kleinrock, *Queueing Systems – Volume I: Theory*. New York: Wiley, 1975.
2. V. N. Tarasov, “Expanding the class of mass service systems with delay,” *Avtomatika i telemekhanika*, no. 12, pp. 57–70, 2018, doi: <https://doi.org/10.31857/S000523100002857-6>. (In Russ.)
3. V. N. Tarasov, “Spectral decomposition for a QS based delay model with Erlang and hyperexponential distributions,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 25, no. 3, pp. 24–28, 2022, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.3.24-28>. (In Russ.)
4. V. N. Tarasov and N. F. Bakhareva, “Spectral solution for a delay system with hyper-Erlang distributions,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 25, no. 4, pp. 33–38, 2022, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.4.33-38>. (In Russ.)
5. N. Brännström, “A queueing theory analysis of wireless radio systems,” master’s thesis applied to HS-DSCH, Luleå University of Technology, 2004, url: <http://ltu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01>.
6. W. Whitt, “Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods,” *Operation Research*, vol. 30, no. 1, pp. 125–147, 1982, doi: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>.
7. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM), url: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>.
8. A. Myskja, “An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals,” *Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13*: proc. of congress, pp. 683–688, 1991, url: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>.
9. T. I. Aliev, *Fundamentals of Modeling Discrete Systems*. Saint Petersburg: SPbGU ITMO, 2009. (In Russ.)
10. T. I. Aliev, “Approximation of probabilistic distributions in mass service models,” *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki*, no. 2 (84), pp. 88–93, 2013, url: https://ntv.ifmo.ru/article/4127/approksimaciya_veroyatnostnyh_raspredeleniy_v_modelyah_massovogo_obslyuzhivaniya.htm. (In Russ.)

Information about the Authors

Veniamin N. Tarasov, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Management in Technical Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

Research interests: methods for assessing the performance of computing systems and computer networks.

E-mail: v.tarasov@psuti.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9318-0797>

SPIN-code (eLibrary): 5520-9394

AuthorID (eLibrary): 448364

ResearcherID (WoS): O-5949-2015

Nadezhda F. Bakhareva, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Computer Science and Computer Engineering, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

Research interests: theory of computer systems and computer networks.

E-mail: n.bakhareva@psuti.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9850-7752>