Физика волновых процессов и радиотехнические системы
*2025. Т. 28, № 1. С. 76–87*

DOI 10.18469/1810-3189.2025.28.1.76-87
УДК 519.642:537.86
Оригинальное исследование

*Дата поступления* 10 сентября 2024
*Дата принятия* 11 октября 2024
*Дата публикации* 31 марта 2025

# Вычислительно эффективное решение по нахождению плотности тока на освещенной и теневой сторонах бесконечно тонкого круглого диска

*Д.К. Кетух*

Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации
302015, Россия, г. Орел,
ул. Приборостроительная, 35

*Аннотация* – **Обоснование.** Статья посвящена разработке вычислительно эффективного численного решения задачи дифракции на бесконечно тонком идеально проводящем круглом диске. Основное внимание уделяется вопросу нахождения распределения поверхностной плотности тока с каждой стороны диска в отдельности, который остался нераскрытым в других известных исследованиях. **Цель** настоящей статьи состоит в устранении указанного недостатка путем формирования вычислительно эффективного алгоритмического решения, основанного на методе моментов и позволяющего численно задавать гладкую аппроксимацию поверхностной плотности тока на освещенной и теневой сторонах бесконечно тонкого идеально проводящего круглого диска. **Методы.** Решение формируется методом Галеркина при определении искомой аппроксимации поверхностной плотности тока на диске. Основу решения составляет формирование гладкой векторной функции, заданной суммой глобальных относительно диска безвихревых и вихревых базисных функций. Соответствующие базисные функции формируются из предложенных в статье модификаций функций Бесселя первого рода и многочленов Цернике. **Результаты.** Работоспособность предложенного решения проверена на тестовых примерах для диска при различных отношениях диаметра к длине волны. Сравнение произведено с решением аналогичной задачи в САПР Ansoft HFSS. **Заключение.** Полученные результаты позволяют сделать вывод о предпочтительности предложенного решения и являются основой для дальнейшего обобщения результатов на более сложные геометрические структуры при применении метода конформных отображений.

*Ключевые слова* – бесконечно тонкий диск; дифракция электромагнитной волны; поверхностная плотность тока; освещенная и теневая стороны; метод моментов; модифицированные многочлены Цернике; модифицированные функции Бесселя.

## Введение

Одной из канонических задач теории дифракции в векторном (электромагнитном) случае является задача дифракции на бесконечно тонком идеально проводящем круглом диске [1]. Ее исследованию в отношении внешней и внутренней задач электродинамики для стороннего плоского монохроматического поля произвольной поляризации и произвольного направления падения посвящено большое число работ [2–10] и др. Их основу составляют следующие решения: 1) аналитические, формируемые при применении метода разделения переменных и представления волновых уравнений в вырожденной эллиптической системе координат с получением решения в виде ряда по сфероидальным функциям [2; 3]; 2) асимптотические, реализуемые в приближениях физической оптики [4], физической теории дифракции [5], геометрической теории дифракции и ее модификаций [6; 7]; 3) численные, основанные на применении метода моментов [8] или его модификаций [9; 10].

Указанные решения в исследовании дифракционной задачи на бесконечно тонком идеально проводящем круглом диске при применении метода конформных отображений [11; 12] потенциально позволяют обобщить получаемый результат на более сложные геометрические структуры [13–15]. Вместе с тем перечисленные методы в существующих реализациях не позволяют вычислительно эффективно выделить поверхностную плотность тока на освещенной и теневой сторонах круглого диска.

Цель настоящей статьи состоит в устранении указанного недостатка путем формирования вычислительно эффективного алгоритмического решения, основанного на методе моментов и позволяющего численно определять гладкую аппроксимацию поверхностной плотности тока на освещенной и теневой сторонах бесконечно тонкого идеально проводящего круглого диска.

## 1. Постановка и решение задачи дифракции

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = (x_3 = 0) \subset \mathbb{R}^3$ – бесконечно тонкий идеально проводящий диск радиусом $R$ с

kdk_hcc@mail.ru (*Кетух Дмитрий Константинович*)

© Кетух Д.К., 2025

центром в начале координат и границей $\partial\Omega = \overline{\Omega}\setminus\Omega$, а $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ – падающее стороннее плоское монохроматическое поле (рис. 1).

Задачу дифракции $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ на $\Omega$ сведем к определению рассеянного электромагнитного поля (ЭМП) [16]:

$$\mathbf{E},\mathbf{H}\in C^2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})\times \tag{1}$$
$$\times\bigcap_{\delta>0}C\left(\overline{\mathbb{R}^3_+}\setminus\partial\Omega_\delta\right)\bigcap_{\delta>0}C\left(\overline{\mathbb{R}^3_-}\setminus\partial\Omega_\delta\right),$$

удовлетворяющего условиям [1; 13]:

$$\nabla\times\mathbf{H}=-i\beta\mathbf{E},\quad \nabla\times\mathbf{E}=i\beta\mathbf{H},\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}; \tag{2}$$

$$\mathbf{E}_\tau\big|_\Omega=-\mathbf{E}^0_\tau\big|_\Omega;\quad \mathbf{E}^0_\tau\big|_\Omega\in C^\infty(\overline{\Omega});\quad \mathbf{E},\mathbf{H}\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3);$$

$$\mathbf{E},\mathbf{H}=o(r^{-1}),\quad r:=|\mathbf{x}|\to\infty,\quad \operatorname{Im}\beta>0;$$

$$\mathbf{H}\times\mathbf{e}_r-\mathbf{E}=o(r^{-1});\quad \mathbf{E}\times\mathbf{e}_r+\mathbf{H}=o(r^{-1});$$

$$\mathbf{E},\mathbf{H}=O(r^{-1}),\quad r\to\infty \text{ при } \operatorname{Im}\beta=0,$$

где

$$\mathbf{x}=\{x_1,x_2,x_3\};\quad \mathbf{e}_r=\mathbf{x}/|\mathbf{x}|;$$

$$\beta^2=\omega^2\mu(\varepsilon+i\sigma\omega^{-1});$$

$\omega>0$ – угловая частота; $\varepsilon>0$ и $\mu>0$ – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; индекс $\tau$ обозначает тангенциальную составляющую поля на $\Omega$,

$$\partial\Omega_\delta=\left\{\mathbf{x}:|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<\delta,\mathbf{y}\in\partial\Omega\right\}.$$

Доказательство существования и единственности решения задачи (1)–(2) при $\operatorname{Im}\beta\ge 0$ известно из [16, с. 45]. Используя векторные потенциалы и граничное условие для $\mathbf{E}_\tau$ из (2), представим (1)–(2) в виде

$$\mathcal{L}\mathbf{J}=-\mathbf{f}, \tag{3}$$

где

$$\mathcal{L}\mathbf{J}=\nabla\mathcal{A}(\nabla\cdot\mathbf{J})+\beta^2\mathcal{A}\mathbf{J};\quad \mathbf{f}=i\omega(\varepsilon+i\sigma\omega^{-1})\mathbf{E}^0_\tau\big|_{\overline{\Omega}};$$

$$\mathcal{A}\mathbf{J}(\mathbf{x})=\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{J}(\mathbf{y})d\mathbf{y};\quad \mathbf{x}=\{x_1,x_2,x_3\}\in\overline{\Omega};$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}=0;\quad G(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{1}{4\mathrm{p}}\frac{e^{i\beta|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$$

– функция Грина; $\mathbf{J}(\mathbf{y})=\mathbf{J}^e(\mathbf{y})+\mathbf{J}^h(\mathbf{y})$ – поверхностная плотность тока на $\Omega$, представленная суммой безвихревых $\mathbf{J}^e(\mathbf{y})$ и вихревых $\mathbf{J}^h(\mathbf{y})$ токов [17]; $\mathbf{n}=(0,0,1)$ – орт нормали к $\Omega$.

Решение задачи (3) выполним в проекционной постановке метода Галеркина [18] при разложении:

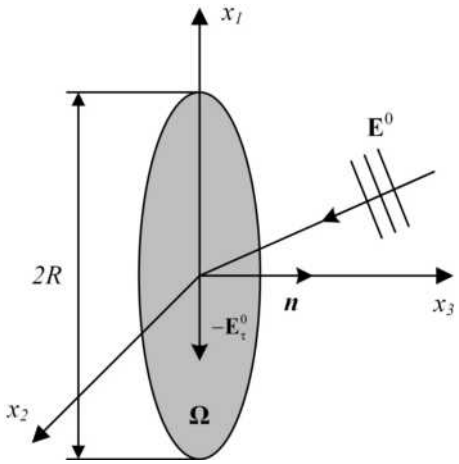



**Рис. 1.** Геометрическое представление задачи дифракции плоской волны на бесконечно тонком идеально проводящем круглом диске
**Fig. 1.** Geometric representation of the problem of diffraction of a plane wave on an infinitely thin perfectly conducting circular disk

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{\mathcal{M}}c_j\boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{x}), \tag{4}$$

искомой функции J по базису $\boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{x})$.

С учетом первой формулы Грина [1] и свойств дифференциальных операторов [19] при удовлетворении $\boldsymbol{\psi}_j$ граничным условиям $\boldsymbol{\psi}_j\cdot\boldsymbol{\nu}\big|_{\partial\Omega}=0$, ($\boldsymbol{\nu}$ – нормаль к $\partial\Omega$) выражение (3) при требовании ортогональности

$$\int_\Omega\mathcal{N}(\mathbf{x})\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x})d\mathbf{x}=0$$

невязки

$$\mathcal{N}(\mathbf{x})=\mathcal{L}\left[\sum_{j=1}^{\mathcal{M}}c_j\boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{x})\right]-\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

к $\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x})$ примет вид

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{M}}c_j\cdot\left[\int_\Omega\nabla\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x})\cdot\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla\boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}-\right. \tag{5}$$
$$\left.-\beta^2\int_\Omega\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x})\cdot\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}\right]=$$
$$=\int_\Omega\mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Эффективность решения (5) существенным образом зависит от выбора $\boldsymbol{\psi}_j$ для $\Omega$. При этом исследование задачи предлагается формировать из функций $\boldsymbol{\psi}_j$, способных в последующем численном решении (5) и аппроксимации (4) обеспечить возможность представить $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})$ в виде суммы безвихревых $\tilde{\mathbf{J}}^e(\mathbf{x})$ и вихревых $\tilde{\mathbf{J}}^h(\mathbf{x})$ токов.

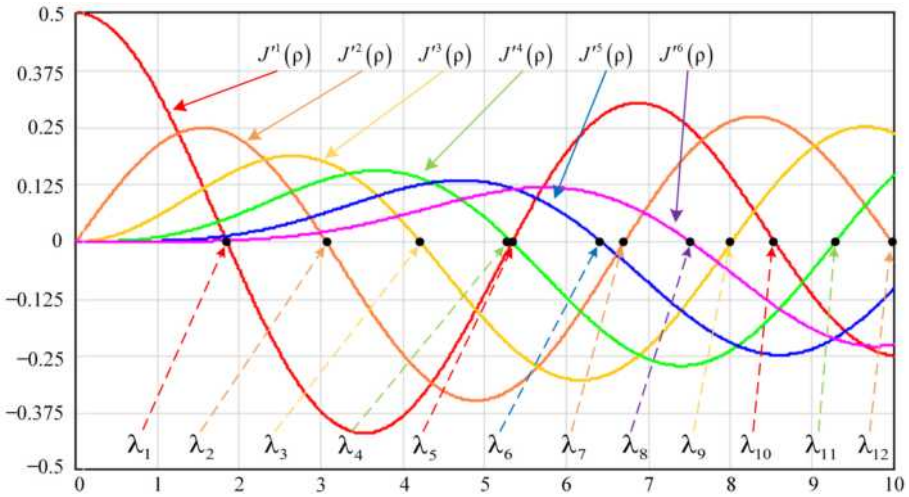



**Рис. 2.** Примеры графиков $J'^{\alpha}(\rho)$ и расположение первых 12 элементов множества нулей $\lambda = \{\lambda_i^{\alpha}(k)\}$

**Fig. 2.** Examples of graphs of $J'^{\alpha}(\rho)$ and location of the first 12 elements of the set of zeros $\lambda = \{\lambda_i^{\alpha}(k)\}$

## 2. Решение дифракционной задачи с учетом разделения поверхностной плотности тока на вихревую и безвихревую составляющие

Особенность предложенного решения состоит в формировании гладкой аппроксимации $\mathbf{J}(\mathbf{x})$:

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{J}}_e(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{J}}_h(\mathbf{x}),$$

заданной конечными суммами:

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\hat{N}} c_j^e \cdot \boldsymbol{\psi}_j^e(\mathbf{x}) + \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{N}} c_{\bar{j}}^h \cdot \boldsymbol{\psi}_{\bar{j}}^h(\mathbf{x}),$$

где $\hat{N}$, $\bar{N}$ – количество базисных функций каждого типа.

Согласно [20], для $\mathbf{x} \in \Omega$ имеет место двумерный аналог декомпозиции Гельмгольца, который для поля $\mathbf{H}$ имеет вид

$$\mathbf{H} = \nabla_{\perp} \cdot \varphi^D + \nabla'_{\perp} \cdot \varphi^N,$$

где

$$\nabla_{\perp} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

$$\nabla'_{\perp} = \left( -\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right),$$

$\varphi^N$, $\varphi^D$ – неизвестные скалярные функции, удовлетворяющие условиям Неймана:

$$\nabla_{\perp} \varphi^N \cdot \mathbf{v} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{6}$$

и Дирихле:

$$\varphi^D \Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7}$$

соответственно.

Тогда с учетом граничных условий на $\partial\Omega$ решение задачи (5) на $\Omega$ определим:

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\hat{N}} c_j^e \cdot \nabla_{\perp} \varphi_j^N(\mathbf{x}) + \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{N}} c_{\bar{j}}^h \cdot \nabla'_{\perp} \varphi_{\bar{j}}^D(\mathbf{x}). \tag{8}$$

В качестве $\varphi_j^N$ и $\varphi_{\bar{j}}^D$ предлагается применять двумерные модифицированные функции Бесселя первого рода действительного переменного $\hat{J}_j(\mathbf{x})$ и многочлены Цернике $\hat{Z}_j(\mathbf{x})$, удовлетворяющие условиям (6) и (7) соответственно.

Удовлетворяющие граничному условию Неймана (6) функции $\hat{J}_j(\mathbf{x})$ зададим в виде

$$\hat{J}_j(\mathbf{x}) = \hat{J}_j(\rho, \varphi) = \tag{9}$$

$$= \begin{cases} J^{\alpha}(\lambda_{(j+1)/2}^{\alpha} \rho) \cos(k\varphi), \ j \bmod 2 = 1, \\ J^{\alpha}(\lambda_{j/2}^{\alpha} \rho) \sin(k\varphi), \ j \bmod 2 = 0, \end{cases}$$

где

$$\rho = \rho(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \ \ \rho \le 1;$$

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}) = \arg(x_1 + i x_2);$$

$J^{\alpha}(\rho)$ – функции Бесселя перового рода порядка $\alpha \ge 1$; $\lambda = \{\lambda_i^{\alpha}(k)\}$ – упорядоченное по возрастанию $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ (рис. 2) множество всех нулей

$$\frac{dJ^{\alpha}(\rho)}{d\rho}\Bigg|_{\rho=\lambda_i^{\alpha}} = 0; \ \ \lambda_i \ne 0;$$

$k$ – порядковый номер нуля функции

$$J'^{\alpha}(\rho) = \frac{dJ^{\alpha}(\rho)}{d\rho};$$

$i \in \left[1, \hat{N}/2\right]$ – порядковый номер элемента множества $\lambda$.

Модификацию $\widehat{Z}_{\bar{j}}(\mathbf{x})$ функций Цернике $Z_{\bar{j}}(\mathbf{x})$ при удовлетворении граничному условию (7) определим как

$$\widehat{Z}_{\bar{j}}(\mathbf{x}) = \widehat{Z}_n^m(\rho,\varphi) = \begin{cases} R_n^m(\rho)\cos\left(m\varphi\right), \ m \geq 0; \\ R_n^m(\rho)\sin\left(-m\varphi\right), \ m < 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$R_n^m(\rho) = \rho(1-\rho^2)P_{\frac{n-m}{2}}^{(2,m)}(2\rho^2-1),$$

где

$$P_t^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+t+1)}{t!\,\Gamma(\alpha+\beta+t+1)}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{t}\binom{t}{s}\left(\frac{\Gamma(\alpha+\beta+t+s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$$

– многочлены Якоби порядка $t$; $n \in \mathbb{N}$; $m \in \mathbb{Z}/\{0\}$; $n \geq |m|$;

$$\frac{n-m}{2} \in \mathbb{Z};$$

$$\bar{j} = 0{,}5(n^2-1-n\bmod 2+\operatorname{sgn}(m))+|m|.$$

Примеры графического представления предложенной модификации функции Бесселя первого рода действительного переменного $\widehat{J}_j(\mathbf{x})$ и многочленов Цернике $\widehat{Z}_j(\mathbf{x})$, удовлетворяющие условиям (6) и (7) соответственно, приведены на рис. 3.

С учетом поставленной задачи дифракции и предложении аппроксимации поверхностной плотности тока в виде (8) зададим (5) виде системы уравнений:

$$\sum_{\bar{j}'=1}^{\bar{N}} c_{\bar{j}'}^{h'}\cdot\left\{\int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}}^{h}(\mathbf{x})\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}'}^{h'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x} - \right. \tag{11}$$

$$\left. -\beta^2\int_\Omega \boldsymbol{\psi}_{\bar{j}}^{h}(\mathbf{x})\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}'}^{h'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}\right\}+$$

$$+\sum_{j'=1}^{\hat{N}} c_{j'}^{e'}\cdot\left\{\int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}}^{h}(\mathbf{x})\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{j'}^{e'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x} - \right.$$

$$\left. -\beta^2\int_\Omega \boldsymbol{\psi}_{\bar{j}}^{h}(\mathbf{x})\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\psi}_{j'}^{e'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}\right\}=$$

$$=\int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x})\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}}^{h}(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

$$\sum_{\bar{j}'=1}^{\bar{N}} c_{\bar{j}'}^{h'}\cdot\left\{\int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{j}^{e}(\mathbf{x})\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}'}^{h'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x} - \right. \tag{12}$$

$$\left. -\beta^2\int_\Omega \boldsymbol{\psi}_{j}^{e}(\mathbf{x})\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}'}^{h'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}\right\}+$$

$$+\sum_{j'=1}^{\hat{N}} c_{j'}^{e'}\cdot\left\{\int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{j}^{e}(\mathbf{x})\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{j'}^{e'}\left(\mathbf{y}\right)d\mathbf{y}d\mathbf{x} - \right.$$

$$\left. -\beta^2\int_\Omega \boldsymbol{\psi}_{j}^{e}(\mathbf{x})\int_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\psi}_{j'}^{e'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}\right\}=$$

$$=\int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x})\boldsymbol{\psi}_{j}^{e}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Решение системы уравнений (11), (12) позволит определить поверхностную плотность тока $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})$ с требуемой точностью при обеспечении возможности выделения тока на освещенной $\mathbf{J}^{\text{осв}}(\mathbf{x})$ и теневой $\mathbf{J}^{\text{тен}}(\mathbf{x})$ сторонах диска.

## 3. Расчет поверхностной плотности тока на освещенной и теневой сторонах Ω

В [16] доказано, что с каждой стороны бесконечно тонкого идеально проводящего плоского экрана известны тангенциальная составляющая магнитного поля $\mathbf{H}_\tau$ и нормальная составляющая электрического поля $\mathbf{E}_\mathbf{n}$:

$$\lim_{x_3\to\pm 0}\mathbf{E}_n(\mathbf{x}) = \mp\frac{1}{2}\frac{i}{\omega\varepsilon}\nabla_\perp\mathbf{J}(\mathbf{x}); \tag{13}$$

$$\lim_{x_3\to\pm 0}\mathbf{H}_\tau(\mathbf{x}) = \pm\frac{1}{2}\mathbf{J}(\mathbf{x})\times\mathbf{n}.$$

Согласно принципу физического эквивалента [23], поля $\mathbf{H}^0$ и $\mathbf{H}$ на поверхности идеально проводящего тела можно заменить эквивалентным поверхностным током $\mathbf{J}^{\text{eq}}$:

$$\mathbf{J}^{\text{eq}} = \tilde{\mathbf{n}}\times(\mathbf{H}^0+\mathbf{H}), \tag{14}$$

где $\tilde{\mathbf{n}}$ – нормаль к поверхности тела.

С учетом того что поле $\mathbf{H}^0$ известно, а $\mathbf{H} = \mathbf{H}_\tau(\mathbf{x})\big|_{x_3\to\pm 0}$ поддается вычислению для каждой из сторон $\Omega$, подставив (13) в (14) при непрерывности падающего поля $\mathbf{H}^0$, в пределе получим:

$$\mathbf{J}^{\text{осв}}(\mathbf{x}) = \lim_{x_3\to+0}\mathbf{J}^{\text{eq}}(\mathbf{x}) =$$

$$=\lim_{x_3\to+0}\left[\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0(\mathbf{x})+\mathbf{n}\times\mathbf{H}_\tau(\mathbf{x})\right]=$$

$$=\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0(\mathbf{x})+\mathbf{n}\times\left(\frac{1}{2}\mathbf{J}(\mathbf{x})\times\mathbf{n}\right)=$$

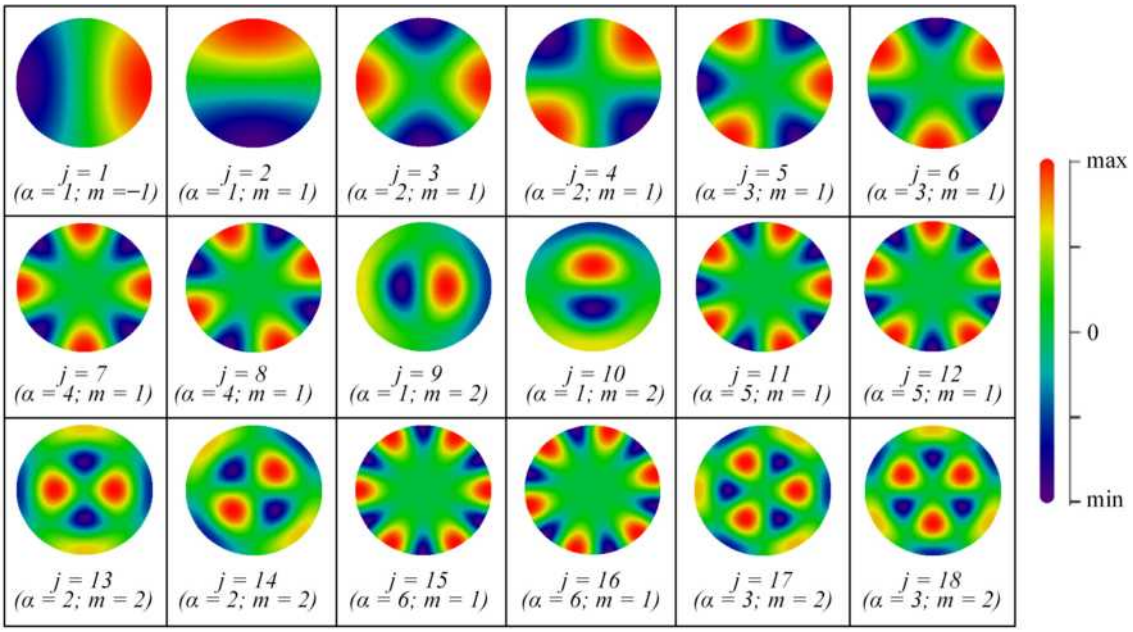
$$=\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0(\mathbf{x})+\frac{1}{2}\mathbf{J}(\mathbf{x})\approx$$

$$\approx\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0(\mathbf{x})+\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{J}}^{\text{осв}}(\mathbf{x});$$

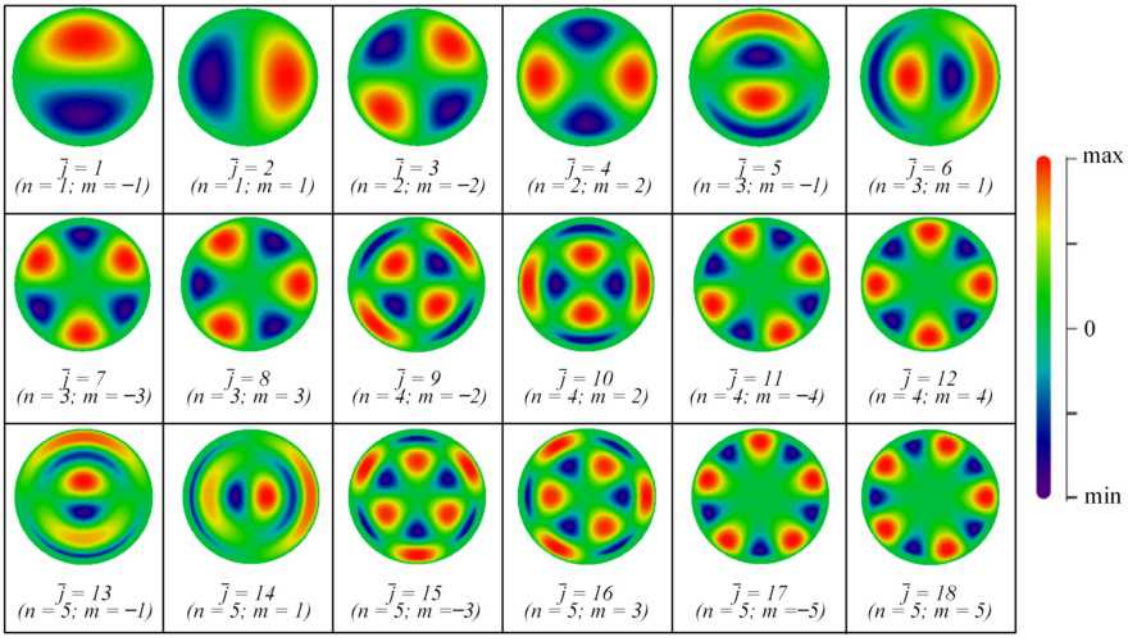
$$\mathbf{J}^{\text{тен}}(\mathbf{x}) = \lim_{x_3\to-0}\mathbf{J}^{\text{eq}}(\mathbf{x}) =$$

$$=\lim_{x_3\to-0}\left[-\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0(\mathbf{x})-\mathbf{n}\times\mathbf{H}_\tau(\mathbf{x})\right]=$$

$$=-\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0(\mathbf{x})-\mathbf{n}\times\left(-\frac{1}{2}\mathbf{J}(\mathbf{x})\times\mathbf{n}\right)=$$




*а*




*б*

**Рис. 3.** Пример визуализации многочленов $\hat{J}_j(\mathbf{x})$ (*а*) и $\hat{Z}_{\bar{j}}(\mathbf{x})$ (*б*)
**Fig. 3.** Example of polynomials visualization $\hat{J}_j(\mathbf{x})$ (*a*) and $\hat{Z}_{\bar{j}}(\mathbf{x})$ (*b*)

$$= -\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathbf{J}(\mathbf{x}) \approx$$

$$\approx -\mathbf{n}\times\mathbf{H}^0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{J}}^{\text{тен}}(\mathbf{x}).$$

Таким образом, предложенный способ позволяет преодолеть ограничения (5) при асимптотическом выделении тока с каждой из сторон $\Omega$. Для сформированных представлений составим численную схему решения задачи (11), (12) при определении $\mathbf{J}^{\text{осв}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{J}^{\text{тен}}(\mathbf{x})$ и выделении алгоритмических особенностей.

## 4. Особенности алгоритмической реализации

Точность решения системы (11), (12) во многом зависит от численного вычисления одиночных и двойных интегралов. С этой целью представим область интегрирования $\Omega$ многоугольником $S \in \mathbb{R}^2$, $(x_3 = 0)$, состоящим из

$$S = \bigcup_{s=1}^{M} S_s$$

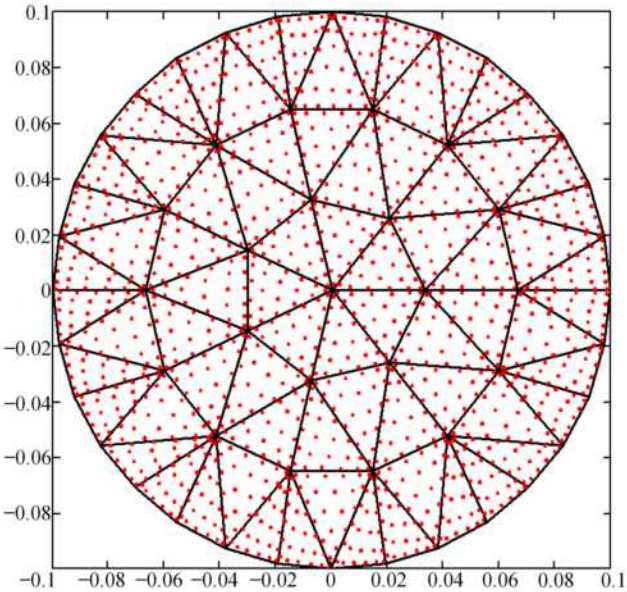


**Рис. 4.** Вариант представления диска $\Omega$ многоугольником $S$. Точками обозначены узлы численного интегрирования
**Fig. 4.** Variant of the disk representation $\Omega$ by a polygon $S$. The dots indicate the nodes of numerical integration

треугольных областей таких, что

$$\overline{S}_m \cap \overline{S}_{m'} = \varnothing \quad (m,\ m' \in \{\overline{1,M}\},\ m \neq m').$$

Разбиение $\Omega$ на треугольные элементы произведем триангуляцией Делоне (рис. 4) [6].

Окончательная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов $c^{e'}$, $c^{h'}$ примет вид

$$\sum_{s=1}^{M}\left[\sum_{s'=1}^{M}\left[\sum_{\bar{j}'=1}^{\bar{N}} c_{\bar{j}'}^{h'}\cdot\left\{\int_{S_s}\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}}^{h}(\mathbf{x})\int_{S_{s'}}G(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla\cdot\right.\right.\right.$$

$$\left.\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}'}^{h'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}-\beta^2\int_{S_s}\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}}^{h}(\mathbf{x})\int_{S_{s'}}G(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}'}^{h'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}\right\}+$$

$$+\sum_{j'=1}^{N}c_{j'}^{e'}\cdot\left\{\int_{S_s}\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}}^{h}(\mathbf{x})\int_{S_{s'}}G(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla\cdot\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot\boldsymbol{\psi}_{j'}^{e'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}-\beta^2\int_{S_s}\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}}^{h}(\mathbf{x})\int_{S_{s'}}G(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\psi}_{j'}^{e'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}\right\}\right]\right]=$$

$$=\sum_{s=1}^{M}\int_{S_s}\mathbf{f}(\mathbf{x})\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}}^{h}(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

$$\sum_{s=1}^{M}\left[\sum_{s'=1}^{M}\left[\sum_{\bar{j}'=1}^{\bar{N}} c_{\bar{j}'}^{h'}\cdot\left\{\int_{S_s}\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{j}^{e}(\mathbf{x})\int_{S_{s'}}G(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla\cdot\right.\right.\right.$$

$$\left.\cdot\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}'}^{h'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}-\beta^2\int_{S_s}\boldsymbol{\psi}_{j}^{e}(\mathbf{x})\int_{S_{s'}}G(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\psi}_{\bar{j}'}^{h'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}\right\}+$$

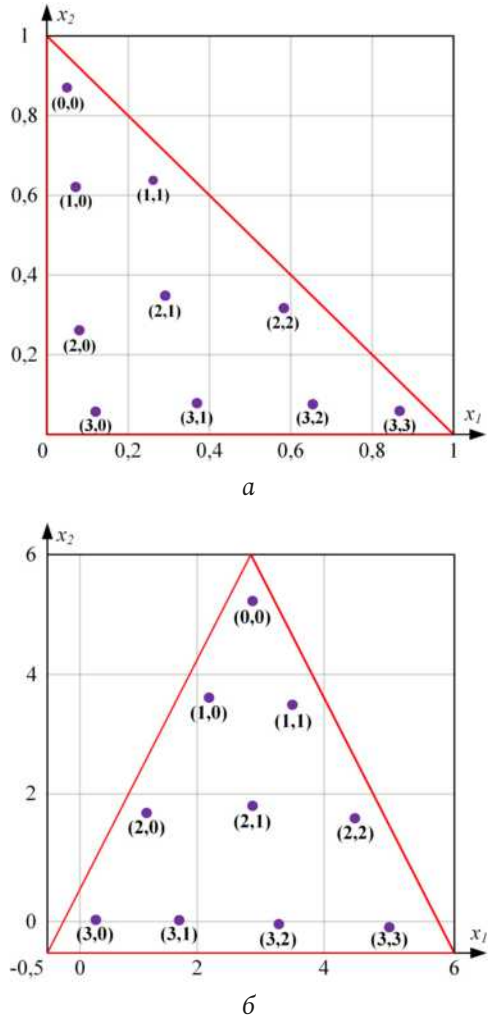



**Рис. 5.** Корни многочлена Дубинера – Курнвиндера при $n=4$. Нумерация корней $\mathbf{x}_{a,b}$ отображена в виде $(row,col)$, где $row$ – номер строки, $col$ – номер столбца: *а* – на единичном треугольнике; *б* – на произвольном треугольнике
**Fig. 5.** Roots of the Dubiner–Koornwinder polynomial at $n=4$. The numbering of the roots $\mathbf{x}_{a,b}$ is shown in the form $(row,col)$, where $row$ is the row number, $col$ is the column number: *a* – on a unit triangle; *b* – on an arbitrary triangle

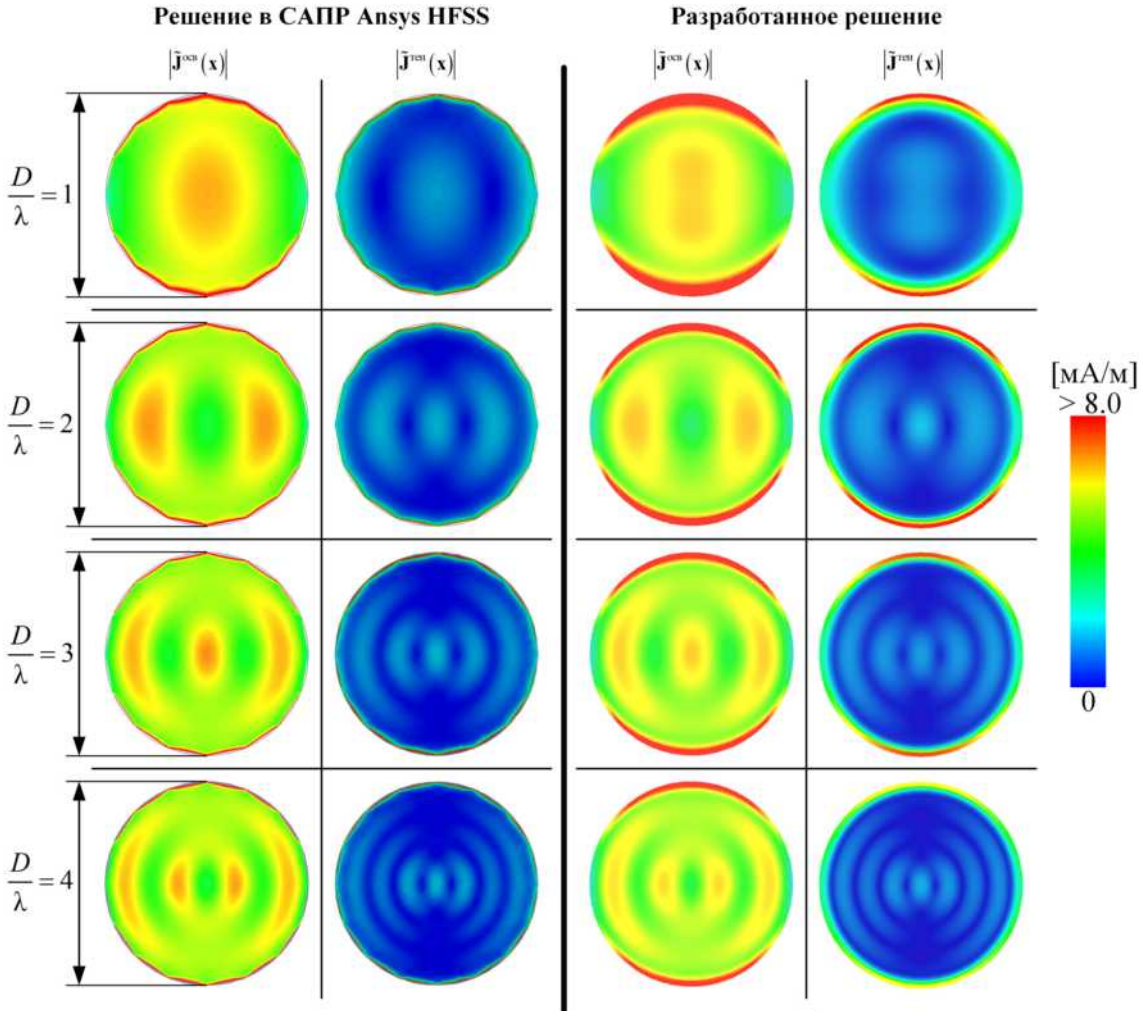
$$+\sum_{j'=1}^{N}c_{j'}^{e'}\cdot\left\{\int_{S_s}\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{j}^{e}(\mathbf{x})\int_{S_{s'}}G(\mathbf{x},\mathbf{y})\nabla\cdot\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot\boldsymbol{\psi}_{j'}^{e'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}-\beta^2\int_{S_s}\boldsymbol{\psi}_{j}^{e}(\mathbf{x})\int_{S_{s'}}G(\mathbf{x},\mathbf{y})\boldsymbol{\psi}_{j'}^{e'}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}\right\}\right]\right]=$$

$$=\sum_{s=1}^{M}\int_{S_s}\mathbf{f}(\mathbf{x})\boldsymbol{\psi}_{j}^{e}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Ввиду того что $\Omega\subset\mathbb{R}^2=(x_3=0)\subset\mathbb{R}^3$, $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_j^h(\mathbf{x})=0$ и $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{j'}^{h'}(\mathbf{x})=0$.

В качестве узлов численного интегрирования внутри каждого $S_s$ используются корни многочленов Дубинера – Курнвиндера [21]:




*а* *б*

**Рис. 6.** Сравнение $|\tilde{\mathbf{J}}^{осв}(\mathbf{x})|$ и $|\tilde{\mathbf{J}}^{тен}(\mathbf{x})|$ в САПР Ansys HFSS (*а*) и разработанного решениея (*б*) при различных соотношениях $D/\lambda$

**Fig. 6.** Comparison of $|\tilde{\mathbf{J}}^{осв}(\mathbf{x})|$ and $|\tilde{\mathbf{J}}^{тен}(\mathbf{x})|$ in Ansys HFSS CAD (*a*) and the developed solution (*b*) at different $D/\lambda$

$$Q_{n,k}(x_1,x_2)=P_{n-k}^{(2k+1,0)}(x_1)(1-x_1)^k P_k^{(0,0)}\left(\frac{x_2}{1-x_1}\right), \qquad (19)$$

где $n$ – максимальная степень многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$; $0\le k\le n$.

Координаты узлов интегрирования определим по правилу (рис. 5):

$$\mathbf{x}_{a,b}=\Big\{\big(x_1,x_2(1-x_1)\big): x_1=(X_1^{a,b})_b,$$

$$x_2=(X_2^{a,b})_{(n-b-a)};\quad a\in\overline{[0,n-1]};$$

$$b\in\overline{[0,a]};\quad a,b,n\in\mathbb{N}_0\Big\};$$

$$X_1^{a,b}=\Big\{x_s: J_{n-(a-b)}^{(2(a-b)+1,0)}(x_s)=0;$$

$$s\in\overline{(0,n-(a-b))};$$

$$x_0<x_1<\ldots<x_{n-(a-b)};\quad x_s\in\mathbb{R}\Big\};$$

$$X_2^{a,b}=\Big\{x_p: J_{n-b}^{(0,0)}(x_p)=0;\quad p\in\overline{(0,n-b)};$$

$$x_0<x_1<\ldots<x_{n-b};\quad x_p\in\mathbb{R}\Big\}.$$

В ходе вычисления (11) и (12) возникает ситуация, когда $s=s'$ и $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ при $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\to 0$ и $G(\mathbf{x},\mathbf{y})\to\infty$. Для исключения сингулярности в $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ при $s=s'$ интегрирование производится в полярной системе координат [22]. Обозначим $S_s=S_{s'}=T_s$, тогда в интегралах вида

$$G_{j_1,j_2}^1=\int_{T_s}\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{j_1}(\mathbf{x})\int_{T_s}\frac{e^{i\beta|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{j_2}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}; \qquad (20)$$

$$G_{j_1,j_2}^2=\int_{T_s}\boldsymbol{\psi}_{j_1}(\mathbf{x})\int_{T_s}\frac{e^{i\beta|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\boldsymbol{\psi}_{j_2}(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{x}$$

(где $j_1$, $j_2$ – порядковые номера базисных функций) преобразуем по $d\mathbf{y}$ в локальную относительно $T_s$ полярную систему координат $\mathbf{y}(\varphi,\rho)$ с центром в $\mathbf{x}$. В таком представлении (20) преобразуется:

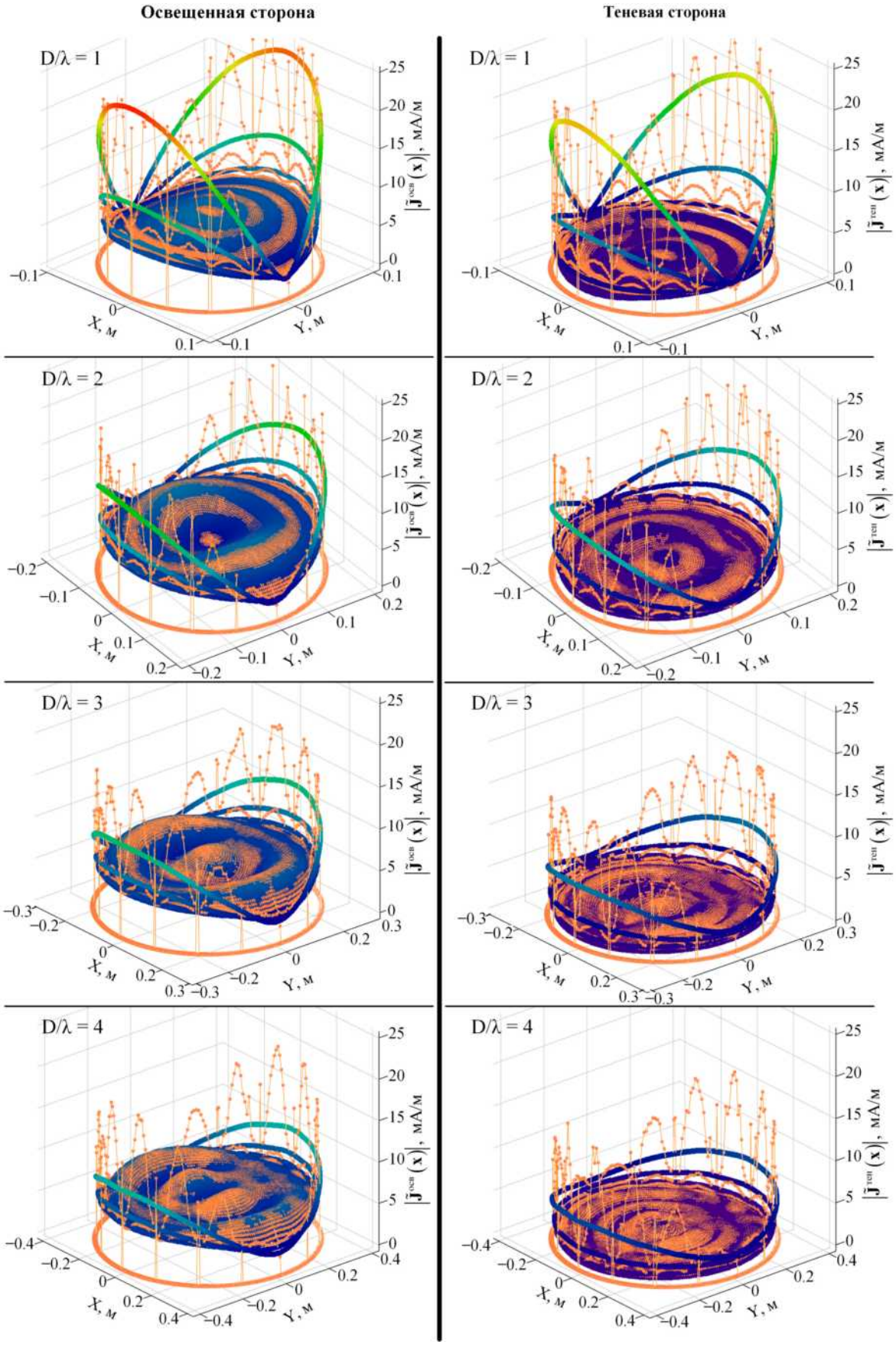



**Рис. 7.** Совмещение графиков $\left|\tilde{\mathbf{j}}^{\text{осв}}(\mathbf{x})\right|$ и $\left|\tilde{\mathbf{j}}^{\text{тен}}(\mathbf{x})\right|$ для различных соотношений $D/\lambda$. Оранжевый – САПР Ansoft HFSS, цветной – разработанное решение

**Fig. 7.** Matching plots $\left|\tilde{\mathbf{j}}^{\text{осв}}(\mathbf{x})\right|$ and $\left|\tilde{\mathbf{j}}^{\text{тен}}(\mathbf{x})\right|$ for different $D/\lambda$. Orange – Ansoft HFSS CAD, colored – developed solution

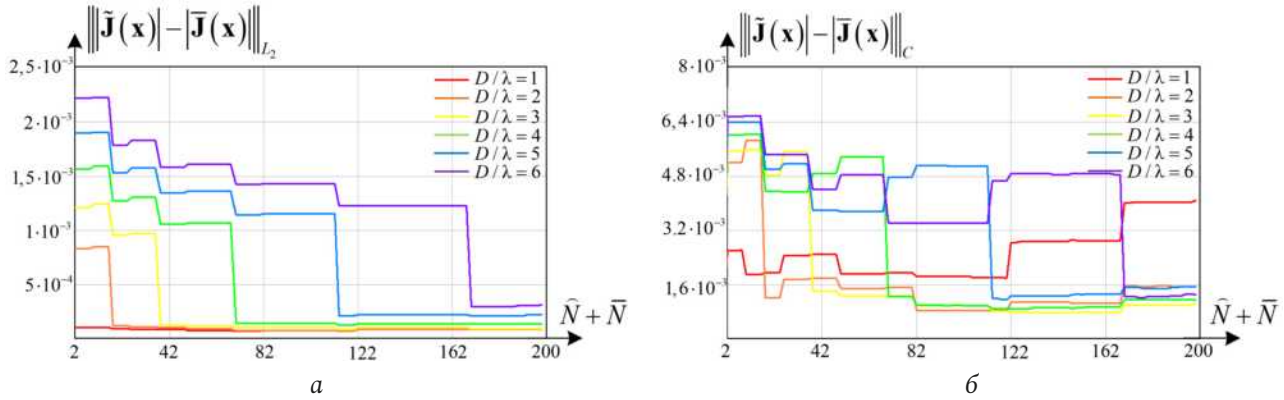



**Рис. 8.** Зависимость $\left\|\left|\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|-\left|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|\right\|_{L_2}$ (*а*) и $\left\|\left|\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|-\left|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|\right\|_{C}$ (*б*) от числа базисных функций

**Fig. 8.** Dependence of $\left\|\left|\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|-\left|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|\right\|_{L_2}$ (*a*) and $\left\|\left|\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|-\left|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|\right\|_{C}$ (*b*) on the number of basis functions

$$G^1_{j_1,j_2}=\int\limits_{T_s}\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_{j_1}(\mathbf{x})\cdot\sum_{q=0}^{2}\int\limits_{\varphi_q}^{\varphi_{q1}}\int\limits_{0}^{r_q(\varphi)}e^{i\beta\rho}\nabla\cdot$$

$$\cdot\boldsymbol{\psi}_{j_2}\left(y(\varphi,\rho)\right)d\rho d\varphi d\mathbf{x};$$

$$G^2_{j_1,j_2}=\int\limits_{T_s}\boldsymbol{\psi}_{j_1}(\mathbf{x})\cdot\sum_{q=0}^{2}\int\limits_{\varphi_q}^{\varphi_{q1}}\int\limits_{0}^{r_q(\varphi)}e^{i\beta\rho}\boldsymbol{\psi}_{j_2}\left(\mathbf{y}(\varphi,\rho)\right)d\rho d\varphi d\mathbf{x},$$

где $q$ – номер вершины $T_s$;

$$\varphi_m=\operatorname{arctg}\frac{x_2^q-x_2}{x_1^q-x_1};$$

$$\mathbf{y}(\rho,\varphi)=(\rho\cos\varphi+x_1,\rho\sin\varphi+x_2);$$

$$r_q(\varphi)=\frac{R'_q}{\cos(\varphi-\boldsymbol{\phi}_q)};\quad \boldsymbol{\phi}_q=\operatorname{arctg}\frac{x_2'^q-x_2}{x_1'^q-x_1};$$

$$\mathbf{x}'^q=\left(\frac{b_qd_q-a_qc_q}{(a_q)^2+(b_q)^2},\frac{-a_qd_q-b_qc_q}{(a_q)^2+(b_q)^2}\right)$$

– координаты пересечения $\triangle\mathbf{x}^q\mathbf{x}^{q_1}\mathbf{x}$ со стороной $(\mathbf{x}^q\mathbf{x}^{q_1})$;

$$a_q=x_2^{q_1}-x_2^q;\quad b_q=x_1^{q_1}-x_1^q;$$

$$c_q=x_1^{q_1}x_2^q-x_2^{q_1}x_1^q;\quad d_q=b_qx_1-a_qx_2;$$

$$q_1=(q+1)\bmod 3;\ R'_q=\left|\mathbf{x}'^l-\mathbf{x}\right|;\quad \mathbf{x}^q=(x_1^q,x_2^q)$$

– координаты вершин $T_s$.

Таким образом, указанные приемы позволяют минимизировать влияние ошибки численных методов расчета на получение итогового результата. Следует отметить, что точность получаемого решения значительно зависит от приближения границы многоугольника $S$ к $\partial\Omega$. С этой целью количество областей интегрирования необходимо увеличивать у границы $S$.

## 5. Результаты верификации сформированных решений

Для наглядной демонстрации предпочтительности сформированного решения выполним серию вычислительных экспериментов, которые предполагают получение плотности тока на освещенной и теневой сторонах диска для различных порядков аппроксимации полиномов и размеров диска, заданного соотношением $D/\lambda$, $\lambda$ – длина волны.

Эталонная модель, используемая для верификации полученных результатов, разработана в САПР ANSYS HFSS. Она имеет форму идеально проводящего цилиндра высотой 0,0001 м и радиусом $D$. В качестве источника ЭМП задана плоская монохроматическая волна с частотой 1,5 ГГц и фронтом, параллельным диску. Установки программы: режим моделирования: HFSS IE Solver; Maximum Number of Passes: 20; Maximum Residual Error: 0,0002. Сравнение полученных результатов для различных соотношений $D/\lambda=\{1,2,3,4\}$ $(\lambda=\text{const})$ приведены на рис. 6, 7.

Оценка апостериорной сходимости оценивалась относительно модуля

$$\left|\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|=\sqrt{\tilde{\mathbf{J}}_1(\mathbf{x})\cdot\overline{\tilde{\mathbf{J}}_1(\mathbf{x})}+\tilde{\mathbf{J}}_2(\mathbf{x})\cdot\overline{\tilde{\mathbf{J}}_2(\mathbf{x})}+\tilde{\mathbf{J}}_3(\mathbf{x})\cdot\overline{\tilde{\mathbf{J}}_3(\mathbf{x})}}$$

по нормам:

$$L_2:\ \left\|\left|\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|-\left|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|\right\|_{L_2}=\sqrt{\int\limits_{\Omega\setminus\delta\Omega}\left(\left|\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|-\left|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|\right)^2d\mathbf{x}},$$

$$C:\ \left\|\left|\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|-\left|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|\right\|_{C}=\max_{\mathbf{x}\in\Omega\setminus\delta\Omega}\left\|\left|\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|-\left|\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})\right|\right\|,$$

где $\delta\Omega:=\left\{x:\left|x-y\right|<\delta,y\in\partial\Omega\right\}$ при $\delta>0$.

В качестве эталона $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x})$ принято решение, сформированное в САПР Ansoft HFSS.

Из представленных на рис. 8 графических зависимостей следует, что не все базисные функции вносят одинаковый вклад в решение тестовой задачи. В этой связи на графиках наблюдаются «скачки» (рис. 8). Отдельные увеличения ошибки (особенно для малых $D/\lambda$) по норме $C$ при росте числа базисных функций связано с ошибочным нахождением в САПР Ansoft HFSS поверхностной плотности тока $\overline{\mathbf{J}}(\mathbf{x})$ вблизи $\partial\Omega$ (рис. 7). Также для улучшения сходимости при малых соотношениях $D/\lambda$ требуется дополнительная регуляризация СЛАУ. В реализованном алгоритме ее решение выполнено прямым методом.

В целом применение составленного алгоритмического решения при исследовании задачи дифракции на $\Omega$ и выделении $\mathbf{J}^{\text{осв}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{J}^{\text{тен}}(\mathbf{x})$ обеспечивает экспоненциальную сходимость по норме $L_2$ и полиномиальной по норме в $C$.

## Заключение

Полученные результаты позволяют сделать вывод о предпочтительном применении предложенной модификации функций Бесселя и Цернике при решении задачи дифракции на $\Omega$. Основное достоинство предлагаемой схемы состоит в разделении суммарной поверхностной плотности тока $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})$ на две составляющие: на освещенной $\tilde{\mathbf{J}}^{\text{осв}}(\mathbf{x})$ и теневой $\tilde{\mathbf{J}}^{\text{тен}}(\mathbf{x})$ сторонах $\Omega$. Применение векторных базисных функций $\boldsymbol{\psi}_j^e(\mathbf{x})$ и $\boldsymbol{\psi}_j^h(\mathbf{x})$, основанных на многочленах (9) и (10), удовлетворяющих граничным условиям (6) и (7), позволяет учесть влияние $\mathbf{E}^0$ на $\tilde{\mathbf{J}}_e(\mathbf{x})$ и $\tilde{\mathbf{J}}_h(\mathbf{x})$. В свою очередь, поле $\mathbf{H}^0$ формирует дополнительные поверхностные токи равной амплитуды, но разного направления с каждой из сторон $\Omega$, что в совокупности с принципом эквивалентности позволяет разделить $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})$ на $\tilde{\mathbf{J}}^{\text{осв}}(\mathbf{x})$ и $\tilde{\mathbf{J}}^{\text{тен}}(\mathbf{x})$.

Следует уточнить, что применение стандартных норм $L_2$ и $C$ при $\mathbf{x} \in \Omega$ для оценки сходимости в рассматриваемой задаче является некорректным, что обуславливается граничными условиями $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ вблизи $\partial\Omega$ при возникающей сингулярности [16]. В этой связи в нормах $L_2$ и $C$ для апостериорной оценки сходимости результатов численного решения выбрана модификация при $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \delta\Omega$. В последующих исследованиях для априорной оценки сходимости предполагается выбирать пространства Соболева [24].

Полученные результаты при применении метода конформных отображений [12] потенциально позволят обобщить полученные результаты на более сложные геометрические структуры, что и является направлением дальнейших исследований.

## Список литературы

1. Теория электромагнитного поля и распространение радиоволн / И.С. Полянский [и др.]. М.: Горячая линия – Телеком, 2023. 272 с.
2. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
3. Hongo K., Naqvi Q.A. Diffraction of electromagnetic wave by disk and circular hole in a perfectly conducting plane // Progress in Electromagnetics Research. 2007. Vol. 68. P. 113–150. DOI: http://dx.doi.org/10.2528/PIER06073102
4. Balanis C.A. Antenna Theory Analysis and Design. Hoboken: John Wiley & Sons, 1982. 1072 p.
5. Уфимцев П.Я. Теория дифракции краевых волн в электродинамике. Введение в физическую теорию дифракции. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 372 с.
6. Архипов Н.С., Полянский И.С., Сомов А.М. Анализ и структурно-параметрический синтез зеркальных антенн. М.: Горячая линия – Телеком, 2017. 226 с.
7. Kouyoumjian R.G., Pathak P.H. A uniform geometrical theory of diffraction of an edge in a perfectly conducting surface // Proceedings of the IEEE. 1974. Vol. 62, no. 11. P. 1448–1461. DOI: https://doi.org/10.1109/PROC.1974.9651
8. Моделирование и расчет элементов тракта и антенн радиорелейной и спутниковой связи в САПР Ansoft HFSS / А.М. Сомов [и др.]. М.: Горячая линия – Телеком, 2020. 264 с.
9. Kaye M., Murthy P., Thiele G. An iterative method for solving scattering problems // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1985. Vol. 33, no. 11. P. 1272–1279. DOI: https://doi.org/10.1109/TAP.1985.1143510
10. Murthy P., Hill K., Thiele G. A hybrid-iterative method for scattering problems // IEEE Trans. Antennas Propagation. 1986. Vol. 34, no. 10. P. 1173–1180. DOI: https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143738
11. Радыгин В.М., Полянский И.С. Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей // Вестник томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1 (39). С. 25–35. DOI: https://doi.org/10.17223/19988621/39/3
12. Полянский И.С., Логинов К.О. Приближенный метод решения задачи конформного отображения произвольного многоугольника на единичный круг // Вестник удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32, № 1. С. 107–129. DOI: https://doi.org/10.35634/vm220108
13. Электродинамический анализ зеркальных антенн в приближении барицентрического метода / И.С. Полянский [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 4. С. 36–47. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.36-47

14. Ильинский А.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. Решение задач дифракции электромагнитных волн на экранах произвольной формы барицентрическим методом // Прикладная математика и информатика. Труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. 2020. Т. 65. С. 15–30. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44726938

15. Полянский И.С. О применении барицентрического метода в численном решении внутренней задачи электродинамики // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21, № 3. С. 36–42. URL: https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7016

16. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). М.: ИПРЖР, 1996. 176 с.

17. Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения в теории зеркальных и полосковых антенн / А.Н. Дементьев [и др.]. М.: Радиотехника, 2015. 216 с.

18. Канторович Л., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа; 3-е изд. М.: Гостехиздат, 1950. 695 с.

19. Методы анализа волноводных линий передачи / Н.С. Архипов [и др.]. М.: Горячая линия – Телеком, 2017. 114 с.

20. О сведении уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца / М.Д. Малых [и др.] // Вестник Российского университета дружбы народов: Серия Математика, информатика, физика. 2018. Т. 26, № 1. С. 39–48. DOI: https://doi.org/10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48

21. Dubiner M. Spectral methods on triangles and other domains // Journal of Scientific Computing. 1991. Vol. 6, no. 4. P. 345–390. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01060030

22. Cai W., Yijun Y., Yuan X.C. Singularity treatment and high-order RWG basis functions for integral equations of electromagnetic scattering // International journal for numerical methods in engineering. 2001. Vol. 53, no. 1. P. 31–47. DOI: https://doi.org/10.1002/NME.390

23. Gibson W.C. The Method of Moments in Electromagnetics. New York: Chapman and Hall, 2014. 450 p. DOI: https://doi.org/10.1201/b17119

24. К вопросу сходимости барицентрического метода в решении задач дифракции на проводящих тонких экранах / А.С. Ильинский [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2020. Т. 23, № 3. С. 34–43. DOI: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.34-43

## Информация об авторе

**Кетух Дмитрий Константинович**, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации, г. Орел, Россия. Автор 10 научных публикаций.

*Область научных интересов*: радиотехника, антенные системы, вычислительная электродинамика, цифровая обработка сигналов.

*E-mail:* kdk_hcc@mail.ru

Physics of Wave Processes and Radio Systems
*2025, vol. 28, no. 1, pp. 76–87*

DOI 10.18469/1810-3189.2025.28.1.76-87
UDC 519.642:537.86
Original Research

*Received* 10 September 2024
*Accepted* 11 October 2024
*Published* 31 March 2025

# Computationally efficient solution for finding the current density on the illuminated and shadow sides of an infinitely thin circular disk

*Dmitry K. Ketukh*

Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation
35, Priborostroitelnaya Street,
Oryol, 302015, Russia

*Abstract* – **Background.** The article is devoted to the development of a computationally efficient numerical solution to the diffraction problem on an infinitely thin ideally conducting circular disk. The main attention is paid to the problem of finding the distribution of the surface current density on each side of the disk separately, which has remained undiscovered in other well-known studies. The **aim** of this paper is to eliminate this disadvantage by forming a computationally efficient algorithmic solution based on the method of moments and allowing numerically to set a smooth approximation of the surface current density on the illuminated and shadow sides of an infinitely thin ideally conducting circular disk. **Methods.** The solution is formed by the Galerkin method when determining the desired approximation of the surface current density on the disk. The solution is based on the formation of a smooth vector function given by the sum of global curl-free and curl basis functions relative to the disk. The corresponding basis functions are formed from the modifications of Bessel functions of the first kind and Zernike polynomials proposed in the paper. **Results.** The operability of the proposed solution is verified on test examples for a disk at different diameter-to-wavelength ratios. The comparison was made with the solution of a similar problem in the Ansoft HFSS

CAD system. **Conclusion.** The obtained results allow us to conclude that the proposed solution is preferable and are the basis for further generalization of the results to more complex geometric structures when using the conformal mapping method.

*Keywords* – infinitely thin disk; electromagnetic wave diffraction; surface current density; illuminated and shadow sides; method of moments; modified Zernike polynomials; modified Bessel functions.

kdk_hcc@mail.ru (*Dmitry K. Ketukh*)

© Dmitry K. Ketukh, 2025

## References

1. I. S. Polyansky et al., *Electromagnetic Field Theory and Radio Wave Distribution*. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2023. (In Russ.)
2. H. Henl, A. Maue, and K. Vestpfal, *Theory of Diffraction*. Moscow: Mir, 1964. (In Russ.)
3. K. Hongo and Q. A. Naqvi, "Diffraction of electromagnetic wave by disk and circular hole in a perfectly conducting plane," *Progress in Electromagnetics Research*, vol. 68, pp. 113–150, 2007, doi: http://dx.doi.org/10.2528/PIER06073102.
4. C. A. Balanis, *Antenna Theory Analysis and Design*. Hoboken: John Wiley & Sons, 1982.
5. P. Ya. Ufimtsev, *Theory of Boundary Wave Diffraction in Electrodynamics. Introduction to the Physical Theory of Diffraction*. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2012. (In Russ.)
6. N. S. Arkhipov, I. S. Polyansky, and A. M. Somov, *Analysis and Structural-Parametric Synthesis of Mirror Antennas*. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2017. (In Russ.)
7. R. G. Kouyoumjian and P. H. Pathak, "A uniform geometrical theory of diffraction of an edge in a perfectly conducting surface," *Proceedings of the IEEE*, vol. 62, no. 11, pp. 1448–1461, 1974, doi: https://doi.org/10.1109/PROC.1974.9651.
8. A. M. Somov et al., *Modeling and Calculation of Path Elements and Antennas of Radio Relay and Satellite Communications in CAD Ansoft HFSS*. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2020. (In Russ.)
9. M. Kaye, P. Murthy, and G. Thiele, "An iterative method for solving scattering problems," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 33, no. 11, pp. 1272–1279, 1985, doi: https://doi.org/10.1109/TAP.1985.1143510.
10. P. Murthy, K. Hill, and G. Thiele, "A hybrid-iterative method for scattering problems," *IEEE Trans. Antennas Propagation*, vol. 34, no. 10, pp. 1173–1180, 1986, doi: https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143738.
11. V. M. Radygin and I. S. Polyansky, "Modified method of successive conformal mappings of polygonal domains," *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, no. 1 (39), pp. 25–35, 2016, doi: https://doi.org/10.17223/19988621/39/3. (In Russ.)
12. I. S. Polyansky and K. O. Loginov, "Approximate method for solving the problem of conformal mapping of an arbitrary polygon to a unit circle," *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*, vol. 32, no. 1, pp. 107–129, 2022, doi: https://doi.org/10.35634/vm220108. (In Russ.)
13. I. S. Polyansky et al., "Electrodynamic analysis of mirror antennas in the approximation of the barycentric method," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 23, no. 4, pp. 36–47, 2020, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.4.36-47. (In Russ.)
14. A. S. Il'insky, I. S. Polyansky, and D. E. Stepanov, "Solving problems of electromagnetic wave diffraction on screens of arbitrary shape by the barycentric method," *Prikladnaya matematika i informatika. Trudy fakul'teta VMK MGU imeni M.V. Lomonosova*, vol. 65, pp. 15–30, 2020, url: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44726938. (In Russ.)
15. I. S. Polyansky, "About application the barycentric method in the numerical solution of internal problem of electrodynamics," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 21, no. 3, pp. 36–42, 2018, url: https://journals.ssau.ru/pwp/article/view/7016. (In Russ.)
16. A. S. Il'insky and Yu. G. Smirnov, *Diffraction of Electromagnetic Waves on Conducting Thin Screens (Pseudodifferential Operators in Diffraction Problems)*. Moscow: IPRZhR, 1996. (In Russ.)
17. A. N. Dement'ev et al., *Singular and Hypersingular Integral Equations in the Theory of Mirror and Strip Antennas*. Moscow: Radiotekhnika, 2015. (In Russ.)
18. L. Kantorovich and V. I. Krylov, *Approximate Methods of Higher Analysis*, 3rd ed. Moscow: Gostekhizdat, 1950. (In Russ.)
19. N. S. Arkhipov et al., M*ethods for Analyzing Waveguide Transmission Lines*. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2017. (In Russ.)
20. M. D. Malykh et al., "On the reduction of Maxwell's equations in waveguides to the system of coupled Helmholtz equations," *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov: Seriya Matematika, informatika, fizika*, vol. 26, no. 1, pp. 39–48, 2018, doi: https://doi.org/10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48. (In Russ.)
21. M. Dubiner, "Spectral methods on triangles and other domains," *Journal of Scientific Computing*, vol. 6, no. 4, pp. 345–390, 1991, doi: https://doi.org/10.1007/BF01060030.
22. W. Cai, Y. Yijun, and X. C. Yuan, "Singularity treatment and high-order RWG basis functions for integral equations of electromagnetic scattering," *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 53, no. 1, pp. 31–47, 2001, doi: https://doi.org/10.1002/NME.390.
23. W. C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*. New York: Chapman and Hall, 2014, doi: https://doi.org/10.1201/b17119.
24. A. S. Il'insky et al., "On the convergence the barycentric method in solving diffraction problems on conductive thin screens," *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 23, no. 3, pp. 34–43, 2020, doi: https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.3.34-43. (In Russ.)

## Information about the Author

**Dmitry K. Ketukh**, member of the Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation, Oryol, Russia. Author of 10 scientific publications.

*Research interests*: radio engineering, antenna systems, computational electrodynamics, digital signal processing.

*E-mail*: kdk_hcc@mail.ru