


Тепловое перепутывание в двухатомной модели Тависса – Каммингса с учетом диполь-дипольного взаимодействия

Е.К. Башкиров 

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
443086, Россия, г. Самара,
Московское шоссе, 34

Аннотация – Обоснование. Интерес к изучению перепутанных состояний систем естественных и искусственных атомов (кубитов), взаимодействующих с выделенными модами микроволновых резонаторов, связан с их использованием в качестве логических элементов квантовых компьютеров. При этом важнейшей задачей физики квантовых вычислений является выбор наиболее эффективных механизмов контроля и управления перепутанными состояниями кубитов в таких устройствах. **Цель.** В работе исследована динамика перепутывания двух дипольно-связанных сверхпроводящих джозефсоновских кубитов, индуцированного тепловым шумом копланарного резонатора, для различных начальных состояний кубитов. **Методы.** На основе точного решения квантового уравнения Лиувилля для полной матрицы плотности рассматриваемой системы найдено временное поведение параметра перепутывания кубитов (отрицательности) для хаотических тепловых, чистых сепарабельных и перепутанных начальных состояний кубитов. **Результаты.** Показано, что перепутывание кубитов, индуцированное тепловым шумом резонатора, возможно как для хаотического теплового состояния, так и сепарабельных состояний кубитов, за исключением случая, когда оба кубита возбуждены. Установлено также, что для малых значений параметра диполь-дипольного взаимодействия учет такого взаимодействия приводит к увеличению степени перепутывания. Для значений параметра диполь-дипольного взаимодействия, больших некоторого предельного значения, имеет место обратный эффект. Найдено, что для перепутанных начальных состояний кубитов включение прямого взаимодействия слабо влияет на динамику перепутывания. Показано, что начальная когерентность состояний кубитов может приводить к существенному увеличению степени их перепутывания при наличии диполь-дипольного взаимодействия. **Заключение.** Диполь-дипольное взаимодействие может выступать в качестве эффективного механизма контроля и управления перепутыванием кубитов.

Ключевые слова – сверхпроводящие кубиты; копланарный резонатор; тепловое поле; диполь-дипольное взаимодействие; перепутывание; отрицательность.

Введение

В настоящее время изучение перепутанных состояний является одной из наиболее актуальных задач квантовой теории в связи с широкими возможными применениями таких состояний в квантовой информатике, квантовой телепортации, квантовой криптографии и квантовом плотном кодировании [1–3]. В качестве одного из способов генерации атомных перепутанных состояний используется взаимодействие естественных и искусственных атомов (примесных спинов, сверхпроводящих джозефсоновских колец, квантовых точек и др.) с квантовыми электромагнитными полями резонаторов [4]. При этом особое внимание в последнее время уделялось изучению возможности перепутывания атомов за счет взаимодействия с тепловым электромагнитным полем. Обычно считалось, что тепловое состояние поля содержит минимальную информацию о системе и может определяться как «хаотичное». При этом многомодовые тепловые поля часто применялись

для анализа декогеренции квантовых атомных систем. Однако Ким с соавторами [5] показали, что такое тепловое некоррелированное поле может перепутывать атомы в резонаторе. Они изучали эволюцию двух идентичных двухуровневых атомов, резонансно взаимодействующих с одномодовым тепловым полем в резонаторе без потерь, и вычислили параметр перепутывания атомов как функцию времени. При этом было показано, что степень перепутывания атомов существенно зависит от их начального состояния. С одной стороны, если один атом изначально находится в основном состоянии, а другой – в возбужденном состоянии, то тепловое поле может привести к заметной степени атом-атомного перепутывания. С другой стороны, если оба атома изначально находятся в возбужденных состояниях, то в резонансном приближении перепутывание атомов невозможно. Аналогичный эффект имеет место и для двухатомной модели с многофотонными переходами [6; 7]. Занг [8] обобщил работу Кима с соавторами [5] на случай, когда частоты перехода в атомах

слегка отстроены от частоты моды теплового поля резонатора, и изучил, как такая расстройка влияет на запутывание атомов. При этом было показано, что при подходящем выборе расстройки для начального состояния атомной системы, в котором один атом находится в возбужденном состоянии, а другой – в основном состоянии, перепутывание атомов может приближаться к максимальному значению. Кроме того, выявлено, что значительное перепутывание атомов может быть достигнуто даже тогда, когда оба атома изначально находятся в возбужденных состояниях.

Как хорошо известно, диполь-дипольное взаимодействие атомных систем является естественным механизмом возникновения атомного перепутывания. Наличие диполь-дипольного взаимодействия атомов, в частности, может привести к значительному увеличению степени перепутывания двух атомов, взаимодействующих с модой теплового поля в идеальном резонаторе как посредством однофотонных переходов [9], так и двухфотонных вырожденных [13] и невырожденных переходов [10; 11]. Заметим также, что для искусственных атомов диполь-дипольное взаимодействие может быть значительно больше, чем для обычных атомов и ионов. Например, для сверхпроводящих джозефсоновских кубитов эффективная константа диполь-дипольного (индуктивного взаимодействия сверхпроводящих кубитов) может существенно превосходить не только константу кубит-фотонного взаимодействия, но и исходную энергию перехода между уровнями самого кубита [12; 13]. Представляет интерес рассмотреть влияние диполь-дипольного взаимодействия кубитов на максимальную степень их перепутывания, индуцированного тепловым полем резонатора, для их различных начальных состояний. При изучении точной динамики кубитов в резонаторе (см. ссылки в [14–17]) авторы, с одной стороны, использовали различные методы решения квантового временного уравнения Шредингера для полной волновой функции или квантового уравнения Лиувилля для полной матрицы плотности в зависимости от выбора начальных состояний кубитов и поля резонатора. С другой стороны, для резонансной двухкубитовой модели с однофотонными переходами и прямым диполь-дипольным взаимодействием кубитов найдено точное решение уравнения для оператора эволюции [9]. При этом авторы указанной работы использовали найденное точное решение для оператора эволюции при вычисления параметра перепутывания куби-

тов, индуцированного тепловым полем резонатора, для простейшего случая, когда один из кубитов приготовлен в возбужденном, а другой – в основном состоянии.

В настоящей работе нами исследовано влияние диполь-дипольного взаимодействия кубитов на динамику их перепутывания в двухкубитной резонансной однофотонной модели, индуцированного тепловым полем резонатора, для различных начальных состояний кубитов: перепутанных состояний Белловского типа, тепловых и когерентных.

1. Модель и ее точное решение

Рассмотрим два идентичных сверхпроводящих кубита A и B , которые резонансно взаимодействуют с общим квантовым одномодовым электромагнитным полем идеального микроволнового копланарного резонатора. Будем учитывать прямое диполь-дипольное взаимодействие кубитов, принимая во внимание, что для сверхпроводящих кубитов константа такого взаимодействия может существенно превосходить константу кубит-полевого взаимодействия. Тогда гамильтониан взаимодействия системы в приближении вращающейся волны можно представить в виде

$$H = \hbar g \sum_{i=A,B} (\sigma_i^+ a + a^+ \sigma_i^-) + \hbar J (\sigma_A^+ \sigma_B^- + \sigma_A^- \sigma_B^+). \quad (1)$$

Здесь σ_1^z и σ_2^z – операторы инверсии для кубитов A и B соответственно; $\sigma_i^+ = |+\rangle_i \langle -|_i$ и $\sigma_i^- = |-\rangle_i \langle +|_i$ – операторы переходов между возбужденным $|+\rangle_i$ и основным $|-\rangle_i$ состояниями в i -м кубите ($i = A, B$); a^+ и a – операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды поля; g – константа взаимодействия между кубитом и полем; J – константа прямого диполь-дипольного взаимодействия кубитов.

Предположим, что резонаторное поле находится в начальный момент времени в одномодовом состоянии с матрицей плотности

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|, \quad (2)$$

где весовые коэффициенты $p_n = \bar{n}^n / (1 + \bar{n})^{n+1}$. Здесь \bar{n} – среднее число тепловых фотонов в резонаторе $\bar{n} = (\exp[\hbar\omega_i / k_B T] - 1)^{-1}$, где k_B – постоянная Больцмана и T – равновесная температура резонатора.

В качестве начального состояния кубитов выберем:

а) чистое сепарабельное когерентное состояние вида

$$|\Psi(0)\rangle_{AB} = |\Psi(0)\rangle_A \otimes |\Psi(0)\rangle_B, \quad (3)$$

$$|\Psi(0)\rangle_A = \cos\theta_A |+\rangle_A + \sin\theta_A |-\rangle_A,$$

$$|\Psi(0)\rangle_B = \cos\theta_B |+\rangle_B + \sin\theta_B |-\rangle_B,$$

где θ_i – параметры, определяющие начальную когерентность состояния i -кубита;

б) смешанное состояние с матрицей плотности вида

$$\rho(0)_{AB} = \prod_{i=A,B} \lambda |+\rangle_{ii}\langle+| + (1-\lambda) |-\rangle_{ii}\langle-|, \quad (4)$$

где $\frac{\lambda}{1-\lambda} = \exp[\hbar\omega_0/k_B T]$ и ω_0 – резонансная частота перехода между первым возбужденным и основным состоянием кубита;

в) перепутанное состояние Белловского типа

$$|\Psi(0)\rangle_{AB} = \cos\theta |+, -\rangle + \sin\theta |-, +\rangle, \quad (5)$$

$$|\Psi(0)\rangle_{AB} = \cos\theta |+, +\rangle + \sin\theta |-, -\rangle, \quad (6)$$

где θ – параметр, определяющий начальную степень перепутывания кубитов.

Зависящая от времени матрица плотности изучаемой системы может быть найдена при решении квантового уравнения Лиувилля

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] \quad (7)$$

с начальным условием

$$\rho(0) = \rho_{AB}(0) \otimes \rho_F(0).$$

В случае чистых начальных состояний кубитов

$$\rho_{AB}(0) = |\Psi(0)\rangle_{AB} \langle\Psi(0)|.$$

Представим формальное решение уравнения (7) в виде

$$\rho(t) = U^+(t)\rho(0)U(t),$$

где оператор эволюции системы с гамильтонианом (1) в базисе

$$|-, -\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |+, +\rangle$$

имеет вид [12]

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$U_{11} = 1 + 2a \frac{A}{\lambda} a^+, \quad U_{14} = 2a \frac{A}{\lambda} a,$$

$$U_{41} = 2a^+ \frac{A}{\lambda} a^+, \quad U_{44} = 1 + 2a^+ \frac{A}{\lambda} a,$$

$$U_{12} = U_{13} = a \frac{B}{\theta}, \quad U_{21} = U_{31} = \frac{B}{\theta} a^+,$$

$$U_{24} = U_{34} = \frac{B}{\theta} a, \quad U_{42} = U_{43} = a^+ \frac{B}{\theta},$$

$$U_{22} = U_{33} = \frac{\exp\left[-i \frac{g}{2} (\alpha + \theta)t\right]}{4\theta} \times$$

$$\times \left\{ [1 - \exp(ig\theta t)]\alpha + 2\theta \exp\left(i \frac{g}{2} (3\alpha + \theta)t\right) + \theta [1 + \exp(ig\theta t)] \right\},$$

$$U_{23} = U_{32} = \frac{\exp\left[-i \frac{g}{2} (\alpha + \theta)t\right]}{4\theta} \times$$

$$\times \left\{ [1 - \exp(ig\theta t)]\alpha - 2\theta \exp\left(i \frac{g}{2} (3\alpha + \theta)t\right) + \theta [1 + \exp(ig\theta t)] \right\},$$

$$A = \exp\left[-i \frac{g\alpha}{2} t\right] \left\{ \cos\left(\frac{g\theta}{2} t\right) + i \frac{\alpha}{\theta} \sin\left(\frac{g\theta}{2} t\right) \right\} - 1,$$

$$B = \exp\left[-i \frac{g}{2} (\alpha + \theta)t\right] [1 - \exp(ig\theta t)],$$

$$\alpha = \frac{J}{g}, \quad \lambda = 2(aa^+ + a^+a), \quad \theta = \sqrt{8(aa^+ + a^+a) + \alpha^2}.$$

Имея оператор эволюции (8), мы можем найти явный вид временной матрицы плотности рассматриваемой системы для любых начальных состояний кубитов. В настоящей работе мы используем точное решение квантового уравнения Лиувилля для исследования временной динамики перепутывания кубитов. В настоящее время строгие критерии перепутывания получены в квантовой информатике для двухкубитных систем. Одним из таких критериев является критерий Переса – Хородецких или отрицательность [18; 19]. В настоящей работе для количественной оценки степени перепутывания кубитов мы будем использовать отрицательность в форме

$$\varepsilon = -2 \sum \mu_i^-, \quad (9)$$

где μ_i^- – отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы плотности $\rho_{AB}^T(t)$. Двухкубитная редуцированная матрица плотности может быть найдена путем усреднения полной матрицы плотности системы по переменным поля

$$\rho_{AB}(t) = \text{Tr}_F \rho(t).$$

Используя явный вид оператора эволюции после достаточно громоздких вычислений для редуцированной матрицы плотности кубитов полу-

чаем в двухкубитном базисе $|-, -\rangle$, $|+, -\rangle$, $|-, +\rangle$, $|+, +\rangle$

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{12}(t) & \rho_{13}(t) & \rho_{14}(t) \\ \rho_{12}^*(t) & \rho_{22}(t) & \rho_{23}(t) & \rho_{24}(t) \\ \rho_{13}^*(t) & \rho_{23}^*(t) & \rho_{33}(t) & \rho_{34}(t) \\ \rho_{14}^*(t) & \rho_{24}^*(t) & \rho_{34}^*(t) & \rho_{44}(t) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\rho_{11}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\rho_{11} (1 + 2(n+1)Q_{n+1}(t)) + (\rho_{11} + \rho_{23} + \rho_{32} + \rho_{33}) |S_n|^2 n + \rho_{44} 4(n-1)Q_{n-1}(t) \right],$$

$$\rho_{12}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left[(\rho_{24} + \rho_{24}^*) S_n(t) S_{n-1}^*(t) n + (\rho_{12} U_{22,n}^* + \rho_{13} U_{23,n}^*) (1 + 2(n+1)Q_{n+1}(t)) \right],$$

$$\rho_{12}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left[(\rho_{24} + \rho_{24}^*) S_n(t) S_{n-1}^*(t) n + (\rho_{12} U_{23,n}^* + \rho_{13} U_{22,n}^*) (1 + 2(n+1)Q_{n+1}(t)) \right],$$

$$\rho_{12}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \rho_{14} (1 + 2(n+1)Q_{n+1}(t)) (1 + 2nQ_{n-1}(t)),$$

$$\rho_{22}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left[\rho_{11} (n+1) |S_{n+1}(t)|^2 + \rho_{44} n |S_{n-1}(t)|^2 + \rho_{22} |U_{22,n}|^2 \right] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} p_n [\rho_{23} U_{22,n} U_{23,n}^* + \rho_{23}^* U_{23,n} U_{22,n}^* + \rho_{33} |U_{23,n}|^2],$$

$$\rho_{33}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\rho_{11} (n+1) |S_{n+1}(t)|^2 + \rho_{44} n |S_{n-1}(t)|^2 \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} p_n [\rho_{22} |U_{23,n}|^2 + \rho_{23} U_{23,n} U_{22,n}^* + \rho_{23}^* U_{22,n} U_{23,n}^* + \rho_{33} |U_{22,n}|^2],$$

$$\rho_{33}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[\rho_{11} (n+1) |S_{n+1}(t)|^2 + \rho_{44} n |S_{n-1}(t)|^2 \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} p_n [\rho_{22} |U_{23,n}|^2 + \rho_{23} U_{23,n} U_{22,n}^* + \rho_{23}^* U_{22,n} U_{23,n}^* + \rho_{33} |U_{22,n}|^2],$$

$$\rho_{24}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[(\rho_{24} U_{22,n} + \rho_{34} U_{23,n}) (2nQ_{n-1}(t) + 1) + (\rho_{12} + \rho_{13})(n+1) S_{n+1}(t) S_{n-1}^*(t) \right],$$

$$\rho_{24}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left[(\rho_{34} U_{22,n} + \rho_{24} U_{23,n}) (2nS_{n-1}(t) + 1) + (\rho_{12} + \rho_{13})(n+1) S_{n+1}(t) S_{n-1}^*(t) \right],$$

$$\rho_{44}(t) = 1 - \rho_{11}(t) - \rho_{22}(t) - \rho_{33}(t).$$

Здесь

$$U_{23,n}(t) = \frac{\text{Exp} \left[-i \frac{(\alpha + \theta_n)}{2} t \right]}{4\theta_n} \left((1 - \text{Exp}[i\theta_n t]) \alpha - 2\theta_n \text{Exp} \left[i \frac{(3\alpha + \theta_n)}{2} t \right] + \theta_n (1 + \text{Exp}[i\theta_n t]) \right),$$

$$U_{22,n} = \frac{\text{Exp} \left[-i \frac{(\alpha + \theta_n)}{2} t \right]}{4\theta_n} \left((1 - \text{Exp}[i\theta_n t]) \alpha + 2\theta_n \text{Exp} \left[i \frac{(3\alpha + \theta_n)}{2} t \right] + \theta_n (1 + \text{Exp}[i\theta_n t]) \right),$$

$$Q_n = \frac{A_n}{\lambda_n}, \quad S_n = \frac{B_n}{\theta_n},$$

$$A_n = \exp \left[-i \frac{g\alpha}{2} t \right] \left\{ \cos \left(\frac{g\theta_n}{2} t \right) + i \frac{\alpha}{\theta_n} \sin \left(\frac{g\theta_n}{2} t \right) \right\} - 1,$$

$$B_n = \exp \left[-i \frac{g}{2} (\alpha + \theta_n) t \right] [1 - \exp(ig\theta_n t)],$$

$$\lambda_n = 2(2n+1), \quad \theta_n = \sqrt{8(2n+1) + \alpha^2}.$$

Начальные значения элементов двухкубитной матрицы плотности для когерентного начального состояния кубитов (3), теплового состояния (4) и перепутанных состояний (5) и (6) равны, соответственно

$$\rho_{11} = \sin \theta_A \sin \theta_B, \quad \rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0,$$

$$\rho_{44}(0) = \cos \theta_A \cos \theta_B, \quad \rho_{23}(0) = \cos \theta_A \sin \theta_B,$$

$$\rho_{32}(0) = \cos \theta \sin \theta, \quad \rho_{33}(0) = \sin^2 \theta;$$

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0,$$

$$\rho_{11} = \lambda^2, \quad \rho_{22} = \rho_{33} = \lambda(1-\lambda), \quad \rho_{44} = (1-\lambda)^2;$$

$$\rho_{11} = \rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0,$$

$$\rho_{22}(0) = \cos^2 \theta, \quad \rho_{23}(0) = \cos \theta \sin \theta,$$

$$\rho_{32}(0) = \cos \theta \sin \theta, \quad \rho_{33}(0) = \sin^2 \theta$$

и

$$\rho_{11}(0) = \sin^2 \theta, \quad \rho_{44}(0) = \cos^2 \theta, \quad \rho_{23}(0) = \cos \theta \sin \theta,$$

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{22} = \rho_{24} = \rho_{33} = \rho_{34} = 0.$$

Частично транспонированная по переменным одного кубита двухкубитная матрица для (10) имеет вид

$$\rho_A^T(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{23}^* \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} & \rho_{14} & \rho_{24} \\ \rho_{13}^* & \rho_{14} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{34} & \rho_{34} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

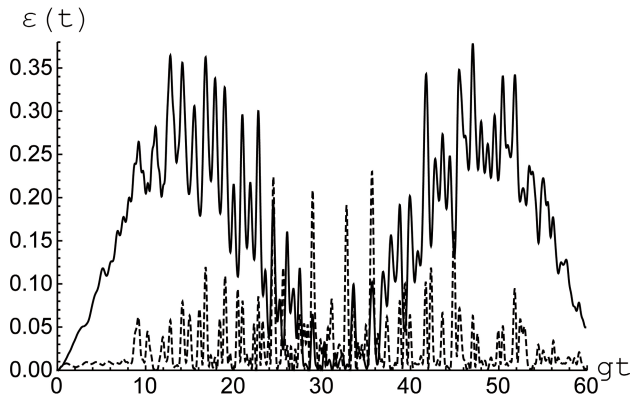


Рис. 1. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для когерентного состояния (3) с $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = -\pi/4$ (сплошная линия) и некогерентного состояния $|+, -\rangle$ (штриховая линия). Параметр диполь-дипольного взаимодействия $\alpha = 0,1$. Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 10$

Fig. 1. Negativity as a function of dimensionless time gt for the coherent state (3) with $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = -\pi/4$ (solid line) and the incoherent state $|+, -\rangle$ (dashed line). Dipole-dipole communication parameter $\alpha = 0,1$. Average number of thermal photons $\bar{n} = 10$

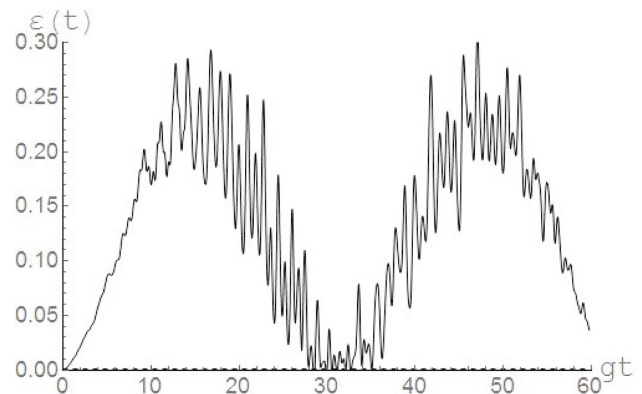


Рис. 2. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для когерентного состояния (3) с $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = -\pi/4$ (сплошная линия) и некогерентного состояния $|+, -\rangle$ (штриховая линия). Параметр диполь-дипольного взаимодействия $\alpha = 0,1$. Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 20$

Fig. 2. Negativity as a function of dimensionless time gt for the coherent state (3) with $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = -\pi/4$ (solid line) and incoherent state $|+, -\rangle$ (dashed line). Dipole-dipole communication parameter $\alpha = 0,1$. Average number of thermal photons $\bar{n} = 20$

Нами найдены явные выражения для собственных значений частично транспонированной по переменным одного кубита матрицы (11). В настоящей работе указанные выражения не приведены ввиду их чрезвычайно громоздкого вида. При этом все четыре собственных значения могут принимать отрицательные значения и, соответственно, должны быть учтены в сумме (9). Результаты компьютерного моделирования параметра отрицательности показаны на рис. 1–6.

2. Результаты и обсуждение

На рис. 1 показана отрицательность как функция безразмерного времени gt для когерентного начального состояния (3) с $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = -\pi/4$ и некогерентного начального состояния кубитов вида $|+, -\rangle$. Параметр диполь-дипольного взаимодействия кубитов выбран равным $\alpha = 0,1$. Среднее число фотонов $\bar{n} = 10$. Из рис. 1 хорошо видно, что начальная когерентность кубитов приводит к существенному увеличению степени перепутывания кубитов, индуцированного тепловым полем резонатора в сравнении с начальными состояниями без когерентности. На рис. 2 показана отрицательность как функция безразмерного времени для когерентного начального состояния (3) с $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = -\pi/4$ и некогерентного начального состояния кубитов вида $|+, -\rangle$. Параметр диполь-дипольного взаимодействия кубитов выбран равным $\alpha = 0,1$. Среднее число фотонов $\bar{n} = 20$. Из рис. 1 и 2 видно, что при увеличении интен-

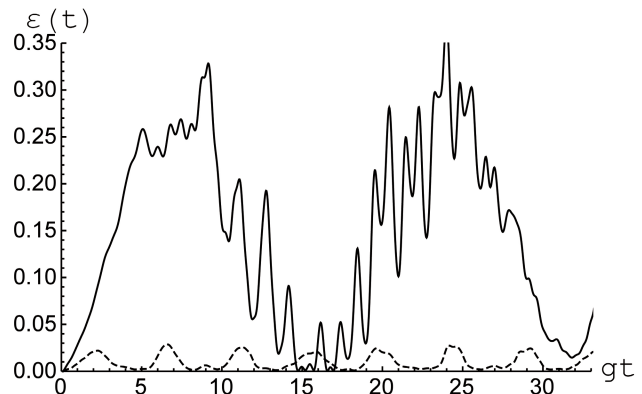


Рис. 3. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для когерентного состояния (3) с $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = -\pi/4$. Параметр диполь-дипольного взаимодействия $\alpha = 0$ (штриховая линия) и $\alpha = 0,2$ (сплошная линия). Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 10$

Fig. 3. Negativity as a function of dimensionless time gt for the coherent state (3) with $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = -\pi/4$. The dipole-dipole interaction parameter $\alpha = 0$ (dashed line) and $\alpha = 0,2$ (solid line). Average number of thermal photons $\bar{n} = 10$

сивности теплового поля максимальная степень перепутывания кубитов уменьшается значительно сильнее для некогерентных начальных состояний.

На рис. 3 показана отрицательность как функция безразмерного времени для когерентного начального состояния (3) с $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = -\pi/4$ в отсутствие диполь-дипольного взаимодействия кубитов (штриховая линия) и в присутствии такого взаимодействия в случае $\alpha = 0,1$ (сплошная линия). Среднее число фотонов $\bar{n} = 10$. Из рис. 3 следует, что резкое увеличение степени перепутывания кубитов в случае начального когерентного

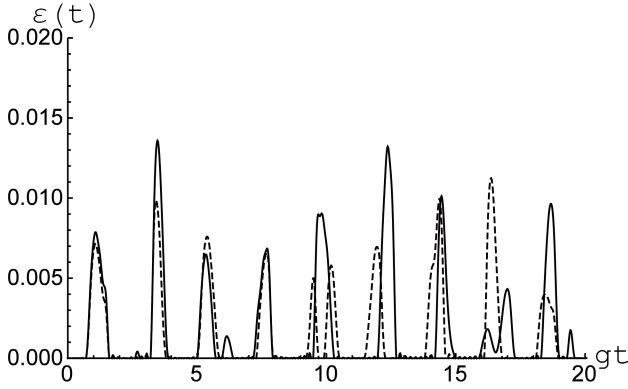


Рис. 4. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для смешанного состояния кубитов (4) с $\lambda=0,005$. Параметр диполь-дипольного взаимодействия $\alpha=0$ (сплошная линия) и $\alpha=0,5$ (штриховая линия). Среднее число тепловых фотонов $\bar{n}=0,5$

Fig. 4. Negativity as a function of dimensionless time gt for the mixed state of qubits (4) with $\lambda=0,005$. Dipole-dipole interaction parameter $\alpha=0$ (solid line) and $\alpha=0,5$ (dashed line). Average number of thermal photons $\bar{n}=0,5$

состояния имеет место только при наличии диполь-дипольного взаимодействия кубитов. Таким образом, одновременное использование начальной когерентности состояний кубитов и диполь-дипольного взаимодействия может быть применено для эффективного управления и контроля за степенью их перепутывания. Такой эффект может быть использован при реализации эффективных схем применения перепутанных состояний в физике квантовых вычислений. На рис. 4 показана отрицательность как функция безразмерного времени для хаотичного теплового начального распределения кубитов по уровню энергии (4) с $\lambda=0,005$. Интересно заметить, что даже для хаотичного начального состояния кубитов хаотичное тепловое поле резонатора может индуцировать перепутывание кубитов. Максимальная степень перепутывания кубитов для такого состояния имеет место для $\lambda=0$ (т. е. для состояния $|-, -\rangle$). При этом, как видно из рис. 4, включение диполь-дипольного взаимодействия приводит к увеличению максимальной степени перепутывания кубитов. Для состояний с $\lambda>0,01$ перепутывания кубитов в ходе их эволюции в тепловом резонаторе не возникает. На рис. 5 и 6 показана отрицательность как функция безразмерного времени для белловских перепутанных состояний кубитов (5) и (6) соответственно при выборе в обоих случаях $\theta=\pi/4$. Штриховая линия на рис. 5 и 6 соответствует модели без диполь-дипольного взаимодействия кубитов, сплошная линия – модели с дипольно-связанными кубитами в случае $\alpha=1$. Среднее число фотонов $\bar{n}=1$. Из этих рисунков

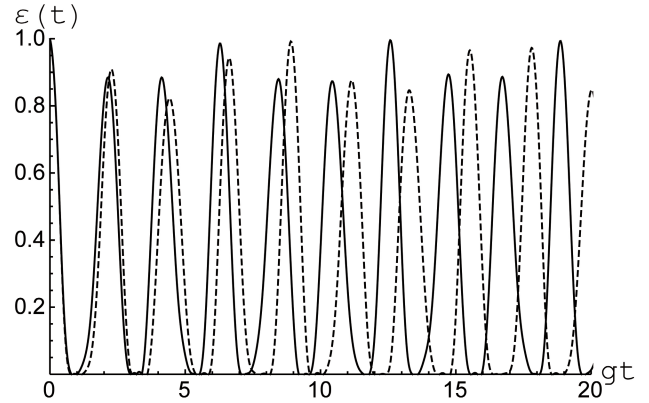


Рис. 5. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для белловского перепутанного (5) с $\theta=\pi/4$. Параметр диполь-дипольного взаимодействия $\alpha=0$ (штриховая линия) и $\alpha=1$ (сплошная линия). Среднее число тепловых фотонов $\bar{n}=1$

Fig. 5. Negativity as a function of dimensionless time gt for Bell entangled (5) with $\theta=\pi/4$. Dipole-dipole interaction parameter $\alpha=0$ (dashed line) and $\alpha=1$ (solid line). Average number of thermal photons $\bar{n}=1$

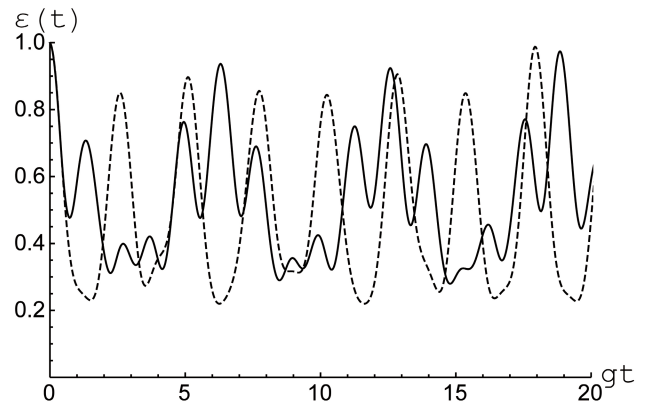


Рис. 6. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для белловского перепутанного (6) с $\theta=\pi/4$. Параметр диполь-дипольного взаимодействия $\alpha=0$ (штриховая линия) и $\alpha=1$ (сплошная линия). Среднее число тепловых фотонов $\bar{n}=1$

Fig. 6. Negativity as a function of dimensionless time gt for Bell entangled (6) with $\theta=\pi/4$. Dipole-dipole interaction parameter $\alpha=0$ (dashed line) and $\alpha=1$ (solid line). Average number of thermal photons $\bar{n}=1$

хорошо видно, что в случае начальных перепутанных состояний кубитов, включение диполь-дипольного взаимодействия практически не влияет ни на характер поведения отрицательности, ни на максимальные значения степени перепутывания кубитов.

Заключение

В настоящей работе нами найдено точное решение квантового уравнения эволюции системы двух дипольно-связанных сверхпроводящих кубитов, взаимодействующих с модой квантового теплового электромагнитного поля идеального резонатора для когерентных, хаотических и перепутанных

начальных состояний кубитов Белловского типа. На основе точного решения уравнения эволюции удалось вычислить в аналитическом виде параметр перепутывания кубитов (отрицательность). Результаты компьютерного моделирования отрицательности для начального когерентного состояния кубитов показывают, что при анализе диполь-дипольного взаимодействия учет начальной когерентности состояний кубитов приводит к существенному возрастанию максимальной степени их перепутывания. Выявлено также, что тепловое

поле резонатора индуцирует перепутывание кубитов даже в случае их хаотического начального состояния. При этом показано, что указанные эффекты могут быть использованы для эффективного контроля за степенью перепутанности кубитов, необходимого при квантовой обработке информации. В случае начальных перепутанных состояний кубитов включение диполь-дипольного взаимодействия существенно не влияет на перепутывание кубитов.

Список литературы

1. Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // *Rep. Prog. Phys.* 2011. Vol. 74, no. 10. P. 104401. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>
2. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems / Z.-L. Xiang [et al.] // *Rev. Mod. Phys.* 2013. Vol. 85 (2). P. 623–653. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>
3. Georgescu I.M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation // *Rev. Mod. Phys.* 2014. Vol. 88 (1). P. 153–185. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>
4. Microwave photonics with superconducting quantum circuits / X. Gu [et al.] // *Phys. Repts.* 2017. Vol. 718–719. P. 1–102. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>
5. Entanglement induced by a single-mode heat environment / M.S. Kim [et al.] // *Phys. Rev.* 2002. Vol. A65 (4). P. 040101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>
6. Zhou L., Song H.S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement // *J. Opt.* 2002. Vol. B4. P. 425–429. DOI: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310>
7. Bashkirov E.K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise // *Laser Phys. Lett.* 2006. Vol. 3, no 3. P. 145–150. DOI: <https://doi.org/10.1002/lapl.200510081>
8. Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field // *Opt. Commun.* 2010. Vol. 283. P. 4676–4679. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>
9. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field / L.S. Aguiar [et al.] // *J. Opt.* 2005. Vol. B7. P. S769–S771. DOI: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049>
10. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms interacting with a thermal field via two-photon process / X.-P. Liao [et al.] // *Chin. Phys.* 2008. Vol. B17, no. 6. P. 2137–2142. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/6/032>
11. Bashkirov E.K., Stupatskaya M.P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise // *Laser Phys.* 2009. Vol. 19, no. 3. P. 525–530. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1054660X09030281>
12. Izmalkov A. et al. Evidence for entangled states of two coupled flux qubits // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. P. 037003. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.037003>
13. Spectroscopy on two coupled flux qubits / J.B. Majer [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94. P. 090501. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.090501>
14. Bashkirov E.K. Entanglement of two dipole-coupled qubits interacting with a detuned cavity thermal field // *Proc. SPIE.* 2019. Vol. 11066. P. 110660K. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2522476>
15. Башкиров Е.К. Динамика перепутывания атомов с двухфотонными переходами, индуцированного тепловым полем // *Компьютерная оптика.* 2020. Т. 44, № 2. С. 167–176. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-595>
16. Башкиров Е.К., Гуслияникова М. Тепловое перепутывание в двойной модели Джейнса – Каммингса // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2020. Т. 23, № 2. С. 7–13. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.2.7-13>
17. Башкиров Е.К. Перепутывание двух сверхпроводящих кубитов, индуцированное тепловым шумом резонатора со средой Керра, при наличии начальной атомной когерентности // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы.* 2022. Т. 25, № 1. С. 7–15. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.1.7-15>
18. Peres A. Separability criterion for density matrices // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 1413–1415. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>
19. Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of mixed states: Necessary and sufficient condition // *Phys. Lett.* 1996. Vol. A223. P. 333–339. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2)

Информация об авторе

Башкиров Евгений Константинович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского государственного университета, г. Самара, Россия. В 1978 г. окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета и в 1984 г. – аспирантуру при Московском государственном университете. Автор более 360 научных работ.

Область научных интересов: квантовая оптика и квантовая радиофизика, квантовая информатика, теория неравновесных явлений.

E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>

Physics of Wave Processes and Radio Systems

2023, vol. 26, no. 2, pp. 9–17

DOI 10.18469/1810-3189.2023.26.2.9-17

UDC 537.86:530.145

Original Research

Received 23 March 2023

Accepted 24 April 2023

Published 30 June 2023

Thermal entanglement in two-atom Tavis–Cummings model with taking into account the dipole-dipole interaction

Eugene K. Bashkirov 

Samara National Research University

34, Moskovskoye shosse,

Samara, 443086, Russia

Abstract – Background. Interest in the study of entangled states of systems of natural and artificial atoms (qubits) interacting with selected modes of microwave resonators is associated with their use as logic elements of quantum computers. At the same time, the most important task of the physics of quantum computing is the choice of the most effective mechanisms for manipulating and controlling the entangled states of qubits in such devices. **Aim.** The dynamics of the entanglement of two dipole-coupled superconducting Josephson qubits induced by a thermal noise of a coplanar resonator is studied for various initial states of the qubits. **Methods.** Based on the exact solution of the quantum Liouville equation for the whole density matrix of the system under consideration, the time behavior of the qubit entanglement parameter (negativity) is found for chaotic thermal, pure separable, and entangled initial states of qubits. **Results.** It is shown that the entanglement of qubits induced by the thermal noise of the resonator is possible for both the chaotic thermal states and separable states of qubits, except the case when both qubits are excited. It has also been found that, for small values of the dipole-dipole interaction parameter, taking this interaction into account leads to an increase in the degree of entanglement. For values of the dipole-dipole interaction parameter greater than some limit value, the opposite effect takes place. It is found that for entangled initial states of qubits, the inclusion of direct interaction has a small effect on the entanglement dynamics. It is shown that the initial coherence of qubit states can lead to a significant increase in the degree of their entanglement in the presence of a dipole-dipole interaction. **Conclusion.** The dipole-dipole interaction can be used as an effective mechanism for qubits entanglement manipulation and controlling.

Keywords – superconducting qubits; coplanar cavity; thermal field; dipole-dipole interaction; entanglement; negativity.

✉ bashkirov.ek@ssau.ru (Eugene K. Bashkirov)

 © Eugene K. Bashkirov, 2023

References

1. I. Buluta, S. Ashhab, and F. Nori, “Natural and artificial atoms for quantum computation,” *Rep. Prog. Phys.*, vol. 74, no. 10, p. 104401, 2011, doi: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
2. Z.-L. Xiang et al., “Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 85 (2), pp. 623–653, 2013, doi: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
3. I. M. Georgescu, S. Ashhab, and F. Nori, “Quantum simulation,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 88 (1), pp. 153–185, 2014, doi: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
4. X. Gu et al., “Microwave photonics with superconducting quantum circuits,” *Phys. Repts.*, vol. 718–719, pp. 1–102, 2017, doi: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
5. M. S. Kim et al., “Entanglement induced by a single-mode heat environment,” *Phys. Rev.*, vol. A65 (4), p. 040101, 2002, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
6. L. Zhou and H. S. Song, “Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement,” *J. Opt.*, vol. B4, pp. 425–429, 2002, doi: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310>.
7. E. K. Bashkirov, “Entanglement induced by the two-mode thermal noise,” *Laser Phys. Lett.*, vol. 3, no. 3, pp. 145–150, 2006, doi: <https://doi.org/10.1002/lapl.200510081>.
8. B. Zhang, “Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field,” *Opt. Commun.*, vol. 283, pp. 4676–4679, 2010, doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>.
9. L. S. Aguiar et al., “The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field,” *J. Opt.*, vol. B7, pp. S769–S771, 2005, doi: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049>.
10. X.-P. Liao et al., “The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms interacting with a thermal field via two-photon process,” *Chin. Phys.*, vol. B17, no. 6, pp. 2137–2142, 2008, doi: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/17/6/032>.

11. E. K. Bashkirov and M. P. Stupatskaya, “The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise,” *Laser Phys.*, vol. 19, no. 3, pp. 525–530, 2009, doi: <https://doi.org/10.1134/S1054660X09030281>.
12. A. Izmalkov and al. et, “Evidence for entangled states of two coupled flux qubits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 037003, 2004, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.037003>.
13. J. B. Majer et al., “Spectroscopy on two coupled flux qubits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, p. 090501, 2005, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.090501>.
14. E. K. Bashkirov, “Entanglement of two dipole-coupled qubits interacting with a detuned cavity thermal field,” *Proc. SPIE*, vol. 11066, p. 110660K, 2019, doi: <https://doi.org/10.1117/12.2522476>.
15. E. K. Bashkirov, “Dynamics of entanglement of atoms with two-photon transitions induced by a thermal field,” *Komp'yuternaya optika*, vol. 44, no. 2, pp. 167–176, 2020, doi: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-595>. (In Russ.)
16. E. K. Bashkirov and M. Guslyannikova, “Thermal entanglement in the double Jaynes–Cummings model,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 23, no. 2, pp. 7–13, 2020, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2020.23.2.7-13>. (In Russ.)
17. E. K. Bashkirov, “Entanglement of two superconducting qubits induced by the thermal noise of a resonator with a Kerr medium in the presence of initial atomic coherence,” *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, vol. 25, no. 1, pp. 7–15, 2022, doi: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.1.7-15>. (In Russ.)
18. A. Peres, “Separability criterion for density matrices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, pp. 1413–1415, 1996, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
19. R. Horodecki, M. Horodecki, and P. Horodecki, “Separability of mixed states: Necessary and sufficient condition,” *Phys. Lett.*, vol. A223, pp. 333–339, 1996, doi: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).

Information about the Author

Eugene K. Bashkirov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, Samara, Russia. In 1978, he graduated from the Faculty of Physics of the Kuibyshev State University and in 1984 – postgraduate studies at the Moscow State University. Author of more than 360 scientific papers.

Research interests: quantum optics and quantum radiophysics, quantum informatics, theory of nonequilibrium phenomena.

E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2569-1322>