

Известия

ISSN 1026-3519

Российской академии наук

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



НАУКА
— 1727 —

2024

6

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----|
| Неклассические теории балок, пластин и оболочек (обзор) <i>В. В. Васильев</i> | 3 |
| Описание свойств полимерных гелей в рамках обобщенной модели Муни–Ривлина <i>Е. Я. Денисюк</i> | 27 |
| Коэффициенты интенсивности напряжений в вершине центральной полубесконечной трещины в произвольно нагруженной изотропной полосе <i>К. Б. Устинов</i> | 46 |
| Особенности динамики вращающегося вала с нелинейными моделями внутреннего демпфирования и упругости <i>А. А. Азаров, А. М. Гуськов, Г. Я. Пановко</i> | 74 |
| Динамический анализ возмущенного движения земного полюса <i>В. В. Перепёлкин</i> | 91 |
| Устойчивость по Якоби и восстановление параметров нелинейного двойного маятника <i>П. М. Шкапов, В. Д. Сулимов, А. В. Сулимов</i> | 103 |
| О движении бусинки на шероховатом обруче, свободно вращающемся вокруг вертикального диаметра <i>А. А. Буров, В. И. Никонов, Е. А. Никонова</i> | 119 |
| Пространственные колебания проводов электропередачи с гололедным отложением <i>А. Н. Данилин, Е. А. Денисов, В. А. Фельдштейн</i> | 135 |
| Определение спектра частот и колебаний прямоугольной пластинки, подвижно заделанной по краю, в разных средах <i>К. Б. Сабитов, А. Г. Хакимов</i> | 155 |
| Численно-экспериментальный метод определения модуля упругости грунтового массива <i>Г. Н. Гусев, Р. В. Цветков, В. В. Епин</i> | 177 |
| Измерение упругих характеристик монокристаллов никелевого жаропрочного сплава методом спекл-интерферометрии <i>А. И. Епишин, И. Н. Одинцев, Д. С. Лисовенко, Н. В. Петрушин, И. Л. Светлов</i> | 187 |
| Теплопроводность второго типа в линейных анизотропных термоупругих микрополярных средах <i>Ю. Н. Радаев</i> | 205 |
| Информация | 218 |

C o n t e n t

| | |
|--|-----|
| On-classical theories of beams, plates and shells (review) <i>V. V. Vasiliev</i> | 3 |
| Description of Polymer Gel Properties in Framework of Generalized Mooney—Rivlin Model <i>E. Ya. Denisyuk</i> | 27 |
| Stress intensity factors at the top of the central semi-infinite crack in an arbitraly loaded isotropic strip <i>K. B. Ustinov</i> | 46 |
| Features of the dynamics of a rotating shaft with nonlinear models of internal damping and elasticity <i>A. A. Azarov, A. M. Gouskov, G. Y. Panovko</i> | 74 |
| Dynamic Analysis of the perturbed motion of the Earth's Pole <i>V. V. Perepelkin</i> | 91 |
| Jacobi stability and restoration of parameters of the nonlinear double pendulum <i>P. M. Shkapov, V. D. Sulimov, A. V. Sulimov</i> | 103 |
| On the motion of a bead on a rough hoop freely rotating around a vertical diameter <i>A. A. Burov, V. I. Nikonov, E. A. Nikonova</i> | 119 |
| Spatial vibrations of power transmission conductors with ice deposits <i>A. N. Danilin, E. A. Denisov, V. A. Feldstein</i> | 135 |
| Determination of the spectrum of frequencies and vibrations of a rectangular plate, mobily employed around the edge, in different environments <i>K. B. Sabitov, A. G. Khakimov</i> | 155 |
| Numerical-experimental method of determination of the elastic modulus of a soil massif <i>G. N. Guseva, R. V. Tsvetkova, V. V. Epina</i> | 177 |
| Measurement of elastic characteristics of single-crystals of a nickel-base superalloy by speckle interferometry <i>A. I. Epishin, I. N. Odintsev, D. S. Lisovenko, N. V. Petrushin, I. L. Svetlov</i> | 187 |
| Type-II Thermoelasticity of Linear Anisotropic Micropolar Media <i>Yu. N. Radayev</i> | 205 |
| Information | 218 |

УДК 539.3

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ БАЛОК, ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК (ОБЗОР)

© 2024 г. В. В. Васильев^{а, *}

^аЦентральный НИИ специального машиностроения, Хотьково, Россия

^{*}*e-mail*: vvvas@dol.ru

Поступила в редакцию 29.05.2024 г.

После доработки 10.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

Статья является аналитическим обзором и посвящена проблеме построения неклассических теорий балок, пластин и оболочек, востребованность которых связана с появлением новых конструкционных материалов, обладающих свойствами, не вполне соответствующими гипотезам, принятым при построении классических теорий. Изложение основано на анализе проблемы понижения порядка уравнений теории упругости для тонкостенных элементов конструкций и используемых для этой цели математических и физических методов. Основное внимание уделяется корректности и энергетической согласованности этих методов. Изложение иллюстрируется примерами конкретных теорий.

Ключевые слова: теория балок, пластин и оболочек

DOI: 10.31857/S1026351924060013, **EDN**: TZLMMW

1. Введение. Классическая теория оболочек, основанная на гипотезах об отсутствии деформаций в трансверсальных плоскостях ортогональных базовой поверхности, определяющей форму оболочки, широко используется при расчете и проектировании тонкостенных конструкций, однако обладает известными противоречиями, порождаемыми принятыми гипотезами. Построение более общих неклассических теорий полностью или частично свободных от этих гипотез всегда сопровождало классическую теорию. Однако после появления композитных материалов, обладающих сравнительно низкими трансверсальными жесткостями, это направление получило прикладную значимость. В результате появилось исключительно большое и все возрастающее число работ, отраженных в обзорах [1–6], содержащих описание конкретных теорий. Настоящий обзор посвящен описанию основных подходов к построению неклассических теорий применительно к задачам статики, и конкретные теории обсуждаются только в качестве иллюстраций. Тем более что конструктивных идей в этой области значительно меньше, чем публикаций [7].

Заметим, что основные особенности неклассических теорий проявляются уже в теории балок. Теории пластин отличаются учетом краевого

кручения, описанного в работе [8] и отсутствующего у балок, а теории оболочек – более сложными уравнениями, учитывающими кривизну поверхности. В связи с этим для сокращения записи анализ в основном будет далее проводиться для балки (полосы) прямоугольного сечения, показанной на рис. 1. Уравнения плоской задачи теории упругости для ортотропной полосы имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_x}(\sigma_x - \nu_{xz}\sigma_z), \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E_z}(\sigma_z - \nu_{xz}\sigma_x),$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}} \quad (E_x \nu_{xz} = E_z \nu_{zx}), \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (1.3)$$

На поверхностях $z = \pm h / 2$ имеют место следующие статические условия:

$$\tau_{xz}(x, z = \pm h / 2) = 0, \quad \sigma_z(x, z = -h / 2) = q, \quad \sigma_z(x, z = h / 2) = p. \quad (1.4)$$

2. Однородные балки, пластины и оболочки. Конструктивная особенность балок пластин и оболочек заключается в том, что отношение толщины h к характерному размеру конструкции (для балки это ее длина l) по определению должно быть значительно меньше единицы. В таком случае проблема построения теории балок, пластин или оболочек формально выглядит просто. Перемещения представляются в виде разложений по некоторой системе заданных координатных функций переменной z , то есть

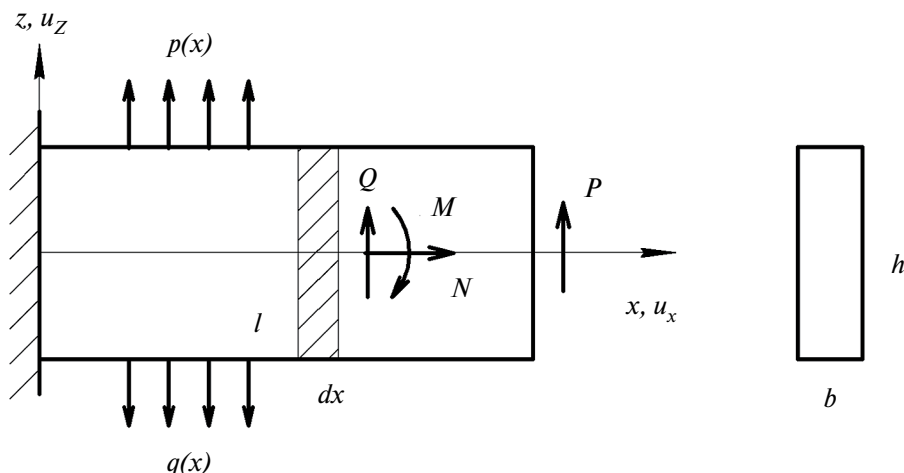


Рис. 1. Консольная балка.

$$u_x(x, z) = \sum_{i=0}^I u_i(x) \varphi_i(z), \quad u_z(x, z) = \sum_{j=0}^J w_j(x) \psi_j(z). \quad (2.1)$$

Координатные функции $\varphi_i(z)$ и $\psi_j(z)$ определяются системой взаимно независимых степеней свободы элемента балки (он заштрихован на рис. 1) и для получения уравнений теории можно воспользоваться принципом возможных перемещений. С этой целью первое уравнение равновесия (1.1) умножается на $\varphi_i(z)$, второе — на $\psi_j(z)$ и осуществляется интегрирование этих уравнений по z от $-h/2$ до $h/2$. В результате получается система, состоящая из $(I + J)$ уравнений, для функций $u_i(x)$ и $w_j(x)$. Кинематические граничные условия на краях $x = \text{const}$ удовлетворяются соответствующим заданием этих функций, а статические — заданием напряжений следующих равенств (1.2), (1.3) и (2.1). Граничные условия (1.4) в общем случае не удовлетворяются. Заметим, что выражения для напряжений τ_{xz} и σ_z , которые можно получить, подставляя разложения (2.1) в геометрические соотношения (1.3) и далее в соотношения упругости (1.2), трудно признать корректными, так как они требуют дифференцирования разложений (2.1) по координате z . Эти разложения аппроксимируют распределение перемещений по толщине, а дифференцирование аппроксимирующих выражений, как известно, не допускается. Корректное определение напряжения τ_{xz} и σ_z осуществляется в результате интегрирования уравнений равновесия (1.1).

Теории оболочек, в которых в качестве координатных функций используются степенные функции или полиномы Лежандра, построены в работах [9–11]. Заметим, что балки, пластины и оболочки, формально рассматриваемые как некоторые математические многообразия, фактически являются инженерными объектами и теории, описывающие эти объекты, должны удовлетворять определенным физическим условиям. В частности, элемент балки, показанный на рис. 1, должен иметь как твердое тело три взаимно независимые степени свободы, соответствующие его смещениям в направлении осей x , z и повороту в плоскости xz . Тогда при малых углах поворота в разложениях (2.1) следует принять $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = z$, $\psi_0 = 1$. Полагая $\varphi_i = 0$ ($i \geq 2$) и $\psi_j = 0$ ($j \geq 1$), рассмотрим теорию, соответствующую перемещениям:

$$u_x = u_0(x) + z u_1(x), \quad u_z = w_0(x). \quad (2.2)$$

В работах по неклассическим теориям теория, основанная на кинематических соотношениях аналогичных равенствам (2.2), называется сдвиговой теорией первого порядка. Дело в том, что касательные напряжения, формально определенные с помощью равенств (1.2), (1.3) и (2.2), имеют вид

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = G(u_1 + w'_0) \quad (2.3)$$

и не удовлетворяют граничным условиям (1.4). Однако, как уже отмечалось, первое равенство (2.2) является приближенным и его нельзя дифференцировать по z . Для того чтобы избежать дифференцирования, необходимо ввести интегральную характеристику — поперечную силу:

$$Q = b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = Gb[u_x(h/2) - u_x(-h/2) + w'_0 h] = Gbh(u_1 + w'_0) = S\gamma. \quad (2.4)$$

Здесь $S = Gbh$ — жесткость балки на сдвиг и $\gamma = u_1 + w'_0$ — осредненная по толщине деформация сдвига. Таким образом, в обсуждаемой теории соотношение упругости для сдвига существует только в интегральной форме (2.4). Аналогичная ситуация имеет место в классической теории. В ней, как известно, $u_1 = -w'_0$ и соотношение (2.3) вообще отсутствуют. Равенства (2.2) дают линейное распределение напряжений по толщине, эквивалентное осевой силе и изгибающему моменту, то есть

$$\sigma_x = \frac{N}{bh} + \frac{12M}{bh^3} z, \quad N = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad M = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz. \quad (2.5)$$

Воспользовавшись принципом возможных перемещений, умножим первое уравнение (1.1) на 1, а затем — на z и проинтегрируем по толщине. Проинтегрируем также второе уравнение (1.1), умноженное на 1. Используя интегрирование по частям и равенства (1.4), (2.4), (2.5), получим уравнения равновесия:

$$N' = 0, \quad M' - Q = 0, \quad Q' + p - q = 0, \quad (2.6)$$

в которых

$$N = E_x b h u'_0, \quad M = \frac{E_x b h^3}{12} u'_1, \quad Q = G_{xz} b h (u_1 + w'_0). \quad (2.7)$$

Заметим, что три уравнения (2.6) могут быть получены непосредственно из условий равновесия элемента балки (рис. 1) как твердого тела, что соответствует трем степеням свободы элемента, предусмотренным разложениями (2.2).

Рассмотрим консольную балку, нагруженную силой P (рис. 1). При $p = q = 0$ общее решение уравнений (2.6) и (2.7) имеет вид:

$$N = C_1, \quad Q = C_2, \quad M = C_2 x + C_3, \quad u_0 = \frac{C_1 x}{E_x b h} + C_4, \\ u_1 = \frac{12x}{E_x b h^3} \left(C_2 \frac{x}{2} + C_3 \right) + C_5 \\ w_0 = \frac{C_2 x}{G_{xz} b h} - \frac{6x^2}{E_x b h^3} \left(C_2 \frac{x}{3} + C_3 \right) + C_5 x + C_6. \quad (2.8)$$

Подставляя напряжение σ_x (2.5) в первое уравнение (1.1) и интегрируя с учетом уравнений (2.6) и условий (1.4), найдем касательное напряжение

$$\tau_{xz} = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right). \quad (2.9)$$

Рассмотрим вариационную постановку задачи. Из принципа Лагранжа имеем:

$$\int_0^l dx \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xz} \delta \epsilon_{xz}) dz - \int_0^l [p \delta u_z(h/2) - q \delta u_z(-h/2)] dx = 0. \quad (2.10)$$

С учетом приведенных выше соотношений получим:

$$\int_0^l [N \delta u_0 + M \delta u_1 + Q \delta (u_1 + w'_0) - (p - q) \delta w_0] dx = 0. \quad (2.11)$$

Отсюда следуют вариационные уравнения, которые совпадают с уравнениями равновесия (2.6). Теорию, в которой уравнения, следующие из вариационного принципа Лагранжа, совпадают с непосредственно полученными уравнениями равновесия, назовем энергетически согласованной [12, 13]. Заметим, что классическая теория не является таковой. Действительно, при условии $u_1 = -w'_0$ функционал (2.11) принимает вид:

$$\int_0^l [N \delta u_0 - M \delta w'_0 - (p - q) \delta w_0] dx = 0.$$

Отсюда получим вариационные уравнения:

$$N' = 0, \quad M'' + p - q = 0.$$

Эти уравнения следуют из уравнений равновесия (2.6), но не совпадают с ними. Причина заключается в том, что кинематические условия (2.2) в классической теории принимают вид:

$$u_x = u_0(x) - z w'_0, \quad u_z = w_0(x).$$

Эти поля перемещений не являются кинематически возможными, так как угол поворота элемента пластины (рис. 1) не является независимым и выражается через ее прогиб. В результате в классической теории удовлетворяется только комбинация из уравнений равновесия (2.6). На то, что в классической теории фактически не удовлетворяется последнее уравнение равновесия (2.6), указывается в работе П.А. Жилина [14].

Из вариационного уравнения (2.11) следуют естественные граничные условия для концов балки $x = 0$ и $x = l$ (рис. 1):

$$N \delta u_0 = 0, \quad M \delta u_1 = 0, \quad Q \delta w_0 = 0. \quad (2.12)$$

При $x = 0$ имеем $u_0 = u_1 = w_0 = 0$ и согласно равенству (2.2) $u_x(x = 0, z) \equiv 0$. При $x = l$ — $N = M = 0$, $Q = P$ (рис. 1). Определяя из этих условий постоянные интегрирования, входящие в решение (2.8), окончательно получим следующее решение для консольной балки, нагруженной силой P (рис. 1):

$$N = 0, \quad Q = P, \quad M = -P(l - x), \quad u_1 = -\frac{6Px}{E_x b h^3} \left(l - \frac{x}{2} \right),$$

$$w_0 = \frac{Px}{G_{xz} b h} + \frac{6Px^2}{E_x b h^3} \left(l - \frac{x}{3} \right). \quad (2.13)$$

Первое слагаемое в равенствах (2.13) для прогиба учитывает влияние деформации сдвига, игнорируемое классической теорией балок. Заметим, что решение (2.13) и кинематическое поле (2.2) позволяют получить нулевые перемещения в закреплённом сечении балки, то есть $u_x(x = 0, z) \equiv 0$ и $u_z(x = 0, z) \equiv 0$. Такую теорию будем называть кинематически согласованной. Классическая теория также является кинематически согласованной. Кроме того, из условий (2.12) следует, что на свободном конце балки должны выполняться условия $N = M = Q = 0$. Таким образом, силовые факторы, соответствующие заданному кинематическому полю (2.2), обращаются в ноль. Теорию, соответствующую этому условию, будем называть статически согласованной. Классическая теория балок является статически согласованной. Однако классические теории пластин и оболочек не обладают этим свойством — как известно, порядок уравнений в них не позволяет обратить в ноль на свободном краю поперечную силу, изгибающий и крутящий моменты. Условие статической согласованности накладывает некоторое ограничение на разложения (2.1).

Для того чтобы получить это ограничение, воспользуемся принципом возможных перемещений и разложениями (2.1). Умножим уравнения (1.1) соответственно на $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$ и проинтегрируем их по z от $-h/2$ до $h/2$. Используя интегрирование по частям и учитывая равенства (1.4), получим:

$$M'_k - Q_k = 0, \quad R'_k - T_k + p_k - q_k = 0,$$

$$p_k = p \psi_k(h/2), \quad q_k = q \psi_k(-h/2). \quad (2.14)$$

где

$$M_k = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \varphi_k dz, \quad Q_k = b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \dot{\varphi}_k dz,$$

$$R_k = b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \psi_n dz, \quad T_n = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \dot{\psi}_n dz \quad (2.15)$$

и $(\dot{\varphi}, \dot{\psi}) = d(\varphi, \psi) / dz$. Вариационный принцип Лагранжа дает уравнения (2.14) и следующие граничные условия на концах балки:

$$M_k \delta u_k = 0, \quad R_k \delta w_k = 0.$$

Отсюда следует, что на свободном конце балки $M_k = R_k = 0$. Однако в теории имеется еще одна система равнодействующих касательных напряжений — силы Q_k , которые также должны быть равны нулю на конце балки. Согласно равенствам (2.15), для обеспечения этого условия, то есть для статической согласованности теории, необходимо потребовать, чтобы $\psi_k = \dot{\varphi}_k$. Таким образом, для статически согласованной теории функции $\varphi_i(z)$ и $\psi_j(z)$

в разложениях (2.1) не могут быть взаимно независимыми и эти разложения должны иметь вид [12, 13]:

$$u_x = \sum_{i=0}^I u_i(x) \phi_i(z), \quad u_z = \sum_{i=0}^I w_i(x) \dot{\phi}_i(z). \quad (2.16)$$

В работе [13] доказывается, что при перемещениях (2.16) получаемое из соотношения упругости распределение касательных напряжений по толщине балки удовлетворяет теореме функционального анализа о наилучшей аппроксимации. Заметим, что теории, учитывающие деформацию сдвига и не учитывающие поперечную деформацию, являются статически согласованными.

Традиционно считается, что теория изгиба балок, основанная на поле перемещений (2.2), предложена С.П. Тимошенко в работе [15], опубликованной в 1922 г. Однако это не вполне соответствует действительности. Основные соотношения теории содержатся в курсе теории упругости С.П. Тимошенко, вышедшем в свет в 1916 г. [16]. История создания теории описана в монографии [17]. Из геометрических соображений в работе [16] принимается, что касательная к линии прогиба балки поворачивается на угол

$$\frac{dw}{dx} = \theta + \gamma, \quad (2.17)$$

где θ — угол, на который поворачивается сечение балки и γ — осредненная по толщине деформация сдвига. Тогда соотношения упругости в обозначениях настоящей статьи принимают вид:

$$M = \frac{1}{12} E_x b h^3 \theta', \quad Q = k b G_{xz} h (w' - \theta), \quad (2.18)$$

где k — коэффициент, зависящий от формы сечения. В совокупности с уравнениями равновесия (2.6) получается система уравнений, решение которой формально совпадает с равенствами (2.8), соответствующим перемещениям (2.2). Однако в теории Тимошенко нет равенств (2.2). Соотношения (2.17) и (2.18), по существу, введены как гипотезы. В отличие от классической теории, в которой изгибающий момент пропорционален кривизне оси балки, в обсуждаемой теории он пропорционален производной от угла поворота сечения, причем выражение для изгибной жесткости балки не следует из теории и принимается таким же, как и в классической теории. Следует отметить, что теория Тимошенко, построенная для анализа колебаний балки, позволяет определить изгибающий момент, но не позволяет найти напряжение σ_x и перемещение u_x . Таким образом, теория Тимошенко не имеет непосредственного отношения к теории балок, основанной на перемещениях (2.2), которые были предложены позже Н. Ненску [18] и Л. Болле [19].

Теория пластин, фактически основанная на поле перемещений (2.2), построена в работах Е. Reissner [20] и Л. Болле [19] и для изотропной пластины сводится к следующей системе уравнений [8]:

$$\begin{aligned} D \Delta \Delta \phi &= p, \quad w = \phi - \frac{D}{S} \Delta \phi, \quad k^2 \Delta \psi - \psi = 0, \\ D &= \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad S = G h, \quad k^2 = \frac{D}{2S} (1 - \nu). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь $w = w_0$, $q = 0$, функции ϕ и ψ являются проникающим и краевым потенциалами, через которые выражаются углы поворота элемента пластины:

$$u_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Второе слагаемое во втором равенстве (2.19) учитывает, влияние деформации сдвига на прогиб, а второе уравнение (2.19) описывает краевое кручение пластины, отсутствующее в балках. Это уравнение впервые было получено в работе E. Reissner [20].

Теория оболочек представлена в работах [21–24]. В частности, уравнения технической теории изотропных оболочек имеют вид [2]:

$$D\Delta\Delta w + (1 - s\Delta)\Delta_r F = p - s\Delta p, \quad \frac{1}{Eh}\Delta\Delta F - \Delta_r w = 0, \quad k^2\Delta\psi - \psi = 0. \quad (2.20)$$

где F – функция напряжений,

$$s = \frac{D}{S}, \quad \Delta_r(\cdot) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x^2},$$

R_1, R_2 – главные радиусы кривизны.

Заметим, что в литературе теории пластин и оболочек, приводящие к уравнениям (2.19) и (2.20), традиционно называются теориями типа Тимошенко. Такое название представляется, во-первых, неудачным, так как в русском языке, в отличие от английского, такая конструкция названия не принята, а во-вторых, неверным, так как в теории Тимошенко не используются, как уже отмечалось, перемещения в форме (2.2) и она относится исключительно к балкам – в уравнениях (2.19) и (2.20) для пластин и оболочек в обсуждаемой теории отсутствуют уравнения для функции ψ . Теория динамического поведения пластин построена на основе кинематической модели Тимошенко Я.С. Уфляндом [25]. Аналогичная теория, основанная на перемещениях в форме (2.2), предложенной Н. Hencky [18], представлена в работе R.D. Mindlin [26]. Обе теории обсуждаются в монографии [17]. Они приводят к уравнению четвертого порядка для прогиба, уравнение (2.19) для функции ψ в них отсутствует.

Подводя итог проведенному анализу, отметим, что неклассическая теория, основанная на поле перемещений (2.2), не является, как традиционно считается, ни сдвиговой теорией первого приближения, ни теорией типа Тимошенко. Она может быть квалифицирована как теория основного напряженного состояния балок, пластин и оболочек, сводящегося к интегральным по толщине силам и моментам, и по существу является современной формой классических теорий балок, пластин и оболочек [8].

Вернемся к разложениям (2.1) и рассмотрим так называемые теории третьего порядка, достаточно широко обсуждаемые в литературе. Применительно к задаче изгиба примем следующее поле перемещений:

$$u_x = zu_1(x) + z^3 u_3(x), \quad u_z = w_0(x). \quad (2.21)$$

Найдем касательные напряжения:

$$\tau_{xz} = G_{xz} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = G_{xz} (u_1 + 3z^2 u_3 + w_0').$$

Теперь удовлетворим граничные условия (1.4) и определим функцию $u_3(x)$. В результате получим:

$$u_x = zu_1 - \frac{4z^3}{3h^2}(u_1 + w'_0) = zu_1 - \frac{4z^3}{3h^2}\psi, \quad u_z = w_0, \quad \psi = u_1 + w'_0 \quad (2.22)$$

Заметим, что проведенное преобразование вводит в теорию принципиальный дефект. Дело в том, что принципы Лагранжа (вариационный и возможных перемещений) не предполагают наложение на кинематическое поле статического условия. Это условие приводит к тому, что поле перемещений (2.22), в отличие от поля (2.21), не является кинематически возможным и не описывает перемещения элемента балки (рис. 1) как твердого тела.

Поле перемещений (2.22) было предложено в 1957 г. Б.Ф. Власовым [27]. Работа не получила продолжения, так как для построения теории пластин в ней был использован вариационный принцип в форме (2.11), которая соответствует полю перемещений (2.2), а не (2.22). На это обстоятельство указано в статье А.Л. Гольденвейзера [28]. Однако эта критика не имеет принципиального значения. Существовало, что из вариационного уравнения (2.11) получаются уравнения равновесия (2.6), которые и используются в дальнейшем. Если не принимать во внимание уравнение (2.11) и считать, что уравнения (2.6) следуют непосредственно из условий равновесия элемента балки, то получается энергетически несогласованная, но статически корректная теория. Перемещения (2.22) соответствуют следующим выражениям для напряжений, момента и поперечной силы:

$$\sigma_x = E_x \left(zu'_1 - \frac{4z^3}{3h^2} \psi \right), \quad \tau_{xz} = G_{xz} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \psi, \quad (2.23)$$

$$M = \frac{E_x b h^3}{12} \left(u'_1 - \frac{1}{5} \psi' \right), \quad Q = \frac{2}{3} G_{xz} h b \psi. \quad (2.24)$$

Общее решение уравнений (2.6) и (2.24) для консольной балки, нагруженной силой P , имеет вид:

$$Q = C_1, \quad M = C_1 x + C_2, \quad u_1 = \frac{12x}{E_x b h^3} \left(\frac{1}{2} C_1 x + C_2 \right) + \frac{3C_1}{10G_{xz} b h} + C_3, \quad \psi = \frac{3C_1}{2G_{xz} b h},$$

$$w_0 = \frac{6C_1 x}{5G_{xz} b h} - \frac{6x^2}{E_x b h^3} \left(\frac{1}{3} C_1 x + C_2 \right) - C_3 x + C_4. \quad (2.25)$$

Граничные условия при $x = l$ позволяют определить C_1 и C_2 , а из условия $w_0(x=0) = 0$ следует, что $C_4 = 0$. Таким образом, в решении (2.25) остается только одна неопределенная константа — C_3 . Из равенств (2.22) и (2.25) следует, что задать ее так, чтобы на закрепленном краю перемещение u_x обращалось в ноль, невозможно. То есть обсуждаемая теория не является кинематически согласованной. Можно потребовать, чтобы перемещение u_x обращалось в ноль в некоторой точке закрепленного края, например принять

$u_x(x=0, z=\pm h/2)=0$. В результате получим $C_3 = P / 5Gbh$ и следующее решение:

$$Q = P, M = -P(l-x),$$

$$u_1 = \frac{P}{2G_{xz}bh} - \frac{12Px}{E_xbh^3} \left(l - \frac{x}{3} \right), \quad \psi = \frac{3P}{2G_{xz}bh}, \quad w_0 = \frac{Px}{G_{xz}bh} + \frac{6Px^2}{E_xbh^3} \left(l - \frac{x}{3} \right). \quad (2.26)$$

Полученное решение мало отличается от решения (2.13), соответствующего основному напряженному состоянию балки. По отношению к теории, основанной на кинематическом поле (2.2), теория, соответствующая перемещениям (2.22), представляется неоправданно усложненной и не является энергетически и кинематически согласованной. Единственное достоинство теории заключается в том, что касательные напряжения, определенные из соотношения упругости и уравнения равновесия, оказываются одинаковыми.

Перемещения в форме (2.22) неоднократно использовались в отечественной и зарубежной литературе (как правило, без ссылки на работу [27]). Рассмотрим достаточно широко распространенную теорию, квалифицируемую как сдвиговая теория третьего порядка [29]. Теория строится на основе поля перемещений в форме (2.22) и вариационного уравнения (2.10). Как уже отмечалось, перемещения (2.22) не являются кинематически возможными, что исключает применение вариационного принципа Лагранжа. Однако в результате формального использования этого принципа в работе [29] получены уравнения (5*, * обозначает уравнение, полученное в работе [29]):

$$M' - Q + \frac{4}{h^2} \left(Q_2 - \frac{1}{3} M' \right) = 0, \quad Q' - \frac{4}{h^2} \left(Q'_2 - \frac{1}{3} M'_3 \right) + p - q = 0. \quad (2.27)$$

В дополнение к силам и моменту (2.4) и (2.5) введены обобщенные сила и момент:

$$Q_2 = b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} z^2 dz, \quad M_3 = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z^3 dz.$$

В отличие от уравнений (2.6), уравнения (2.27) не обеспечивают равновесие элемента балки и не являются уравнениями равновесия. Аналогичная ситуация имеет место для граничных условий. Для закрепленного сечения консольной балки из вариационного уравнения записаны граничные условия (62*), согласно которым при $x=0$ получено $w_0 = w'_0 = u_1 = 0$. Тогда последнее равенство (2.22) дает $\psi(x=0) = 0$, и из второго соотношения (2.23) следует $\tau_{xz}(x=0) = 0$. Таким образом, касательное напряжение в заделке оказывается равным нулю и не уравнивает силу P (рис. 1). Этот эффект демонстрируется в работе [30]. В результате можно заключить, что сдвиговая теория балок третьего порядка, изложенная в работе [29], является несостоятельной. Таковыми являются и соответствующие теории пластин и оболочек [31, 32].

Рассмотрим сдвиговую теорию, предложенную в 1958 г. С.А. Амбарцумяном [33]. Эта теория описана в монографиях [34–37] и получила определенное распространение в отечественной литературе. Используя равенства (1.2), (1.3) и (2.9), запишем следующие выражения для касательных напряжений:

$$\tau_{xz} = G_{xz} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{6Q}{bh^2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right). \quad (2.28)$$

Поскольку в общем случае функция $Q(x)$ является неизвестной, введем новую функцию $f'(x) = 6Q(x) / Gbh^2$ и предположим, что $u_z = w(x)$. Тогда, интегрируя равенство (2.28) по z , получим следующее поле перемещений для задачи изгиба:

$$u_x = -w'(x)z + z \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) f'(x), \quad u_z = w(x). \quad (2.29)$$

Соответствующие этим перемещениям напряжения, а также изгибающий момент и поперечная сила имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E_x \left[-zw'' + z \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) f''(x) \right], \quad \tau_{xz} = G_{xz} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) f'(x), \\ M &= -\frac{1}{12} E_x b h^3 \left(w'' - \frac{h^5}{60} f'' \right), \quad Q = \frac{1}{6} G_{xz} b h^3 f'. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Запишем общее решение уравнений (2.6) и (2.30) для консольной балки, нагруженной силой P (рис. 1):

$$Q = C_1, \quad M = C_1 x + C_2, \quad f = \frac{6C_1}{G_{xz} b h^3}, \quad w = -\frac{16x^2}{E_x b h^3} \left(\frac{1}{3} C_1 x + C_2 \right) + C_3 x + C_4.$$

Как и в предыдущей теории, постоянные интегрирования не позволяют удовлетворить условие $u_x(x=0, z) \equiv 0$ в закрепленном сечении балки. Выполняя это условие в точках, то есть полагая $u_x(x=0, z = \pm h/2) = 0$, окончательно получим:

$$Q = P, \quad M = -P(l - x), \quad f = \frac{6P}{G_{xz} b h^3}, \quad w = \frac{Px}{G_{xz} b h} + \frac{6Px^2}{E_x b h} \left(l - \frac{x}{3} \right)$$

Сравнивая этот результат с решением (2.26), можно заключить, что обсуждаемая теория в принципе не отличается от теории Б.Ф. Власова (в изложенной выше интерпретации). Применительно к пластинам, обе теории приводят к уравнениям аналогичным уравнениям (2.19).

Теория пластин, в которой распределение касательных напряжений по толщине аппроксимируется не естественной квадратичной функцией (2.28), а гиперболическими функциями, предложена в работах А. Kromm [38, 39]. В статье [39] получен принципиально важный для теории пластин результат. Исследованы два возможных в неклассической теории условия шарнирного опирания прямоугольной пластины – традиционное опирание, при котором в плоскости закрепленного края отсутствует угол поворота, и альтернативное условие, при котором на краю отсутствует крутящий момент. Полученное решение позволило выявить физический смысл угловых сосредоточенных сил, получающихся в классической теории пластин в результате преобразования Кирхгофа–Томсона–Тэта. Для пластины, лежащей на опорах и нагруженной давлением, в области угловых точек образуются краевые поперечные силы, прижимающие углы пластины к опоре [40].

Исследуем напряженное состояние балки, получаемое в результате решения уравнений неклассической теории. Для задачи изгиба используем разложение перемещения u_x по системе ортогональных функций $F_i(z)$ и примем,

что перемещение u_z не зависит от z . Для консольной балки (рис. 1) получим следующую систему напряжений [41]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{12P}{bh^3}(l-x)z - \frac{2P}{bh} \sqrt{\frac{E_x}{G_{xz}}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i'(z)}{\alpha_i \lambda_i \sin \lambda_i} e^{-s_i x}, \\ \tau_{xz} &= \frac{6P}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) - \frac{3P}{bh} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i(z)}{\lambda_i \sin \lambda_i} e^{-s_i x}.\end{aligned}\quad (2.31)$$

Здесь

$$F_i(z) = \cos \lambda_i - \cos \alpha_i z, \quad \lambda_i = \frac{1}{2} \alpha_i h, \quad s_i^2 = \frac{G_{xz}}{E_x} \alpha_i^2.$$

Собственные значения являются корнями уравнения $\operatorname{tg} \lambda_i = \lambda_i$. Собственные функции $F_i(z)$ обладают свойствами ортогональности, то есть

$$\begin{aligned}\int_{-h/2}^{h/2} F_i F_j dz &= \begin{cases} (h/2) \sin^2 \lambda_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} F_i F_j' dz = \begin{cases} (2/h) \lambda_i^2 \sin^2 \lambda_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\ \int_{-h/2}^{h/2} F_i dz &= 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} F_i' dz = 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} F_i' z dz = 0.\end{aligned}$$

В решении (2.31) полиномиальные составляющие соответствуют основному напряженному состоянию, сводящемуся к силе и моменту, а суммы включают систему самоуравновешенных краевых напряженных состояний, затухающих при удалении от закрепленного края балки. Наиболее медленно затухающий краевой эффект соответствует собственному значению $\lambda_1 = 4.49$. Его амплитуда составит менее 0.01 от амплитуды при $x = 0$ на расстоянии от конца балки большем чем $x_e = 0.5h\sqrt{E/G}$. Таким образом, краевые эффекты затухают на расстоянии от края меньшем чем толщина. В связи с этим возникает вопрос о практической целесообразности построения неклассических теорий, обладающих большей точностью, чем теория основного напряженного состояния. Формально теория позволяет расширить класс граничных условий, однако не настолько, чтобы появилась возможность описать реальные условия закрепления тонкостенных конструкций. Имеется и еще одно обстоятельство, осложняющее ситуацию. Рассмотрим правую часть равенства (2.31) для касательных напряжений. В закрепленном сечении консольной балки (рис. 1) имеем $u_x(z) = 0$ и, следовательно, $\partial u_x / \partial z = 0$. Поскольку u_z не зависит от z , то и $\tau_{xz}(x = 0)$ не зависит от z . Таким образом, касательные напряжения равномерно распределены по толщине закрепленного сечения. Действительно, принимая во втором равенстве (2.31) $x = 0$ и суммируя ряд, получим $\tau_{xz}(x = 0) = P / bh$. Однако в угловых точках $z = \pm h/2$ закрепленного края $\tau_{xz} = 0$ в силу условий (1.4) и симметрии тензора напряжений. В результате распределение касательных напряжений вдоль закрепленного края имеет разрывы в угловых точках. При $x = 0$ в угловых точках края ряд в первом равенстве (2.31) расходится и напряжение σ_x оказывается сингулярным. Заметим, что эта сингулярность не устраняется, если учесть деформацию ε_z — решение плоской задачи теории упругости для консольной полосы является сингулярным в угловых точках закрепленного края [42]. Эта сингулярность не связана с проблемами неклассических теорий — она порождается классическим

дифференциальным исчислением, основанном на анализе бесконечно малых величин [43], и исчезает, если рассматривать элементы среды с малыми, но конечными размерами. При этом распределение нормальных напряжений в закрепленном сечении консольной полосы практически совпадает с решением, соответствующим перемещениям (2.2) [44].

Аналогичная теория пластин, основанная на одной гипотезе, согласно которой $u_z = w(x, y)$, построена в работе [45]. Решение осесимметричной задачи для цилиндрической оболочки представлено в работе [46].

Рассмотрим некоторые математические методы, используемые для приведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин и оболочек. Уравнения механики тонкостенных конструкций по определению включают малый параметр \bar{h} , представляющий собой отношение толщины стенки к характерному размеру в плане. Это в принципе дает возможность использовать асимптотический метод, представляя решение в форме разложения по степеням параметра \bar{h} [47, 48]. В результате получается последовательность систем уравнений, включающих члены с одинаковым асимптотическим порядком. Это свойство метода противоречит физической природе напряженного состояния пластин и оболочек. Рассмотрим уравнения (2.19), описывающие основное напряженное состояние пластин. Вторым членом второго и первым членом третьего уравнений имеют асимптотические порядки \bar{h}^2 и согласно асимптотическому методу должны быть отброшены. Тогда получим $\varphi = w$, $\psi = 0$ и уравнения (2.19) сводятся к бигармоническому уравнению классической теории пластин. Таким образом, первое приближение асимптотического метода дает уравнение классической теории. Эта теория, как уже отмечалось, является энергетически и статически несогласованной. Асимптотический метод позволяет получить уравнения более высокого асимптотического порядка, однако они не компенсируют недостатки первого приближения. Изложенное выше отражает мнение автора [49]. Альтернативная точка зрения представлена в работе [50].

Рассмотрим метод начальных функций, который может быть реализован в интегральной и дифференциальной формах. Интегральную форму метода [51] продемонстрируем на примере уравнений (1.1)–(1.3), в которых для сокращения записи не будем учитывать коэффициенты Пуассона. Введем нормальную координату z_0 , отсчитываемую от поверхности $z = -h/2$ так, что $z = z_0 - h/2$. Интегрируя уравнения (1.2) и (1.3), получим:

$$u_z = w_0 + \psi, \quad u_x = u_0 - zw'_0 + \varphi - \int_0^{z_0} \psi' dz_0, \quad (2.32)$$

где

$$\psi = \int_0^{z_0} \frac{\sigma_z}{E_z} dz_0, \quad \varphi = \int_0^{z_0} \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}} dz_0 \quad (2.33)$$

$u_0(x)$, $w_0(x)$ – начальные функции и $(\cdot)' = d(\cdot)/dx$. Найдем нормальное напряжение:

$$\sigma_x = E_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = E_x \left(u'_0 - z_0 w''_0 + \varphi' - \int_0^{z_0} \psi'' dz_0 \right).$$

Подставляя это выражение в уравнения равновесия (1.1) и интегрируя их по z_0 с учетом граничных условий (1.4) для $z_0 = 0$, имеем:

$$\tau_{xz} = -E_x \left(z_0 u_0'' - \frac{1}{2} z_0^2 w_0''' + \int_0^{z_0} \varphi'' dz_0 - \int_0^{z_0} dz_0 \int_0^{z_0} \psi''' dz_0 \right), \quad (2.34)$$

$$\sigma_z = E_x \left(\frac{1}{2} z_0^2 u_0''' - \frac{1}{6} z_0^3 w_0^{(4)} + \int_0^{z_0} dz_0 \int_0^{z_0} \varphi^{(4)} dz_0 - \int_0^{z_0} dz_0 \int_0^{z_0} dz_0 \int_0^{z_0} \psi^{(5)} dz_0 \right) + q. \quad (2.35)$$

Принимая $z_0 = h$ и используя граничные условия (1.4), можно получить два уравнения относительно функций $u_0(x)$, $w_0(x)$, включающих функции $\varphi(x, z)$, $\psi(x, z)$. При $\varphi = \psi = 0$ приходим к классической теории. Подставляя полученные выражения для u_0 и w_0 сначала в равенства (2.34) и (2.35) (в которых $\varphi_0 = \psi_0 = 0$), а затем в выражения (2.33), получим функции φ_1 и ψ_1 первого приближения и т.д. В результате, продолжая этот процесс, приходим к системам двух уравнений возрастающего порядка относительно функций $u_0(x)$ и $w_0(x)$. Метод эффективен при построении теорий, описывающих неоднородные по толщине тонкостенные конструкции, так как упругие постоянные входят в интегралы по толщине. Различные варианты рассматриваемого метода, соответствующие различным положениям начальной поверхности, получили ограниченное применение [52–54] — метод не является энергетически согласованным, что вызывает затруднения в формулировке граничных условий. Метод использован для построения неклассической теории пластин в работе [55].

Используем аналогичную задачу для демонстрации дифференциальной формы метода начальных функций [56]. Введем безразмерные координаты $\bar{x} = x / l$, $\bar{z}_0 = z_0 / h$ так, что $0 \leq \bar{x} \leq 1$ и $0 \leq \bar{z}_0 \leq 1$, и представим перемещения и напряжения в виде рядов Тейлора по координате \bar{z}_0 . При этом будем считать, что начальная поверхность $\bar{z}_0 = 0$ свободна от напряжений, а перемещения ее точек $u_x(\bar{z}_0 = 0) = u_0$ и $u_z(\bar{z}_0 = 0) = w_0$ являются неизвестными начальными функциями. Выражая производные по \bar{z}_0 через производные по \bar{x} с помощью уравнений (1.1)–(1.3), окончательно получим [57]:

$$u_x = L_{11}(u_0) + L_{12}(w_0), \quad u_z = L_{21}(u_0) + L_{22}(w_0)$$

$$\tau_{xz} = L_{31}(u_0) + L_{32}(w_0), \quad \sigma_z = L_{41}(u_0) + L_{42}(w_0). \quad (2.36)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{11}(\cdot) &= 1 - \frac{\bar{z}_0^2}{2!} k_g(\cdot)'' + \frac{\bar{z}_0^4}{4!} (k_g^2 - k_e)(\cdot)^{(4)} - \dots, \\ L_{12}(\cdot) &= \bar{h} \left[-\bar{z}_0(\cdot)' + \frac{\bar{z}_0^3}{3!} k_g(\cdot)''' - \frac{\bar{z}_0}{5!} k_g(k_g - k_e)(\cdot)^{(5)} + \dots \right] \\ L_{21}(\cdot) &= \frac{1}{\bar{h}} \left(\frac{\bar{z}_0^3}{3!} k_e(\cdot)''' - \frac{\bar{z}_0^5}{5!} k_g k_e(\cdot)^{(5)} \dots \right), \quad L_{22}(\cdot) = 1 - \frac{\bar{z}_0^4}{4!} k_e(\cdot)^{(4)} + \frac{\bar{z}_0^6}{6!} k_g k_e(\cdot)^{(6)} \dots \\ L_{31}(\cdot) &= \frac{E_x \bar{h}}{l} \left[-\bar{z}_0(\cdot)'' + \frac{\bar{z}_0^3}{3!} k_g(\cdot)^{(4)} - \frac{\bar{z}_0^5}{5!} (k_g^2 - k_e)(\cdot)^{(6)} \dots \right], \end{aligned}$$

$$L_{42}(\cdot) = \frac{E_x \bar{h}^2}{l^2} \left(-\frac{\bar{z}_0^3}{3!} (\cdot)^{(4)} + \frac{\bar{z}_0^5}{5!} k_g(\cdot)^{(6)} \dots \right)$$

$$L_{32}(\cdot) = L_{41}(\cdot) = E_x \bar{h}^2 \left[\frac{\bar{z}_0^2}{2!} (\cdot)''' - \frac{\bar{z}_0^4}{4!} k_g(\cdot)^{(5)} + \frac{\bar{z}_0^6}{6!} (k_g^2 - k_e)(\cdot)^{(7)} - \dots \right],$$

где

$$k_g = \bar{h}^2 \frac{E_x}{G_{xz}}, \quad k_e = \bar{h}^4 \frac{E_x}{E_z}, \quad \bar{h} = \frac{h}{l}, \quad (\cdot)' = d(\cdot) / d\bar{x}.$$

Принимая в разложениях (2.36) $\bar{z}_0 = 1$ и используя граничные условия (1.4), можно получить для функций $u_0(x)$ и $w_0(x)$ два обыкновенных дифференциальных уравнения, имеющих в пределе бесконечно высокий порядок. Метод не нашел применения для построения неклассических теорий, однако структура операторов $L_{mn}(\cdot)$ позволяет сделать важный вывод. Учет деформации сдвига осуществляется членами с коэффициентом k_g , который пропорционален \bar{h}^2 , а для учета нормальной деформации необходимо удерживать члены с коэффициентом k_e , пропорциональным \bar{h}^4 . Таким образом, уточняя классические теории для относительно тонкостенных конструкций, целесообразно учитывать деформацию сдвига и пренебрегать нормальной деформацией. Заметим, что в теориях, учитывающих нормальную деформацию, иногда не учитывается трансверсальный эффект Пуассона. Однако этот эффект, как правило, оказывает большее влияние на нормальную деформацию, чем соответствующее нормальное напряжение. Рассмотрим в качестве примера изотропную сферическую оболочку, нагруженную внутренним давлением, и введем относительное радиальное перемещение $\bar{u}_r = u_r / u_r^0$, где $u_r^0 = pR^2 / 2Eh$. Для оболочки с относительной толщиной $h / R = 0.1$ и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$ разность между относительными радиальными перемещениями для внутренней и наружной поверхностей, найденная без учета эффекта Пуассона, составляет 0.01, а аналогичная разность, полученная с учетом эффекта Пуассона, оказывается равной 0.1. В обоих случаях нормальная деформация является малой. Однако при учете эффекта Пуассона она оказывается в 10 раз большей величины, полученной без учета этого эффекта.

3. Слоистые балки, пластины и оболочки. Рассмотрим тонкостенные конструкции, состоящие из слоев с различными свойствами. Обзор исследований в этой области представлен в работах [58–60]. Модель системы, состоящей из относительно жестких слоев, описываемых классической теорией и относительно менее жестких прослоек, передающих на жесткие слои касательные и поперечные нормальные напряжения, предложена В.В. Болотиним [61, 62] и далее развита в монографии [63]. Модель, состоящая из безмоментных слоев и прослоек, работающих на сдвиг, представлена в работах [46, 64]. Широко распространенная в отечественной литературе гипотеза ломаной линии, называемая в английской литературе “Zig-Zag theory” [60], введена Э.И. Григлюком и П.П. Чулковым [65]. Предполагается, что перемещение u_x для слоя с номером k линейно изменяется по координате z и поле перемещений имеет вид (рис. 2):

$$u_x^k = u_0(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i(x) h_i + (z_0 - t_{k-1}) \theta_k(x) \quad (t_{k-1} \leq z_0 \leq t_k), \quad u_z^k = w_0(x).$$

Возможны два варианта теории. В первом предполагается, что углы поворота θ_i всех слоев являются неизвестными. В результате теория сводится

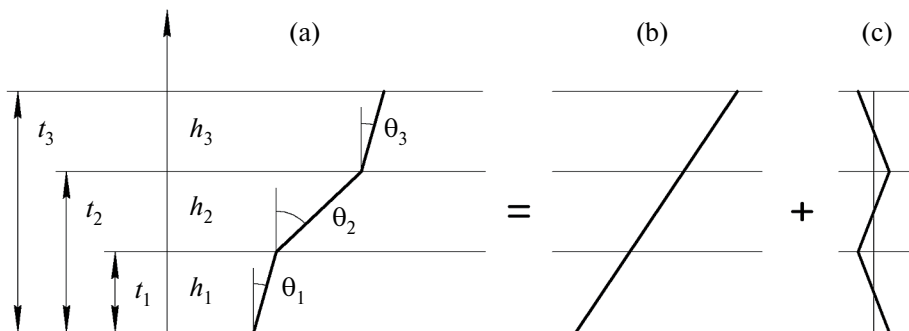


Рис. 2. Слоистая балка.

к системе уравнений, порядок которой зависит от числа слоев. Во втором варианте используются условия непрерывности касательных напряжений на границах слоев, которые позволяют связать углы поворота и получить рекуррентные соотношения:

$$\theta_k = \frac{G_{xz}^{(k-1)}}{G_{xz}^{(k)}} \theta_{k-1} + \left(\frac{G_{xz}^{(k-1)}}{G_{xz}^{(k)}} - 1 \right) w'_0,$$

позволяющие выразить все углы через угол θ_1 , соответствующий первому слою. В результате теория сводится к уравнениям, порядок которых не зависит от числа слоев.

Распределение перемещений в форме ломаной линии может быть представлено в виде суперпозиции прямолинейного распределения (рис. 2,а) и дополнительного распределения (рис. 2,б). Прямолинейное распределение соответствует полю перемещений (2.2) и теории, описывающей основное напряженное состояние, сводящееся к интегральным по толщине силам и моментам. Слоистая балка описывается эффективными коэффициентами жесткости [51], которые входят в соотношения упругости, связывающие силы и момент с деформациями для балки с полем перемещений (2.2):

$$N_x = B_x u'_0 + C_x u'_1, \quad M_x = C_x u'_0 + D_x u'_1, \quad Q_x = S_x (u_1 + w'_0),$$

где

$$B_x = I_0, \quad C_x = I_1 - e I_0, \quad D = I_2 - 2e I_1 + e^2 I_0, \\ I_n = \int_0^h b E_x(z_0) z_0^n dz_0 \quad (n = 0, 1, 2), \quad S_x = h^2 \left(\int_0^h \frac{dz_0}{b G_{xz}} \right)^{-1}$$

и e — координата нейтральной оси балки, отсчитываемая от ее нижней поверхности $z_0 = 0$. Принимая $e = I_1 / I_0$, получим $C_x = 0$, то есть для балки осевое нагружение можно отделить от изгиба. Для пластин и оболочек сделать это в общем случае невозможно.

Дополнительное распределение перемещений (рис. 2,б) описывает систему краевых эффектов, затухающих при удалении от края оболочки на расстояние, соизмеримое с ее толщиной. Как отмечено в разделе 2, прикладная значимость

этих эффектов невелика и для практического анализа слоистых балок, пластин и оболочек можно ограничиться основным напряженным состоянием, сводящимся к интегральным по толщине силам и моментам [51, 66, 67].

Существуют исключительные случаи, в которых необходимо использовать гипотезу ломаной линии. Рассмотрим осесимметричное нагружение цилиндрической оболочки, образованной из системы чередующихся симметричных армированных слоев с углами $\pm\varphi$ по отношению к образующей [64]. При осевом растяжении такой оболочки анизотропные слои поворачиваются относительно оси оболочки в противоположные стороны и распределение кольцевого перемещения по толщине оболочки имеет форму ломаной линии (рис. 3).

4. Заключение. Представлен аналитический обзор существующих неклассических теорий балок, пластин и оболочек, основанных на различных аппроксимациях распределения перемещений по толщине. Вводятся три условия согласования, обеспечивающие корректность получаемой теории. Условие энергетического согласования требует, чтобы уравнения равновесия, получаемые с помощью принципа возможных перемещений и вариационного принципа Лагранжа, совпадали. Согласно условию кинематического согласования, граничные условия, полученные из вариационного принципа для полностью закрепленного края, должны обеспечивать обращение в ноль перемещений. Условие статического согласования требует, чтобы граничные условия, полученные из вариационного принципа для свободного края, обеспечивали обращение в ноль всех интегральных по толщине силовых факторов, соответствующих принятой кинематической модели. Единственная прикладная теория, в которой выполняются все условия согласования, основана на линейном распределении тангенциальных перемещений по толщине и отсутствии поперечной нормальной деформации. Эту теорию предлагается квалифицировать как теорию основного напряженного состояния однородных и слоистых балок, пластин и оболочек, сводящегося к интегральным по толщине силам и моментам. Рассматриваются и обсуждаются основные существующие варианты неклассических теорий.

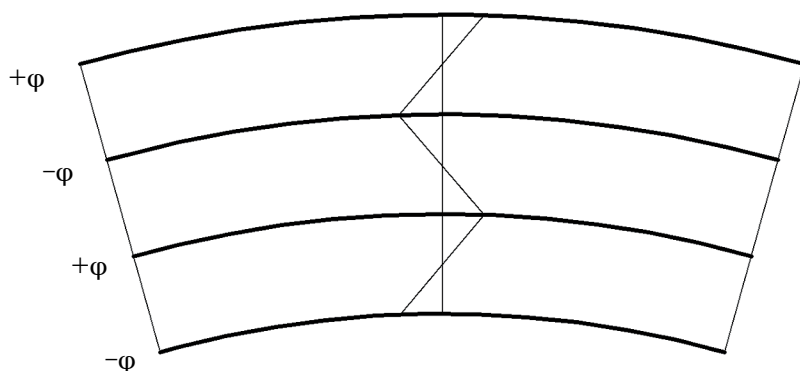


Рис. 3. Деформация оболочки, состоящей из слоев с углами армирования $\pm\varphi$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галинш А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1967. Вып. 5. С. 66–92; 1970. Вып. 6–7. С. 23–64.
2. Пелех Б.Л. Некоторые вопросы теории и расчета анизотропных оболочек и пластин с низкой сдвиговой жесткостью // Механика полимеров. 1970. № 4. С. 693–714.
3. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Механика деформируемого твердого тела. 1983. Т. 15. С. 3–68.
4. Ambartsumyan S.A. Nontraditional theories of shells and plates // Appl. Mech. Rev. 2002. V. 55. № 5. P. 35–44.
<https://doi.org/10.1115/1.1495002>
5. Аннин Б.Д., Волчков Ю.М. Неклассические модели теории пластин и оболочек // ПМТФ. 2016. Т. 56. № 5. С. 5–14.
<http://doi.org/10.15372/PMTF20160501>
6. Carrera E., Elishakov I., Petrolo M. Who needs refined structural theories? // Compos. Struct. 2021. V. 264. № 2. P. 1–6.
<http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113671>
7. Jemielita G. On the winding paths of the theory of plates // J. of Theoretical and Applied Mechanics. 1993. V. 31. № 2. P. 317–327.
8. Васильев В.В. Теория тонких упругих пластин — история и современное состояние проблемы // Изв. РАН. МТ Т. 2024. № 2. С. 3–39.
9. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. Киев: Изд. АН УССР, 1963. 255 с.
10. Рапопорт И.М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. М.: Машиностроение, 1967. 360 с.
11. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 287 с.
12. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассических теорий пластин // Изв. РАН. МТ Т. 1990. № 2. С. 158–167.
13. Vasiliev V.V., Lurie S.A. On the refined theories of beams, plates and shells // J. Compos.Mater. 1992. V. 26. № 4. P. 546–557.
14. Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. РАН. МТ Т. 1992. № 3. С. 48–64.
15. Timoshenko S.P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Phil. Mag. and J. of Science. 1921. Ser. 6. V. 41. № 245. P. 744–746.
<https://doi.org/10.1080/14786442108636264>
16. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Часть 2. Стержни и пластинки. Петроград: Тип. А.Э. Коллинс, 1916. 424 с.
17. Elishakov I. Handbook on Timoshenko-Ehrenfest beam and Uflyand-Mindlin plate theories. World Scientific Publ. Co. 2020. 769 p.
18. Hencky H. Uber die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten // Ing. Arch. 1947. V. 16. P. 72–76.
19. Bolle L. Contribution au problem lineaire de flexion d'une plaque elastique // Bull. Tech. Suisse Romander. 1947. V. 11. 32 p.
20. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates // J. Math. Phys. 1944. V. 23. № 4. P. 184–191.
21. Naghdy P.M. On the theory of thin elastic shells // Quart. J. Appl. Math. 1957. V. 14. № 4. P. 369–380.
22. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение, 1965. 272 с.

23. Bert W.C. Structural theory for laminated anisotropic elastic shells // J. Compos. Mater. 1967. V. 1. P. 414–423.
24. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наук. Думка, 1973. 248 с.
25. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 3. С. 287–300.
26. Mindlin R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. V. 18. № 1. P. 31–38.
<https://doi.org/10.1115/1.4010217>
27. Власов Б.Ф. Об уравнениях теории изгиба пластинок // Изв. АН СССР. ОН. 1957. № 12. С. 57–60.
28. Гольденвейзер А.Л. О теории изгиба пластин Райсснера // Изв. АН СССР. ОН. 1958. № 4. С. 102–109.
29. Riocco E., Reddy J.N. Analytical solutions of Reddy, Timoshenko and Bernulli beam models: A comparative analysis // Eur. J. Mech. A/Solids. 2023. V. 99. P. 1–14.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.104953>
30. Groh R.M.J., Weaver P.M. Static inconsistencies in certain higher-order shear deformation theories for beams, plates and shells // Compos. Struct. 2015. V. 120. P. 231–245.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.10.006>
31. Wang C.M., Reddy J.N., Lee K.N. Shear deformable beams and plates. Elsevier, 2000. 296 p.
32. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
33. Амбарцумян С.А. О теории изгиба анизотропных пластин // Изв. АН СССР. ОН. 1958. № 5. С. 69–77.
34. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 266 с.
35. Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic plates. Technomic, 1970. 255 p.
36. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 447 с.
37. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
38. Kromm A. Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik // Ing. Arciv. 1953. V. 21. P. 266–286.
39. Kromm A. Über die Randquerräfte bei gestützten Platten // Z. angew. Math. Mech. 1955. V. 36. № 6–7. P. 231–242.
40. Васильев В.В. О преобразованиях Кирхгофа и Томсона-Тэта в классической теории пластин // Изв. РАН. МТ Т. 2012. № 5. С. 98–107.
41. Васильев В.В., Лурье С.А. Вариант уточненной теории изгиба балок из слоистых пластмасс // Механика полимеров. 1972. Вып. 4. С. 674–681.
42. Васильев В.В., Лурье С.А. Плоская задача теории упругости для ортотропной консольной полосы // Изв. АН СССР. МТ Т. 1984. № 5. С. 125–135.
43. Васильев В.В., Лурье С.А. Дифференциальные уравнения и проблема сингулярности решений в прикладной механике и математике // ПМТФ. 2023. Т. 64. № 1. С. 114–127.
<https://doi.org/10.15372/PMTF202215157>
44. Васильев В.В., Лурье С.А. Плоская задача теории упругости для консольной полосы с микроструктурой // Композиты и наноструктуры. 2017. Т. 9. № 2. С. 63–76.
45. Boal J.L., Reissner E. Three-dimensional theory of elastic plates with transverse inextensibility // J. Math. Phys. 1960. V. 39. № 1–4. P. 161–181.
<https://doi.org/10.1002/sapm1960391161>
46. Васильев В.В. Исследование краевого эффекта в цилиндрической оболочке из стеклопластика // Инженерный журнал. 1965. Т. 5. Вып. 1. С. 143–154.
47. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теории пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера // Изв. АН СССР. 1990. № 6. С. 124–138.
48. Гольденвейзер А.Л. О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. РАН. МТ Т. 1997. № 3. С. 134–148.

49. *Васильев В.В.* Об асимптотическом методе обоснования теории пластин // Изв. РАН. МТ Т. 1997. № 3. С. 150–155.
50. *Гольденвейзер А.Л.* Замечания о статье В.В. Васильева “Об асимптотическом методе обоснования теории пластин” // Изв. РАН. МТ Т. 1997. № 4. С. 150–158.
51. *Vasiliev V.V.* Theory of composite shells. In: *Mechanics of Composites*, Moscow: Mir. Publ, 1982. P. 223–251.
52. *Васильев В.В., Назаренко В.Г.* Вариант теории толстых многослойных цилиндрических оболочек // *Механика полимеров*. 1974. № 6. С. 1071–1078.
53. *Ульяшина А.Н.* Напряженно-деформированное состояние ортотропных слоистых пластин // Изв. АН СССР. МТ Т. 1979. № 1. С. 145–154.
54. *Ульяшина А.Н.* Уравнения технической теории ортотропных оболочек с учетом сдвиговой и нормальной поперечной деформаций // *Механика полимеров*. 1977. № 2. С. 270–276.
55. *Vijayakumar K.* Poisson-Kirchhoff paradox in flexure of plates // *AIAA J.* 1988. V. 26. № 2. P. 247–249.
56. *Власов В.З.* Метод начальных функций в задачах теории упругости // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 7. С. 49–69.
57. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 270 с.
58. *Григолюк Э.И., Коган Ф.А.* Современное состояние теории многослойных оболочек // *Прикладная механика*. 1972. Т. 8. № 6. С. 3–17.
59. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // *Механика композитных материалов*. 1988. № 2. С. 287–298.
60. *Carrera E.* Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells // *Appl. Mech. Rev.* 2003. V. 56. № 3. P. 287–308.
<https://doi.org/10.1115/1.1557614>
61. *Болотин В.В.* Теория слоистых плит // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 3. С. 65–72.
62. *Болотин В.В.* Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1964. № 1. С. 61–66.
63. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
64. *Елпатьевский А.Н., Васильев В.В.* Исследование напряженного состояния цилиндрической оболочки, навитой из стекловолокна // *Инженерный журнал*. 1965. Т. 5. Вып. 1. С. 129–142.
65. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Теория вязкоупругих многослойных оболочек с жестким наполнителем при конечных прогибах // *ПМТФ*. 1964. № 5. С. 109–117.
66. *Васильев В.В.* Прикладная теория композитных оболочек // *Механика композитных материалов*. 1985. № 5. С. 843–852.
67. *Васильев В.В.* Некоторые проблемы теории оболочек, связанные с особенностями современных конструкционных материалов // Изв. АН СССР. МТ Т. 1987. № 5. С. 178–188.

NON-CLASSICAL THEORIES OF BEAMS, PLATES AND SHELLS (REVIEW)

V. V. Vasiliev^{a, *}

^a*Central Research Institute of Special Engineering, Khotkovo, Russia*

^{*}*e-mail: vvvas@dol.ru*

Received May 29, 2024

Revised June 10, 2024

Accepted June 11, 2024

Abstract. The article is an analytical review and is devoted to the problem of constructing non-classical theories of beams, plates and shells, the relevance of which is associated with the emergence of new structural materials with properties that do not fully correspond to the hypotheses adopted in the construction of classical theories. The presentation is based on the analysis of the problem of lowering the order of equations of elasticity theory for thin-walled structural elements and mathematical and physical methods used for this purpose. The main focus is on the correctness and energy consistency of these methods. The presentation is illustrated with examples of specific theories.

Keywords: *theory of beams, plates and shells*

REFERENCES

1. Galinsh A.K. Calculation of plates and shells according to refined theories // Studies on the theory of plates about shells. Kazan: Publishing House of the Kazan University, 1967. № 5. P. 66–92; 1970. № 6–7. P. 23–64.
2. Pelekh B.L. Some questions of the theory and calculation of anisotropic shells and plates with low shear stiffness // Mechanics of polymers. 1970. № 4. P. 693–714.
3. Dudchenko A.A., Lurie S.A., Obraztsov I.F. Anisotropic multilayer plates and shells // Mechanics of a deformable solid. 1983. V. 15. P. 3–68.
4. Ambartsumyan S.A. Nontraditional theories of shells and plates // Appl. Mech. Rev. 2002. V. 55. № 5. P. 35–44.
<https://doi.org/10.1115/1.1495002>
5. Annin B.D., Volchkov Yu.M. Nonclassical models of the theory of plates and shells // PMTF. 2016. Vol. 56. No. 5. P. 5–14.
<http://doi.org/10.15372/PMTF20160501>
6. Carrera E., Elishakov I., Petrolo M. Who needs refined structural theories? // Compos. Struct. 2021. V. 264. № 2. P. 1–6.
<http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113671>
7. Jemielita G. On the winding paths of the theory of plates // J. of Theoretical and Applied Mechanics. 1993. V. 31. № 2. P. 317–327.
8. Vasiliev V.V. The theory of thin elastic plates – the history and current state of the problem // Bulletin of RAS. Solid Body Mechanics. 2024. № 2. P. 3–39.
9. Kilchevsky N.A. Fundamentals of analytical mechanics of shells. Kiev: Ed. Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1963. 255 p.
10. Rapoport I.M. Vibrations of an elastic shell partially filled with liquid. Moscow: Mashinostroenie, 1967. 360 p.

11. *Vekua I.N.* Some general methods for constructing various versions of shell theory. Moscow: Nauka, 1982. 287 p.
12. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* On the problem of constructing non-classical plate theories // Bulletin of RAS. MT. 1990. № 2. P. 158–167.
13. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* On the refined theories of beams, plates and shells // J. Compos. Mater. 1992. V. 26. № 4. P. 546–557.
14. *Zhilin P.A.* On the theories of Poisson and Kirchhoff plates from the standpoint of modern plate theory // Bulletin of RAS. Solid Body Mechanics. 1992. № 3. P. 48–64.
15. *Timoshenko S.P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Phil. Mag. and J. of Science. 1921. Ser. 6. V. 41. № 245. P. 744–746. <https://doi.org/10.1080/14786442108636264>
16. *Timoshenko S.P.* Course of elasticity theory. Part 2. Rods and plates. Petrograd: Type. A.E. Collins, 1916. 424 p.
17. *Elishakov I.* Handbook on Timoshenko-Ehrenfest beam and Uflyand-Mindlin plate theories. World Scientific Publ. Co. 2020. 769 p.
18. *Hencky H.* Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten // Ing. Arch. 1947. V. 16. P. 72–76.
19. *Bolle L.* Contribution au problem lineaire de flexion d'une plaque elastique // Bull. Tech. Suisse Romander. 1947. V. 11. 32 p.
20. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates // J. Math. Phys. 1944. V. 23. № 4. P. 184–191.
21. *Naghdy P.M.* On the theory of thin elastic shells // Quart. J. Appl. Math. 1957. V. 14. № 4. P. 369–380.
22. *Korolev V.I.* Layered anisotropic plates and shells made of reinforced plastics. Moscow: Mashinostroenie, 1965. 272 p.
23. *Bert W.C.* Structural theory for laminated anisotropic elastic shells // J. Compos. Mater. 1967. V. 1. P. 414–423.
24. *Pelek B.L.* Theory of shells with finite shear stiffness. Kiev: Nauk. Dumka, 1973. 248 p.
25. *Uflyand Ya.S.* Wave propagation during transverse vibrations of rods and plates // PMM. 1948. Vol. 12. № 3. P. 287–300.
26. *Mindlin R.D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. V. 18. № 1. P. 31–38. <https://doi.org/10.1115/1.4010217>
27. *Vlasov B.F.* On the equations of the theory of bending plates // Bulletin of USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences 1957. № 12. P. 57–60.
28. *Goldenweiser A.L.* On the theory of bending of Reissner plates // Bulletin of USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences 1958. № 4. P. 102–109.
29. *Riocco E., Reddy J.N.* Analytical solutions of Reddy, Timoshenko and Bernulli beam models: A comparative analysis // Eur. J. Mech. A/Solids. 2023. V. 99. P. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.104953>
30. *Groh R.M.J., Weaver P.M.* Static inconsistencies in certain higher-order shear deformation theories for beams, plates and shells // Compos. Struct. 2015. V. 120. P. 231–245. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.10.006>
31. *Wang C.M., Reddy J.N., Lee K.N.* Shear deformable beams and plates. Elsevier, 2000. 296 p.
32. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
33. *Ambartsumyan S.A.* On the theory of bending of anisotropic plates // Bulletin of USSR Academy OF Sciences. DATED 1958. № 5. P. 69–77.
34. *Ambartsumyan S.A.* Theory of anisotropic plates. Moscow: Nauka, 1967. 266 p.
35. *Ambartsumyan S.A.* Theory of anisotropic plates. Technomic, 1970. 255 p.
36. *Ambartsumyan S.A.* General theory of anisotropic shells. Moscow: Nauka, 1974. 447 p.
37. *Ambartsumyan S.A.* Theory of anisotropic plates. Moscow: Nauka, 1987. 360 p.

38. *Kromm A.* Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik // Ing. Arciv. 1953. V. 21. P. 266–286.
39. *Kromm A.* Über die Randquerraffe bei gestutzten Platten // Z. angew. Marh. Mech. 1955. V. 36. № 6–7. P. 231–242.
40. *Vasiliev V.V.* On the Kirchhoff and Thomson-Theta transformations in the classical theory of plates // Bulletin of RAS. Solid Body Mechanics. 2012. № 5. P. 98–107.
41. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* A variant of the refined theory of bending beams made of laminated plastics // Mechanics of polymers. 1972. № 4. P. 674–681.
42. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* A planar problem of elasticity theory for an orthotropic cantilever strip // Bulletin of USSR Academy OF Sciences. MT. 1984. № 5. P. 125–135.
43. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* Differential equations and the problem of singularity of solutions in applied mechanics and mathematics // PMTF. 2023. Vol. 64. № 1. P. 114–127. <https://doi.org/10.15372/PMTF202215157>
44. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* A planar problem of elasticity theory for a cantilever strip with a microstructure // Composites and nanostructures. 2017. Vol. 9. № 2. P. 63–76.
45. *Boal J.L., Reissner E.* Three-dimensional theory of elastic plates with transverse inextensibility // J. Math. Phys. 1960. V. 39. № 1–4. P. 161–181. <https://doi.org/10.1002/sapm1960391161>
46. *Vasiliev V.V.* Investigation of the edge effect in a cylindrical fiberglass shell // Engineering Journal. 1965. V. 5. № 1. P. 143–154.
47. *Goldenweiser A.L., Kaplunov Yu.D., Nolde E.V.* Asymptotic analysis and refinement of the theory of plates and shells of the Timoshenko-Reissner type // Bulleting of USSR Academy of Sciences. 1990. № 6. P. 124–138.
48. *Goldenweiser A.L.* On approximate methods for calculating thin elastic shells and plates // Bulletin of RAS. Solid Body Mechanics. 1997. № 3. P. 134–148.
49. *Vasiliev V.V.* On the asymptotic method of substantiating the theory of plates // Bulletin of RAS. Solid Body Mechanics. 1997. № 3. P. 150–155.
50. *Goldenweiser A.L.* Comments on the article by V.V. Vasilyeva “On the asymptotic method of substantiating the theory of plates” // Bulletin of RAS. Solid Body Mechanics. 1997. № 4. P. 150–158.
51. *Vasiliev V.V.* Theory of composite shells. In: Mechanics of Composites, Moscow: Mir. Publ, 1982. P. 223–251.
52. *Vasiliev V.V., Nazarenko V.G.* A variant of the theory of thick multilayer cylindrical shells // Mechanics of polymers. 1974. № 6. P. 1071–1078.
53. *Ulyashina A.N.* Stress-strain state of orthotropic layered plates // Bulletin of USSR Academy OF Sciences. MT. 1979. № 1. P. 145–154.
54. *Ulyashina A.N.* Equations of the technical theory of orthotropic shells taking into account shear and normal transverse deformations // Mechanics of polymers. 1977. № 2. P. 270–276.
55. *Vijayakumar K.* Poisson-Kirchhoff paradox in flexure of plates // AIAA J. 1988. V. 26. № 2. P. 247–249.
56. *Vlasov V.Z.* Method of initial functions in problems of elasticity theory // Bulletin of USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences 1955. № 7. P. 49–69.
57. *Vasiliev V.V.* Mechanics of structures made of composite materials. Moscow: Mashinostroenie, 1988. 270 p.
58. *Grigolyuk E.I., Kogan F.A.* Current state of the theory of multilayer shells // Applied Mechanics. 1972. V. 8. № 6. P. 3–17.
59. *Grigolyuk E.I., Kulikov G.M.* Development of a general direction in the theory of multilayer shells // Mechanics of composite materials. 1988. № 2. P. 287–298.
60. *Carrera E.* Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells // Appl. Mech. Rev. 2003. V. 56. № 3. P. 287–308. <https://doi.org/10.1115/1.1557614>
61. *Bolotin V.V.* Theory of layered plates // Bulletin of USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences. Mechanics and mechanical engineering. 1963. № 3. P. 65–72.

62. *Bolotin V.V.* On the bending of plates consisting of a large number of layers // Bulletin of USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences. Mechanics and mechanical engineering. 1964. № 1. P. 61–66.
63. *Bolotin V.V., Novichok Yu.N.* Mechanics of multilayer structures. Moscow: Mashinostroenie, 1980. 375 p.
64. *Elpatyevsky A.N., Vasiliev V.V.* Investigation of the stress state of a cylindrical shell wound from fiberglass // Engineering Journal. 1965. V. 5. № 1. P. 129–142.
65. *Grigolyuk E.I., Chulkov P.P.* Theory of viscoelastic multilayer shells with rigid filler at finite deflections // PMTF. 1964. № 5. P. 109–117.
66. *Vasiliev V.V.* Applied theory of composite shells // Mechanics of composite materials. 1985. № 5. P. 843–852.
67. *Vasiliev V.V.* Some problems of shell theory related to the features of modern structural materials // Bulletin of USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences. Solid Body Mechanics. 1987. № 5. P. 178–188.

УДК 539.3:532.73

ОПИСАНИЕ СВОЙСТВ ПОЛИМЕРНЫХ ГЕЛЕЙ В РАМКАХ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ МУНИ–РИВЛИНА

© 2024 г. Е. Я. Денисюк^{а, *}

^аИнститут механики сплошных сред Уральского отделения РАН, Пермь, Россия

*e-mail: denisyuk@icmm.ru

Поступила в редакцию 02.05.2024 г.

После доработки 28.05.2024 г.

Принята к публикации 30.05.2024 г.

Полимерный гель рассматривается как смесь, представляющая собой высокоэластичный упругий материал и растворенную в нем жидкость (растворитель). На основе обобщенной модели Муни–Ривлина предложено выражение свободной энергии, описывающее деформационное поведение и термодинамические свойства полимерных гелей. В данной модели полагается, что “константы” Муни–Ривлина зависят от концентрации растворенной в полимере жидкости. Из этого выражения получены определяющие соотношения для тензора напряжений, химического потенциала растворителя и осмотического тензора напряжений. На их основе выполнено экспериментальное исследование деформационных свойств набухших в растворителе сетчатых эластомеров различной химической природы. В частности, изучена зависимость упругих свойств эластомеров от концентрации растворителя и определены параметры, описывающие эту зависимость.

Ключевые слова: полимерные гели, конечные деформации, определяющие соотношения, набухание, тензор напряжений, химический потенциал, осмотический тензор напряжений

DOI: 10.31857/S1026351924060023, EDN: TZJMW7

1. Введение. Полимерные гели — это высокоэластичные, резиноподобные полимерные материалы, содержащие жидкость (растворитель). На молекулярном уровне они представляют собой пространственную полимерную сетку, состоящую из длинных и гибких макромолекулярных цепей, соединенных между собой химическими связями. Межцепное пространство полимерной сетки заполняет растворитель. Благодаря такому строению полимерные гели способны испытывать большие упругие деформации [1]. С точки зрения механики сплошных сред их естественно рассматривать как смесь, состоящую из упругого материала и растворенной в нем жидкости. Согласно данному определению к гелям относятся многие высокопластифицированные полимеры и набухшие в растворителе эластомеры.

Благодаря свойству поглощать и удерживать в себе большие объемы жидкости, многократно (в десятки и в сотни раз) превосходящие исходный объем полимера, полимерные гели находят применение во многих современных технологиях [2–9]. Растворенная в геле жидкость существенно влияет на его упругие свойства и деформационное поведение. В частности, способность геля поглощать (или выделять) жидкость в данных условиях зависит от приложенных механических нагрузок, а его напряженно-деформированное состояние — от распределения растворителя в полимере. Это обстоятельство нужно учитывать при проектировании устройств и технологических процессов, основанных на применении полимерных гелей, а также при разработке полимерных материалов, предназначенных для эксплуатации в агрессивных жидкостях — в органических растворителях и пластификаторах. В связи с этим возникает необходимость в прогнозировании поведения полимерных материалов, подвергаемых комплексному воздействию механических нагрузок и среды растворителя. Для решения таких задач нужно иметь систему определяющих соотношений, характеризующих свойства геля. В эту систему входит выражение для тензора механических напряжений и химического потенциала растворителя. Соответствующие соотношения для них можно получить, если известно выражение потенциала свободной энергии геля. Последнее обычно выводится с помощью методов статистической физики или строится на основе обобщения эмпирических данных.

Одна из первых и весьма удачных моделей сетчатых полимеров, наполненных жидкостью, является теория Флори–Ренера [10]. Она позволила объяснить многие важные, экспериментально наблюдаемые факты и явления: равновесное набухание сетчатых полимеров в растворителях, зависимость равновесной степени набухания полимера от деформации при одноосном растяжении образца, зависимость модуля сдвига геля от средней молекулярной массы цепей полимерной сетки и от концентрации растворителя и т.д. До сих пор теория Флори–Ренера широко используется при моделировании свойств полимерных гелей, а также для экспериментального определения параметров, характеризующих свойства сетчатых полимеров.

В теории Флори–Ренера полимерная сетка полагается фантомной. Это означает, что цепи такой сетки не взаимодействуют с соседями и способны к самопересечению. В таком приближении хорошо описываются свойства набухших полимерных сеток, содержащих достаточно большое количество растворителя. При низких концентрациях растворителя наблюдаются значительные отклонения упругого поведения реальных полимерных гелей от соотношений, вытекающих из теории Флори–Ренера. В связи с этим были предприняты многочисленные попытки построить более реалистичные теории сетчатых полимеров, которые давали бы более точное описание поведения реальных материалов. К настоящему времени не удалось разработать универсальную теорию полимерных сеток. Тем не менее в процессе решения этой проблемы было предложено большое количество теоретических и эмпирических моделей, учитывающих различные аспекты деформационного поведения сетчатых полимеров и полимерных гелей. Описание и анализ наиболее популярных теорий можно найти в статьях и содержащихся в них обзорах [11–18].

Одним из недостатков многих теорий полимерных сеток является их чрезмерная сложность, что приводит к значительным трудностям при решении конкретных задач. В частности, они могут содержать параметры, которые

весьма трудно измерить экспериментально. Все это сильно затрудняет их использование для решения прикладных задач. Выходом из этой ситуации является компромиссное решение — обратиться к более простым эмпирическим и полуэмпирическим моделям, способным описать изучаемые явления с приемлемой точностью. К таким моделям, несомненно, относится эмпирическая модель Муни—Ривлина [19].

В данной работе для описания свойств полимерных гелей используется обобщенная модель Муни—Ривлина. Соответствующее выражение для потенциала свободной энергии строится следующим образом. За основу берется свободная энергия Флори—Ренера. Она представляет собой сумму двух слагаемых — свободной энергии растворенной в полимере жидкости и упругой энергии полимерной сетки. Последнее заменяется выражением Муни—Ривлина, при этом полагается, что так называемые константы Муни—Ривлина здесь являются не константами, а функциями, зависящими от концентрации растворителя. Впервые такой подход был применен в работе [20]. Однако в этой работе выражения для тензора напряжений и химического потенциала были получены только для частного случая одноосного растяжения геля.

Основная цель настоящей работы состоит в следующем. С помощью указанного выше подхода предложить выражение свободной энергии, способное более адекватно, по сравнению с потенциалом Флори—Ренера, описать упругие и термодинамические свойства реальных полимерных гелей. На его основе получить определяющие соотношения для тензора напряжений, химического потенциала и осмотического тензора напряжений, характеризующие гель в произвольном напряженно-деформированном состоянии, осуществить экспериментальную проверку работоспособности предложенной модели для эластомеров и органических растворителей различной химической природы.

2. Состояния равновесия геля. Следуя [21–23], напомним основные принципы описания напряженно-деформированного состояния полимерного геля. Рассмотрим образец полимерного геля в ненагруженном состоянии с однородным распределением растворителя. Это исходное состояние геля примем в качестве отсчетного. Гель будем считать однородным и изотропным материалом. Пусть Ω^0 — ограниченная область пространства, которую занимает гель в отсчетной конфигурации. Положение материальных частиц полимерной матрицы в отсчетной конфигурации определяется радиус-вектором \mathbf{r} , а их положение в деформированной конфигурации Ω — радиус-вектором $\mathbf{R}(\mathbf{r})$. Деформированное состояние геля характеризует градиент места $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{R}(\mathbf{r})$, где ∇ — набла-оператор, действующий в отсчетной конфигурации [24]. Соответственно, ∇ — набла-оператор, действующий в деформированной конфигурации. Третий инвариант градиента места $J = \det \mathbf{F}$ описывает объемные деформации геля. Компонентный состав геля характеризуют N_1 и N_2 — мольные концентрации растворителя и субцепей полимерной сетки соответственно, отнесенные к единичному объему отсчетной конфигурации. Будем полагать, что положение части границы в деформированном состоянии задано и имеет конфигурацию Γ_0 . Эта конфигурация задается функцией $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0(\mathbf{r})$. На остальной части границы Γ_1 действуют поверхностные силы с плотностью \mathbf{g} .

Полимерный гель будем рассматривать в приближении несжимаемой смеси. Смесь называется несжимаемой, если при фиксированной концентрации компонентов ее объем не зависит от внешних механических нагрузок, однако

он зависит от компонентного состава смеси. Условие несжимаемости геля задается следующим уравнением [21, 22]:

$$\bar{V}_1 N_1 + \bar{V}_2 N_2 - J = 0, \quad (2.1)$$

где \bar{V}_1 и \bar{V}_2 — парциальные мольные объемы растворителя и полимера соответственно. Из него следует, что концентрация растворителя может быть выражена через объемные деформации геля и, следовательно, распределение растворителя в геле можно описать, задав третий инвариант градиента деформации $J = \det \mathbf{F}$ как функцию координат.

Под действием приложенных нагрузок гель деформируется. Это может породить диффузию и перераспределение растворителя в объеме геля. При этом часть растворителя может быть выдавлена из полимера во внешнюю среду (или поглощаться гелем из внешней среды). Диффузия — весьма медленный процесс и при статических нагрузках фактически протекает в квазистатическом режиме, поэтому с высокой точностью можно считать, что гель в каждый момент времени находится в состоянии механического равновесия [25, 26]. Это состояние в деформированной (текущей) конфигурации описывается следующей краевой задачей:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \det \mathbf{F} = J_*(\mathbf{r}) \text{ в } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 \text{ на } \Gamma_0; \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma_1, \quad (2.3)$$

где \mathbf{T} — тензор напряжений Коши; \mathbf{n} — вектор внешней нормали; $J_*(\mathbf{r})$ — функция, задающая текущее распределение растворителя в геле.

Тензор напряжений Коши определяется соотношением:

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F}^T \cdot \partial f / \partial \mathbf{F} - p \mathbf{E}, \quad (2.4)$$

где \mathbf{E} — единичный тензор; p — гидростатическое давление, которое является лагранжевым множителем, ассоциированным с условием несжимаемости (2.1); f — плотность свободной энергии геля, отнесенная к единичному объему отсчетной конфигурации. Последняя есть функция вида:

$$f = f(\mathbf{F}, N_1, N_2). \quad (2.5)$$

Краевая задача (2.2)–(2.3) описывает напряженно-деформированное состояние геля в условиях механического равновесия при заданном распределении растворителя. Ее можно рассматривать как обобщение задач теории упругости для несжимаемого материала. Если же распределение растворителя однородное, то при соответствующем выборе отсчетной конфигурации $J_*(\mathbf{r}) = 1$, и данная задача становится полностью аналогичной задаче теории упругости для несжимаемого материала.

Если гель находится в среде растворителя, то при статических нагрузках, после завершения диффузионного процесса, гель перейдет в состоянии термодинамического равновесия. Это конечное состояние равновесия описывается краевой задачей следующего вида:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \mu = \mu_* \text{ в } \Omega, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 \text{ на } \Gamma_0; \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma_1, \quad (2.7)$$

где μ — химический потенциал растворителя в геле, μ_* — константа, равная химическому потенциалу растворителя во внешней среде. Химический потенциал μ — это функция, зависящая от деформации геля и от концентрации растворителя. С учетом условия несжимаемости (2.1) она определяется соотношением [21, 22]:

$$\mu = \partial f / \partial N_1 + \bar{V}_1 p. \quad (2.8)$$

Тензор напряжений \mathbf{T} здесь по-прежнему задается равенством (2.4).

Таким образом, состояние термодинамического равновесия геля определяется двумя уравнениями (2.6). Первое уравнение — это условие механического равновесия, которое исключает механическое движение геля. Второе уравнение означает отсутствие диффузии растворителя в геле. Оно хорошо известно в термодинамике растворов [27].

Задаче (2.6)–(2.7) можно придать вид, в котором она оказывается полностью аналогичной обычной статической задаче теории упругости [21, 22]. Для этого достаточно, используя второе уравнение (2.6) и выражение (2.8), найти давление:

$$p = -\bar{V}_1^{-1} \partial f / \partial N_1 + \bar{V}_1^{-1} \mu_*. \quad (2.9)$$

Далее, подставив это выражение в соотношение (2.4), тензор напряжений запишем в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Pi} + \pi_* \mathbf{E}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}^T \cdot \partial f / \partial \mathbf{F} - \pi \mathbf{E}, \quad \pi = -\bar{V}_1^{-1} \partial f / \partial N_1, \quad (2.11)$$

где $\pi_* = -\bar{V}_1^{-1} \mu_*$. В термодинамике растворов π называется осмотическим давлением [27]. Тензор (2.11) характеризует напряжения в геле, находящемся в состоянии термодинамического равновесия, и называется осмотическим тензором напряжений [21, 22]. В отличие от тензора напряжений (2.4), согласно выражениям (2.11), он не содержит неопределенных параметров и является функцией состояния геля.

В результате этой процедуры задача (2.6)–(2.7) примет следующий вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{0} \text{ в } \Omega, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 \text{ на } \Gamma_0; \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} = -\mathbf{n} \pi_* - \mathbf{g} \text{ на } \Gamma_1. \quad (2.13)$$

Итак, механическое и термодинамическое равновесия геля описывают краевые задачи вида (2.2)–(2.3), (2.6)–(2.7), (2.12)–(2.13). Постановка других типов задач механики полимерных гелей имеется в [21–23].

3. Свободная энергия геля и определяющие соотношения. Как показано выше, основными величинами, характеризующими состояние геля, являются: тензор напряжений Коши, химический потенциал растворенной в геле жидкости и осмотический тензор напряжений. Их можно определить с помощью

соотношений (2.4), (2.8) и (2.11), если известно выражение плотности свободной энергии геля (2.5).

Гель рассматривается как изотропный материал, поэтому деформационную зависимость свободной энергии (2.5) можно выразить в терминах главных инвариантов меры деформации Фингера $\mathbf{B} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ (левой меры деформации Коши–Грина). Гель при фиксированной концентрации растворителя считается несжимаемым материалом, а его объемные деформации, согласно равенству (2.1), зависят только от концентрации поглощенной жидкости. Поэтому деформационная зависимость f полностью описывается с помощью первых двух главных инвариантов меры деформаций Фингера:

$$I_1(\mathbf{B}) = \mathbf{E} : \mathbf{B}, I_2(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \left[I_1^2(\mathbf{B}) - I_1(\mathbf{B}^2) \right]. \quad (3.1)$$

Используя меру деформации искажения формы $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} / J^{2/3}$ и ее инварианты

$$\hat{I}_1 = I_1 / J^{2/3}, \hat{I}_2 = I_2 / J^{4/3}, \quad (3.2)$$

свободную энергию геля можно представить функцией вида [21]

$$f = f(\hat{I}_1, \hat{I}_2, N_1, N_2). \quad (3.3)$$

Применение формул (2.4), (2.8), (2.11) к выражению (3.3) дает общую структуру определяющих соотношений изотропного, однородного геля в приближении несжимаемой смеси [21]:

$$\mathbf{T} = \xi_1 \left[\hat{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \hat{I}_1 \mathbf{E} \right] - \xi_2 \left[\hat{\mathbf{B}}^2 - \frac{1}{3} I_1(\hat{\mathbf{B}}^2) \mathbf{E} \right] - p \mathbf{E}, \quad (3.4)$$

$$\xi_1 = 2 \left(\partial f / \partial \hat{I}_1 \right)_{N_1, N_2} + 2 \hat{I}_1 \left(\partial f / \partial \hat{I}_2 \right)_{N_1, N_2}, \xi_2 = 2 \left(\partial f / \partial \hat{I}_2 \right)_{N_1, N_2}, \quad (3.5)$$

$$\mu = \left(\partial f / \partial N_1 \right)_{\hat{I}_1, \hat{I}_2, N_2} + \bar{V}_1 p, \quad (3.6)$$

$$\Pi = \xi_1 \left[\hat{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \hat{I}_1 \mathbf{E} \right] - \xi_2 \left[\hat{\mathbf{B}}^2 - \frac{1}{3} I_1(\hat{\mathbf{B}}^2) \mathbf{E} \right] - \pi \mathbf{E}, \quad (3.7)$$

$$\pi = -\bar{V}_1^{-1} \left(\partial f / \partial N_1 \right)_{\hat{I}_1, \hat{I}_2, N_2}. \quad (3.8)$$

Здесь использованы известные формулы дифференцирования главных инвариантов [24]:

$$\partial I_1 / \partial \mathbf{F} = 2\mathbf{F}, \partial I_2 / \partial \mathbf{F} = 2\mathbf{F} \cdot (I_1 \mathbf{E} - \mathbf{B}), \partial J / \partial \mathbf{F} = J\mathbf{F}^{-T}.$$

Свободная энергия геля обычно представляется в виде суммы [10–12]:

$$f = f_{\text{el}} + f_{\text{mix}}, \quad (3.9)$$

где f_{el} – упругая энергия деформирования; f_{mix} – свободная энергия смешения, которая определяется как разность полной свободной энергии растворителя в геле и свободной энергии чистого растворителя. Упругая составляющая свободной энергии f_{el} зависит от деформаций, а f_{mix} – только от концентраций компонентов. В теории Флори–Ренера

$$f_{el} = \frac{1}{2} RT N_2 \phi_2^{-2/3} \hat{I}_1, f_{mix} = RT(N_1 \ln \phi_1 + \chi N_1 \phi_2), \quad (3.10)$$

где T — абсолютная температура; R — универсальная газовая постоянная; χ — безразмерный параметр Флори–Хаггинса, учитывающий взаимодействие полимера с растворителем; N_1 — мольная концентрация растворителя в геле; N_2 — мольная концентрация субцепей полимерной сетки; ϕ_1, ϕ_2 — объемные доли растворителя и полимера соответственно:

$$\phi_1 = \bar{V}_1 N_1 / (\bar{V}_1 N_1 + \bar{V}_2 N_2), \phi_2 = \bar{V}_2 N_2 / (\bar{V}_1 N_1 + \bar{V}_2 N_2), \phi_1 + \phi_2 = 1, \quad (3.11)$$

\bar{V}_1 — мольный объем растворителя, \bar{V}_2 — средний мольный объем цепей полимерной сетки.

Воспользуемся моделью Муни–Ривлина и запишем упругую часть свободной энергии геля f_{el} в виде:

$$f_{el} = C_1 \hat{I}_1 + C_2 \hat{I}_2,$$

где C_1 и C_2 будем считать функциями, зависящими от концентрации растворителя. Анализ экспериментальных данных показал, что концентрационную зависимость C_1 и C_2 можно аппроксимировать следующим образом:

$$C_1 = \frac{1}{2} RT N_2 \phi_2^{-2/3}, C_2 = \frac{1}{2} RT N_2 C \phi_2^{m-1},$$

где C и m — материальные константы. Для свободной энергии смешения f_{mix} сохраним прежнее соотношение (3.10). В результате получим следующее выражение плотности свободной энергии геля:

$$f = RT(N_1 \ln \phi_1 + \chi N_1 \phi_2 + \frac{1}{2} N_2 \phi_2^{-2/3} \hat{I}_1 + \frac{1}{2} C N_2 \phi_2^{m-1} \hat{I}_2). \quad (3.12)$$

Используя формулы (3.4)–(3.8) и (3.11), получим систему определяющих соотношений:

$$\mathbf{T} = RT \bar{V}_2^{-1} (\phi_2^{1/3} + C \phi_2^m \hat{I}_1) \left[\hat{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \hat{I}_1 \mathbf{E} \right] - RT \bar{V}_2^{-1} C \phi_2^m \left[\hat{\mathbf{B}}^2 - \frac{1}{3} \hat{I}_1 (\hat{\mathbf{B}}^2) \mathbf{E} \right] - p \mathbf{E}, \quad (3.13)$$

$$\mu = RT \left(\ln \phi_1 + \phi_2 + \chi \phi_2^2 + \frac{1}{3} Z^{-1} \phi_2^{1/3} \hat{I}_1 - \frac{1}{2} (m-1) Z^{-1} C \phi_2^m \hat{I}_2 \right) + \bar{V}_1 p, \quad (3.14)$$

$$\pi = -RT \bar{V}_1^{-1} \left(\ln \phi_1 + \phi_2 + \chi \phi_2^2 + \frac{1}{3} Z^{-1} \phi_2^{1/3} \hat{I}_1 - \frac{1}{2} (m-1) Z^{-1} C \phi_2^m \hat{I}_2 \right), \quad (3.15)$$

$$\Pi = RT \bar{V}_2^{-1} (\phi_2^{1/3} + C \phi_2^m \hat{I}_1) \left[\hat{\mathbf{B}} - \frac{1}{3} \hat{I}_1 \mathbf{E} \right] - RT \bar{V}_2^{-1} C \phi_2^m \left[\hat{\mathbf{B}}^2 - \frac{1}{3} \hat{I}_1 (\hat{\mathbf{B}}^2) \mathbf{E} \right] - \pi \mathbf{E}, \quad (3.16)$$

где $Z = \bar{V}_2 / \bar{V}_1$ — безразмерный параметр, величина которого для полимеров обычно удовлетворяет условию $Z \gg 1$. Поскольку гель рассматривается как несжимаемая смесь, в систему (3.13)–(3.16) должно быть также включено условие несжимаемости (2.1) или эквивалентные ему соотношения:

$$\phi_2 = \phi_2^0 / J, N_1 = \bar{V}_1^{-1} (J - \phi_2^0), \phi_2^0 = \bar{V}_2 N_2, \quad (3.17)$$

где ϕ_2^0 — объемная доля полимера в отсчетном состоянии. Они вытекают из условия несжимаемости (2.1) и равенств (3.11). Отметим также, что при вычислении химического потенциала (3.6) использовались формулы:

$$\partial \varphi_1 / \partial N_1 = -\partial \varphi_2 / \partial N_1 = \varphi_2^2 / (ZN_2), N_1 = \bar{V}_1^{-1}(J - \varphi_2^0),$$

которые непосредственно следуют из определений объемных долей (3.11).

Из соотношений (3.13)–(3.16) следует, что свойства геля здесь определяет следующий набор материальных констант: \bar{V}_2 – средний мольный объем цепей полимерной сетки; χ – параметр Флори–Хаггинса, описывающий взаимодействие полимера с растворителем; C и m – безразмерные константы, характеризующие концентрационную зависимость упругих свойств геля. Как показано ниже, все эти величины могут быть определены экспериментально.

4. Одноосное деформирование геля при фиксированной концентрации растворителя. Константы m , C и \bar{V}_2 можно определить по экспериментальным кривым одноосного растяжения полимерных образцов с различной, фиксированной концентрацией растворителя. Если растворитель в образце распределен однородным образом, то теоретическое описание такого режима деформирования геля ничем не отличается от описания поведения несжимаемого однородного упругого материала. Действительно, выберем ненагруженное состояние образца полимера при данной концентрации растворителя в качестве отсчетного, тогда

$$J = 1, \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}, \varphi_2 = \varphi_2^0 \quad (4.1)$$

и соотношение (3.13) в этом случае описывает обычный несжимаемый упругий материал. Пусть растяжение образца осуществляется вдоль оси z , а оси x и y направлены поперек образца, тогда мера деформации Фингера и тензор напряжений Коши (3.13) приобретают диагональный вид $\mathbf{B} = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$, $\mathbf{T} = \text{diag}(T_1, T_2, T_3)$, где

$$T_i = RT\bar{V}_2^{-1}(\varphi_2^{1/3} + C\varphi_2^m \hat{I}_1)(\lambda_i^2 - \frac{1}{3}\hat{I}_1) - RT\bar{V}_2^{-1}C\varphi_2^m(\lambda_i^4 - \frac{1}{3}I_1(\hat{\mathbf{B}}^2)) - p, \\ i = 1, 2, 3, \quad (4.2)$$

λ_k – относительные удлинения образца; $\hat{I}_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_1(\hat{\mathbf{B}}^2) = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4$.

Текущее состояние образца является однородным, поэтому уравнение механического равновесия $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ выполняется тождественно. На боковую поверхность образца внешние силы не действуют, поэтому

$$T_1 = T_2 = 0. \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2$, а из равенства $J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ имеем $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1/\lambda$, где $\lambda_3 = \lambda$ – относительное удлинение образца в продольном направлении. Равенство (4.3) позволяет исключить давление p из T_3 и записать его в виде:

$$T_3 = RT\bar{V}_2^{-1}(\varphi_2^{1/3} + C\varphi_2^m\lambda^{-1})(\lambda^2 - \lambda^{-1}). \quad (4.4)$$

Упругую реакцию образца в экспериментах обычно характеризуют как силу, отнесенную к площади сечения образца в отсчетной конфигурации, которая является продольной компонентой тензора напряжений Пиолы:

$$P = \lambda^{-1}T_3 = RT\bar{V}_2^{-1}(\varphi_2^{1/3} + C\varphi_2^m\lambda^{-1})(\lambda - \lambda^{-2}). \quad (4.5)$$

Для обработки экспериментальных данных выражение (4.5) удобно представить в координатах Муни–Ривлина:

$$P/(\lambda - \lambda^{-2}) = \psi_1 + \psi_2 \lambda^{-1}, \quad (4.6)$$

где

$$\psi_1 = RT\bar{V}_2^{-1}\phi_2^{1/3}, \quad \psi_2 = RT\bar{V}_2^{-1}C\phi_2^m. \quad (4.7)$$

Из выражений (4.7) следует, что

$$\psi_2 / \psi_1 = C\phi_2^{m-1/3}. \quad (4.8)$$

Соотношения (4.6)–(4.8) позволяют определить материальные константы \bar{V}_2 , C и m по экспериментальным кривым одноосного растяжения полимерных образцов с различной концентрацией растворителя. Основная идея эксперимента заключается в следующем. Изготавливается серия образцов данного эластомера в форме стандартных лопаток, в которых путем частичного набухания в растворителе создается определенная (различная) концентрация растворителя. Затем образцы подвергаются одноосному растяжению на разрывной машине по стандартной методике. Полученные диаграммы растяжения представляются в координатах Муни–Ривлина. Наличие линейного участка на диаграмме будет говорить о применимости уравнения (4.6). Для каждого образца с помощью уравнения (4.6) определяются значения ψ_1 и ψ_2 . В результате этого мы получаем зависимости ψ_1 и ψ_2 от ϕ_2 . Далее следует воспользоваться уравнением (4.8) и определить константы C и m . Для этого экспериментальную зависимость ψ_2 / ψ_1 от ϕ_2 удобно представить в логарифмических координатах, в результате чего она должна приобрести вид прямой. Мольный объем цепей полимерной сетки \bar{V}_2 вычисляется из первого уравнения (4.7).

5. Деформирование и набухание полимеров в среде растворителя. Если образец сетчатого полимера поместить в растворитель, то вследствие поглощения жидкости его объем с течением времени будет возрастать. При отсутствии внешних механических нагрузок это явление называется свободным набуханием. С течением времени в системе “полимер – растворитель” установится термодинамическое равновесие, и процесс поглощения растворителя прекратится. Уравнение, описывающее это состояние равновесия, получается из решения задачи (2.6)–(2.7) следующим образом. Поскольку гель механическим нагрузкам не подвергается и находится в однородном состоянии, то $\mathbf{T} = 0$, и условие равновесия геля в данном случае сводится к уравнению $\mu = \mu_*$. Если растворитель – это чистая жидкость, то в этом уравнении следует положить $\mu_* = 0$. Это объясняется тем, что свободная энергия геля (3.9) включает в себя не полную свободную энергию растворителя, а только ее часть – так называемую свободную энергию смешения. В этом случае химический потенциал жидкой фазы чистого растворителя полагается равным нулю [27], и уравнение равновесия геля приобретает вид $\mu = 0$. В качестве отчетного выберем состояние равновесия набухшего геля, тогда $J = 1$, $\mathbf{B} = \mathbf{E}$, $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = 3$. Используя соотношение (3.14), уравнение равновесия геля запишем в виде:

$$\ln(1 - \phi_2) + \phi_2 + \chi\phi_2^2 + Z^{-1}\phi_2^{1/3} - \frac{3}{2}(m-1)Z^{-1}C\phi_2^m = 0. \quad (5.1)$$

Если известны константы m , C , \bar{V}_2 и χ , то это уравнение позволяет рассчитать равновесное значение объемной доли полимера ϕ_2 в набухшем состоянии. Если равновесное значение ϕ_2 известно из эксперимента, то из уравнения (5.1) нетрудно найти величину параметра Флори–Хаггинса χ . Но для этого необходимо знать величины m , C и \bar{V}_2 . Их можно найти описанным выше способом. Таким образом, все материальные константы предложенной модели можно определить экспериментально по одноосному растяжению и свободному набуханию образцов полимера в данном растворителе.

Рассмотрим термодинамически равновесный режим одноосного растяжения полимера в растворителе. Его можно реализовать в эксперименте и полученные данные использовать для независимой проверки работоспособности модели. Суть эксперимента заключается в следующем. Образцы данного полимера помещаются в растворитель и доводятся до равновесно набухшего состояния. Затем набухшие образцы последовательно подвергаются одноосному растяжению в растворителе с различными фиксированными степенями растяжения λ . Деформированный набухший образец способен поглотить дополнительное количество растворителя. Это неравновесный, длительный процесс, в ходе которого за счет поглощения растворителя упругая реакция образца будет снижаться, пока не достигнет предельного, равновесного значения P . После этого образец извлекается из растворителя, взвешивается и определяется его равновесная степень дополнительного набухания J . Проведя такие измерения для серии образцов при разных значениях λ , получим экспериментальные зависимости $P(\lambda)$ и $J(\lambda)$. Из их сравнения с соответствующими теоретическими кривыми можно оценить адекватность и точность предложенной модели.

Теоретические зависимости $P(\lambda)$ и $J(\lambda)$ определяются из решения задачи, которая полностью аналогична задаче об однородном деформировании сжимаемого упругого материала [21, 22]. Данная задача – это частный случай общей задачи (2.12)–(2.13), (3.16). При этом в силу (2.10) равновесное значение тензора напряжений $\mathbf{T} = \mathbf{\Pi}$, поскольку для чистого растворителя $\pi_* = -\bar{V}_1^{-1}\mu_* = 0$. Таким образом, равновесное напряженно-деформированное состояние образца и его упругая реакция полностью описываются осмотическим тензором напряжений (3.16). Выберем ненагруженное состояние набухшего в растворителе образца полимера в качестве отсчетного, тогда

$$\phi_2 = \phi_2^0 / J, \quad (5.2)$$

где ϕ_2^0 – объемная доля полимера в равновесно набухшем, ненагруженном образце; J – объемная деформация образца, вызванная дополнительным поглощением растворителя. Пусть растяжение образца осуществляется вдоль оси z , а оси x и y направлены поперек образца, тогда меры деформации и осмотический тензор напряжений (3.16) приобретают диагональный вид: $\mathbf{B} = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$, $\hat{\mathbf{B}} = \text{diag}(\hat{\lambda}_1^2, \hat{\lambda}_2^2, \hat{\lambda}_3^2)$, $\mathbf{\Pi} = \text{diag}(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$. Согласно (3.16) главные (равновесные) напряжения

$$\Pi_i = RT\bar{V}_2^{-1}(\phi_2^{1/3} + C\phi_2^m \hat{I}_1)(\hat{\lambda}_i^2 - \frac{1}{3}\hat{I}_1) - RT\bar{V}_2^{-1}C\phi_2^m(\hat{\lambda}_i^4 - \frac{1}{3}\hat{I}_1(\hat{\mathbf{B}}^2)) - \pi, \quad i=1,2,3 \quad (5.3)$$

где λ_i – относительные удлинения образца;

$$\hat{\lambda}_i = \lambda_i / J^{1/3}, \quad \hat{I}_1 = \hat{\lambda}_1^2 + \hat{\lambda}_2^2 + \hat{\lambda}_3^2, \quad \hat{I}_2 = \hat{\lambda}_1^2 \hat{\lambda}_2^2 + \hat{\lambda}_1^2 \hat{\lambda}_3^2 + \hat{\lambda}_2^2 \hat{\lambda}_3^2, \\ I_1(\hat{\mathbf{B}}^2) = \hat{\lambda}_1^4 + \hat{\lambda}_2^4 + \hat{\lambda}_3^4. \quad (5.4)$$

На боковую поверхность образца внешние силы не действуют, поэтому

$$\Pi_1 = \Pi_2 = 0. \quad (5.5)$$

Это равенство позволяет исключить осмотическое давление π из Π_3 и записать его в виде:

$$\Pi_3 = (\psi_1 + \psi_2 \hat{\lambda}_2^2)(\hat{\lambda}_3^2 - \hat{\lambda}_1^2),$$

где ψ_1 и ψ_2 определяются формулами (4.7). Из (5.5) следует, что $\lambda_1 = \lambda_2$, а из равенства $\bar{J} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ имеем $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = J / \lambda$, где $\lambda = \lambda_3$ — относительное удлинение образца в продольном направлении. Используя эти соотношения, а также выражения (5.2) и (5.4), равновесную упругую реакцию образца представим в виде:

$$P = (\psi_1^0 + \psi_2^0 J^{2/3-m} \lambda^{-1})(\lambda - J \lambda^{-2}), \quad (5.6)$$

где $P = \lambda^{-1} J \Pi_3$ — продольные напряжения, отнесенные к площади сечения образца в отсчетной конфигурации; $\psi_1^0 = RT \bar{V}_2^{-1} (\phi_2^0)^{1/3}$ и $\psi_2^0 = RT \bar{V}_2^{-1} C(\phi_2^0)^m$ — значения величин (4.7) в отсчетном состоянии полимера.

Из выражения (5.6) видно, что равновесная упругая реакция образца зависит от степени его растяжения λ и от объемной деформации J , вызванной дополнительным поглощением растворителя. Равновесное значение J при заданном значении λ определяется из уравнения:

$$\Pi_1 = (\psi_1^0 + \psi_2^0 J^{-(1/3+m)} I_1) \lambda^{-1} - \psi_2^0 J^{2/3-m} \lambda^{-2} + q = 0, \quad (5.7)$$

где

$$q = RT \bar{V}_1^{-1} \left(\ln(1 - \phi_2) + \phi_2 + \chi \phi_2^2 - \frac{1}{2} (m + \frac{1}{3}) Z^{-1} C \phi_2^m J^{-4/3} I_2 \right), \quad (5.8)$$

$$I_1 = 2J \lambda^{-1} + \lambda^2, \quad I_2 = 2J \lambda + J^2 \lambda^{-2}, \quad \phi_2 = \phi_2^0 / J. \quad (5.9)$$

Уравнение (5.7) представляет собой условие термодинамического равновесия геля в деформированном состоянии и в неявном виде определяет функцию $J(\lambda)$, описывающую деформационную зависимость равновесной степени набухания образца в условиях одноосного растяжения.

6. Эксперимент. С помощью изложенной выше методики были исследованы пространственно сшитые полибутиадипенуретановые (ПБУ) и полидиенуретанэпоксидные (ПДУЭ) эластомеры, которые изготавливались по олигомерной технологии. Путем выбора различных систем отверждения и варьирования компонентного состава отверждающей смеси получали образцы эластомеров с различной плотностью химической сетки, то есть с различной степенью сшитости полимера. В качестве растворителей в экспериментах использовали нелетучие органические жидкости — дибутилсебагинат (ДБС) и диоктилсебагинат (ДОС). Такой выбор обусловлен тем, что, во-первых, в процессе

механических испытаний удастся избежать испарения жидкости из набухших образцов, во-вторых, эти органические жидкости обеспечивают достаточно высокие степени набухания данных полимеров, что позволило в широких пределах варьировать концентрацию растворителя в образцах. В опытах использовали образцы эластомеров в форме лопаток с длиной рабочей части 20 мм и шириной 5 мм. Они вырубались из пластин толщиной 1.5–2 мм, которые получали путем отверждения композиции в формах щелевого типа.

Для определения концентрационной зависимости ψ_1 и ψ_2 от ϕ_2 образцы эластомера готовились следующим образом. Образцы помещались в растворитель, и каждый образец выдерживался в нем определенное время, необходимое для достижения требуемого уровня концентрации растворителя. Время извлечения из растворителя определялось путем периодического взвешивания образца. После извлечения из жидкости образцы выдерживались некоторое время при комнатной температуре, для того чтобы за счет естественной диффузии в нем произошло равномерное распределение растворителя. Необходимое время выдержки образцов оценивалось по продолжительности процесса свободного набухания эластомера в растворителе до полного равновесия. Затем для каждого образца определялась диаграмма одноосного растяжения $P(\lambda)$. Растяжение образцов осуществлялось со скоростью 1 мм/мин.

Типичные кривые одноосного растяжения образцов, содержащих различное количество растворителя, показаны на рис. 1. Они представлены в координатах Муни–Ривлина и имеют ярко выраженные линейные участки. Путем их аппроксимации прямыми определялись величины ψ_1 и ψ_2 для различных значений ϕ_2 . Затем в логарифмических координатах строилась зависимость ψ_2/ψ_1 от ϕ_2 . Пример такой зависимости показан на рис. 2. Из него видно, что экспериментальные значения хорошо ложатся на прямую. По уравнению этой прямой, согласно равенству (4.8), определялись константы m и C . Для определения мольного объема цепей полимерной сетки \bar{V}_2 использовалось первое соотношение (4.7). Полученные данные использовались для определения параметра Флори–Хаггинса χ по уравнению (5.1). Результаты этих измерений для различных эластомеров представлены в таблице.

Можно отметить, что для всех эластомеров степенной показатель m заметно больше $1/3$. Отсюда следует, что при больших степенях набухания эластомеров величина ψ_2 становится весьма малой по сравнению с ψ_1 и деформационное

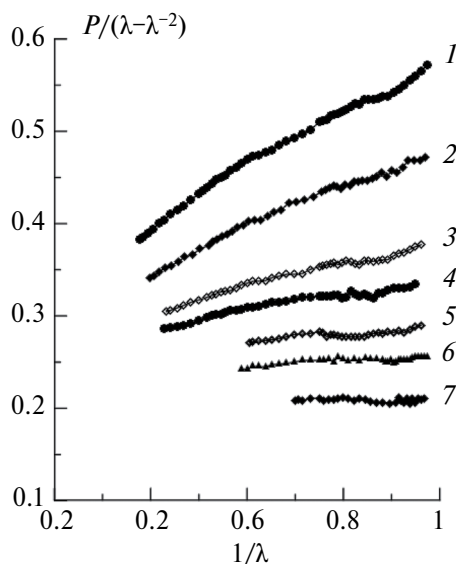


Рис. 1. Экспериментальные кривые одноосного растяжения эластомера ПБУ-1 при различных концентрациях ДБС, представленные в координатах Муни–Ривлина: 1 – $\phi_2 = 1$; 2 – $\phi_2 = 0.682$; 3 – $\phi_2 = 0.469$; 4 – $\phi_2 = 0.364$; 5 – $\phi_2 = 0.277$; 6 – $\phi_2 = 0.204$; 7 – $\phi_2 = 0.126$.

поведение эластомеров в этом случае удовлетворительно описывается теорией Флори–Ренера. Это хорошо видно из рис. 1 – уже при двукратном набухании эластомера кривые растяжения в координатах Муни–Ривлина практически параллельны оси абсцисс, что является одним из характерных признаков того, что здесь начинает работать классическая модель высокоэластичности, на которой основана теория Флори–Ренера.

Для независимой проверки адекватности модели была проведена серия экспериментов по определению деформационной зависимости равновесной упругой реакции и степени набухания полимера в условиях одноосного растяжения в среде растворителя. Это сделано для эластомера ПБУ-4 и ДБС в качестве растворителя. Эксперимент состоял в следующем. Образцы эластомера помещались в растворитель и доводились до равновесно набухшего состояния. Затем, после взвешивания, каждый образец подвергался фиксированному одноосному растяжению в растворителе. Поскольку растяжение образца нарушает термодинамическое равновесие в системе “полимер–жидкость”, образец начинает поглощать растворитель, что вызывает релаксацию упругой реакции. Процесс поглощения растворителя прекращается после достижения полимером нового термодинамического равновесия. Об этом свидетельствовало отсутствие изменения упругой реакции образца. После достижения равновесия упругая реакция P образца фиксировалась, образец взвешивался, и определялось равновесное значение J , характеризующее равновесную объемную деформацию образца, вызванную дополнительным поглощением жидкости. Такая процедура осуществлялась для каждого образца. При этом для каждого образца назначалось свое значение λ . Продолжительность эксперимента для одного образца составила 2 суток. Полученные результаты представлены на рис. 3 и 4. Из них видно, что экспериментальные точки хорошо согласуются с теоретическими кривыми, которые рассчитывались с помощью уравнений (5.6)–(5.9).

Результаты проведенных экспериментов говорят о том, что предложенная модель способна удовлетворительно описывать свойства сетчатых

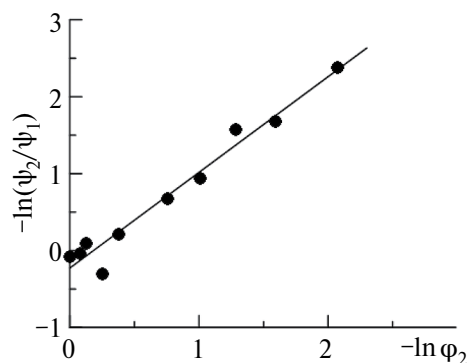


Рис. 2. Экспериментальная зависимость отношения ψ_2/ψ_1 от объемной доли полимера ϕ_2 для эластомера ПБУ-1, содержащего ДБС, представленная в логарифмических координатах.

Таблица. Материальные константы эластомеров

| Эластомер/жидкость | m | C | \bar{V}_2 , см ³ /моль | χ |
|--------------------|-----|-----|-------------------------------------|--------|
| ПБУ-1/ДБС | 1.6 | 1.3 | 21000 | 0.08 |
| ПБУ-2/ДБС | 2.6 | 1.4 | 8700 | 0.32 |
| ПБУ-3/ДОС | 3.7 | 1.6 | 4700 | 0.38 |
| ПБУ-4/ДБС | 3.4 | 1.8 | 6400 | 0.53 |
| ПДУЭ/ДБС | 2.8 | 2.9 | 7400 | 0.46 |

эластомеров в довольно широком интервале концентраций растворителя, при умеренных деформациях. Максимальные значения концентрации растворителя, достигнутые в опытах, приблизительно соответствуют 7–9 кратному набуханию эластомеров. Верхней границе деформаций, при которых экспериментальные результаты достаточно хорошо описываются данной моделью, соответствуют значения $\lambda \approx 1.75$ –2.5. Следует отметить, что при малых концентрациях растворителя эластомеры способны испытывать деформации, заметно превышающие указанные значения. При этом наблюдаются отклонения от (4.6). В этом случае сказываются эффекты, связанные с конечностью длины цепей полимерной сетки, и данная модель выходит за границы области своей применимости. При высоких концентрациях растворителя эти отклонения не наблюдаются, поскольку образцы разрушаются, не достигнув этих предельных состояний. Область значений деформаций и концентраций растворителя, при которых данная модель применима, зависит от материала и должна определяться экспериментально.

7. Заключение. Выражение потенциала свободной энергии для системы “сетчатый полимер – растворитель”, предложенное в данной работе, можно рассматривать как модификацию свободной энергии теории Флори–Ренера. Оно получено путем замены упругой составляющей свободной энергии Флори–Ренера на соответствующее выражение Муни–Ривлина. При этом упругие константы Муни–Ривлина здесь рассматриваются как функции, зависящие от концентрации растворителя.

На основе предложенного потенциала свободной энергии получены определяющие соотношения для тензора напряжений, химического потенциала растворителя и осмотического тензора напряжений. Это сделано в предположении, что гель представляет собой несжимаемую смесь, состоящую из несжимаемого упругого материала и растворенной в нем несжимаемой жидкости.

В рамках предложенной модели выполнено экспериментальное исследование деформационных свойств набухших в органических растворителях

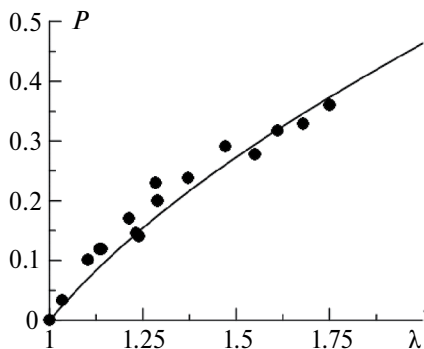


Рис. 3. Экспериментальная зависимость термодинамически равновесной упругой реакции эластомера ПБУ-4 при одноосном растяжении в ДБС. Сплошная линия рассчитана по уравнениям (5.6)–(5.9) с константами, представленными в таблице. Величина P измеряется в МПа.

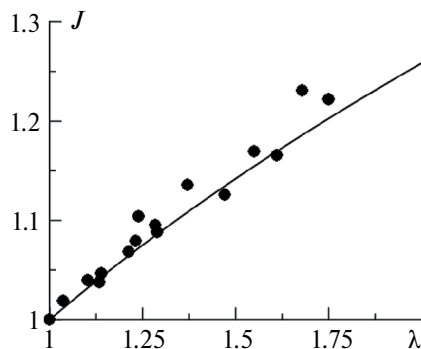


Рис. 4. Экспериментальная деформационная зависимость равновесной степени набухания эластомера ПБУ-4 в ДБС в условиях одноосного растяжения. Сплошная линия рассчитана по уравнению (5.7) с константами, представленными в таблице.

полибутадиенуретановых и полидиенуретанэпоксидных эластомеров. В частности, изучена зависимость упругих свойств эластомеров от концентрации растворителя и определены параметры, описывающую эту зависимость, а также термодинамические параметры, характеризующие взаимодействие полимера с растворителем. Показано, что соответствующая система определяющих соотношений дает более точное описание деформационных свойств сетчатых полимеров в широком диапазоне концентрации растворителя.

Предложенная модель может быть использована при проектировании технических устройств и конструкций, основанных на применении полимерных гелей и эластомеров, предназначенных для эксплуатации в среде растворителей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bashir S. et al.* Fundamental concepts of hydrogels: synthesis, properties, and their applications // *Polymers*. 2020. V. 12. P. 2702.
<https://doi.org/10.3390/polym12112702>
2. *Валуев Л.И., Валуева Т.А., Валуев И.Л., Платэ Н.А.* Полимерные системы для контролируемого выделения биологически активных соединений // *Успехи биол. хим.* 2003. Т. 43. С. 307–328.
3. *Chyzy A., Tomczykowa M., Plonska-Brzezinska M.E.* Hydrogels as potential nano-, micro- and macro-scale systems for controlled drug delivery // *Materials*. 2020. V. 13. № 1. P. 188.
<https://doi.org/10.3390/ma13010188>
4. *Deligkaris K., Tadele T.S., Olthuis W., Berg A.* Hydrogel-based devices for biomedical applications // *Sens. Actuators B: Chem.* 2010. V. 147. № 2. P. 765–774.
<https://doi.org/10.1016/j.snb.2010.03.083>
5. *Ding M. et al.* Multifunctional soft machines based on stimuli-responsive hydrogels: from free-standing hydrogels to smart integrated systems // *Mater. Today Adv.* 2020. V. 8. P. 100088.
<https://doi.org/10.1016/j.mtadv.2020.100088>
6. *Hoare T.R., Kohane D.S.* Hydrogels in drug delivery: Progress and challenges // *Polymer*. 2008. V. 49. № 8. P. 1993–2007.
<https://doi.org/10.1016/j.polymer.2008.01.027>
7. *Kopecek J.* Hydrogels: from soft contact lenses and implants to self-assembled nanomaterials // *J. Polym. Sci. A Polym. Chem.* 2009. V. 47. P. 5929–5946.
<https://doi.org/10.1002/pola.23607>
8. *Lee K.Y., Mooney D.J.* Hydrogels for tissue engineering // *Chem. Rev.* 2001. V. 101. № 7. P. 1869–1880.
<https://doi.org/10.1021/cr000108x>
9. *Peppas N.A., Hilt J.Z., Khademhosseini A., Langer R.* Hydrogels in biology and medicine: from molecular principles to bionanotechnology // *Adv. Mater.* 2006. V. 18. № 11. P. 1345–1360.
<https://doi.org/10.1002/ADMA.200501612>
10. *Flory P.J., Rehner J.* Statistical mechanics of cross-linked polymer networks // *J. Chem. Phys.* 1943. V. 11. P. 512–526.
<https://doi.org/10.1063/1.1723791>
11. *Flory P.J.* Molecular theory of rubber elasticity // *Polymer*. 1979. V. 20. № 11. P. 1317–1320.
[https://doi.org/10.1016/0032-3861\(79\)90268-4](https://doi.org/10.1016/0032-3861(79)90268-4)
12. *Flory P.J., Erman B.* Theory of elasticity of polymer networks // *Macromolecules*. 1982. V. 15. № 3. P. 800–806.
<https://doi.org/10.1021/ma00231a022>

13. *Edwards S.F., Vilgis T.A.* The tube model theory of rubber elasticity // Rep. Prog. Phys. 1988. V. 51. P. 243–297.
<https://doi.org/10.1088/0034-4885/51/2/003>
14. *Han W.H., Horkay F., McKenna G.B.* Mechanical and swelling behaviors of rubber: a comparison of some molecular models with experiment // Math. Mech. Solids. 1999. V. 4. № 2. P. 139–167.
<https://doi.org/10.1177/108128659900400201>
15. *Boyce M.C., Arruda E.M.* Constitutive models of rubber elasticity: a review // Rubber Chem. Technol. 2000. V. 73. № 3. P. 504–523.
<https://doi.org/10.5254/1.3547602>
16. *Boyce M.C., Arruda E.M.* Swelling and mechanical stretching of elastomeric materials // Math. Mech. Solids. 2001. V. 6. № 6. P. 641–659.
<https://doi.org/10.1177/108128650100600605>
17. *Dal H., Acikgoz K., Badienia Y.* On the performance of isotropic hyperelastic constitutive models for rubber-like materials: a state of the art review // Appl. Mech. Rev. 2021. V. 73. № 2. P. 020802.
<https://doi.org/10.1115/1.4050978>
18. *Anssari-Benam A.* Assessment large isotropic elastic deformations: on a comprehensive model to correlate the theory and experiments for incompressible rubber-like materials // J. Elast. 2023. V. 153. P. 219–244.
<https://doi.org/10.1007/s10659-022-09982-5>
19. *Mooney M.* A theory of large elastic deformation // J. Appl. Phys. 1940. V. 11. № 3. P. 582–592.
<https://doi.org/10.1063/1.1712836>
20. *Flory P.J., Tatara Y.* The elastic free energy and the elastic equation of state: elongation and swelling of polydimethylsiloxane networks // J. Polym. Sci. 1975. V. 13. № 4. P. 683–702.
<https://doi.org/10.1002/pol.1975.180130403>
21. *Денисюк Е.Я.* Механика и термодинамика высокоэластичных материалов, насыщенных жидкостью // Изв. РАН. МТ Т. 2010. № 1. С. 118–138.
22. *Денисюк Е.Я.* Задачи механики полимерных гелей с односторонними ограничениями // Изв. РАН. МТ Т. 2022. № 2. С. 106–123.
<http://doi.org/10.31857/S0572329922010068>
23. *Денисюк Е.Я.* Равновесие полимерных гелей в поле массовых сил // Изв. РАН. МТ Т. 2022. № 4. С. 3–24.
<http://doi.org/10.31857/S0572329922030072>
24. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
25. *Денисюк Е.Я., Терешатов В.В.* Теория механо-диффузионных процессов переноса многокомпонентных жидкостей в сшитых эластомерах // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 6. С. 113–129.
26. *Денисюк Е.Я., Терешатов В.В.* Нелинейная теория процессов набухания эластомеров в низкомолекулярных жидкостях // Высокомолек. соед. А. 2000. Т. 42. № 1. С. 71–83.
27. *Prigogine I., Defay R.* Chemical Thermodynamics. N.Y.: Longmans Green and Co, 1954. [*Пригожин И., Дефэй Р.* Химическая термодинамика. Новосибирск: Наука, 1966. 508 с.]

DESCRIPTION OF POLYMER GEL PROPERTIES IN FRAMEWORK OF GENERALIZED MOONEY-RIVLIN MODEL

E. Ya. Denisyuk^{a, *}

*Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science,
Perm, Russia*

**e-mail: denisyuk@icmm.ru*

Abstract. A polymer gel is considered as a mixture consisting of a highly elastic elastic material and a liquid (solvent) dissolved in it. Based on the generalized Mooney-Rivlin model, an expression of free energy is proposed that describes the deformation behavior and thermodynamic properties of polymer gels. In this model, it is assumed that the Mooney-Rivlin “constants” depend on the concentration of the liquid dissolved in the polymer. From this expression, the defining relations for the stress tensor, the chemical potential of the solvent and the osmotic stress tensor are obtained. On their basis, an experimental study of the deformation properties of mesh elastomers swollen in a solvent of various chemical nature has been performed. In particular, the dependence of the elastic properties of elastomers on the solvent concentration has been studied and the parameters describing this dependence have been determined.

Keywords: polymer gels, finite deformations, constitutive relations, swelling, stress tensor, chemical potential, osmotic stress tensor

REFERENCES

1. Bashir S. *et al.* Fundamental concepts of hydrogels: synthesis, properties, and their applications // *Polymers* 2020. V. 12. P. 2702.
<https://doi.org/10.3390/polym12112702>
2. Valuev L.I., Valueva T.A., Valuev I.L., Plate N.A. Polymer systems for controlled release of biologically active compounds // *Usp. Biol. Khim.* 2003. V. 43. P. 307–328.
3. Chyzy A., Tomczykowa M., Plonska-Brzezinska M.E. Hydrogels as potential nano-, micro- and macro-scale systems for controlled drug delivery // *Materials*. 2020. V. 13. № 1. P. 188.
<https://doi.org/10.3390/ma13010188>
4. Deligkaris K., Tadele T.S., Olthuis W., Berg A. Hydrogel-based devices for biomedical applications // *Sensor Actuat. B*. 2010. V. 147. № 2. P. 765–774.
<https://doi.org/10.1016/j.snb.2010.03.083>
5. Ding M. *et al.* Multifunctional soft machines based on stimuli-responsive hydrogels: from freestanding hydrogels to smart integrated systems // *Mater. Today Adv.* 2020. V. 8. 100088.
<https://doi.org/10.1016/j.mtadv.2020.100088>
6. Hoare T.R., Kohane D.S. Hydrogels in drug delivery: Progress and challenges // *Polymer*. 2008. V. 49. № 8. P. 1993–2007.
<https://doi.org/10.1016/j.polymer.2008.01.027>
7. Kopecek J. Hydrogels: from soft contact lenses and implants to self-assembled nanomaterials // *J. Polym. Sci. A Polym. Chem.* 2009. V. 47. P. 5929–5946.
<https://doi.org/10.1002/pola.23607>

8. *Lee K.Y., Mooney D.J.* Hydrogels for tissue engineering // *Chem. Rev.* 2001. V. 101. № 7. P. 1869–1880.
<https://doi.org/10.1021/cr000108x>
9. *Peppas N.A., Hilt J.Z., Khademhosseini A., Langer R.* Hydrogels in biology and medicine: from molecular principles to bionanotechnology // *Adv. Mater.* 2006. V. 18. № 11. P. 1345–1360.
<https://doi.org/10.1002/adma.200501612>
10. *Flory P.J., Rehner J.* Statistical mechanics of cross-linked polymer networks // *J. Chem. Phys.* 1943. V. 11. P. 512–526.
<https://doi.org/10.1063/1.1723791>
11. *Flory P.J.* Molecular theory of rubber elasticity // *Polymer.* 1979. V. 20. № 11. P. 1317–1320.
[https://doi.org/10.1016/0032-3861\(79\)90268-4](https://doi.org/10.1016/0032-3861(79)90268-4)
12. *Flory P.J., Erman B.* Theory of elasticity of polymer networks // *Macromolecules.* 1982. V. 15. № 3. P. 800–806.
<https://doi.org/10.1021/ma00231a022>
13. *Edwards S.F., Vilgis T.A.* The tube model theory of rubber elasticity // *Rep. Prog. Phys.* 1988. V. 51. P. 243–297.
<https://doi.org/10.1088/0034-4885/51/2/003>
14. *Han W.H., Horkay F., McKenna G.B.* Mechanical and swelling behaviors of rubber: a comparison of some molecular models with experiment // *Math. Mech. Solids.* 1999. V. 4. P. 139–167.
<https://doi.org/10.1177/108128659900400>
15. *Arruda E.M., Boyce M.C.* Constitutive models of rubber elasticity: a review // *Rubber Chem. Technol.* 2000. V. 72. P. 504–523.
<https://doi.org/10.5254/1.3547602>
16. *Boyce M.C., Arruda E.M.* Swelling and mechanical stretching of elastomeric materials // *Math. Mech. Solids.* 2001. V. 6. P. 641–659.
<https://doi.org/10.1177/108128650100600605>
17. *Dal H., Acikgoz K., Badienia Y.* On the performance of isotropic hyperelastic constitutive models for rubber-like materials: a state of the art review // *Appl. Mech. Rev.* 2021. V. 73. 020802.
<https://doi.org/10.1115/1.4050978>
18. *Anssari-Benam A.* Assessment large isotropic elastic deformations: on a comprehensive model to correlate the theory and experiments for incompressible rubber-like materials // *J. Elast.* 2023. V. 153. P. 219–244.
<https://doi.org/10.1007/s10659-022-09982-5>
19. *Mooney M.* A theory of large elastic deformation // *J. Appl. Phys.* 1940. V. 11. P. 582–592.
<https://doi.org/10.1063/1.1712836>
20. *Flory P.J., Tatara Y.* The elastic free energy and the elastic equation of state: elongation and swelling of polydimethylsiloxane networks // *J. Polym. Sci.* 1975. V. 13. P. 683–702.
<https://doi.org/10.1002/pol.1975.180130403>
21. *Denisyuk E.Ya.* Mechanics and thermodynamics of fluid-saturated highly elastic materials // *Mech. Solids.* 2010. V. 45. № 1. P. 94–110.
<https://doi.org/10.3103/S0025654410010139>
22. *Denisyuk E.Ya.* Problems of mechanics of polymer gels with unilateral constraints // *Mech. Solids.* 2022. V. 57. № 2. P. 292–306.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422020054>
23. *Denisyuk E.Ya.* Equilibrium of polymer gels in the field of body forces // *Mech. Solids.* 2022. V. 57. № 4. P. 683–700.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422040070>
24. *Lurie A.I.* Nonlinear theory of elasticity. M.: Nauka, 1980 [in Russian].
25. *Denisyuk E.Ya., Tereshatov V.V.* Theory of the mechanodiffusion transfer of multicomponent liquids in cross-linked elastomers // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 1997. V. 38. № 6. P. 913–927.
<https://doi.org/10.1007/BF02467957>

-
26. *Denisyuk E. Ya., Tereshatov V. V.* A nonlinear theory of the process of elastomer swelling in low-molecular-mass liquids // *Polymer Sci. Ser. A.* 2000. V. 42. № 1. P. 56–67.
 27. *Prigogine I., Defay R.* Chemical thermodynamics. NY: Longmans Green and Co, 1954.

УДК 531.3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПРОИЗВОЛЬНО НАГРУЖЕННОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЕ

© 2024 г. К. Б. Устинов^{а, *}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: ustinov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 28.05.2024 г.

После доработки 07.06.2024 г.

Принята к публикации 08.06.2024 г.

Рассмотрена двумерная задача теории упругости об изотропной полосе с центральной полубесконечной трещиной. Нагрузка в виде сосредоточенной силы предполагается приложенной в произвольной точке полосы. С использованием инвариантных взаимных интегралов и решения для полосы, нагруженной изгибающими моментами и продольными силами, приложенными на бесконечности, получены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для рассматриваемой задачи. Рассмотрены случаи сил, приложенных к берегам трещины, к границам полосы и внутренним точкам полосы. Получены асимптотические выражения для случаев приложения сил вдали от вершины трещины и сил, приложенных к берегам трещины вблизи ее вершины. Показано совпадение полученных решений с известными решениями для частных случаев: нагрузки в виде пары нормальных сил, приложенных к берегам трещины и сил, приложенных вдали от вершины трещины.

Ключевые слова: аналитическое решение, двустороннее преобразование Лапласа, метод Винера–Хопфа, теорема взаимности, инвариантные взаимные интегралы

DOI: 10.31857/S1026351924060042, EDN: TZNCHUW

1. Введение. Задачи о трещинах в полосе, расположенных параллельно ее границам, используются в многочисленных приложениях, в частности при интерпретации результатов стандартных испытаний на разрушение, таких как трех- и четырехточечный изгиб [1–6], при исследовании процессов разрушения в многослойных конструкциях [7, 8], моделировании адгезионного взаимодействия [9–11] и отслоения покрытий [12–22].

В простейших случаях, таких как нагружение изгибающими моментами или продольными силами, выражения для скорости высвобождения энергии (СВЭ) при приращении длины трещины получаются элементарно с применением элементарных балочных теорий [13, 14, 23, 24]. При наличии

симметрии с помощью данного подхода можно также определить коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

Кроме элементарных решений, известно много других, полученных как аналитическими [25, 26], так и полуаналитическими, и численными методами [27, 29].

Весьма эффективным подходом к решению задач о полубесконечных трещинах является применение интегральных преобразований и метода Винера–Хопфа [30–36]. Обобщения на случай анизотропных полос получены в работах [37–42], полос, составленных из различных материалов, — в работе [43]. Если нагрузка прикладывается достаточно далеко от вершины трещины, так что ее можно рассматривать как приложенную на бесконечности, применение данного подхода приводит к однородной задаче, значения КИН при этом выражаются через однократные интегралы, которые в случае нагружения изгибающими моментами и продольными силами вычисляются в явном виде, и выражения для КИН совпадают с выражениями, полученными с помощью балочных теорий. В случае приложения нагрузки на конечном расстоянии от вершины трещины задача может быть решена путем сведения ее к неоднородной краевой задаче, решение которой представляется в виде двойных интегралов. В представленном исследовании используется другой подход, основанный на применении взаимных инвариантных интегралов (например, [44–46]) и использовании решения однородной задачи [35]. Использование данного подхода позволило получить выражения для КИН от действия произвольных, обязательно приложенных попарно к берегам трещины сил, в том числе для сил, приложенных во внутренних точках полосы, как на расслоившемся участке, так и в точках на продолжении линии трещины.

2. Формулировка задачи. Рассматривается полоса $-h < x_2 < h$ с полубесконечной центральной трещиной $x < 0, y = 0$ в декартовых координатах x_1, x_2 с началом в вершине трещины и осью x_1 , направленной вдоль продолжения линии трещины (рис. 1). Задача решается в двумерной постановке в рамках теории малых деформаций. Упругие свойства определяются модулем Юнга \bar{E} и коэффициентом Пуассона $\bar{\nu}$, либо истинными (для плоского напряженного состояния), либо модифицированными для условий плоской деформации:

$$\bar{E} = \begin{cases} E & \text{plane stress} \\ E / (1 - \nu^2) & \text{plane strain} \end{cases}, \quad \bar{\nu} = \begin{cases} \nu & \text{plane stress} \\ \nu / (1 - \nu) & \text{plane strain} \end{cases} \quad (2.1)$$

Система уравнений включает уравнения равновесия, совместности, закона Гука и соотношений, связывающих деформации со смещениями:

$$\sigma_{ij,i} + Q_j = 0, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\bar{E}^{(k)}} \sigma_{11} - \frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} \sigma_{22}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{\bar{E}} \sigma_{22}^{(k)} - \frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} \sigma_{11}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1 + \bar{\nu}}{\bar{E}} \sigma_{12}, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i, Q_i$ — компоненты тензора напряжения, тензора деформаций, вектора смещения и приложенной сосредоточенной силы. Индекс

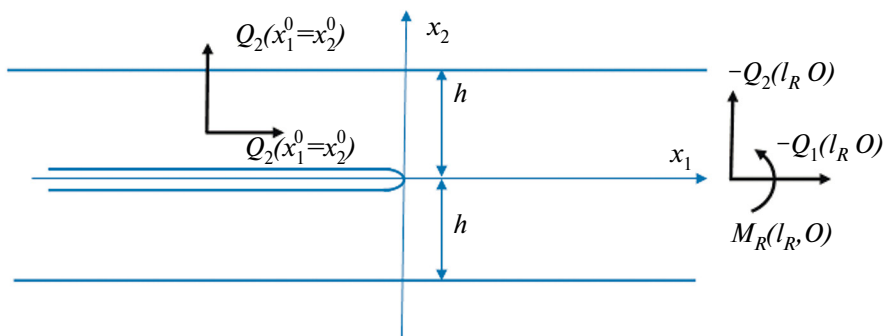


Рис. 1. Геометрия и система прикладываемых нагрузок.

после запятой означает производную по соответствующей координате, под повторяющимися индексами подразумевается суммирование.

Сосредоточенная сила с компонентами Q_1, Q_2 приложена в некоторой точке слоя $-\infty < x_1^0 < \infty$, $-h \leq x_2^0 \leq h$ либо внутри слоя, либо на внешней границе или на берегу трещины. Компенсирующие нагрузки в виде сил $-Q_1, -Q_2$ и момента $M_R = x_2^0 Q_1 + (l_R - x_1^0) Q_2$ приложены в точке $(l_R \rightarrow +\infty, 0)$ для обеспечения глобального равновесия (рис. 1). Берега трещины и внешние границы полосы свободны от напряжений (за исключением случаев $x_2^0 = \pm 0$ и $x_2^0 = \pm h$):

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x, h) = \sigma_{12}(x, h) = \sigma_{22}(x, -h) = \sigma_{12}(x, -h) = 0, \quad -\infty < x < +\infty \\ \sigma_{22}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{12}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{22}^{(2)}(x, 0) = \sigma_{12}^{(2)}(x, 0), \quad -\infty < x < 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь верхние индексы 1, 2 относятся к верхнему и нижнему берегам трещины соответственно.

Задача состоит в определении коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для приложенных нагрузок.

3. Выражения для коэффициентов интенсивности напряжений через взаимные инвариантные интегралы. Если известно решение некоторой вспомогательной задачи для рассматриваемой конфигурации и иной системы внешних нагрузок, используя взаимные инвариантные интегралы (например [44–46]), можно получить решение рассматриваемой задачи или по крайней мере некоторые интересные величины. Рассмотрим две такие вспомогательные задачи: нагружение парой изгибающих моментов M , приложенных к разделяемым участкам полосы достаточно далеко от вершины трещины (рис. 2а), и нагружение парой равных, но противоположно направленных сил T , приложенных также достаточно далеко от вершины трещины к ее берегам (рис. 2б). Далее величины, относящиеся к данным задачам, будут обозначаться верхними индексами M и T соответственно.

Рассмотрим взаимные инвариантные интегралы (например, [44]) для двух состояний: состояние f , соответствующее исходной задаче о приложенной силе Q_k , и состояние A , соответствующее одной из вспомогательных задач M , или T :

$$M^{(A, f)} = J(u_i^A + u_i^f) - J(u_i^A) - J(u_i^f). \quad (3.1)$$

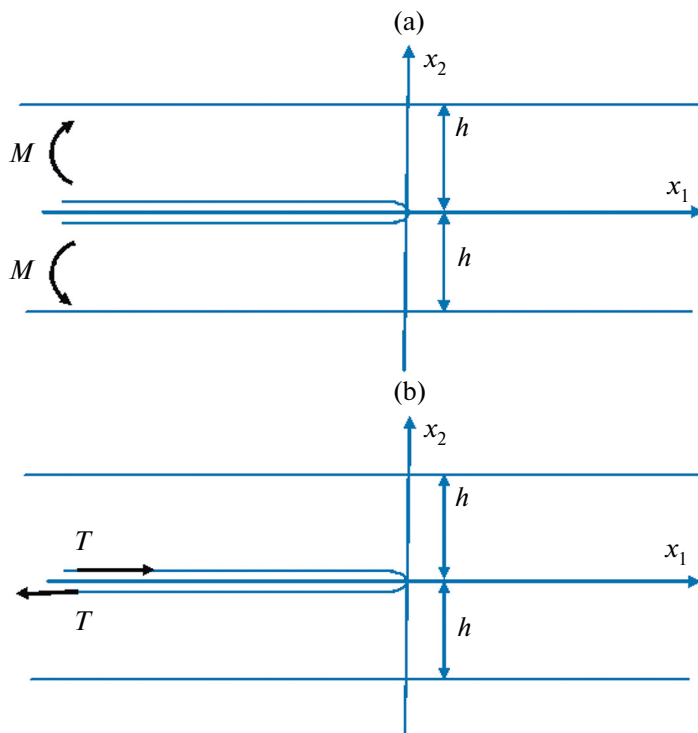


Рис. 2. Система прикладываемых нагрузок для вспомогательных задач: нагружение парой изгибающих моментов (а); нагружение парой сил с компенсирующими моментами (б).

Здесь $J(u_i^A), J(u_i^f), J(u_i^A + u_i^f)$ – J-интегралы, соответствующие состояниям A, f и их суперпозиции. С использованием определения J-интеграла [47–49] формула преобразуется к следующему виду (например, [46]):

$$M^{(A,f)} = \int_{\Gamma} [\sigma_{ik}^A \epsilon_{ik}^f \delta_{j1} - \sigma_{ij}^A u_{i,1}^f - \sigma_{ij}^f u_{i,1}^A] n_j d\Gamma. \quad (3.2)$$

Здесь Γ – контур, который может быть выбран одним из образов, либо Γ_1 , окружающий вершину трещины, либо Γ_2 , окружающий внутреннюю часть слоя с исключением точки приложения сосредоточенной силы; n_j – внешняя нормаль к контуру (рис. 3). Взаимные интегралы, соответствующие контурам Γ_1 и Γ_2 , будут означаться $M_1^{(A,f)}$ и $M_2^{(A,f)}$ соответственно.

Рассмотрим сначала интеграл по контуру Γ_1 . Его величина определяется с помощью формулы Ирвина [50] (см. также [51]):

$$M^{(A,f)}(\Gamma_1) = \frac{2}{E} (K_1^A K_1^f + K_2^A K_2^f). \quad (3.3)$$

Здесь K_1^A, K_2^A – нормальная и сдвиговая составляющие КИН для вспомогательных; K_1^f, K_2^f – нормальная и сдвиговая составляющие КИН для исходной задачи.

Рассмотрим интегрирование по контуру Γ_2 . Его правый вертикальный сегмент может быть проведен достаточно далеко, так что напряжения, деформации и производные смещений для вспомогательных задач могут быть

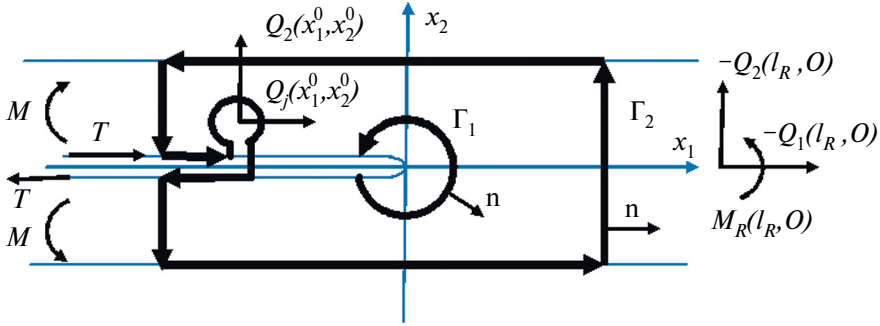


Рис. 3. Контуры при вычислении инвариантных интегралов.

рассматриваемы как исчезающе малые. Аналогично напряжения и деформации вдоль левого вертикального сегмента, путем отнесения его на достаточное расстояние, становятся исчезающе малыми для основной задачи, при этом производная от смещения $u_{2,1}^f$ остается постоянной. Этого достаточно для того, чтобы соответствующие интегралы, рассчитываемые вдоль данных сегментов, обращались в ноль. На горизонтальных границах нулевые нормальные и касательные напряжения в основной и вспомогательной задачах приводят к обнулению интегралов вдоль них. Таким образом, единственным участком контура Γ_2 , дающим вклад в интеграл, является участок, окружающий точку приложения силы:

$$M^{(A,f)}(\Gamma_2) = -Q_1 u_{1,1}^A(x_1^0, x_2^0) - Q_2 u_{2,1}^A(x_1^0, x_2^0). \quad (3.4)$$

Приравнявая величины, стоящие в правых частях (3.3) и (3.4), получаем:

$$\frac{2}{\bar{E}}(K_1^M K_1^f + K_2^M K_2^f) = -Q_k u_{k,1}^M(x_1^0, x_2^0), \quad (3.5)$$

$$\frac{2}{\bar{E}}(K_1^T K_1^f + K_2^T K_2^f) = -Q_k u_{k,1}^T(x_1^0, x_2^0). \quad (3.6)$$

Если известны остальные величины, входящие в выражения (3.5), (3.6), эту систему можно решить относительно величин K_1^f, K_2^f . С учетом того, что выражения для $K_1^M K_1^T, K_2^M K_2^T$ для рассматриваемого случая центральной трещины в однородной изотропной упругой полосе могут быть получены элементарно и известны (например, [35]):

$$K_1^M = \sqrt{12}M, \quad K_2^M = 0, \quad K_1^T = 0, \quad K_2^T = 2T, \quad (3.7)$$

данное решение может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} K_1^f &= -\frac{\bar{E}u_{1,1}^M(x_1^0, x_2^0)}{4\sqrt{3}}Q_1 - \frac{\bar{E}u_{2,1}^M(x_1^0, x_2^0)}{4\sqrt{3}}Q_2, \\ K_2^f &= -\frac{\bar{E}u_{1,1}^T(x_1^0, x_2^0)}{4}Q_1 - \frac{\bar{E}u_{2,1}^T(x_1^0, x_2^0)}{4}Q_2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выражения дают значения КИН, вызванные действием сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке полосы. В общем случае обе моды КИН зависят от обеих компонент прикладываемой силы. Однако в случае двух сил, прикладываемых в точках, зеркально расположенных от линии трещины и противоположных по направлению, благодаря симметрии нормальной и сдвиговая моды КИН становятся зависящими только от нормальной и тангенциальной составляющей прикладываемой пары соответственно.

Для вычисления КИН с использованием (3.8) необходимо вычислить величины производных от смещений $u_{1,1}^M, u_{2,1}^M, u_{1,1}^T, u_{2,1}^T$ для вспомогательных задач в точках приложения силы основной задачи.

4. Выражения для производных от компонент смещения для вспомогательных задач. *4.1. Общий случай; выражения через интегралы.* Наиболее удобным для использования решением вспомогательных задач в нашем случае представляется решение [35], дающее не только значения КИН, но и, в частности, распределение напряжений вдоль линии продолжения трещины для нагружения парой сосредоточенных моментов и парой продольных сил, приложенных вдали от вершины трещины. В работе [52] на основе этого решения были получены выражения производных от компонент смещения на внешней границе полосы для случая нагружения парой моментов. Используемый в работе [52] подход, основанный на решении задачи о полосе с применением двустороннего преобразования Лапласа (соответствующей верхней части исходной полосы) с заданными нагрузками на границах, позволяет получить значения производных в произвольной точке.

Двустороннее преобразование Лапласа по переменной x_1 определяется как (например, [35])

$$\hat{f}(p, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{-px_1} dx_1. \quad (4.1)$$

Обратное преобразование определяется при этом:

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(p, x_2) e^{px_1} dp, \quad (4.2)$$

где контур L соответствует мнимой оси комплексной плоскости p , а направление контура – сверху вниз.

Решение для верхней полуполосы дается в виде образа функции напряжений Эри:

$$\hat{F}(p, x_2) = A_1 \cos(px_2) + A_2 \sin(px_2) + A_3 y \sin(px_2) + A_4 y \cos(px_2), \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\hat{q}_2}{p^2}, \quad A_4 = \frac{\cos 2p - 1}{2p(\sin^2 p - p^2)} \hat{q}_1 + \frac{\sin 2p + 2p}{2p(\sin^2 p - p^2)} \hat{q}_2, \\ A_2 &= \frac{\hat{q}_1}{\sin^2 p - p^2} - \frac{\sin 2p + 2p}{2p^2(\sin^2 p - p^2)} \hat{q}_2, \\ A_3 &= -\frac{\cos 2p - 1}{2p(\sin^2 p - p^2)} \hat{q}_2 - \frac{\sin 2p - 2p}{2p(\sin^2 p - p^2)} \hat{q}_1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

а величины образов нормальных и касательных напряжений \hat{q}_2, \hat{q}_1 , действующих на линии продолжения трещины, найдены в работе [35] и имеют вид:

$$\hat{q}_1 = \frac{1}{h_1^+ H_1^+} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} T = -2 \frac{\sin^2 p - p^2}{\sin 2p - 2p} \frac{1}{h_1^- H_1^-} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} T, \quad (4.5)$$

$$\hat{q}_2 = \frac{1}{h_2^+ H_2^+} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} Mp = 2 \frac{\sin^2 p - p^2}{\sin 2p + 2p} \frac{1}{h_2^- H_2^-} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} Mp, \quad (4.6)$$

$$h_1^+(p) = \frac{\Gamma(1 + p / \pi)}{\Gamma(1 / 2 + p / \pi)}, \quad (4.7)$$

$$h_1^-(p) = \frac{\Gamma(1 / 2 - p / \pi)}{\Gamma(-p / \pi)}, \quad (4.8)$$

$$H_1^\pm(p) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{1}{2} \operatorname{th} t \frac{\operatorname{sh} 2t - 2t}{\operatorname{sh}^2 t - t^2} \right) \frac{dt}{it - p} \right], \quad (4.9)$$

$$h_2^+(p) = \left[\frac{\Gamma(1 + p / \pi)}{\Gamma(1 / 2 + p / \pi)} \right]^3, \quad (4.10)$$

$$h_2^-(p) = \left[\frac{\Gamma(1 / 2 - p / \pi)}{\Gamma(-p / \pi)} \right]^3, \quad (4.11)$$

$$H_2^\pm(p) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{1}{2} \operatorname{th}^3 t \frac{\operatorname{sh} 2t + 2t}{\operatorname{sh}^2 t - t^2} \right) \frac{dt}{it - p} \right], \quad (4.12)$$

где Γ — гамма-функция Эйлера; индекс \pm для H_1^\pm, H_2^\pm в (4.12) определяется положением точки p относительно мнимой оси. В формулах (4.5), (4.6) вторые равенства получены исходя из связей между величинами $h_k^+ H_k^+$ и $h_k^- H_k^-$ ($k = 1, 2$) [35], которые в используемых обозначениях записываются как

$$\frac{h_1^+ H_1^+}{h_1^- H_1^-} = -2 \frac{\sin 2p - 2p}{\sin^2 p - p^2}, \quad \frac{h_2^+ H_2^+}{h_2^- H_2^-} = 2 \frac{\sin 2p + 2p}{\sin^2 p - p^2}. \quad (4.13)$$

Образы производных смещений (например, [35]):

$$\bar{E} \hat{u}_1'(p, x_2) = \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x_2^2} - \bar{v} p^2 \hat{F}, \quad \bar{E} \hat{u}_2'(p, x_2) = -(2 + \bar{v}) p \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_2} - \frac{1}{p} \frac{\partial^3 \hat{F}}{\partial x_2^3}. \quad (4.14)$$

Подстановка (4.4) в (4.3), а затем в (4.14) дает

$$\begin{aligned} \bar{E} \hat{u}_1'(p, x_2) &= \frac{1}{\sin^2 p - p^2} (B_{11} \hat{q}_1 + B_{12} \hat{q}_2) \\ \bar{E} \hat{u}_2'(p, x_2) &= \frac{1}{\sin^2 p - p^2} (B_{21} \hat{q}_1 + B_{22} \hat{q}_2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

где

$$\begin{aligned}
 B_{11}(p) &= \sin p(2 - x_2) + \left(1 - p^2(1 + \bar{v})(1 - x_2)\right) \sin px_2 - \\
 &\quad \frac{1 + \bar{v}}{2} px_2 \cos p(2 - x_2) - p \left(2 - \frac{1 + \bar{v}}{2} x_2\right) \cos px_2, \\
 B_{12}(p) &= -\frac{1 - \bar{v}}{2} \cos p(2 - x_2) + \left(\frac{1 - \bar{v}}{2} + p^2(1 + \bar{v})(1 - x_2)\right) \cos px_2 + \\
 &\quad \frac{1 + \bar{v}}{2} px_2 \sin p(2 - x_2) - p \left((1 - \bar{v}) + \frac{1 + \bar{v}}{2} x_2\right) \sin px_2, \\
 B_{21}(p) &= \frac{1 - \bar{v}}{2} \cos p(2 - x_2) - \left(\frac{1 - \bar{v}}{2} + p^2(1 + \bar{v})(1 - x_2)\right) \cos px_2 - \\
 &\quad px_2 \frac{1 + \bar{v}}{2} \sin p(2 - x_2) - p \left(1 - \bar{v} + x_2 \frac{1 + \bar{v}}{2}\right) \sin px_2, \\
 B_{22}(p) &= \sin p(2 - x_2) + \left(1 - p^2(1 + \bar{v})(1 - x_2)\right) \sin px_2 + \\
 &\quad px_2 \frac{1 + \bar{v}}{2} \cos p(2 - x_2) + p \left(2 - x_2 \frac{1 + \bar{v}}{2}\right) \cos px_2. \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Данные формулы существенно упрощаются для берегов трещины $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \sin 2p - 2p, \quad B_{12} = (1 - \bar{v})(\sin^2 p - p^2) + 2p^2, \\
 B_{21} &= -(1 - \bar{v})(\sin^2 p - p^2) - 2p^2, \quad B_{22} = \sin 2p + 2p
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

и для внешней границы $x_2 = 1$:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= 2(\sin p - p \cos p), \quad B_{12} = -2p \sin p, \\
 B_{21} &= -2p \sin p, \quad B_{22} = 2(\sin p + p \cos p).
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Выражения (4.17) с точностью до обозначений совпадают с выражениями, полученными в работе [35], выражения B_{12}, B_{22} из (4.18) — с выражениями, полученными в работе [52].

Подстановка первых равенств (4.5), (4.6) в (4.15) дает выражения искомым образом производных смещений:

$$\begin{aligned}
 \bar{E}u_1'(p, x_2) &= \frac{1}{\sin^2 p - p^2} \left(B_{11} \frac{1}{h_1^+ H_1^+} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} T + B_{12} \frac{1}{h_2^+ H_2^+} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} Mp \right) \\
 \bar{E}u_2'(p, x_2) &= \frac{1}{\sin^2 p - p^2} \left(B_{21} \frac{1}{h_1^+ H_1^+} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} T + B_{22} \frac{1}{h_2^+ H_2^+} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} Mp \right).
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Подстановка вторых равенств (4.5), (4.6) в (4.15) дает альтернативные выражения искомым образом производных смещений:

$$\begin{aligned}
 \bar{E}u_1'(p, x_2) &= \frac{2}{\sin 2p - 2p} B_{11} \frac{1}{h_1^- H_1^-} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} T + \frac{2}{\sin 2p + 2p} B_{12} \frac{1}{h_2^- H_2^-} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} Mp \\
 \bar{E}u_2'(p, x_2) &= \frac{2}{\sin 2p - 2p} B_{21} \frac{1}{h_1^- H_1^-} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} T + \frac{2}{\sin 2p + 2p} B_{22} \frac{1}{h_2^- H_2^-} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} Mp.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Оригиналы производных смещений находятся с помощью обратного преобразования Лапласа (4.2), подынтегральные выражения для которых содержат коэффициент e^{px} . Для обеспечения сходимости удобно рассматривать область $\operatorname{Re} p < 0$ и, следовательно, представление (4.20), при вычислении значений, соответствующих $x_1 > 0$, и область $\operatorname{Re} p > 0$, и представление (4.19) при вычислении значений, соответствующих $x_1 < 0$. Вычисление оригиналов можно осуществлять непосредственно, используя интегральное представление (пункт 4.2), с помощью вычетов (пункт 4.3) либо с помощью исследования асимптотических представлений окрестности вершины трещины (пункт 4.4).

4.2. Представление производных смещений через интегралы. Оригиналы производных смещений находятся подстановкой (4.19) либо (4.20) в (4.20) для $x_1 < 0$ и $x_1 > 0$ соответственно. Контур интегрирования при этом может деформироваться согласно правилам вычисления интегралов на комплексной плоскости. В качестве контура можно выбрать

$$p = is \pm \sqrt[\alpha]{\gamma + \beta s^2}, \quad (4.21)$$

где α, β, γ – некоторые константы, выбираемые так, чтобы контуры (4.21) охватывали все полюса подынтегральной функции. Здесь знаки плюс/минус соответствуют представлениям (4.19) либо (4.20) соответственно. При $\beta = 0$ контуры превращаются в прямые линии, параллельные мнимой оси. Для функции $(\sin^2 p - p^2)$ ближайший к мнимой оси полюс, $p_1 \approx 4.21239 \pm 2.2507i$, следовательно, $0 < \sqrt[\alpha]{\gamma} < \operatorname{Re} p_1$.

Выражения для производных смещений приобретают вид для $x_1 < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}}{M} u_{1,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= -12 \left(x_2^0 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2 p - p^2} \frac{B_{12}(p)p}{h_2^+(p)H_2^+(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \\ \frac{\bar{E}}{M} u_{2,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= 12 \left(x_1^0 - \delta \right) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2 p - p^2} \frac{B_{22}(p)p}{h_2^+(p)H_2^+(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{1,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= - \left(4 - 6x_2^0 \right) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2 p - p^2} \frac{B_{11}(p)}{h_1^+(p)H_1^+(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{2,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= -6 \left(x_1^0 - \delta_m \right) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2 p - p^2} \frac{B_{21}(p)}{h_1^+(p)H_1^+(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \end{aligned} \quad (4.22)$$

и для $x_1 > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}}{M} u_{1,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sin 2p + 2p} \frac{B_{12}(p)p}{h_2^-(p)H_2^-(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \\ \frac{\bar{E}}{M} u_{2,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sin 2p + 2p} \frac{B_{22}(p)p}{h_2^-(p)H_2^-(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{1,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= - \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sin 2p - 2p} \frac{B_{11}(p)}{h_1^-(p)H_1^-(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{E}}{T} u_{2,1}^T(x_1^0, x_2^0) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sin 2p - 2p} \frac{B_{21}(p)p}{h_1^-(p)H_1^-(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds. \quad (4.23)$$

Внеинтегральные члены в (4.22) соответствуют вычетам исходных подынтегральных функций в нуле, величины $\delta \approx 0.6738$, $\delta_m \approx 0.20943$ были посчитаны в работе [53] с использованием результатов [43]. При вычислении интегралов для улучшения сходимости можно воспользоваться свойством голоморфности функций $h_2^\pm(p)$, $H_2^\pm(p)$ в левой и правой полуплоскостях соответственно и вычесть из величин $\frac{B_{ij}(p)p}{\sin^2 p - p^2}$, $\frac{2p B_{12}(p)}{\sin 2p \pm 2p}$ произвольные голоморфные члены.

4.3. *Представление производных от смещений для точек, не слишком близких к вершине трещины.* Интегралы, определяющие производные от смещений, с помощью теории вычетов можно преобразовать в ряды:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}}{M} u_{1,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= -12 \left(x_2^0 - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} B_{12}(p_k^{(1)}) p_k^{(1)} \exp(p_k^{(1)} x_1), \\ \frac{\bar{E}}{M} u_{2,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= 12(x_1^0 - \delta) - \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} B_{22}(p_k^{(1)}) p_k^{(1)} \exp(p_k^{(1)} x_1), \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{1,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= -(4 - 6x_2^0) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} B_{11}(p_k^{(1)}) \exp(p_k^{(1)} x_1), \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{2,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= -6(x_1^0 - \delta_m) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} B_{21}(p_k^{(1)}) \exp(p_k^{(1)} x_1), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}}{M} u_{1,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= \frac{2\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \operatorname{Re} R_k^{(3)} B_{12}(p_k^{(3)}) p_k^{(3)} \exp(p_k^{(3)} x_1), \\ \frac{\bar{E}}{M} u_{2,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= \frac{2\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(3)} B_{22}(p_k^{(3)}) p_k^{(3)} \exp(p_k^{(3)} x_1), \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{1,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(4)} B_{11}(p_k^{(3)}) \exp(p_k^{(4)} x_1), \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{2,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(4)} B_{21}(p_k^{(3)}) \exp(p_k^{(4)} x_1), \end{aligned} \quad (4.25)$$

где

$$\begin{aligned} R_k^{(1)} &= \operatorname{res} \left(\frac{1}{(\sin^2 p_k^{(1)} - p_k^{(1)2}) h_1^+(p_k^{(1)}) H_1^+(p_k^{(1)})} \right), \\ R_k^{(2)} &= \operatorname{res} \left(\frac{1}{(\sin^2 p_k^{(1)} - p_k^{(1)2}) h_2^+(p_k^{(1)}) H_2^+(p_k^{(1)})} \right), \end{aligned}$$

$$R_k^{(3)} = \text{res} \left(\frac{1}{(\sin 2p_k^{(3)} + 2p_k^{(3)})h_2^-(p_k^{(3)})H_2^-(p_k^{(3)})} \right),$$

$$R_k^{(4)} = \text{res} \left(\frac{1}{(\sin 2p_k^{(4)} - 2p_k^{(4)})p_k^{(4)}h_1^-(p_k^{(4)})H_1^-(p_k^{(4)})} \right) \quad (4.26)$$

для $x_1 < 0$ и $x_1 > 0$ соответственно. Здесь $p_k^{(1)}$ — нули функции $\sin^2 p - p^2$ с положительными действительными частями; $p_k^{(3)} p_k^{(4)}$ — нули функций $\sin 2p + 2p$ и $\sin 2p - 2p$ с отрицательными действительными частями соответственно. При записи (4.24), (4.25) использовался тот факт, что корни $p_k^{(m)}$ и соответствующие им вычеты комплексно-сопряженные. Данные ряды весьма удобны для вычислений и сходятся тем быстрее, чем больше абсолютная величина x_1 , поскольку представляют собой сумму убывающих экспонент. Однако для $|x_1| \sim 0.1$ уже требуется учет порядка десятка членов, а при $|x_1| \rightarrow 0$ ряды расходятся.

Корни p_k величины $R_k^{(1)}$ не зависят от параметров и могут быть посчитаны заранее. Посчитанные значения для первых 20 нулей и вычетов приведены в табл. 1 и 2, где введены обозначения:

$$\alpha_k^{(m)} = \text{Re} p_k^{(m)}, \quad \beta_k^{(m)} = \text{Im} p_k^{(m)}, \quad \gamma_k^{(m)} = \text{Re} R_k^{(m)}, \quad \delta_k^{(m)} = \text{Im} R_k^{(m)} \quad (4.27)$$

Таблица 1. Действительные и мнимые части корней и вычетов функций, используемых при вычислении величин, относящихся к левой части полосы

| k | $\alpha_k^{(1)}$ | $\beta_k^{(1)}$ | $\gamma_k^{(1)}$ | $\delta_k^{(1)}$ | $\gamma_k^{(2)}$ | $\delta_k^{(2)}$ |
|----|------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 4.212 | 2.251 | $8.711 \cdot 10^{-3}$ | $1 \cdot 10^{-3}$ | $1.419 \cdot 10^{-2}$ | $9.624 \cdot 10^{-3}$ |
| 2 | 7.498 | 2.769 | $1.370 \cdot 10^{-3}$ | $8.116 \cdot 10^{-4}$ | $3.153 \cdot 10^{-3}$ | $3.483 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 | 10.713 | 3.103 | $3.897 \cdot 10^{-4}$ | $3.415 \cdot 10^{-4}$ | $1.159 \cdot 10^{-3}$ | $1.693 \cdot 10^{-3}$ |
| 4 | 13.900 | 3.352 | $1.485 \cdot 10^{-4}$ | $1.668 \cdot 10^{-4}$ | $5.422 \cdot 10^{-4}$ | $9.659 \cdot 10^{-4}$ |
| 5 | 17.073 | 3.551 | $6.766 \cdot 10^{-5}$ | $9.123 \cdot 10^{-5}$ | $2.932 \cdot 10^{-4}$ | $6.103 \cdot 10^{-4}$ |
| 6 | 20.239 | 3.717 | $3.484 \cdot 10^{-5}$ | $5.432 \cdot 10^{-5}$ | $1.748 \cdot 10^{-4}$ | $4.137 \cdot 10^{-4}$ |
| 7 | 23.398 | 3.859 | $1.960 \cdot 10^{-5}$ | $3.451 \cdot 10^{-5}$ | $1.118 \cdot 10^{-4}$ | $2.954 \cdot 10^{-4}$ |
| 8 | 26.555 | 3.983 | $1.181 \cdot 10^{-5}$ | $2.306 \cdot 10^{-5}$ | $7.547 \cdot 10^{-5}$ | $2.194 \cdot 10^{-4}$ |
| 9 | 29.708 | 4.094 | $7.498 \cdot 10^{-6}$ | $1.605 \cdot 10^{-5}$ | $5.311 \cdot 10^{-5}$ | $1.682 \cdot 10^{-4}$ |
| 10 | 32.860 | 4.193 | $4.973 \cdot 10^{-6}$ | $1.155 \cdot 10^{-5}$ | $3.866 \cdot 10^{-5}$ | $1.322 \cdot 10^{-4}$ |
| 11 | 36.010 | 4.284 | $3.418 \cdot 10^{-6}$ | $8.545 \cdot 10^{-6}$ | $2.894 \cdot 10^{-5}$ | $1.061 \cdot 10^{-4}$ |
| 12 | 39.159 | 4.367 | $2.420 \cdot 10^{-6}$ | $6.473 \cdot 10^{-6}$ | $2.217 \cdot 10^{-5}$ | $8.670 \cdot 10^{-5}$ |
| 13 | 42.307 | 4.443 | $1.758 \cdot 10^{-6}$ | $5.003 \cdot 10^{-6}$ | $1.732 \cdot 10^{-5}$ | $7.191 \cdot 10^{-5}$ |
| 14 | 45.454 | 4.515 | $1.305 \cdot 10^{-6}$ | $3.934 \cdot 10^{-6}$ | $1.377 \cdot 10^{-5}$ | $6.041 \cdot 10^{-5}$ |
| 15 | 48.601 | 4.581 | $9.880 \cdot 10^{-7}$ | $3.142 \cdot 10^{-6}$ | $1.111 \cdot 10^{-5}$ | $5.133 \cdot 10^{-5}$ |
| 16 | 51.747 | 4.643 | $7.605 \cdot 10^{-7}$ | $2.543 \cdot 10^{-6}$ | $9.080 \cdot 10^{-6}$ | $4.405 \cdot 10^{-5}$ |
| 17 | 54.892 | 4.702 | $5.941 \cdot 10^{-7}$ | $2.083 \cdot 10^{-6}$ | $7.508 \cdot 10^{-6}$ | $3.814 \cdot 10^{-5}$ |
| 18 | 58.038 | 4.758 | $4.704 \cdot 10^{-7}$ | $1.724 \cdot 10^{-6}$ | $6.272 \cdot 10^{-6}$ | $3.327 \cdot 10^{-5}$ |
| 19 | 61.183 | 4.810 | $3.769 \cdot 10^{-7}$ | $1.441 \cdot 10^{-6}$ | $5.288 \cdot 10^{-6}$ | $2.924 \cdot 10^{-5}$ |
| 20 | 64.327 | 4.860 | $3.053 \cdot 10^{-7}$ | $1.215 \cdot 10^{-6}$ | $4.496 \cdot 10^{-6}$ | $2.585 \cdot 10^{-5}$ |

Таблица 2. Действительные и мнимые части корней и вычетов функций, используемых при вычислении величин, относящихся к правой части полосы

| k | $-\alpha_k^{(3)}$ | $\beta_k^{(3)}$ | $\gamma_k^{(3)}$ | $\delta_k^{(3)}$ | $-\alpha_k^{(4)}$ | $\beta_k^{(4)}$ | $\gamma_k^{(4)}$ | $\delta_k^{(4)}$ |
|-----|-------------------|-----------------|------------------------|-----------------------|-------------------|-----------------|-----------------------|------------------------|
| 1 | 2.1062 | 1.1254 | $-3.473 \cdot 10^{-1}$ | $7.540 \cdot 10^{-2}$ | 3.7488 | 1.3843 | $3.105 \cdot 10^{-2}$ | $-6.121 \cdot 10^{-2}$ |
| 2 | 5.3563 | 1.5516 | $-1.788 \cdot 10^{-2}$ | $2.069 \cdot 10^{-2}$ | 6.9500 | 1.6761 | $7.951 \cdot 10^{-3}$ | $-2.481 \cdot 10^{-2}$ |
| 3 | 8.5367 | 1.7755 | $-3.781 \cdot 10^{-3}$ | $6.885 \cdot 10^{-3}$ | 10.1193 | 1.8584 | $3.420 \cdot 10^{-3}$ | $-1.413 \cdot 10^{-2}$ |
| 4 | 11.6992 | 1.9294 | $-1.314 \cdot 10^{-3}$ | $3.160 \cdot 10^{-3}$ | 13.2773 | 1.9916 | $1.851 \cdot 10^{-3}$ | $-9.388 \cdot 10^{-3}$ |
| 5 | 14.8541 | 2.0469 | $-5.902 \cdot 10^{-4}$ | $1.737 \cdot 10^{-3}$ | 16.4299 | 2.0966 | $1.141 \cdot 10^{-3}$ | $-6.806 \cdot 10^{-3}$ |
| 6 | 18.0049 | 2.1419 | $-3.097 \cdot 10^{-4}$ | $1.070 \cdot 10^{-3}$ | 19.5794 | 2.1834 | $7.653 \cdot 10^{-4}$ | $-5.221 \cdot 10^{-3}$ |
| 7 | 21.1534 | 2.2217 | $-1.805 \cdot 10^{-4}$ | $7.125 \cdot 10^{-4}$ | 22.7270 | 2.2573 | $5.446 \cdot 10^{-4}$ | $-4.168 \cdot 10^{-3}$ |
| 8 | 24.3003 | 2.2906 | $-1.134 \cdot 10^{-4}$ | $5.019 \cdot 10^{-4}$ | 25.8734 | 2.3217 | $4.049 \cdot 10^{-4}$ | $-3.426 \cdot 10^{-3}$ |
| 9 | 27.4462 | 2.3510 | $-7.548 \cdot 10^{-5}$ | $3.690 \cdot 10^{-4}$ | 29.0188 | 2.3788 | $3.114 \cdot 10^{-4}$ | $-2.881 \cdot 10^{-3}$ |
| 10 | 30.5913 | 2.4050 | $-5.250 \cdot 10^{-5}$ | $2.805 \cdot 10^{-4}$ | 32.1636 | 2.4300 | $2.459 \cdot 10^{-4}$ | $-2.466 \cdot 10^{-3}$ |
| 11 | 33.7358 | 2.4537 | $-3.785 \cdot 10^{-5}$ | $2.190 \cdot 10^{-4}$ | 35.3079 | 2.4764 | $1.985 \cdot 10^{-4}$ | $-2.142 \cdot 10^{-3}$ |
| 12 | 36.8799 | 2.4981 | $-2.809 \cdot 10^{-5}$ | $1.749 \cdot 10^{-4}$ | 38.4518 | 2.5189 | $1.632 \cdot 10^{-4}$ | $-1.883 \cdot 10^{-3}$ |
| 13 | 40.0236 | 2.5389 | $-2.137 \cdot 10^{-5}$ | $1.422 \cdot 10^{-4}$ | 41.5954 | 2.5581 | $1.362 \cdot 10^{-4}$ | $-1.673 \cdot 10^{-3}$ |
| 14 | 43.1671 | 2.5766 | $-1.660 \cdot 10^{-5}$ | $1.175 \cdot 10^{-4}$ | 44.7387 | 2.5944 | $1.152 \cdot 10^{-4}$ | $-1.498 \cdot 10^{-3}$ |
| 15 | 46.3103 | 2.6116 | $-1.312 \cdot 10^{-5}$ | $9.842 \cdot 10^{-5}$ | 47.8819 | 2.6283 | $9.850 \cdot 10^{-5}$ | $-1.353 \cdot 10^{-3}$ |
| 16 | 49.4534 | 2.6444 | $-1.053 \cdot 10^{-5}$ | $8.339 \cdot 10^{-5}$ | 51.0248 | 2.6600 | $8.507 \cdot 10^{-5}$ | $-1.229 \cdot 10^{-3}$ |
| 17 | 52.5963 | 2.6751 | $-8.572 \cdot 10^{-6}$ | $7.139 \cdot 10^{-5}$ | 54.1677 | 2.6898 | $7.411 \cdot 10^{-5}$ | $-1.123 \cdot 10^{-3}$ |
| 18 | 55.7390 | 2.7041 | $-7.060 \cdot 10^{-6}$ | $6.167 \cdot 10^{-5}$ | 57.3104 | 2.7179 | $6.506 \cdot 10^{-5}$ | $-1.031 \cdot 10^{-3}$ |
| 19 | 58.8817 | 2.7314 | $-5.877 \cdot 10^{-6}$ | $5.370 \cdot 10^{-5}$ | 60.4530 | 2.7446 | $5.751 \cdot 10^{-5}$ | $-9.516 \cdot 10^{-4}$ |
| 20 | 62.0242 | 2.7574 | $-4.939 \cdot 10^{-6}$ | $4.711 \cdot 10^{-5}$ | 63.5955 | 2.7699 | $5.115 \cdot 10^{-5}$ | $-8.816 \cdot 10^{-4}$ |

4.3. Асимптотическое представление производных смещений для точек, близких к вершине трещины. Как известно, главные члены асимптотик напряжений, смещений и их производных вблизи вершины трещины определяются КИН. Однако, в отличие от весьма эффективного использования поля напряжений, определяемого КИН в качестве критерия роста трещин, распределение смещений и их производных, определяемых исключительно членом, пропорциональным КИН, оказывается достаточно точным только в весьма малой области, прилегающей к вершине трещины, а на расстояниях порядка 0.1 толщины слоя (для которых еще приемлемо использование формул (4.24), (4.25)) использование лишь членов, определяемых КИН, становится недостаточным. В общем случае распределение производных смещений вблизи вершины трещины может быть представлено как сумма ряда по полужелым степеням $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, соответствующего собственным решениям для бесконечного тела с трещиной, и ряда по целым степеням x_1, x_2 , соответствующего регулярной части поля напряжения.

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{tip} &= \sum_{n=0}^N \sigma_{ij}^{(n-1/2)}(\theta) r^{n-1/2} + \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij,1}^{(0)} x_1 + \sigma_{ij,2}^{(0)} x_2 + \\
&+ \sigma_{ij,11}^{(0)} \frac{x_1^2}{2} + \sigma_{ij,12}^{(0)} x_1 x_2 + \sigma_{ij,22}^{(0)} \frac{x_2^2}{2} + \dots \\
u_{i,1}^{tip} &= \sum_{n=0}^N U_i^{(n-1/2)}(\theta) r^{n-1/2} + U_i^{(0)} + U_{i,1}^{(0)} x_1 + U_{i,2}^{(0)} x_2 + \\
&+ U_{i,11}^{(0)} \frac{x_1^2}{2} + U_{i,12}^{(0)} x_1 x_2 + U_{i,22}^{(0)} \frac{x_2^2}{2} + \dots
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Здесь θ – полярный угол; величина $\sigma_{ij}^{(0)} = \delta_{i1}\delta_{j1}T$ – известна как Т-напряжение; величины $\sigma_{ij}^{(-1/2)}$, $U_i^{(-1/2)}$ определяются коэффициентами интенсивности напряжений. Последние получаются из общеизвестных выражений для распределения напряжений вблизи вершины трещины (например, [51]) применением уравнений теории упругости (значения КИН для рассматриваемых случаев известны (3.7)):

$$\begin{aligned}
U_1^{(-1/2)} &= \frac{K_1}{2\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} [2(1 - \bar{\nu}) - (1 + \bar{\nu})(\cos \theta - \cos 2\theta)] - \\
&\quad \frac{K_2}{2\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} [4 + (1 + \bar{\nu})(\cos \theta + \cos 2\theta)] \\
U_2^{(-1/2)} &= \frac{K_1}{2\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} [-4 + (1 + \bar{\nu})(\cos \theta + \cos 2\theta)] - \\
&\quad \frac{K_2}{2\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} [2(1 - \bar{\nu}) + (1 + \bar{\nu})(\cos \theta - \cos 2\theta)].
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Выражения для остальных интересующих величин, входящих в (4.28), получены в п. 7:

$$\begin{aligned}
U_1^{(0)} &\approx 5.0196M, & U_{1,1}^{(0)} &\approx -2.3606M, & U_{1,11}^{(0)} &\approx -3.423M, \\
U_{1,2}^{(0)} &= -U_{2,1}^{(0)}, & U_{1,12}^{(0)} &\approx -U_{2,11}^{(0)}, & U_{1,22}^{(0)} &= -(1 - 2\bar{\nu})U_1^{(11)}, \\
U_2^{(0)} &\approx 2.0837T, & U_{2,1}^{(0)} &\approx 3.808T, & U_{2,11}^{(0)} &\approx 4.0268T, \\
U_{2,2}^{(0)} &= -\bar{\nu}U_{1,1}^{(0)}, & U_{2,12}^{(0)} &\approx -\bar{\nu}U_{1,11}^{(0)}, & U_{2,22}^{(0)} &\approx \bar{\nu}U_{2,11}^{(0)}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$U_1^{(1/2)} = \frac{\sigma_{22}^{(1/2)}}{2} \cos \frac{\theta}{2} [3 - \cos \theta - \bar{\nu}(1 + \cos \theta)] + \frac{\sigma_{12}^{(1/2)}}{2} \sin \frac{\theta}{2} [5 + \bar{\nu} + (1 + \bar{\nu})\cos \theta] \tag{4.31}$$

$$U_2^{(1/2)} = \frac{\sigma_{22}^{(1/2)}}{2} \sin \frac{\theta}{2} [3 - \cos \theta - \bar{\nu}(1 + \cos \theta)] - \frac{\sigma_{12}^{(1/2)}}{2} \cos \frac{\theta}{2} [1 - 3\bar{\nu} + (1 + \bar{\nu})\cos \theta],$$

$$U_1^{(3/2)} = -\frac{\sigma_{22}^{(3/2)}}{2} \cos \frac{\theta}{2} [5 + \bar{\nu} - (7 - \bar{\nu})\cos \theta] + \frac{\sigma_{12}^{(3/2)}}{2} \sin \frac{\theta}{2} [7 + 3\bar{\nu} + (11 + 3\bar{\nu})\cos \theta] \tag{4.32}$$

$$U_2^{(3/2)} = \frac{\sigma_{22}^{(3/2)}}{2} \sin \frac{\theta}{2} [1 - 3\bar{\nu} + (5 - 3\bar{\nu})\cos \theta] - \frac{\sigma_{12}^{(3/2)}}{2} \cos \frac{\theta}{2} [1 + 5\bar{\nu} + (1 - 7\bar{\nu})\cos \theta].$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22}^{(1/2)} &= \lim_{x_1 \rightarrow 0+} \left[\sigma_{22}(x_1, 0) - K_1 (2\pi x_1)^{-1/2} - \sigma_{22}^{(0)} \right] x_1^{1/2} \approx -5.587M \\
 \sigma_{12}^{(1/2)} &= \lim_{x_1 \rightarrow 0+} \left[\sigma_{12}(x_1, 0) - K_2 (2\pi x_1)^{-1/2} - \sigma_{12}^{(0)} \right] x_1^{1/2} \approx -1.196T \\
 \sigma_{22}^{(3/2)} &= \lim_{x_1 \rightarrow 0+} \left[\sigma_{22}(x_1, 0) - K_1 (2\pi x_1)^{-1/2} - \sigma_{22}^{(0)} - \sigma_{22}^{(1/2)} x_1^{1/2} - \sigma_{22}^{(1)} x_1 \right] x_1^{3/2} \approx (4.33) \\
 &\approx 3.765M \\
 \sigma_{12}^{(3/2)} &= \lim_{x_1 \rightarrow 0+} \left[\sigma_{12}(x_1, 0) - K_2 (2\pi x_1)^{-1/2} - \sigma_{12}^{(0)} - \sigma_{12}^{(1/2)} x_1^{1/2} - \sigma_{12}^{(1)} x_1 \right] x_1^{3/2} \approx \\
 &\approx 0.2988T.
 \end{aligned}$$

Выражения, зависящие от декартовых координат, получаются подстановкой

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \cos \theta = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \cos 2\theta = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \\
 \cos \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

5. Численные расчеты. Значения КИН от действия произвольной силы $Q_1(x_1^0, x_2^0), Q_2(x_1^0, x_2^0)$, действующей в точке (x_1^0, x_2^0) , получаются подстановкой в (3.8) производных смещений $u_{1,1}(x_1^0, x_2^0), u_{2,1}(x_1^0, x_2^0)$, рассчитанных согласно (4.22), (4.23), либо (4.24), (4.25), либо (4.28)–(4.34).

В силу симметрии геометрии, в ряде ситуаций удобно рассмотреть общий случай как суперпозицию четырех вариантов приложения пар сил:

– пара нормальных сил, приложенных на равноотстоящих от берегов трещины расстояниях и действующих в противоположном направлении, $Q_1(x_1^0, x_2^0) = -Q_1(x_1^0, x_2^0) = Q_{FD}(x_1^0, x_2^0)$ – (вариант (FD)).

– пара нормальных сил, приложенных на равноотстоящих от берегов трещины расстояниях и действующих в противоположном направлении, $Q_1(x_1^0, x_2^0) = Q_1(x_1^0, x_2^0) = Q_{FA}(x_1^0, x_2^0)$ – (вариант FA).

– пара продольных сил, приложенных на равноотстоящих от берегов трещины расстояниях и действующих в противоположном направлении, $Q_2(x_1^0, x_2^0) = -Q_2(x_1^0, x_2^0) = Q_{TA}(x_1^0, x_2^0)$ – (вариант TA).

– пара продольных сил, приложенных на равноотстоящих от берегов трещины расстояниях и действующих в противоположном направлении, $Q_2(x_1^0, x_2^0) = Q_2(x_1^0, x_2^0) = Q_{TD}(x_1^0, x_2^0)$ – (вариант TD).

В силу симметрии в первом и четвертом случаях будет присутствовать только нормальная мода КИН, а во втором и третьем – только сдвиговая:

$$\begin{aligned}
 \frac{K_1^{FD}}{Q_{FD}} &= -\frac{\bar{E}u_{2,1}^M(x_1^0, x_2^0)}{2\sqrt{3}}, \quad \frac{K_1^{TD}}{Q_{TD}} = -\frac{\bar{E}u_{1,1}^M(x_1^0, x_2^0)}{2\sqrt{3}}, \\
 \frac{K_2^{TA}}{Q_{TA}} &= -\frac{\bar{E}u_{1,1}^T(x_1^0, x_2^0)}{2}, \quad \frac{K_2^{FA}}{Q_{FA}} = -\frac{\bar{E}u_{2,1}^T(x_1^0, x_2^0)}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Далее рассмотрены некоторые частные случаи.

5.1. *Силы, приложенные к берегам трещины.* Данная ситуация представляется наиболее интересной. Именно ее исследованию, и в частности случаю нагружения симметрично расположенной системой сил, посвящено большинство работ [24, 31–33].

Для точек, удаленных от вершины трещины, подстановка (4.22) в (5.1) дает:

$$\begin{aligned}\frac{K_1^{FD}}{Q_{FD}} &= \sqrt{12}(-x_1^0 + \delta) + \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} B_{22}(p_k^{(1)}) p_k^{(1)} \exp(p_k^{(1)} x_1), \\ \frac{K_1^{TD}}{Q_{TD}} &= -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} B_{12}(p_k^{(1)}) p_k^{(1)} \exp(p_k^{(1)} x_1), \\ \frac{K_2^{TA}}{Q_{TA}} &= 2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} B_{11}(p_k^{(1)}) \exp(p_k^{(1)} x_1), \\ \frac{K_2^{FA}}{Q_{FA}} &= 3(x_1^0 - \delta_m) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} B_{21}(p_k^{(1)}) \exp(p_k^{(1)} x_1).\end{aligned}\tag{5.2}$$

Здесь величины B_{ij} определяются (4.17). Учет лишь первых двух вычетов дает достаточно простые формулы:

$$\begin{aligned}\frac{K_1^{FD}}{Q_{FD}} &= \sqrt{12}(-x_1^0 + \delta) + \exp \alpha_1 x_1^0 (0.5205 \cos \beta_1 x_1^0 - 0.1660 \sin \beta_1 x_1^0) + \\ &+ \exp \alpha_2 x_1^0 (0.4270 \cos \beta_2 x_1^0 - 0.06139 \sin \beta_2 x_1^0) + O(\exp \alpha_3 x_1^0), \\ \frac{K_1^{TD}}{Q_{TD}} &= -\sqrt{3} - \exp \alpha_1 x_1^0 (0.06113 \cos \beta_1 x_1^0 + 0.4905 \sin \beta_1 x_1^0) - \\ &- \exp \alpha_2 x_1^0 (0.0104 \cos \beta_2 x_1^0 + 0.4128 \sin \beta_2 x_1^0) + O(\exp \alpha_3 x_1^0), \\ \frac{K_2^{TA}}{Q_{TA}} &= 2 + \exp \alpha_1 x_1^0 (0.5555 \cos \beta_1 x_1^0 + 0.09998 \sin \beta_1 x_1^0) + \\ &+ \exp \alpha_2 x_1^0 (0.4536 \cos \beta_2 x_1^0 + 0.06658 \sin \beta_2 x_1^0) + O(\exp \alpha_3 x_1^0), \\ \frac{K_2^{FA}}{Q_{FA}} &= 3(x_1^0 - \delta_m) + \exp \alpha_1 x_1^0 (0.0042 \cos \beta_1 x_1^0 + 0.6239 \sin \beta_1 x_1^0) + \\ &+ \exp \alpha_2 x_1^0 (-0.0135 \cos \beta_2 x_1^0 + 0.4788 \sin \beta_2 x_1^0) + O(\exp \alpha_3 x_1^0), \\ \alpha_1 &\approx 4.2124, \beta_1 \approx 2.2507, \alpha_2 \approx 7.4976, \beta_2 \approx 2.7687, \alpha_3 \approx 10.713.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Здесь члены, не содержащие убывающие экспоненты, соответствуют случаю приложения нагрузки на бесконечности, рассмотренному в работе [43].

Вблизи вершины трещины подстановка (4.28)–(4.34) в (5.1) дает:

$$\begin{aligned}
\frac{K_1^{FD}}{Q_{FD}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-x_1)^{-1/2} + 3.226(-x_1)^{1/2} + 2.174(-x_1)^{3/2} + O(x_1^{5/2}) \\
\frac{K_1^{TD}}{Q_{TD}} &= -1.449 + 0.6814x_1 + 0.4941x_1^2 + O(x_1^3) \\
\frac{K_2^{TA}}{Q_{TA}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-x_1)^{-1/2} + 1.196(-x_1)^{1/2} + 0.2988(-x_1)^{3/2} + O(x_1^{5/2}) \\
\frac{K_2^{FA}}{Q_{FA}} &= -1.042 + 1.904x_1 - 1.007x_1^2 + O(x_1^3).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Для случая нагружения парой нормальных сил (FD) погрешность, даваемая асимптотикой (5.3), по сравнению с точным решением для $|x_1^0| = 0.3$ составляет 0.4% и уменьшается с ростом $|x_1^0|$. Погрешность, даваемая асимптотикой (5.4), для $|x_1^0| = 0.3$ составляет 0.39% и уменьшается с уменьшением $|x_1^0|$. Таким образом, существует область пересечения в районе $|x_1^0| = 0.3$, где обе асимптотики дают погрешности менее 0.5%.

Аналогично для случая нагружения парой продольных сил (ТА) погрешность, даваемая асимптотикой (5.3), по сравнению с точным решением для $|x_1^0| = 0.3$ составляет 0.54% и уменьшается с ростом $|x_1^0|$. Погрешность, даваемая асимптотикой (5.4), для $|x_1^0| = 0.3$ составляет 0.81% и уменьшается с уменьшением $|x_1^0|$. Таким образом, существует область пересечения в районе $|x_1^0| = 0.3$, где обе асимптотики дают погрешности менее 0.9%.

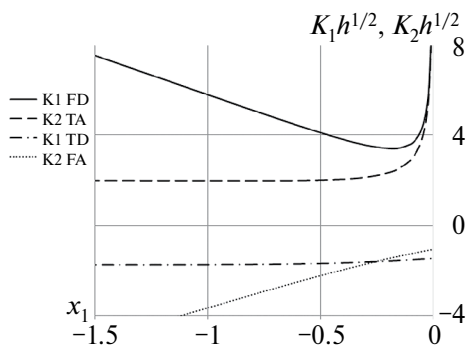


Рис. 4. Зависимости нормализованных значений КИН от действия пар сил, приложенных к берегам трещины в зависимости от координаты x_1 точек их приложения. Сплошная линия — K_1 от действия пары нормальных противоположно направленных сил; пунктирная линия — K_2 от действия пары продольных противоположно направленных сил; штрих-пунктирная линия — K_1 от действия пары продольных сонаправленных сил; точечная линия — K_2 от действия пары нормальных сонаправленных сил.

Еще лучше работают асимптотические представления для случая нагружения парой нормальных сил, действующих в одном направлении (FA). Так погрешность, даваемая асимптотикой (5.3), с учетом лишь первого содержащего экспоненту члена по сравнению с точным решением для $|x_1^0| = 0.2$ составляет 0.08% и уменьшается с ростом $|x_1^0|$. Погрешность, даваемая асимптотикой (5.4), для $|x_1^0| = 0.2$ составляет 0.14% и уменьшается с уменьшением $|x_1^0|$. Таким образом, существует область пересечения в районе $|x_1^0| = 0.2$, где обе асимптотики дают погрешности менее 0.15%.

Несколько хуже работают асимптотические представления для

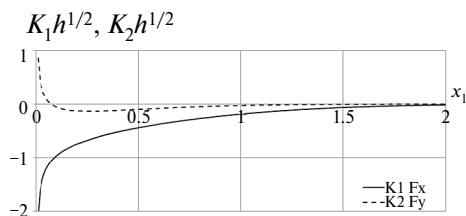


Рис. 5. Зависимости нормализованных значений КИН от действия сил, приложенных на продолжении линии трещины в зависимости от координаты x_1 точек их приложения. Сплошная линия – K_1 от действия продольной силы; пунктирная линия – K_2 от действия нормальной силы.

случая нагружения парой продольных сил, действующих в одном направлении (ТД). Погрешность, даваемая асимптотикой (5.4), для $|x_1^0| = 0.1$ составляет 0.65%, а для $|x_1^0| = 0.15$ – уже 1.45%. Погрешность же, даваемая асимптотикой (5.3), составляет для этих расстояний уже 12 и 8%, соответственно. Приемлемые результаты она дает лишь до $|x_1^0| = 0.4$, где значение относительной погрешности составляет 0.35%. Поэтому при расчетах необходимо в разложении (5.2) удерживать больше

количество членов. Так, для достижения точности 0.5% для $|x_1^0| = 0.1$ необходимо удержать минимум 11 членов.

Зависимости нормализованных значений КИН в зависимости от координаты x_1 приложения пар сил представлены на рис. 4.

В работе [33] для случая нагружения парой нормальных сил (рассмотренный случай FD) была предложена аппроксимационная формула, в используемых обозначениях записываемая в виде (здесь использовано значение δ посчитанное в [43], в работе [33] было использовано значение 0.673):

$$\frac{K_1^{FD}}{Q_{FD}} = \sqrt{12}(-x_1^0 + \delta) + \sqrt{\frac{2}{\pi(-x_1^0)}} - \left(0.815(-x_1^0)^{0.619} + 0.429\right)^{-1}. \quad (5.5)$$

Согласно проведенным расчетам ее погрешность не превышает 1% (в работе [33] ее погрешность оценивалась не более 1.1%).

5.2. Силы, приложенные на продолжении линии трещины. Значения КИН рассчитываются подстановкой в (3.8) выражения (4.25) для $x_1 \geq 0.1$ либо

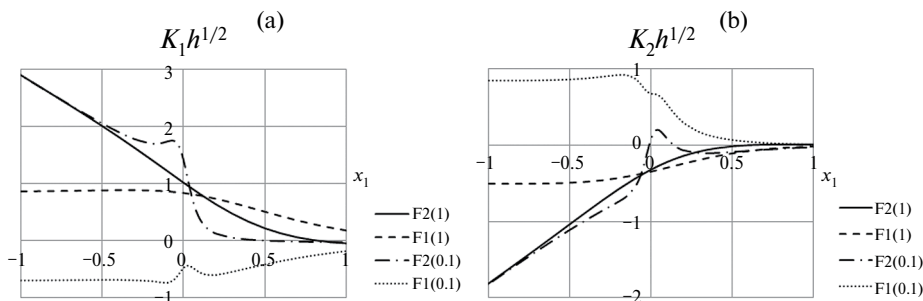


Рис. 6. Зависимости нормализованных значений K_1 – (а) и K_2 – (б) от действия сил, приложенных на внешней границе $x_2 = 1$ и линии, параллельной границе и отстоящей от линии трещины $x_2 = 0.1$ в зависимости от координаты x_1 точек их приложения. Сплошные линии – от действия нормальной силы $x_2 = 1$; пунктирные линии – от действия продольной силы $x_2 = 1$; штрих-пунктирные линии – от действия нормальной силы $x_2 = 0.1$; точечные линии – от действия продольной силы $x_2 = 0.1$.

(4.28)–(4.33) при $\theta = 0$ для $x_1 \leq 0.1$. Поскольку точки приложения сил являются внутренними точками, решение становится зависящим от коэффициента Пуассона. Расчеты проводились для $\bar{\nu} = 0.3$. Зависимости для ненулевых КИН представлены на рис. 5.

Представленные расчеты показывают, что при стремлении точки приложения сил к вершине трещины значения КИН отличаются в зависимости от того, стремиться ли координата точки приложения к нулю справа или слева. Пределы оказываются различны. Это обусловлено наличием корневой особенности поля производных смещений в вершине трещины.

5.3. Силы, приложенные к внешним границам либо к внутренним точкам полюсы. Значения КИН рассчитываются подстановкой в (3.8) выражений (4.24)–(4.26) для $|x_1| \geq 0.1$ либо – для $-0.1 \leq x_1 \leq 0.1, x_2 \leq 0.1$, либо по общим формулам (4.22), (4.23) для $-0.1 \leq x_1 \leq 0.1, 0.1 \leq x_2 \leq 1$. Зависимости для КИН представлены на рис. 6. Для внутренних точек решение становится зависящим от коэффициента Пуассона. Расчеты для $x_2 = 0.1$ проводились для $\bar{\nu} = 0.3$.

5.4. Распределенная нагрузка вблизи вершины трещин; связь с моделью когезионной зоны. Когезионные модели предполагают наличие некоторых, обычно малых, зон вблизи вершины трещины, в пределах которых действуют силы некоторой природы, достаточно большой интенсивности, компенсирующие сингулярность в вершине [54–56]. Для моды нормального отрыва эти силы сжимающие, для сдвиговой моды – продольные, противоположно направленные.

Пусть в пределах зоны $-a \leq x_1 \leq 0$ действуют когезионные силы $\sigma_{22}^c(x_1), \sigma_{12}^c(x_1)$. Их вклад в КИН можно вычислить интегрированием выражений для асимптотики ближнего поля – с помощью первой и третьей формул (5.4) с весами $\sigma_{22}^c(x_1), \sigma_{12}^c(x_1)$ соответственно. При весьма малом a достаточно лишь ведущих членов асимптотического разложения, определяемых КИН, в противном случае, можно удержать еще один или два члена асимптотического разложения (5.4).

6. Приложение: поле вблизи вершины трещины; несколько старших членов разложения. **6.1. Разложения производных смещений в окрестности вершины трещины с нецелыми степенями.** Для бесконечного тела с трещиной $x_1 \in]-\infty, 0]$, $x_2 = 0$ решения, удовлетворяющие условиям отсутствия нормальных и касательных напряжений на берегах, выраженные через комплексные потенциалы $\Phi(z), \Psi(z)$, $z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$ [57], могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \sum_k A_{k-1/2} z^{k-1/2} = \sum_k A_{k-1/2} r^{k-1/2} e^{i(k-1/2)\theta}, \\ \Psi(z) &= \sum_k B_{k-1/2} z^{k-1/2} = \sum_k B_{k-1/2} r^{k-1/2} e^{i(k-1/2)\theta},\end{aligned}\quad (6.1)$$

где $A_{k-1/2}, B_{k-1/2}$ – комплексные константы. Случай $k = 0$ соответствует сингулярному полю напряжений, характеризуемому КИН, $k < 0$ – членам с более высоким порядком сингулярности, не рассматриваемым здесь.

Напряжения и производные смещения выражаются следующим образом [57]:

$$\begin{aligned}\sigma_{22}(z) - i\sigma_{12}(z) &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \\ u_{1,1}(z) + iu_{2,1}(z) &= \frac{1}{2\mu} \left[\kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \right],\end{aligned}\quad (6.2)$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации; μ — модуль сдвига. Для $k = 1, 2$ решения, удовлетворяющие условиям

$$\sigma_{22}(r, \theta = 0) = \sigma_{22}^{(k-1/2)} r^{k-1/2}, \quad \sigma_{12}(r, \theta = 0) = \sigma_{12}^{(k-1/2)} r^{k-1/2} \quad (6.3)$$

и отсутствия нормальных и касательных напряжений на берегах трещины

$$\sigma_{22}(r, \theta = \pm\pi) - i\sigma_{12}(r, \theta = \pm\pi) = 0 \quad (6.4)$$

после несложных алгебраических преобразований приводятся к виду (4.31), (4.32).

6.2. Коэффициенты при дробных степенях разложения решения по расстоянию от вершины трещины в вспомогательных задачах о трещине в полосе. Лаплас-образы нормальных и касательных напряжений, действующих на продолжении трещины, имеют вид (4.6), (4.5). Их асимптотическое разложение на бесконечности представляется в виде рядов:

$$\frac{\hat{q}_2(p)}{M} = \sqrt{6}p^{-1/2} - (8I_2 + 3\pi)\frac{\sqrt{6}}{8}p^{-3/2} + (8I_2 + 3\pi)^2\frac{\sqrt{6}}{128}p^{-5/2} + O(p^{-7/2}), \quad (6.5)$$

$$\frac{\hat{q}_1(p)}{T} = \sqrt{2}p^{-1/2} - (8I_1 + \pi)\frac{\sqrt{2}}{8}p^{-3/2} + (8I_1 + \pi)^2\frac{\sqrt{2}}{128}p^{-5/2} + O(p^{-7/2}), \quad (6.6)$$

где I_2, I_1 — главные члены асимптотических разложений при $p \rightarrow \infty$ интегралов, входящих в функции $H_2^+(p), H_1^+(p)$ (4.12), (4.9), которые находятся по формулам [35, 58]

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{1}{2} \operatorname{th} t \frac{\operatorname{sh} 2t - 2t}{\operatorname{sh}^2 t - t^2} \right) dt \approx 0.35685, \quad (6.7)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{1}{2} \operatorname{th}^3 t \frac{\operatorname{sh} 2t + 2t}{\operatorname{sh}^2 t - t^2} \right) dt \approx 0.84334. \quad (6.8)$$

При выводе (6.5), (6.6) использовано свойство симметрии подынтегральных выражений функции $H_2^+(p), H_1^+(p)$ (4.12), (4.9), приводящее к равенству нулю следующего члена разложения интегралов, входящих в (4.12), (4.39).

Разложения оригиналов нормальных и касательных напряжений вблизи нуля находится применением обратного преобразования (4.2) к разложению образов (6.5), (6.6):

$$\frac{\sigma_{22}(x_1, 0)}{M} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} x_1^{-1/2} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\pi} (8I_2 + 3\pi) x_1^{1/2} + \frac{(8I_2 + 3\pi)^2}{16\sqrt{6}\pi} x_1^{3/2} + O(x^{5/2}), \quad (6.9)$$

$$\frac{\sigma_{12}(x_1, 0)}{T} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x_1^{-1/2} - \frac{8I_1 + \pi}{2\sqrt{2}\pi} x_1^{1/2} + \frac{(8I_1 + \pi)^2}{48\sqrt{2}\pi} x_1^{3/2} + O(x^{5/2}). \quad (6.10)$$

Здесь главные члены разложения соответствуют, как и ожидалось, полю от КИН, вычисление коэффициентов при следующих членах разложений дает (4.33).

6.3. Регулярные члены разложения производных смещений в окрестности вершины трещины. Коэффициенты $U_1^{(0)}, U_{1,1}^{(0)}, U_{1,11}^{(0)}, U_2^{(0)}, U_{2,1}^{(0)}, U_{2,11}^{(0)}$ находятся с учетом того, что нерегулярные члены не дают вклада в поле производных

смещений на берегах трещины непосредственным использованием (4.22), (4.2) и свойства дифференцирования оригинала:

$$\frac{U_1^{(0)}}{M} = 6 + \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{is+1}{\sin^2(is+1) - (is+1)^2} \frac{B_{12}(is+1, x_2=0)}{h_2^+(is+1)H_2^+(is+1)} ds \approx 5.0196, \quad (6.11)$$

$$\frac{U_{1,1}^{(0)}}{M} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(is+1)^2}{\sin^2(is+1) - (is+1)^2} \frac{B_{12}(is+1, x_2=0)}{h_2^+(is+1)H_2^+(is+1)} ds \approx -2.3606, \quad (6.12)$$

$$\frac{U_{1,11}^{(0)}}{M} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(is+1)^3}{\sin^2(is+1) - (is+1)^2} \frac{B_{12}(is+1, x_2=0)}{h_2^+(is+1)H_2^+(is+1)} ds - 3.423, \quad (6.13)$$

$$\frac{U_2^{(0)}}{T} = 6\delta_m + \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2(is+1) - (is+1)^2} \frac{B_{21}(is+1, x_2=0)}{h_1^+(is+1)H_1^+(is+1)} ds \approx 3.808, \quad (6.14)$$

$$\frac{U_{2,1}^{(0)}}{T} = -6 + \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{is+1}{\sin^2(is+1) - (is+1)^2} \frac{B_{21}(is+1, x_2=0)}{h_1^+(is+1)H_1^+(is+1)} ds \approx 3.808, \quad (6.15)$$

$$\frac{U_{2,11}^{(0)}}{T} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(is+1)^2}{\sin^2(is+1) - (is+1)^2} \frac{B_{21}(is+1, x_2=0)}{h_1^+(is+1)H_1^+(is+1)} ds \approx 4.0268. \quad (6.16)$$

Остальные величины в (4.30) находятся из комбинаций условий равенства нулю нормальных и касательных напряжений на берегах трещины (а следовательно и их производных по x_1), уравнений равновесия (а также производных от них по координатам), в которых напряжения и деформации выражены через комбинации производных смещений.

7. Обсуждения и выводы. В настоящей работе рассмотрена двумерная задача теории упругости об изотропной полосе с центральной полубесконечной трещиной. Нагрузка в виде сосредоточенной силы предполагается приложенной в произвольной точке: на одном из берегов трещины, на внешней границе полосы либо к внутренней точке полосы. Решение для произвольной нагрузки, таким образом, в силу линейности задачи может быть получено суперпозицией. С использованием инвариантных взаимных интегралов (например, [44–46]) и решения для полосы, нагруженной изгибающими моментами и продольными силами [35, 52], приложенными на бесконечности, получены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для рассматриваемой задачи. В общем случае выражения для КИН представлены в виде двойных интегралов, посчитанных численно. Рассмотрены случаи сил, приложенных к берегам трещины, границам полосы и внутренним точкам полосы.

Получены асимптотические выражения для случаев приложения сил вдали от вершины трещины в виде рядов по убывающим экспонентам, сходящимся тем быстрее, чем дальше точка приложения силы от вершины трещины. Коэффициенты рядов получены в виде однократных интегралов от алгебраических функций, посчитанных численно. Также получены асимптотические выражения для КИН в случае сил, приложенных к берегам трещины вблизи

ее вершины, в виде рядов по полупрямым и целым степеням расстояния до вершины.

Показаны совпадения полученных решений с известными решениями для частных случаев: нагрузки в виде пары нормальных сил, приложенных к берегам трещины и сил, приложенных вдали от вершины трещины.

Рассмотрена связь полученных решений с моделью когезионной трещины.

Отметим, что “нефизичность” некоторых полученных результатов, таких как различие значений КИН при стремлении к нулю расстояния между точкой приложения силы и вершиной трещины в зависимости от направления, по которому эти точки сближаются, объясняется асимптотическим характером самого сингулярного решения для поля напряжений и смещений вблизи вершины. В действительности, безусловно, бесконечных напряжений и деформаций существовать не может: при приближении к вершине и росте напряжений наступит момент, когда начнут влиять нелинейность, неупругость, дискретность структуры либо какие другие факторы. Однако все эти процессы будут управляться локальным полем, которое вполне можно определить из упругого решения, в частности представленного в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке госзадания (№ госрегистрации 124012500441-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zweben C., Smith W.S., Wardle M.W.* Test methods for fiber tensile strength, composite flexural modulus, and properties of fabric-reinforced laminates // *Composite Materials: Testing and Design (Fifth Conference)*. 1979. P. 228–262.
<https://doi.org/10.1520/STP36912S>
2. *Hofinger I., Oechsner M., Bahr H.-A., Swain M.V.* Modified four-point bend specimen for determining the interface fracture energy for thin, brittle layers // *Int. J. Fracture*. 1998. V. 92. P. 213–220.
3. *Thery P.-Y., Poulain M., Dupeux M., Braccini M.* Spallation of two thermal barrier coating systems: experimental study of adhesion and energetic approach to lifetime during cyclic oxidation // *J. Mater. Sci.* 2009. V. 44. P. 1726–1733.
<https://doi.org/10.1007/s10853-008-3108-x>
4. *Hutchinson R.G., Hutchinson J.W.* Lifetime assessment for thermal barrier coatings: tests for measuring mixed mode delamination toughness. // *J. Am. Ceram. Soc.* 2011. V. 94. № s1. P. S85–S95.
<https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2011.04499.x>
5. *Vaunois J.-R., Poulain M., Kanouté P., Chaboche J.-L.*, Development of bending tests for near shear mode interfacial toughness measurement of EB-PVD thermal barrier coatings // *Eng. Frac. Mech.* 2017. V. 171. P. 110–134.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.11.009>
6. *Monetto I., Massabò R.* An analytical solution for the inverted four-point bending test in orthotropic specimens // *Eng. Fract. Mech.* 2021. V. 245. P. 107521.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107521>
7. *Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.* Mechanics of composite structural members. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 2004. 470 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-08589-9>
8. *Banks-Sills L.* Interface fracture and delaminations in composite materials. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Springer, International Publishing, Cham, 2018. 120 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-60327-8>

9. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 94–112.
10. Глаголев В.В., Маркин А.А. Влияние модели поведения тонкого адгезионного слоя на значение j -интеграла // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 90–98.
<http://doi.org/10.31857/S0572329922020118>
11. Глаголев В.В., Маркин А.А. Предельные состояния адгезионных слоев при комбинированном нагружении // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 6. С. 39–46.
<http://doi.org/10.31857/S0572329923600019>
12. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
13. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers // Int. J. Fract. 1990. V. 43. P. 1–18.
14. Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials // Adv. Appl. Mech. 1991. V. 29. P. 63–191.
[http://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70164-9](http://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70164-9)
15. Massabò R., Brandinelli L., Cox B.N. Mode I weight functions for an orthotropic double cantilever beam // Int. J. Eng. Sci. 2003. V. 41. № 13–14. P. 1497–1518.
[http://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00029-6](http://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00029-6)
16. Li S., Wang J., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials // J. Mech. Phys. Solids. 2004. V. 52. № 1. P. 193–214.
[http://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](http://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X)
17. Andrews M.G., Massabò R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // Eng. Fract. Mech. 2007. V. 74. № 17. P. 2700–2720.
<http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>
18. Кургузов В.Д. Моделирование отслоения тонких пленок при сжатии // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7. № 1. С. 91–99.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.10>
19. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // Eng. Failure Anal. 2015. V. 47. (Part B) P. 338–344.
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>
20. Begley M.R., Hutchinson J.W. The mechanics and reliability of films, multilayers and coatings. Cambridge University Press. 2017.
<https://doi.org/10.1017/9781316443606>
21. Ватульян А.О., Морозов К.Л. Об исследовании отслоения от упругого основания на основе модели с двумя коэффициентами постели // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 64–76.
<https://doi.org/10.31857/S0572329920020130>
22. Ватульян А.О., Морозов К.Л. Исследование процесса отслоения неоднородного покрытия // ПМТФ. 2021. Т. 62. № 6 (370). С. 138–145.
<http://dx.doi.org/10.15372/PMTF20210616>
23. Obreimoff J.W. The splitting strength of mica // Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. 1930. V. 127. № 805. P. 290–297.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1930.0058>
24. Gilman J.J., Fracture / Ed. B.L. Averbach et al. NY: John Wiley and Sons Inc., 1959. P. 193–221.
25. Suo Z. Delamination specimens for orthotropic materials // J. Appl. Mech. 1990. V. 57. № 3. P. 627–634.
<https://doi.org/10.1115/1.2897068>
26. Grekov M.A., Morozov N.F. Some modern methods in mechanics of cracks. In V. Adamyan, et al. (Eds.), Operator theory: advances and applications // Modern analysis and applications. Birkhäuser. 2009. V. 191. P. 127–142.
https://doi.org/10.1007/978-3-7643-9921-4_8

27. *Ripling E.J., Mostovoy S., Patrick R.L.* Materials research standards // Materials Research and Standards. 1964. № 3 P. 129–134.
28. *Kanninen M.F.* An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest // Int. J. Fract. 1973. V. 9. 83–92.
<https://doi.org/10.1007/BF00035958>
29. *Gross B., Srawley J.E.* Stress intensity factors by boundary collocation for single-edge notchspecimens subjected to splitting forces. NASA, 1966.
30. *Понов Г.Я.* Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании // ПММ. 1961. Т. 25. № 2. С. 342–355.
31. *Ентов В.М., Салганик Р.Л.* О балочном приближении в теории трещин // Изв. АН СССР. 1965. № 5. С. 95–102.
32. *Fichter W.B.* The stress intensity factor for the double cantilever beam // Int. J. Fract. 1983. V. 22. P. 133–143.
<https://doi.org/10.1007/BF00942719>
33. *Foote R.M.L., Buchwald V.T.* An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam // Int. J. Fract. 1985. V. 29. P. 125–134.
<https://doi.org/10.1007/BF00034313>
34. *Златин А.Н., Храпков, А.А.* Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 31. С. 1009–1010.
35. *Khrapkov A.A.* Winer-Hopf method in mixed elasticity theory problems. B.E. Vedenev VNIIG Publ. House. 2001.
36. *Салганик Р.Л., Устинов К.Б.* Задача о деформировании упруго заделанной пластины, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 4. С. 50–62.
37. *Georgiadis H.G., Papadopoulos G.A.* Elastostatics of the orthotropic double-cantilever-beam fracture specimen // Z. Angew. Math. Phys. 1990. V. 41. P. 889–899.
<https://doi.org/10.1007/BF00945841>
38. *Устинов К.Б., Лисовенко Д.С., Ченцов А.В.* Ортотропная полоса с центральной полубесконечной трещиной под произвольными нормальными нагрузками, приложенными вдали от вершины трещины // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2019. Т. 23. № 4. С. 657–670.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1736>
39. *Ustinov K.B., Massabò R., Lisovenko D.* Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // Eng. Failure Analysis. 2020. V. 110. P. 104410.
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410>
40. *Устинов К.Б.* Т-напряжения в ортотропной полосе с центральной полубесконечной трещиной нагруженной вдали от вершины трещины // Изв. РАН. МТТ. 2024. № 4.
41. *Устинов К.Б., Борисова Н.Л.* Расслоение полосы состоящей из двух одинаковых ортотропных полуполос с осями изотропии симметрично наклоненными к границе раздела // Изв. РАН. МТТ. 2024. № 5.
42. *Ustinov K.B., Idrisov, D.M.* On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: exact analytical solutions for some particular cases // ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. 2021. V. 101. № 4. P. e202000239.
<https://doi.org/10.1002/zamm.202000239>
43. *Ustinov K.* On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // Eur. J. Mech. A Solids. 2019. V. 75. P. 56–69.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>
44. *Chen F.H.K., Shield R.T.* Conservation laws in elasticity of the J-integral type // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). 1977. V. 28. P. 1–22.
<https://doi.org/10.1007/BF01590704>

45. *Cho Y.J., Beom H. G., Earmme, Y.Y.* Application of a conservation integral to an interface crack interacting with singularities // *Int. J. Fracture*. 1994. V. 65. P. 63–73.
<https://doi.org/10.1007/BF00017143>
46. *Sladek J., Sladek V.* Evaluations of the T-stress for interface cracks by the boundary element method // *Eng. Fract. Mech.* 1997. V. 56. № 6. P. 813–825.
[https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00131-2](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00131-2)
47. *Eshelby J.D.* The force on an elastic singularity // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*. 1951. V. 244. № 877. P. 87–112.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1951.0016>
48. *Cherepanov G.P.* Crack propagation in continuous medium: PMM // *J. Appl. Math. Mechanics*. 1967. V. 31. № 3. P. 503–512.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(67\)90034-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(67)90034-2)
49. *Rice J.R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // *J. Appl. Mech.* 1968. V. 35. № 2. P. 379–386.
<https://doi.org/10.1115/1.3601206>
50. *Irwin G.R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // *J. Appl. Mech.* 1957. V. 24. № 3. P. 361–364.
<https://doi.org/10.1115/1.4011547>
51. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
52. *Ustinov K.B., Monetto I., Massabò R.* Analytical solutions for an isotropic strip with a central semi-infinite crack: T-stresses, displacements of boundaries, stress intensity factor due to a force acting at the crack.
<https://doi.org/10.2139/ssrn.4786695>
53. *Ustinov K., Massabò R.* On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // *Int. J. Sol. Struct.* 2022. V. 248. P. 111600.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600>
54. *Леонов М.Я., Панасюк В.В.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле // *Прикл. механика*. 1959. Т. 5. № 4. С. 391–401.
55. *Баренблатт Г.И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении // *ПММ*. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 434–444; Вып. 4. С. 706–721; Вып. 5. С. 893–900.
56. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // *J. Mech. Phys. Solids*. 1960. V. 8. № 2. P. 100–104.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
57. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 709 с.
58. *Гихов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

STRESS INTENSITY FACTORS AT THE TOP OF THE CENTRAL SEMI-INFINITE CRACK IN AN ARBITRALLY LOADED ISOTROPIC STRIP

K. B. Ustinov^{a, *}

A.Yu. Ishlinsky Institute for problem in Mechanics RAS, Moscow, Russia

**e-mail: ustinov@ipmnet.ru*

Abstract. A two-dimensional problem of elasticity theory on an isotropic strip with a central semi-infinite crack is considered. The load in the form of a concentrated force is assumed to be applied at an arbitrary point of the strip. Using invariant mutual integrals and solutions for a strip loaded with bending moments and longitudinal forces applied at infinity, expressions for stress intensity factors (SIF) for the problem under consideration are obtained. The cases of forces applied at the crack faces, at the strip boundaries and at the internal points of the strip are considered. Asymptotic expressions are obtained for the cases of application of forces far from the crack tip and forces applied at the crack faces near its tip. The obtained solutions are shown to coincide with known solutions for special cases: loads in the form of a pair of normal forces applied to the crack faces and forces applied far from the crack tip.

Keywords: analytical solution, bi-lateral Laplace transform, Wiener–Hopf method, reciprocity theorem, invariant reciprocal integrals

REFERENCES

1. Zweben C., Smith W.S., Wardle M.W. Test methods for fiber tensile strength, composite flexural modulus, and properties of fabric-reinforced laminates // Composite Materials: Testing and Design (Fifth Conference), ASTM International 1979.
<https://doi.org/10.1520/STP36912S>
2. Hofinger I., Oechsner M., Bahr H.-A., Swain M.V. Modified four-point bend specimen for determining the interface fracture energy for thin, brittle layers // Int. J. Fracture. 1998. V. 92. P. 213–220.
3. Thery P.-Y., Poulain M., Dupeux M., Braccini M. Spallation of two thermal barrier coating systems: experimental study of adhesion and energetic approach to lifetime during cyclic oxidation // J. Mater. Sci. 2009. V. 44. P. 1726–1733.
<https://doi.org/10.1007/s10853-008-3108-x>
4. Hutchinson R.G., Hutchinson J.W. Lifetime assessment for thermal barrier coatings: tests for measuring mixed mode delamination toughness // J. Am. Ceram. Soc. 2011. V. 94. P. S85–S95.
<https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2011.04499.x>
5. Vaunois J.-R., Poulain M., Kanouté P., Chaboche J.-L. Development of bending tests for near shear mode interfacial toughness measurement of EB-PVD thermal barrier coatings // Eng. Frac. Mech. 2017. V. 171. P. 110–134.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.11.009>
6. Monetto I., Massabò R. An analytical solution for the inverted four-point bending test in orthotropic specimens // Eng. Fract. Mech. 2020.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech>

7. *Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.* Mechanics of composite structural members. Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2004.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-08589-9>
8. *Banks-Sills L.* Interface fracture and delaminations in composite materials, springer briefs in applied sciences and technology. Springer, International Publishing, Cham., 2018.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-60327-8>
9. *Goldstein R.V., Perelmuter M.N.* An interface crack with bonds between the surfaces // *Mech. Solids*. 2001. V. 36. № 1. P. 77–92.
10. *Glagolev V.V., Markin A.A.* Influence of the model of the behavior of a thin adhesion layer on the value of the j-integral // *Mech. Solids*. 2022. V. 57. № 2. P. 278–285.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422020169>
11. *Glagolev V.V., Markin A.A.* Limit states of adhesive layers under combined loading // *Mech. Solids*. 2023. V. 58. № 6. P. 1960–1966.
<https://doi.org/10.3103/S0025654423600204>
12. *Aleksandrov V.M., Mkhitarian S.M.* Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers. M.: Nauka, 1983. 487 p.
13. *Suo Z., Hutchinson J.W.* Interface crack between two elastic layers // *Int. J. Fract.* 1990. V. 43. P. 1–18.
<https://doi.org/10.1007/BF00018123>
14. *Hutchinson J.W., Suo Z.* Mixed mode cracking in layered materials // *Adv. Appl. Mech.* Ed. J.W. Hutchinson, T.Y. Wu. 1992. V. 29. P. 63–191.
[https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70164-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70164-9)
15. *Massabò R., Brandinelli L., Cox B.N.* Mode I weight functions for an orthotropic double cantilever beam // *Int. J. Eng. Sci.* 2003. V. 41. № 13–14. P. 1497–1518.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00029-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00029-6)
16. *Li S., Wang J., Thouless M.D.* The effects of shear on delamination in layered materials // *J. Mech. Phys. Solids*. 2004. V. 52. № 1. P. 193–214.
[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X)
17. *Andrews M.G., Massabò R.* The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Eng. Fract. Mech.* 2007. V. 74. № 17. P. 2700–2720.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>
18. *Kurguzov V.D.* Modeling of delamination of thin films under compression // *Computational continuum mechanics*. 2014. V. 7. № 1. P. 91–99 (In Russian).
19. *Ustinov K.B.* On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // *Eng. Failure Anal.* 2015. V. 47. № 14. P. 338–344.
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>
20. *Begley M.R., Hutchinson J.W.* The mechanics and reliability of films, multilayers and coatings. Cambridge University Press, 2017.
<https://doi.org/10.1017/9781316443606>
21. *Vatulyan A.O., Morozov K.L.* Investigation of delamination from an elastic base using a model with two coefficients of subgrade reaction // *Mech. Solids*. 2020. № 2. P. 207–217.
<https://doi.org/10.3103/S002565442002017X>
22. *Vatulyan A.O., Morozov K.L.* Study of the process of delamination of a non-uniform coating // *Appl. Mech. Tech. Phys.* 2021. V. 62. № 6 (370). P. 138–145 (In Russian).
23. *Obreimoff J.W.* The splitting strength of mica // *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 1930. V. 127. P. 290–297.
24. *Gilman J.J.* Fracture / Ed. B.L. Averbach et al. NY: John Wiley and Sons, Inc., 1959. P. 193–221.
25. *Suo Z.* Delamination specimens for orthotropic materials // *J. Appl. Mech.* 1990. V. 57. № 3. P. 627–634.
<https://doi.org/10.1115/1.2897068>

26. Grekov M.A., Morozov N.F. Some modern methods in mechanics of cracks. In V. Adamyan et al. (Eds.), *Operator theory: advances and applications. Modern analysis and applications*. P. 127–142. Basel: Birkhäuser, 2009.
https://doi.org/10.1007/978-3-7643-9921-4_8
27. Kipling E.J., Mostovoy S., Patrick R.L. Materials research standards 4. 1964. № 3. P. 129–134.
28. Kanninen M.F. An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest // *Int. J. Fract.* 1973. V. 9. P. 83–92.
<https://doi.org/10.1007/BF00035958>
29. Gross B., Srawley J.E. Stress intensity factors by boundary collocation for single-edge notch specimens subjected to splitting forces, NASA TN D-3295. 1966.
30. Popov G.Ya. Bending of a semi-infinite slab lying on a linearly deformable base // *PMM*. 1961. V. 2. P. 342–355 (In Russian).
31. Entov V., Salganik R., On beam approximation in crack theory // *Izv. AN SSSR. Mehanika*. 1965. V. 5. P. 95–102 (In Russian).
32. Fichter W.B. The stress intensity factor for the double cantilever beam // *Int. J. Fract.* 1983. V. 22. № 2. P.133–143.
<https://doi.org/10.1007/BF00942719>
33. Foote R.M.L., Buchwald T. An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam // *Int. J. Fract.* 1985. V. 29. № 3. P. 125–134.
<https://doi.org/10.1007/BF00034313>
34. Zlatin A.N., Khrapkov A.A. A Semi-infinite crack parallel to the boundary of the elastic half-plane // *Sov. Phys. Dokl.* 1986. V. 31. P. 1009–1010.
35. Khrapkov A. Winer-Hopf method in mixed elasticity theory problems. B.E. Vedenev VNIIG Publishing House, 2001.
36. Salganik R.L., Ustinov K.B. Deformation problem for an elastically fixed plate modeling a coating partially delaminated from the substrate (plane strain) // *Mech. Solids*. 2012. V. 47. № 4. P. 415–425.
<https://doi.org/10.3103/S0025654412040061>
37. Georgiadis H.G., Papadopoulos G.A. Elastostatics of the orthotropic double-cantilever-beam fracture specimen // *Z. Angew. Math. Phys.* 1990. V. 41. № 6. P. 889–899.
<https://doi.org/10.1007/BF00945841>
38. Ustinov K.B., Lisovenko D.S., Chentsov A.V. Orthotropic strip with a central semi-infinite crack under arbitrary normal loads applied far from the crack tip // *Bull. Samara State Tech. University. Ser.: Phys. Math. Sci.* 2019. V. 23. № 4. P. 657–670 (In Russian).
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1736>
39. Ustinov K.B., Massabò R., Lisovenko D. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // *Eng. Failure Analysis* 2020. V. 110. P. 104410 (In Russian).
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410>
40. Ustinov K.B. T-stress in an orthotropic strip with a central semi-infinite crack loaded far from the crack tip // *Mech. Solids*, accepted for publication.
41. Ustinov K.B., Borisova N.L. Splitting of a strip consisting of two identical orthotropic half-strips with isotropy axes symmetrically inclined to the interface // *Mech. Solids*, accepted for publication.
42. Ustinov K.B., Idrisov, D.M. On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: exact analytical solutions for some particular cases // *ZAMM.Z. Angew. Math. Mech.* 2021. V. 101. № 4. P. e202000239.
<https://doi.org/10.1002/zamm.202000239>
43. Ustinov K. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // *Eur. J. Mech. A Solids*. 2019. V. 75. P. 56–69.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>

44. *Chen F.H.K., Shield R.T.* Conservation laws in elasticity of the J-integral type // J. appl. Math. Phys. (ZAMP). 1977. V. 28. № 1–22.
<https://doi.org/10.1007/BF01590704>
45. *Cho Y.J., Beom H.G., Earmme, Y.Y.* Application of a conservation integral to an interface crack interacting with singularities // Int. J. Fracture. 1994. V. 65. P. 63–73.
<https://doi.org/10.1007/BF00017143>
46. *Sladek J., Sladek V.* Evaluations of the t-stress for interface cracks by the boundary element method // Eng. Fract. Mech. 1997. V. 56. № 6. P. 813–825.
[https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00131-2](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00131-2)
47. *Eshelby J.D.* The force on an elastic singularity // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1951. V. 244. P. 87–112.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1951.0016>
48. *Cherepanov G.P.* The propagation of cracks in a continuous medium // J. Appl. Math. Mech. 1967. V. 31. № 3. P. 503–512.
49. *Rice J.R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // J. Appl. Mech. 1968. V. 35. P. 379–386.
<https://doi.org/10.1115/1.3601206>
50. *Irwin G.R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. № 3. P. 361–364.
<https://doi.org/10.1115/1.4011547>
51. *Cherepanov G.P.* Mechanics of brittle fracture. McGraw Hill Higher Education. 935 p.
52. *Ustinov K.B., Monetto I., Massabò R.* Analytical solutions for an isotropic strip with a central semi-infinite crack: T-stresses, displacements of boundaries, stress intensity factor due to a force acting at the crack. To be published 2024.
53. *Ustinov K., Massabò R.* On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // Int. J. Sol. Struct. 2022. V. 248. 111600.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600>
54. *Leonov M.Ya., Panasyuk V.V.* Development of finest cracks in a solid // Prikl. Mekhanika. 1959. V. 5. № 4. P. 391–401.
55. *Barenblatt G.I.* On the equilibrium cracks formed during the brittle fracture // PMM [Appl. Math. Mech.]. 1959. V. 23. № 3. P. 434–444; № 4. P. 706–721; № 5. P. 893–900.
56. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids, 1960. V. 8. № 2. P. 100–104.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
57. *Muskhelishvili, N.I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. P. Noordhoff Limited, Groningen-Holland, third ed., 1953. P. 471.
58. *Gakhov F.D.* Boundary value problems. Pergamon Press, 1966.

УДК 531.3

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВАЛА С НЕЛИНЕЙНЫМИ МОДЕЛЯМИ ВНУТРЕННЕГО ДЕМПФИРОВАНИЯ И УПРУГОСТИ

© 2024 г. А. А. Азаров^{а, *}, А. М. Гуськов^{а, b, **}, Г. Я. Пановко^{b, ***}

^аМосковский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия

^bИнститут машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

*e-mail: I3azarov.ru@gmail.com,

**e-mail: gouskov_am@mail.ru,

***e-mail: gpanovko@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.05.2024 г.

После доработки 15.06.2024 г.

Принята к публикации 16.06.2024 г.

В работе анализируется влияние нелинейного (кубического) внутреннего демпфирования (в модели Кельвина–Фойхта) и кубической нелинейности упругих сил на особенности динамики вращающегося гибкого вала с распределенной массой. Вал моделируется стержнем Бернулли–Эйлера с использованием функции Грина, выполнена дискретизация и сведение задачи динамики вращающегося вала к интегральному уравнению. Выявлено, что в такой системе всегда существует ветвь ограниченных периодических движений (автоколебаний) при закритической скорости вращения. Кроме того, при малом внутреннем демпфировании периодическая ветвь продолжается в докритическую область: при достижении критической скорости реализуется субкритическая бифуркация Пуанкаре–Андронova–Хопфа и существует неустойчивая ветвь периодических движений ниже ветви устойчивых периодических автоколебаний (возникновение гистерезиса при изменении скорости вращения). При увеличении коэффициента внутреннего трения явление гистерезиса исчезает, и при критической скорости вращения возникает мягкое возбуждение автоколебаний вращающегося вала через сверхкритическую бифуркацию Пуанкаре–Андронova–Хопфа.

Ключевые слова: вал, демпфирование, бифуркация, модель Кельвина–Фойхта, прецессия

DOI: 10.31857/S1026351924060043, EDN: TZDRLI

1. Введение. Эффекты влияния внутреннего демпфирования на динамику вращающихся валов хорошо известны в технике. Оно играет две противоположные роли – демпфирования и дестабилизации, из которых при достаточно малых скоростях вращения доминирует первая, а при больших – вторая [1]. Даже в идеально сбалансированном вале при определенных (закритических) скоростях вращения под действием циркуляционных сил, вызванных силами внутреннего демпфирования, возникает самовозбуждение поперечных колебаний – динамическая потеря устойчивости (бифуркация Пуанкаре–Андроннова–Хопфа) [1–4]. В этой работе под критической скоростью понимается скорость вращения вала, при которой происходит бифуркация, в отличие от случая, когда скорость вращения вала совпадает с собственной частотой его изгибных колебаний.

Влияние внутреннего демпфирования, по всей вероятности, впервые было достаточно полно описано в работе Кимпбалла [5] и продемонстрировано в экспериментах Ньюкирка [6]. В последующем вопросы устойчивости вращающихся роторов при наличии линейного внутреннего демпфирования были рассмотрены в работе [7]. При этом основным эффектом, связанным с наличием внутреннего демпфирования, является самовозбуждение изгибных колебаний. В последние годы усовершенствуется подход к моделированию эффектов внутреннего демпфирования [8–11]. Тем не менее особенности поведения в закритической области после бифуркации ранее подробно не рассматривались. Ограничение поперечных колебаний вала возможно как за счет внешних устройств [12], так и при учете нелинейностей в законе упругого деформирования вала.

Целью настоящей работы является анализ динамики вращающегося деформируемого вала в закритической области с учетом нелинейных членов в законе внутреннего демпфирования и законе упругости.

2. Расчетная схема. Рассматривается гибкий вал круглого постоянного поперечного сечения, вращающийся вокруг своей продольной оси с постоянной угловой скоростью ω . Оба конца вала установлены в жестких (недеформируемых) опорах, обеспечивающих свободное вращение вала, но исключающих смещение и поворот его концевых сечений относительно поперечных осей. Вал имеет погонную массу m_R , которая равномерно распределена по его длине l . Гироскопическими эффектами пренебрегаем. Вал моделируется стержнем Бернулли–Эйлера с включением дополнительных членов, учитывающих нелинейно-вязкое трение в модели Кельвина–Фойхта и кубической нелинейностью в законе упругости.

Учитываются силы внешнего трения вала, пропорциональные его абсолютной поперечной скорости колебаний. Поперечные колебания вала будем рассматривать относительно неподвижной системы координат $Ox_{\text{уз}}$ с началом на левой опоре (рис. 1). Орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ связаны с осями $Ox_{\text{уз}}$.

3. Учет внутреннего демпфирования при распределенной массе вращающегося вала. В линейной теории для описания внутреннего демпфирования в случае одноосного напряженного состояния обычно используется модели Кельвина–Фойхта для упруго-вязких тел [13]:

$$\sigma = E(\varepsilon + T_V \dot{\varepsilon}),$$

где E – модуль упругости материала, ε – деформация, T_V – характерное время (произведение ET_V представляет собой коэффициент вязкости).

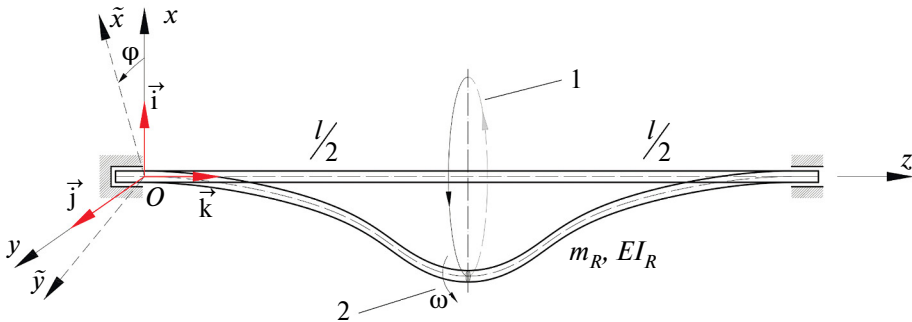


Рис. 1. Расчетная схема вращающегося вала: 1 — траектория прецессии, 2 — направление вращения.

Для учета внутреннего демпфирования в материале вала с равномерно распределенной массой необходимо во вращающейся системе координат определить осевую деформацию в выбранной точке материальной среды. Обозначим кривизну вала $\vec{\kappa}(z, t)$. В неподвижной системе координат $Oxyz$, $z \in [0, l]$, кривизна имеет вид $\vec{\kappa}(z, t) = \kappa_s(z; t) \vec{i}_s$, $s = 1, 2$ и во вращающейся вместе с валом системе координат $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, $z \in [0, l]$, кривизна $\vec{\kappa}(z, t) = \tilde{\kappa}_s(z; t) \tilde{\vec{i}}_s$, $s = 1, 2$. Базисы \vec{i}_s и $\tilde{\vec{i}}_s$, $s = 1, 2$ — ортонормированы, т.е. $\vec{i}_s \cdot \vec{i}_t = \tilde{\vec{i}}_s \cdot \tilde{\vec{i}}_t = \delta_{st}$. В силу инвариантности вектора кривизны верно равенство¹:

$$\vec{\kappa}(z; t) = \kappa_s(z; t) \vec{i}_s = \tilde{\kappa}_s(z; t) \tilde{\vec{i}}_s(t); s = 1, 2 \quad (3.1)$$

Заметим, что наряду с инвариантной записью необходимо различать матричные отображения $\tilde{\kappa}|_{O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}} = \tilde{\kappa}$ и $\kappa|_{Oxyz} = \kappa$, которые привязаны к различным базисам. Связь между координатами в различных базисах определяется ортогональной матрицей поворота $S(\varphi)$, где $\varphi = \omega t$ — угол поворота:

$$\kappa = S(\varphi) \tilde{\kappa} S(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Опираясь на гипотезу Бернулли—Эйлера, осевая деформация в выбранной точке материальной среды может быть представлена во вращающейся вместе с валом системе координат как

$$\varepsilon_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z; t) \tilde{\vec{i}}_3 = -\tilde{\vec{p}} \times \vec{\kappa} = (-\tilde{x} \tilde{\kappa}_2(z; t) + \tilde{y} \tilde{\kappa}_1(z; t)) \tilde{\vec{i}}_3;$$

$$\tilde{\vec{p}} = \tilde{x} \tilde{\vec{i}}_1 + \tilde{y} \tilde{\vec{i}}_2, \quad \vec{\kappa} = \tilde{\kappa}_1(z; t) \tilde{\vec{i}}_1 + \tilde{\kappa}_2(z; t) \tilde{\vec{i}}_2.$$

Или в матричной форме во вращающейся системе координат:

$$\varepsilon_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z; t) = -\tilde{x} \tilde{\kappa}_2(z; t) + \tilde{y} \tilde{\kappa}_1(z; t) = \tilde{\vec{p}}^T \mathbf{R} \tilde{\kappa};$$

$$\tilde{\vec{p}} = \begin{Bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\kappa} = \begin{Bmatrix} \tilde{\kappa}_1 \\ \tilde{\kappa}_2 \end{Bmatrix}.$$

¹ Векторы как инвариантные объекты обозначаются прямым жирным шрифтом с верхней стрелкой. Компоненты векторов в подвижном базисе помечены верхней тильдой. Соответствующие матричные объекты пишутся без верхней стрелки.

Если для материала рассматривать линейный закон Гука и использовать модель стержня Бернулли–Эйлера, то изгибающий момент для сечения с двумя осями симметрии $I_{\tilde{x}} = I_{\tilde{y}} = I_R$ описывается следующим выражением [14]:

$$\vec{M} = \vec{\tilde{M}} = EI_R \vec{\tilde{\kappa}} = EI_R \vec{\kappa}.$$

Отметим, что координаты точки среды (\tilde{x}, \tilde{y}) во вращающейся вместе с валом системе отсчета при вращении не меняются, исходя из этого, скорость деформации $\dot{\varepsilon}_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z; t)$ для фиксированной точки среды $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \text{const}$ в матричной форме имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}_z(\tilde{x}, \tilde{y}, z; t) = -\tilde{x} \dot{\tilde{\kappa}}_2(z; t) + \tilde{y} \dot{\tilde{\kappa}}_1(z; t) = \vec{p}^T \mathbf{R} \dot{\vec{\kappa}}. \quad (3.2)$$

Вектор угловой скорости поворота $\vec{\omega} = \omega \vec{i}_3 = \dot{\phi} \vec{i}_3$ сечения вала определяется скоростью поворота подвижного базиса относительно неподвижного базиса, тогда как $\vec{i}_1 = \vec{\omega} \times \vec{i}_1$, $\vec{i}_2 = \vec{\omega} \times \vec{i}_2$.

При движении и меняющемся во времени векторе кривизны необходимо учитывать материальную производную, следящую за выбранной точкой деформируемой среды, а именно:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\kappa}} &= \frac{\partial}{\partial t} (\kappa_s \vec{i}_s) = \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\kappa}_s \vec{i}_s), \quad \dot{\vec{i}}_s = \vec{\omega} \times \vec{i}_s; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\kappa_s \vec{i}_s) &= \dot{\kappa}_s \vec{i}_s, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\kappa}_s \vec{i}_s) = \dot{\tilde{\kappa}}_s \vec{i}_s + \tilde{\kappa}_s \dot{\vec{i}}_s; \\ \dot{\vec{\kappa}} &= \dot{\tilde{\kappa}}_s \vec{i}_s + \vec{\omega} \times (\tilde{\kappa}_s \vec{i}_s) = \dot{\tilde{\kappa}}_s \vec{i}_s + \vec{\omega} \times \vec{\kappa}; \\ \dot{\tilde{\kappa}}_s \vec{i}_s &= \dot{\vec{\kappa}} - \vec{\omega} \times \vec{\kappa}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\dot{\tilde{\kappa}}_s$ – производная компонент вектора кривизны, связанная с фиксированным материальным сечением вала (z, t) , которая входит в выражение скорости деформации.

Тогда уравнение состояния для вращающегося вала (одномерного объекта) от переменных $\{\vec{\kappa}, \dot{\vec{\kappa}}\}$ в соответствии с линейной гипотезой внутреннего демпфирования в модели Кельвина–Фойхта будет уравнением изгибающего момента $\vec{M}(\vec{\kappa}, \dot{\vec{\kappa}})$, которое для вала с одинаковыми изгибными жесткостями относительно осей $O\tilde{x}$, $O\tilde{y}$ имеет вид:

$$\vec{M}(\vec{\kappa}, \dot{\vec{\kappa}}) = EI_R \left(\vec{\kappa} + T_V \dot{\tilde{\kappa}}_s \vec{i}_s \right) = EI_R \left[\vec{\kappa} + T_V (\dot{\vec{\kappa}} - \vec{\omega} \times \vec{\kappa}) \right], \quad (3.4)$$

где T_V – характерное время (время релаксации) [10], полагаем, что $T_V \ll 2\pi/|\vec{\omega}|$.

Для записи инвариантного уравнения в матричной форме в неподвижном базисе $Oxuz$, $\forall \vec{a} = a \vec{i}_3$, $\vec{b} = b_s \vec{i}_s$ используется матрица \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= a \vec{i}_3 \times (b_1 \vec{i}_1 + b_2 \vec{i}_2) = a (b_1 \vec{i}_2 - b_2 \vec{i}_1); \\ \mathbf{R}: a \vec{i}_3 \times \vec{b} &\Leftrightarrow a \mathbf{R} \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{c} \in R^2, \quad \mathbf{c}^T \mathbf{R} \mathbf{c} = 0; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^T = -\mathbf{R}, \quad \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда векторное уравнение в матричной форме в неподвижном базисе принимает следующий вид:

$$\mathbf{M} = EI_R (\kappa + T_V \dot{\kappa} - T_V \omega \mathbf{R} \kappa). \quad (3.6)$$

Последнее слагаемое в (3.6), зависящее от угловой скорости $(EI_R T_V \omega \mathbf{R} \kappa)$, характерно для вращающихся деформируемых твердых тел. В данном случае именно это слагаемое в изгибающем моменте приводит к появлению циркуляционных сил и учитывает механизм передачи энергии вращения вала в изгиб вала, когда изгиб в одной плоскости вызывает изгиб в перпендикулярной плоскости, пропорционально скорости вращения вала ω и коэффициенту вязкости ET_V .

Учет дополнительных нелинейных членов в модели Кельвина–Фойхта можно провести в форме Коссера через скорость вектора кривизны в системе координат $\dot{\tilde{\mathbf{k}}}_s \tilde{\mathbf{i}}_s$, $s = 1, 2$, вводя дополнительные слагаемые в законе состояния с вращающейся средой. Отметим, что скалярное произведение во вращающейся системе $\dot{\tilde{\mathbf{k}}}_s \tilde{\mathbf{k}}_s$ (суммирование по немому индексу $s = 1, 2$) с учетом (3.3) вычисляется следующим образом в инвариантной форме:

$$\dot{\tilde{\mathbf{k}}}_s \tilde{\mathbf{k}}_s = \left(\dot{\tilde{\mathbf{k}}}_s \tilde{\mathbf{i}}_s \right) \cdot \left(\dot{\tilde{\mathbf{k}}}_t \tilde{\mathbf{i}}_t \right) = \left(\dot{\tilde{\mathbf{k}}} - \vec{\omega} \times \tilde{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{k}} - \vec{\omega} \times \tilde{\mathbf{k}} \right).$$

Например, по индукции можно учесть нелинейный, кубический член в линейной модели Кельвина–Фойхта (3.4), добавляя кубическое слагаемое $\dot{\tilde{\mathbf{k}}}_s \tilde{\mathbf{k}}_s (\tilde{\mathbf{k}} - \vec{\omega} \times \tilde{\mathbf{k}})$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{k}}, \dot{\tilde{\mathbf{k}}}) &= EI_R \left[\tilde{\mathbf{k}} + (T_V + T_{VV} \dot{\tilde{\mathbf{k}}}_s \tilde{\mathbf{k}}_s) \dot{\tilde{\mathbf{k}}}_t \tilde{\mathbf{i}}_t \right] = \\ &= EI_R \left[\tilde{\mathbf{k}} + (T_V + T_{VV} \dot{\tilde{\mathbf{k}}}_s \tilde{\mathbf{k}}_s) (\dot{\tilde{\mathbf{k}}} - \vec{\omega} \times \tilde{\mathbf{k}}) \right] = \\ &= EI_R \left[\tilde{\mathbf{k}} + \left[T_V + T_{VV} (\dot{\tilde{\mathbf{k}}} - \vec{\omega} \times \tilde{\mathbf{k}}) \cdot (\dot{\tilde{\mathbf{k}}} - \vec{\omega} \times \tilde{\mathbf{k}}) \right] (\dot{\tilde{\mathbf{k}}} - \vec{\omega} \times \tilde{\mathbf{k}}) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

где T_{VV} — коэффициент, характеризующий степень кубической нелинейности диссипативных свойств материала вала.

Отображение инвариантного уравнения с кубической нелинейностью скоростей деформации в модели Кельвина–Фойхта в матричном виде в неподвижном базисе с учетом (3.5) и (3.6) принимает вид:

$$\mathbf{M}(\kappa, \dot{\kappa}) = EI_R \kappa + EI_R T_V \left[1 + B (\dot{\kappa} - \omega \mathbf{R} \kappa)^T (\dot{\kappa} - \omega \mathbf{R} \kappa) \right] (\dot{\kappa} - \omega \mathbf{R} \kappa), \quad (3.8)$$

где $B = T_{VV}/T_V$.

Аналогичным образом можно ввести нелинейность любого нечетного порядка, например, нелинейность пятого порядка.

4. Учет кубической нелинейности в законе упругости. Аналогично кубическому демпфированию в законе можно учесть и кубическую нелинейность упругих сил по кривизне с коэффициентом A :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\kappa, \dot{\kappa}) &= EI_R \left[1 + A (\kappa^T \kappa) \right] \kappa + \\ &+ EI_R T_V \left[1 + B (\dot{\kappa} - \omega \mathbf{R} \kappa)^T (\dot{\kappa} - \omega \mathbf{R} \kappa) \right] (\dot{\kappa} - \omega \mathbf{R} \kappa). \end{aligned} \quad (4.1)$$

где A — коэффициент, характеризующий степень нелинейностей упругости материала вала.

5. Уравнения движения вращающегося вала. Для записи уравнения движения введем вектор прогибов вала $\mathbf{u}(z, t) = \{u_x \ u_y\}^T$, который

связан с вектором поворота сечений $\vartheta(z, t) = \{\vartheta_x \quad \vartheta_y\}^T$ и вектором кривизны $\kappa(z, t) = \{\kappa_x \quad \kappa_y\}^T$ относительно осей Ox , Oy дифференциальными соотношениями:

$$\vartheta = \mathbf{R} \mathbf{u}', \quad \kappa = \vartheta' = \mathbf{R} \mathbf{u}''.$$

Тогда, пренебрегая инерцией поворота сечений при изгибе, уравнения движения вала с погонной массой m_R при действии линейного внешнего трения с коэффициентом d_e могут быть записаны в следующем виде [14]:

$$\left. \begin{aligned} m_R \ddot{\mathbf{u}}(z, t) &= \mathbf{Q}'(z, t) - d_e \dot{\mathbf{u}}(z, t) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{M}'(z, t) + \mathbf{R} \mathbf{Q}(z, t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_R \ddot{\mathbf{u}}(z, t) = \mathbf{R} \mathbf{M}''(z, t) - d_e \dot{\mathbf{u}}(z, t), \quad (5.1)$$

где $\mathbf{Q}(z, t)$ и $\mathbf{M}(z, t)$ – векторы сосредоточенных поперечных сил и изгибающих моментов соответственно.

Объединяя уравнения (4.1) и (5.1), получим:

$$\begin{aligned} EI_R \mathbf{u}'''' + T_V EI_R (\dot{\mathbf{u}}'''' - \omega \mathbf{R} \mathbf{u}'''') &= \\ = -m_R \ddot{\mathbf{u}} - EI_R [AG_{NL} \mathbf{u}'' + T_{VV} F_{NL} (\dot{\mathbf{u}}'' - \omega \mathbf{R} \mathbf{u}'')] &]'' - d_e \dot{\mathbf{u}}; \\ F_{NL} &= \left((\dot{\mathbf{u}}'')^T \dot{\mathbf{u}}'' - 2\omega (\dot{\mathbf{u}}')^T \mathbf{R} \mathbf{u}'' + \omega^2 (\mathbf{u}'')^T \mathbf{u}'' \right); \\ G_{NL} &= \left((\mathbf{u}'')^T \mathbf{u}'' \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Переход к безразмерным переменным и величинам осуществляется выбором двух масштабов $U_* := l$, $T_* = \sqrt{m_R l^4 / EI_R}$ и безразмерных комплексов:

$$\begin{aligned} \zeta &= z/U_*, \quad \xi = \mathbf{u}/U_*, \quad \tau = t/T_*, \quad \eta_V = T_V / (2T_*), \quad \eta_e = d_e l^4 / (2EI_R T_*), \quad \Omega = \omega T_V; \\ \eta_{VV} &= T_{VV} / (2T_*^3 l^2), \quad \alpha = A/l^2, \quad f_{NL} = F_{NL} T_*^2 l^2, \quad g_{NL} = G_{NL} l^2; \\ \dot{x} &= \frac{T_* \partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial \tau}, \quad x' = \frac{U_* \partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

С учетом (5.3) уравнение движения принимает следующий безразмерный вид:

$$\begin{aligned} \xi'''' + 2\eta_V (\xi'''' - \Omega \mathbf{R} \xi''') &= -2\eta_e \dot{\xi} - \ddot{\xi} - [\alpha g_{NL} \xi'' + 2\eta_{VV} f_{NL} (\dot{\xi}'' - \Omega \mathbf{R} \xi'')]''; \\ f_{NL} &= \left((\dot{\xi}'')^T \dot{\xi}'' - 2\Omega (\dot{\xi}')^T \mathbf{R} \xi'' + \Omega^2 (\xi'')^T \xi'' \right); \\ g_{NL} &= (\xi'')^T \xi''. \end{aligned} \quad (5.4)$$

6. Получение разрешающего уравнения движения. Для сведения уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению представим решение в интегральном виде с использованием функции Грина для статического прогиба стержня Бернулли–Эйлера $G_{40}(\zeta, s) = \delta(\zeta - s)$, где $G_{kl} = \partial^k \partial^l G(\zeta, s) / \partial \zeta^k \partial s^l$:

$$\begin{aligned}
& \xi(\zeta, \tau) + 2\eta_V \left(\dot{\xi}(\zeta, \tau) - \Omega \mathbf{R} \xi(\zeta, \tau) \right) = \\
& = \int_0^1 G_{00}(\zeta, s) \left[-2\eta_e \dot{\xi}(s, \tau) - \ddot{\xi}(s, \tau) \right] ds - \\
& - \int_0^1 G_{00}(\zeta, s) \left[\alpha g_{NL} \xi''(s, \tau) + 2\eta_V f_{NL} \left(\dot{\xi}''(s, \tau) - \Omega \mathbf{R} \xi''(s, \tau) \right) \right]'' ds.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Статическая функция Грина для стержня, жестко закрепленного в конечных сечениях, имеет вид:

$$\begin{aligned}
G_{00}(\zeta, s) &= \frac{1}{6}(\zeta - s)^3 H(\zeta - s) + \frac{1}{6}(-1 + 3s^2 - 2s^3)\zeta^3 + \frac{1}{2}(s - 2s^2 + s^3)\zeta^2; \\
G_{00}(0, s) &= 0, \quad G_{10}(0, s) = 0, \quad G_{00}(1, s) = 0, \quad G_{10}(1, s) = 0,
\end{aligned}$$

где $H(\zeta - s)$ — функция Хевисайда.

Упрощая выражение (6.1), получаем:

$$\begin{aligned}
& \xi(\zeta, \tau) + 2\eta_V \left(\dot{\xi}(\zeta, \tau) - \Omega \mathbf{R} \xi(\zeta, \tau) \right) = \\
& = \int_0^1 G_{00}(\zeta, s) \left[-2\eta_e \dot{\xi}(s, \tau) - \ddot{\xi}(s, \tau) \right] ds - \\
& - \int_0^1 G_{02}(\zeta, s) \left[\alpha g_{NL} \xi''(s, \tau) + 2\eta_V f_{NL} \left(\dot{\xi}''(s, \tau) - \Omega \mathbf{R} \xi''(s, \tau) \right) \right] ds; \tag{6.2} \\
& f_{NL} = \left(\left(\dot{\xi}'' \right)^T \dot{\xi}'' - 2\Omega \left(\dot{\xi}'' \right)^T \mathbf{R} \xi'' + \Omega^2 \left(\xi'' \right)^T \xi'' \right); \\
& g_{NL} = \left(\xi'' \right)^T \xi''.
\end{aligned}$$

Для записи уравнения (6.2) в матричной форме входящие в него интегралы вычислим приближенно по методу трапеций, разбивая вал на m одинаковых элементов с длиной $h = 1/m$ и координатами узлов $\zeta_i = (i-1)h$; $i = \overline{1, m+1}$. Значения интеграла в каждом j -ом узле принимается равным

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 G(\zeta_j, s) \mathbf{x}(\tau, s) ds \approx \frac{h}{2} \left[G_{(j)(1)} \mathbf{x}_{(1)} + G_{(j)(m+1)} \mathbf{x}_{(m+1)} \right] + h \sum_{k=2}^{k=m} G_{(j)(k)} \mathbf{x}_{(k)}, \\
& G_{(j)(k)} \doteq G(\zeta_j, s_k), \quad \mathbf{x}_{(k)} \doteq \mathbf{x}(\tau, s_k), \quad j, k = \overline{1, m+1}.
\end{aligned}$$

Для того чтобы система не была переопределена, краевые узлы исключаются из рассмотрения, поскольку перемещения в них заранее известны — они нулевые. Таким образом, размерность задачи станет равной $2(m-1)$.

Введем матрицу функций Грина \mathbf{G}_{kl}^h , вектор узловых перемещений \mathbf{x} единичные матрицы \mathbf{E} и \mathbf{I} размерностью R^2 и R^{m-1} соответственно:

$$\mathbf{G}_{(m-1) \times (m-1)}^h = h \begin{bmatrix} G_{kl}(\zeta_2, s_2) & G_{kl}(\zeta_2, s_3) & \cdots & G_{kl}(\zeta_2, s_m) \\ G_{kl}(\zeta_3, s_2) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ G_{kl}(\zeta_m, s_2) & \cdots & \cdots & G_{kl}(\zeta_m, s_m) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{2(m-1) \times 1} = \begin{Bmatrix} \xi(\zeta_2, \tau) \\ \xi(\zeta_3, \tau) \\ \vdots \\ \xi(\zeta_m, \tau) \end{Bmatrix}.$$

Квадратные матрицы \mathbf{G}_{kl}^h , \mathbf{I} , \mathbf{D} имеют размерность, равную $(m-1)$, т.е. количеству узлов. Поскольку в каждом узле мы имеем две равнозначные степени свободы — перемещения вдоль осей x и y для матричной записи, каждая компонента этих матриц должна быть умножена на единичную матрицу \mathbf{E} . Для этой операции воспользуемся произведением Кронекера, которое обозначим как $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$.

В итоге уравнение в матричной форме принимает следующий вид:

$$\mathbf{A}_2 \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_0 \mathbf{x} = \mathbf{F},$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{G}_{00}^h \otimes \mathbf{E},$$

$$\mathbf{A}_1 = 2\eta_V (\mathbf{I} \otimes \mathbf{E}) + 2\eta_e (\mathbf{G}_{00}^h \otimes \mathbf{E}),$$

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{I} \otimes (\mathbf{E} - 2\eta_V \Omega \mathbf{R}), \quad (6.3)$$

$$\mathbf{F} = 2\eta_{VV} \left[\left(\mathbf{G}_{02}^h \right)_f \otimes \mathbf{E} \right] [-(\mathbf{D} \otimes \mathbf{E}) \dot{\mathbf{x}} + \Omega (\mathbf{D} \otimes \mathbf{R}) \mathbf{x}] -$$

$$- \alpha \left[\left(\mathbf{G}_{02}^h \right)_g \otimes \mathbf{E} \right] [(\mathbf{D} \otimes \mathbf{E}) \mathbf{x}].$$

где $\left(\mathbf{G}_{02}^h \right)_f$ и $\left(\mathbf{G}_{02}^h \right)_g$ — матрицы, полученные умножением столбцов матрицы Грина \mathbf{G}_{02}^h на соответствующие значения f_{NL} и g_{NL} .

Полная нелинейная система уравнений (6.3) зависит от шести параметров $\{m, \eta_e, \eta_V, \Omega, \eta_{VV}, \alpha\}$, при этом линейная часть — от четырех параметров $\{m, \eta_e, \eta_V, \Omega\}$.

Для численного решения сведем уравнение (6.3) к форме Коши:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A} \mathbf{Z} + \mathbf{f};$$

$$\mathbf{Z} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{F} \end{Bmatrix}.$$

7. Определение критической скорости. Линейная динамическая система описывается следующим уравнением:

$$\mathbf{A}_2 \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_0 \mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in R^{2(m-1)} \quad (7.1)$$

Собственные числа λ_k , $k = \overline{1, 2, \dots, 4(m-1)}$ системы (7.1) являются корнями характеристического уравнения

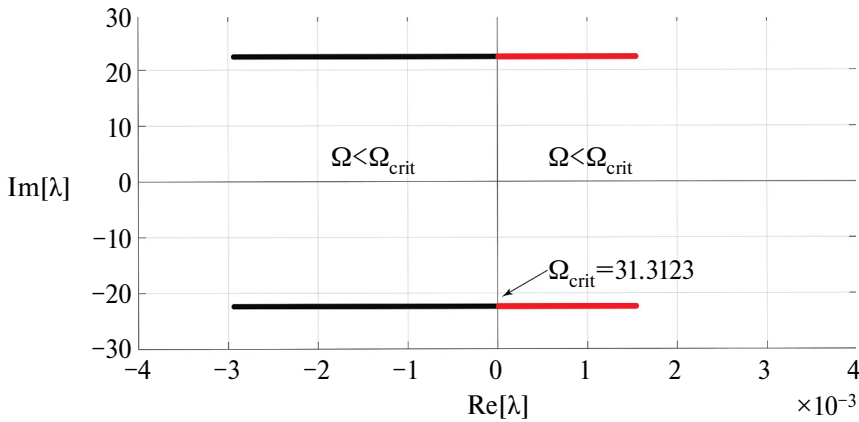


Рис. 2. Диаграмма Аргана в диапазоне скоростей вращения $\Omega \in [30; 32]$.

$$\det(\lambda^2 \mathbf{A}_2 + \lambda \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0) = 0$$

и определяют критическую скорость вращения Ω_{crit} вала.

Приводимые ниже результаты численного расчета получены в программном комплексе MATLAB с использованием интегратора ode23t ($\text{AbsTol} = 10^{-8}$, $\text{RelTol} = 10^{-6}$).

Так, при выбранных параметрах $m = 12$, $\eta_e = 0.02$, $\eta_V = 0.0001$ критическая скорость $\Omega_{\text{crit}} = 31.3123$, а собственные значения $\lambda_{\text{crit}} = \pm 22.3729i$. На рис. 2 приведена диаграмма Аргана в области перехода корней в правую полуплоскость в диапазоне $\Omega \in [30; 32]$, на которой показан переход первой пары характеристических корней на правую полуплоскость. Красные линии соответствуют значениям Ω , при которых $\max(\text{Re}(\lambda_t)) > 0$, $t = 1, \dots, 4(m-1)$.

8. Поведение линейной динамической системы ($\alpha = 0$, $\eta_V = 0$). При докритических скоростях прямолинейное вращение вала асимптотически устойчиво, и при любом начальном возмущении амплитуды колебаний динамической системы стремятся к нулю. При закритических скоростях вращения любые начальные возмущения приводят к неограниченному росту амплитуд колебаний вала.

9. Поведение нелинейной динамической системы. Рассмотрим влияние каждой из нелинейностей (η_{VV}, α) модели внутреннего демпфирования Кельвина–Фойхта на амплитуды колебаний вала при его вращении с закритической скоростью $\Omega = 33 > \Omega_{\text{crit}}$. В качестве начального возмущения примем перемещения шестого (срединного) узла $\xi_x(\zeta_6, 0) = \xi_y(\zeta_6, 0) = 0.2$. На рис. 3, а показаны перемещения шестого (срединного) узла при значении коэффициента $\eta_{VV} = 10^{-5}$ и нулевом коэффициенте нелинейности упругих сил ($\alpha = 0$). В этом случае с увеличением числа оборотов вала N амплитуды колебаний неограниченно возрастают, стремясь в бесконечность. При учете обеих нелинейностей ($\eta_{VV} = 10^{-5}$, $\alpha = 0.015$) амплитуда колебаний сначала возрастает и, затем, после, примерно, двадцати оборотов амплитуда устанавливается на постоянное значение, достигнув пятикратного увеличения по сравнению с начальным возмущением (рис. 3, б). Наличие только нелинейности в

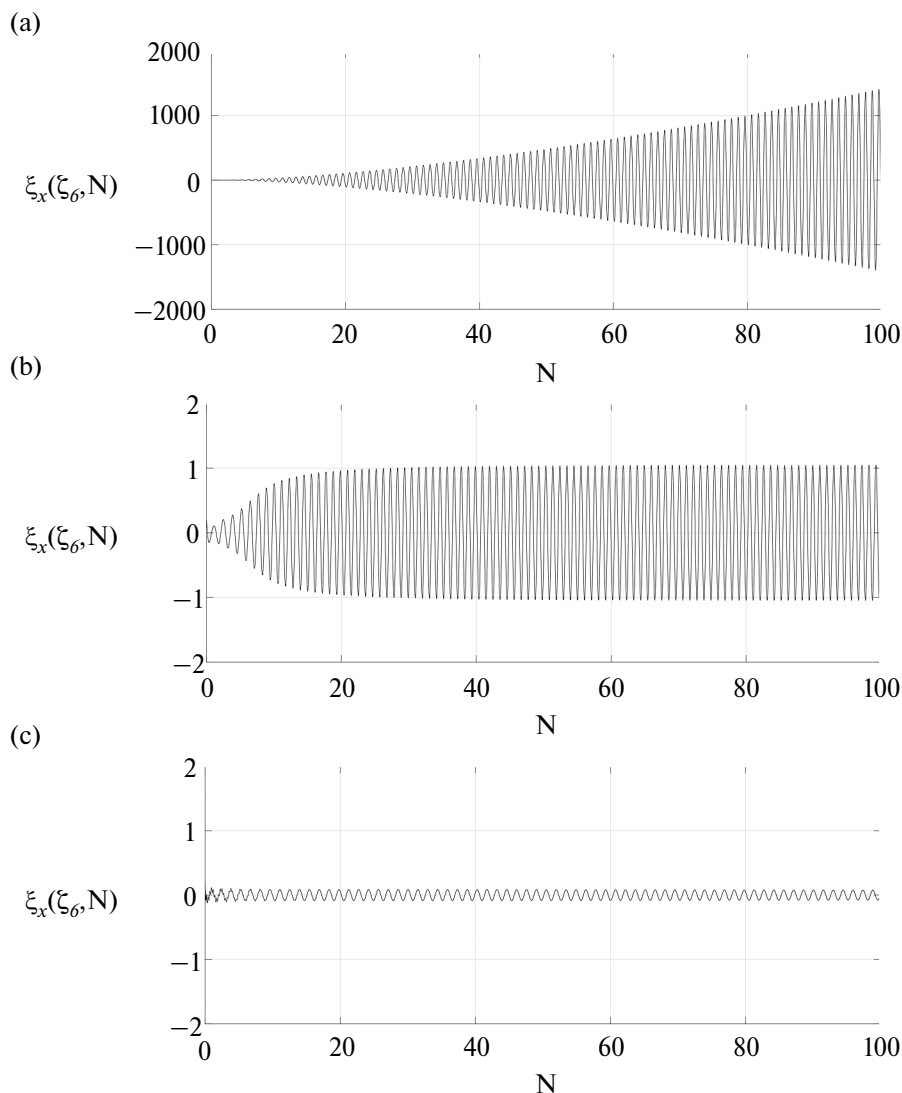


Рис. 3. Перемещения срединного узла при закритической скорости при $m = 12$, $\eta_e = 0.02$, $\eta_V = 10^{-4}$: (a) $\eta_{VV} = 10^{-5}$, $\alpha = 0$; (b) $\eta_{VV} = 10^{-5}$, $\alpha = 0.015$; (c) $\eta_{VV} = 0$, $\alpha = 0.015$.

силах упругости, в данном случае – кубической ($\alpha = 0.015$, $\eta_{VV} = 0$), приводит к ограниченным устойчивым периодическим решениям (рис. 3,с).

10. Явление гистерезиса угловой скорости вращения при малом значении времени релаксации неупругих деформаций η_V . Как было показано в предыдущем пункте, наличие кубической нелинейности в силах упругости приводит к появлению дополнительного нетривиального устойчивого решения в закритической области. На рис. 4 приведена бифуркационная диаграмма значений установившихся амплитуд перемещений центрального узла $\xi_x(\xi_6, \tau)$ от

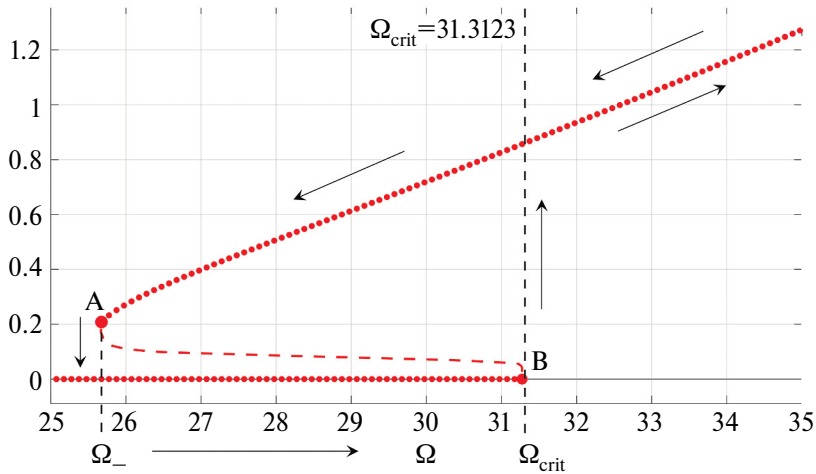
$\text{EXTR}_+[\xi_x(\xi_6, \tau)]$


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма вдоль верхней периодической ветви, A — предельная точка, B — субкритическая бифуркация ($m = 12$, $\eta_e = 0.02$, $\eta_V = 10^{-4}$, $\eta_{VV} = 10^{-5}$, $\alpha = 0.015$).

угловой скорости Ω , которая получена методом установления при следующих значениях параметров: $m = 12$, $\eta_e = 0.02$, $\eta_V = 10^{-4}$, $\eta_{VV} = 10^{-5}$, $\alpha = 0.015$. Видно, что в докритической области, в диапазоне скоростей $\Omega_- < \Omega < \Omega_{crit}$ существует два устойчивых режима: устойчивое нулевое решение и устойчивое периодическое решение. Эти решения имеют разные притягивающие множества. Можно заключить, что наблюдается субкритическая бифуркация (точка B на рис. 4), неустойчивая ветвь показана схематично красной штриховой линией. Точка A является предельной точкой перехода с верхней устойчивой ветви на нижнюю устойчивую.

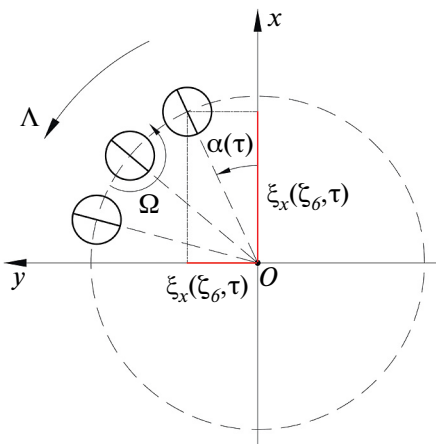


Рис. 5. Прецессия сечения стержня, соответствующего срединному узлу.

При угловой скорости выше критической $\Omega > \Omega_{crit}$ существует только одно устойчивое периодическое решение, продолжающее верхнюю ветвь на интервале $\Omega_- < \Omega < \Omega_{crit}$.

11. Характер прецессии на устойчивой ветви периодических решений.

Для определения характера прецессии используется понятие о коэффициенте мгновенной прецессии Λ , который определяется через скорость изменения полярного угла срединного узла $\alpha(\tau)$, показанного на рис. 5:

$$\dot{\alpha}(\tau) = \frac{\dot{\xi}_y(\zeta_6, \tau)\xi_x(\zeta_6, \tau) - \dot{\xi}_x(\zeta_6, \tau)\xi_y(\zeta_6, \tau)}{\xi_x^2(\zeta_6, \tau) + \xi_y^2(\zeta_6, \tau)}.$$

Тогда коэффициент мгновенной прецессии Λ и его среднее значение $\bar{\Lambda}$ определяются следующим образом:

$$\Lambda = \frac{\dot{\alpha}}{\Omega}, \quad \bar{\Lambda} = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Lambda(s) ds.$$

Можно различить следующие случаи: $\bar{\Lambda} > 0$ – прямая прецессия, $\bar{\Lambda} < 0$ – обратная прецессия, $\bar{\Lambda} = 1$ и $\bar{\Lambda} = -1$ – прямая и обратная синхронная прецессии соответственно.

На рис. 6 показано распределение среднего коэффициента прецессии $\bar{\Lambda}$ вдоль верхней устойчивой периодической ветви, в интервале $\Omega > \Omega_-$ (см. рис. 4) реализуется прямая несинхронная прецессия $0 < \bar{\Lambda} < 1$, причем скорость вращения вала несколько больше скорости прецессии.

На рис. 7 показаны характерные для верхней ветви траектории узлов коллокации с формой изогнутой оси.

12. Характер прецессии на устойчивой ветви периодических решений. На рис. 8а показаны значения Ω_- и Ω_{crit} в зависимости от коэффициента внутреннего линейного демпфирования η_V , из которого видно, что при малых значениях η_V в области $\Omega_- < \Omega < \Omega_{\text{crit}}$ присутствует множественность решений (рис. 8,с), что соответствует субкритической бифуркации. При увеличении коэффициента η_V значение Ω_- постепенно сливается с Ω_{crit} . При некотором значении η_V складка исчезает: $\Omega = \Omega_{\text{crit}}$ – суперкритическая бифуркация (рис. 8,б). Появляется мягкое развитие амплитуд устойчивых периодических (автоколебательных) движений.

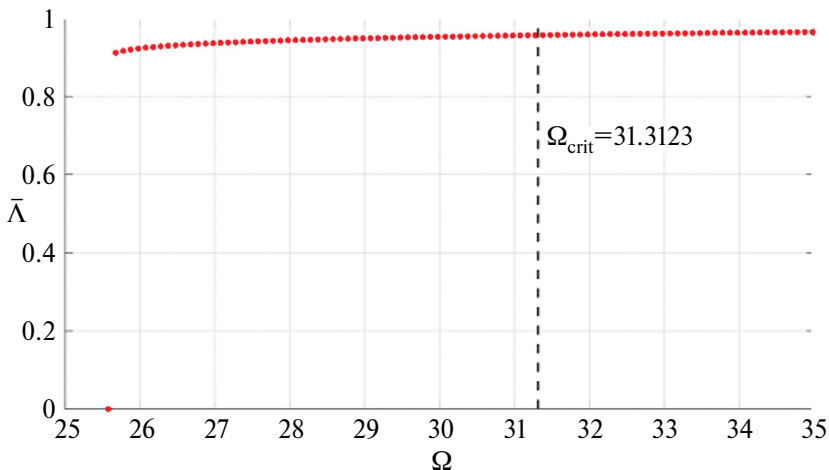


Рис. 6. Распределение среднего значения коэффициента прецессии вдоль верхней устойчивой ветви ($m = 12$, $\eta_e = 0.02$, $\eta_V = 10^{-4}$, $\eta_{VV} = 10^{-5}$, $\alpha = 0.015$).

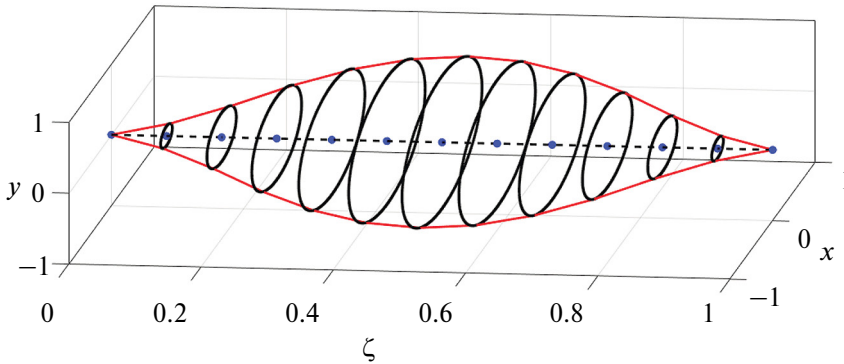


Рис. 7. Траектории узлов коллокации при установившемся движении (черные линии) и формы изогнутой оси (красные линии) ($m = 12$, $\eta_e = 0.02$, $\eta_V = 10^{-4}$, $\eta_{VV} = 10^{-5}$, $\alpha = 0.015$, $\Omega = 32$).

13. Заключение. В работе показано влияние кубического члена в модели Кельвина—Фойхта для внутреннего демпфирования и кубического члена в законе упругости на динамику вала в докритической и закритической областях скоростей вращения. Без учета нелинейных членов в законе упругости в закритической области прямолинейная форма вала всегда неустойчива (при $\Omega > \Omega_{\text{crit}}$: $\|\xi\| \rightarrow \infty$). Наличие кубической нелинейности в упругой составляющей в деформациях приводит к появлению дополнительной верхней ветви периодических решений в докритической области в диапазоне скоростей $[\Omega_-; \Omega_{\text{crit}}]$, которая продолжается в закритической области. В зависимости от значений времени релаксации неупругих деформаций η_V в материале вала возможны два различных сценария бифуркаций скорости вращения вала. При относительно большом времени релаксации (здесь $\eta_V \geq 0.0004$, рис. 8а) наблюдается сверхкритическая бифуркация прямолинейного вращения вала при критической скорости вращения $\Omega = \Omega_{\text{crit}}$. При увеличении скорости вращения происходит мягкое возбуждение асинхронного прецессирования оси вала (рис. 8б) — $0 < \bar{\Lambda} < 1$. При уменьшении времени релаксации (здесь для $\eta_V < 0.0004$ рис. 8а) появляется новая точка бифуркации скорости вращения вала Ω_- при продолжающемся увеличении критической скорости Ω_{crit} . В диапазоне $[\Omega_-; \Omega_{\text{crit}}]$ существует дополнительная ветвь неустойчивых периодических движений (рис. 8,с), соединяющая точки Ω_- и Ω_{crit} . Нижняя точка Ω_- является бифуркацией типа предельной точки слияния устойчивого и неустойчивого периодического движения и субкритической бифуркации в точке Ω_{crit} , при достижении которой происходит жесткое возбуждение прецессионного движения. Т.е. возникает область гистерезисного поведения вала: при адиабатическом изменении скорости вращения вала: при движении “вперед–назад” динамическая система проходит через различные состояния.

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект № 24-19-00333, <https://rscf.ru/project/24-19-00333/>).

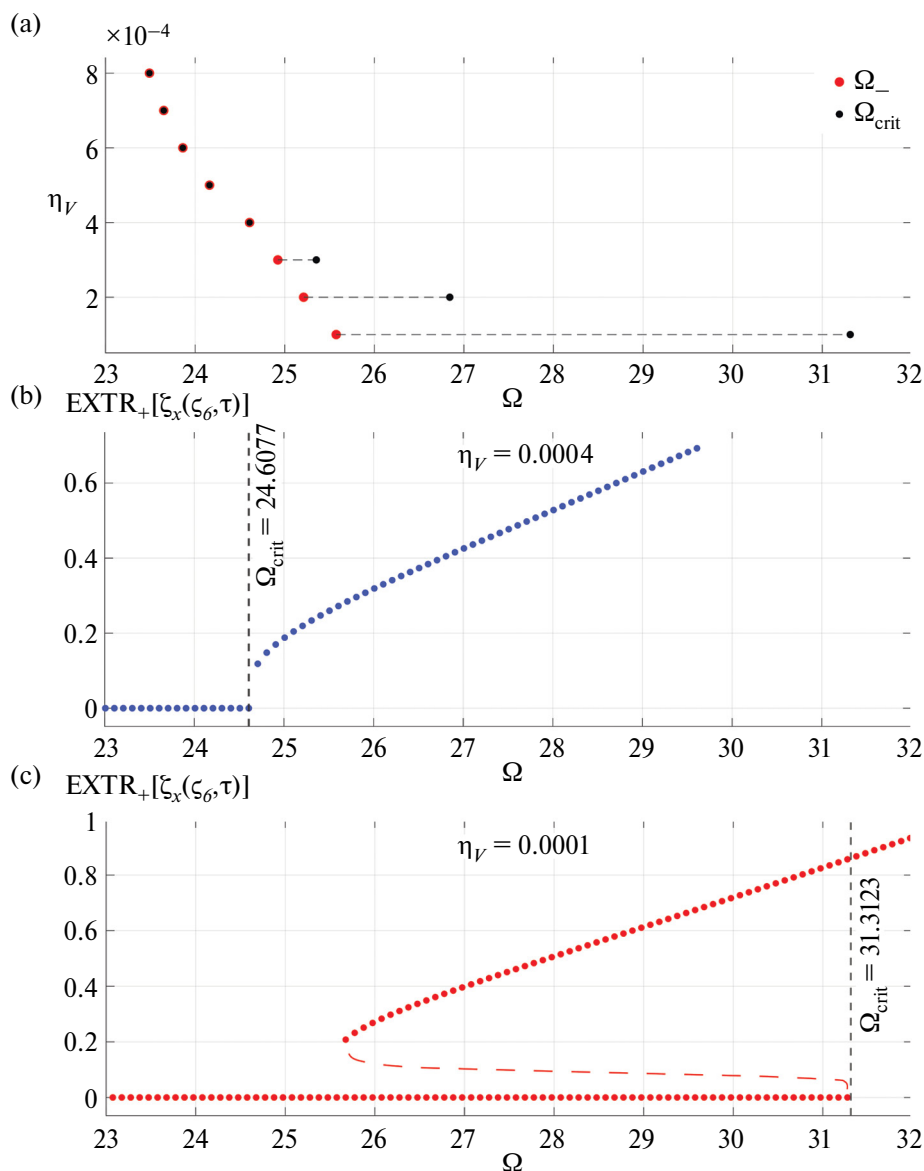


Рис. 8. Зависимость Ω_- и Ω_{crit} от коэффициента η_V (a); распределение амплитуд перемещений срединного узла при субкритической (b) и суперкритической (c) бифуркациях ($m = 12$, $\eta_e = 0.02$, $\eta_{IV} = 10^{-5}$, $\alpha = 0.015$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
2. *Ding Q., Cooper J., Leung A.* Hopf bifurcation analysis of a rotor/seal system // *J. Sound Vib.* 2002. V. 252. № 5. P. 817–833.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3711>
3. *Karpenko E.V., Pavlovskaja E.E.* Bifurcation analysis of a preloaded Jeffcott rotor // *Chaos, Solutions and Fractals.* 2003. V. 15. № 2. P. 407–416.
[https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(02\)00107-8](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00107-8)
4. *Ehrich F.* Observations of subcritical, superharmonic and chaotic response in rotor dynamics // *J. Vib. Acoust.* 1992. V. 114. № 1. P. 93–100.
<https://doi.org/10.1115/1.2930240>
5. *Kimphal A.* Internal friction as a cause of shaft whirling // *Phil. Mag.* 1925. V. 49. P. 724–727.
6. *Newkirk B.L.* Saft whipping // *General Electric Review.* 1924. V. 27. № 3. P. 169–178.
7. *Genta G. et al.* *Vibration dynamics and control.* New York: Springer, 2009.
8. *Li Y. et al.* Dynamic modelling and vibration analysis of a bolted spigot joint structure considering mating interface friction: simulation and experiment // *Nonlinear Dyn.* 2024. V. 112. P. 7977–8000.
<https://doi.org/10.1007/s11071-024-09365-6>
9. *Schwarz U.* *Continuum mechanics.* Heilenberg University, 2023.
10. *Lewandowski R., Chorążyczewski B.* Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers // *Comput. struct.* 2010. V. 88. № 1–2. P. 1–17.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.09.001>
11. *Hetzler H., Boy F.* Internal dissipation and self-excited oscillations in rotating machinery: internal friction vs. internal viscous damping // *ISROMAC* 2017. 2017.
12. *Азаров А.А., Гуськов А.М., Пановко Г.Я.* Динамика гибкого ротора с диском при точечном контакте с дискретными вязкоупругими ограничителями колебаний // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* 2023. № 1. С. 26–37.
<https://doi.org/10.31857/S0235711923010029>
13. *Пановко Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
14. *Светлицкий В.А.* *Механика стержней: Учеб. для вузов. В 2-х ч. Ч. 1. Статика.* М.: Высшая школа, 1987. 320 с.

FEATURES OF THE DYNAMICS OF A ROTATING SHAFT WITH NONLINEAR MODELS OF INTERNAL DAMPING AND ELASTICITY

A. A. Azarov^{a, *}, A. M. Gouskov^{a, b, **}, G. Y. Panovko^{b, ***}

^a*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

^b*Mechanical Engineering Research Institute of RAN, Moscow, Russia*

*e-mail: 13azarov.ru@gmail.com

**e-mail: gouskov_am@mail.ru

***e-mail: gpanovko@yandex.ru

Abstract. The paper analyzes the influence of nonlinear (cubic) internal damping (in the Kelvin–Feucht model) and cubic nonlinearity of elastic forces on the dynamics of a rotating flexible shaft with a distributed mass. The shaft is modeled by a Bernoulli–Euler rod using the Green function, the discretization and reduction of the problem of rotating shaft dynamics to an integral equation are performed. It is revealed that in such a system there is always a branch of limited periodic movements (self-oscillations) at a supercritical rotation speed. In addition, with low internal damping, the periodic branch continues into the subcritical region: when the critical velocity is reached, the subcritical Poincaré–Andronov–Hopf bifurcation is realized and there is an unstable branch of periodic movements, below the branch of stable periodic self-oscillations (the occurrence of hysteresis with a change in rotation speed). With an increase in the internal friction coefficient, the hysteresis phenomenon disappears and at a critical rotation speed, a soft excitation of self-oscillations of the rotating shaft occurs through the supercritical Poincaré–Andronov–Hopf bifurcation.

Keywords: shaft, damping, bifurcation, Kelvin–Voigt model, precession

REFERENCES

1. Bolotin V. Nonconservative problems of the theory of elastic stability. M.: Nauka, 1961 (in Russian).
2. Ding Q., Cooper J., Leung A. Hopf bifurcation analysis of a rotor/seal system // J. Sound Vibr. 2002. V. 252. № 5. P. 817–833.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3711>
3. Karpenko E.V., Pavlovskaya E.E. Bifurcation analysis of a preloaded Jeffcott rotor // Chaos, Sol. Fract. 2003. V. 15. № 2. P. 407–416.
[https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(02\)00107-8](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00107-8)
4. Ehrich F. Observations of subcritical, superharmonic and chaotic response in rotor dynamics // Vibr. Acous. 1992. № 114. P. 93–114.
<https://doi.org/10.1115/1.2930240>
5. Kimpfal A. Internal friction as a cause of shaft whirling // Phil. Mag. 1925. V. 49. P. 724–727.
6. Newkirk B.L. Shaft whipping // General Electric Rev. 1924. V. 27. № 3. P. 169–178.
7. Genta G. et al. Vibration dynamics and control. NY: Springer, 2009.
8. Li Y. et al. Dynamic modelling and vibration analysis of a bolted spigot joint structure considering mating interface friction: simulation and experiment // Nonlinear Dynamics. 2024. P. 1–24.
<https://doi.org/10.1007/s11071-024-09365-6>

-
9. *Schwarz U.* Continuum mechanics / Heilenberg University, 2023. URL: https://www.thphys.uni-heidelberg.de/~biophys/PDF/Skripte/Script_Continuum_Mechanics.pdf (date of application 01.04.2024).
 10. *Lewandowski R., Chorążyczewski B.* Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers // *Computers & Structures*. 2010. V. 88. № 1–2. P. 1–17.
 11. *Hetzler H., Boy F.* Internal dissipation and self-excited oscillations in rotating machinery: internal friction vs. internal viscous damping // *International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery (ISROMAC 2017)*. 2017.
 12. *Azarov A.A., Gouscov A.M., Panovko G.Y.* Dynamics of a flexible disk rotor under a point contact with discrete viscoelastic oscillation limiters // *J. Mach. Manufac. Reliability*. 2023. № 1. P. 26–37.
<https://doi.org/10.31857/S0235711923010029>
 13. *Panovko Y.G.* Internal friction in oscillations of elastic systems. M.: Fizmatgiz, 1960 (in Russian).
 14. *Svetlitsky V.A.* Mechanics of rods. M.: Vyshaya Shkola, 1987 (in Russian).

УДК 531.391:521.93

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА

© 2024 г. В. В. Перепелкин^а, *

^аМосковский авиационный институт (национальный исследовательский
университет), Москва, Россия

*e-mail: vadimkin1@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.05.2024 г.

После доработки 13.06.2024 г.

Принята к публикации 20.06.2024 г.

В рамках пространственного варианта задачи “деформируемая Земля–Луна” в поле притяжения Солнца для модели вязкоупругой Земли определены приливные деформации, обусловленные долгопериодическим лунным возмущением. Проведен анализ динамики движения земного полюса с чандлеровской и годичной частотами с учетом полученных выражений центробежных моментов инерции Земли. С помощью численного интегрирования уравнений движения полюса показано, что найденная структура вариаций центробежных моментов инерции приводит к колебаниям амплитуд чандлеровской и годичной гармоник с 18-летним периодом прецессии орбиты Луны.

Ключевые слова: земной полюс, чандлеровское колебание, годичное колебание, полюсный прилив, геопотенциал, движение относительно центра масс

DOI: 10.31857/S1026351924060058, EDN: TZCWYU

1. Введение. Уточнение моделей вращательного движения Земли относительно центра масс и движение ее полюса является важной задачей для навигации и геофизики [1, 2]. Так, например, движение земного полюса необходимо учитывать для достижения высокой точности навигации космических аппаратов [3].

Современные астрометрические методы измерений параметров ориентации Земли в космическом пространстве позволяют выявлять вариации во вращении Земли с весьма малыми амплитудами [1]. При этом ряд колебательных эффектов, которые обнаруживаются при анализе данных наблюдений, не имеют объяснений в теории вращения Земли.

В движении земного полюса, как известно [4–7], выделяются основные составляющие — чандлеровское и годичное колебания, долгопериодический тренд, а также нерегулярные колебания, в том числе стохастического характера [8].

Анализ данных о движении земного полюса позволяет установить, что параметры основных колебаний полюса подвержены значимым долгопериодическим вариациям с 18-летней периодичностью прецессии орбиты Луны, имеющей достаточно стабильные частоту и фазу. При этом интенсивность (амплитуда) этих вариаций оказывается непостоянной. Это позволяет заключить о сложности динамических процессов, происходящих в системе Земля—Луна—Солнце, так как указывает на регулярную астрономическую природу возмущений этих колебаний и вовлеченность в процесс геофизических сред.

Данной теме посвящен ряд научных работ. Например, в исследованиях [9–13] устанавливается взаимосвязь вариаций амплитуды и фазы чандлеровской компоненты с геофизическими процессами в атмосфере и океанах, рассматриваются вопросы о связи пространственного движения лунной орбиты с чандлеровским колебанием, обсуждается синхронизация чандлеровского колебания с 18-летним приливным циклом. В работах [14–16] с помощью обработки и анализа данных наблюдений и измерений о движении земного полюса Международной службы вращения Земли (МСВЗ) [1] показано наличие колебательного процесса, синфазного с прецессионным движением орбиты Луны. Однако вопросы о синхронизации колебаний полюса с прецессией лунной орбиты и о влиянии Луны на его колебательный процесс в научной литературе описываются достаточно редко и объяснения пока не находят.

В данной работе рассматривается вращение Земли в гравитационном поле Луны и Солнца в рамках пространственного варианта задачи “деформируемая планета—спутник” в поле притягивающего центра. Для модели вязкоупругой Земли, состоящей из абсолютно твердой части (“ядра”) и вязкоупругой оболочки (“мантии”), подчиняющейся реологической модели Кельвина—Фойгта, найдены малые вариации центробежных моментов инерции с комбинационной структурой. Эти вариации обусловлены долгопериодическим возмущением от Луны с 18-летним периодом прецессии ее орбиты, а также квазипериодическим смещением оси вращения в теле Земли. С помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений движения земного полюса показано, что найденная структура вариаций центробежных моментов инерции приводит к колебаниям амплитуд чандлеровской и годичной гармоник с периодом 18 лет.

2. Вариации амплитуды чандлеровской и годичной компонент. Ранее в работах [14, 15] с помощью численной обработки данных наблюдений и измерений МСВЗ колебаний земного полюса было показано, что основное движение полюса (сложение чандлеровской и годичной компонент) включает в себя колебательный процесс, согласованный с прецессионным движением плоскости лунной орбиты вокруг нормали к плоскости эклиптики. Более точно можно утверждать о наличии вариаций амплитуд чандлеровской и годичной гармоник, синфазных с колебаниями угла наклона плоскости лунной орбиты к плоскости земного экватора.

Так, из обработки данных C01 МСВЗ с помощью ряда несложных преобразований, основанных на фильтрации данных и преобразований типа “поворот” и “сдвиг” (согласно [14]), выделяются вариации амплитуд чандлеровской и годичной компонент. На рис. 1 приводятся вариации амплитуд a_{ch} , a_h , построенных согласно методике, предложенной в работе [15]. Эти вариации сравниваются с главной гармоникой, выделенной из колебаний угла наклона плоскости лунной орбиты к земному экватору.

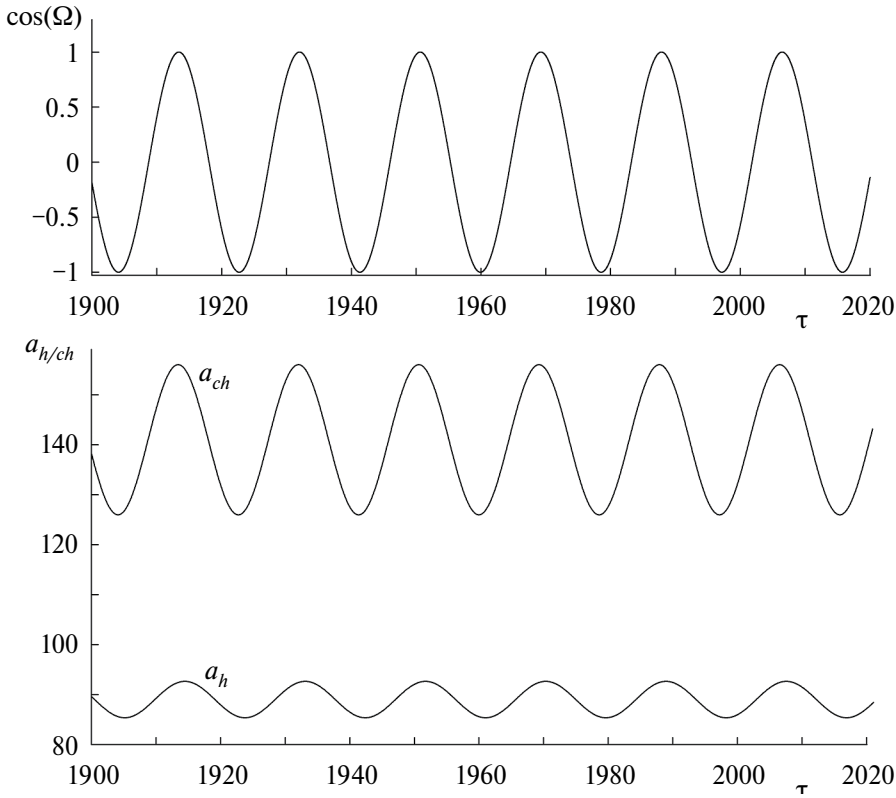


Рис. 1. Вариации амплитуд a_{ch} , a_h чандлеровской и годичной компонент соответственно, измеряемые в угловых миллисекундах. По оси абсцисс отложены годы.

Наличие колебаний с частотой прецессии орбиты Луны в амплитудах a_{ch} , a_h , как было показано в работе [14], обуславливают наличие этой гармоники в движении полюса в системе (ξ_p, η_p) , переход к которой задается преобразованием:

$$\begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} = \Pi(w_2 - w_1) \left[\Pi(w_1) \begin{pmatrix} x - c_x \\ y - c_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$w_2 = \begin{cases} w_h, & \text{если } a_h < a_{ch} \\ w_{ch}, & \text{если } a_{ch} < a_h \end{cases} \quad (2.1)$$

$$w_1 = \begin{cases} w_{ch}, & \text{если } a_h < a_{ch} \\ w_h, & \text{если } a_{ch} < a_h \end{cases}$$

$$\dot{w}_h = v\omega_*, \quad \dot{w}_{ch} = N\omega_*.$$

Здесь $\Pi(\alpha)$ — матрица плоского поворота на угол α ; a_0 — среднее значение амплитуды колебаний полюса при его движении вокруг “средней точки” за 6-летний цикл (без трендовой составляющей); c_x , c_y задают положение “средней точки” полюса и содержат константы, вековые слагаемые

и вариации с периодами более шести лет; a_{ch} , a_h — амплитуды чандлеровской и годичной гармоник с фазами w_{ch} , w_h , соответственно; $N \cong 0.843$, $\nu = 1$ — чандлеровская и годичная частоты, измеряемые в циклах/год; ω_* — среднее движение барицентра системы Земля–Луна по орбите вокруг Солнца; $\dot{w}_2 - \dot{w}_1 = \pm \nu_T \omega_*$ — частота шестилетней цикличности движения полюса.

Преобразование (2.1) координат полюса показывает наличие возмущений в амплитудной модуляции чандлеровской и годичной компонент, среди которых выделяется и гармоника с периодом прецессии лунной орбиты. Если выполнить обратное к (2.1) преобразование движения полюса к исходной земной системе координат (x , y), то указанная гармоника с частотой $\dot{\Omega} = 0.05373$ циклов в год перейдет в более высокочастотную спектральную область (в интервале 0.79–1.055 цикл/год) и произойдет ее расщепление на комбинационные гармоники с частотами $\nu \pm \dot{\Omega}$, $N \pm \dot{\Omega}$. Это соответствует умножению вариаций амплитуд на гармоники с основными частотами. На рис. 2 построен амплитудный спектр координат x , y полюса (пунктирная линия — для x , сплошная — для y), где вертикальными пунктирами отмечены соответствующие гармоники. Следует заметить, что спектральные “пики” на этих частотах достаточно расширены. Как отмечалось в работе [15], это обстоятельство обусловлено в первую очередь нестационарным характером их амплитуд, в то время как частоты и фазы достаточно стабильны. Последнее указывает на регулярную природу возмущений этих колебаний, а размытость пиков в спектре — на вовлеченность геофизических процессов в формирование колебаний амплитуд основных компонент колебаний полюса.

3. Приливные деформации в системе Земля–Луна. Для исследования динамики колебательного движения полюса под действием гравитационно-приливного возмущающего момента рассматривается следующая модельная задача. Деформируемая планета (Земля) и точечный спутник (Луна) совершают взаимное поступательно-вращательное движение вокруг общего центра масс (барицентра), который перемещается по эллиптической орбите

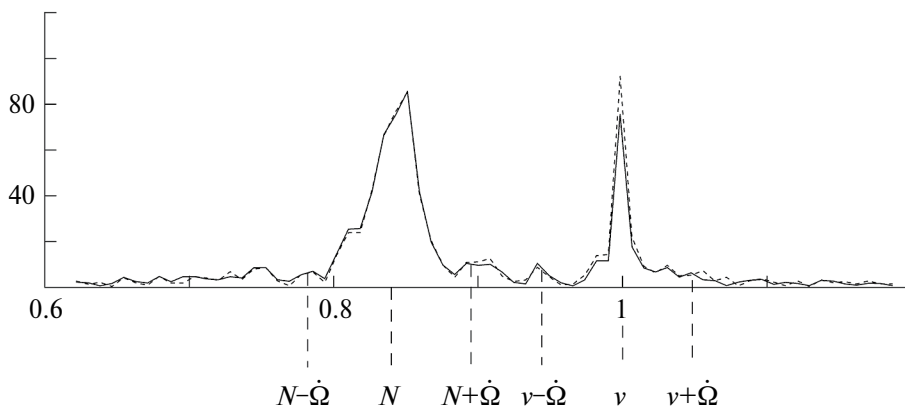


Рис. 2. Амплитудный спектр координат x , y полюса, измеряемый в угловых миллисекундах (пунктирная линия — для x , сплошная — для y), где вертикальными пунктирами отмечены основные гармоники. По оси абсцисс отложено время, измеряемое в циклах за год.

вокруг Солнца. Введем Кенигову систему координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в центре масс Земли, а ось $C\xi_3$ ортогональна плоскости эклиптики (плоскости орбиты барицентра системы Земля–Луна) [17–19].

Для идентификации структуры возмущающего момента, приводящего к вариациям параметров движения полюса, синфазных с прецессионным движением орбиты Луны, можно рассмотреть случай круговой орбиты. Тогда орт \mathbf{R}^0 радиус-вектора \mathbf{R} Луны относительно центра масс Земли в системе координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$ задается в виде:

$$\mathbf{R}^0 = \Gamma_3(h)\Gamma_1(i)(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)^T$$

$$\Gamma_1(i) = \text{diag}(1, \Gamma_2(i)), \quad \Gamma_3(h) = \text{diag}(\Gamma_2(h), 1). \quad (3.1)$$

Матрицы $\Gamma_{1,3}$ в (3) – блочно-диагональные, Γ_2 – матрица плоского поворота. Угловые переменные h , i и ϑ суть долгота восходящего узла на плоскости $C\xi_1\xi_2$, наклонение плоскости лунной орбиты к эклиптике и истинная аномалия соответственно.

Следуя подходу, рассмотренному в работе [19], модель Земли в грубом приближении представим как вязкоупругое твердое тело, состоящее из абсолютно твердой внутренней части (ядра) и вязкоупругой мантии, подчиняющейся релогической модели Кельвина–Фойгта. Также будем предполагать отсутствие относительных перемещений точек подвижной среды на границе между ядром и мантией, а внешнюю границу положим свободной. Вследствие предположения о малости деформаций мантии Земли процесс деформирования рассматривается в квазистатическом приближении. Эти допущения позволяют с помощью методов теоретической механики и теории возмущений [17] достаточно просто получить аналитические выражения для упругих деформаций, а также для главного центрального тензора инерции J деформируемой Земли.

Связанная с твердым ядром земная система координат представляет собой декартову систему $Cx_1x_2x_3$, оси которой направим по главным центральным осям инерции “замороженной” Земли (в недеформированном состоянии), а точку C совместим с ее центром масс.

В связанной системе координат орт \mathbf{R}^0 определяется следующим образом:

$$S^{-1}\mathbf{R}^0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$$

$$S^{-1} = \Gamma_3^{-1}(\varphi_1)\Gamma_1^{-1}(\delta_2)\Gamma_3^{-1}(\varphi_2)\Gamma_1^{-1}(\delta_1)\Gamma_3^{-1}(\varphi_3). \quad (3.2)$$

Здесь ортогональная матрица $S = S(t)$ ($S^{-1} = S^T$) задает переход от связанных осей к осям Кениговой системы и выражается посредством канонических переменных Андуайе [19]: моментов импульсов L, G, G_{ξ_3} и угловых переменных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Углы δ_1, δ_2 определяются следующими соотношениями (рис. 3):

$$\cos \delta_1 = \frac{G_{\xi_3}}{G}, \quad \cos \delta_2 = \frac{L}{G}, \quad (3.3)$$

где G – модуль кинетического момента Земли, L – проекция вектора \mathbf{G} на ось x_3 , G_{ξ_3} – проекция вектора \mathbf{G} на ось ξ_3 .

В полярных координатах траектория движения полюса может быть выражена через углы φ_1, δ_2 . В декартовой системе координат эти углы можно выразить через координаты x, y , а также их средние значения c_x, c_y :

$$\begin{aligned} x - c_x &= \delta_2 \cos \varphi_1 \\ y - c_y &= -\delta_2 \sin \varphi_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Потенциальная энергия Земли в гравитационном поле Луны определяется выражением [19]:

$$\begin{aligned} \Pi &= -\frac{m_1 m_2 f}{R} + f m_1 R^{-3} \left[\frac{1}{2} (A - C) (1 - 3\gamma_3^2) + U \right] \\ U &= \int_{\Omega^*} \tilde{\rho} \left[(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - 3 (\mathbf{O}^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r}) (\mathbf{O}^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{u}) \right] dx, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где f — постоянная тяготения, $\tilde{\rho}$ — плотность вязкоупругой части, Ω^* — область, занимаемая мантией Земли, масса Луны $m_1 = 7,36 \times 10^{22}$ кг, масса Земли $m_2 = 5,98 \times 10^{24}$ кг, A, C — осевые моменты инерции Земли в недеформированном состоянии, \mathbf{u} — вектор упругого смещения частицы среды, занимавшей положение \mathbf{r} относительно $Cx_1x_2x_3$. Радиус-вектор \mathbf{R} , соединяющий центры масс Земли и Луны имеет вид $\mathbf{R} = R\mathbf{R}^0$, где $R = 384,4 \times 10^6$ м.

Следуя [20], вектор перемещения \mathbf{u} представим в виде ряда по собственным формам упругих колебаний Земли:

$$\mathbf{u} = \sum_{k,i=0}^{\infty} (q_{ki}(t) \mathbf{V}_{ki}(\mathbf{r}) + p_{ki}(t) \mathbf{W}_{ki}(\mathbf{r})), \quad (3.6)$$

где величины q_{ki}, p_{ki} — нормальные координаты, а векторы $\mathbf{V}_{ki}, \mathbf{W}_{ki}$ — собственные формы:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{km}(\rho, \varphi, z) &= (U_{km}(\rho, z) \sin k\varphi, V_{km}(\rho, z) \cos k\varphi, W_{km}(\rho, z) \sin k\varphi) \\ \mathbf{W}_{km}(\rho, \varphi, z) &= (U_{km}(\rho, z) \cos k\varphi, -V_{km}(\rho, z) \sin k\varphi, W_{km}(\rho, z) \cos k\varphi). \end{aligned}$$

Здесь через $U_{km}(\rho, z), V_{km}(\rho, z), W_{km}(\rho, z)$ обозначены коэффициенты в выражениях координат собственных форм. Тогда вариации центробежных моментов инерции выражаются через нормальные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{13} &= J_{31} = p_{1m} \int_{\Omega^*} \tilde{\rho} r^2 W_{1m} dr dz \\ J_{23} &= J_{32} = q_{1m} \int_{\Omega^*} \tilde{\rho} r^2 W_{1m} dr dz. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В (3.7) интегралы записаны в цилиндрической системе координат после интегрирования по угловой координате φ .

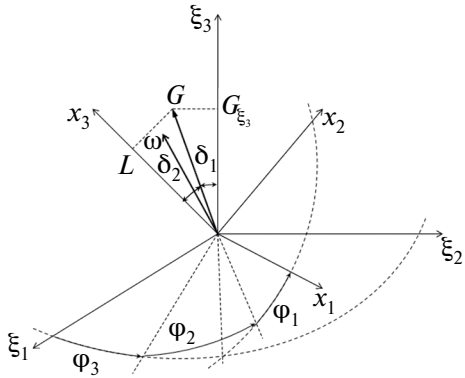


Рис. 3. Взаимная ориентация земной системы координат $Cx_1x_2x_3$ и системы координат Кенига $C\xi_1\xi_2\xi_3$ и переменные Андуйе.

Координаты p_{1m} , q_{1m} определим из уравнений деформаций, которые, согласно [19, 20], можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{Q} + \chi b \dot{\mathbf{Q}}) &= \mathbf{P}, \quad \mathbf{Q} = (p_{0m}, q_{1m}, p_{1m}, q_{2m}, p_{2m})^T \\ \mathbf{D} &= \text{diag}(v_{0m}^2, v_{1m}^2, v_{1m}^2, v_{2m}^2, v_{2m}^2) \\ \mathbf{P} &= (\mu R^{-3}(1 - \gamma_3^2)c_{0m11} - \mu R^{-3}(1 - \gamma_3^2)c_{0m33}, 3\mu R^{-3}\gamma_2\gamma_3(b_{1m32} + b_{1m23}), \\ &\quad 3\mu R^{-3}\gamma_1\gamma_3(b_{1m32} + b_{1m23}), 6\mu R^{-3}\gamma_1\gamma_2b_{2m12}, 3\mu R^{-3}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)b_{2m12})^T \\ c_{0mii} &= \int_{\Omega^*} W_{0mi} x_i dx, \quad b_{kmij} = \int_{\Omega^*} W_{kmi} x_j dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь $\mu = fm_1$ – гравитационный параметр Луны; v_{im}^2 – квадрат частоты собственных колебаний, которая соответствует формам $\mathbf{V}_{im}, \mathbf{W}_{im}$; постоянные коэффициенты c_{0m11} , c_{0m33} , b_{1m32} , b_{1m23} , b_{1m12} определяются фигурой Земли; χ – безразмерный диссипативный коэффициент $\chi \ll 1$; b – положительная константа, такая что χb – время релаксации.

Тогда уравнения для определения p_{1m} , q_{1m} будут иметь вид:

$$\begin{aligned} v_{1m}^2 q_{1m} + \chi b v_1^2 \dot{q}_{1m} &= 3\mu R^{-3}\gamma_2\gamma_3(b_{1m32} + b_{1m23}) \\ v_{1m}^2 p_{1m} + \chi b v_1^2 \dot{p}_{1m} &= 3\mu R^{-3}\gamma_1\gamma_3(b_{1m32} + b_{1m23}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Но поскольку:

$$\begin{aligned} \pi \int_{\Omega^*} \tilde{\rho} r^2 W_{1m} dr dz &= b_{1m32} = c_{1m31} \\ \frac{\pi}{2} \int_{\Omega^*} \tilde{\rho} r^2 (U_{2m} + V_{2m}) dr dz &= b_{2m12} = b_{2m21} = c_{2m11} = c_{2m22}, \end{aligned}$$

то центробежные моменты инерции (3.7) запишем в виде:

$$\begin{aligned} J_{13} &= J_{31} = \tilde{\rho} 2b_{1m32} p_{1m} \\ J_{23} &= J_{32} = \tilde{\rho} 2b_{1m32} q_{1m}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Выражения (3.10) с учетом (3.9) определяют вариации центробежных моментов инерции.

4. Колебания земного полюса с учетом прецессионного движения лунной орбиты. Для того чтобы учесть выражения (3.10) центробежных моментов инерции в модели движения полюса, определим их долгопериодическую структуру. Для этого найдем из (3.2) направляющие косинусы вектора \mathbf{R}^0 в проекциях на связанные оси. Они будут зависеть от угловых переменных φ_1 , φ_2 , φ_3 , δ_1 , δ_2 , h , i , ϑ :

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \Gamma_3^{-1}(\varphi_1) \Gamma_1^{-1}(\delta_2) \Gamma_3^{-1}(\varphi_2) \Gamma_1^{-1}(\delta_1) \Gamma_3^{-1}(\varphi_3) \Gamma_3(h) \Gamma_1(i) \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

После усреднения произведений направляющих косинусов $\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_2\gamma_3$ по быстрой переменной φ_2 и полумедленной переменной ϑ вариации центробежных моментов инерции δJ_{13} , δJ_{23} примут вид (ввиду малого влияния

вязкости на рассматриваемые колебания пренебрежем слагаемыми, содержащими коэффициент χ):

$$\begin{aligned}\delta J_{13} &= \left[a_{\Omega} \cos \Omega + a_{2\Omega} \left(\sin 2h \sin 2\varphi_3 + 2 \cos^2 h \cos^2 \varphi_3 \right) \right] \sin \delta_2 \sin \varphi_1 \\ \delta J_{23} &= \left[a_{\Omega} \cos \Omega + a_{2\Omega} \left(\sin 2h \sin 2\varphi_3 + 2 \cos^2 h \cos^2 \varphi_3 \right) \right] \sin \delta_2 \cos \varphi_1 \quad (4.2) \\ a_{\Omega} &= a_{\Omega}(\delta_1^0, i^0), \quad a_{2\Omega} = a_{2\Omega}(\delta_1^0, i^0), \quad \Omega = \varphi_3 - h.\end{aligned}$$

Здесь Ω — долгота восходящего узла лунной орбиты, отсчитываемая от направления на точку весеннего равноденствия [18]. Угловые переменные δ_1, i — можно положить постоянными ($i = i^0, \delta_1 = \delta_1^0$), тогда i^0 имеет смысл среднего значения угла наклона плоскости лунной орбиты к плоскости эклиптики, а δ_1^0 — среднего угла наклона оси вращения Земли, отсчитываемый от нормали к плоскости эклиптике. Кроме того, учтем, что $a_{2\Omega} \approx 0.03a_{\Omega}$ при постоянных значениях углов $\delta_1^0 = 23^\circ, i = 5.14^\circ$.

Тогда, записывая выражение (4.2) через координаты земного полюса, получим:

$$\begin{aligned}\delta J_{13} &\approx a_{\Omega}(\delta_1^0, i^0) y \cos \Omega \\ \delta J_{23} &\approx -a_{\Omega}(\delta_1^0, i^0) x \cos \Omega.\end{aligned} \quad (4.3)$$

Используя модель движения земного полюса, рассмотренную в работах [4–7], дифференциальные уравнения колебаний полюса с учетом (4.3) примут вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} - Ny &= j_{23}^0 - \sigma x - b_{\Omega} x \cos \Omega + \mu_x, \quad x_p(t_0) = x_0 \\ \dot{y} + Nx &= j_{13}^0 - \sigma y + b_{\Omega} y \cos \Omega + \mu_y, \quad y_p(t_0) = y_0\end{aligned} \quad (4.4)$$

где $N \cong 0.843$ цикл/год — чандлеровская частота; j_{13}^0, j_{23}^0 определяются центробежными моментами инерции J_{13}, J_{23} и им пропорциональны, а их вариации приводят к слагаемым вида (4.3), неизвестная амплитуда b_{Ω} найденных слагаемых в дальнейшем подлежит определению на основе анализа данных наблюдений, μ_x, μ_y — внешнее возмущение, приводящее к наблюдаемому движению полюса с годичной и чандлеровской частотами.

Решение (4.4) будет содержать основные гармоники движения земного полюса (чандлеровское и годичное колебания), модулированные гармоникой с частотой прецессии лунной орбиты. На рис. 4 приведено сравнение амплитудного спектра координаты y решения уравнений (4.4) методом Рунге—Кутты 4-го порядка (на втором и третьем графиках в логарифмической и линейной шкалах соответственно) с амплитудным спектром наблюдений координаты y (первый график). На графиках рис. 4 боковые пики чандлеровской составляющей имеют близкую амплитуду к наблюдаемым, а боковые пики годичной гармоники — в несколько раз меньшую (примерно в 2 раза). Данные амплитуды получены при $b_{\Omega} = 0.1N$ в модели (4.3), что соответствует около 30% от общей амплитуды наблюдаемого полюсного прилива. Рассмотренная модель носит качественный характер, из которой следует наличие малых вариаций центробежных моментов инерции Земли с периодом около 18 лет. Для установления связи этих колебаний с геофизическими процессами требуются дальнейшие исследования.

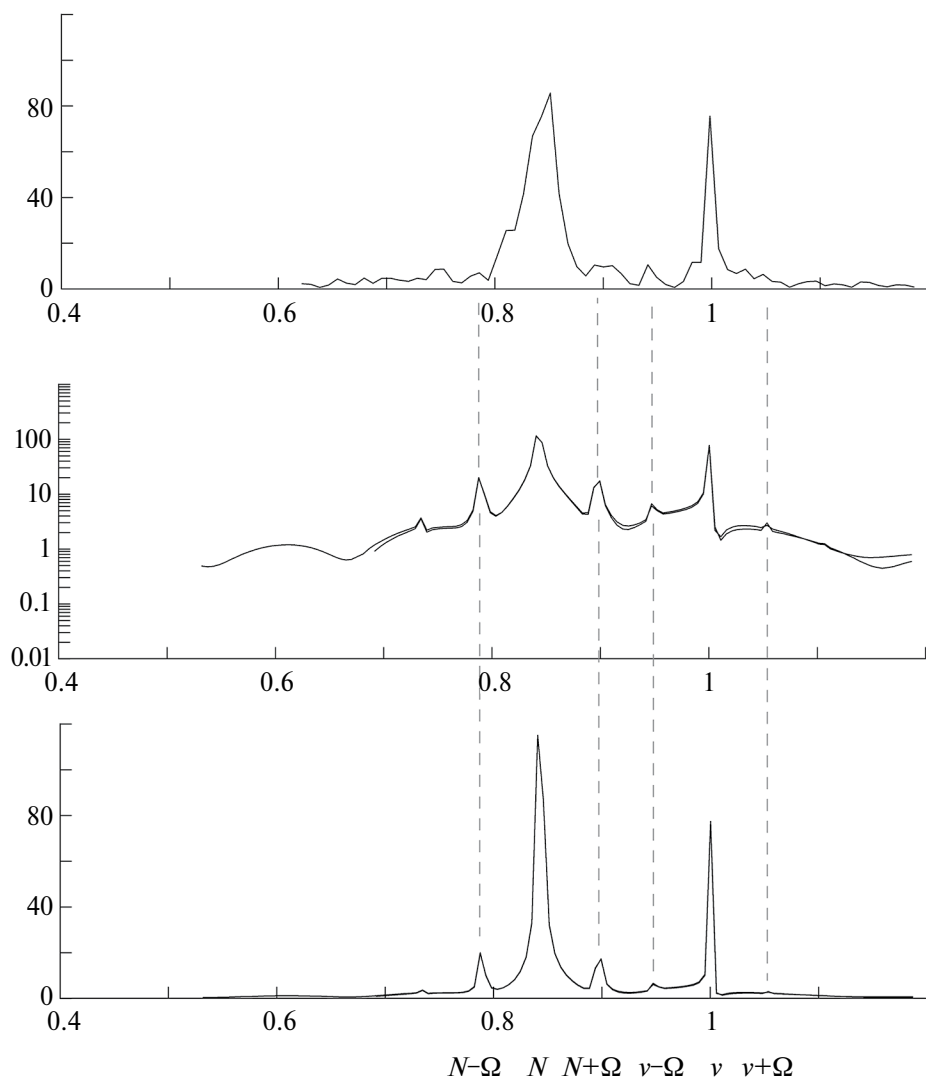


Рис. 4. Амплитудный спектр наблюдений координаты y (первый график) в сравнении с амплитудными спектрами координаты y решения уравнений (4.4) (на втором и третьем графиках в логарифмической и линейной шкалах, соответственно).

5. Заключение. Уточнение модели движения полюса связано, с одной стороны, с учетом различных возмущающих факторов, а с другой стороны с построением обобщающей динамической модели, которая позволяет на качественном уровне проанализировать тонкие эффекты в колебательном процессе земного полюса.

В данной работе для модели вязкоупругой Земли, находящейся в гравитационном поле Луны и Солнца, определены вариации центробежных моментов инерции. Эти вариации обладают комбинационной структурой, необходимой для возбуждения рассматриваемого 18-летнего колебательного

процесса земного полюса, связанного с долгопериодическим возмущением от Луны.

С помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений движения земного полюса показано, что найденная структура вариаций центробежных моментов инерции приводит к 18-летним вариациям в амплитуде не только чандлеровской составляющей движения полюса, но и годичной. Такое объяснение является более простым и позволяет объяснить наличие в уравнениях движения годичного возмущения, модулированного долгопериодической гармоникой с периодом 18 лет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. International earth rotation and reference systems service. Annual Reports. <http://www.iers.org>
2. Манк У., Макдональд Г. Вращение Земли. М.: Мир, 1964. 384 с.
3. Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Перепелкин В.В., Почукаев В.Н., Рожков С.Н., Семенов А.С. Анализ влияния различных возмущающих факторов на высокоточный прогноз орбит космических аппаратов // Космические исследования. 2016. Т. 54. № 2. С. 164–172. <https://doi.org/10.7868/S0023420615060023>
4. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Кумакиев С.А. Основные свойства и особенности движения Земли относительно центра масс // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 5. С. 547–550.
5. Кумакиев С.А. Гравитационно-приливная модель колебаний полюсов Земли // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 2. С. 48–53.
6. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Марков Ю.Г., Перепелкин В.В. Колебательно-вращательные процессы в движении Земли относительно центра масс: интерполяция и прогноз // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 6. С. 6–29.
7. Филиппова А.С. Динамический анализ колебательного процесса полюса Земли // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 6. С. 26–38.
8. Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Крылов С.С. Колебания полюса Земли с учетом флуктуационно-диссипативных возмущений // Доклады РАН. 2016. Т. 471. № 6. С. 665–670. <https://doi.org/10.7868/S0869565216360111>
9. Сидоренков Н.С. Природа амплитудной модуляции чандлеровского движения полюса // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове. 2013. № 220. С. 143–148.
10. Жаров В.Е. Сферическая астрономия. Фрязино: Век 2, 2006. 480 с.
11. Сидоренков Н.С. Соизмеримости между частотами земных процессов и частотами системы Земля–Луна–Солнце // Процессы в геосредах. 2015. Т. 3. № 3. С. 88–99.
12. Сидоренков Н.С. Геодинамические причины декадных изменений климата // Земля и Вселенная. 2016. № 3. С. 25–36.
13. Акуленко Л.Д., Перепелкин В.В. Движение земного полюса при нестационарных возмущениях // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 142–149. <https://doi.org/10.1134/S0572329919050039>
14. Перепелкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С. Долгопериодические вариации в колебательном процессе земного полюса, вызванные лунным возмущением // Астрономический журнал. 2019, Т. 96. № 3. С. 255–264. <https://doi.org/10.1134/S0004629919020075>
15. Перепелкин В.В., Рыхлова Л.В., Вэй Ян Сое. О синфазности вариаций параметров движения земного полюса и прецессии орбиты Луны // Астрономический журнал. 2022. Т. 99. № 1. С. 75–87. <https://doi.org/10.31857/S0004629922020086>
16. Крылов С.С., Перепелкин В.В., Вэй Ян Сое. Краткосрочный прогноз движения земного полюса с учетом лунных возмущений // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 6. С. 157–164. <https://doi.org/10.31857/S057232992006015X>

17. Вильке В.Г. Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986. 192 с.
18. Смарт У.М. Небесная механика М.: Мир, 1965. 502 с.
19. Марков Ю.Г., Миняев И.С. Пространственный вариант задачи “деформируемая планета–спутник” в поле притягивающего центра // Космические исследования. 1994. Т. 32. Вып. 6. С. 89–98.
20. Перепелкин В.В., Скоробогатых И.В., Мьо Зо Аунг. Динамический анализ установившегося колебательного процесса Земного полюса // Изв.РАН. МТТ. 2021. № 5. С.141–151. <https://doi.org/10.31857/S0572329921050081>

DYNAMIC ANALYSIS OF THE PERTURBED MOTION OF THE EARTH’S POLE

V.V. Perepelkin^a, *

^a*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

**e-mail: vadimkin1@yandex.ru*

Поступила в редакцию 08.05.2024 г.

После доработки 13.06.2024 г.

Принята к публикации 20.06.2024 г.

Abstract. Within the framework of the spatial variant of the “deformable Earth–Moon” problem in the solar gravitational field for the viscoelastic Earth model, tidal deformations caused by long-period lunar disturbances are determined. The dynamics of the Earth’s pole motion with Chandler and annual frequencies is analyzed taking into account the obtained expressions for the centrifugal moments of inertia of the Earth. Using numerical integration of the equations of pole motion, it is shown that the found structure of variations in the centrifugal moments of inertia leads to oscillations in the amplitudes of the Chandler and annual harmonics with an 18-year period of precession of the Moon’s orbit.

Key words: Earth’s pole, Chandler wobble, annual wobble, pole tide, geopotential, motion around center of mass

REFERENCES

1. International Earth Rotation and Reference Systems Service – IERS Annual Reports (<http://www.iers.org>).
2. Munk W.H., MacDonald G.J.F. The Rotation of the Earth. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1960; М.: Мир, 1964.
3. Markov Yu.G., Mikhailov M.V., Perepelkin V.V. et al. Analysis of the effect of various disturbing factors on high-precision forecasts of spacecraft orbits // Cosmic. Res. 2016. V. 54. № 2. P. 155–163 <https://doi.org/10.1134/S0010952515060015>
4. Akulenko L.D., Klimov D.M., Kumakshev S.A. The main properties and peculiarities of the Earth’s motion relative to the center of mass // Dokl. Phys. 2014. V. 59. № 10. P. 472–475. <https://doi.org/10.1134/S1028335814100073>

5. *Kumakshev S.A.* Gravitational-tidal model of oscillations of Earth's poles // *Mech. Solids*. 2018. V. 53. P. 159–163.
<https://doi.org/10.3103/S0025654418020061>
6. *Akulenko L.D., Klimov D.M., Markov Yu.G., Perepelkin V.V.* Oscillatory-rotational processes in the Earth motion about the center of mass: interpolation and forecast // *Mech. Solids*. V. 47. № 6. P. 601–621.
<https://doi.org/10.3103/S0025654412060015>
7. *Filippova A.S.* Dynamic analysis of the earth pole oscillation process // *Mech. Solids*. 2015. V. 50. P. 622–632.
<https://doi.org/10.3103/S0025654415060035>
8. *Markov Yu.G., Perepelkin V.V., Krylov S.S.* Terrestrial pole oscillations with allowance for fluctuation dissipation perturbations // *Dokl. Phys.* 2016. V. 61. P. 630–635.
<https://doi.org/10.1134/S1028335816120132>
9. *Sidorenkov N.S.* Priroda amplitudnoy modulyacii chandlerovskogo dviganiya poljusa // *Izvestiya GAO RAN*. 2013. V. 220. P. 143–148 (In Russian).
10. *Zharov V.E.* Spherical Astronomy. Fryazino, 2006 (in Russian).
11. *Sidorenkov N.S.* Soizmerimosti mejdu chastotami zemnyh processov I chastotami sistemy Zemlya-Luna-Solnce // *Processy v geosredah*. 2015. V. 3. № 3. P. 88–99 (In Russian).
12. *Sidorenkov N.S.* Geodinamicheskie prichiny dekadnyh izmenenij klimata // *Zemlya I Vselennaya*. 2016. № 3. P. 25–36 (In Russian).
13. *Akulenko L.D., Perepelkin A.A.* Earth pole motion due to nonstationary perturbations // *Mech. Solids*. 2019. V. 54. P. 1108–1114.
<https://doi.org/10.3103/S0025654419070112>
14. *Perepelkin V.V., Rykhlova L.V., Filippova A.S.* Long-period variations in oscillations of the Earth's Pole due to Lunar perturbations // *Astron. Rep.* 2019. V. 63. P. 238–247.
<https://doi.org/10.1134/S1063772919020070>
15. *Perepelkin V.V., Rykhlova L.V., Wai Yan Soe.* In-phase variations in the parameters of the Earth's Pole motion and the Lunar orbit precession // *Astron. Rep.* 2022. V. 66. P. 80–91.
<https://doi.org/10.1134/S1063772922020081>
16. *Krylov S.S., Perepelkin V.V.* Short-term forecast of the Earth's Pole motion, taking into account Lunar disturbances // *Mech. Solids*. 2020. V. 55. P. 892–897.
<https://doi.org/10.3103/S002565442006014X>
17. *Vilke V.G.* Analytical and qualitative methods in the mechanics of systems with an infinite number of degrees of freedom. M.: Mosk. Gos. Univ., 1986 (in Russian).
18. *Smart W.M.* Celestial mechanics. Longmans Green, 1961.
19. *Markov Yu.G., Minyaev I.S.* Prostranstvennyj variant zadachi “deformiruemaya planeta-sputnik” v pole prityagivayushego centra // *Cosmic. Res.* 1994. V. 32. № 6. P. 89–98 (In Russian).
20. *Perepelkin V.V., Skorobogatykh I.V., Myo Zaw Aung.* Dynamic analysis of the steady state oscillations of the Earth's Pole // *Mech. Solids*. 2021. V. 56. P. 727–736.
<https://doi.org/10.3103/S0025654421050162>

УДК 519.6: 531.19

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЯКОБИ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОГО ДВОЙНОГО МАЯТНИКА

© 2024 г. П. М. Шкапов^{а, *}, В. Д. Сулимов^а, А. В. Сулимов^{а, б}

^аМГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

^бФилиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Севастополе, Севастополь, Россия

*e-mail: spm@bmstu.ru

Поступила в редакцию 06.06.2024 г.

После доработки 06.07.2024 г.

Принята к публикации 09.07.2024 г.

Проводится анализ устойчивости по Якоби нелинейной динамической системы на основе теории Косамби–Картана–Черна. Вводится геометрическое описание эволюции системы во времени, что позволяет определить пять геометрических инвариантов. Собственные значения второго инварианта (тензора кривизны отклонения) дают оценку устойчивости системы по Якоби. Подход актуален в приложениях, где требуется идентификация областей устойчивости по Ляпунову и по Якоби одновременно. Для нелинейной системы — двойного маятника — исследуется зависимость устойчивости по Якоби от начальных условий. Определены в явном виде компоненты тензора кривизны отклонения, соответствующие рассматриваемым начальным условиям, и собственные значения указанного тензора. Установлена определяемая начальными условиями граница перехода детерминированной системы от регулярного поведения к хаотическому. Предложена формулировка обратной задачи на собственные значения тензора кривизны отклонения, связанная с восстановлением существенных параметров системы. При решении сформулированной обратной задачи используется оптимизационный подход. Приведены численные примеры восстановления параметров системы для случаев ее регулярного и хаотического поведения.

Ключевые слова: нелинейный двойной маятник, устойчивость по Якоби, теория Косамби–Картана–Черна, геометрический инвариант, конфигурационное пространство, восстановление параметров, глобальная оптимизация

DOI: 10.31857/S1026351924060062, EDN: TZCRHL

1. Введение. В многочисленных приложениях при исследовании устойчивости динамических систем применяют метод Ляпунова [1]. Одним из альтернативных подходов является анализ устойчивости систем по Якоби [2, 3]. Вводится геометрическое описание эволюции системы во времени [4, 5]. Последующий анализ основан на применении теории Косамби—Картана—Черна (теории ККЧ) [6, 7]. При этом реализуется дифференциально-геометрический подход к вариационным дифференциальным уравнениям, описывающим отклонение целой траектории системы от ближайших траекторий. Геометрическое описание, основанное на теории ККЧ, позволяет определить пять геометрических инвариантов системы. Анализ устойчивости динамической системы по Якоби, в соответствии с теорией ККЧ, предполагает определение тензора кривизны отклонения (второго ККЧ-инварианта) системы и его собственных значений. Собственные значения тензора кривизны отклонения дают оценку устойчивости системы по Якоби. Анализ устойчивости системы в данном контексте связан с изучением ее робастности как меры нечувствительности и адаптации к изменению параметров собственно системы и окружающей среды [8, 9]. Применение теории ККЧ актуально в практических приложениях, где для системы требуется идентифицировать области, в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби.

Значительный интерес представляют детерминированные динамические системы, способные демонстрировать хаотическое поведение [10]. Впервые детерминированный хаос был обнаружен в модели Лоренца [11]. Другим содержательным примером хаотической детерминированной динамической системы является нелинейный двойной маятник [12, 13]. Так, в работе [12] установлено, что результаты исследования устойчивости двойного маятника с использованием экспонент Ляпунова не являются достаточным основанием для однозначного определения условий перехода системы к хаотическому поведению. Влияние начальных условий на квазипериодические колебания двойного маятника изучено в работе [14]. Позднее для детерминированных систем с хаотическим поведением был предложен подход к исследованию устойчивости по Якоби, основанный на теории Косамби—Картана—Черна [15, 16]. В целом проблема определения условий возникновения хаоса в нелинейных детерминированных динамических системах остается актуальной.

Вводится предположение о том, что собственные значения тензора кривизны отклонения динамической системы, обладающей заданной структурой, не только дают оценку устойчивости системы по Якоби, но также содержат полезную информацию о существенных параметрах системы. Возможна постановка задачи о восстановлении основных физических, геометрических и других характеристик системы по заданным приближенно собственным значениям тензора кривизны отклонения. Подобные задачи представляют класс обратных задач и обладают рядом существенных особенностей. Так, к ним относятся проблема корректности (по Адамару) постановки обратной задачи, неполнота и ограниченная точность задания входной информации, возможная недифференцируемость критериальных функций, наличие шумов, другие особенности. Эффективным является подход, основанный на применении математической теории обратных задач [17–19]. Задачи этого класса, как правило, являются некорректно поставленными, что требует применения методов регуляризации [20]. Существуют различные подходы к численному решению регуляризованных обратных задач, при этом одним из наиболее

эффективных является оптимизационный. Следует отметить, что в обратных задачах неполнота входных данных имеет следствием многоэкстремальность критериальных функций, что обуславливает необходимость применения методов глобальной оптимизации [21–23]. Детерминированные методы позволяют находить глобальные решения задач оптимизации при сравнительно небольшом числе независимых переменных. Применение стохастических методов снимает проблему размерности задач оптимизации, однако при этом вычислительная стоимость поиска глобальных решений критически возрастает. Стремлением сократить вычислительные затраты при решении задач глобальной оптимизации мотивированы исследования и разработка гибридных методов глобальной оптимизации, объединяющих стохастические процедуры сканирования пространства переменных и локальный поиск с использованием детерминированных алгоритмов. Во многих приложениях возникают задачи оптимизации, где критериальные функции не являются всюду дифференцируемыми; при этом необходимо применение специальных численных методов, включая процедуры сглаживания критериальных функций [24, 25].

Рассматривается система с двумя степенями свободы – нелинейный плоский двойной маятник. Целью является исследование влияния начальных условий на устойчивость системы по Якоби и ее эволюцию во времени: регулярный или хаотический вид движения. Предложена постановка обратной задачи восстановления параметров системы по заданным собственным значениям тензора кривизны отклонения для различных начальных условий. Реализуемый подход основан на применении теории ККЧ, теории обратных задач, методов глобальной оптимизации.

2. Геометрические инварианты и устойчивость системы по Якоби. Краткий обзор теории ККЧ дан в работах [4, 6]. Уравнения движения n -мерной динамической системы (нелинейные в общем случае) могут быть получены с использованием уравнений Эйлера–Лагранжа и представлены в виде:

$$\ddot{x}^i + 2G^i(x^j, \dot{x}^j, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

где локальная система координат (x^i, \dot{x}^i, t) , $i = 1, 2, \dots, n$, введена на открытом связном подмножестве Ω евклидова $(2n + 1)$ -мерного пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$; $x^i = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $\dot{x}^i = dx^i / dt$, $\ddot{x}^i = d^2x^i / dt^2$; t – время; каждая функция $G^i(x^j, \dot{x}^j, t)$ имеет класс гладкости C^∞ в окрестности некоторых начальных условий $((x)_0, (\dot{x})_0, t_0)$ на Ω . Рассматриваются задачи определения пяти геометрических инвариантов системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (2.1) при преобразованиях координат: $\tilde{t} = t$, $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Если преобразования координат являются несингулярными, то ККЧ-ковариантная производная векторного поля $\xi^i(x)$ на Ω определяется в виде [4, 6]:

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + N_j^i \xi^j \quad (2.2)$$

(используется соглашение Эйнштейна о суммировании); при этом коэффициенты нелинейной связности определены в виде:

$$N_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial \dot{x}^j}. \quad (2.3)$$

В случае $\dot{x}^i = \xi^i$ имеет место $N_j^i \dot{x}^j - 2G^i = -\varepsilon^i$. Контравариантное векторное поле ε^i на Ω называется первым ККЧ-инвариантом.

Если рассматривается случай, когда возмущенные траектории $\tilde{x}^i(t) = x^i(t) + \eta \xi^i(t)$ (здесь $|\eta| \ll 1$) близки к траекториям системы уравнений (2.1), то при $\eta \rightarrow 0$ указанная система уравнений преобразуется к виду [4]

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + 2N_j^i \frac{d\xi^j}{dt} + 2Z_j^i \xi^j = 0, \quad (2.4)$$

где Z_j^i – кривизна нуль-связности:

$$Z_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial x^j}. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4) с использованием (2.2) может быть представлено в ковариантной форме [4]:

$$\frac{D^2 \xi^i}{dt^2} = P_j^i \xi^j.$$

Здесь P_j^i – тензор кривизны отклонения (второй ККЧ-инвариант):

$$P_j^i = \frac{\partial N_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k - 2G^k G_{jk}^i + N_k^i N_j^k - 2Z_j^i, \quad (2.6)$$

коэффициенты связности Бервальда определены как $G_{jk}^i = \frac{\partial^2 G^i}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}$.

В рамках теории ККЧ третий, четвертый и пятый геометрические инварианты системы (2.1) определяются согласно [4, 6]:

$$P_{jk}^i = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial P_j^i}{\partial x^k} - \frac{\partial P_k^i}{\partial x^j} \right), \quad P_{jkl}^i = \frac{\partial P_{jk}^i}{\partial \dot{x}^l}, \quad D_{jkl}^i = \frac{\partial G_{jk}^i}{\partial \dot{x}^l}.$$

Третий инвариант P_{jk}^i может быть интерпретирован как тензор кручения. Четвертый P_{jkl}^i и пятый D_{jkl}^i инварианты называются тензором кривизны Римана–Кристоффеля и тензором Дугласа соответственно. В общем случае указанные инварианты могут быть использованы для описания геометрических свойств систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

При анализе устойчивости по Якоби динамических систем с двумя степенями свободы тензор кривизны отклонения имеет структуру

$$P_j^i = \begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 \\ P_1^2 & P_2^2 \end{pmatrix},$$

следовательно, собственные значения тензора P_j^i могут быть определены

в виде [15, 16]: $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$, где $\tau = P_1^1 + P_2^2$; $\Delta = P_1^1 P_2^2 - P_2^1 P_1^2$.

Определение [4]. Траектории уравнений (2.1) устойчивы по Якоби, если действительные части собственных значений тензора кривизны отклонения P_j^i

всюду строго отрицательны, и неустойчивы по Якоби в противном случае.

3. Нелинейный двойной маятник.

Рассматривается нелинейная динамическая система — плоский двойной маятник, состоящий из двух математических маятников, сочлененных цилиндрическим шарниром (рис. 1).

Первый (верхний) маятник, вращающийся вокруг горизонтальной оси неподвижного цилиндрического шарнира O , представляет собой безмассовый жесткий стержень длиной l_1 , несущий на свободном конце A материальную точку массой m_1 . Вторым (нижним) маятником, вращающимся вокруг оси подвижного шарнира A , связывающего оба маятника, состоит из безмассового жесткого стержня длиной l_2 с материальной точкой массой m_2 на свободном конце B стержня. Для описания движения рассматриваемой системы с двумя степенями свободы введены две обобщенные координаты: θ_1 — угол отклонения первого стержня от вертикальной оси, проходящей через неподвижный шарнир O ; θ_2 — угол отклонения второго стержня от вертикальной оси, проходящей через подвижный шарнир A , сочленяющий маятники.

Кинетическая энергия T и потенциальная энергия Π системы определяются соответственно в виде:

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)]$$

$$\Pi = (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2 gl_2 \cos \theta_2,$$

где g — ускорение свободного падения.

Дифференциальные уравнения движения системы могут быть получены с использованием уравнений Эйлера–Лагранжа [4, 6]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad (i = 1, 2), \quad (3.1)$$

где L — лагранжиан системы, $L = T - \Pi$.

Далее рассматривается частный случай системы: предполагается, что $m_1 = m_2$ и $l_1 = l_2 = l$. Тогда дифференциальные уравнения движения нелинейного двойного маятника, полученные с использованием (3.1), имеют вид:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{\psi} [\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - 2b \sin \theta_1 + b \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_2], \quad (3.2)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{1}{\psi} [2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) + 2b \sin \theta_2 - 2b \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_1], \quad (3.3)$$

где $b = g/l$ и $\psi = 2 - \cos^2(\theta_2 - \theta_1)$.

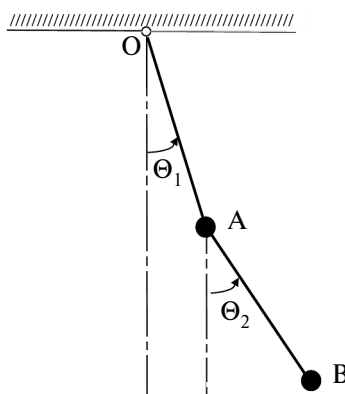


Рис. 1. Нелинейный двойной маятник.

В соответствии с (2.1) функции G^i , $i = 1, 2$, для уравнений (3.2), (3.3) представлены так:

$$G^1 = -\frac{1}{2\psi}(\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 + \sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 - \\ - 2b\sin\theta_1 + b\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin\theta_2)$$

$$G^2 = \frac{1}{2\psi}(2\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 + \cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 + \\ + 2b\sin\theta_2 - 2b\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin\theta_1).$$

Тогда, согласно (2.3) и (2.5), могут быть определены коэффициенты нелинейной связности:

$$N_1^1 = -\frac{1}{\psi}\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1; \quad N_2^1 = -\frac{1}{\psi}\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2$$

$$N_1^2 = 2\frac{1}{\psi}\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1; \quad N_2^2 = \frac{1}{\psi}\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2,$$

а также коэффициенты кривизны нуль-связности:

$$Z_1^1 = -\frac{1}{2\psi^2}(2AB + \psi(C - 2b\cos\theta_1))$$

$$Z_2^1 = \frac{1}{2\psi^2}(2AB + \psi(C - b\cos(\theta_2 - \theta_1)\cos\theta_2))$$

$$Z_1^2 = \frac{1}{2\psi^2}(2AD + \psi(E - 2b\cos(\theta_2 - \theta_1)\cos\theta_1))$$

$$Z_2^2 = -\frac{1}{2\psi^2}(2AD + \psi(E - 2b\cos\theta_2)),$$

при этом использованы обозначения:

$$A = \cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$B = \cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 + \sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 - \\ - 2b\sin\theta_1 + b\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin\theta_2$$

$$C = -\cos^2(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 + \sin^2(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 - \\ - \cos(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 + b\sin(\theta_2 - \theta_1)\sin\theta_2$$

$$D = 2\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 + \cos(\theta_2 - \theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 + \\ + 2b\sin\theta_2 - 2b\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin\theta_1$$

$$E = -2\cos(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1^2 - \cos^2(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 + \\ + \sin^2(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2^2 - 2b\sin(\theta_2 - \theta_1)\sin\theta_1.$$

Коэффициенты связности Бервальда здесь имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{11}^1 &= -\frac{1}{\Psi} \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ G_{12}^1 &= G_{21}^1 = 0; \quad G_{22}^1 = -\frac{1}{\Psi} \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ G_{11}^2 &= \frac{1}{\Psi} 2 \sin(\theta_2 - \theta_1); \quad G_{12}^2 = G_{21}^2 = 0 \\ G_{22}^2 &= \frac{1}{\Psi} \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned}$$

Итак, для рассматриваемой системы определен в аналитической форме тензор кривизны отклонения (2.6).

Далее рассматриваются дифференциальные уравнения (3.2), (3.3) при следующих начальных условиях: $t = 0$, $\theta_1(0) = \theta_2(0)$, $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$. Применение к исследуемой системе подхода на основе теории ККЧ позволяет определить тензор кривизны отклонения в виде:

$$P_j^i = \begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 \\ P_1^2 & P_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b \cos \theta_1 & b \cos \theta_2 \\ 2b \cos \theta_1 & -2b \cos \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\tau = P_1^1 + P_2^2 = -2b(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

$$\Delta = P_1^1 P_2^2 - P_2^1 P_1^2 = 4b^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - 2b^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 = 2b^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2.$$

Тогда

$$\lambda_{1,2} = -b(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \pm b \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2}.$$

С учетом $\theta_1(0) = \theta_2(0)$ имеет место $\lambda_{1,2} = -b \cos \theta_1(2 \pm \sqrt{2})$.

4. Анализ устойчивости системы по Якоби в зависимости от начальных условий. Динамика нелинейного двойного маятника рассматривается для различных начальных значений обобщенных координат: при $t = 0$ выполнено условие $\theta_1(0) = \theta_2(0)$ и движение начинается из состояния покоя. Далее в процессе вычислений принимается: $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ и $l = 1 \text{ м}$.

Анализ устойчивости по Якоби нелинейного двойного маятника проводится с использованием результатов вычисления собственных значений тензора кривизны отклонения. На рис. 2 показано изменение собственных значений λ_i и λ_2 тензора P_j^i , соответствующее условиям $0 \leq \theta_1(0) = \theta_2(0) \leq 180^\circ$.

Необходимо отметить, что в начальный момент времени $t = 0$ имеет место $\lambda_i \geq 0$ и $\lambda_2 \geq 0$, если $90^\circ \leq \theta_1(0) \leq 180^\circ$. Следовательно, согласно приведенному выше определению, при указанных начальных условиях траектории системы неустойчивы по Якоби. Существенно, что если $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 90^\circ$, то $\lambda_i = \lambda_2 = 0$: случай кратного собственного значения тензора P_j^i .

После начала движения системы (при $t > 0$) изменяются значения обобщенных координат и обобщенных скоростей, следовательно, изменяются компоненты тензора P_j^i и его собственные значения. Вычисление

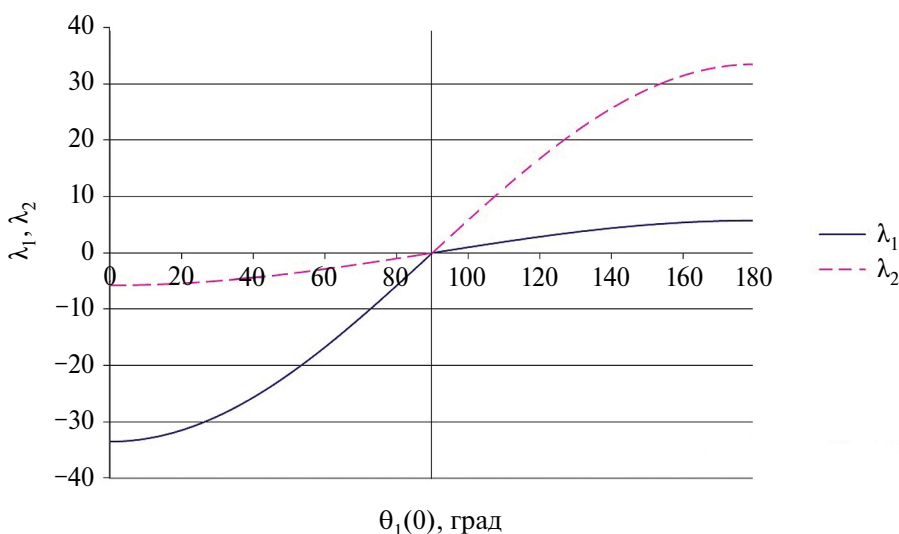


Рис. 2. Изменение собственных значений λ_i и λ_2 тензора P_j^i при $0 \leq \theta_1(0) \leq 180^\circ$. На графике $\theta_1(0)$ в град.

указанных собственных значений, необходимое для анализа устойчивости системы по Якоби, предполагает интегрирование дифференциальных уравнений движения (3.2), (3.3). Если в начальный момент времени (см. рис. 2) при $0 \leq \theta_1(0) < 90^\circ$ собственные значения λ_i , λ_2 тензора P_j^i отрицательны, то в последующем возможно $\lambda_i \geq 0$ и (или) $\lambda_2 \geq 0$ (траектории системы неустойчивы по Якоби).

В работе [15] эволюция во времени системы — нелинейного двойного маятника — классифицирована следующими двумя типами. В случае, когда траектории заключены внутри некоторой достаточно узкой области конфигурационного пространства, система является устойчивой по Якоби и ее движение носит регулярный характер. Если траектории не ограничены некоторой областью конфигурационного пространства, то система неустойчива по Якоби, при этом ее движение является хаотическим (детерминированный хаос). Далее анализ устойчивости системы по Якоби с использованием данных, представленных на рис. 2, дополнен исследованием траекторий системы в конфигурационном пространстве на основе интегрирования дифференциальных уравнений (3.2), (3.3) при различных начальных значениях обобщенных координат $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \text{var}$ (начальные значения обобщенных скоростей принимаются равными нулю). Рассматриваются следующие три случая.

Случай 1: $\theta_1(0) = 45^\circ$. В конфигурационном пространстве траектории системы локализованы в ограниченной области (рис. 3). При этом система устойчива по Якоби, и ее движение носит регулярный характер.

Случай 2: $\theta_1(0) = 79^\circ$. В конфигурационном пространстве траектории системы, как и в случае 1, локализованы в ограниченной области; при этом область приобретает S-образную форму и становится расслоенной (рис. 4). Система устойчива по Якоби, а ее поведение по-прежнему носит регулярный характер.

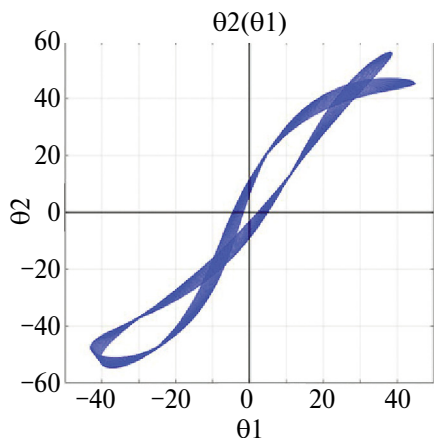


Рис. 3. Траектории системы в конфигурационном пространстве при $\theta_1(0) = 45^\circ$. По осям θ_1, θ_2 в град.

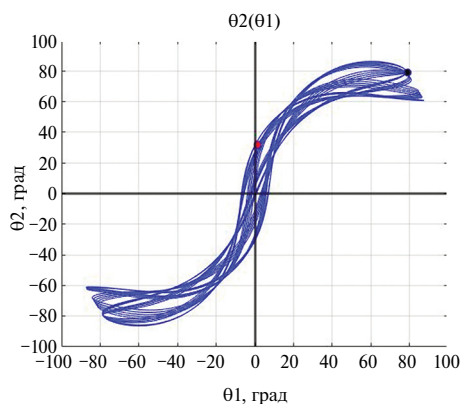


Рис. 4. Траектории системы в конфигурационном пространстве при $\theta_1(0) = 79^\circ$. По осям θ_1, θ_2 в град.

Случай 3: $\theta_1(0) = 80^\circ$. В рассматриваемом случае система неустойчива по Якоби, а ее движение является хаотическим (детерминированный хаос), что проявляется в (неограниченном) нарастании текущих значений обобщенных координат, а также в разрушении области локализации интегральной кривой в конфигурационном пространстве (рис. 5). На рисунке выделены положения изображающей точки для моментов времени начала (внизу) и окончания (вверху) интегрирования.

Сравнение представленных выше данных (рис. 3–5) позволяет отметить существенное изменение формы области локализации интегральных кривых при изменении начальных значений обобщенных координат.

Более точное исследование на основе интегрирования уравнений (3.2), (3.3) позволило установить, что граница перехода системы от области устойчивости по Якоби (регулярное движение) к области неустойчивости по Якоби (хаотическое движение) определена условием $79,14^\circ < \theta_1(0) < 79,15^\circ$.

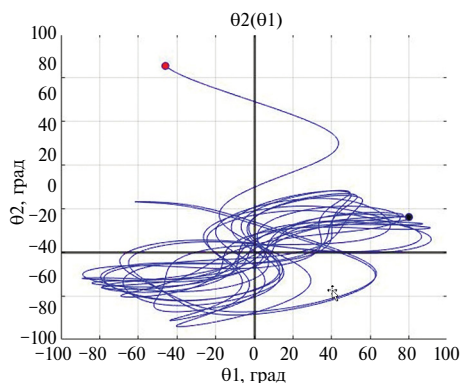


Рис. 5. Траектории системы в конфигурационном пространстве при $\theta_1(0) = 80^\circ$. По осям θ_1, θ_2 в град.

5. Обратная задача на собственные значения тензора P_j^i . Следует отметить, что обратные задачи на собственные значения тензоров рассматривались, например, в работе [17]. Существенной особенностью при этом является возможное наличие кратных собственных значений тензоров [18]. Кроме того, вследствие неполноты входных данных, представленных только собственными значениями тензора, критериальная функция обратной задачи в общем случае является многоэкстремальной [19, 20].

Рассматривается в общей постановке обратная задача восстановления параметров динамической системы, которая в рамках выбранной математической модели описывается уравнением

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

где X, Y – гильбертовы пространства; A – компактный линейный оператор, действующий из X в Y . Правая часть возмущенного уравнения представляет приближенные входные данные y^δ . Предполагается, что погрешность задания входной информации δ известна и справедливо неравенство $\|y^\delta - y\| \leq \delta$. Требуется определить устойчивые приближенные решения по заданной приближенно информации y^δ . Существенно, что во многих приложениях обратные задачи являются некорректно поставленными. Далее реализуется подход, основанный на методе регуляризации [19, 20].

Приближенное решение рассматриваемой обратной задачи восстановления параметров системы связано с поиском минимума функционала Тихонова:

$$x_\alpha^\delta = \arg \min_{x \in X} J_\alpha(x), \quad \alpha > 0,$$

здесь x_α^δ – регуляризованное решение уравнения $Ax = y^\delta$ с параметром регуляризации α ; при этом минимизируемый функционал определен в виде:

$$J_\alpha(x) = \|Ax - y^\delta\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2,$$

где $\|Ax - y^\delta\|_Y^2$ – функционал невязки (представлен квадратом нормы в пространстве Y); $\alpha \|x\|_X^2$ – стабилизирующий функционал.

Решение регуляризованной обратной задачи восстановления параметров системы получено с использованием оптимизационного подхода [21, 22]. Отмеченные выше особенности обратной задачи обуславливают необходимость применения методов глобальной недифференцируемой оптимизации [23]. Актуальным направлением является разработка и применение гибридных алгоритмов, объединяющих стохастические методы сканирования пространства переменных и детерминированные процедуры локального поиска [24, 25]. В процессе вычислений применен гибридный алгоритм QOM-PCALMSI, интегрирующий стохастический алгоритм столкновения частиц (с построением квазиопозиций) и вариант метода линеаризации с построением сглаживающих аппроксимаций [26].

6. Численные примеры. Предполагается, что по результатам анализа экспериментальных данных для нелинейного двойного маятника установлены приближенные собственные значения тензора кривизны отклонения, используемые в качестве входных данных для решения обратной задачи на собственные значения тензора кривизны отклонения [24, 25]. Приведенная косвенная информация получена моделированием системы при фиксированных значениях ее параметров. Относительная погрешность входных данных не превышает 1,0%. Свободными переменными являются относительные величины x_1, x_2 , соответствующие искомым параметрам $l, \theta_1(0)$, численные значения которых удовлетворяют заданным ограничениям: $0,25 \leq l \leq 1,25$ м; $0 \leq \theta_1(0) \leq 180^\circ$. Требуется восстановить значения параметров $l, \theta_1(0)$ по заданным приближенно собственным значениям λ_1^* и λ_2^* тензора P_j^i .

Пример 1. Предполагается, что для нелинейного двойного маятника установлены следующие приближенные собственные значения тензора кривизны отклонения: $\lambda_1^* \approx -23.7071$; $\lambda_2^* \approx -4.0594$. Приведенная косвенная информация, полученная моделированием системы при стандартных значениях параметров ($g = 9.81 \text{ м/с}^2$ и $l = 1 \text{ м}$) и начальных значениях обобщенных координат $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 45^\circ$, представляет входные данные для решения обратной задачи. Критериальная функция обратной задачи определена в виде:

$$F(x) = \sum_{i=1}^2 \gamma_i f_i^2(x) + \alpha \|x\|_2^2,$$

где $\gamma_i, f_i(x)$ – весовой коэффициент и частный критерий, соответствующие i -му собственному значению λ_i ; $f_i(x) = (\lambda_i^* - \lambda_i(x))$, $i = 1, 2$; α – параметр регуляризации; $x \in \mathbb{R}^2$.

При решении используется гибридный алгоритм QOM-PCALMSI. Система устойчива по Якоби (см. рис. 3). По завершении девяти итераций получено: $x_1^9 \approx 76.269\%$, $x_2^9 \approx 44.798\%$. Восстановленные значения параметров системы соответственно равны: $l \approx 1.013 \text{ м}$; $\theta_1(0) \approx 44.8^\circ$. Наибольшая относительная погрешность решения (определяется восстановленным значением параметра l) здесь не превышает 1,3%. Итак, восстановлены параметры нелинейного двойного маятника (длины стержней верхнего и нижнего маятников) и начальное значение обобщенной координаты $\theta_1(0)$.

Пример 2. Предполагается, что для нелинейного двойного маятника установлены следующие приближенные собственные значения тензора кривизны отклонения: $\lambda_1^* \approx -5.874$; $\lambda_2^* \approx -0.988$. Приведенная косвенная информация, полученная моделированием системы при стандартных значениях параметров ($g = 9.81 \text{ м/с}^2$ и $l = 1 \text{ м}$) и начальных значениях обобщенных координат $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 80^\circ$.

При решении используется гибридный алгоритм QOM-PCALMSI. Система неустойчива по Якоби (см. рис. 5). По завершении двенадцати итераций получено: $x_1^{12} \approx 76.876\%$, $x_2^9 \approx 79.65\%$. Восстановленные значения параметров системы соответственно равны: $l \approx 1.019 \text{ м}$; $\theta_1(0) \approx 79.7^\circ$. Наибольшая относительная погрешность решения (определяется восстановленным значением параметра l) здесь не превышает 1,9%.

7. Заключение. Исследована устойчивость по Якоби динамической системы – нелинейного плоского двойного маятника. На основе теории Косамби–Картана–Черна для системы определен тензор кривизны отклонения и его собственные значения. Для частного случая системы, составленной из двух одинаковых математических маятников, представлены дифференциальные уравнения движения и установлена зависимость указанных собственных значений от начальных условий. Определена оценка снизу для области неустойчивости системы по Якоби. Уточненное значение указанной оценки и, следовательно, определение условий перехода системы от регулярного поведения к хаотическому получено с использованием численного интегрирования дифференциальных уравнений движения и изучением траекторий системы в конфигурационном пространстве. Приведенные примеры показывают эффективность реализованного подхода для анализа устойчивости системы по Якоби в зависимости от начальных условий. Сформулирована обратная задача восстановления параметров системы по заданной приближенно

косвенной информации, представленной собственными значениями тензора кривизны отклонения. Приведены примеры численного решения обратной задачи для случаев устойчивой и неустойчивой по Якоби системы. Точность восстановления параметров системы (геометрического параметра и начальных условий для обобщенных координат) согласована с точностью задания входной информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hafstein S.F., Valfells A.* Efficient computation of Lyapunov functions for non-linear systems by integrating numerical solutions // *Nonlinear Dyn.* 2019. V. 97. № 3. P. 1895–1910.
<https://doi.org/10.1007/s11071-018-4729-5>
2. *Abolghasem H.* Liapunov stability versus Jacobi stability // *J. Dyn. Syst. Geom. Theor.* 2012. V. 10. № 1. P. 13–32.
<https://doi.org/10.1080/1726037X.2012.10698604>
3. *Blaga C., Blaga P., Harko T.* Jacobi and Lyapunov stability analysis of circular geodesics around a spherically symmetric dilation black holl // *Symmetry.* 2023. V. 15. № 2. 329. P. 1–23.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.07678>
4. *Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V.* Jacobi stability analysis of dynamical systems – applications in gravitation and cosmology // *Adv. Theor. Math Phys.* 2012. V. 16. № 4. P. 1145–1196.
5. *Punzi R., Wohlfarth M.N.R.* Geometry and stability of dynamical systems // *Physical Review E.* 2009. V. 79. № 4. P. 1–11.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.046606>
6. *Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V.* Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems // *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 2016. V. 13. № 2. P. 1–24.
<https://doi.org/10.1142/S0219887816500146>
7. *Munteanu F., Grin A., Musafirov E., et al.* About the Jacobi and stability of a generalized Hopf–Langford system through the Kosambi–Cartan–Chern theory // *Symmetry.* 2023. V. 15. № 2. 598. P. 1–13.
<https://doi.org/10.3390/sym15030598>
8. *Yamasaki K., Yajima T.* Kosambi–Karatan–Chern analysis of the nonequilibrium singular point in one-dimensional elementary catastrophe // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 2022. V. 32. № 4. P. 1–17.
<https://doi.org/10.1142/S0218127422500535>
9. *Zhang X.* When Shimizu–Morioka model meets Jacobi stability analysis: detecting chaos // *Int. J. Geom. Methods Mod. Physics.* 2023. V. 20. № 2. 2350023. P. 1–14.
<https://doi.org/10.1142/S0219887823500330>
10. *Cattani M., Caldas I.L., de Souza S.L., Iarosz K.C.* Deterministic chaos theory: basic concepts // *Rev. Bras. Ensino Fis.* 2017. V. 39. № 1. e1309. P. 1–13.
<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0185>
11. *Lorenz E.I.* Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. V. 20. № 2. P. 130–141.
12. *Stachowiak T., Okada T.* A numerical analysis of chaos in the double pendulum // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2006. V. 29. № 2. P. 417–422.
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.08.032>
13. *D'Alessio S.* An analytical, numerical and experimental study of the double pendulum // *Eur. J. Phys.* 2023. V. 44. 015002. P. 1–20.
<https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac986b>
14. *Yao Y.* Numerical study on the influence of initial conditions on quasi-periodic oscillation of double pendulum system // *J. Phys. Conf. Ser.* 2020. V. 1437. 012093. P. 1–8.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1437/1/012093>

15. *Oiwa S., Yajima T.* Jacobi stability analysis and chaotic behavior of nonlinear double pendulum // *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 2017. V. 14. № 12. 1750176. P. 1–19.
<https://doi.org/10.1142/S0219887817501766>
16. *Wang F., Liu T., Kuznetsov N.V., Wei Z.* Jacobi stability analysis and the onset of chaos in a two-degree-of-freedom mechanical system // *Int. J. Bifurcation Chaos*. 2021. V. 31. № 5. 2150075. P. 1–15.
<https://doi.org/10.1142/S0218127421500759>
17. *Ye K., Hu S.* Inverse eigenvalue problem for tensors // *Communications in Mathematical Sciences*. 2017. V. 15. № 6. P. 1627–1649.
<https://dx.doi.org/10.4310/CMS.2017.v15.n6.a7>
18. *Hu S., Ye K.* Multiplicities of eigenvalues of tensors // *Communications in Mathematical Sciences*. 2016. V. 14. № 4. P. 1049–1071.
<http://dx.doi.org/10.4310/CMS.2016.v14.n4.a9>
19. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи: монография. М.: Курс, 2017. 400 с.
20. *Benning M., Burger M.* Modern regularization methods for inverse problems // *Acta Numerica*. 2018. V. 27. P. 1–111.
<https://doi.org/10.1017/S0962492918000016>
21. *Xia Y., Wang L., Yang M.* A fast algorithm for globally solving Tikhonov regularized total least squares problem // *J. Glob. Optim.* 2019. V. 73. № 2. P. 311–330.
<https://doi.org/10.1007/s10898-018-0719-x>
22. *Li H., Schwab J., Antholzer S., Haltmeier M.* NETT: solving inverse problems with deep neural networks // *Inverse Probl.* 2020. V. 36. № 6. 065005. P. 1–23.
<https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab6d57>
23. *Torres R.H., Campos Velho H.F., da Luz E.F.P.* Enhancement of the Multi-Particle Collision Algorithm by mechanisms derived from the opposition-based optimization // *Selecciones Matemáticas*. 2019. V. 6. № 2. P. 156–177.
<https://doi.org/10.17268/sel.mat.2019.02.03>
24. *Sulimov V.D., Shkapov P.M., Sulimov A.V.* Jacobi stability and updating parameters of dynamical systems using hybrid algorithms // *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 2018. V. 468. 012040. P. 1–11.
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012040>
25. *Шкапов П.М., Сулимов А.В., Сулимов В.Д.* Вычислительная диагностика неустойчивых по Якоби динамических систем с использованием гибридных алгоритмов глобальной оптимизации // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2021. № 4 (97). С. 40–56.
<https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-40-56>
26. *Сулимов В.Д., Сулимов А.В., Шкапов П.М.* Программа для ЭВМ, реализующая гибридный алгоритм глобальной недифференцируемой оптимизации QOM-PCALMSI // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022664841. Заявка № 2022663517. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 5 августа 2022.

JACOBI STABILITY AND RESTORATION OF PARAMETERS OF THE NONLINEAR DOUBLE PENDULUM

P. M. Shkapov^{a, *}, V. D. Sulimov^a, A. V. Sulimov^{a, b}

^a*Bauman MSTU, Moscow, Russia*

^b*Lomonosov MSU, Branch in Sevastopol, Sevastopol, Russia*

^{*}*e-mail: spm@bmstu.ru*

Abstract. The Jacobi stability analysis of the nonlinear dynamical system on base of Kosambi–Cartan–Chern theory is considered. Geometric description of time evolution of the system is introduced, that makes it possible to determine five geometric invariants. Eigenvalues of the second invariant (the deviation curvature tensor) give an estimate of Jacobi stability of the system. This approach is relevant in applications where it is required to identify the areas of Lyapunov and Jacobi stability simultaneously. For the nonlinear system – the double pendulum – the dependence of the Jacobi stability on initial conditions is investigated. The components of the deviation curvature tensor corresponding to the initial conditions and the eigenvalues of the tensor are defined explicitly. The boundary of the deterministic system transition from regular motion to chaotic one determined by the initial conditions has been found. The formulation of the inverse eigenvalue problem for the deviation curvature tensor associated with the restoration of significant parameters of the system is proposed. The solution of the formulated inverse problem has been obtained with the use of optimization approach. Numerical examples of restoring the system parameters for cases of its regular and chaotic behavior are given.

Keywords: nonlinear double pendulum, Jacobi stability, Kosambi–Cartan–Chern theory, geometric invariant, configuration space, restoration of parameters, global optimization

REFERENCES

1. *Hafstein S.F., Valfells A.* Efficient computation of Lyapunov functions for non-linear systems by integrating numerical solutions // *Nonlinear Dynamics*. 2019. V. 97, № 3. P. 1895–1910. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4729-5>
2. *Abolghasem H.* Liapunov stability versus Jacobi stability // *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*. 2012. V. 10, № 1. P. 13–32.
3. *Blaga C., Blaga P., Harko T.* Jacobi and Lyapunov stability analysis of circular geodesics around a spherically symmetric dilation black holl // *Symmetry*. 2023. V. 15, № 2, 329. P. 1–23. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.07678>
4. *Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V.* Jacobi stability analysis of dynamical systems – applications in gravitation and cosmology // *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2012. V. 16, № 4. P. 1145–1196.
5. *Punzi R., Wohlfarth M.N.R.* Geometry and stability of dynamical systems // *Physical Review E*. 2009. V. 79, № 4. 046606. P. 1–11.
6. *Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V.* Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 2016. V. 13. № 2. 1656014. P. 1–24.

7. *Munteanu F., Grin A., Musafirov E., et al.* About the Jacobi and stability of a generalized Hopf–Langford system through the Kosambi–Cartan–Chern theory // *Symmetry*. 2023. V. 15, № 2, 598. P. 1–13.
<https://doi.org/10.3390/sym15030598>
8. *Yamasaki K., Yajima T.* Kosambi – Karatan – Chern analysis of the nonequilibrium singular point in one-dimensional elementary catastrophe // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2022. V. 32. № 4. 2250053. P. 1–17.
<https://doi.org/10.1142/S021812742250016X>
9. *Zhang X.* When Shimizu–Morioka model meets Jacobian stability analysis: detecting chaos // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 2023. V. 20. № 2. 2350023. P. 1–14.
<https://doi.org/10.1142/S0219887823500330>
10. *Cattani M., Caldas I.L., de Souza S.L., Iarosz K.C.* Deterministic chaos theory: basic concepts // *Revista Brasileira de Ensino de Física*. 2017. V. 39. № 1. e1309. P. 1–13.
11. *Lorenz E.I.* Deterministic nonperiodic flow // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1963. V. 20. № 2. P. 130–141.
12. *Stachowiak T., Okada T.* A numerical analysis of chaos in the double pendulum // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2006. V. 29. № 3. P. 417–422.
13. *D'Alessio S.* An analytical, numerical and experimental study of the double pendulum // *European Journal of Physics*. 2023. V. 44. 015002. P. 1–20.
<https://doi.org/10.1088/1361-6404/ac986b>
14. *Yao Y.* Numerical study on the influence of initial conditions on quasi-periodic oscillation of double pendulum system // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. V. 1437. 012093. P. 1–8.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1437/1/012093>
15. *Oiwa S., Yajima T.* Jacobi stability analysis and chaotic behavior of nonlinear double pendulum // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 2017. V. 14. № 12. 1750176. P. 1–19.
<https://doi.org/10.1142/S0219887817501766>
16. *Wang F., Liu T., Kuznetsov N.V., Wei Z.* Jacobi stability analysis and the onset of chaos in a two-degree-of-freedom mechanical system // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2021. V. 31. № 05. 2150075. P. 1–15.
<https://doi.org/10.1142/S0218127421500759>
17. *Ye K., Hu S.* Inverse eigenvalue problem for tensors // *Communications in Mathematical Sciences*. 2017. V. 15. № 6. P. 1627–1649.
18. *Hu S., Ye K.* Multiplicities of eigenvalues of tensors // *Communications in Mathematical Sciences*. 2016. V. 14. № 4. P. 1049–1071.
19. Нелинейные некорректные задачи: монография / А.Н. Тихонов, А.С. Леонов, А.Г. Ягола. – М.: КУРС, 2017. – 400 с.
20. *Benning M., Burger M.* Modern regularization methods for inverse problems // *Acta Numerica*. 2018. V. 27. P. 1–111.
21. *Xia Y., Wang L., Yang M.* A fast algorithm for globally solving Tikhonov regularized total least squares problem // *Journal of Global Optimization*. 2019. V. 73. № 2. P. 311–330.
22. *Li H., Schwab J., Antholzer S., Haltmeier M.* NETT: solving inverse problems with deep neural networks // *Inverse Problems*. 2020. V. 36. № 6. 065005. P. 1–23.
<https://doi.org/10.1088/1361-6420/ab6d57>
23. *Torres R.H., Campos Velho H.F., da Luz E.F.P.* Enhancement of the Multi–Particle Collision Algorithm by mechanisms derived from the opposition-based optimization // *Selecciones Matemáticas*. 2019. V. 06 (2). P. 156–177.
<https://doi.org/10.17268/sel.mat.2019.02.03>
24. *Sulimov V.D., Shkapov P.M., Sulimov A.V.* Jacobi stability and updating parameters of dynamical systems using hybrid algorithms // *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*. 2018. V. 468. 012040. P. 1–11. .
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012040>

-
25. *Shkapov P.M., Sulimov A.V., Sulimov V.D.* Computational diagnostics of Jacobi unstable dynamical systems with the use of hybrid algorithms of global optimization // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. 2021. № 4 (97). P. 40–56. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-4-40-56>
 26. *Sulimov V.D., Sulimov A.V., Shkapov P.M.* Programma dlya EVM, realizuyuschaya gibridnyi algoritm globalnoy nedifferentsiruемой optimizatsii QOM-PCALMSI // Svidetelstvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2022664841. Zayavka № 2022663517. Data gosudarstvennoy registratsii v Reestre program dlya EVM 05 avgusta 2022.

УДК 531.36

**О ДВИЖЕНИИ БУСИНКИ НА ШЕРОХОВАТОМ ОБРУЧЕ,
СВОБОДНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ВОКРУГ
ВЕРТИКАЛЬНОГО ДИАМЕТРА**

© 2024 г. А. А. Буров^{а, *}, В. И. Никонов^{а, **}, Е. А. Никонова^{а, b, ***}

^аФедеральный исследовательский центр “Информатика и управление”

Российской академии наук, Москва, Россия

^bНаучно-технологический университет “Сириус”,

Федеральная территория “Сириус”, Краснодарский край, Россия

**e-mail: jtm@yandex.ru,*

***e-mail: nikon_v@list.ru,*

****e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com.*

Поступила в редакцию 01.07.2024 г.

После доработки 11.07.2024 г.

Принята к публикации 13.07.2024 г.

Рассматривается задача о движении тяжелой бусинки, нанизанной на шероховатый тяжелый обруч, свободно вращающийся вокруг вертикального диаметра. Выявляются неизолированные множества стационарных движений системы, строится их бифуркационная диаграмма. Изучается зависимость этих решений от существенного параметра задачи — постоянной циклического интеграла. Осуществляется сравнение полученных результатов с результатами, полученными ранее для случая, когда шероховатый обруч вращается вокруг вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью. Строятся характерные фазовые портреты для различных сочетаний параметров системы.

Ключевые слова: удерживающие связи, трение, установившиеся движения, неизолированные относительные равновесия, бифуркационная диаграмма, фазовый портрет

DOI: 10.31857/S1026351924060078, **EDN:** TZAGJM

Введение. Задача о движении тяжелой бусинки на вращающемся круговом проволочном обруче — классическая задача механики. В случае, когда ось вращения вертикальна и трения нет, эта задача вполне интегрируема. В настоящей работе, в продолжение исследований, начатых ранее (см. [1]), рассматривается задача о движении бусинки на свободно вращающемся около вертикального диаметра тяжелом шероховатом круговом проволочном обруче. Изучается зависимость от параметров задачи областей, заполненных неизолированными положениями равновесия бусинки относительно вращающейся вместе с обручем системы отсчета. Исследуются бифуркации этих областей. При анализе применяют общие подходы

к исследованию существования, устойчивости и ветвления равновесий, развитые в работах [2–8].

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Рассмотрим движение тяжелой бусинки P массы m пренебрежимо малых размеров, нанизанной на тонкий шероховатый массивный круговой проволоочный обруч \mathcal{H} с центром O радиуса ℓ и массы M . Предположим, что обруч может свободно вращаться вокруг своего вертикального диаметра. Пусть $OXYZ$ – абсолютная прямоугольная декартова система отсчета (АСО), ось OY которой направлена вдоль восходящей вертикали, а $Oxyz$ – подвижная система отсчета (ПСО), ось Ox которой направлена вдоль горизонтального радиуса обруча, ось Oy совпадает с осью OY , а ось Oz дополняет их до правой тройки.

В настоящей работе предполагается, что свободно вращающийся обруч шероховат и взаимодействие между ним и бусинкой подчиняется закону сухого трения. Основная задача состоит в том, чтобы сопоставить свойства динамики в данной постановке задачи со свойствами динамики в случае, когда обруч вращается с постоянной угловой скоростью [1].

Положение точки P определяется вектором \mathbf{OP} , имеющим координаты

$$\mathbf{OP} = (X, Y, Z)^T$$

в АСО и координаты

$$\mathbf{OP} = (x, y, z)^T$$

в ПСО.

Обозначим за ψ угол поворота ПСО относительно АСО около оси OY . Тогда для произвольной точки P координаты относительно АСО и ПСО связаны соотношениями:

$$X = x \cos \psi + z \sin \psi, Y = y, Z = -x \sin \psi + z \cos \psi.$$

Если $\dot{\psi}$ – величина угловой скорости поворота ПСО около оси OY , то

$$\dot{X} = \dot{x} \cos \psi - x \dot{\psi} \sin \psi + \dot{z} \sin \psi + z \dot{\psi} \cos \psi$$

$$\dot{Y} = \dot{y}$$

$$\dot{Z} = -\dot{x} \sin \psi - x \dot{\psi} \cos \psi + \dot{z} \cos \psi - z \dot{\psi} \sin \psi$$

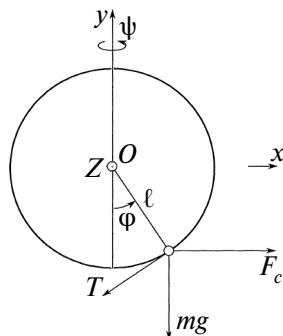


Рис. 1. Бусинка на обруче.

и выражения для кинетической и потенциальной энергии системы запишутся как

$$T = \frac{I}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) = \frac{I}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{m}{2}((\dot{x} + \dot{\psi}z)^2 + \dot{y}^2 + (\dot{z} - \dot{\psi}x)^2),$$

$$\mathcal{U} = mgy.$$

Здесь и далее I — момент инерции обруча относительно оси вращения.

В частном случае однородного обруча $I = \frac{M\ell^2}{2}$, где M — масса обруча.

1.1. Уравнения движения с множителями Лагранжа. Во время движения точка вынуждена оставаться на обруче \mathcal{H} . Это обстоятельство может быть интерпретировано как наличие двух голономных удерживающих связей, стесняющих движение системы. В подвижных осях эти связи определяются соотношениями:

$$f_n = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - \ell^2) = 0, \quad f_b = z = 0. \quad (1.1)$$

Выпишем уравнения движения, принимая во внимания связи (1.1). Пусть

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{\psi}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z; \lambda_n, \lambda_b) = T - \mathcal{U} + \lambda_n f_n + \lambda_b f_b. \quad (1.2)$$

Здесь и далее λ_n, λ_b — множители Лагранжа, подлежащие вычислению и определяющие нормальную и бинормальную компоненты реакции связи

$$\mathbf{N}_n = \lambda_n \text{grad} f_n \text{ и } \mathbf{N}_b = \lambda_b \text{grad} f_b,$$

направленные вдоль радиуса обруча и перпендикулярно плоскости обруча \mathcal{H} соответственно. Касательная компонента реакции связей — это сила трения \mathbf{T} .

Тогда уравнения движения примут вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + T_q, \quad q \in \{\psi, \lambda_n, \lambda_b, x, y, z\}. \quad (1.3)$$

Здесь величины $T_\psi = T_{\lambda_n} = T_{\lambda_b} \equiv 0$, а величины T_x, T_y, T_z — это компоненты силы трения \mathbf{T} , о структуре которой будет сказано ниже. Выпишем выражения для производных при $q \in \{x, y, z\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= m(\dot{x} + \dot{\psi}z), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -m\dot{\psi}(\dot{z} - \dot{\psi}x) + \lambda_n x, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -mg + \lambda_n y, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m(\dot{z} - \dot{\psi}x), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = m\dot{\psi}(z\dot{\psi} + \dot{x}) + \lambda_b.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I\dot{\psi} + m(z(\dot{x} + \dot{\psi}z) - x(\dot{z} - \dot{\psi}x)) = J\dot{\psi} + m(z\dot{x} - x\dot{z}) = p_{\psi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \quad (1.5)$$

Последнее из равенств в (1.5) справедливо в силу того, что функция Лагранжа (1.2) не зависит явно от угла ψ . Это означает, что координата ψ — циклическая и $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = p_{\psi}$ — первый интеграл уравнений движения. Здесь и далее $J = I + m(z^2 + x^2)$ — момент инерции системы бусинка—обруч относительно оси вращения.

2. Реакции связей и их вычисление. Для того чтобы выписать уравнения движения, требуется знать выражение для силы трения. Прежде всего заметим, что $\tau = \left(-\frac{y}{\ell}, \frac{x}{\ell}, 0\right)^T$ — единичный вектор, касающийся окружности в точке P . Тогда проекция относительной скорости $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ точки P на касательную в этой точке составляет

$$v_{\tau} = (\mathbf{v}, \tau) = \frac{-\dot{x}y + \dot{y}x}{\ell}.$$

В случае покоя бусинки относительно ПСО $\mathbf{T} = T\tau$, где в силу закона Кулона—Амонтона

$$|\mathbf{T}| \leq \mu |\mathbf{N}|. \quad (2.1)$$

Здесь и далее μ — коэффициент трения, \mathbf{N} — вектор нормальной реакции, вычисляемый с помощью множителей Лагранжа (см. раздел 2.1).

В случае скольжения бусинки вдоль обруча

$$\mathbf{T} = -\text{sign}(v_{\tau})T\tau,$$

где в силу закона Кулона—Амонтона

$$T = \mu |\mathbf{N}|.$$

2.1. Определение множителей Лагранжа. Для определения значений λ_n и λ_b как обычно воспользуемся уравнениями связей (1.1), а также тождествами, получающимися в результате их однократного и двухкратного дифференцирования по времени. Эти тождества имеют вид:

$$\dot{f}_n = x\dot{x} + y\dot{y} \equiv 0, \quad \dot{f}_b = \dot{z} = 0, \quad (2.2)$$

$$\ddot{f}_n = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \ddot{x}x + \ddot{y}y \equiv 0, \quad \ddot{f}_b = \ddot{z} \equiv 0. \quad (2.3)$$

Замечание 1. Продифференцируем по времени первое соотношение из (1.5), чтобы получить выражение углового ускорения обруча \mathcal{H} через остальные координаты и их первые и вторые производные по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = 0 \Rightarrow \ddot{\psi} = -\frac{m(z\ddot{x} - x\ddot{z}) + 2m(x\dot{x} + z\dot{z})\dot{\psi}}{J}. \quad (2.4)$$

Из соотношения (2.4) в силу (2.3) имеем:

$$\ddot{\psi} = -2mp_{\psi} \frac{x\dot{x}}{(I + mx^2)^2}.$$

При движении бусинки по обручу \mathcal{H} угловое ускорение обруча зависит от положения бусинки и ее скорости. Если бусинка относительно обруча \mathcal{H} покоится, то угловое ускорение обруча \mathcal{H} равно нулю.

Из соотношения (1.4)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \Rightarrow \ddot{z} + \frac{2mp_{\psi}}{J^2} x^2 \dot{x} - \frac{2p_{\psi}}{J} \dot{x} - \frac{p_{\psi}^2}{J^2} z = \frac{\lambda_b}{m}.$$

Принимая во внимание соотношения (1.1), (2.2) и (2.3), имеем:

$$\lambda_b = -\frac{2mIp_{\psi}}{(I + mx^2)^2} \dot{x}.$$

Легко видеть, что λ_b обращается в нуль в случае, когда бусинка покоится относительно обруча или обручу не придано начальное вращение.

Для определения λ_n сложим уравнения из (1.3) при $q = x$ и при $q = y$. Принимая во внимание первое соотношение из (1.1) и вид вектора \mathbf{T} , после преобразований имеем:

$$\lambda_n = \frac{m}{\ell^2} \left(gy - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{p_{\psi}^2 x^2}{(I + mx^2)^2} \right). \quad (2.5)$$

Для дальнейшего описания движения воспользуемся углом φ , отсчитываемым от нисходящей вертикали. Имеем

$$x = \ell \sin \varphi, \quad y = -\ell \cos \varphi$$

$$\dot{x} = \ell \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y} = \ell \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\ddot{x} = -\ell \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \ell \ddot{\varphi} \cos \varphi, \quad \ddot{y} = \ell \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ell \ddot{\varphi} \sin \varphi.$$

Подстановка этих выражений в (1.3) при $q = x$ и в λ_n из (2.5) позволяет выписать уравнение движения в виде:

$$\ddot{\varphi} + P(\varphi) \omega^2 \sin \varphi = \frac{(T, \tau)}{m\ell}, \quad P(\varphi) = 1 - c^2 \cdot \frac{\cos \varphi}{(\ell + \sin^2 \varphi)^2}, \quad \omega^2 = \frac{g}{\ell}, \quad (2.6)$$

где введены следующие безразмерные параметры:

$$\varkappa = \frac{M}{2m}, \quad c = \frac{p_{\psi}}{\omega m \ell^2}.$$

Параметр \varkappa характеризует отношение массы обруча к массе бусинки. Параметр c характеризует угловую скорость вращения обруча.

Координата ψ — циклическая, и обобщенный импульс p_{ψ} , а вместе с ним и параметр c неизменны во все время движения. Более того, ПСО вращается, вообще говоря, неравномерно: угловая скорость ее вращения зависит от относительного движения бусинки и составляет

$$\dot{\psi} = \omega \cdot \frac{c}{\varkappa + \sin^2 \varphi}.$$

Замечание 2. Закон сохранения (1.5) имеет место вне зависимости от того, действует ли на бусинку трение со стороны обруча или нет.

Замечание 3. В рассмотренном в работе [1] случае постоянства угловой скорости вращения обруча уравнение движения бусинки имеет вид, отличающийся от уравнения (2.6).

2.2. Нормальная реакция. Для определения силы трения понадобится выражение для величины нормальной реакции. В общем случае это выражение определяется по формуле:

$$N = \sqrt{\lambda_b^2 + \lambda_n^2 \ell^2} = \quad (2.7)$$

$$= m\ell \sqrt{\omega^2 c^2 \frac{4\kappa^2 \cos^2 \varphi}{(\kappa + \sin^2 \varphi)^4} \cdot \dot{\varphi}^2 + \left(\omega^2 c^2 \frac{\sin^2 \varphi}{(\kappa + \sin^2 \varphi)^2} + \omega^2 \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \right)^2}$$

Таким образом, соотношение $T = -\text{sign}(\dot{\varphi})\mu N$, где N определяется из (2.7) и задает силу сухого трения в уравнении (2.6)¹.

На относительных равновесиях относительное движение отсутствует, т.е. $\dot{\varphi} = 0$. Тогда величина нормальной реакции принимает вид:

$$N = \omega^2 m\ell \left| \cos \varphi + c^2 \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)^2} \right|. \quad (2.8)$$

3. Стационарные движения. Для начала определим стационарные (установившиеся) движения системы — движения, на которых позиционная координата $\varphi \equiv \text{const}$ и скорость циклической координаты $\dot{\psi} \equiv \text{const}$, а сама координата ψ линейно зависит от времени [9, 10].

3.1. Случай гладкого обруча. В отсутствие трения, согласно (2.6), относительные равновесия определяются из уравнения

$$\sin \varphi \cdot P(\varphi) = 0,$$

эквивалентного совокупности

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= 0 \\ P(\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Если $\sin \varphi = 0$, то имеются стационарные движения

$$I_0 : \varphi_0 = 0, I_\pi : \varphi_\pi = \pi, \quad (3.1)$$

называемые “прямыми” и отвечающие положениям бусинки в самой нижней и в самой верхней точках вертикального диаметра. Если $P(\varphi) = 0$, то имеют место “косые” равновесия:

$$I_* : \left(\kappa + \sin^2 \varphi_* \right)^2 = c^2 \cos \varphi_*. \quad (3.2)$$

Решения (3.1) существуют при всех значениях параметров задачи. Решения (3.2) существуют при $c \geq \kappa$: при $c = \kappa$ решение единственно — $\varphi_* = 0$, при $c > \kappa$ имеют место два симметричных относительно начала координат решения, принадлежащих интервалу $(-\pi/2; \pi/2)$.

¹ В работе [1] при описании скольжения аналог λ_b во внимание не принимался.

Для исследования устойчивости найденных стационарных движений выпишем функцию Рауса, которая имеет вид (см., например, [9–12]):

$$\mathcal{R} = [T - \mathcal{U} - p_\psi \dot{\psi}]|_{(1.5)} = m\ell^2 \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \mathcal{U}_a \right), \quad \mathcal{U}_a = \frac{c^2}{2(\varkappa + \sin^2 \varphi)} - \cos \varphi.$$

Функция \mathcal{U}_a – приведенная (эффективная) потенциальная энергия. Ее вторая производная по φ имеет вид:

$$\frac{d^2 \mathcal{U}_a}{d\varphi^2} = \frac{c^2}{(\varkappa + \sin^2 \varphi)^3} \cdot \left(\sin^2 2\varphi - (\varkappa + \sin^2 \varphi) \cos 2\varphi \right) + \cos \varphi. \quad (3.3)$$

На решении I_0 выражение (3.3) имеет вид:

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{U}_a}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = 1 - \frac{c^2}{\varkappa^2},$$

и оно положительно при $\varkappa > c$, значит, стационарное движение I_0 устойчиво по Ляпунову при этих значениях параметров и неустойчиво в противном случае.

На решении I_π выражение (3.3) имеет вид:

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{U}_a}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\pi} = -1 - \frac{c^2}{\varkappa^2},$$

и оно отрицательно при всех значениях параметров задачи, следовательно, решение I_π всегда неустойчиво.

Наконец, на решении I_* выражение (3.3) имеет вид:

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{U}_a}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_*} = \frac{c^2}{(\varkappa + \sin^2 \varphi_*)^3} \cdot \left(\sin^2 2\varphi_* + (\varkappa + \sin^2 \varphi_*) \sin^2 \varphi_* \right).$$

Для всех значений параметров задачи и $\varphi_* \neq 0$ выражение положительно, следовательно, решение I_* за исключением точки $\varphi_* = 0$ всегда устойчиво. В точке $\varphi_* = 0$ вторая производная приведенной потенциальной энергии обращается в нуль, и для определения свойств устойчивости требуется дополнительное исследование.

Следуя [13, 14], вычислим старшие производные приведенной потенциальной энергии в точке $\varphi_* = 0$, $c = \varkappa$:

$$\left. \frac{d^3 \mathcal{U}_a}{d\varphi^3} \right|_{\varphi=0, c=\varkappa} = 0, \quad \left. \frac{d^4 \mathcal{U}_a}{d\varphi^4} \right|_{\varphi=0, c=\varkappa} = 3 \left(1 + \frac{4}{\varkappa} \right).$$

Четвертая производная положительна при всех значениях параметров задачи, откуда следует устойчивость бифуркационной точки.

Все три класса стационарных движений изображены на бифуркационных диаграммах (рис. 2). На рис. 2 слева изображена зависимость параметра c^2

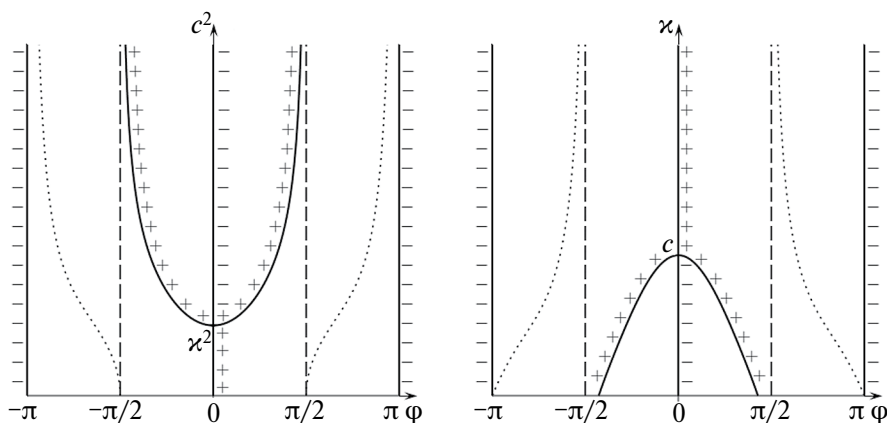


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы в отсутствие трения для разных сочетаний параметров: на плоскости $(\varphi; c^2)$ слева; на плоскости $(\varphi; \kappa)$ справа.

от φ , справа — зависимость параметра κ от φ . На этих диаграммах видна реализация правила чередования устойчивости при одних и тех же значениях параметра c или κ [9–12]. Ветвление решений происходит при $\varphi = 0$ и $\kappa = c$. Кроме того, кривая, задаваемая условием $\lambda_n = 0$, отделяет относительные равновесия, на которых $\lambda_n > 0$ от относительных равновесий, на которых $\lambda_n < 0$.

Замечание 4. Задача о бифуркации положений относительного равновесия тяжелой бусинки на гладком круглом обруче, равномерно вращающемся вокруг своего вертикального диаметра, является учебной задачей по теоретической механике и теории устойчивости движения (см., например, [9, 10, 15]). Однако случай, когда обруч массивен и ему позволено свободно, без трения вращаться вокруг своего вертикального диаметра, обычно в литературе не обсуждается.

3.2. Случай шероховатого обруча. Стационарные движения при наличии трения определяются из неравенства (2.1), выражающего закон Кулона—Амонтона, в которое вместо \mathbf{T} подставляется его выражение из уравнения (2.6). Принимая во внимание, что на стационарных движениях $\dot{\varphi} \equiv 0$, а также выражение для нормальной реакции (2.8), неравенство (2.1) представим в виде:

$$|\sin \varphi \cdot P(\varphi)| \leq \mu \left| \cos \varphi + \frac{c^2 \sin^2 \varphi}{(\kappa + \sin^2 \varphi)^2} \right|. \quad (3.4)$$

3.2.1. Зависимость решений от параметров κ и c . Выражение в левой части неравенства обращается в нуль на решениях I_0 , I_π , I_* , из предыдущего пункта, при этом выражение в правой части неравенства обращается в нуль при $\lambda_n = 0$. Выделим на плоскости (φ, c^2) четыре области \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , \mathcal{R}_3 , \mathcal{R}_4 так, как это показано на рис. 3.

Решения неравенства (3.4) в областях $\mathcal{R}_i, i = 1, 2, 3, 4$ изображены на рис. 4.

Таким образом, при конкретных значениях параметров κ , μ неравенство (3.4) задает область на цилиндре $\mathbf{R}^1(c^2) \times \mathbf{S}^1(\varphi)$, каждой точке которой отвечает стационарное движение системы. Для каждого значения c как из формулы (3.4), так и по рис. 5 (слева) можно установить области, заполненные

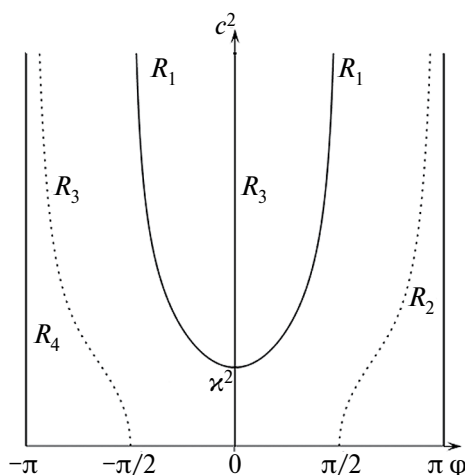


Рис. 3. Области $\mathcal{R}_i, i = 1, 2, 3, 4$ знакопостоянства подмодульных выражений неравенства (3.4).

стационарными движениями (ОЗСД).

При $c = 0$, т.е. в случае, когда обручу не придано изначальное вращение, ОЗСД состоит из двух компонент — двух отрезков одинаковой ширины $2\varphi_*$, где

$$\varphi_* : \operatorname{tg} \varphi_* = \mu.$$

Один из этих отрезков, S_0 , содержит нижнюю точку обруча, другой, S_π , — его верхнюю точку. С возрастанием c^2 нижний отрезок начинает расширяться, а верхний — неограниченно сужаться, по ширине стремясь к нулю. При некотором критическом значении c_{crit}^2 нижний

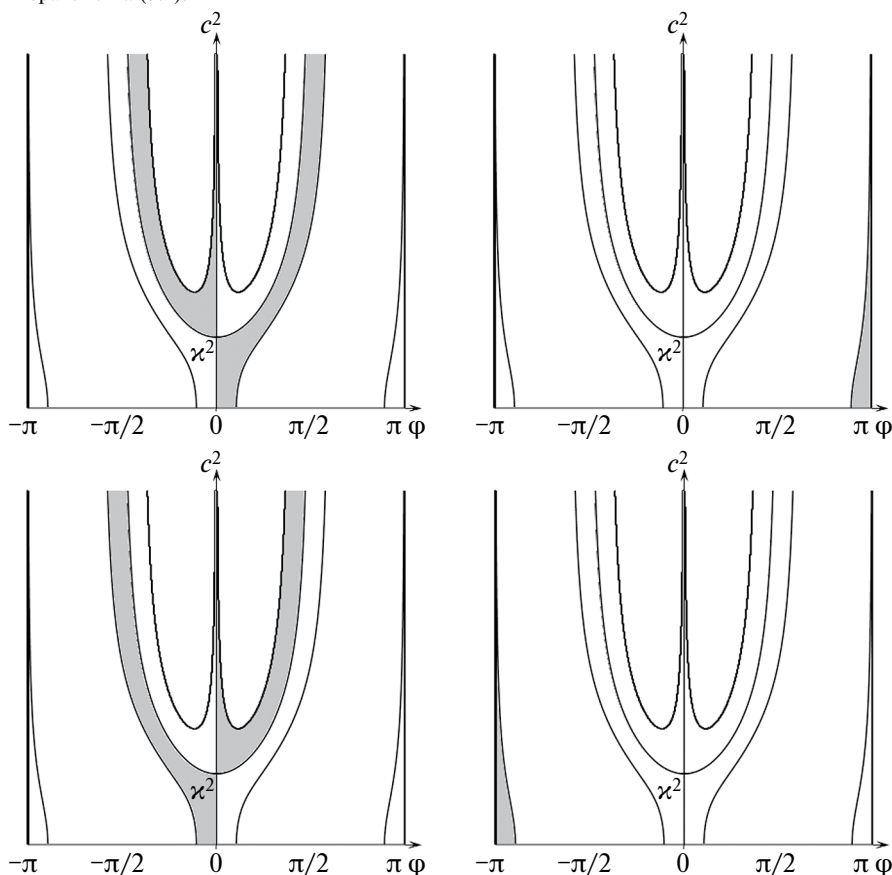


Рис. 4. Подобласти областей $\mathcal{R}_i, i = 1, 2, 3, 4$, отвечающие решениям неравенства (3.4).

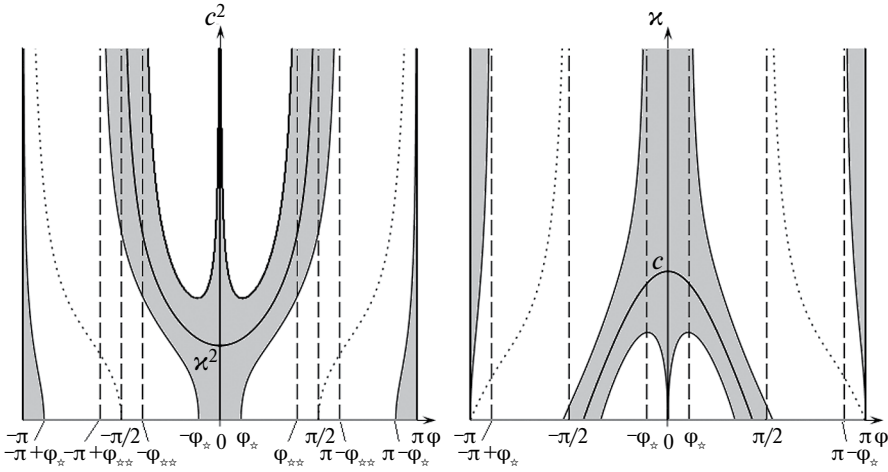


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма при наличии трения для разных сочетаний параметров. Здесь $\operatorname{tg} \varphi_* = \mu$, $\operatorname{tg} \varphi_{**} = \mu^{-1}$.

отрезок S_0 распадается на три компоненты. Одна из них, I_{00} , симметричная относительно горизонтальной оси, начинает неограниченно сужаться, по ширине стремясь к нулю. Две другие компоненты $I_{0\pm}$, симметричные друг по отношению к другу относительно оси абсцисс, при неограниченном росте c^2 по ширине стремятся к конечному значению $\pi - 2\varphi_{**}$, где $\varphi_{**} = \mu^{-1}$. Левая и правая границы ветви I_{0+} стремятся асимптотически к значениям углов $\varphi = \varphi_{**}$ и $\varphi = \pi - \varphi_{**}$ соответственно. Аналогичные рассуждения позволяют построить диаграмму на плоскости $(\varphi; \kappa)$, см. рис. 5 (справа).

В той части цилиндра $\mathbf{R}^1(c^2) \times \mathbf{S}^1(\varphi)$, где выполнено неравенство

$$\left(\sin \varphi - \frac{c^2}{F(\varphi)} \cos \varphi \right) \cdot \left(\cos \varphi + \frac{c^2}{F(\varphi)} \sin \varphi \right) > 0, \quad F(\varphi) = \frac{(\kappa + \sin^2 \varphi)^2}{\sin \varphi}, \quad (3.5)$$

граница ОЗСД определяется уравнением

$$F(\varphi) \cdot G_+(\varphi) = c^2, \quad (3.6)$$

а в той части цилиндра, где неравенство (3.5) выполнено с обратным знаком, – уравнением

$$F(\varphi) \cdot G_-(\varphi) = c^2, \quad (3.7)$$

где $G_{\pm}(\varphi) = \operatorname{tg}(\varphi \mp \alpha)$, α : $\operatorname{tg} \alpha = \mu$ – так называемый угол трения. Чтобы определить точки ветвления ОЗСД, найдем производные функций (3.6) и (3.7) по φ и приравняем их к нулю. Так как

$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot (3 \sin^2 \varphi - \kappa) \cdot (\sin^2 \varphi + \kappa), \quad \frac{dG_{\pm}}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2(\varphi \mp \alpha)},$$

то $c_{\text{crit}}^2 = F(\varphi_{\text{crit}}) \cdot G_{\pm}(\varphi_{\text{crit}})$. Здесь критические углы φ_{crit} определяются из уравнений

$$\frac{dF}{d\varphi} G_{\pm} + F \frac{dG_{\pm}}{d\varphi} = 0,$$

которые после преобразований принимают следующий вид:

$$\sin^2(\varphi_{\text{crit}}) \cdot \frac{3 \sin(2\varphi_{\text{crit}} \mp 2\alpha) + 2 \operatorname{tg}(\varphi_{\text{crit}})}{\sin(2\varphi_{\text{crit}} \mp 2\alpha) - 2 \operatorname{tg}(\varphi_{\text{crit}})} = \varkappa.$$

3.2.2. *Зависимость решений от параметра μ .* Исследуем решения неравенства (3.4) в зависимости от параметра μ . Рассмотрим функцию

$$f(\varphi) = \left| \frac{\sin \varphi (\varkappa + \sin^2 \varphi)^2 P(\varphi)}{\cos \varphi (\varkappa + \sin^2 \varphi)^2 + c^2 \sin^2 \varphi} \right|.$$

Эта функция является четной, периодической с периодом 2π по переменной φ и имеет разрывы при тех значениях φ , где обращается в нуль нормальная реакция λ_n . Нулям функции $f(\varphi)$ отвечают корни уравнений $\sin \varphi = 0$ или $P(\varphi) = 0$. Топология решений неравенства (3.4) существенно зависит от параметров \varkappa и c . Рассмотрим различные сочетания этих параметров.

При $\varkappa > c$ функция $P(\varphi)$ положительна, и $f(\varphi)$ обращается в нуль при $\varphi = 0, \pm\pi$. Решению неравенства $f(\varphi) \leq \mu$ отвечают два отрезка, содержащих нижнее I_0 и верхнее I_π положения относительного равновесия бусинки. При увеличении μ длина этих отрезков увеличивается, но отрезки не сливаются друг с другом из-за наличия разрывов функции $f(\varphi)$. При $\varphi = 0$ функция $f(\varphi)$ справа и слева от этой точки имеет разные производные, а именно: $f'(0_\pm) = \pm \frac{\varkappa^2 - c^2}{\varkappa^2}$ и для $\varkappa > c$ имеют место неравенства $f'(0_+) > 0$ и $f'(0_-) < 0$. Области, отвечающие решениям, изображены на рис. 6 слева.

Для случая $\varkappa = c$ касательная в точке $\varphi = 0$ к графику функции $f(\varphi)$ становится горизонтальной $f'(0) = 0$, см. рис. 6 по центру.

При $\varkappa < c$ функция $P(\varphi)$ имеет два противоположных корня, что в сочетании с решениями $\varphi = 0, \pm\pi$ позволяет говорить о четырех семействах решений неравенства $f(\varphi) \leq \mu$. Как и ранее, выделим решения, содержащие нижнее I_0 и верхнее I_π положения относительного равновесия бусинки. Помимо этого, появляются семейства решений, содержащие косые равновесия I_* , определяемые соотношением (3.2). При увеличении μ отрезки, отвечающие решениям, увеличиваются. Существует $\mu = \mu_{\text{crit}}$, начиная с которого множества решений, содержащие I_0 и I_* , сливаются воедино. При этом при

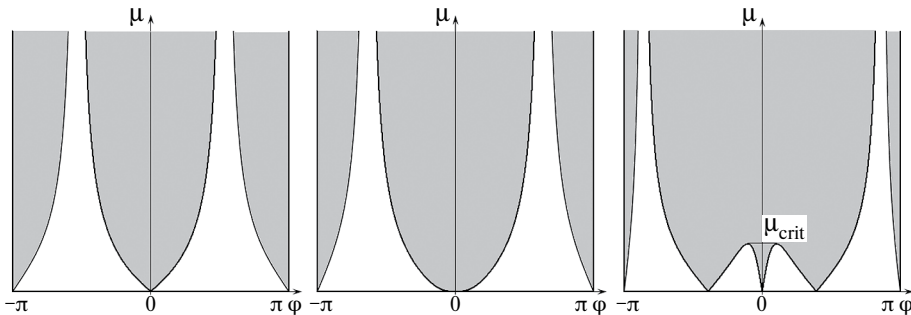


Рис. 6. Зависимость $f(\varphi)$ от коэффициента трения μ : $\varkappa > c$ слева, $\varkappa = c$ по центру, $\varkappa < c$ справа.

сколь угодно больших μ это решение не сойдется с решением, содержащим I_π , см. рис. 6 справа.

Выполненный анализ позволяет утверждать, что не существует значения коэффициента трения, при котором любой точке обруча соответствует относительное равновесие бусинки. Если $\varphi_n: \lambda_n(\varphi_n) = 0$, то всегда существуют окрестности φ_n , где бусинка не может находиться в равновесии относительно обруча.

4. Скольжение. В условиях скольжения сила трения определяется равенством

$$\mathbf{T} = -\mu |\mathbf{N}| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|},$$

и для различных значений постоянной циклического интеграла p_ψ движение бусинки относительно обруча описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 P(\varphi) \sin \varphi = \frac{T}{m\ell},$$

где

$$T = -\text{sign}(\dot{\varphi}) \mu m \ell \sqrt{\omega^2 c^2 \frac{4\kappa^2 \cos^2 \varphi}{(\kappa + \sin^2 \varphi)^4} \cdot \dot{\varphi}^2 + \left(\omega^2 c^2 \frac{\sin^2 \varphi}{(\kappa + \sin^2 \varphi)^2} + \omega^2 \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \right)^2}.$$

Построим характерные фазовые портреты на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ для до- и постбифуркационных значений параметров системы, рис. 7 и 8. На рис. 9 и 10 представлены в увеличенном масштабе окрестности множеств неизоллированных решений.

Анализ бифуркационных диаграмм показывает, что при всех начальных условиях бусинка приходит в положение относительного равновесия за конечное время. Наличие интеграла площадей гарантирует, что при этом

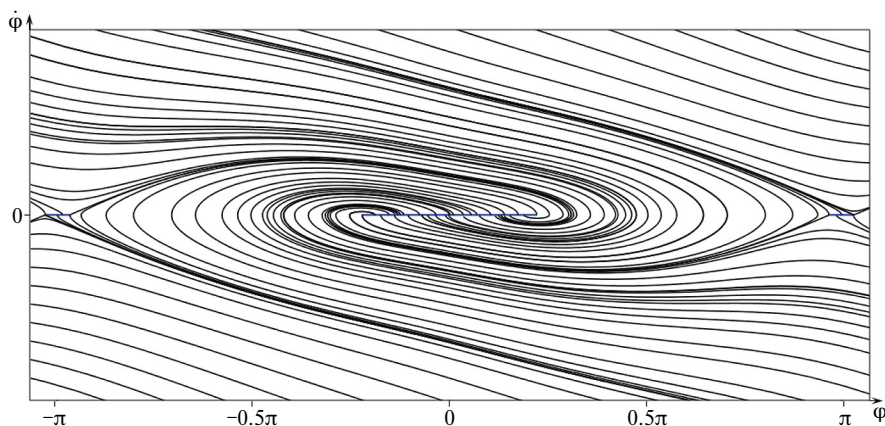


Рис. 7. Фазовый портрет для добифуркационных сочетаний параметров.

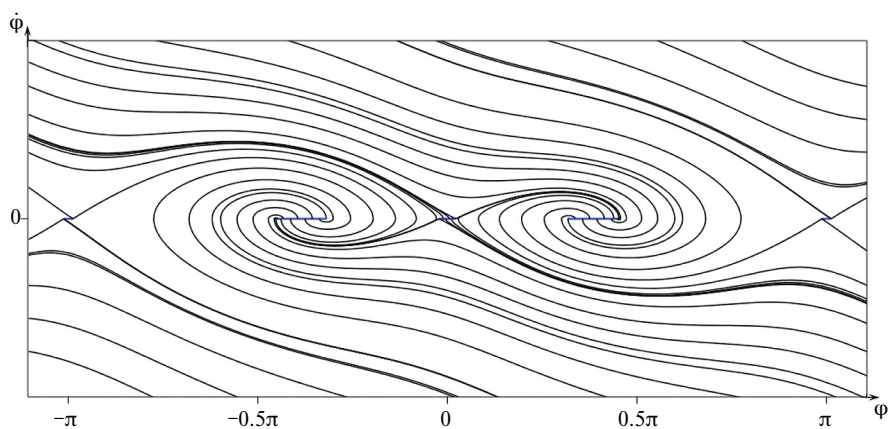


Рис. 8. Фазовый портрет для постбифуркационных сочетаний параметров.

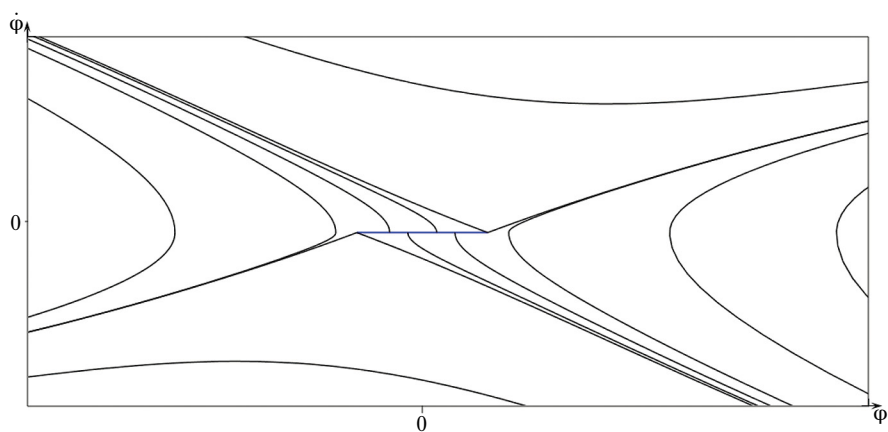


Рис. 9. Окрестность множеств I_0 при постбифуркационных сочетаниях параметров.

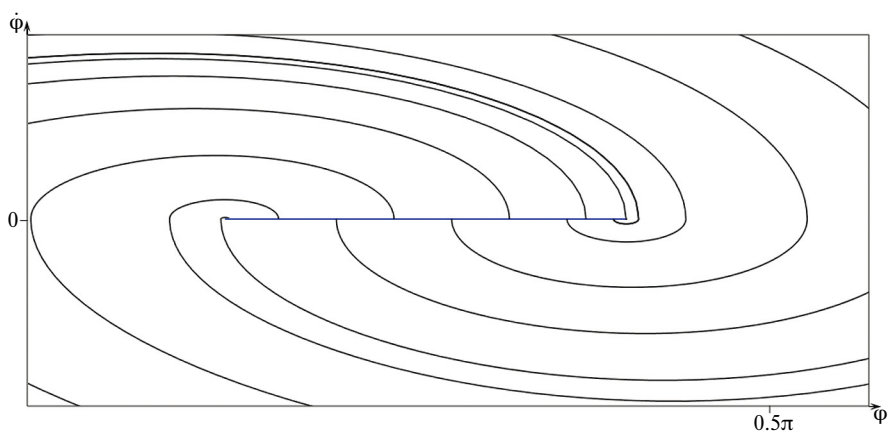


Рис. 10. Окрестность множеств I_* при постбифуркационных сочетаниях параметров.

дальнейшего рассеяния энергии происходить не будет и обруч продолжит вращаться с постоянной угловой скоростью.

5. Заключительные замечания. В рассмотренной задаче о движении бусинки по шероховатому круглому массивному обручу, свободно вращающемуся вокруг своего вертикального диаметра, найдено множество неизолированных установившихся движений и исследована зависимость этого множества от существенных параметров задачи. Установлено, что топологически построенная бифуркационная диаграмма не отличается от подобной диаграммы, построенной ранее [1] в случае, когда обруч вращается вокруг вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью. При различных значениях параметров задачи построены фазовые портреты. Численно показано, что на всех изучавшихся траекториях за конечное время бусинка приходит в положение относительного равновесия. При этом дальнейшего рассеяния энергии не происходит, а система продолжает вращение с постоянной угловой скоростью.

Заметим, что если ось вращения обруча наклонена относительно вертикали, то уже в случае скольжения бусинки без трения уравнения движения становятся неинтегрируемыми, а движение бусинки оказывается гораздо более богатым на динамические эффекты [16]. Исследование динамики такой системы при наличии трения требует отдельного исследования.

Исследование Е.А. Никоновой (пункты 3 и 4) выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20009, <https://rscf.ru/project/24-11-20009/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burov A.A.* On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // *Acta Mechanica*. 2010. V. 212. № 3–4. P. 349–354.
<https://doi.org/10.1007/s00707-009-0265-1>
2. *Кремнутло В.В.* Устойчивость гироскопа, имеющего вертикальную ось внешнего кольца, при учете сухого трения в осях подвеса // *ПММ*. 1960. Т. 24. № 3. С. 568–571.
3. *Van de Wouw N., Leine R.I.* Stability of stationary sets in nonlinear systems with set-valued friction // *Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conf. (CDC2006)*. San Diego. USA, 2006. P. 3765–3770.
4. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Berlin: Springer, 2008. V. 36. 236 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-76975-0>
5. *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Europ. J. Mech. A/Solids*. 2006. V. 25. № 4. P. 595–616.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.04.004>
6. *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Physica D*. 2006. V. 223. № 1. P. 121–137.
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.08.021>
7. *Ivanov A.* Bifurcations in systems with friction: Basic models and methods // *Regul. Chaotic Dyn.* 2009. V. 14. № 6. P. 656–672.
<https://doi.org/10.1134/S1560354709060045>
8. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011. 304 с.
9. *Карпетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 168 с.

10. *Карапетян А.В.* Устойчивость и бифуркация движений. М.: Изд-во Московского ун-та, 2020. 186 с.
11. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 176 с.
12. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 922–933.
13. *Возлинский В.И.* О связи бифуркаций равновесий консервативных систем с распределением устойчивости на кривой равновесий // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 384–392.
14. *Возлинский В.И.* Об устойчивости точек ветвления равновесий // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 259–267.
15. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
16. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Motion of a heavy bead along a circular hoop rotating around an inclined axis // Int. J. Non-Linear Mech. 2021. V. 137. P. 103791.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103791>

ON THE MOTION OF A BEAD ON A ROUGH HOOP FREELY ROTATING AROUND A VERTICAL DIAMETER

A. A. Burov^{a, *}, V. I. Nikonov^{a, **}, E. A. Nikonova^{a, b, ***}

^a Federal Research Center “Computer Science and Control”
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^b Sirius University of Science and Technology Sirius Federal territory, Sochi, Russia

*e-mail: jtm@yandex.ru,

**e-mail: nikon_v@list.ru,

***e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com.

Abstract. We consider the problem of the motion of a heavy bead strung on a rough heavy hoop freely rotating around a vertical diameter. Non-isolated sets of steady state motions of the system are identified, and their bifurcation diagrams are constructed. The dependence of these solutions on an essential parameter of the problem—the constant of the cyclic integral—is studied. The results obtained are compared with the results obtained previously for the case when a rough hoop rotates around a vertical diameter with a constant angular velocity. Characteristic phase portraits are constructed for various combinations of system parameters.

Keywords: bilateral constraints, friction, steady state motions, non-isolated relative equilibria, bifurcation diagram, phase portrait

REFERENCES

1. *Burov A.A.* On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // Acta Mechanica. 2010. V. 212. № 3–4. P. 349–354.
<https://doi.org/10.1007/s00707-009-0265-1>
2. *Krementulo V.V.* Stability of a gyroscope having a vertical axis of the outer ring with dry friction in the gimbal axes taken into account // J. Appl. Math. Mech. 1960. V. 24. № 3. P. 843–849.
3. *Van de Wouw N., Leine R.I.* Stability of stationary sets in nonlinear systems with set-valued friction // Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conf. (CDC2006), San Diego, USA, 2006. P. 3765–3770.

4. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer, 2008. V. 36. 236 p.
5. *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Eur. J. Mechanics A. Solids*. 2006. V. 25. P. 595–616.
6. *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Physica D*. 2006. V. 223. P. 121–137.
7. *Ivanov A.* Bifurcations in systems with friction: Basic models and methods // *Regul. Chaotic Dyn.* 2009. V. 14. № 6. P. 656–672.
8. *Ivanov A.P.* Fundamentals of the theory of systems with friction. M.—Izhevsk: SIC “Regular and chaotic dynamics”, Izhevsk Institute of Computer Science, 2011. 304 p. (in Russian).
9. *Karapetian A.V.* Stability of stationary motions. M.: Editorial URSS, 1998. 168 p. (in Russian).
10. *Karapetian A.V.* Stability and bifurcation of motions. M.: Publishing House of the Moscow University, 2020. 186 p. (in Russian).
11. *Chetaev N.G.* Stability of motions. M.: Nauka. 1965. 176 p. (in Russian).
12. *Rumiantsev V.V.* On the stability of steady motions // *J. Appl. Math. Mech.* 1966. V. 30. № 5. P. 1090–1103.
13. *Vozlinskii V.I.* On the relations between the bifurcation of the equilibria of conservative systems and the stability distribution on the equilibria curve // *J. Appl. Math. Mech.* 1967. V. 31. № 2. P. 418–427.
14. *Vozlinskii V.I.* On the stability of points of equilibrium branching // *J. Appl. Math. Mech.* 1978. V. 42. № 2. P. 270–279.
15. *Rubanovsky V.N., Samsonov V.A.* Stability of stationary motions in examples and problems. M.: Nauka, 1988. 303 p. (in Russian).
16. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Motion of a heavy bead along a circular hoop rotating around an inclined axis // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2021.V. 137. Article 103791.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103791>

УДК 534.1

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДОВ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ С ГОЛОЛЕДНЫМ ОТЛОЖЕНИЕМ

© 2024 г. А. Н. Данилин^{a, *}, Е. А. Денисов^{b, **},

В. А. Фельдштейн^{a, b, ***}

^aИнститут прикладной механики РАН, Москва, Россия

^bМосковский физико-технический институт (государственный университет),
Долгопрудный, Россия

*e-mail: andanilin@yandex.ru,

**e-mail: denisov.egor@phystech.edu,

***e-mail: dinpro@mail.ru

Поступила в редакцию 26.05.2024 г.

После доработки 16.07.2024 г.

Принята к публикации 25.07.2024 г.

Рассматривается задача о свободных пространственных колебаниях провода воздушной линии электропередачи с несимметричным распределением массы по сечению, обусловленным гололедными отложениями на его поверхности, которые придают сечению несимметричную форму. В результате между центрами крутильной жесткости и массы в сечении образуется эксцентриситет и возникает динамическая связь вертикальных, крутильных и “маятниковых” колебаний с выходом провода из плоскости провисания. Провод моделируется гибким тяжелым упругим стержнем, сопротивляющимся только растяжению и кручению. Исследуется случай слабо провисающего провода, когда натяжение и кривизну его осевой линии можно считать постоянными в пределах пролета. Считается также, что упругость гололедной оболочки мала по сравнению с упругостью провода. Математическая модель строится с учетом взаимодействия продольных, крутильных и поперечных волн, поляризованных в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Проанализированы соотношения фазовых скоростей всех типов волн и выделена группа частных подсистем, определяющих парциальные колебания. Исследованы парциальные и собственные частоты и формы колебаний провода. Получены аналитические решения задачи определения спектра собственных частот и форм пространственных колебаний. Исследовано влияние гололедной оболочки на спектр колебаний провода. Обнаружена зависимость волнового числа крутильных колебаний от частоты, которая определяется не только упруго-инерционным, но также гравитационным фактором, сильно проявляющимся для проводов в длинных пролетах, особенно подверженных пляске (галопированию). Это обстоятельство существенно для анализа феномена пляски с позиций, связывающих возникновение пляски сближением частот крутильных и поперечных мод при обледенении провода.

Показано, что соотношение этих частот, вызывающих автоколебательный процесс, оказывается существенно более сложным.

Ключевые слова: электропередача, провод, гололедные отложения, колебания, волны, частоты, формы колебаний

DOI: 10.31857/S1026351924060082, EDN: TYZZZT

1. Введение. Провода воздушных линий электропередачи в механическом отношении представляют собой сильно натянутые гибкие упругие стержни большого удлинения. Очевидная аналогия со струной качественно верно объясняет их склонность к колебаниям, возбуждаемым ветром, подвижностью подвески на опорах, колебаниями температуры. В соответствии с классификацией CIGRE (Conseil International des Grands Réseaux Électriques) — авторитетной научно-технической ассоциации специалистов-энергетиков всего мира, колебания проводов разделяют на три группы [1]. Одну из них образуют эоловы вибрации — поперечные колебания с амплитудой порядка диаметра провода и с частотой от 5 до 50 Гц, которые возбуждаются периодическим воздействием вихревой дорожки Кармана при поперечном обтекании провода ветровым потоком. Вторую группу образуют так называемые субколебания — нелинейные колебания проводов расщепленных (многопроводных) фаз с частотами от 0.5 до 5 Гц, вызываемые действием аэродинамического (спутного) следа. К третьей, наименее исследованной группе относятся колебания с низкими частотами от 0.2 до 3 Гц с амплитудами порядка нескольких метров. Это явление, называемое галопированием или пляской, наблюдается, как правило, при сочетании ветра и гололедных отложений на поверхности провода, которые придают сечению несимметричную форму и аэродинамическое качество. В результате между центрами крутильной жесткости и массы в сечении образуется эксцентриситет, возникает динамическая связь вертикальных, крутильных и “маятниковых” колебаний с выходом провода из вертикальной плоскости провисания. Феномен галопирования обычно связывают с понижением высоких частот крутильных мод при обледенении провода и с их сближением с низкими частотами поперечных колебаний. Однако изменение соотношения этих частот оказывается существенно более сложным. В совокупности перечисленные факторы считаются причиной развития автоколебаний по типу флаттера. Это представление является в мире энергетики доминирующим [2–6]. Однако известны случаи возникновения пляски совсем в иных условиях, необъяснимые с позиций данной концепции [7].

Как нормирование прочности и эксплуатационного ресурса, так и разработка технических средств парирования колебаний должны основываться на анализе особенностей колебаний проводов во всем актуальном диапазоне частот с учетом изменения динамических характеристик провода вследствие обледенения. Данная статья является продолжением исследований авторов, изложенных в работе [8], и содержит анализ собственных частот колебаний провода на основе модели, учитывающей взаимосвязь различных (парциальных) колебаний, обусловленную изменением динамических характеристик провода при его обледенении.

2. Физическая модель и исходные уравнения. Сталеалюминевый провод типа АС [9] рассматривается как однородный цилиндрический упругий стержень с длиной L и диаметром сечения d , с жесткостями на растяжение B и кручение D , лишенный изгибной жесткости. Определение жесткостей реальных

проводов представляет собой самостоятельную сложную задачу, поэтому для крутильной жесткости используется аппроксимация: $D = 2.7 \cdot 10^8 d^4$, предложенная в [10, 11]. Для жесткости на растяжение принимается модель параллельного соединения отдельных проволок: $B = E_{Al} F_{Al} + E_{St} F_{St}$. Рассматривается практически важный случай слабо провисающего провода, когда можно считать его натяжение T_S и кривизну осевой линии постоянными вдоль пролета, связанными со стрелой провисания f соотношением: $k_S = mg/T_S = 8f/L^2$ [3]. Материальная длина провода L и расстояние между равновысокими точками подвеса в рамках технической теории считаются совпадающими. Упругость гололедной оболочки мала по сравнению с упругостью провода, поэтому центр крутильной жесткости \tilde{O} , принимаемый за полюс сечения, при обледенении остается на оси провода, а центр массы сечения C смещается относительно полюса на величину эксцентриситета Δ . В исходном состоянии (отсутствие обледенения) погонная масса и радиус сечения провода равны m_0 , $r_0 = d/\sqrt{8}$, а ось провода располагается в вертикальной плоскости со стрелой провисания f_0 , которой соответствует кривизна $k_{S0} = 8f_0/L^2$. В конечном состоянии (при обледенении) эти параметры приобретают новые значения: $m = \mu m_0$, $r = \vartheta r_0$, $f = \Phi f_0$, $k_S = \Phi k_{S0}$, сечения поворачиваются относительно полюса \tilde{O} на угол φ_S , переменный по длине, а плоскость провисания отклоняется от вертикали на угол ψ .

С поперечным сечением провода связывается натуральный триэдр, образованный единичными векторами касательной τ , нормали n и бинормали $b = \tau \times n$ с центром в точке оси \tilde{O} . Соответственно направлениям осей триэдра вводится локальная (левая) система координат $\tilde{O}xyz$, движущаяся относительно глобальной координатной системы $OXYZ$, как показано на рис. 1. В качестве координаты используется длина дуги s осевой линии провода. Рассматриваются свободные колебания, при которых в пролете образуются стоячие продольные, крутильные и поперечные волны.

На практике представляет интерес влияние обледенения на собственные частоты колебаний. Изменение частот обусловлено как повышением инерционных характеристик провода, так и изменением стрелы провисания вследствие увеличения веса провода. Поэтому необходимо различать его

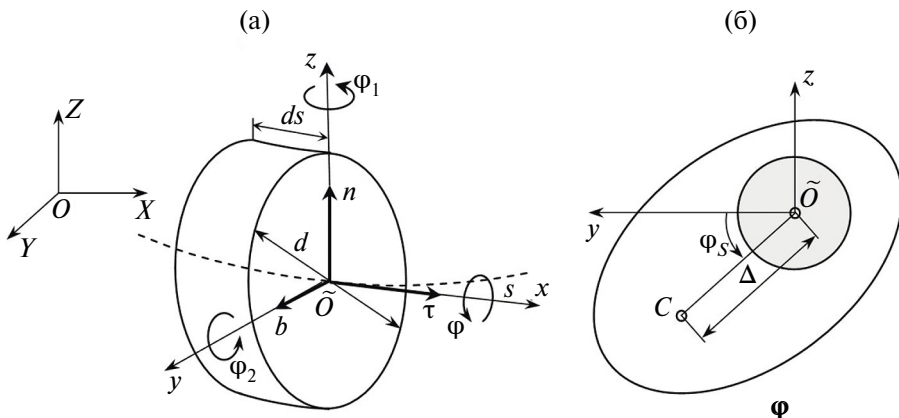


Рис. 1. Положительные направления осей координатных систем и углов поворота.

конфигурации в начальном и конечном состояниях, которые определяются величинами стрел провисания.

Для определения связи между ними запишем условия равновесия провода в сравниваемых состояниях. В рамках технической теории эти условия имеют вид: $m_0 g L^2 = 64 B f_0 (f_0^2 - f_{nat}^2) / (3 L^2)$ и $m g L^2 = 64 B f (f^2 - f_{nat}^2) / (3 L^2)$, где f_{nat} – стрела в натуральном состоянии (при отсутствии деформаций). Исключая f_{nat} , приходим к уравнению для определения коэффициента изменения стрелы провисания $\phi = f/f_0$: $\beta_0 \phi^3 + \phi(1 - \beta_0) - \mu = 0$, где коэффициент $\beta_0 = 64 B f_0^3 / (3 m_0 g L^4)$. Все дальнейшие построения относятся к конечному состоянию провода.

При колебаниях точки оси получают перемещение из положения равновесия $\mathbf{U} = u(s)\boldsymbol{\tau} + w(s)\mathbf{n} + v(s)\mathbf{b}$, а поперечные сечения, считающиеся недеформируемыми, поворачивается на малый угол $\boldsymbol{\Phi} = \varphi(s)\boldsymbol{\tau} + \varphi_1(s)\mathbf{n} + \varphi_2(s)\mathbf{b}$. Число степеней свободы сечения (шесть) уменьшается до четырех, если использовать обычные для теории стержней связи, состоящие в отсутствии поперечных сдвигов и выразить углы поворота через производные перемещений по s : $\varphi_1 = -v'$, $\varphi_2 = w'$. В этой модели деформации растяжения, кручение и соответствующие им продольное натяжение и крутящий момент равны

$$\varepsilon = u' - k_S w + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2), \quad \chi = \varphi' - k_S v'; \quad T = B\varepsilon, \quad H = D\chi.$$

Здесь удержаны слагаемые второго порядка относительно поворотов, чтобы учесть влияние статического натяжения провода на его колебания, которые в дальнейшем считаются малыми.

Уравнения колебаний следуют из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского: $\delta \int_{t_2}^{t_1} (K - \Pi) dt = 0$. Кинетическая энергия равна:

$$K = \frac{m}{2} \int_0^L [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 - 2\Delta \phi (\dot{w} \cos \varphi_S + \dot{v} \sin \varphi_S)] ds.$$

Потенциальная энергия складывается из энергии деформации Π_1 и вращения энергии Π_2 в поле тяжести при изменении положения центра массы сечения за счет вертикального смещения w вместе с полюсом и поворота на угол $\varphi_\Sigma = \varphi - v k_S$:

$$\Pi_1 = \int_0^L \left[\frac{B}{2} \varepsilon^2 + T_S \varepsilon + \frac{D}{2} \chi^2 + H_S \chi \right] ds, \quad \Pi_2 = mg \int_0^L [w - \Delta \varphi_\Sigma \cos(\varphi_S + \varphi_\Sigma)] ds.$$

Стандартная процедура приводит к системе уравнений, в которой сохранены только линейные по u, v, w, ϕ , слагаемые; величины $O(k_S^2)$ также считаются величинами второго порядка малости ввиду исходного предположения о пологости кривой провисания провода:

$$\begin{aligned} m \ddot{u} &= T' + \underline{T'_S} \\ m \ddot{w} - m \Delta \cos \varphi_S \ddot{\phi} &= T_S w'' + k_S T + \underline{k_S T_S} - mg \\ m \ddot{v} - m \Delta \sin \varphi_S \ddot{\phi} &= T_S v'' - k_S H' - \underline{k_S (H'_S + mg \Delta \cos \varphi_S)} \\ m r^2 \ddot{\phi} - m \Delta (\ddot{w} \cos \varphi_S + \ddot{v} \sin \varphi_S) &= H' - 2mg \Delta \phi \sin \varphi_S + \underline{H'_S + mg \Delta \cos \varphi_S}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

На краях предполагается отсутствие перемещений и поворота: $u = v = w = 0$, $\varphi = 0$. Подчеркнутые слагаемые равны нулю в силу условий статики и дают уравнения для определения формы провисания и угла поворота сечения в положении равновесия $w_S(s)$, $\varphi_S(s)$. Пренебрегая вкладом перемещения v_S , запишем:

$$w_S'' = mgL^2/T_S, \quad \varphi_S'' + \kappa \cos \varphi_S = 0.$$

Здесь дифференцирование ведется по безразмерной координате $x = s/L$. Параметр $\kappa = \mu m_0 g \Delta L^2 / D$ обобщенно характеризует упруго-инерционные характеристики провода и гололедной оболочки.

Решение первого уравнения дает известное соотношение технической теории гибкой нити малого провисания:

$$w_S = f \psi_S(x), \quad f = mgL^2/8T_S, \quad \psi_S(x) = 4x(1-x).$$

Второе уравнение имеет первый интеграл: $\varphi_S' = \sqrt{2\kappa(\sin \varphi_m - \sin \varphi)}$, где постоянная интегрирования φ_m – максимальный угол поворота сечения (в центре пролета). Второй интеграл:

$$x = \int_0^\varphi \frac{dz}{\sqrt{2\kappa(\sin \varphi_m - \sin z)}} = F(\varphi).$$

Величина φ_m определяется из условия, что угол поворота максимален при $x = 1/2$; это приводит к уравнению $F(\varphi_m) = 1/2$. Непосредственный расчет указывает на то, что достаточно точной является следующая аппроксимация решения:

$$\varphi_S(x, \kappa) = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-0.075\kappa}) \psi_S(x). \quad (2.2)$$

Перейдем в уравнениях (2.1) к перемещениям:

$$\begin{aligned} \ddot{u} - c_u^2 u'' &= -k_S c_u^2 w' \\ \ddot{w} - c_w^2 w'' + k_S^2 c_u^2 w &= k_S c_u^2 u' + \Delta \ddot{\varphi} \cos \varphi_S \\ \ddot{v} - c_v^2 v'' &= -k_S r^2 c_\varphi^2 \varphi'' + \Delta \ddot{\varphi} \sin \varphi_S \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\ddot{\varphi} - c_\varphi^2 \varphi'' + 2mg\Delta\varphi \sin \varphi_S = -k_S c_\varphi^2 v'' + \Delta r^{-2} (\ddot{w} \cos \varphi_S + \ddot{v} \sin \varphi_S).$$

Здесь величины

$$\begin{aligned} c_u &= \sqrt{B/m} = \sqrt{B/\mu m_0} = c_u^0 / \sqrt{\mu} \\ c_v &= \sqrt{c_w^2 + k_S^2 r^2 c_\varphi^2} = c_w \sqrt{1 + k_{S0}^2 r_0^2 (c_\varphi^0 / c_w^0)^2 \phi^3 / \mu} \\ c_w &= \sqrt{T_S/m} = \sqrt{g/k_S} = \sqrt{g/(\phi k_{S0})} = c_w^0 / \sqrt{\phi} \\ c_\varphi &= \sqrt{D/(mr^2)} = \sqrt{D/(m_0 r_0^2 \mu \vartheta^2)} = c_\varphi^0 / \sqrt{\mu \vartheta^2} \end{aligned}$$

– фазовые скорости парциальных продольных, поперечных (в вертикальном и горизонтальном направлениях) и крутильных волн в конечном и исходном состояниях (последние отмечены верхним индексом “0”).

Левые части уравнений (2.3) представляют собой операторы, описывающие парциальные продольные, крутильные и поперечные волны в проводе. При отсутствии или равномерном распределении массы гололеда по сечению провода центр массы сечения лежит на оси провода ($\Delta = 0$), и система распадается на две независимые подсистемы, описывающие продольно-поперечные волны в вертикальной плоскости и поперечно-крутильные – в горизонтальном направлении.

Между перечисленными скоростями существуют соотношения, играющие важную роль в формировании собственных частот провода. Скорость продольных упругих волн $c_u^0 \approx 5000$ м/с. Характерная скорость поперечных волн при отсутствии гололеда $c_w^0 \approx 100$ м/с. Сопоставление аппроксимации крутильной жесткости, предложенной в работах [10, 11], с ее традиционной формой $D = G_{eq}\pi d^4 / 32 = 2.7 \cdot 10^8 d^4$ приводит к эквивалентному модулю сдвига провода при кручении: $G_{eq} = 2.75$ ГПа, что примерно на порядок меньше модуля сдвига алюминиевого сплава провода. Полагая: $G_{eq} \approx 3$ ГПа, $\rho_{eq} \approx 3000$ кг/м, оценим скорость крутильной волны: $c_\phi^0 = \sqrt{G_{eq}/\rho_{eq}} \approx 1000$ м/с.

При обледенении фазовые скорости уменьшаются, однако скорость продольной волны остается существенно больше скорости поперечной, так как $\phi, \mu = O(1)$, а деформация статического растяжения $\varepsilon_S = T_S/B \approx 10^{-3}$, откуда следует, что $\alpha = c_u/c_w = \sqrt{\phi/(\mu\varepsilon_S)} \gg 1$. Отношение $\gamma = c_\phi/c_w = (c_\phi^0\sqrt{\phi})/(c_w^0\sqrt{\mu})$ не столь большое, если учесть, что $c_\phi^0/c_w^0 < 10$, а параметры $\phi, \mu, \vartheta = O(1)$. Тем не менее, для реальных проводов можно считать, что $\gamma^2 \gg 1$. Так как кривизна провисающего провода $k_S < 10^{-3} \text{ м}^{-1}$, а радиус инерции сечения $r < 10^{-2} \text{ м}$, то $c_w^2 \gg k_S^2 r^2 c_\phi^2$ и $\beta = c_v/c_w \approx 1 + k_S^2 r^2 \gamma^2 / 2 = O(1)$. Таким образом, среди парциальных колебаний наиболее высокие частоты должны быть у продольных, а наименьшие – у поперечных, тогда как частоты крутильных занимают промежуточное положение.

Исключая время подстановкой $(u, v, w, \phi) \rightarrow (u, v, w, \phi)e^{i\omega t}$, перейдем к безразмерным параметрам: $\tilde{\omega} = \omega L/c_w$, $x = s/L$, $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = (u, v, w)/d$, и вместо (2.3) придем к однородной краевой задаче типа Штурма–Лиувилля с нулевыми граничными условиями (в дальнейшем значок тильды опускается):

$$\begin{aligned} \zeta \omega^2 u + \alpha^2 u'' &= \alpha^2 \eta w' \\ (\omega^2 - \alpha^2 \eta^2) w + w'' &= -\alpha^2 \eta u' + \omega^2 \delta \phi \cos \varphi_S \\ \omega^2 v + \beta^2 v'' &= \tau \gamma^2 \rho^2 \phi'' + \omega^2 \delta \phi \sin \varphi_S \\ (\omega^2 - 2\kappa \gamma^2 \sin \varphi_S) \phi + \gamma^2 \phi'' &= \tau \gamma^2 v'' + \omega^2 \delta \rho^{-2} (v \sin \varphi_S + w \cos \varphi_S). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В первое уравнение системы (2.4) введен множитель ζ , принимающий значения 1 или 0. При $\zeta = 0$ не учитываются продольные силы инерции и сопутствующие им волны, малые в наиболее интересном частотном диапазоне. При этом эффект упругого растяжения провода сохраняется.

В уравнениях (2.4) в дополнение к ранее установленным соотношениям фазовых скоростей α, β, γ введены безразмерные величины:

$$\tau = dk_S = dk_{S0}\phi, \quad \eta = Lk_S = Lk_{S0}\phi, \quad \delta = \Delta/d, \quad \rho = r/d = \vartheta/\sqrt{8}.$$

Оценим практически возможные диапазоны изменения безразмерных коэффициентов. Увеличение массы можно оценить исходя из того, что соотношение масс $\mu = m/m_0$ не может превышать соотношение предельно допустимого и эксплуатационного натяжения провода, которое примерно равно 5 [3], поэтому примем, что $1 < \mu < 5$. Из (2.2) следует, что верхняя граница актуального диапазона изменения коэффициента κ составляет: $\kappa_{\max} \approx 50$. Для сечений гололеда, симметричных относительно линии центров ОС, имеет место неравенство $\Delta \leq r$. Эксплуатационные характеристики проводов [9] позволяют оценить остальные параметры: $\tau \ll 10^{-4}$, $\eta \approx 0.2 - 0.3$. Наименее определена величина ρ : можно считать $\rho = O(1)$, исходя из точной нижней границы $\rho_{\min} = 1/\sqrt{8}$.

Учитывая, что $\alpha^2 \gg 1$, для характерных пролетов длиной $L \approx 300$ м и $c_w \approx 100$ м/с в диапазоне частот до 5 Гц безразмерная частота лежит в интервале $0 < \omega < 100$. Приводимые в дальнейшем числовые оценки относятся к распространенному на практике пролету ВЛЭ с проводом АС 150/24 длиной 300 м при стреле провисания в исходном состоянии 10 м. Механические характеристики провода: погонная масса $m_0 = 0.6$ кг/м, диаметр $d = 17$ мм, жесткость на растяжение $B = 15$ МН, жесткость на кручение $D = 23$ МН·м². Для него (при выбранном масштабе частоты) значению $\omega = 1$ соответствует частота, равная примерно 0.05 Гц. Для параметров, характеризующих гололедную оболочку, условно принято: $\mu = 2$, $\vartheta = 2$, $\delta = 0.1$.

Система уравнений (2.4) имеет переменные коэффициенты, связанные с изменением угла статического закручивания ϕ_S провода по длине пролета. Учитывая неизбежную неопределенность распределения гололедных отложений, заменим тригонометрические функции этого угла их средними по длине значениями:

$$S(\kappa) = \int_0^1 \sin \phi_S(x, \kappa) dx, \quad C(\kappa) = \int_0^1 \cos \phi_S(x, \kappa) dx.$$

Полагая $(u, w, v, \phi) = (U, W, V, \Phi)e^{i\lambda x}$ и подставляя эти выражения в уравнения (2.4), придем к системе однородных уравнений относительно амплитуд U, V, W, Φ с постоянными коэффициентами:

$$\mathbf{M}(\lambda, \omega) \begin{pmatrix} U \\ W \\ V \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & q_{24} \\ 0 & 0 & q_{33} & q_{34} \\ 0 & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ W \\ V \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & d_1 \\ d_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ W \\ V \\ \Phi \end{pmatrix} = 0, \quad (2.5)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} q_{11} &= \zeta\omega^2 - \alpha^2\lambda^2, \quad q_{12} = -q_{21} = -i\lambda\alpha^2\eta, \quad q_{22} = \omega^2 - \alpha^2\eta^2 - \lambda^2 \\ q_{24} &= -\omega^2\delta C, \quad q_{33} = \omega^2 - \beta^2\lambda^2, \quad q_{34} = \tau\rho^2\gamma^2 - \delta\omega^2 S, \quad q_{42} = -\delta\omega^2 C/\rho^2 \\ q_{43} &= \tau\gamma^2\lambda^2 - \delta\omega^2 S/\rho^2, \quad q_{44} = \omega^2 - 2\kappa\gamma^2 S - \gamma^2\lambda^2. \end{aligned}$$

Диагональные элементы матрицы q_{ii} определяют парциальные квази-струнные колебания, когда все виды волн, кроме одного, “заморожены”. Элементы q_{12}, q_{21} , образующие подматрицу D_1 , связывают продольные и поперечные волны в вертикальном направлении. Элементы q_{34}, q_{43} , образующие подматрицу D_2 , связывают крутильные и поперечные волны маятниковых колебаний в горизонтальном направлении. Элементы q_{24}, q_{42} , пропорциональные эксцентриситету Δ , определяют связь этих подматриц. При отсутствии гололеда или при его осесимметричном распределении по сечению провода эксцентриситет $\Delta = 0$, матрица M становится блочно-диагональной, а системы для определения форм U, W и V, Φ независимыми. Раскрывая определитель матрицы системы (2.5), приходим к уравнению, связывающему волновые числа λ с частотой ω :

$$D(\omega, \lambda) = \begin{vmatrix} D_1 & d_1 \\ d_2 & D_2 \end{vmatrix} = |D_1||D_2| - q_{11}q_{33}\omega^4 C^2 \delta^2 / \rho^2. \quad (2.6)$$

3. Парциальные колебания. Прежде чем перейти к общему случаю, рассмотрим выделенные группы парциальных колебаний.

3.1. Продольно-поперечные колебания в вертикальной плоскости. Прежде всего рассмотрим парциальную подсистему $D_1(UW)^T = 0$, описывающую продольные и поперечные колебания в вертикальной плоскости. Обозначая: $z = \lambda^2$ и сохраняя продольную силу инерции ($\zeta = 1$), запишем детерминант подматрицы D_1 :

$$|D_1| = \alpha^2 \left[z^2 - (\alpha^{-2} + 1)\omega^2 z + \alpha^{-2}\omega^2(\omega^2 - \alpha^2\eta^2) \right] = 0. \quad (3.1)$$

Корни этого полинома вещественны, а их знаки различаются в условно низко- и высокочастотном диапазонах, разграниченных критическим значением $\omega_{cr}^{(1)} = \alpha\eta$; при $\omega > \alpha\eta$ они положительны, а при $\omega \leq \alpha\eta$ имеют различные знаки. Применительно к распространенным типам проводов и длин пролетов эта величина составляет 0.3–1.0 Гц, то есть лежит в диапазоне частот, на которых регистрируются явления пляски проводов [2, 3]. Отметим, что если не учитывать растяжение провода, то рассматриваемая подсистема сведется к единственному уравнению $(\omega^2 - \alpha^2\eta^2)w + w'' = 0$, которое в низкочастотной области не имеет колебательных решений, в результате чего часть низких частот окажется потерянной.

Не выписывая выражений для корней полинома, оценим их соотношение. Так как скорости продольных и поперечных волн сильно различаются и $\alpha^2 \gg 1$, следует ожидать, что волновые числа и, следовательно, корни $z_{1,2}$ также будут весьма различными. Из теоремы Виета следуют оценки: $z_1 = O(\omega^2)$, $z_2 = O\left((\omega/\alpha)^2 - \eta^2\right)$ и соотношение: $z_1 \gg |z_2|$. Больший корень соответствует поперечным, а меньший – продольным волнам.

Общее решение подсистемы $D_1(UW)^T = 0$ в общем случае имеет вид:

$$W_k = \sum_{k=1}^4 A_k e^{i\lambda_k x}, \quad U_k = \sum_{k=1}^4 iA_k \sigma_k e^{i\lambda_k x} = \sum_{k=1}^4 A_k \sigma_k e^{i(\lambda_k x + \pi/2)}, \quad (3.2)$$

а из первого уравнения системы (2.5) для каждого λ_k ($k = 1, \dots, 4$) следуют соотношения: $U_k = -q_{12}(\lambda_k)/q_{11}(\lambda_k) = i\sigma_k W_k$, определяющие коэффициенты распределения амплитуд.

В высокочастотной области корни полинома (3.1) вещественны и положительны: $z_{1,2} = \chi_{1,2}^2$ и волновые числа вещественны:

$$\lambda_{1,2} = \pm\chi_1 \approx \pm\tilde{\chi}_1 = \pm\omega, \quad \lambda_{3,4} = \pm\chi_2 \approx \pm\tilde{\chi}_2 = \pm\sqrt{(\omega/\alpha)^2 - \eta^2}.$$

Первая пара соответствует медленным, преимущественно поперечным, вторая — быстрым, преимущественно продольным волнам. Им соответствуют коэффициенты распределения:

$$\sigma_{1,2} = \pm\delta_1, \quad \sigma_{3,4} = \pm\delta_2, \quad \delta_1 = \frac{\eta\alpha^2\chi_1}{\omega^2 - \alpha^2\chi_1^2}, \quad \delta_2 = \frac{\eta\alpha^2\chi_2}{\omega^2 - \alpha^2\chi_2^2}.$$

Общее решение (3.2) может быть записано в эквивалентной тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} W &= C_1 \cos \chi_1 x + C_2 \sin \chi_1 x + C_3 \cos \chi_2 x + C_4 \sin \chi_2 x \\ U &= -\delta_1 C_1 \sin \chi_1 x + \delta_1 C_2 \cos \chi_1 x - \delta_2 C_3 \sin \chi_2 x + \delta_2 C_4 \cos \chi_2 x. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В низкочастотной области один из корней полинома (3.1) $z_1 = \chi_1^2$ положителен, другой отрицателен: $z_2 = -\chi_2^2$. Это дает пару вещественных волновых чисел: $\lambda_{1,2} = \pm\chi_1$ и пару мнимых: $\lambda_{3,4} = \pm i\chi_2$. Им соответствуют коэффициенты распределения: $\sigma_{1,2} = \pm\delta_1$, $\sigma_{3,4} = \pm i\delta_3$, где $\delta_3 = \eta\alpha^2\chi_2/(\omega^2 + \alpha^2\chi_2^2)$, и общее решение:

$$\begin{aligned} W &= C_1 \cos \chi_1 x + C_2 \sin \chi_1 x + C_3 \operatorname{ch} \chi_2 x + C_4 \operatorname{sh} \chi_2 x \\ U &= -\delta_1 C_1 \sin \chi_1 x + \delta_1 C_2 \cos \chi_1 x + \delta_3 C_3 \operatorname{sh} \chi_2 x + \delta_3 C_4 \operatorname{ch} \chi_2 x. \end{aligned} \quad (3.4)$$

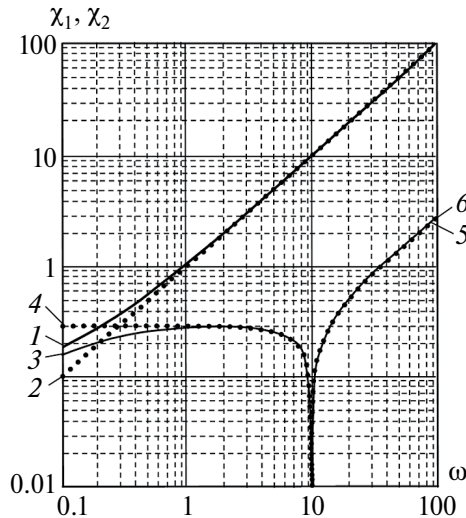


Рис. 2. Зависимости модулей волновых чисел χ_1, χ_2 от частоты ω . Сплошные линии — точные значения, точечные — приближенные. Цифрами от 1 до 6 обозначены соответственно зависимости: $\chi_1(\omega)$, $\tilde{\chi}_1(\omega)$; $-\chi_2(\omega)$, $-\tilde{\chi}_2(\omega)$; $\chi_2(\omega)$, $\tilde{\chi}_2(\omega)$.

На рис. 2 показаны точные зависимости параметров $\chi_{1,2}$ и их приближенных значений от частоты. Как видно, они близки практически во всем актуальном диапазоне частот, причем $\chi_1 \gg \chi_2$. В данном случае критическая частота $\omega_{cr}^{(1)} = 9.91$.

В дальнейшем используется раздельный анализ мод симметричных (S -мод) и антисимметричных (A -мод). Помещая начало координат в центре пролета, сохраним в (3.3) и (3.4) поочередно только симметричные (четные по w , нечетные по u) и антисимметричные (нечетные по w , четные по u) слагаемые. Например, симметричные моды в высокочастотной области согласно (3.3):

$$W = C_1 \cos \chi_1 x + C_3 \cos \chi_2 x, \quad U = -\delta_1 C_1 \sin \chi_1 x - \delta_3 C_3 \sin \chi_2 x. \quad (3.5)$$

Подчиняя W, U однородным граничным условиям при $x = \pm 1/2$, получим частотное уравнение: $D_{1S} = \delta_2 \cos(\chi_1/2) \cdot \sin(\chi_2/2) - \delta_1 \sin(\chi_1/2) \cdot \cos(\chi_2/2) = 0$. После определения спектра собственных частот ω_k , для каждой из них, полагая $C_{1k} = 1$, из первого равенства (3.5) определим $C_{3k} = -\cos(\chi_1(\omega_k)/2) / \cos(\chi_2(\omega_k)/2)$ и соответствующие моды W_k, U_k . Аналогично для низкочастотной области, а также для A -мод. Результаты сведены в табл. 1, где строки соответствуют типам мод, а столбцы — частотным областям и использованы обозначения:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\cos(\chi_1/2)}{\cos(\chi_2/2)}, \quad \psi_2 = \frac{\sin(\chi_1/2)}{\sin(\chi_2/2)}, \quad \psi_3 = \frac{\cos(\chi_1/2)}{\operatorname{ch}(\chi_2/2)}, \quad \psi_4 = \frac{\sin(\chi_1/2)}{\operatorname{sh}(\chi_2/2)} \\ \psi_5 &= \frac{\cos(\chi_1/2)}{\cos(\omega/2)}, \quad \psi_6 = \frac{\sin(\chi_1/2)}{\sin(\omega/2)}. \end{aligned}$$

На рис. 3 приведены значения первых шести частот и формы симметричных (a, b, c) и антисимметричных колебаний (d, e, f). Как видно, начиная примерно с четвертой частоты, между ними устанавливается практически постоянный интервал, что характерно для колебаний прямолинейной струны. Отметим существенное отличие первых мод от “струнных”, следующих закону синуса. Однако, начиная с четвертой-пятой частоты, форма колебаний приближается к синусоидальной.

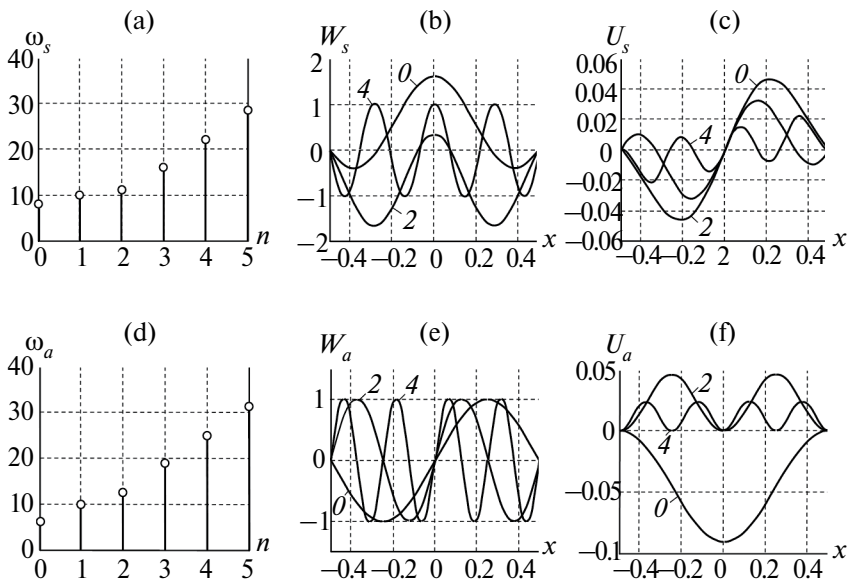
3.2. Маятниково-крутильные колебания. Рассмотрим вторую парциальную подсистему $D_2(V\Phi)^T = 0$, описывающую крутильные и поперечные (маятниковые) колебания в горизонтальной плоскости. Пренебрегая слагаемыми $O(\tau^2)$ имеем:

$$\begin{aligned} |D_2| &= \gamma^2 \beta^2 \left[z^2 - z \left(\frac{\omega^2}{\gamma^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} - 2\kappa S - 2\delta \varepsilon S \frac{\omega^2}{\beta^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega^4}{\beta^2 \gamma^2} \left(1 - \frac{\delta^2}{\rho^2} S^2 \right) - 2\kappa S \frac{\omega^2}{\beta^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для этой подсистемы также существует критическая частота, разделяющая высоко- и низкочастотные диапазоны: $\omega_{cr}^{(2)} = \sqrt{2\gamma^2 \kappa S / (1 - \delta^2 S^2 / \rho^2)} \approx \gamma \sqrt{2\kappa S}$.

Таблица 1. Уравнения и моды колебаний в вертикальной плоскости

| UW | Низкие частоты | Высокие частоты |
|----------|---|--|
| <i>S</i> | $D_{1S} = \delta_3 \cos \frac{\chi_1}{2} \operatorname{sh} \frac{\chi_2}{2} +$ $+ \delta_1 \sin \frac{\chi_1}{2} \operatorname{ch} \frac{\chi_2}{2} = 0$ $W = \cos \chi_1 x - \psi_3 \operatorname{ch} \chi_2 x$ $U = -\delta_1 \sin \chi_1 x - \delta_3 \psi_3 \operatorname{sh} \chi_2 x$ | $D_{1S} = \delta_2 \cos \frac{\chi_1}{2} \sin \frac{\chi_2}{2} -$ $-\delta_1 \sin \frac{\chi_1}{2} \cos \frac{\chi_2}{2} = 0$ $W = \cos \chi_1 x - \psi_1 \cos \chi_2 x$ $U = -\delta_1 \sin \chi_1 x + \delta_2 \psi_1 \sin \chi_2 x$ |
| <i>A</i> | $D_{1S} = \delta_3 \sin \frac{\chi_1}{2} \operatorname{ch} \frac{\chi_2}{2} -$ $-\delta_1 \cos \frac{\chi_1}{2} \operatorname{sh} \frac{\chi_2}{2} = 0$ $W = \sin \chi_1 x - \psi_4 \operatorname{sh} \chi_2 x$ $U = \delta_1 \cos \chi_1 x - \delta_3 \psi_4 \operatorname{ch} \chi_2 x$ | $D_{1S} = \delta_2 \sin \frac{\chi_1}{2} \cos \frac{\chi_2}{2} -$ $-\delta_1 \sin \frac{\chi_2}{2} \cos \frac{\chi_1}{2} = 0$ $W = \sin \chi_1 x - \psi_2 \sin \chi_2 x$ $U = \delta_1 \cos \chi_1 x - \delta_2 \psi_2 \cos \chi_2 x$ |

**Рис. 3.** Зависимость частот от номера гармоники симметричных и антисимметричных колебаний (а, д); формы колебаний: поперечные (б, с) и продольные (е, ф) компоненты. Цифрами обозначены номера гармоник.

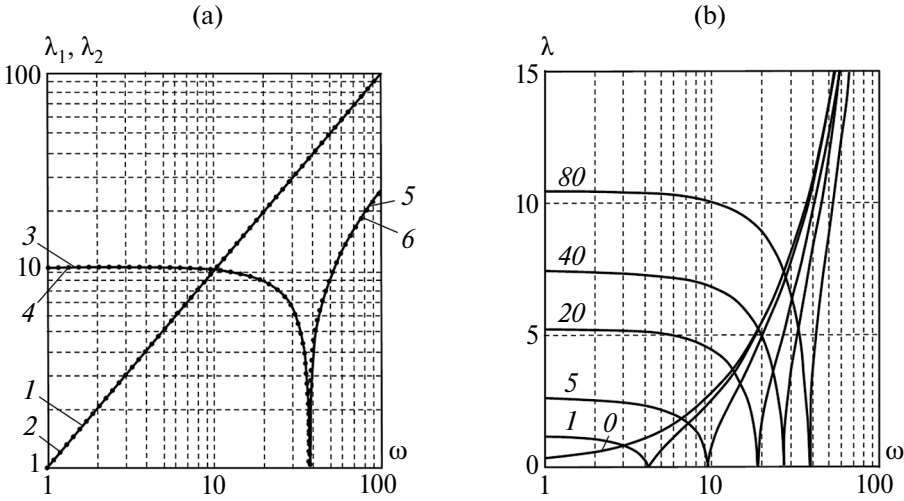


Рис. 4. а) — точные и приближенные зависимости волновых чисел от частоты; цифрами от 1 до 6 обозначены соответственно зависимости: $\lambda_1(\omega)$, $\tilde{\lambda}_1(\omega)$, $-\lambda_2(\omega)$, $-\tilde{\lambda}_2(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$, $\tilde{\lambda}_2(\omega)$; б) — зависимости волновых чисел крутильных колебаний от частоты при различных значениях параметра $\kappa = 80, 40, 20, 5, 1, 0$, характеризующего обледенение.

Отметим, что при уменьшении угла статического закручивания φ_S инерционная связь поперечной и крутильной волн ослабевает, низкочастотная область сокращается и при $S = 0$ (горизонтально ориентированная гололедная оболочка) полностью исчезает. Отмеченные ранее свойства корней полинома сохраняются, поэтому будем сохранять принятые обозначения волновых чисел, параметров $\chi_{1,2}$ и коэффициентов $\delta_{1,2,3}$, которые теперь рассчитываются на основе корней полинома (3.6). Отличие состоит в том, что соотношение амплитуд, определяемое из третьего уравнения системы (2.5), имеет вид $\Phi_k = \sigma_k V_k$, где $\sigma_k = q_{33}(\lambda_k)/q_{34}(\lambda_k)$ и все коэффициенты распределения вещественны. Отметим, что последнее уравнение системы (2.4) для крутильной компоненты, взятое отдельно от поступательных компонент: $\ddot{\varphi} - c_\varphi^2 \varphi'' + 2mg\Delta\varphi \sin \varphi_S = 0$, ниже критической частоты $\omega_{cr}^{(2)}$ не имеет колебательного решения.

При условиях, выполняющихся для большинства проводов ВЛЭ ($\gamma^2 \gg 1$, $\tau \ll 1$, $\delta^2/\rho^2 \ll 1$), оценка корней полинома дает:

$$z_1 = \chi_1^2 \approx \tilde{z}_1 = \omega^2/\beta^2, \quad |z_2| = \chi_2^2 \approx |\tilde{z}_2| = \left| \omega^2/\gamma^2 - 2\kappa S \right|. \quad (3.7)$$

Первый корень соответствует медленным маятниковым колебаниям, частоты которых близки к частотам поперечных вертикальных, а второй — относительно быстрым крутильным. Проверка показывает, что эта оценка так же, как и в случае колебаний первой группы, справедлива для типовых проводов ВЛЭ. Это видно из графиков на рис. 4,а, где приведены практически совпадающие зависимости точных ($\lambda_{1,2} = \sqrt{z_{1,2}}$) и приближенных ($\tilde{\lambda}_{1,2} = \sqrt{|\tilde{z}_{1,2}|}$) волновых чисел от частоты. Интересно отметить, что для крутильных колебаний эти зависимости в низкочастотной области (в данном случае $\omega_{cr}^{(2)} \approx 40$) имеют аномальный характер: волновое число не уменьшается с частотой, что

характерно для чисто упругих крутильных колебаний жестких конструкций типа валов.

В случае относительно гибкого провода в выражении $|\tilde{z}_2|$ роль первого слагаемого, связанного с крутильной жесткостью, на низких частотах падает и основную роль играет второе — связанное с силами гравитации при несовпадении центров массы и жесткости в поперечном сечении провода.

Эту особенность крутильных колебаний иллюстрируют кривые на рис. 4, b, где приведены зависимости волновых чисел от частоты при различных значениях параметра κ , обобщенно характеризующего обледенение. Кривые соответствуют значениям $\kappa = 80, 40, 20, 5, 1, 0$. Видно, что при уменьшении этого параметра аномалия смещается в область низких частот и исчезает при отсутствии гололеда, а дисперсионная зависимость восстанавливает нормальный вид $\lambda \sim \omega$. Эта особенность должна играть существенную роль при колебаниях проводов, в особенности при длинных пролетах ВЛЭ.

Общее решение подсистемы $D_2(V\Phi)^T = 0$, таким образом, имеет вид:

$$V_k = \sum_{k=1}^4 B_k e^{i\lambda_k x}, \quad \Phi_k = \sum_{k=1}^4 B_k \sigma_k e^{i\lambda_k x}.$$

В высокочастотной области:

$$\lambda_{1,2} = \pm\chi_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm\chi_2; \quad \sigma_{1,2} = \frac{\omega^2 - \chi_1^2 \beta^2}{\delta \omega^2 S - \tau \gamma^2 \rho^2 \chi_1^2} = \delta_1,$$

$$\sigma_{3,4} = \frac{\omega^2 - \chi_2^2 \beta^2}{\delta \omega^2 S - \tau \gamma^2 \rho^2 \chi_2^2} = \delta_2$$

$$V = C_1 \cos \chi_1 x + C_2 \sin \chi_1 x + C_3 \cos \chi_2 x + C_4 \sin \chi_2 x$$

$$\Phi = \delta_1 C_1 \cos \chi_1 x + \delta_1 C_2 \sin \chi_1 x + \delta_2 C_3 \cos \chi_2 x + \delta_2 C_4 \sin \chi_2 x.$$

В низкочастотной области:

$$\lambda_{1,2} = \pm\chi_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\chi_2; \quad \sigma_{1,2} = \delta_1, \quad \sigma_{3,4} = \frac{\omega^2 + \chi_2^2 \beta^2}{\delta \omega^2 S + \tau \gamma^2 \rho^2 \chi_2^2} = \delta_3$$

Таблица 2. Уравнения и моды маятниково-крутильных колебаний

| $V\Phi$ | Низкие частоты | Высокие частоты |
|---------|---|---|
| S | $D_{2S} = \cos \frac{\chi_1}{2} = 0$ $V = \cos \chi_1 x - \psi_3 \operatorname{ch} \chi_2 x$ $\Phi = \delta_1 \cos \chi_1 x - \delta_3 \psi_3 \operatorname{ch} \chi_2 x$ | $D_{2S} = \cos \frac{\chi_1}{2} \cos \frac{\chi_2}{2} = 0$ $V = \cos \chi_1 x - \psi_1 \cos \chi_2 x$ $\Phi = \delta_1 \cos \chi_1 x - \delta_2 \psi_1 \cos \chi_2 x$ |
| A | $D_{2A} = \sin \frac{\chi_1}{2} = 0$ $V = \sin \chi_1 x - \psi_4 \operatorname{sh} \chi_2 x$ $\Phi = \delta_1 \sin \chi_1 x - \delta_3 \psi_4 \operatorname{sh} \chi_2 x$ | $D_{2A} = \sin \frac{\chi_1}{2} \sin \frac{\chi_2}{2} = 0$ $V = \sin \chi_1 x - \psi_2 \sin \chi_2 x$ $\Phi = \delta_1 \sin \chi_1 x - \delta_2 \psi_2 \sin \chi_2 x$ |

$$V = C_1 \cos \chi_1 x + C_2 \sin \chi_1 x + C_3 \operatorname{ch} \chi_2 x + C_4 \operatorname{sh} \chi_2 x$$

$$\Phi = \delta_1 C_1 \cos \chi_1 x + \delta_1 C_2 \sin \chi_1 x + \delta_3 C_3 \operatorname{ch} \chi_2 x + \delta_3 C_4 \operatorname{sh} \chi_2 x.$$

Разделяя моды на симметричные и антисимметричные, получим соответствующие частотные уравнения и собственные функции. В данном случае S -модам соответствуют четные, A -модам — нечетные слагаемые в обоих выражениях. Результаты приведены в табл. 2. В правых частях D_{2S} , D_{2A} опущены монотонные по частоте множители, не влияющие на положение их нулей. Отметим, что функции (3.5) сохраняют вид и в этом случае, но параметры $\chi_{1,2}$, $\delta_{1,2,3}$ — теперь функции корней полинома (3.6).

Искомые частоты являются нулями функций $\cos \chi_{1,2}$ и $\sin \chi_{1,2}$. Поэтому обозначим: Ω_{C1} — множество нулей функции $\cos(\chi_1/2)$, Ω_{C2} — множество нулей функции $\cos(\chi_2/2)$ в высокочастотном диапазоне. Аналогично: Ω_{S1} , Ω_{S2} — для нулей функций $\sin(\chi_1/2)$ и $\sin(\chi_2/2)$. Используя приближенные выражения (3.2.2) для параметров $\chi_{1,2}$, найдем элементы этих множеств:

$$\Omega_{C1} = \{(2k+1)\beta\pi\}, \quad \Omega_{C2} = \left\{ \gamma \sqrt{2KS + \pi^2 (2k+1)^2} > \omega_{cr}^{(2)} \right\}$$

$$\Omega_{S1} = \{2k\beta\pi\}, \quad \Omega_{S2} = \left\{ \gamma \sqrt{2KS + 4k^2 \pi^2} > \omega_{cr}^{(2)} \right\}.$$

Спектры симметричных, антисимметричных мод и общий спектр формируются объединением этих множеств:

$$\Omega_S = \Omega_{C1} \cup \Omega_{C2}, \quad \Omega_A = \Omega_{S1} \cup \Omega_{S2}, \quad \Omega_{V\phi} = \Omega_S \cup \Omega_A.$$

Коэффициенты $k = 0, 1, 2, \dots$ — целые числа, при которых удовлетворяются условия $\cos \chi_{1,2} = 0$, $\sin \chi_{1,2} = 0$, поэтому их элементы, составляющие множества Ω_S и Ω_A , “перемешаны”; для придания полученному набору принятой формы спектра необходимо упорядочить элементы в порядке возрастания. Результат расчета частот приведен на рис. 5.

Формы колебаний в данном случае практически на всех частотах близки к “струнным” и не обнаруживают отмеченных ранее особенностей вертикально поляризованных низкочастотных мод.

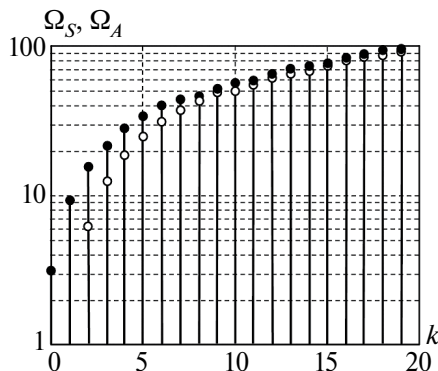


Рис. 5. Парциальные частоты маятниково-крутильных колебаний: симметричные (заполненные кружки) и антисимметричные частоты (пустые кружки).

4. Связанные колебания. Аналитическое решение. Рассмотрим теперь общую систему (2.5), описывающую связанные колебания, пренебрегая при этом тангенциальной силой инерции и положив в первом уравнении $\zeta = 0$. В этом случае детерминант (2.6) примет вид:

$$D(\omega, \lambda) = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 z (z - \omega^2) D_0(z) = 0 \quad (4.1)$$

$$D_0 = z^2 - z \left(\frac{\omega^2}{\beta^2} + \frac{\omega^2}{\gamma^2} - 2\kappa S - 2\delta \varepsilon S \frac{\omega^2}{\beta^2} \right) + \frac{\omega^4}{\gamma^2 \beta^2} \left(1 - \frac{\delta^2}{\rho^2} \right) - 2\kappa S \frac{\omega^2}{\beta^2}.$$

Корни полинома $D_0(z)$ обладают тем же свойством, что и корни полиномов (3.1), (3.6), но к ним добавляется корень $\chi_3 = \omega^2$ и соответствующая ему пара новых волновых чисел: $\lambda_{5,6} = \pm \sqrt{\chi_3} = \pm \omega$ вертикально поляризованных поперечных волн. Критическая частота в данном случае равна $\omega_{cr}^{(1-2)} = \sqrt{2\gamma^2 \kappa S / (1 - \delta^2 / \rho^2)} \approx \gamma \sqrt{2\kappa S}$, что практически близко к $\omega_{cr}^{(2)}$. Таким образом, в высокочастотной области:

$$\lambda_{1,2} = \pm \chi_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm \chi_2, \quad \lambda_{5,6} = \pm \omega,$$

в низкочастотной:

$$\lambda_{1,2} = \pm \chi_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i \chi_2, \quad \lambda_{5,6} = \pm \omega.$$

Нулевой корень — следствие пренебрежения продольной силой инерции; это, однако, не означает пренебрежения упругими тангенциальными смещениями U , которые сохраняются и квазистатически “отслеживают” поперечные смещения W , но сами по себе практического интереса обычно не представляют. В данном случае имеют место оценки:

$$\chi_1 \approx \omega / \beta, \quad \chi_2 \approx \sqrt{(\omega / \gamma)^2 - 2\kappa S}.$$

Общее решение системы (2.5) и коэффициенты распределения имеют вид:

$$W_k = \sum_{k=1}^6 B_k e^{i\lambda_k x}, \quad V_k = \sum_{k=1}^6 B_k \sigma_k e^{i\lambda_k x}, \quad \Phi_k = \sum_{k=1}^6 B_k \xi_k e^{i\lambda_k x}$$

$$\sigma_k = q_{34}(\lambda_k) q_{42}(\lambda_k) / |D_2(\lambda_k)|, \quad \xi_k = q_{33}(\lambda_k) q_{42}(\lambda_k) / |D_2(\lambda_k)|.$$

Так как среди них есть попарно равные, обозначим:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \delta_1, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \delta_2, \quad \sigma_5 = \sigma_6 = \delta_3; \\ \xi_1 = \xi_2 = \delta_4, \quad \xi_3 = \xi_4 = \delta_5, \quad \xi_5 = \xi_6 = \delta_6.$$

Не выписывая подробные выражения, заметим только, что они вычисляются на базе решений уравнения (4.1) с учетом различия выражений волновых чисел в низко- и высокочастотной областях. Окончательно решение в высокочастотной области имеет вид:

$$\begin{aligned}
W &= C_1 \cos \chi_1 x + C_2 \sin \chi_1 x + C_3 \cos \chi_2 x + \\
&\quad + C_4 \sin \chi_2 x + C_5 \cos \omega x + C_6 \sin \omega x \\
V &= C_1 \delta_1 \cos \chi_1 x + C_2 \delta_1 \sin \chi_1 x + C_3 \delta_2 \cos \chi_2 x + \\
&\quad + C_4 \delta_2 \sin \chi_2 x + C_5 \delta_3 \cos \omega x + C_6 \delta_3 \sin \omega x \\
\Phi &= C_1 \delta_4 \cos \chi_1 x + C_2 \delta_4 \sin \chi_1 x + C_3 \delta_5 \cos \chi_2 x + \\
&\quad + C_4 \delta_5 \sin \chi_2 x + C_5 \delta_6 \cos \omega x + C_6 \delta_6 \sin \omega x.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Рассматривая симметричные моды и подставляя четные составляющие выражений (4.2) в однородные граничные условия при $x = 1/2$, легко видеть, что соответствующие детерминанты (частотные уравнения) имеют вид: $D_S \sim \cos(\chi_1/2)\cos(\chi_2/2)\cos(\omega/2)$ в высокочастотной области и $D_S \sim \cos(\chi_1/2)\cos(\omega/2)$ в низкочастотной (с точностью до монотонного множителя – функции коэффициентов распределения $f(\delta_k)$, который может быть опущен). Следовательно, спектр собственных частот состоит из множества нулей этих функций:

$$\omega_k^{(1)} = 2\pi k, \quad \omega_k^{(2)} = 2\pi k\beta, \quad \omega_k^{(3)} = \gamma\sqrt{2\kappa S + (2\pi k)^2}.$$

Аналогичный результат имеет место для нечетных мод при замене синусов на косинусы:

$$\omega_k^{(1)} = \pi(2k - 1), \quad \omega_k^{(2)} = \beta\pi(2k - 1), \quad \omega_k^{(3)} = \gamma\sqrt{2\kappa S + \pi^2(2k - 1)^2}.$$

Сравнение показывает, что спектр $\Omega_{VW\Phi}$ полной системы (2.5) отличается от спектра $\Omega_{V\Phi}$ системы $D_2(V\Phi)^T = 0$ только множеством частот $\omega_k^{(1)} = \pi(2k + 1)/2$ и $\omega_k^{(2)} = k\pi$. Однако в рассматриваемом примере фазовые скорости поперечных вертикально и горизонтально поляризованных волн практически совпадают и их отношение $\beta \approx 1$. Это означает наличие “почти кратных частот” парциальных вертикальных и маятниковых колебаний. Это обстоятельство может играть существенную роль в процессе самовозбуждения галоупирования проводов в ветровом потоке.

Окончательные результаты сведены в табл. 3. В ней обозначено: $a_1(\omega) = (\delta_1 - \delta_3)/(\delta_3 - \delta_2)$, $b_1(\omega) = (\delta_2 - \delta_1)/(\delta_3 - \delta_2)$, причем параметры $\chi_{1,2}$, $\delta_{1...6}$, $\psi_{1...6}$ теперь являются функциями корней полинома (4.1).

В заключение заметим, что сведение определения частот к поиску нулей тригонометрических функций специальных аргументов, например $\cos(\chi_2/2) = 0$, эквивалентно замене расчета реального провода к расчету некоторых эквивалентных струн: $\cos(\omega L/a_{eq}) = 0$ с фазовыми скоростями a_{eq} , достаточно просто выражающимися через параметры провода и характеристики гололедной оболочки.

5. Метод Галеркина. Рассмотрим совместные колебания провода без принятых ранее упрощений, то есть сохраним в уравнениях все компоненты сил инерции и откажемся от усреднения угла статического закручивания провода по длине пролета. Применим к полной системе (2.5) метод Галеркина, используя в качестве базисных функции $\theta_k = \sin k\pi x$, удовлетворяющие граничным условиям. Решение примем в виде:

$$(u \ w \ v \ \varphi)^T = \sum_{k=1}^K (a_k \ b_k \ c_k \ d_k)^T \theta_k. \tag{5.1}$$

Таблица 3. Уравнения и моды связанных колебаний

| $WV\Phi$ | Низкие частоты | Высокие частоты |
|----------|---|--|
| S | $D_{12S} = \cos \frac{\chi_1}{2} \cos \frac{\omega}{2} = 0$ $W = \cos \chi_1 x + a_2 \psi_3 \operatorname{ch} \chi_2 x +$ $+ b_2 \psi_5 \cos \omega x$ $V = \delta_1 \cos \chi_1 x + \delta_2 a_2 \psi_3 \operatorname{ch} \chi_2 x +$ $+ \delta_3 b_2 \psi_5 \cos \omega x$ $\Phi = \delta_4 \cos \chi_1 x + \delta_5 a_2 \psi_3 \operatorname{ch} \chi_2 x +$ $+ \delta_6 b_2 \psi_5 \cos \omega x$ | $D_{12S} = \cos \frac{\chi_1}{2} \cos \frac{\chi_2}{2} \cos \frac{\omega}{2} = 0$ $W = \cos \chi_1 x + a_1 \psi_1 \cos \chi_2 x +$ $+ b_1 \psi_5 \cos \omega x$ $V = \delta_1 \cos \chi_1 x + \delta_2 a_1 \psi_1 \cos \chi_2 x +$ $+ \delta_3 b_1 \psi_5 \cos \omega x$ $\Phi = \delta_4 \cos \chi_1 x + \delta_5 a_1 \psi_1 \cos \chi_2 x +$ $+ \delta_6 b_1 \psi_5 \cos \omega x$ |
| A | $D_{12A} = \sin \frac{\chi_1}{2} \sin \frac{\omega}{2} = 0$ $W = \sin \chi_1 x + a_1 \psi_4 \operatorname{sh} \chi_2 x +$ $+ b_1 \psi_6 \sin \omega x$ $V = \delta_1 \sin \chi_1 x + \delta_2 a_1 \psi_4 \operatorname{sh} \chi_2 x +$ $+ \delta_3 b_1 \psi_6 \sin \omega x$ $\Phi = \delta_4 \sin \chi_1 x + \delta_5 a_1 \psi_4 \operatorname{sh} \chi_2 x +$ $+ \delta_6 b_1 \psi_6 \sin \omega x$ | $D_{12A} = \sin \frac{\chi_1}{2} \sin \frac{\chi_2}{2} \sin \frac{\omega}{2} = 0$ $W = \cos \chi_1 x + a_1 \psi_1 \cos \chi_2 x +$ $+ b_1 \psi_5 \cos \omega x$ $V = \delta_1 \cos \chi_1 x + \delta_2 a_1 \psi_1 \cos \chi_2 x +$ $+ \delta_3 b_1 \psi_5 \cos \omega x$ $\Phi = \delta_4 \cos \chi_1 x + \delta_5 a_1 \psi_1 \cos \chi_2 x +$ $+ \delta_6 b_1 \psi_5 \cos \omega x$ |

Подставляя эти разложения в (2.5) и требуя ортогональности результата подстановки базисным функциям, получим однородную систему уравнений относительно коэффициентов разложения. Однородная система, которой должны удовлетворять коэффициенты разложений (5.1), имеет вид $M\mathbf{v} = 0$, где объединенная матрица системы размерности $4K \times 4K$ и вектор-столбец неизвестных коэффициентов разложения \mathbf{v} размерностью $4K$ имеют блочную структуру

$$M = \begin{pmatrix} A & C & 0 & 0 \\ -C & F & 0 & G \\ 0 & 0 & B & D \\ 0 & P & H & Q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = (\dots a_k b_k c_k d_k \dots)^T$$

с элементами

$$A_{nk} = (\omega^2 - \alpha^2 k^2 \pi^2) \alpha_{nk}, \quad C_{nk} = -\alpha^2 \eta k \pi \beta_{nk}, \quad F_{nk} = (\omega^2 - \alpha^2 \eta^2 - k^2 \pi^2) \alpha_{nk}$$

$$G_{nk} = -\delta \omega^2 \gamma_{nk}, \quad B_{nk} = (\omega^2 - \beta^2 k^2 \pi^2) \alpha_{nk}, \quad D_{nk} = \tau \gamma^2 \rho^2 k^2 \pi^2 \alpha_{nk} - \delta \omega^2 \chi_{nk}$$

$$P_{nk} = -\delta\omega^2\gamma_{nk}/\rho^2, \quad H_{nk} = \tau\gamma^2k^2\pi^2\alpha_{nk} - \delta\omega^2\chi_{nk}/\rho^2,$$

$$Q_{nk} = \omega^2 - 2\kappa\gamma^2\chi_{nk} - \gamma^2k^2\pi^2\alpha_{nk}.$$

Здесь обозначено:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{nk} \\ \beta_{nk} \end{pmatrix} = \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin k\pi x \\ \cos k\pi x \end{pmatrix} \sin n\pi x dx, \quad \begin{pmatrix} \gamma_{nk} \\ \chi_{nk} \end{pmatrix} = \int_0^1 \begin{pmatrix} \cos f(x) \\ \sin f(x) \end{pmatrix} \sin k\pi x \sin n\pi x dx$$

$$f(x) = 2\pi(1 - e^{-0.075\kappa})x(1 - x).$$

Определитель матрицы $|M|$ определяет частоты связанных колебаний. Результаты расчетов частот приведены на рис. 6.

Для определения собственных функций (форм колебаний) выберем в качестве единицы измерения амплитуду первой гармоники продольных колебаний a_1 , являющуюся элементом с номером 1 в векторе \mathbf{v} , и выразим через нее остальные коэффициенты разложений (3.1) из системы: $M_{(1,1)}\tilde{\mathbf{v}} = -\mathbf{n}_{(1)}$, где $M_{(1,1)}$ — матрица, образованная из M вычеркиванием из нее первого столбца и первой строки, а вектор $\mathbf{n}_{(1)}$ представляет собой вычеркнутый столбец матрицы M , из которого удален элемент с номером 1.

6. Заключение. 1) Получены аналитические решения задачи определения спектра собственных частот и форм пространственных колебаний проводов линий электропередачи с учетом гололедных отложений на поверхности провода.

2) Проанализированы соотношения фазовых скоростей всех типов волн и выделена группа частных подсистем, определяющих парциальные колебания, преимущественно регистрируемые в эксплуатационной практике. Показано, что частотные уравнения парциальных подсистем могут быть сведены к традиционным уравнениям частот прямолинейной струны с “приведенной” фазовой скоростью, которая связана простыми зависимостями с характеристиками реального провода.

3) Исследовано влияние гололедной оболочки на спектр колебаний прово-

да. Обнаружена аномальная зависимость волнового числа крутильных колебаний от частоты, особенно сильно проявляющаяся в случае длинных пролетов ВЛЭ. Это обстоятельство важно в связи с тем, что явление галоупирования принято объяснять сближением высоких частот крутильных мод с низкими частотами поперечных при обледенении провода, однако изменение соотношения этих частот оказывается существенно более сложным.

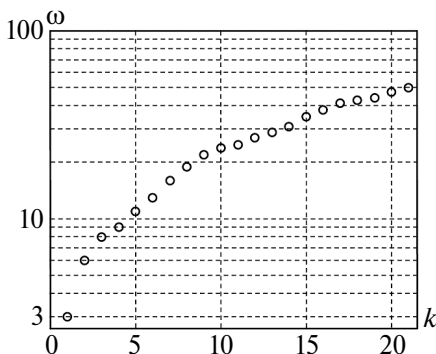


Рис. 6. Частоты связанных колебаний по методу Галеркина.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-19-00678.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колебания проводов воздушных линий под воздействием ветра. Учебно-справочное пособие. Часть 1. Усталостная прочность. Вибрация / Под ред. А.А. Виноградова М.: Электросетьстройпроект, 2005. 185 с.
2. Яковлев Л.В. Пляска проводов на воздушных линиях электропередачи и способы борьбы с нею. М.: Энергопрогресс, 2002. 96 с.
3. Проектирование линий электропередачи сверхвысокого напряжения / Под ред. Г.П. Александрова. С-Пб.: Энергоатомиздат, 1993. 368 с.
4. Zuopeng Wen, Haiwei Xu, Wenjuan Lou. Galloping stability criterion for a 3-DOF system considering aerodynamic stiffness and inertial coupling // J. Struct. Eng. ASCE. 2022. V. 148. № 6. P. 04022048.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0003328](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0003328)
5. Wenjuan Lou, Dengguo Wu, Haiwei Xu, Jiang Yu. Galloping stability criterion for 3-DOF coupled motion of an ice-accreted conductor // J. Struct. Eng. ASCE. 2020. V. 146. № 5. P. 04020071.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0002601](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002601)
6. Haiwei Xu, Kunyang Ding, Guohui Shen, Hang Du, Yong Chen. Experimental investigation on wind-induced vibration of photovoltaic modules supported by suspension cables // Eng. Struct. 2024. V. 299. P. 117125.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.117125>
7. Danilin A.N., Onuchin E.S., Feldshteyn V.A. Model of thermomechanical vibrations of current-carrying conductors // Int. J. Comput. Civil Struct. Eng. 2022. V. 18. № 4. P. 39–48.
<https://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-4-39-48>
8. Valiullin A.A., Danilin A.N., Feldshteyn V.A. Normal vibrations of sagging conductors of overhead power lines // Int. J. Comput. Civil Struct. Eng. 2022. V. 18. № 3. P. 147–158.
<https://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-3-147-158>
9. ГОСТ 839-80. Провода неизолированные для воздушных линий электропередачи. Технические условия.
10. Виноградов А.А., Данилин А.Н., Рабинский Л.Н. Деформирование многослойных проволочных конструкций спирального типа. Математическое моделирование, примеры использования. М.: Изд-во МАИ, 2014. 168 с.
11. Dubois H., Lilien J.L., Dal Maso F. A new theory for frequencies computation of overhead lines bundle conductors // Rev. AIM. Liege. 1991. № 1. P. 46–62.

SPATIAL VIBRATIONS OF POWER TRANSMISSION CONDUCTORS WITH ICE DEPOSITS

A. N. Danilin^{a, *}, E. A. Denisov^{b, **}, V. A. Feldstein^{a, b, ***}^a*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*^b*Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudny, Russia**e-mail: andanilin@yandex.ru,**e-mail: denisov.egor@phystech.edu,***e-mail: dinpro@mail.ru

Abstract. The problem of free spatial vibrations of an overhead power line wire with an asymmetric mass distribution over a cross-section caused by ice deposits on its surface, which give the cross-section an asymmetric shape, is considered. As a result, an eccentricity is formed between the centers of torsional stiffness and mass in the cross section and a dynamic connection of vertical, torsional and “pendulum” vibrations occurs with the output of the wire from the sagging plane. The wire is modeled by a flexible heavy elastic rod that resists only stretching and torsion. The case of a weakly

sagging wire is investigated, when the tension and curvature of its centerline can be considered constant within the span. It is also believed that the elasticity of the ice casing is small compared to the elasticity of the wire. The mathematical model is constructed taking into account the interaction of longitudinal, torsional and transverse waves polarized in the vertical and horizontal planes. The relations of the phase velocities of all types of waves are analyzed and a group of particular subsystems determining partial oscillations is identified. The partial and natural frequencies and waveforms of the wire are studied. Analytical solutions to the problem of determining the spectrum of natural frequencies and forms of spatial vibrations are obtained. The effect of the ice casing on the vibration spectrum of the wire is studied. The dependence of the wave number of torsional vibrations on the frequency has been found, which is determined not only by the elastic-inertial, but also by the gravitational factor, which is strongly manifested for wires in long spans, especially those prone to Aeolian vibration (galloping). This circumstance is essential for the analysis of the Aeolian vibration phenomenon from the positions linking the occurrence of dancing by the convergence of the frequencies of torsional and transverse modes during the icing of the wire. It has been shown that the ratio of these frequencies, which cause an auto-oscillatory process, turns out to be significantly more complex.

Keywords: power transmission, conductor, ice deposits, vibrations, waves, frequencies, vibration modes

REFERENCES:

1. Vibrations of overhead line conductors under the wind influence. Educational and reference manual. Part 1. Fatigue strength. Vibration / Ed. *Vinogradov A.A.M.*: Publishing house of JSC "Elektrosetstroyproekt", 2005. 185 p.
2. *Yakovlev L.V.* Conductor galloping on overhead power lines and ways to combat it. M.: NTF "Energoprogress", "Energetik", 2002. 96 p.
3. Design of ultra-high voltage power lines / Ed. *Alexandrov G.P.* St. Petersburg: "Energoatomizdat", 1993. 368 p.
4. *Zuopeng Wen, Haiwei Xu, Wenjuan Lou.* Galloping stability criterion for a 3-DOF system considering aerodynamic stiffness and inertial coupling // Journal of Structural Engineering-ASCE, 2022, V.148, No.6: 04022048. doi:10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0003328
5. *Wenjuan Lou, Dengguo Wu, Haiwei Xu, Jiang Yu.* Galloping stability criterion for 3-DOF coupled motion of an ice-accreted conductor // Journal of Structural Engineering-ASCE, 2020, V.146, No.5: 04020071. doi:10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002601
6. *Haiwei Xu, Kanyang Ding, Guohui Shen, Hang Du, Yong Chen.* Experimental investigation on wind-induced vibration of photovoltaic modules supported by suspension cables // Engineering Structures, 2024, V.299: 117125. doi:10.1016/j.engstruct.2023.117125
7. *Danilin A.N., Onuchin E.S., Feldshteyn V.A.* Model of thermomechanical vibrations of current-carrying conductors // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2022. V.18. No.4. P.39–48. doi:10.22337/2587-9618-2022-18-4-39-48
8. *Valiullin A.A., Danilin A.N., Feldshteyn V.A.* Normal vibrations of sagging conductors of overhead power lines // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2022. V.18. No.3. P.147–158. doi:10.22337/2587-9618-2022-18-3-147-158
9. GOST 839-80. Non-insulated conductors for overhead power lines. Technical conditions.
10. *Vinogradov A.A., Danilin A.N., Rabinsky L.N.* Deformation of multilayer spiral wire structures. Mathematical modeling, examples of use. M.: MAI Publishing House, 2014. 168 p.
11. *Dubois H., Lilien J.L., Dal Maso F.* A new theory for frequencies computation of overhead lines bundle conductors // Rev. AIM. Liege. 1991. No.1. 168 p.

УДК 533.2; 534.12

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА ЧАСТОТ И КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ПОДВИЖНО ЗАДЕЛАННОЙ ПО КРАЮ, В РАЗНЫХ СРЕДАХ

© 2024 г. К. Б. Сабитов^{а, *}, А. Г. Хакимов^{а, **}

^аИнститут механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

*e-mail: sabitov_fmfm@mail.ru,

**e-mail: hakimov@anrb.ru

Поступила в редакцию 19.06.2024 г.

После доработки 29.07.2024 г.

Принята к публикации 30.07.2024 г.

Определяется спектр частот и формы изгибных колебаний прямоугольной пластины, контактирующей с жидкостью или газом. Дается вывод выражения распределенной поперечной нагрузки на пластину, подвижно заделанной по контуру. Поверхности пластины контактируют со средой разной плотности и давления. Среда может быть сжимаемой в процессе деформации поверхности и несжимаемой. Определяется влияние на изгиб взаимодействия среднего давления и изменения кривизны срединной поверхности, а также присоединенной массы газовой среды.

Ключевые слова: тонкая пластина, жидкость, газ, плотность, давление, присоединенная масса, потенциал скорости, спектр частот, формы собственных колебаний

DOI: 10.31857/S1026351924060093, **EDN:** TYVVFG

1. Введение. В работах [1–17] исследуется спектр частот пластин и оболочек, контактирующих с жидкостью и газом, обзор которых приводится в [18]. В последней работе определяется низшая частота изгибных колебаний пластины, контактирующей с жидкостью или газом, в предположении ее цилиндрического изгиба. Поверхности пластины контактируют со средой одинаковой плотности и давления. Среда может быть сжимаемой в процессе деформации поверхности и несжимаемой. Определяется влияние на изгиб взаимодействия среднего давления и изменения кривизны срединной поверхности, а также присоединенной массы газовой среды. Исследовано влияние давления окружающей среды на низшую частоту колебаний пластины с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на ее поверхности и кривизны срединной поверхности, а также действие присоединенной массы газовой среды с удаленными границами.

На основе использования дискретно структурной модели деформирования многослойных пластин при малых перемещениях, деформациях и учете внутреннего трения материалов слоев по модели Кельвина–Фойгта

в работе [19] рассмотрены две задачи о прохождении моногармонической звуковой волны сквозь тонкую композитную прямоугольную пластину, шарнирно закрепленную в проеме абсолютно жесткой перегородки. При постановке первой задачи предполагается, что пластина находится между двумя полубесконечными пространствами и на нее падает плоская звуковая волна с заданной амплитудным значением давления звуковой волны. При постановке второй задачи считается, что пластина находится между двумя абсолютно жесткими преградами, одна из них за счет гармонических колебаний с заданной амплитудой перемещений формирует падающую на пластину звуковую волну, а другая неподвижна и имеет деформируемое энергопоглощающее покрытие.

В работе [20] исследовались собственные колебания прямоугольных металлических пластин. Для определения частот собственных колебаний применялись расчетные методы, в частности аналитический расчет и расчет методом конечных элементов. За основу аналитического расчета было принято уравнение движения тонкой прямоугольной пластины. Затем применялся асимптотический метод, учитывающий динамический краевой эффект. В результате были определены частоты собственных колебаний пластины.

В работах [21–24] изучены колебания прямоугольной пластины с различными граничными условиями на краях. Установлены энергетические неравенства, из которых следует единственность решения поставленных начально-граничных задач. Решения построены в виде суммы рядов с обоснованием сходимости в классах классических и обобщенных решений. Установлена устойчивость решений от начальных данных.

В данной работе определяется спектр частот и формы изгибных колебаний прямоугольной пластины, подвижно заделанной по контуру, которая помещена в жидкость или газ. Изучен вопрос о взаимном влиянии эффекта среднего давления и известного из литературы эффекта присоединенной массы жидкости на деформацию пластины. Получены формулы для вычисления частот и формы изгибных колебаний прямоугольной пластины, находящейся в несжимаемой и сжимаемой жидкости.

Для описания колебаний тонкой прямоугольной пластины рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка [25, с. 99]:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (1.1)$$

где E , ν , ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала, h – толщина пластины, $w(x, y, t)$ – прогиб, x , y , t – координаты, время, q – поперечная распределенная нагрузка.

На нижнюю и верхнюю поверхности пластины действуют давления $p_0 + p_1$ и $p_0 + p_2$ жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 1). Здесь p_0 – давление сборки, в частности атмосферное давление, действующее на все поверхности, p_1 , p_2 – избыточные давления. При определении нагрузки q будем предполагать, что ρ_1 , ρ_2 и p_1 , p_2 являются постоянными и, вообще говоря, они могут быть равными или неравными соответственно.

2. Несжимаемая среда. Предполагаем, что области, занятые жидкостями, простираются неограниченно, опоры не препятствуют свободному перетеканию жидкости вдоль пластины в направлении осей x и y . Возникающие в результате движения пластины давления на нижнюю и верхнюю поверхность

обозначим через \bar{p}_1 и \bar{p}_2 . Уравнения динамики несжимаемой жидкости в прямоугольных координатах x, y, z относительно потенциала скорости $\varphi_i(x, y, z, t)$ имеют вид [1–3]:

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} = 0, \quad \bar{p}_i = -\rho_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

Задаются условия на поверхностях контакта со средой:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad z = -\frac{h}{2}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad z = \frac{h}{2}. \quad (2.2)$$

На большом удалении от поверхности возмущения среды от пластины исчезают:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

Элементарные длины dx_1 и dx_2 нижней и верхней поверхностей, выраженные через длину dx срединной поверхности пластины, определяются по формулам (рис. 1а)

$$dx_1 = \left(1 + \varepsilon_x \left(-\frac{h}{2}\right)\right) dx, \quad dx_2 = \left(1 + \varepsilon_x \left(\frac{h}{2}\right)\right) dx, \quad (2.4)$$

где деформации в соответствии с гипотезами Кирхгоффа [18] равны

$$\varepsilon_x \left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_x \left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2.5)$$

Аналогично определяются элементарные длины dy_1 и dy_2 нижней и верхней поверхностей по оси y , выраженные через длину dy срединной поверхности пластины (рис. 1б)

$$dy_1 = \left(1 + \varepsilon_y \left(-\frac{h}{2}\right)\right) dy, \quad dy_2 = \left(1 + \varepsilon_y \left(\frac{h}{2}\right)\right) dy$$

и деформации в соответствии с гипотезами Кирхгоффа:

$$\varepsilon_y \left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_y \left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Распределенная сила q определяется аналогично работам [15, 16]:

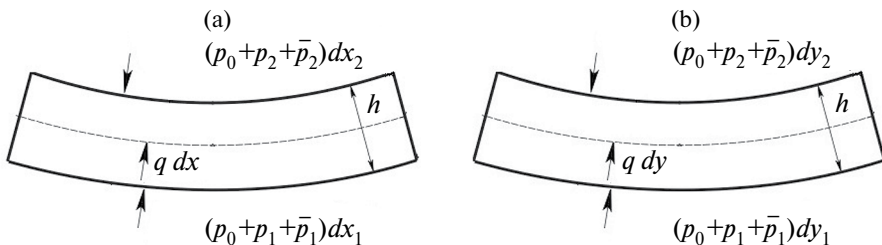


Рис. 1. Элементы dx и dy срединной поверхности изогнутой пластины.

$$\begin{aligned}
q dx dy &= (p_0 + p_1 + \bar{p}_1) dx_1 dy_1 - (p_0 + p_2 + \bar{p}_2) dx_2 dy_2 = \\
&= (p_0 + p_1 + \bar{p}_1) \left(1 + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy - \\
&- (p_0 + p_2 + \bar{p}_2) \left(1 - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy,
\end{aligned}$$

откуда следует:

$$\begin{aligned}
q &= p_1 - p_2 + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \bar{p}_1 - \\
&- \bar{p}_2 + \frac{(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\
&+ \frac{(p_1 - p_2)h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Слагаемыми, содержащими квадрат h , можно пренебречь. В линейной задаче также пренебрегаем слагаемым, содержащим произведение среднего динамического давления на сумму вторых производных от прогиба по координатам x, y . Тогда получим:

$$q = p_1 - p_2 + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \bar{p}_1 - \bar{p}_2. \quad (2.6)$$

По условию прямоугольная пластина по осям x и y подвижно заделана на опоры, расположенные на равных расстояниях a и b . Это означает, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} &= \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial x^3} = 0, \quad |x| = 0, a, 2a, \dots \\
\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} &= \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial y^3} = 0, \quad |y| = 0, b, 2b, \dots
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Разделяя переменные $w(x, y, t) = v(x, y) f(t)$ в уравнении (1.1) при $q = 0$, относительно функции $v(x, y)$, получим спектральную задачу:

$$\begin{aligned}
\Delta(\Delta v) - \lambda^2 v &= 0 \\
\frac{\partial v(0, y)}{\partial x} &= \frac{\partial^3 v(0, y)}{\partial x^3} = \frac{\partial v(a, y)}{\partial x} = \frac{\partial^3 v(a, y)}{\partial x^3} = 0, \quad 0 \leq y \leq b \\
\frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} &= \frac{\partial^3 v(x, 0)}{\partial y^3} = \frac{\partial v(x, b)}{\partial y} = \frac{\partial^3 v(x, b)}{\partial y^3} = 0, \quad 0 \leq x \leq a.
\end{aligned}$$

Собственные функции этой задачи определяются по формуле [23]

$$v_{00}(x, y) = v_{00} = \frac{1}{\sqrt{ab}}, v_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b}, m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

которые соответствуют собственным значениям:

$$\lambda_{mn} = \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}, m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Отметим, что система собственных функций (2.8) является полной и образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(G)$, где G – область переменных (x, y) : $0 < x < a$, $0 < y < b$.

Тогда изгибные колебания пластины будем искать по формуле:

$$w(x, y, t) = W_{00}(t)v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n \neq 0}}^N W_{mn}(t)v_{mn}(x, y). \quad (2.10)$$

Функции $\varphi_i(x, y, z, t)$ будем искать исходя из условий (2.1), (2.3), (2.2) и (2.7) в виде:

$$\varphi_i(x, y, z, t) = \Phi_{i00}(z)v_{00}g_{00}(t) + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n > 1}}^N \Phi_{imn}(z)v_{mn}(x, y)g_{mn}(t), \quad i = 1, 2, \quad (2.11)$$

где $\Phi_{imn}(z), g_{mn}(t)$ – пока неизвестные функции.

Подставим (2.10) в уравнение Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_i(x, y, z, t) &= g_{00}(t)v_{00}(x, y) \frac{d^2 \Phi_{i00}(z)}{dz^2} + \\ &+ \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n > 1}}^N g_{mn}(t)v_{mn}(x, y) \left[\frac{d^2 \Phi_{imn}(z)}{dz^2} - \left(\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right) \Phi_{imn}(z) \right] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получим дифференциальные уравнения относительно неизвестных функций $\Phi_{imn}(z)$:

$$\frac{d^2 \Phi_{i00}(z)}{dz^2} = 0, \frac{d^2 \Phi_{imn}(z)}{dz^2} - \lambda_{mn}^2 \Phi_{imn}(z) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.12)$$

Дифференциальное уравнение (2.12) при $m + n > 0$ имеет общие решения:

$$\begin{aligned} \Phi_{1mn}(z) &= C_{11mn} \exp(\lambda_{mn} z) + C_{12mn} \exp(-\lambda_{mn} z) \\ \Phi_{2mn}(z) &= C_{21mn} \exp(\lambda_{mn} z) + C_{22mn} \exp(-\lambda_{mn} z), \end{aligned}$$

а при $m = n = 0$

$$\Phi_{100}(z) = C_{1100}z + C_{1200}, \Phi_{200}(z) = C_{2100}z + C_{2200},$$

где C_{ijmn} $i, j = 1, 2$, – произвольные постоянные. В силу условий (2.3) при $m + n > 0$ находим:

$$\begin{aligned}\Phi_{1mn}(z) &= A_{1mn} \exp(\lambda_{mn} z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \\ \Phi_{2mn}(z) &= A_{2mn} \exp(-\lambda_{mn} z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

а при $m = n = 0$

$$\Phi_{100}(z) = A_{100}, \Phi_{200}(z) = A_{200}.$$

Здесь постоянные A_{1mn} и A_{2mn} – неизвестные, для определения которых воспользуемся условиями (2.2). Для этого воспользуемся формулой Тейлора для разложения функции $\partial\varphi_1/\partial z$ в окрестности точки $z = 0$:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_1(x, y, 0, t)}{\partial z} + \frac{z}{1!} \frac{\partial^2\varphi_1(x, y, 0, t)}{\partial z^2} + \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^3\varphi_1(x, y, \theta, t)}{\partial z^3}, \quad 0 < \theta < z. \quad (2.13)$$

Пренебрегая последним слагаемым с учетом малости h^2 и первого условия из (2.2), имеем:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_1(x, y, 0, t)}{\partial z} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2\varphi_1(x, y, 0, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Подставляя в (2.14) функции (2.11), (2.10), получим:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \lambda_{mn} A_{1mn} v_{mn}(x, y) g_{mn}(t) - \frac{h}{2} A_{1mn} \lambda_{mn}^2 v_{mn}(x, y) g_{mn}(t) = \\ = \frac{dW_{00}(t)}{dt} v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{dW_{mn}(t)}{dt} v_{mn}(x, y)\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N A_{1mn} \lambda_{mn} \left(1 - \frac{\lambda_{mn} h}{2}\right) v_{mn}(x, y) g_{mn}(t) = \\ = \frac{dW_{00}(t)}{dt} v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{dW_{mn}(t)}{dt} v_{mn}(x, y).\end{aligned} \quad (2.15)$$

При выполнении условий

$$\frac{dW_{00}(t)}{dt} = 0, \frac{dW_{mn}(t)}{dt} = \bar{\omega}_{mn} g_{mn}(t), \quad m + n > 0 \quad (2.16)$$

из равенства (2.15) найдем:

$$A_{1mn} = \frac{\bar{\omega}_{mn}}{\lambda_{mn}} \left(1 - \frac{\lambda_{mn}h}{2}\right)^{-1}, m, n = 0, 1, 2, \dots, m+n > 0. \quad (2.17)$$

Аналогично находим постоянные:

$$A_{2mn} = -\frac{\bar{\omega}_{mn}}{\lambda_{mn}} \left(1 - \frac{\lambda_{mn}h}{2}\right)^{-1}, m, n = 0, 1, 2, \dots, m+n > 0. \quad (2.18)$$

Таким образом, у функций $\varphi_i(x, y, z, t)$ найдены постоянные A_{1mn} и A_{2mn} при $m+n > 0$, которые определяются по формулам (2.17) и (2.18), а A_{100} и A_{200} остаются произвольными постоянными.

Также, используя формулы (2.13), (2.16), (2.17) и (2.18), определим динамические давления:

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= -\rho_1 \left[\frac{\partial \varphi_1(x, y, 0, t)}{\partial t} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y, 0, t)}{\partial t \partial z} \right] = \\ &= -\rho_1 \left\{ A_{100} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \right. \\ &+ \left[\sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N A_{1mn} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} - \frac{h}{2} \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N A_{1mn} \lambda_{mn} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} \right] = \\ &= -\rho_1 \left[A_{100} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N A_{1mn} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} \left(1 - \frac{\lambda_{mn}h}{2}\right) \right] = \quad (2.19) \\ &= -\rho_1 \left[A_{100} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{\bar{\omega}_{mn}}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} \right] = \\ &= -\rho_1 \left[A_{100} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_2 &= -\rho_2 \left[\left[\frac{\partial \varphi_2(x, y, 0, t)}{\partial t} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2(x, y, 0, t)}{\partial t \partial z} \right] \right] = \\
&= -\rho_2 \left\{ A_{200} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \right. \\
&+ \left. \left[\sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N A_{2mn} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} - \frac{h}{2} \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N A_{2mn} \lambda_{mn} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} \right] \right\} = \\
&= -\rho_2 \left\{ A_{200} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N A_{2mn} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} \left(1 - \frac{\lambda_{mn} h}{2} \right) \right\} = \quad (2.20) \\
&= -\rho_2 \left\{ A_{200} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} - \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{\bar{\omega}_{mn}}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} \right\} = \\
&= -\rho_2 \left\{ A_{200} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} - \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Теперь на основании формулы (2.6) с учетом (2.19), (2.20) найдем:

$$\begin{aligned}
q &= p_1 - p_2 + (\rho_2 A_{200} - \rho_1 A_{100}) v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \\
&+ \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \\
&- (\rho_1 + \rho_2) \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2}. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Подставляя выражение (2.21) в уравнение (1.1), получим:

$$\begin{aligned}
D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\
+ (\rho_1 + \rho_2) \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} - \\
- (\rho_2 A_{200} - \rho_1 A_{100}) v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} = p_1 - p_2. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Подставляя в (2.22) функции (2.7) при $p_1 - p_2 = p$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
 & D \left[\sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \left(\frac{\pi^4 m^4}{a^4} + 2 \frac{\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4 n^4}{b^4} \right) v_{mn}(x,y) W_{mn}(t) \right] + \\
 & + \rho h \sum_{m,n=1}^N v_{mn}(x,y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} + \\
 & + (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \cdot \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \lambda_{mn}^2 v_{mn}(x,y) W_{mn}(t) + \\
 & + (\rho_1 + \rho_2) \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x,y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} - \\
 & - (\rho_2 A_{200} - \rho_1 A_{100}) v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} = \\
 & = \sum_{m,n=0}^N p_{mn} v_{mn}(x,y) = p_{00} v_{00} + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N p_{mn} v_{mn}(x,y),
 \end{aligned}$$

где

$$p_{mn} = \iint_G p v_{mn}(x,y) dx dy = \begin{cases} p\sqrt{ab}, & m = n = 0 \\ 0, & m + n > 0 \end{cases}.$$

Отсюда в силу полноты системы функций (2.8) в $L_2(G)$ получим дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
 & (\rho_1 A_{100} - \rho_2 A_{200}) \frac{dg_{00}(t)}{dt} = p_{00}, \quad m = n = 0 \\
 & \left[D\lambda_{mn}^4 + (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \lambda_{mn}^2 \right] W_{mn}(t) + \\
 & \left(\rho h + \frac{\rho_1 + \rho_2}{\lambda_{mn}} \right) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} = 0, \quad m + n > 0.
 \end{aligned}$$

Из первого уравнения при условии $\rho_1 A_{100} - \rho_2 A_{200} \neq 0$ находим:

$$g_{00}(t) = \frac{p_{00} t}{\rho_1 A_{100} - \rho_2 A_{200}} + C_{00},$$

где C_{00} — произвольная постоянная. Второе дифференциальное уравнение перепишем в виде:

$$\frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} + \omega_{mn}^2 W_{mn}(t) = 0, \quad (2.23)$$

где частота ω_{mn} колебаний определяется по формуле:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D\lambda_{mn}^4 + (2p_0 + p_1 + p_2)\frac{h}{2}\lambda_{mn}^2}{\rho h + \frac{\rho_1 + \rho_2}{\lambda_{mn}}}. \quad (2.24)$$

Формулу (2.24) перепишем в следующей форме:

$$\omega_{mn}^2 = \omega_{0mn}^2 \frac{1 + \alpha_{mn}}{1 + \mu_{mn}}, \quad (2.25)$$

здесь

$$\omega_{0mn}^2 = \frac{D\lambda_{mn}^4}{\rho h}, \quad \alpha_{mn} = \frac{(p_0 + (p_1 + p_2)/2)h}{D\lambda_{mn}^2}, \quad \mu_{mn} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho h \lambda_{mn}}.$$

Здесь ω_{0mn} — частота пластины, не контактирующей с жидкостью. Параметры α_{mn} и μ_{mn} определяют влияние давления и плотности окружающей среды. Таким образом, давление повышает, плотность понижает собственную частоту пластины. При $\alpha_{mn} \ll 1$, $\mu_{mn} \ll 1$ их влияние исчезает. Через исходные данные параметры α_{mn} , μ_{mn} принимают вид:

$$\alpha_{mn} = \frac{12(1 - \nu^2)(p_0 + (p_1 + p_2)/2)a^2b^2}{\pi^2 E h^2 (m^2b^2 + n^2a^2)}, \quad \mu_{mn} = \frac{(\rho_1 + \rho_2)ab}{\pi \rho h \sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}}.$$

При $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³, $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ МПа, $p_2 = 2$ МПа, $a = 0.20$ м, $b = 0.20$ м, $h = 0.001$ м, $m = 1$, $n = 1$, $\alpha_{11} = 0.16$, $\mu_{11} = 11.5$, $m = 2$, $n = 1$, $\alpha_{21} = 0.06$, $\mu_{21} = 7.3$, $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, $\mu_{12} = \mu_{21}$, $m = 2$, $n = 2$, $\alpha_{22} = 0.04$, $\mu_{22} = 5.77$. Следовательно, влияние давления незначительное, имеется значительное снижение собственной частоты за счет присоединенной массы. По модели несжимаемой жидкости в случае воды имеется только снижение собственной частоты. Это известный результат [1–3], однако учет влияния давления вносит некоторое изменение частоты.

Общая оценка рассматриваемых эффектов состоит в том, что при $\alpha_{mn} > \mu_{mn}$ преобладает повышающее частоту влияние давления среды, а при $\alpha_{mn} < \mu_{mn}$ — понижающее влияние плотности или присоединенной массы. Через входные параметры эти неравенства имеют вид:

$$\frac{12(1 - \nu^2)(p_0 + (p_1 + p_2)/2)\rho ab}{\pi E h (\rho_1 + \rho_2) \sqrt{m^2a^2 + n^2b^2}} > 1, \quad \frac{12(1 - \nu^2)(p_0 + (p_1 + p_2)/2)\rho ab}{\pi E h (\rho_1 + \rho_2) \sqrt{m^2a^2 + n^2b^2}} < 1.$$

Первый случай реализуется для весьма тонких пластин из материала с малым модулем упругости и при предельно высоком давлении в контактирующей среде. Второй случай всегда реализуется при невысоких давлениях в плотной среде.

Далее найдем формулу для определения колебаний пластины с учетом найденных частот ω_{mn} . Построим общее решение дифференциального уравнения (2.23):

$$W_{mn}(t) = C_{1mn} \cos \omega_{mn} t + C_{2mn} \sin \omega_{mn} t,$$

где C_{1mn} и C_{2mn} – произвольные постоянные. Тогда функция (2.10) принимает вид:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= W_{00}v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N W_{mn}(t)v_{mn}(x, y) = \\ &= W_{00}v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N (C_{1mn} \cos \omega_{mn}t + C_{2mn} \sin \omega_{mn}t)v_{mn}(x, y). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Чтобы найти в формуле (2.26) постоянные C_{1mn} , C_{2mn} , нужно задать начальные условия:

$$w(x, y, 0) = \tau(x, y), \quad \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y), \quad (2.27)$$

Удовлетворим функцию (2.26) условиям (2.27):

$$W_{00}v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N C_{1mn}v_{mn}(x, y) = \tau(x, y) = \tau_{00}v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \tau_{mn}v_{mn}(x, y), \quad (2.28)$$

$$\sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N C_{2mn}\omega_{mn}v_{mn}(x, y) = \psi(x, y) = \psi_{00}v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \psi_{mn}v_{mn}(x, y) \quad (2.29)$$

где коэффициенты τ_{mn} и ψ_{mn} разложения функций $\tau(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в ряд по системе функций (2.8) определяются по формулам:

$$\tau_{00} = \iint_G \tau(x, y)v_{00}dxdy, \quad \tau_{mn} = \iint_G \tau(x, y)v_{mn}(x, y)dxdy, \quad m+n>0, \quad (2.30)$$

$$\psi_{00} = \iint_G \psi(x, y)v_{00}dxdy, \quad \psi_{mn} = \frac{1}{\omega_{mn}} \iint_G \psi(x, y)v_{mn}(x, y)dxdy, \quad m+n>0. \quad (2.31)$$

Тогда из равенств (2.28) и (2.29) в силу полноты и ортонормированности системы (2.8) в пространстве $L_2(G)$ находим:

$$W_{00} = \tau_{00}, \quad \psi_{00} = 0; \quad C_{1mn} = \tau_{mn}, \quad C_{2mn} = \psi_{mn}/\omega_{mn}.$$

Замечание. Из разложений (2.28) и (2.29) видно, что функции $\tau(x, y)$ и $\psi(x, y)$ должны удовлетворять условиям (2.7) и обладать гладкостью функций (2.8).

Таким образом, нами установлены следующие утверждения.

Утверждение 1. Если параметры α_{mn} и μ_{mn} , определяющие соответственно влияние давления и плотности окружающей среды, то при

- а) $\alpha_{mn} \ll 1$, $\mu_{mn} \ll 1$ или $\alpha_{mn} = \mu_{mn}$ их влияние исчезает;
- б) $\alpha_{mn} > \mu_{mn}$ преобладает повышающее частоту ω_{mn} колебаний влияние давления среды;
- в) $\alpha_{mn} < \mu_{mn}$ преобладает понижающее частоту ω_{mn} колебаний влияние плотности среды.

Утверждение 2. Если начальные функции $\tau(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют условиям замечания и $\psi_{00} = 0$, то колебания прямоугольной однородной пластины в указанной среде при избыточных давлениях p_1, p_2 и плотностях ρ_1, ρ_2 , удовлетворяющих условию $\rho_1 A_{100} - \rho_2 A_{200} \neq 0$, определяется по формуле

$$w(x, y, t) = \tau_{00} v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \left(\tau_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \psi_{mn} \sin \omega_{mn} t \right) v_{mn}(x, y). \quad (2.32)$$

Собственные колебания пластины находятся по формуле:

$$w_{mn}(x, y, t) = \left(\tau_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \psi_{mn} \sin \omega_{mn} t \right) v_{mn}(x, y), \quad (2.33)$$

а собственные частоты ω_{mn} по формуле (2.25) при условиях (2.7) и (2.27), где коэффициенты τ_{mn}, ψ_{mn} определяются соответственно по формулам (2.30), (2.31).

3. Сжимаемая среда. В случае сжимаемой среды вместо уравнений (2.1) имеем трехмерные волновые уравнения [1–3]

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} - \frac{1}{c_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

$$\bar{p}_i = -\rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}, \quad c_i^2 = \kappa_i \frac{p_i}{\rho_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

где c_i — скорость звука, κ_i — коэффициент адиабаты. В отличие от случая несжимаемой жидкости здесь давление и плотность не являются независимыми, а связаны изотермическим законом.

На основании функции (2.8) аналогично (2.11) функции $\Phi_i(x, y, z, t)$ будем искать в виде:

$$\Phi_i(x, y, z, t) = \Phi_{i00}(z) v_{00} g_{00}(t) + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>1}}^N \Phi_{imn}(z) v_{mn}(x, y) g_{mn}(t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в волновое уравнение (3.1), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Phi_{i00}(z)}{dz^2} v_{00} g_{00}(t) + \\ & + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \Phi_{imn}(z) v_{mn}(x, y) g_{mn}(t) \left[\frac{d^2 \Phi_{imn}(z)}{dz^2} \frac{1}{\Phi_{imn}(z)} - \right. \\ & \left. - \lambda_{mn}^2 - \frac{1}{c_i^2} \frac{d^2 g_{mn}(t)}{dt^2} \frac{1}{g_{mn}(t)} \right] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.4) \end{aligned}$$

В силу (2.15) и (2.22): $\frac{d^2 g_{mn}(t)}{dt^2} = -\omega_{mn}^2 g_{mn}(t)$, тогда из (3.4) имеем:

$$\frac{d^2 \Phi_{i00}(z)}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 \Phi_{imn}(z)}{dz^2} - \kappa_{mn}^2 \Phi_{imn}(z) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.5)$$

где

$$\kappa_{mn}^2 = \lambda_{mn}^2 - \frac{\omega_{mn}^2}{c_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

При условии $\kappa_{mn} > 0$ дифференциальное уравнение (3.5) при $m + n > 0$ имеет общее решение:

$$\Phi_{imn}(z) = C_{i1mn} \exp(\kappa_{mn}z) + C_{i2mn} \exp(-\kappa_{mn}z),$$

а при $m = n = 0$

$$\Phi_{100}(z) = C_{1100}z + C_{1200}, \Phi_{200}(z) = C_{2100}z + C_{2200},$$

где C_{ijmn} , $i, j = 1, 2$, – произвольные постоянные. В силу условий (2.3) при $m + n > 0$ найдем:

$$\Phi_{1mn}(z) = B_{1mn} \exp(\kappa_{mn}z) \rightarrow 0, z \rightarrow -\infty,$$

$$\Phi_{2mn}(z) = B_{2mn} \exp(-\kappa_{mn}z) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty,$$

а при $m = n = 0$

$$\Phi_{100}(z) = B_{100}, \Phi_{200}(z) = B_{200},$$

где постоянные B_{1mn} и B_{2mn} найдем из условий (2.2) аналогично вышеизложенному:

$$B_{1mn} = \frac{\bar{\omega}_{mn} k_1}{\kappa_{mn}} \left(1 - \frac{\kappa_{mn} h}{2}\right)^{-1}, B_{2mn} = -\frac{\bar{\omega}_{mn} k_2}{\kappa_{mn}} \left(1 - \frac{\kappa_{mn} h}{2}\right)^{-1}, \quad m + n > 0. \quad (3.6)$$

Тем самым функции (3.3) построены, где B_{1mn} и B_{2mn} при $m + n > 0$ находятся по формулам (3.6), а постоянные B_{100} и B_{200} остаются произвольными постоянными.

Далее аналогично пункту 2 найдем:

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 = -\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= -\rho_1 \left[B_{100} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\kappa_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} \right] \\ \bar{p}_2 = -\rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= -\rho_2 \left[B_{200} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} - \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\kappa_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} \right] \end{aligned}$$

и на основании формулы (2.6) вычислим q :

$$\begin{aligned} q &= p_1 - p_2 + (\rho_2 B_{200} - \rho_1 B_{100}) v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2} \times \\ &\times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (\rho_1 + \rho_2) \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\kappa_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставляя выражение (3.7) в уравнение (1.1), получим:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) +$$

$$+ v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} (\rho_2 B_{200} - \rho_1 B_{100}) + (\rho_1 + \rho_2) \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\kappa_{mn}} v_{mn}(x,y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} - (3.8)$$

$$- (\rho_2 B_{200} - \rho_1 B_{100}) v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} = p_1 - p_2.$$

Теперь подставим функцию (2.10) в уравнение (3.8). Отсюда при условии $p_1 - p_2 = p$ имеем:

$$\sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \left[D \lambda_{mn}^4 v_{mn}(x,y) W_{mn}(t) + \rho h v_{mn}(x,y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} + \right.$$

$$\left. + \left(p_0 + \frac{p_1 + p_2}{2} \right) h \lambda_{mn}^2 v_{mn}(x,y) W_{mn}(t) + \frac{\rho_1 + \rho_2}{\kappa_{mn}} v_{mn}(x,y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} \right] -$$

$$- (\rho_2 B_{200} - \rho_1 B_{100}) v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} = p_{00} v_{00} + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N p_{mn} v_{mn}(x,y).$$

Отсюда получаем дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} + \omega_{mn}^2 W_{mn}(t) = 0, \quad m + n > 0, \quad (3.9)$$

где

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D \lambda_{mn}^4 + (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \lambda_{mn}^2}{\rho h + (\rho_1 + \rho_2) / \kappa_{mn}} \quad (3.10)$$

$$(\rho_1 B_{100} - \rho_2 B_{200}) \frac{dg_{00}(t)}{dt} = p_{00}, \quad m = n = 0.$$

Решение последнего уравнения при условии $\rho_1 B_{100} - \rho_2 B_{200} \neq 0$ определяется по формуле:

$$g_{00}(t) = \frac{p_{00} t}{\rho_1 B_{100} - \rho_2 B_{200}} + d_{00}, \quad d_{00} = \text{const.}$$

Поскольку κ_{mn} зависит от ω_{mn} , то равенство (3.10) перепишем в виде:

$$D \lambda_{mn}^4 + (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \lambda_{mn}^2 - [\rho h + (\rho_1 + \rho_2) / \kappa_{mn}] \omega_{mn}^2 = 0.$$

Из данного уравнения с заменами

$$\omega_{0mn}^2 = \frac{D \lambda_{mn}^4}{\rho h}, \quad \alpha_{mn} = \frac{(2p_0 + p_1 + p_2) \lambda_{mn}^2}{2\rho \omega_{0mn}^2},$$

$$\mu_{mn} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho h \lambda_{mn}}, \quad \eta_{mn} = \frac{\omega_{0mn}^2}{c_i^2 \lambda_{mn}^2}, \quad x_{mn} = \frac{\omega_{mn}^2}{\omega_{0mn}^2} \quad (3.11)$$

получим алгебраическое уравнение относительно x_{mn} :

$$1 - x_{mn} + \alpha_{mn} - \frac{\mu_{mn} x_{mn}}{\sqrt{1 - \eta_{mn} x_{mn}}} = 0. \quad (3.12)$$

При условиях

$$1 - \eta_{mn} x_{mn} > 0, \quad 1 - x_{mn} + \alpha_{mn} \geq 0$$

уравнение (3.12) принимает вид:

$$x_{mn}^3 + a_1 x_{mn}^2 + a_2 x_{mn} - a_3 = 0, \quad (3.13)$$

где

$$a_1 = \frac{\mu_{mn}^2 - 1}{\eta_{mn}} - 2(1 + \alpha_{mn}), \quad a_2 = (1 + \alpha_{mn})^2 + \frac{2(1 + \alpha_{mn})}{\eta_{mn}}, \quad a_3 = \frac{(1 + \alpha_{mn})^2}{\eta_{mn}}.$$

Кубическое уравнение (3.13) на числовой прямой имеет хотя бы один вещественный корень. Пусть $x_{mn} = x_{0mn} = x_0$ такой корень. Тогда

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x - a_3 = (x - x_0) \left[x^2 + (a_1 + x_0)x^2 + a_2 + x(a_1 + x_0) \right].$$

Обозначим через $f(x)$ левую часть уравнения (3.13), где $x_{mn} = x$. Функция $f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x - a_3$ — это многочлен, по крайней мере непрерывная на всей числовой прямой функция. В точке $x = 0$: $f(0) = -a_3 < 0$. Выясним знак функции $f(x)$ в точке $x = 1$:

$$f(1) = 1 + a_1 + a_2 - a_3 = \frac{\mu_{mn}^2 - \alpha_{mn}^2}{\eta_{mn}} + \alpha_{mn}^2 = \frac{\mu_{mn}^2}{\eta_{mn}} + \alpha_{mn}^2 \frac{\eta_{mn} - 1}{\eta_{mn}}.$$

Если $\mu_{mn} \geq \alpha_{mn}$ или $\eta_{mn} \geq 1$, то $f(1) > 0$ и график функции $f(x)$ пересекает ось Ox между точками $x = 0$ и $x = 1$, т.е. существует точка $x = x_0 \in (0, 1)$, такая, что $f(x_0) = 0$.

Рассмотрим параметр η_{mn} и оценим его снизу:

$$\eta_{mn} = \frac{\omega_{0mn}^2}{c_i^2 \lambda_{mn}^2} = \frac{D \lambda_{mn}^4}{\rho h c_i^2 \lambda_{mn}^2} = \frac{D \lambda_{mn}^2}{\rho h c_i^2} \geq \frac{D \lambda_{11}^2}{\rho h c_i^2} \geq 1. \quad (3.14)$$

Отсюда видно, что при выборе данных D, ρ, h, a, b, c_i всегда можно добиться выполнения неравенства (3.14). Если же $\eta_{mn} < 1$ и по условию $1 - \eta_{mn} x_{mn} > 0$, то тогда имеем:

$$(1 - \eta_{mn} x_{mn})^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \eta_{mn} x_{mn} - \frac{1}{8} (\eta_{mn} x_{mn})^2. \quad (3.15)$$

Тогда уравнение (3.12) с учетом (3.15) примет вид:

$$(1 - x_{mn} + \alpha_{mn}) \cdot \left[1 - \frac{\eta_{mn} x_{mn}}{2} - \frac{1}{8} (\eta_{mn} x_{mn})^2 \right] - \mu_{mn} x_{mn} = 0$$

или

$$x_{mn}^3 + b_1 x_{mn}^2 - b_2 x_{mn} + b_3 = 0, \quad (3.16)$$

где

$$b_1 = \frac{4}{\eta_{mn}} - 1 - \alpha_{mn}, \quad b_2 = \frac{4(1 + \alpha_{mn})}{\eta_{mn}} + \frac{8(\mu_{mn} + 1)}{\eta_{mn}^2}, \quad b_3 = \frac{8(1 + \alpha_{mn})}{\eta_{mn}^2}.$$

Обозначим левую часть уравнения (3.16) через

$$g(x) = x^3 + b_1 x^2 - b_2 x + b_3 = 0,$$

где $x = x_{mn}$, аналогично функции $f(x)$ убеждаемся в существовании корня уравнения (3.16). Действительно, вычислим $g(0) = b_3 > 0$ и

$$g(1) = 1 + b_1 - b_2 + b_3 = -\alpha_{mn} - 4\frac{\alpha_{mn}}{\eta_{mn}} - \frac{8}{\eta_{mn}^2}(\mu_{mn} - \alpha_{mn}) < 0$$

при условии $\mu_{mn} \geq \alpha_{mn}$. Последнее неравенство всегда имеет место, если

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho} \geq \frac{6(1 - \nu^2)(2p_0 + p_1 + p_2)ab}{\pi E \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Поскольку показано существование решений уравнений (3.13) и (3.16), то частоты колебаний в случае сжимаемой среды определяются по формуле

$$\omega_{mn} = \omega_{0mn} \sqrt{x_{mn}}. \quad (3.17)$$

Покажем, что частоты, определенные по формуле (3.12), меньше, чем соответствующие частоты в несжимаемой среде.

Действительно, из уравнения (3.12) имеем:

$$1 + \alpha_{mn} = \left(1 + \frac{\mu_{mn}}{\sqrt{1 - \eta_{mn} x_{mn}}} \right) x_{mn} > (1 + \mu_{mn}) x_{mn}.$$

Отсюда следует:

$$x_{mn} < \frac{1 + \alpha_{mn}}{1 + \mu_{mn}} \quad \text{или} \quad \omega_{mn}^2 < \omega_{0mn}^2 \frac{1 + \alpha_{mn}}{1 + \mu_{mn}}.$$

Правая часть полученной оценки представляет формулу (2.25), по которой определяются частоты колебаний в несжимаемой среде.

Обозначим $f_{mn} = \omega_{mn}/2\pi$, тогда первая полная собственная частота колебаний равна $f_{11} = \omega_{11}/2\pi$, $\omega_{11} = \omega_{011}\sqrt{x_{11}}$.

При $m = 1, n = 1, E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3, \rho = 7800$ кг/м³, $h = 0.001$ м, $a = 0.2$ м, $b = 0.2$ м, $\kappa_{1,2} = 1.4$, атмосферном давлении $p_a = 0.1$ МПа, плотности воздуха при атмосферном давлении $\rho_{1a} = 1.2928$ кг/м³, $p_1 = p_2 = p = 2$ МПа численное решение уравнения (3.10) дает корень: $x_{11} = 0.93948$. Соответствующая частота равна $f_{11} = 116.6$ Гц.

Для проверки выполнения условия $\kappa_{mn}^2 > 0$ учтем полученное выражение $\omega_{11} = \omega_{011}\sqrt{x_{11}}$, где ω_{011} определяется из первой формулы из (3.11). В рассмотренном примере $x_{11} \approx 0.94$, т.е. имеет место преобладание влияния давления воздуха над его плотностью. Условие $\kappa_{mn}^2 > 0$ для случая стальной пластины

и воды выполняется всегда, а в случае газов — при больших значениях a/h (например, $a/h > 15$).

В таблице приводятся частоты изгибных колебаний прямоугольной. Из таблицы следует, что частоты, вычисленные по формулам для несжимаемой и сжимаемой сред, отличаются незначительно, причем частоты по формуле для несжимаемой среды больше, чем частоты по формуле для сжимаемой среды.

Таблица. 1 Частоты изгибных колебаний прямоугольной пластины для разных m, n по формулам (2.25) и (3.17) соответственно для несжимаемой и сжимаемой сред

| m, n | f_{mn} , Hz, формула (2.25) | f_{mn} , Hz, формула (3.17) |
|------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 0, 1; 1, 0 | 59.91 | 59.89 |
| 1, 1 | 117.55 | 117.50 |
| 2, 2 | 469.1 | 468.8 |
| 3, 3 | 1061.1 | 1059.8 |

На рис. 2а приводится зависимость первой частоты изгибных колебаний пластинки от давления для разных газов. Из рис. 2а видно, что с ростом давления собственная частота колебаний убывает. А с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний. На рис. 2б приводится зависимость первой частоты изгибных колебаний пластинки от давления по формулам для несжимаемой и сжимаемой жидкостей для двуокиси углерода. Из рис. 2б видно, что частоты по модели несжимаемой жидкости выше частот по модели для сжимаемой жидкости, причем с ростом давления разность частот колебаний возрастает.

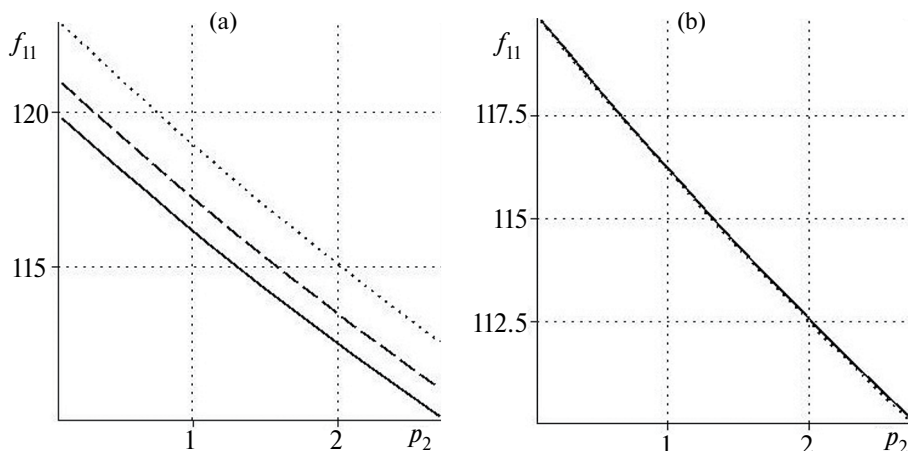


Рис. 2. Зависимость первой частоты изгибных колебаний пластинки f_{11} (Hz) от давления p_2 (МПа) для давления $p_1 = 0.5$ МПа: (а) для разных газов: $\rho_{1a} = \rho_{2a} = 0.1785$ (гелий), 1.2928 (воздух), 1.9768 (двуокись углерода) кг/м^3 (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно); (б) по формулам для несжимаемой (2.25) и сжимаемой (3.17) жидкостей для двуокиси углерода $\rho_{1a} = \rho_{2a} = 1.9768 \text{ кг/м}^3$ (сплошная, пунктирная линии соответственно).

На рис. 3,а приводится зависимость второй частоты изгибных колебаний пластинки от давления для разных газов для $m = n = 2$. Из рис. 3,а видно, что с ростом давления собственная частота колебаний убывает. А с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний. На рис. 3,б приводится зависимость второй частоты изгибных колебаний пластинки от давления по формулам для несжимаемой и сжимаемой жидкостей для двуокиси углерода. Из рис. 3,б видно, что частоты по модели несжимаемой жидкости выше частот по модели для сжимаемой жидкости, причем с ростом давления разность частот колебаний возрастает.

Аналогично п. 2 находится общее решение дифференциального уравнения (3.9) и строится формула (2.32) для определения формы колебаний пластины с учетом найденных частот ω_{mn} по формуле (3.17).

Таким образом, в случае сжимаемой среды имеют место следующие утверждения.

Утверждение 3. Частоты в случае сжимаемой среды меньше, чем соответствующие частоты в несжимаемой среде.

Утверждение 4. С ростом давления собственная частота колебаний возрастает для гелия и убывает для воздуха и углекислого газа. А с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний.

Утверждение 5. Если начальные функции $\tau(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют условиям замечания из пункта 2 и $\psi_{00} = 0$, то колебания прямоугольной однородной пластины в сжимаемой среде при избыточных давлениях p_1, p_2 и плотностях ρ_1, ρ_2 , удовлетворяющих условию $\rho_1 B_{100} - \rho_2 B_{200} \neq 0$, определяется по формуле (2.32), собственные колебания пластины находятся по формуле (2.33), а собственные частоты по формуле (3.17) при условиях (2.7) и (2.27), где коэффициенты τ_{mn} и ψ_{mn} определяются соответственно по формулам (2.30), (2.31).

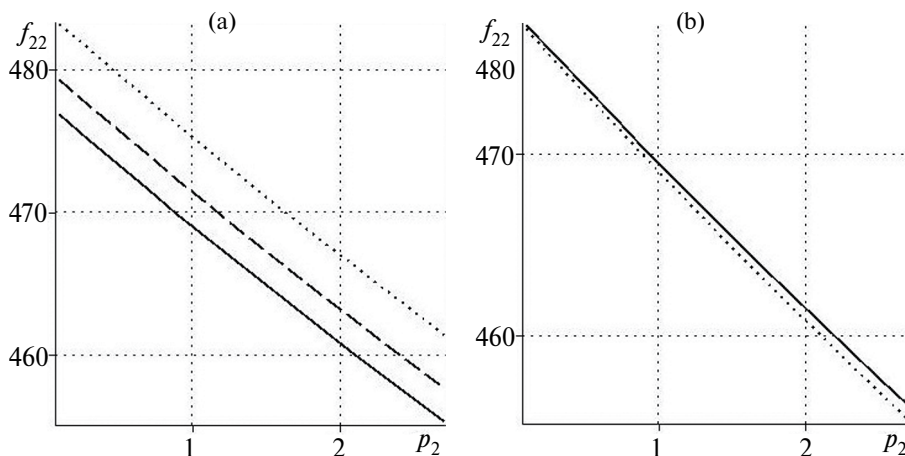


Рис. 3. Зависимость второй частоты изгибных колебаний пластинки f_{22} (Hz) от давления p_2 (МПа) для давления $p_1 = 0.5$ МПа: (а) для разных газов: $\rho_{1a} = \rho_{2a} = 0.1785$ (гелий), 1.2928 (воздух), 1.9768 (двуокись углерода) кг/м³ (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно); (б) по формулам для несжимаемой (2.25) и сжимаемой (3.17) жидкостей для двуокиси углерода $\rho_{1a} = \rho_{2a} = 1.9768$ кг/м³ (сплошная, пунктирная линии соответственно).

4. Заключение. Хорошо известно из литературы (например, [1–3], что собственные частоты изгибных колебаний пластины при ее контакте с жидкостью значительно снижаются. Это объясняется влиянием присоединенной массы жидкости. Установлено [15, 16], что учет разности площадей противоположных поверхностей пластины, образующейся при ее изгибе, может оказывать повышающее влияние на собственные частоты. Учет этого эффекта приводит к появлению распределенной поперечной силы, равной произведению кривизны срединной поверхности и среднего давления на поверхности пластины.

Одновременное влияние указанных факторов на частоты колебаний в случае несжимаемой жидкости зависит от отношения среднего давления к модулю упругости материала, плотностей материала и жидкости и отношения длины пластины к ее толщине. Для реальных параметров характерно преобладающее влияние плотности среды над давлением в ней. Однако давление может оказывать заметное влияние на результат.

Для сжимаемой жидкости влияние носит более сложный характер, так как присоединенная масса зависит от скорости звука и от самой частоты колебаний. Кроме того, давление и плотность газовой среды не являются независимыми.

Влияние контактирующей среды на частоты колебаний является значительным для весьма тонких пластин и пленок с низким модулем упругости. Учет его необходим особенно в случае элементов микро- и наноразмерных толщин.

С ростом давления собственная частота колебаний возрастает. В случае легких газов (водород, гелий) влияние давления может превалировать над их плотностью. Эти результаты могут быть использованы при моделировании колебаний пластинок, контактирующих с жидкостью и газом, в том числе микро- и наноразмеров.

Работа проведена в порядке выполнения госзадания (FMRS-2023-0015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонткевич В.С. Собственные колебания оболочек в жидкости. Киев: Наукова думка, 1964. 102 с.
2. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
3. Попов А.Л., Чернышев Г.Н. Механика звукоизлучения пластин и оболочек. М.: Физматлит, 1994. 208 с.
4. Нестеров С.В. Изгибные колебания квадратной пластины, зашпеленной по контуру // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 159–165.
5. Денисов С.Л., Копьев В.Ф., Медведский А.Л., Остриков Н.Н. Исследования проблем долговечности ортотропных полигональных пластин при широкополосном акустическом воздействии с учетом эффектов излучения // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 138–150. <http://doi.org/10.31857/S0572329920030058>
6. O'Connell A.D., Hofheinz M., Ansmann M., Bialczak R.C., Lenander M., Lucero E., Neeley M., et al. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator // Nature. 2010. № 464. P. 697–703. <http://doi.org/10.1038/nature08967>
7. Burg T.P., Godin M., Knudsen S.M., Shen W., Carlson G., Foster J.S., et al. Weighing of biomolecules, single cells and single nanoparticles in fluid // Nature. 2007. № 446. P. 1066–1069. <http://doi.org/10.1038/nature05741>
8. Husale S., Persson H.H.J., Sahin O. DNA nanomechanics allows direct digital detection of complementary DNA and microRNA targets // Nature. 2009. № 462. P. 1075–1078. <http://doi.org/10.1038/nature08626>
9. Raman A., Melcher J., Tung R. Cantilever dynamics in atomic force microscopy // Nano Today. 2008. V. 3. № 1–2. P. 20–27. [http://doi.org/10.1016/S1748-0132\(08\)70012-4](http://doi.org/10.1016/S1748-0132(08)70012-4)

10. *Eom K., Park H.S., Yoon D.S., Kwon T.* Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detection: Nanomechanics principles // *Physics Reports*. 2011. V. 503. № 4–5. P. 115–163.
<http://doi.org/10.1016/j.physrep.2011.03.002>
11. *Stassi S., Marini M., Allione M., Lopatin S., Marson D., Laurini E., et al.* Nanomechanical DNA resonators for sensing and structural analysis of DNA-ligand complexes // *Nat. Commun.* 2019. № 10. P. 1–10.
<http://doi.org/10.1038/s41467-019-09612-0>
12. *Jaber N., Hafiz M.A.A., Kazmi S.N.R., Hasan M.H., Alsaleem F., Ilyas S., Younis M.I.* Efficient excitation of micro/nano resonators and their higher order modes // *Sci. Rep.* 2019. № 9. P. 319.
<http://doi.org/10.1038/s41598-018-36482-1>
13. *SoltanRezaee M., Bodaghi M.* Simulation of an electrically actuated cantilever as a novel biosensor // *Sci. Rep.* 2020. № 10. P. 3385.
<http://doi.org/10.1038/s41598-020-60296-9>
14. *Tavakolian F., Farrokhabadi A., SoltanRezaee M., Rahmanian S.* Dynamic pull-in of thermal cantilever nanoswitches subjected to dispersion and axial forces using nonlocal elasticity theory // *Microsystem Technologies*. 2019. V. 25. № 3. P. 19–30.
<https://doi.org/10.1007/s00542-018-3926-y>
15. *Ильгамов М.А.* Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // *ДАН*. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.
<https://doi.org/10.7868/S086956521728009X>
16. *Ильгамов М.А.* Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // *ФТТ*. 2019. Т. 61. № 10. С. 1825–1830.
<https://doi.org/10.21883/FTT.2019.10.48255.381>
17. *Ilgamov M.A., Khakimov A.G.* Influence of Pressure on the Frequency Spectrum of Micro and Nanoresonators on Hinged Supports // *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. V. 7. № 2. P. 977–983.
<https://doi.org/10.22055/JACM.2021.36470.2848>
18. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Влияние давления окружающей среды на низшую частоту колебаний пластины // *Изв. РАН. МТТ*. 2022. № 3. С. 88–96.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922030084>
19. *Паймушин В.Н., Газизуллин Р.К.* Уточненные аналитические решения связанных задач о свободных и вынужденных колебаниях прямоугольной композитной пластины, окруженной акустическими средами // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. 2020. Т. 162. № 2. С. 160–179.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.2.160-179>
20. *Морозов Н.А., Гребенюк Г.И., Максак В.И., Гаврилов А.А.* Исследования собственных колебаний прямоугольных пластин // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2023. Т. 25. № 3. С. 96–111.
<https://doi.org/10.31675/1607-1859-2023-25-3-96-111>
21. *Сабитов К.Б.* Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // “Известия высших учебных заведений. Математика.” 2021. № 10. С. 60–70.
<https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-10-60-70>
22. *Сабитов К.Б.* Колебания пластины с граничными условиями “шарнир–заделка” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2022. Т. 26. № 4. С. 650–671.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1950>
23. *Сабитов К.Б.* Колебания пластины со смешанными граничными условиями // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2023. № 3. С. 63–77.
<https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-63-77>
24. *Сабитов К.Б.* Прямая и обратные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластинки по отысканию источника // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023. Т. 63. № 4. С. 614–628.
<https://doi.org/10.31857/S0044466923040142>
25. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.

DETERMINATION OF THE SPECTRUM OF FREQUENCIES AND VIBRATIONS OF A RECTANGULAR PLATE, MOBILY EMPLOYED AROUND THE EDGE, IN DIFFERENT ENVIRONMENTS

K. B. Sabitov^{a, *}, A. G. Khakimov^{a, **}

^a*Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Russia*

^{*}*e-mail: sabitov_fmfm@mail.ru,*

^{**}*e-mail: hakimov@anrb.ru*

Abstract. The spectrum of frequencies and shapes of bending vibrations of a rectangular plate in contact with a liquid or gas are determined. A derivation of the expression for the distributed transverse load on a plate movably embedded along the contour is given. The surfaces of the plate are in contact with media of different densities and pressures. The medium can be compressible during surface deformation and incompressible. The influence on the bending of the interaction of average pressure and changes in the curvature of the middle surface, as well as the added mass of the gaseous medium, is determined.

Keywords: thin plate, liquid, gas, density, pressure, attached mass, velocity potential, frequency spectrum, forms of self-oscillation

REFERENCES

1. *Gontkevich V.S.* Natural oscillations of shells in a liquid. Kyiv: Naukova Dumka, 1964. 102 p. (in Russian).
2. *Ilgamov M.A.* Oscillations of elastic shells containing liquid and gas. M.: Nauka, 1969. 180 p. (in Russian).
3. *Popov A.L., Chernyshev G.N.* Mechanics of sound emission from plates and shells. M.: Fizmatlit. 1994. 208 p. (in Russian).
4. *Nesterov S.V.* Flexural vibration of a square plate clamped along its contour // *Mech. Solids*. 2011. V. 46. № 6. P. 946–951.
<https://doi.org/10.3103/S0025654411060148>
5. *Denisov S.L., Kopyev V.F., Medvedsky A.L., Ostrikov N.N.* Investigation of the problems of durability of orthotropic polygonal plates under broadband acoustic exposure taking into account the effects of radiation // *Mech. Solids*. 2020. V. 55. № 5. P. 716–727.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420300019>
6. *O'Connell A.D., Hofheinz M., Ansmann M., Bialczak R.C., Lenander M., Lucero E. et al.* Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator // *Nature*. 2010. № 464. P. 697–703.
<https://doi.org/10.1038/nature08967>
7. *Burg T.P., Godin M., Knudsen S.M., Shen W., Carlson G., Foster J.S. et al.* Weighing of biomolecules, single cells and single nanoparticles in fluid // *Nature*. 2007. № 446. P. 1066–1069.
<https://doi.org/10.1038/nature05741>
8. *Husale S., Persson H.H.J., Sahin O.* DNA nanomechanics allows direct digital detection of complementary DNA and microRNA targets // *Nature*. 2009. № 462. P. 1075–1078.
<https://doi.org/10.1038/nature08626>
9. *Raman A., Melcher J., Tung R.* Cantilever dynamics in atomic force microscopy // *Nano Today*. 2008. V. 3. № 1–2. P. 20–27.
[https://doi.org/10.1016/S1748-0132\(08\)70012-4](https://doi.org/10.1016/S1748-0132(08)70012-4)

10. *Eom K., Park H.S., Yoon D.S., Kwon T.* Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detection: Nanomechanics principles // *Physics Reports—Review Section of Physics Letters*. 2011. V. 503. № 4–5. P. 115–163.
<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2011.03.002>
11. *Stassi S., Marini M., Allione M., Lopatin S., Marson D., Laurini E. et al.* Nanomechanical DNA resonators for sensing and structural analysis of DNA-ligand complexes // *Nature Communications*. 2019. № 10. P. 1–10.
<https://doi.org/10.1038/s41467-019-09612-0>
12. *Jaber N., Hafiz M.A.A., Kazmi S.N.R., Hasan M.H., Alsaleem F., Ilyas S., Younis M.I.* Efficient excitation of micro/nano resonators and their higher order modes // *Sci. Rep.* 2019. V. 9. P. 319.
<https://doi.org/10.1038/s41598-018-36482-1>
13. *Soltan Rezaee M., Bodaghi M.* Simulation of an electrically actuated cantilever as a novel biosensor // *Sci. Rep.* 2020. V. 10. P. 3385.
<https://doi.org/10.1038/s41598-020-60296-9>
14. *Tavakolian F., Farrokhabadi A., SoltanRezaee M., Rahmanian S.* Dynamic pull-in of thermal cantilever nanoswitches subject to dispersion and axial forces using nonlocal elasticity theory // *Microsystem Technol.* 2019. V. 25. № 3. P. 19–30.
<https://doi.org/10.1007/s00542-018-3926-y>
15. *Ilgamov M.A.* Influence of the ambient pressure on thin plate and film bending // *Doklady physics*. 2017. V. 62. № 10. P. 461–464.
<https://doi.org/10.1134/S1028335817100020>
16. *Ilgamov M.A.* The influence of surface effects on bending and vibrations of nanofilms // *Physics of the Solid State*. 2019. V. 61. № 10. P. 1779–1784.
<https://doi.org/10.1134/S1063783419100172>
17. *Ilgamov M.A., Khakimov A.G.* Influence of pressure on the frequency spectrum of micro and nanoresonators on hinged supports // *J. Appl. Comp. Mech.* 2021. V. 7. № 2. P. 977–983.
<https://doi.org/10.22055/JACM.2021.36470.2848>
18. *Ilgamov M.A., Khakimov A.G.* Influence of ambient pressure on the lowest oscillation frequency of a plate // *Mech. Solids*. 2022. V. 57. № 3. P. 524–531.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422030141>
19. *Paimuship V.N., Gazizullin R.K.* Refined analytical solutions of the coupled problems on free and forced vibrations of a rectangular composite plate surrounded by acoustic media // *Uchen. zap. Kazan, Univ. Ser. Phys.-mathematical sciences*. 2020. V. 162. № 2. P. 160–179.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.2.160-179>
20. *Morozov N.A., Grebenyuk G.I., Maksak V.I., Gavrilov A.F.* Free vibrations of rectangular plates // *J. Constr. Arch.* 2023. V. 25. № 3. P. 96–111 (in Russian).
<https://doi.org/10.31675/1607-1859-2023-25-3-96-111>
21. *Sabitov K.B.* Initial-boundary value problems for equation of oscillations of a rectangular plate // *Russian Mathematics*. 2021. V. 65. № 10. P. 52–62.
<https://doi.org/10.3103/S1066369X21100054>
22. *Sabitov K.B.* Vibrations of plate with boundary “hinged attachment” conditions // *J. Samara State Tech. University, Ser. Phys. Math. Sci.* 2022. V. 26. № 4. P. 650–671 (In Russian).
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1950>
23. *Sabitov K.B.* Plate oscillations with mixed boundary conditions // *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*. 2023. № 3. P. 63–77 (In Russian).
<https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-63-77>
24. *Sabitov K.B.* Direct and inverse problems for the equation of oscillations of a rectangular plate to find the source // *J. Comp. Math. Math. Phys.* 2023. V. 63. № 4. P. 614–628 (In Russian).
<https://doi.org/10.31857/S0044466923040142>
25. *Timoshenko S.P., Voinovsky–Krieger S.* Plates and shells. M.: Nauka, 1966. 636 p. (In Russian).

УДК 539.3

ЧИСЛЕННО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ГРУНТОВОГО МАССИВА

© 2024 г. Г. Н. Гусев^{а, *}, Р. В. Цветков^{а, **}, В. В. Епин^{а, ***}

^аИнститут механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

*e-mail: gusev.g@icmm.ru,

**e-mail: flower@icmm.ru,

***e-mail: epin.v@icmm.ru

Поступила в редакцию 16.09.2024 г.

После доработки 22.09.2024 г.

Принята к публикации 24.09.2024 г.

В работе представлен численно-аналитический метод определения модуля упругости грунта, основанный на экспериментальных результатах о собственных частотах колебаний сваи, встроенной в грунтовый массив, и их теоретические зависимости от модуля упругости грунта. Приводятся экспериментальные результаты о динамическом поведении сваи, встроенной в грунтовый массив, и численные результаты на основе метода конечных элементов, обеспечивающие построение зависимости собственных частот колебаний сваи от модуля упругости грунта. В качестве демонстрации достоверности и эффективности рассматриваемого метода приводится сопоставление численных результатов о собственных частотах колебаний сваи с различными грузами на ее свободном конце при найденной зависимости модуля упругости грунта и соответствующих экспериментальных результатов.

Ключевые слова: модуль упругости грунта, собственные частоты колебаний, свая, численное моделирование, эксперимент

DOI: 10.31857/S1026351924060101, EDN: TYVGCY

1. Введение. Информация о механических характеристиках грунтового массива имеет первостепенное значение при проектировании и эксплуатации различных строительных и инженерных сооружений, а также при разработке месторождений полезных ископаемых. При анализе и оценке механических свойств грунтов следует отметить их многообразие и изменчивость вследствие промерзания и оттаивания, обводнения или осушения и других факторов. Существует множество методов определения механических характеристик грунтового массива как твердо деформируемой среды [1–5]. Ряд методов посвящен отбору проб грунта и испытанию образцов в условиях лаборатории [6, 7], ряд методов – организации натурных экспериментов на предполагаемой площадке будущего строительства [8]. Другая

часть из них связана с использованием специальных зондов — зондированием как статическим, так и динамическим [9, 10].

Большой класс методов по исследованию механического поведения и свойств грунтов, а также различных объектов, взаимодействующих с грунтовым основанием, основан на численных и экспериментальных результатах вибрационной диагностики. Среди многочисленных работ этого класса можно привести следующие характерные примеры. В работе [11] по спектру собственных частот колебаний оценивается влияние размывания грунта на прочность и жесткость системы свая—грунт. Результаты полевых испытаний сваи, встроенной в грунт, обеспечивающие построение одномерных численных моделей о нелинейном взаимодействии сваи и грунта, приведены в работе [12]. Качество сцепления сваи и грунта в работе [13] оценивается на основе численных и экспериментальных результатов. Взаимодействие сваи и грунта, в том числе с учетом различных свойств грунта, является важной задачей для оценки механического поведения строительных сооружений, рассмотренных в других многочисленных работах [14–17]. При исследованиях механического поведения сваи в грунте и сооружений на грунтовых основаниях в ряде работ рассмотрены различные задачи, в которых учитывается изменение свойств грунта в результате сезонных замораживаний [19–20]. В настоящей работе рассмотрен метод определения модуля упругости грунта и приводятся экспериментальные и численные результаты, обеспечивающие реализацию этого метода и демонстрацию достоверности полученных результатов.

2. Общая схема численно-экспериментального метода определения упругих постоянных грунта. В экспериментах по исследованию динамического поведения сваи, частично встроенной в грунтовый массив, предусмотрена возможность крепления на свободном конце сваи дополнительных грузов. Это позволяет получить в экспериментах различные спектры собственных частот колебаний.

На рис. 1 приведена последовательность действий при определении модуля упругости грунта на основе предлагаемого метода. Проводится эксперимент, обеспечивающий получение значений собственных частот колебаний сваи, погруженной в грунтовый массив. Параллельно решается задача о собственных колебаниях объекта, геометрия которого соответствует эксперименту, при механических характеристиках соответствующих материалу сваи и при различных модулях упругости грунта. Результатом решения этой задачи является зависимость собственных частот колебаний сваи от модуля упругости грунта. На основе этой зависимости и экспериментальных данных о собственных частотах колебаний сваи в реальном грунте определяется модуль упругости грунтового массива. В качестве дополнительной информации о достоверности полученных результатов и в качестве одного из вариантов верификации предлагаемого метода проводятся дополнительные действия, связанные с использованием экспериментальных результатов о собственных колебаниях сваи с грузом, зафиксированном на ее свободном конце. Суть этих действий заключается в следующем. Численно решается задача о собственных частотах колебаний сваи с грузом при найденных в результате предыдущих действий модулях упругости грунтового массива, и параллельно проводятся эксперименты по определению спектров собственных частот колебаний сваи при различных грузах на ее свободном конце. В конечном итоге производится сравнение собственных частот, полученных экспериментально и численно

для сваи в грунте при различных грузах на свободном конце сваи. Результаты сравнения позволяют в определенной степени оценить достоверность найденных значений модуля упругости грунта и приемлемость принятых допущений для рассматриваемой методики.

3. Экспериментальный анализ собственных частот колебаний сваи в грунтовом массиве. Общий вид сваи, встроенной в грунтовый массив, представлен на рис. 2,а. Свая представляет собой стальную трубу длиной 1.2 м, которая на 0.96 м встроена в грунт. Диаметр трубы составляет 5.7×10^{-2} м и толщина ее стенки 3.8×10^{-3} м. На свободном конце сваи приварена стальная пластина диаметром 0.26 м и толщиной 3×10^{-3} м. На эту пластину в выполненных экспериментах жестко устанавливаются грузы 10, 20, 41.5, 61.5 кг.

В виброизмерениях используется 3-осевой цифровой акселерометр ADXL355 (в герметичном корпусе, рис. 2,б, который жестко закреплен на выступающей из земли части сваи. Он ориентирован следующим образом: ось X направлена по касательной к стволу сваи, ось Y — вертикально вниз, ось Z — по нормали. Акселерометр имеет следующие характеристики: 20 бит (мл. бит $3.9 \mu g$); диапазон амплитуд $\pm 2g$; диапазон

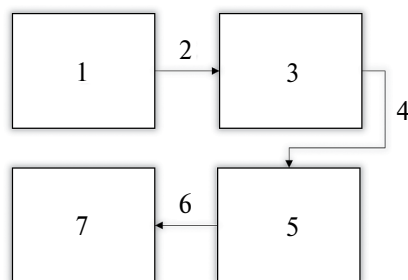


Рис. 1. Последовательность действий при определении модуля упругости грунта. Основные действия и промежуточный результат: 1 — экспериментальное определение собственных частот сваи (с.ч.) в грунте; 2 — с.ч. сваи в грунте; 3 — построение на основе численной модели зависимости модуля упругости грунта от с.ч. сваи в грунте; 4 — модуль упругости грунта (E_{gr}); 5 — расчет с.ч. сваи с грузом для найденного E_{gr} ; 6 — численные значения с.ч. сваи в грунте; 6 — экспериментальное определение с.ч. сваи с грузом и сравнение с модельными результатами.

(а)



(б)



Рис. 2. Свая с грузом 61.5 кг на свободном конце и 3-осевым акселерометром в грунтовом массиве (а); 3-х осевой акселерометр на свободной части сваи (б).

частот от 0 до 1 КГц. Сам датчик коммутирован с одноплатным регистратором на микро-ЭВМ Raspberry Pi, который производит запись сигналов. Динамическое нагружение осуществляется путем удара пенопластовым молотком в направлении осей X , Y и Z и сбрасыванием груза на грунт на расстоянии 0.5 м массой 95 кг с высоты 0.5 м. В экспериментах каждое из 4-х видов воздействий производится 6 ÷ 10 раз.

Результатом эксперимента является набор Фурье-спектров, обеспечивающих получение информации о собственных частотах колебаний сваи. В качестве примера на рис. 3 приведены Фурье-спектры для сваи без груза при ударе в направлении оси Z .

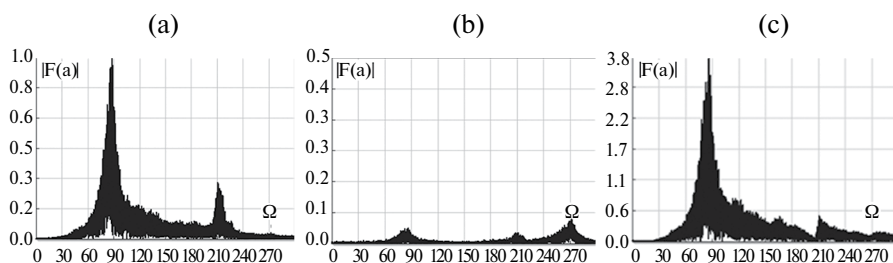


Рис. 3. Фурье спектры для сваи без груза при ударе в направлении оси Z : сигнал для компоненты вдоль оси X (a); сигнал для компоненты вдоль оси Y (b); сигнал для компоненты вдоль оси Z (c).

4. Численное моделирование собственных колебаний сваи, встроенной в грунтовый массив. Для численного моделирования деформационного поведения сваи, встроенной в массив грунта, необходимо решить задачу, связанную с определением размеров грунтового массива, обеспечивающих получение результатов, эквивалентных для сваи, встроенной в массив, который с геометрической точки зрения представляет собой полупространство.

Вариант такой задачи представлен на рис. 4, где рассматривается свая, встроенная в цилиндр, в котором боковая и нижняя грани неподвижны.

В данном случае поведение сваи, встроенной в цилиндр, будет эквивалентно поведению сваи, встроенной в полупространство, при размерах цилиндра, увеличение которых не приводит к изменению собственных частот колебаний сваи. Рассмотрен вариант цилиндра, в котором высота равна диаметру.

Для численного определения собственных частот колебаний используется процедура метода конечных элементов, реализованная в программном комплексе *ANSYS*. В расчетах были приняты следующие характеристики для материала сваи и грунта: модуль упругости материала сваи составил 200 ГПа, коэффициент Пуассона – 0.3, плотность материала сваи – 7800 кг/м³. Для грунта оценен модуль упругости

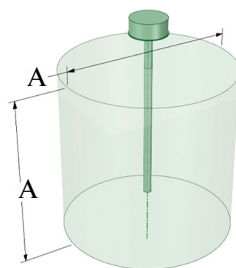


Рис. 4. Свая, встроенная в цилиндр грунта (численная модель).

(E_{gr}) в интервале значений $1 \div 100$ МПа, а коэффициент Пуассона был принят равным 0.3.

На рис. 5 приведена зависимость первых четырех собственных частот колебаний сваи от величины A , определяющей размеры цилиндра.

Результаты численного моделирования позволяют сделать заключение, что при $A > 5$ м задача о свае в грунтовом массиве с конечными размерами эквивалентна задаче о свае в грунте, представленном полупространством. Дополнительно были выполнены аналогичные расчеты при коэффициенте Пуассона грунта 0.01 и 0.49. Полученные результаты не изменили вывода о размере цилиндра.

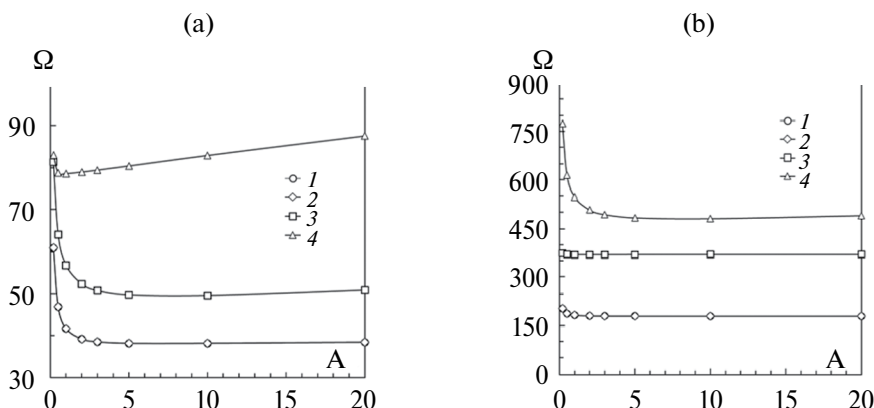


Рис. 5. Зависимость собственных частот колебаний сваи (Ω , Гц) от размеров цилиндра (A , м): при $E_{gr} = 1$ МПа (а), при $E_{gr} = 100$ МПа (б).

На основе построенной геометрической модели сваи, встроенной в грунтовой массив конечных размеров, могут быть получены численные результаты, необходимые для определения модуля упругости грунта на основе экспериментальных данных о собственных частотах колебаний сваи в грунте. Такими численными результатами являются зависимости собственных частот колебаний сваи в грунтовом массиве конечных размеров от модуля упругости грунта. На рис. 6 представлены зависимости первых четырех собственных частот колебаний сваи от модуля упругости грунта при коэффициенте Пуассона 0.3.

Для оценки влияния на эти зависимости коэффициента Пуассона грунта (ν_{gr}) были получены аналогичные зависимости при $\nu_{gr} = 0.01$ и $\nu_{gr} = 0.49$. Результаты численных экспериментов показали, что в этом

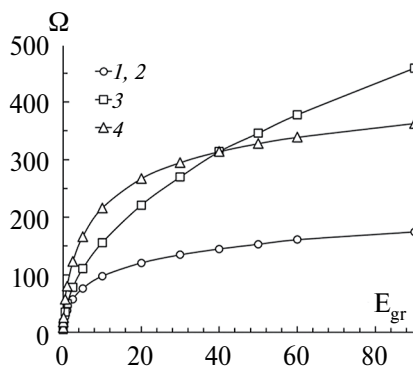


Рис. 6. Зависимости первых четырех собственных частот колебаний [Гц] сваи от модуля упругости грунта [МПа] при коэффициенте Пуассона 0.3.

диапазоне значений коэффициента Пуассона значения первых собственных частот изменяются в пределах 15%.

5. Результаты определения модуля упругости грунта. На основе результатов эксперимента были определены собственные частоты колебаний встроенной в грунт сваи без груза: 1-ая с.ч. и 2-ая с.ч. = 86 Гц, 3-я с.ч. = 210 Гц, 4-я с.ч. = 270 Гц (рис. 3). На основе полученных при численном моделировании зависимостей от модуля упругости грунта собственных частот колебаний сваи без груза (рис. 6), в рамках рассматриваемого метода определения упругих постоянных грунта может быть определен его модуль упругости. При использовании для определения модуля упругости грунта экспериментально полученного значения первой и второй (изгибных) собственных частот колебаний сваи, его величина будет равна 6.5 МПа.

В рамках рассматриваемой схемы определения модуля упругости грунта были выполнены дополнительные исследования, в которых численным методом рассчитывались собственные частоты встроенной в грунт сваи с различными грузами при найденном значении модуля упругости грунта. Далее эти частоты сравнивались с результатами эксперимента. В табл.1 приведены значения первой и третьей собственных частот сваи с различными грузами при модуле упругости грунта 6.5 МПа и экспериментальные результаты о собственных частотах колебаний.

Полученные при различных спектрах собственных частот колебаний теоретические и экспериментальные значения для первой и третьей собственных частот колебаний отличаются соответственно в пределах 13 и 6% в среднем, что также демонстрирует достоверность полученных значений модуля упругости грунта.

6. Заключение. Представлен численно-экспериментальный метод определения модуля упругости грунта на основе экспериментальных данных о собственных частотах колебаний сваи, встроенной в грунтовый массив, и теоретической зависимости собственных частот колебаний аналогичной сваи от модуля упругости грунта.

Для демонстрации достоверности результатов по определению модуля упругости грунта приведены результаты, в которых для сваи с разными спектрами собственных частот колебаний получено удовлетворительное совпадение теоретических значений собственных частот колебаний сваи при найденном на основе рассматриваемого метода величины модуля упругости грунта и соответствующих экспериментальных результатов о собственных частотах колебаний.

Таблица. 1. Собственные частоты колебаний сваи с грузом, полученные численно и экспериментальным методом

| Масса груза, кг | Значения собственных частот, полученные численно, Гц | | Значения собственных частот, полученные из эксперимента, Гц | |
|-----------------|--|--------|---|--------|
| | 1 с.ч. | 3 с.ч. | 1 с.ч. | 3 с.ч. |
| 10 | 34 | 72 | 32 | 80 |
| 20 | 25 | 53 | 23 | 59 |
| 41.5 | 17 | 38 | 15 | 40 |
| 61.5 | 13 | 31 | 10 | 31 |

Работа выполнена в рамках госзадания, регистрационный номер темы 124040500016-9.

Авторы статьи благодарны академику РАН В.П. Матвеевко за постановку задачи и полезные советы по данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кяттов Н.Х.* Определение деформационных и прочностных свойств грунтов жестким дилатометром // Известия Северо-Кавказской государственной академии. 2021. № 4 (30). С. 17–23.
2. *Болдырев Г.Г.* Полевые методы исследования свойств мерзлых грунтов: состояние вопроса. Часть 1. Прессиметрические испытания // Геотехника. 2022. Т. 14. № 4. С. 24–42. <https://doi.org/10.25296/2221-5514-2022-14-4-24-42>
3. *Klinova G.I.* Thaw-induced deformation properties of frozen soils // Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2010. V. 47. № 3. P. 102–107. <http://doi.org/10.1007/s11204-010-9096-2>
4. *Зарунова Н.А.* Сравнение методов определения деформационных свойств грунтов стройплощадки по ул. Столетова в г. Новосибирске // Вестник Кузбасского государственного технического университета. 2019. № 5. С. 92–100. <https://doi.org/10.26730/1999-4125-2019-5-92-100>
5. *Попова П.С., Захаров А.В.* Обзор существующих методов определения модуля деформации грунта // Современные технологии в строительстве. Теория и практика. 2018. Т. 1. С. 141–149.
6. *Мирный А.Ю.* Аналитическое сопоставление методов прямого определения параметров деформируемости грунта // Геотехника. 2018. Т. 10. № 1–2. С. 40–50.
7. *Вдовкина Д.И., Пономарева М.В.* Сравнительный анализ лабораторных и полевых методов исследований грунтов // Труды университета. 2020. № 1(78). С. 57–61.
8. *Абелев М.Ю., Аверин И.В., Контева О.В.* Сравнение результатов полевых и лабораторных исследований характеристик деформируемости глинистых грунтов // Промышленное и гражданское строительство. 2019. № 6. С. 40–45. <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2019.06.40-45>
9. *Игнатова О.И.* Исследование корреляционных связей модуля деформации четвертичных глинистых грунтов разного генезиса с удельным сопротивлением при статическом зондировании // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2014. № 2. С. 15–19.
10. *Болдырев Г.Г., Идрисов И.Х.* Полевые методы исследования свойств мерзлых грунтов: состояние вопроса. Часть 2. Статическое и динамическое зондирование // Геотехника. 2023. Т. 15. № 1. С. 6–21. <https://doi.org/10.25296/2221-5514-2023-15-1-6-21>
11. *Ma J., Han S., Gao X., Li D., Guo Y., Liu Q.* Dynamic Lateral Response of the Partially--Embedded Single Piles in Layered Soil. // Appl. Sci. 2022. V. 12. P. 1504. <https://doi.org/10.3390/app12031504>
12. *Prendergast L., Igoe D.* Examination of the reduction in natural frequency of laterally loaded piles due to strain-dependence of soil shear modulus // Ocean Eng. 2022. V. 258. P. 111614. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111614>
13. *Zhu Daopei, Wang Lihui, Wang Zhangli.* Study on pile-soil bonding condition based on transient shock response using piezoceramic sensors // J. Low Freq. Noise Vib. Active Control. 2024. V. 43. № 1. P. 358–370. <https://doi.org/10.1177/14613484231193270>
14. *Gao Liu, Wang Kuihua, Wu Juntao, Xiao Si, Wang Ning.* Analytical solution for the dynamic response of a pile with a variable-section interface in low-strain integrity testing // J. Sound Vib. 2017. V. 395. P. 328–340. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.02.037>

15. Cui Chunyi, Zhimeng Liang, Xu Chengshun, Xin Yu, Wang Benlong. Analytical solution for horizontal vibration of end-bearing single pile in radially heterogeneous saturated soil // *Appl. Math. Model.* 2022. V. 116. P. 65–83.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.11.027>
16. Wenbing Wu, Zijian Yang, Xin Liu, Yunpeng Zhang, Hao Liu, M. Hesham El Naggar, et al. Horizontal dynamic response of pile in unsaturated soil considering its construction disturbance effect // *Ocean Eng.* 2022. V. 245. P. 110483.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.110483>
17. Liu Xin, Wu Wenbing, El Naggar Mohamed, Wang Kuihua, Mei Guoxiong, Liu Hao, et al. A simplified non-axisymmetric pile-soil interaction model for pile integrity testing analysis // *Appl. Math. Model.* 2023. V. 119. P. 137–155.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.02.011>
18. Feng Xiao, Gang S. Chen, J. Leroy Hulse, Duane Davis, Zhaohui Yang. Characterization of the viscoelastic effects of thawed frozen soil on pile by measurement of free response // *Cold Reg. Sci. Technol.* V. 145. 2018. P. 229–236.
<https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2017.09.011>
19. Jiada Guan, Xiyin Zhang, Xingchong Chen, Mingbo Ding, Wanping Wang, Shengsheng Yu. Influence of seasonal freezing-thawing soils on seismic performance of high-rise cap pile foundation in permafrost regions // *Cold Reg. Sci. Technol.* 2022. V. 199. P. 103581.
<https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2022.103581>
20. Gang Sheng Chen, Duane Davis, J. Leroy Hulse. Measurement of frozen soil–pile dynamic properties: A system identification approach // *Cold Reg. Sci. Technol.* 2012. V. 70. P. 98–106.
<https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2011.08.007>

NUMERICAL-EXPERIMENTAL METHOD OF DETERMINATION OF THE ELASTIC MODULUS OF A SOIL MASSIF

G. N. Gusev^{a, *}, R. V. Tsvetkov^{a, **}, V. V. Epin^{a, ***}

^a*Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science
(ICMM UB RAS)*

*e-mail: gusev.g@icmm.ru,

**e-mail: flower@icmm.ru,

***e-mail: epin.v@icmm.ru

Abstract. The paper presents a numerical and analytical method for determining the modulus of elasticity of the soil, based on experimental results on the natural frequencies of vibration of a pile embedded in a soil mass and their theoretical dependence on the modulus of elasticity of the soil. Experimental results on the dynamic behavior of a pile embedded in a soil mass and numerical results based on the finite element method, which provide the construction of the dependence of the natural frequencies of vibration of the pile on the modulus of elasticity of the soil, are given. As a demonstration of the reliability and efficiency of the method under consideration, a comparison of numerical results on the natural frequencies of vibrations of the pile with different weights at its free end at the found dependence of the modulus of elasticity of the soil and the corresponding experimental results is given.

Keywords: ground elastic modulus, natural frequencies of vibrations, pile, numerical modeling, experiment

REFERENCES

1. *Kyatov N.H.* Determination of deformation and strength properties of soils by rigid dilatometer // *Proceedings of the North Caucasus State Academy*. 2021. № 4 (30). P. 17–23
2. *Boldyrev G.G.* Field methods of research of frozen ground properties: state of the art. Part 1. Pressimetric tests // *Geotechnics*. 2022. V. 14. № 4. P. 24–42.
<https://doi.org/10.25296/2221-5514-2022-14-4-24-42>
3. *Klinova G.I.* Thaw-induced deformation properties of frozen soils // *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2010. V. 47. № 3. P. 102–107. <http://doi.org/10.1007/s11204-010-9096-2>
4. *Zaripova N.A.* Comparison of methods for determining the deformation properties of soils of the construction site on Stoletova St. in Novosibirsk // *Bulletin of Kuzbass State Technical University*. 2019. № 5. P. 92–100.
<https://doi.org/10.26730/1999-4125-2019-5-92-100>
5. *Popova P.S.* Review of existing methods for determining the soil deformation modulus // *Modern technologies in construction. Theory and practice*. 2018. V. 1. P. 141–149.
6. *Mirnyi A.Yu.* Analytical comparison of methods for direct determination of soil deformability parameters // *Geotekhnika*. 2018. - V. 10. № 1-2. P. 40–50.
7. *Vdovkina D.I.* Comparative analysis of laboratory and field methods of soil research // *Proceedings of the University*. 2020. № 1 (78). P. 57–61.
8. *Abelev, M.Yu.* Comparison of the results of field and laboratory research of deformability characteristics of clayey soils // *Industrial and Civil Engineering*. 2019. № 6. P. 40–45.
<https://doi.org/10.33622/0869-7019.2019.06.40-45>
9. *Ignatova O.I.* Research of correlation correlations between the deformation modulus of Quaternary clayey soils of different genesis and resistivity at static sounding // *Foundations, foundations and soil mechanics*. 2014. № 2. P. 15–19.
10. *Boldyrev G.G.* Field methods of research of frozen ground properties: state of the art. Part 2. Static and dynamic probing // *Geotechnics*. 2023. V. 15. № 1. P. 6–21.
<https://doi.org/10.25296/2221-5514-2023-15-1-6-21>
11. *Ma J., Han S., Gao X., Li D., Guo Y., Liu Q.* Dynamic Lateral Response of the Partially-Embedded Single Piles in Layered Soil. // *Appl. Sci*. 2022. V. 12. P. 1504.
<https://doi.org/10.3390/app12031504>
12. *Prendergast L., Igoe D.* Examination of the reduction in natural frequency of laterally loaded piles due to strain-dependence of soil shear modulus // *Ocean Eng*. 2022. V. 258. P. 111614.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111614>
13. *Zhu Daopei, Wang Lihui, Wang Zhangli.* Study on pile-soil bonding condition based on transient shock response using piezoceramic sensors // *J. Low Freq. Noise Vib. Active Control*. 2024. V. 43. № 1. P. 358–370.
<https://doi.org/10.1177/14613484231193270>
14. *Gao Liu, Wang Kuihua, Wu Juntao, Xiao Si, Wang Ning.* Analytical solution for the dynamic response of a pile with a variable-section interface in low-strain integrity testing // *J. Sound Vib*. 2017. V. 395. P. 328–340.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.02.037>
15. *Cui Chunyi, Zhimeng Liang, Xu Chengshun, Xin Yu, Wang Benlong.* Analytical solution for horizontal vibration of end-bearing single pile in radially heterogeneous saturated soil // *Appl. Math. Model*. 2022. V. 116. P. 65–83.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.11.027>
16. *Wenbing Wu, Zijian Yang, Xin Liu, Yunpeng Zhang, Hao Liu, M. Hesham El Naggar, et al.* Horizontal dynamic response of pile in unsaturated soil considering its construction disturbance effect // *Ocean Eng*. 2022. V. 245. P. 110483.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.110483>
17. *Liu Xin, Wu Wenbing, El Naggar Mohamed, Wang Kuihua, Mei Guoxiong, Liu Hao, et al.* A simplified non-axisymmetric pile-soil interaction model for pile integrity testing analysis // *Appl. Math. Model*. 2023. V. 119. P. 137–155.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.02.011>

-
18. *Feng Xiao, Gang S. Chen, J. Leroy Hulsey, Duane Davis, Zhaozhui Yang*. Characterization of the viscoelastic effects of thawed frozen soil on pile by measurement of free response // *Cold Reg. Sci. Technol.* V. 145. 2018. P. 229–236.
<https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2017.09.011>
 19. *jiada Guan, Xiyin Zhang, Xingchong Chen, Mingbo Ding, Wanping Wang, Shengsheng Yu*. Influence of seasonal freezing-thawing soils on seismic performance of high-rise cap pile foundation in permafrost regions // *Cold Reg. Sci. Technol.* 2022. V. 199. P. 103581.
<https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2022.103581>
 20. *Gang Sheng Chen, Duane Davis, J. Leroy Hulsey*. Measurement of frozen soil–pile dynamic properties: A system identification approach // *Cold Reg. Sci. Technol.* 2012. V. 70. P. 98–106.
<https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2011.08.007>

УДК 539.32

ИЗМЕРЕНИЕ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК МОНОКРИСТАЛЛОВ НИКЕЛЕВОГО ЖАРОПРОЧНОГО СПЛАВА МЕТОДОМ СПЕКЛ-ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

© 2024 г. А. И. Епишин^{a, *}, И. Н. Одинцев^b, Д. С. Лисовенко^{c, **},
Н. В. Петрушин^d, И. Л. Светлов^d

^aИнститут структурной макрокинетики и проблем материаловедения
им. А.Г. Мержанова РАН, Черноголовка, Россия

^bИнститут машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

^cИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

^dВсероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов
Национального исследовательского центра “Курчатовский институт”,
Москва, Россия

*e-mail: a.epishin2021@gmail.com,

**e-mail: lisovenk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 02.09.2024 г.

После доработки 22.09.2024 г.

Принята к публикации 24.09.2024 г.

Методом спекл-интерферометрии исследованы упругие свойства монокристаллов никелевого жаропрочного сплава ВЖМ7. Образцы в виде пластин различной кристаллографической ориентации нагружали в условиях чистого сдвига и регистрировали спекл-интерференционные картины. Численная обработка интерференционных картин позволила определить величины модуля Юнга в направлениях [001] и [011], $E_{001} = 138$ ГПа и $E_{011} = 241$ ГПа, базовую величину коэффициента Пуассона $\nu_0 = 0.39$ в системе координат $\langle 001 \rangle$, а также минимальные и максимальные его значения $\nu_{\min} = -0.10$ и $\nu_{\max} = 0.69$ при продольном нагружении вдоль [101] и поперечной деформации вдоль $[10\bar{1}]$ и [010] соответственно. С использованием измеренных величин E_{001} , E_{011} , ν_0 , ν_{\min} и ν_{\max} рассчитаны упругие жесткости монокристаллов $C_{11} = 264$ ГПа, $C_{12} = 166$ ГПа и $C_{44} = 133$ ГПа и их упругие податливости $S_{11} = 7.35$ ТПа⁻¹, $S_{12} = -2.84$ ТПа⁻¹ и $S_{44} = 7.52$ ТПа⁻¹. Используемый метод позволяет однозначно определить знак коэффициента Пуассона, и поэтому его следует рекомендовать для изучения упругих свойств материалов-ауксетиков, для которых определение знака коэффициента Пуассона имеет принципиальное значение.

Ключевые слова: никелевые жаропрочные сплавы, кубические кристаллы, упругие константы, коэффициент Пуассона, спекл-интерферометрия

1. Введение. Упругость является одним из фундаментальных свойств твердых тел, и поэтому исследованию характеристик упругости и развитию методов их измерения постоянно уделяется большое внимание. Наиболее часто используемыми в инженерных расчетах характеристиками упругости являются модуль Юнга E , модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν . Первые две характеристики E и G экспериментально определяются с высокой точностью с использованием стандартных методов, например модуль Юнга E часто измеряют по удлинению при одноосном растяжении, а модуль сдвига G — по периоду крутильных колебаний. Определение коэффициента Пуассона ν стандартными методами в силу ряда причин не столь точно. Так при одноосном растяжении база измерения поперечной деформации ϵ_x , требуемой для определения ν , на порядок меньше, чем продольной ϵ_z , используемой для определения E . Кроме того, коэффициент Пуассона рассчитывают как отношение $\nu_{xz} = -\epsilon_x / \epsilon_z$ и при этом относительные ошибки двух измерений суммируются, $\delta\nu_{xz} = \delta\epsilon_x + \delta\epsilon_z$. При использовании же вибрационных методов обычно возбуждаются изгибные или крутильные моды колебаний, при которых реализуются линейные и сдвиговые деформации, соответствующие модулям E и G .

В тоже время точное измерение коэффициента Пуассона ν востребовано как для инженерных расчетов, так и для решения научных задач. Детальный обзор, посвященный коэффициенту Пуассона металлов и сплавов см. в публикации Кёстера (Köster) и Франца (Franz) [1]. С научной точки зрения величина ν представляет интерес, поскольку она может быть использована для понимания природы межатоомного взаимодействия, ответственного за упругие свойства твердых тел [2]. Обычно величина ν положительна, т.е. при одноосном растяжении образец поперечно сжимается. Однако для некоторых твердых тел ν может принимать отрицательные значения. Для большинства таких тел этот эффект частичный, т.е. площадь поперечного сечения образца интегрально сокращается, но из-за анизотропного измерения его формы в определенном секторе поперечных направлений наблюдается расширение. Такие материалы называют “частичными ауксетиками”. Здесь следует отметить, что термин “ауксетики” для твердых тел с $\nu < 0$ был введен профессором Эвансом с соавт. из Эксетерского университета [3]. К частичным ауксетикам относятся кубические кристаллы лития Li, натрия Na, калия K, кальция Ca, золота Au, серебра Ag, железа Fe, никеля Ni, меди Cu, кобальта Co, свинца Pb и др. [4, 5]. В редких случаях твердые тела и специальные структуры могут быть “полными ауксетиками” — при одноосном растяжении они расширяются во всех поперечных направлениях. Среди кристаллических материалов полными ауксетиками являются кубические кристаллы сплавов самария Sm с серой S с добавлением La, Y, Tm—Sm_{0.75}Y_{0.25}S, Sm_{0.75}La_{0.25}S, Sm_{0.65}La_{0.35}S, Sm_{0.75}Tm_{0.25}S [5]. Иногда абсолютная величина ν сравнима с ошибкой стандартных измерений, что приводит к неопределенности знака ν . Например, литературные значения минимального коэффициента Пуассона ГЦК Pd $\nu_{\min} = \nu_{[10\bar{1}][101]}$ изменяются в пределах от 0.01 [6] до -0.04 [5], что не позволяет однозначно утверждать, является ли этот кристалл ауксетиком или нет. Подобные проблемы существуют и для твердых тел с большими величинами ν , например для ОЦК Cr приводятся существенно различающиеся значения базовой величины коэффициента Пуассона $\nu_0 = \nu_{[100][001]}$, 0.14 и 0.19 [2]. Для кубических кристаллов Ba, Sm_{0.7}Y_{0.3}S, Sm_{0.75}Y_{0.25}S разброс в максимальных значениях коэффициента

Пуассона приводит к тому, что нет однозначности в том, являются эти кристаллы полными или частичными ауксетиками [5]. Для кристаллов с кубической сингонией существует четыре стационарных значения коэффициента Пуассона [7], исходя из которых можно определить максимальное или минимальное значение коэффициента Пуассона. В работе [7] было продемонстрировано, что дополнительные экстремальные значения могут также наблюдаться при специальных ориентациях, близких к [111]. Такие экстремальные значения коэффициента Пуассона свойственны метастабильным кристаллам, таким как кристаллы с эффектом памяти формы (например, сплавы систем In-Tl и Fe-Pd), обусловленным мартенситным превращением кристаллической решетки. Для этих кристаллов минимальные значения могут превышать по абсолютной величине стандартное минимальное значение, равное -1 .

В настоящее время имеется много методов измерения упругих констант, различающихся как по сложности проведения эксперимента, так и по точности получаемых результатов, см. Springer-справочник Видерхорна (Wiedershorn) и Филдс (Fields) [8]. Пожалуй, наиболее оригинальным методом, предполагающим прямое измерение коэффициента Пуассона и позволяющим однозначно определить его знак, является метод, предложенный Корню, см. раздел 3.2.1 в монографии Белл (Bell) [9]. Этот метод базируется на решении Сен-Венана, который показал, что при чистом изгибе пластины отношение радиусов продольной и поперечной кривизны деформируемой пластины равно коэффициенту Пуассона. Корню измерял это отношение методом оптической интерферометрии, а позже для этой цели были использованы методы голографической [10] и спекл-интерферометрии [11]. Последняя модификация метода Корню, использующая спекл-интерферометрию, была усовершенствована и применена в настоящей работе для измерения упругих характеристик монокристаллов никелевого жаропрочного сплава ВЖМ7. Особое внимание было уделено измерению коэффициента Пуассона.

2. Материал и методика исследования. Объектами исследования являлись образцы монокристаллов никелевого жаропрочного сплава ВЖМ7, содержащего (в % по массе): 6.2Al, 2.6Re, 4.0Mo, 3.8Ta, а также Cr, W, Co, Ti, La [12], разработанного во Всероссийском научно-исследовательском институте авиационных материалов Национального исследовательского центра “Курчатовский институт” методом компьютерного моделирования [13]. Сплав предназначен для литья монокристаллических лопаток газотурбинных двигателей для эксплуатации при температурах до 1100 °С. Обладая высокой фазовой стабильностью, прочностью и жаропрочностью, сплав также имеет низкую плотность, 8.39 г/см³, что обеспечивает более низкую нагрузку на лопатки турбины от действия центробежной силы.

Сплав имеет двухфазную микроструктуру γ/γ' , где γ – матричная фаза, представляющая собой сложно легированный ГЦК твердый раствор на Ni основе, а γ' – упрочняющая фаза на основе интерметаллида Ni₃Al (кубическая структура L1₂).

Цилиндрические монокристаллические отливки сплава (прутки диаметром ≈ 15 мм и длиной ≈ 180 мм), из которых изготавливали образцы монокристаллов для исследований, были направленно закристаллизованы методом LMC (Liquid Metal Cooling) [14] в промышленной вакуумной плавильно-заливочной

установке¹. Для зарождения монокристаллической структуры заданных ориентаций [001] и [011] в отливках из сплава ВЖМ7 использовались специальные тугоплавкие монокристаллические затравки из сплава Ni-W с кристаллографической ориентацией [001] и [011], которые помещали в затравочные полости литейных керамических форм. После литья монокристаллы были стандартно термообработаны.

После термической обработки выделения γ' -фазы имеют вид кубоидов, размером около 0.5 мкм, равномерно распределенных в γ -матрице. Кристаллические решетки γ - и γ' -фаз когерентно сопряжены, при этом небольшая разность параметров γ - и γ' -решеток компенсируется их упругими деформациями [15]. Для γ - и γ' -решеток выполняются следующие ориентационные соотношения: $\{001\}_{\gamma} \parallel \{001\}_{\gamma'}$, $\{100\}_{\gamma} \parallel \{100\}_{\gamma'}$.

Кристаллографическую ориентацию полученных монокристаллов сплава проверяли методом рентгеноструктурного анализа на дифрактометре по методике, описанной в работе [16]. С этой целью использовали образцы, отрезанные в поперечном направлении от каждой монокристаллической отливки сплава в ее начальной и конечной частях. При этом плоскость поперечного реза образца была химически протравлена для удаления поверхностного слоя, деформированного при резке. Рентгено съемка проводилась в характеристическом излучении $\text{CuK}_{\alpha 1}$, при этом для монокристаллов с аксиальными кристаллографическими направлениями [001] и [011] регистрировали отражения от плоскостей (001) и (011) соответственно.

Полученные вышеуказанным методом отливки жаропрочного сплава не имеют большеугловых границ зерен, но состоят из субзерен, разделенных малоугловыми границами, разориентация которых в исследуемых образцах не превышала 0.5°. Вследствие наличия субзерен иногда такие отливки называют “техническими” монокристаллами.

Таким образом, исследуемые отливки никелевых жаропрочных сплавов представляют из себя “технические двухфазные монокристаллы” с кубической структурой и поэтому ниже мы будем использовать для них формулы теории упругости, справедливые для кристаллов кубической сингонии.

Из цилиндрических монокристаллов на проволоочно-вырезном электроэрозионном станке были вырезаны образцы в виде пластин толщиной ≈ 2.5 мм, шириной $b \approx 15$ мм и длиной $L \approx 120$ мм. Для получения образцов требуемых кристаллографических ориентаций монокристаллы ориентировали в станке по дендритной структуре, выявленной на цилиндрической и торцевой поверхностях монокристаллов химическим травлением. При этом ошибка вырезки по требуемым кристаллографическим плоскостям не превышала 2–3°. Подробное описание метода определения ориентации монокристаллов никелевых жаропрочных сплавов по их дендритной структуре см. в разделе 4.4 в работе [17]. После электроэрозионной вырезки пластинчатые образцы были подвергнуты шлифованию, после чего их толщина уменьшилась до $h \approx 2$ мм. Схему вырезки пластинчатых образцов, их кристаллографическую ориентацию и точные размеры см. на рис. 1 и в табл. 1 соответственно.

Определение упругих характеристик материала выполнялось путем испытаний образцов-балок по схеме чистого изгиба [18], рис. 2. Рабочая часть

¹ Монокристаллы были получены под руководством к.т.н. Висик Е.М., НИЦ “Курчатовский институт” – ВИАМ.

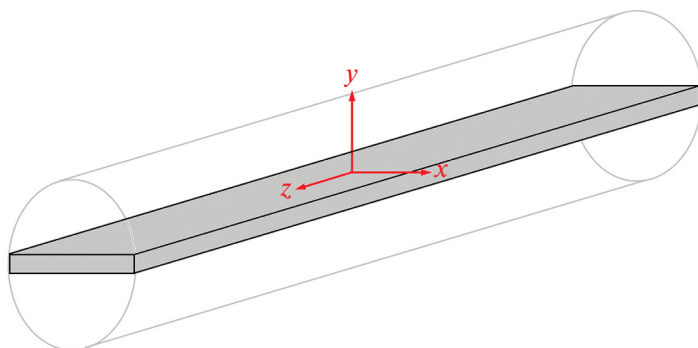


Рис. 1. Схема вырезки пластинчатых образцов из монокристаллов сплава ВЖМ7.

Таблица 1. Кристаллографическая ориентация и размеры пластинчатых образцов

| № образца | x | y | z | b , мм | h , мм |
|-----------|---------------|---------------|-------|----------|----------|
| 1 | [100] | [010] | [001] | 15.5 | 2.04 |
| 2 | $[10\bar{1}]$ | [010] | [101] | 14.8 | 1.90 |
| 3 | [010] | $[\bar{1}01]$ | [101] | 15.5 | 1.94 |

образцов имела вид узкой полосы длиной L прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ с соотношением размеров $L \gg b \gg h$. При этом полагалось, что материал упруго ортотропен и обеспечено совпадение плоскости образца xz с плоскостью упругой симметрии. В общем случае ориентации продольной оси x относительно главной оси анизотропии ожидаемое поле малых прогибов описывается полиномом второго порядка [19]:

$$w(z, x) = \frac{\chi_z}{2} z^2 + \frac{\chi_x}{2} x^2 + \chi_{zx} xy + C_z z + C_x x + C_0. \quad (2.1)$$

Здесь $\chi_z = \partial^2 w / \partial z^2$ и $\chi_x = \partial^2 w / \partial x^2$ – продольная и поперечная кривизны деформированной поверхности, $\chi_{zx} = \partial^2 w / \partial z \partial x$ – ее угол закручивания, C_z и C_x – повороты образца как целого, C_0 – жесткое смещение. При точном совпадении осей x и z с главными осями анизотропии материала

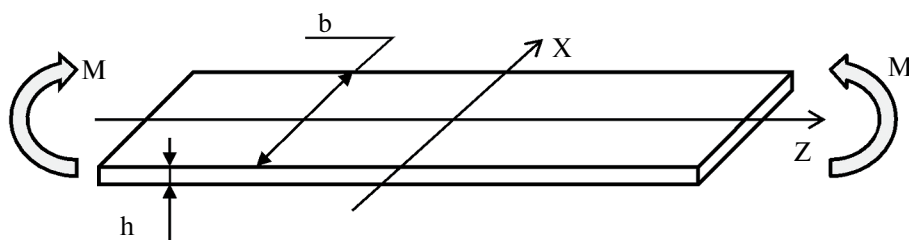


Рис. 2. Расчетная схема для интерпретации испытания образцов.

кручение образца, очевидно, будет отсутствовать. В этом случае продольный модуль упругости и коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) рассчитываются из простых соотношений:

$$E_z = \frac{M}{\chi_z I_z}, \quad \nu_{zx} = -\frac{\chi_z}{\chi_x}, \quad (2.2)$$

где $I_z = bh^3 / 12$ – момент инерции сечения. Здесь важно отметить следующий момент. На практике в силу технических возможностей указанное условие относительно требуемой ориентации образца может выполняться лишь приближенно. Если варьировать угол φ между осью образца x и главной осью анизотропии, то значения кривизн χ_z и χ_x будут изменяться закономерным образом [19]. Однако в точке $\varphi = 0$ достигаются условия их стационарности, т.е.

$$\left. \frac{d\chi_z}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0, \quad \left. \frac{d\chi_x}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0. \quad (2.3)$$

Поэтому при сравнительно небольших значениях φ ошибки в вычислениях констант материала по формулам (2.2) оказываются незначительными.

В выполненных экспериментах образцы жестко защемялись в вертикальном положении в подвижном захвате специально разработанного нагружающего устройства, рис. 3. Изгибающие моменты создавались приложением малого усилия P (с помощью калиброванных грузов) к поперечному рычагу длиной R . Таким образом, практически постоянный изгибающий момент составлял $M = PR$. При этом исключалось теснение возможного кручения образца в случае общего характера его деформирования. Захват был связан с неподвижными основаниями через два упругих стержня. После нагружения образца к захвату посредством толкателей прикладывались контролируемые усилия F_c так, чтобы обеспечивалась механическая компенсация пространственных

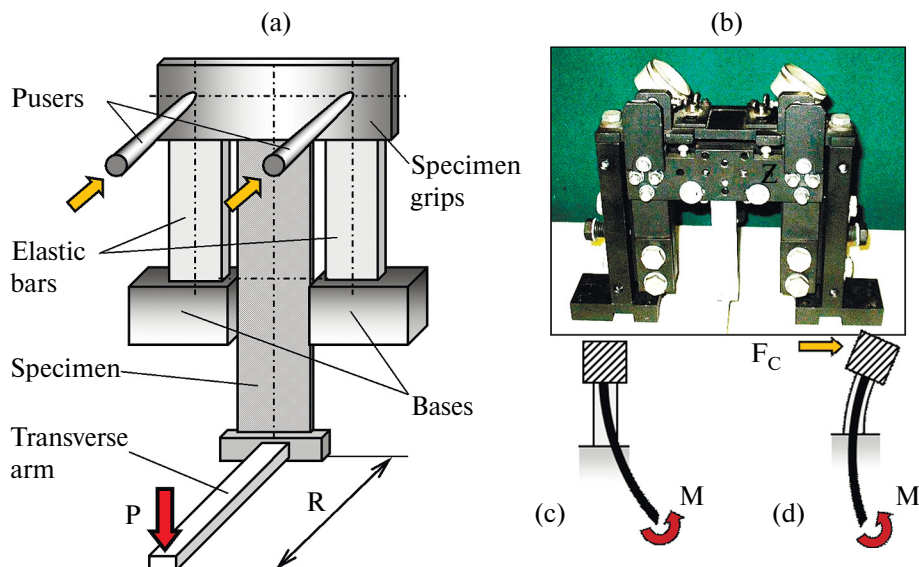


Рис. 3. Конструкция (а) и общий вид (б) нагружающего устройства, пространственное положение образца до (с) и после (д) компенсации поворотов как целого.

поворотов C_z и C_x . Такая процедура способствовала в дальнейшем наиболее точному определению искомым значений кривизн и угла закручивания.

Регистрация деформированного состояния образцов осуществлялась бесконтактным высокоточным методом электронной цифровой спекл-интерферометрии с использованием стандартной для данной задачи оптической схемы интерферометра Майкельсона [20, 21]. Напомним, что в этом случае визуализируемые картины полос представляют собой, по существу, системы линий равных прогибов $w(x, y)$. Значения перемещений в произвольных точках рассчитываются по порядкам полос N :

$$w(x_i, y_i) = N \frac{\lambda}{2}, \quad (2.4)$$

где λ — длина волны используемого лазерного излучения. В выполненных экспериментах был использован твердотельный лазер SLM-417, генерирующий излучение с $\lambda = 0.532$ мкм. Запись изображений производилась цифровой камерой Manta G-146.

Первичная обработка экспериментальных данных заключалась в определении по интерферограммам с использованием соотношения (2.4) представительного множества точек $(z_i, x_i, w_i), i = 1, \dots, m \gg 6$ и в их аппроксимации по методу наименьших квадратов функцией (2.1). Искомые кривизны и кручение оценивались как коэффициенты в выполненном приближении. После этого по формулам (2.2) вычислялись значения упругих констант материала.

В работе были испытаны три образца, параметры которых приводятся в табл. 1. Было выполнено по три нагружения каждого из них. Типичные спекл-интерферограммы их деформирования приводятся на рис. 4. Уже на этом этапе становится очевидным отрицательный знак коэффициента Пуассона образца № 2 — интерференционные полосы здесь приобретают вид семейства вложенных эллипсов, т.е. главные кривизны деформированной поверхности имеют одинаковый знак. Результаты математической обработки полученных экспериментальных данных представлены в табл. 2. Как можно заметить, кручение деформированной поверхности во всех рассмотренных случаях строго не равнялось нулю ($\chi_{xz} \neq 0$). Это означает, что ориентация образцов в системе координат, связанной с главными осями анизотропии, не являлась идеальной, что визуально подтверждается небольшим отклонением большей диагонали эллипсов от вертикали. Однако в силу малой величины χ_{xz} компонентой кручения в настоящей работе пренебрегли.

3. Результаты и обсуждение. На рис. 4 показаны спекл-интерференционные картины, зарегистрированные с монокристаллических пластин сплава ВЖМ7 при чистом изгибе. Видно, что пластина, продольно и поперечно ориентированная вдоль главных кристаллографических осей $\langle 001 \rangle$ (рис. 4,а), изгибается вокруг осей x и z в противоположных направлениях, что соответствует положительному значению $\nu_{xz} = 0.39$ (базовое значение коэффициента Пуассона ν_0). Пластина с ориентацией осей x и z вдоль $[10\bar{1}]$ и $[101]$ соответственно (рис. 4,б) показывает двойной изгиб в одном направлении, что соответствует минимальному отрицательному значению $\nu_{xz} = \nu_{\min} = -0.1$. При ориентации осей x и z соответственно вдоль $[010]$ и $[101]$ (рис. 4,в) пластина изгибается в противоположных направлениях. Как и в первом случае, величина ν_{xz} положительна, но значительно больше — 0.69 (максимально значение ν_{\max}). Результаты отдельных измерений модуля Юнга и коэффициента Пуассона представлены в табл. 2.

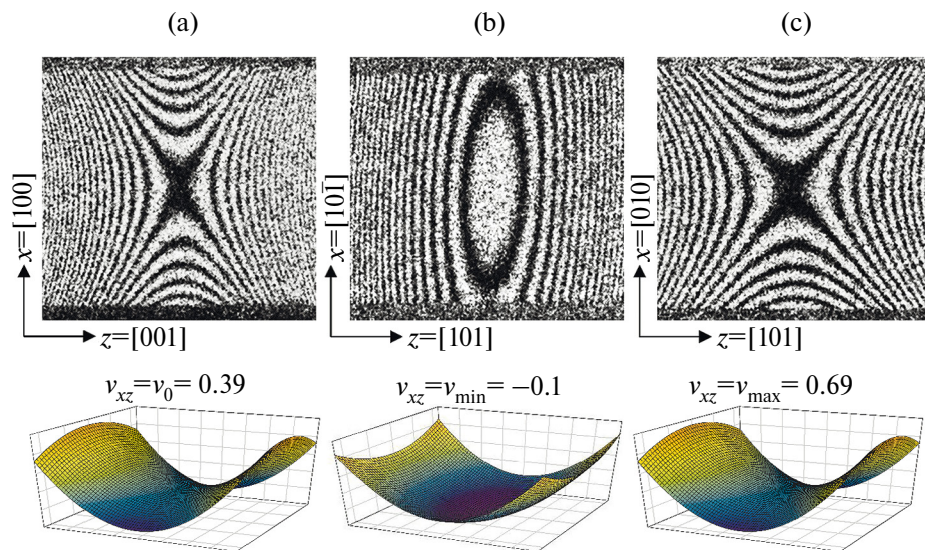


Рис. 4. Спекл-интерференционные картины, зарегистрированные при чистом изгибе монокристаллических пластин сплава ВЖМ7 разных ориентаций, см. указанное направление осей x и z . Ниже качественно показан характер деформации пластин.

Таблица 2. Результаты отдельных измерений и средние значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона монокристаллов сплава ВЖМ7

| Образец № | χ_z / M , $H^{-1} \times M^{-2}$ | χ_x / M , $H^{-1} \times M^{-2}$ | χ_{xz} / M , $H^{-1} \times M^{-2}$ | E_z , ГПа | \bar{E}_z , ГПа | v_{xz} | \bar{v}_{xz} |
|--------------|--|--|---|----------------|-------------------|----------|-------------------|
| 1 | 0.661 | -0.257 | 0.0161 | 138.0 | $E_{001} = 138$ | 0.389 | $v_0 = 0.39$ |
| | 0.661 | -0.258 | 0.0152 | 137.9 | | 0.390 | |
| | 0.660 | -0.252 | 0.0168 | 138.3 | | 0.382 | |
| 2 | 0.499 | 0.0470 | -0.0296 | 237.6 | $E_{011} = 237$ | -0.094 | $v_{min} = -0.10$ |
| | 0.501 | 0.0517 | -0.0290 | 236.6 | | -0.103 | |
| | 0.500 | 0.0519 | -0.0300 | 237.4 | | -0.104 | |
| 3 | 0.434 | -0.152 | 0.0071 | 244.1 | $E_{011} = 244$ | 0.698 | $v_{max} = 0.69$ |
| | 0.434 | -0.150 | 0.0080 | 244.2 | | 0.691 | |
| | 0.435 | 0.151 | 0.0083 | 244.0 | | 0.695 | |

Как видно из табл. 2, в настоящей работе были экспериментально измерены пять характеристик упругости монокристаллов сплава ВЖМ7: E_{001} , E_{011} , v_0 , v_{min} и v_{max} . Согласно [7] данные характеристики связаны с компонентами матрицы упругих податливостей S_{ij} следующим образом:

$$E_{001} = S_{11}^{-1}, \quad (3.1)$$

$$E_{011} = (S_{11} - S / 2)^{-1}, \quad (3.2)$$

$$v_{001} = -S_{12} / S_{11}, \quad (3.3)$$

$$v_{min} = -(S_{12} + S / 2) / (S_{11} - S / 2), \quad (3.4)$$

$$v_{\max} = -S_{12} / (S_{11} - S / 2) \quad (3.5)$$

$$S = S_{11} - S_{12} - S_{44} / 2.$$

Соотношения (3.1)–(3.5) образуют систему 5-ти линейных уравнений относительно 3-х неизвестных величин S_{11} , S_{12} и S (или S_{44}). Поскольку данная система является переопределенной, она не имеет точного решения и поэтому решалась приближенно — методом подгонки значений S_{ij} минимизировались отклонения между измеренными и расчетными значениями E_{001} , E_{011} , v_0 , v_{\min} и v_{\max} .

В результате проведенных вычислений были получены следующие значения упругих податливостей: $S_{11} = 7.35 \text{ ГПа}^{-1}$, $S_{12} = -2.84 \text{ ГПа}^{-1}$ и $S_{44} = 7.52 \text{ ГПа}^{-1}$. Используя известные соотношения между упругими жесткостями C_{ij} и податливостями S_{ij} кубических кристаллов, см. например, формулы (10)–(11) в работе [22], получаем: $C_{11} = 264 \text{ ГПа}$, $C_{12} = 166 \text{ ГПа}$ и $C_{44} = 133 \text{ ГПа}$.

Таблица 3. Упругие константы (в ГПа) и значения коэффициентов Пуассона для кубических кристаллов Ni, Ni₃Al и никелевых сплавов

| Кристалл | Метод | C_{11} | C_{12} | C_{44} | E_{001} | E_{011} | v_0 | v_{\min} | v_{\max} | Ссылка |
|--------------------|-------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-------|-----------------|---------------|------------|
| Ni | US | 251 | 150 | 123.5 | 138 | 233 | 0.37* | −0.055* | 0.63* | [23] |
| Ni ₃ Al | R | 225 | 141 | 124.4 | 106 | 206 | 0.40* | −0.17* | 0.77* | [24] |
| ЖС6Ф | TE | | | | 133 | 230 | | | | [25] |
| | R | | | | 137 | 240 | | | | |
| | TE | — | — | — | — | — | 0.36 | −0.04, −0.09 | 0.68, 0.70 | [10] |
| | HI | — | — | — | — | — | — | −0.07 | — | |
| ВЖМ7 | SI | 264 | 166 | 133 | 138 | 241 | 0.39 | −0.10 | 0.69 | Эта работа |
| | TE | — | — | — | 140 | 233 | 0.45* | −0.10* | 0.73* | |
| ВЖМ8 | TE | — | — | — | 143 | 244 | 0.44 | −0.007 | 0.81 | [26] |
| CMSX-4 | R | 250 | 160 | 129 | 125 | 227 | 0.39* | −0.12* | 0.71* | [27] |
| | R | 252 | 160 | 131 | 127 | 231 | 0.39* | −0.11* | 0.71* | |
| | USS | 237 | 146 | 129 | 126 | 227 | 0.38* | −0.12* | 0.69* | [28] |
| MAR-M002 | R | 259 | 167 | 125 | 127 | 228 | 0.39* | −0.09* | 0.70* | |
| Ni-Cr-Co-W | R | 276 | 184 | 129 | 129 | 234 | 0.40* | −0.09* | 0.72* | [29] |
| ERBO/1A | R | 252 | 161 | 132 | 126 | 232 | 0.39* | −0.12* | 0.71* | [30] |
| LEK94 | R | 242 | 151 | 131 | 126 | 229 | 0.38* | −0.12* | 0.70* | |
| Эксперим. сплав | TE | 238 | 144 | 141 | 130 | 239 | 0.38* | −0.15* | 0.69* | [31] |

*Значения коэффициента Пуассона, рассчитанные по упругим константам;

TE — тензометрия при одноосном растяжении;

R — резонансный метод;

USS — измерение скорости ультразвука;

HI — голографическая интерферометрия;

SI — спекл-интерферометрия.

Полученные значения модулей Юнга, коэффициентов Пуассона и упругих жесткостей представлены в табл. 3 в сравнении с соответствующими литературными значениями для кубических кристаллов Ni, Ni₃Al и никелевых сплавов, измеренными разными методами.

Из табл. 3 видно, что модули Юнга $E_{001} = 138$ ГПа и $E_{011} = 241$ ГПа, измеренные в настоящей работе для сплава ВЖМ7 методом спекл-интерферометрии (SI), близки к измеренным для данного сплава в работе [26] методом тензометрии при одноосном растяжении (ТЕ), соответственно равным 140 и 233 ГПа. Подобные величины E_{001} и E_{011} получены в работе [26] для сплава ВЖМ8, а также в [25] для сплава ЖС6Ф. Примечательно, что величины модулей Юнга, измеренные в [25] резонансным методом (R), несколько выше, чем методом ТЕ, что, очевидно, может быть следствием небольшой пластической деформации образца, возможной при его нагружении в испытательной машине. Примечательно также, что модули Юнга сплавов CMSX-4, MAR-M002, ERBO/1A и LEK94 заметно ниже, чем у сплавов ВЖМ7, ВЖМ8 и ЖС6Ф.

Упругие жесткости C_{ij} никелевых сплавов различны по величине, но в целом близки к таковым чистого никеля и интерметаллида Ni₃Al, которые соответственно являются основами γ - и γ' -фаз этих сплавов. В работе [26] упругие жесткости сплава ВЖМ7 не представлены, поэтому для сравнения величин упругих жесткостей C_{ij} сплава ВЖМ7, рассчитанных исходя из измеренных величин E_{001} , E_{011} , ν_0 , ν_{\min} и ν_{\max} , можно использовать таковые, измеренные резонансным методом (R) в работах [27, 28] для сплава CMSX-4, который широко используется в газотурбостроении. Видно, что величины C_{11} , C_{12} и C_{44} несколько выше для ВЖМ7, чем для CMSX-4 соответственно на ≈ 6 , 4 и 2 %, что, по-видимому, обусловлено различным легированием этих сплавов.

Типичное значение базового значения коэффициента Пуассона никелевых сплавов ν_0 составляет 0.38–0.39 и находится в промежутке между значениями для Ni и Ni₃Al, соответственно равными 0.37 и 0.40, а минимальные ν_{\min} и максимальные ν_{\max} величины коэффициентов Пуассона находятся вблизи значений –0.1 и 0.7 соответственно, см. табл. 3. Величины $\nu_0 = 0.39$, $\nu_{\min} = -0.1$ и $\nu_{\max} = 0.69$, полученные в настоящей работе для сплава ВЖМ7 методом спекл-интерферометрии, близки к вышеуказанным типичным значениям.

Очевидно, что различие упругих характеристик, приведенных в табл. 3, обусловлено как различием химического состава исследованных сплавов, так и спецификой методов их измерения. Например, в работе [30] с использованием резонансного метода измеряли упругие постоянные слабо отличающихся по составу сплавов ERBO/1A и LEK94 и получили различные значения упругих констант C_{11} и C_{12} , соответственно 252 и 242 МПа для C_{11} и 161 и 151 ГПа для C_{12} . В то же время в работе [28] разными методами, резонансным (R) и измерением скорости ультразвука (USS), измеряли упругие постоянные сплава CMSX-4 и также получили существенно различающиеся значения этих констант, 252 (R) и 237 (USS) ГПа для C_{11} и 161 (R) и 146 (USS) ГПа для C_{12} . Из последнего результата следует, что важным аспектом при измерении характеристик упругости является выявление причин ошибок измерения и минимизация их величины.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением ошибок определения величин модуля Юнга E_z и коэффициента Пуассона ν_{xz} , связанных с неточностью кристаллографической ориентации исследуемых образцов, при

измерении методом тензометрии (ТЕ) при одноосном растяжении и методами голографической (НГ) и спекл- (СИ) интерферометрии при чистом изгибе. При одноосном растяжении и чистом изгибе реализуются продольная ε_z и поперечная ε_x деформации, но в случае ТЕ величины ε_z и ε_x измеряются отдельно экстензометрами продольной и поперечной деформации, а в случае НГ и СИ – совместно путем обработки наблюдаемой интерференционной картины. В силу аналогии деформационных мод рассмотрение влияния неточности кристаллографической ориентации на результат измерений E_z и ν_{xz} подобно для методов ТЕ, НГ и СИ.

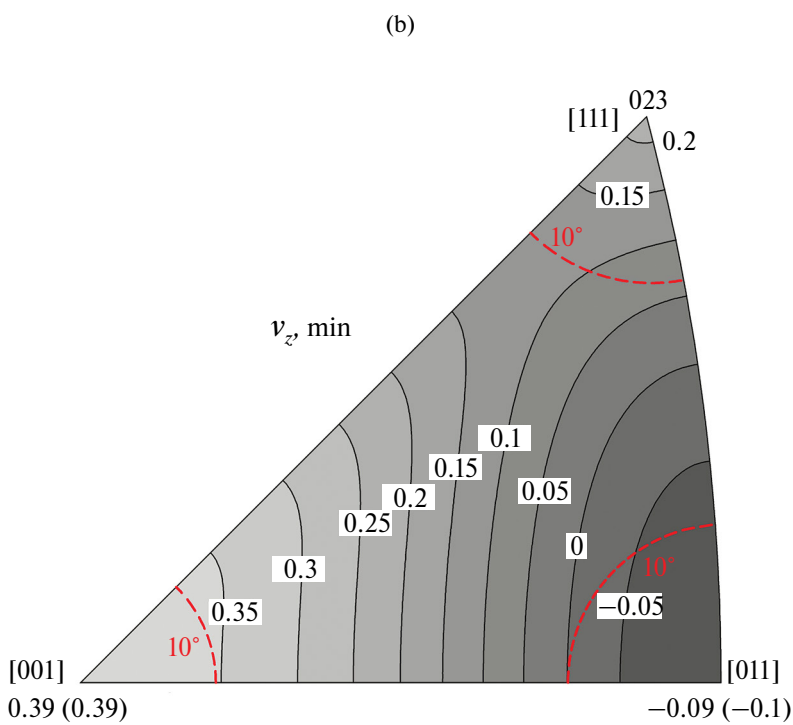
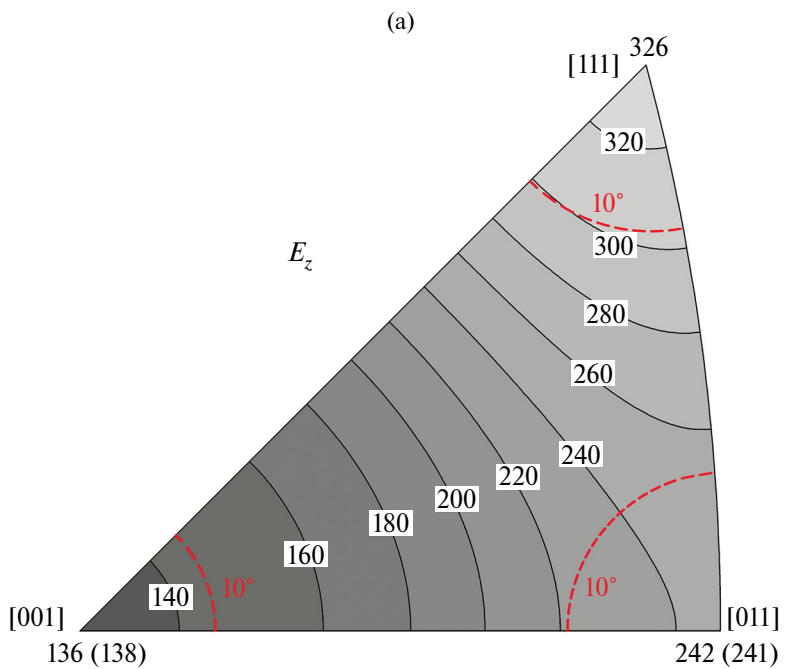
Для данного анализа с использованием значений упругих податливостей S_{ij} , полученных в настоящей работе для сплава ВЖМ7 (см. выше), были рассчитаны зависимости величин модуля Юнга E_z и минимальных $\nu_{z,\min}$ и максимальных $\nu_{z,\max}$ значений коэффициента Пуассона от ориентации оси нагружения z , см. рис. 5. Ориентационные зависимости представлены в виде контурных графиков с изохронными линиями постоянных значений. Красные пунктирные линии в углах стереографического треугольника [001], [011] и [111] показывают 10-градусное отклонение z от этих точных ориентаций, допустимое при литье монокристаллов никелевых жаропрочных сплавов [26]. Для сравнения в углах [001] и [011] в скобках приведены результаты измерений. Видно, что расчетные и экспериментальные значения очень близки.

Из рис. 5,а видно, что модуль Юнга E_z монотонно увеличивается от минимального значения 136 (138) ГПа до максимального значения 326 ГПа при изменении направления оси z от [001] к [111], тогда как при $z = [011]$ наблюдается промежуточное значение E_z , равное 242 (241) ГПа. При 10-градусном отклонении от углов стереографического треугольника вышеуказанные величины могут измениться до ≈ 144 , 222 и 304 ГПа соответственно.

Ориентационные зависимости для коэффициента Пуассона более сложные. Величина $\nu_{z,\min}$ минимальна при $z = [011]$, -0.09 (-0.1), максимальна при $z = [001]$, 0.39 (0.39), и имеет среднее значение 0.23 при $z = [111]$, см. рис. 5,б. Отклонение в 10° от углов стереографического треугольника изменяет эти значения до ≈ 0 , 0.35 и 0.06 соответственно. Таким отклонением может быть объяснено близкое к нулю значение $\nu_{011,\min}$ (очевидно заниженное по абсолютной величине), полученное в работе [26] для сплава ВЖМ8 методом ТЕ, а также значительное различие индивидуальных значений $\nu_{011,\min}$, -0.04 и -0.09 , полученных методом ТЕ для сплава ЖС6Ф в работе [10], см. табл. 3. В отличие от $\nu_{z,\min}$ величина $\nu_{z,\max}$ достигает своего максимального значения 0.69 (0.69) при $z = [011]$, а при отклонении от этого направления на 10° величина $\nu_{z,\max}$ уменьшается до ≈ 0.65 , см. рис. 5,с.

Учитывая существенное влияние кристаллографической ориентации на получаемые результаты, в настоящей работе большое внимание было уделено точности вырезки исследуемых образцов, которая составляла около $2-3^\circ$, что сравнимо с разориентацией субзерен в промышленных монокристаллических отливках никелевых жаропрочных сплавов.

Следует отметить, что графики, представленные на рис. 5, могут быть полезны при отборе монокристаллов для измерения упругих характеристик никелевых жаропрочных сплавов. При этом, как видно из рис. 3, следует учитывать не только угол θ отклонения оси образца z от заданного кристаллографического направления $[hkl]$, но также направление отклонения, характеризуемое азимутальным углом φ .



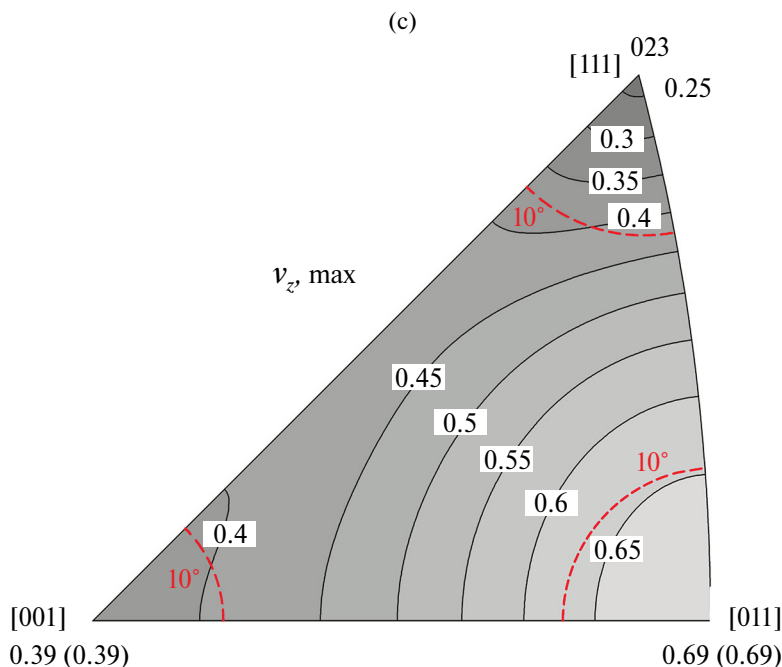


Рис. 5. Ориентационная зависимость упругих характеристик монокристаллов сплава ВЖМ7: модуль Юнга E_z (а), минимальные $\nu_{z,\min}$ (б) и максимальные $\nu_{z,\max}$ (с) значения коэффициента Пуассона для произвольной ориентации оси нагружения z . Графики построены с использованием полученных упругих податливостей S_{ij} , значения в скобках – результаты измерений.

4. Заключение. Методом спекл-интерферометрии исследованы упругие свойства монокристаллов никелевого жаропрочного сплава ВЖМ7, разработанного в ВИАМ НИЦ “Курчатовский институт”. Образцы в виде пластин различной кристаллографической ориентации нагружали в условиях чистого сдвига и регистрировали спекл-интерференционные картины. Численная обработка интерференционных картин позволила определить величины модуля Юнга в направлениях $[001]$ и $[011]$, $E_{001} = 138$ ГПа и $E_{011} = 241$ ГПа, величину базового коэффициента Пуассона $\nu_0 = 0.39$ в системе координат $\langle 001 \rangle$, а также минимальные и максимальные его значения, $\nu_{\min} = -0.10$ и $\nu_{\max} = 0.69$ при продольном нагружении вдоль $[101]$ и поперечной деформации вдоль $[10\bar{1}]$ и $[010]$ соответственно. С использованием измеренных величин E_{001} , E_{011} , ν_0 , ν_{\min} и ν_{\max} рассчитаны упругие жесткости монокристаллов $C_{11} = 264$ ГПа, $C_{12} = 166$ ГПа и $C_{44} = 133$ ГПа, и их упругие податливости $S_{11} = 7.35$ ТПа $^{-1}$, $S_{12} = -2.84$ ТПа $^{-1}$ и $S_{44} = 7.52$ ТПа $^{-1}$. Полученные значения упругих характеристик согласуются с литературными данными для никелевых жаропрочных сплавов. Одним из важных достоинств используемого метода является однозначное определения знака коэффициента Пуассона, отрицательный – если интерференционная картина имеет вид семейства вложенных эллипсов, и положительный – если наблюдается семейство гипербол. Поэтому метод спекл-интерферометрии следует рекомендовать для изучения

упругих свойств материалов-ауксетиков, для которых определение знака коэффициента Пуассона имеет принципиальное значение.

Работа выполнена по темам госзадания ИСМАН РАН (номер госрегистрации 122032800153-5), ИМАШ РАН (FFGU-2024-0020) и ИПМех РАН (номер госрегистрации 124013000674-0).

Авторы выражают благодарность Н.Н. Ниёзбекову (ИСМАН РАН) за прецизионную вырезку образцов методом электроэрозионной обработки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Köster W., Franz H. Poisson's ratio for metals and alloys // *Metallurgical Reviews*. 1961. V. 6. № 21. P. 1–55.
<https://doi.org/10.1179/mtlr.1961.6.1.1>
2. Епишин А.И., Лисовенко Д.С. Влияние кристаллической структуры и типа межатомной связи на упругие свойства одноатомных и двухатомных кубических кристаллов // *Изв. РАН. МТТ*. 2022. № 6. С. 79–96.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422060206>
3. Evans K., Nkansah M., Hutchinson I., Rogers S.C. Molecular network design // *Nature*. 1991. V. 353. № 6340. P. 124–125.
<https://doi.org/10.1038/353124a0>
4. Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Ауксетики среди материалов с кубической анизотропией // *Изв. РАН. МТТ*. 2020. № 4. С. 7–24.
<https://doi.org/10.31857/S0572329920040054>
5. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С., Волков М.А. Отрицательный коэффициент Пуассона для кубических кристаллов и нано/микротрубок // *Физ. Мезомех*. 2013. Т. 16. № 6. С. 13–31.
6. Епишин А.И. Структура, анизотропия физико-механических свойств и механизмы высокотемпературной ползучести монокристаллов жаропрочных никелевых сплавов: дисс. ... д.ф.-м.н. М: МИСиС, 2007.
7. Епишин А.И., Лисовенко Д.С. Экстремальные значения коэффициента Пуассона кубических кристаллов // *ЖТФ*. 2016. Т. 86. № 10. С. 74–82.
8. Wiederhorn S.M., Fields R.J. Measurement methods for materials properties: Elasticity, Handbook of Measurement Methods. Springer-Verlag, 2017.
9. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 1. Малые деформации. М: Наука, 1984. 597 с.
10. Светлов И.Л., Епишин А.И., Кривко А.И. и др. Анизотропия коэффициента Пуассона монокристаллов никелевого сплава // *ДАН СССР*. 1988. Т. 302. № 6. С. 1372–1375.
11. Swain D., Thomas B.P., Selvan S.K., Philip J. Measurement of elastic properties of materials employing 3-D DIC in a Cornu's experiment // *Mater. Res. Express*. 2021. V. 8. P. 125201.
<https://doi.org/10.1088/2053-1591/ac452d>
12. Каблов Е.Н., Оспенникова О.Г., Петрушин Н.В., Висик Е.М. Монокристаллический жаропрочный никелевый сплав нового поколения с низкой плотностью // *АМиТ*. 2015. № 2. С. 14–25.
13. Каблов Е.Н., Петрушин Н.В. Компьютерный метод конструирования литейных жаропрочных никелевых сплавов // *Литейные жаропрочные сплавы. Эффект* С.Т. Кишкина. М.: Наука, 2006. С. 56–78.
14. Бондаренко Ю.А., Ечин А.Б., Сурова В.А., Нарский А.Р. Развитие технологий и оборудования для получения лопаток горячего тракта газотурбинных двигателей из жаропрочных сплавов с направленной и монокристаллической структурой // *Труды ВИАМ*. 2023. № 7 (125). Ст. 01.

15. Müller L., Glatzel U., Feller-Kniepmeier M. Modelling thermal misfit stresses in nickel-base superalloys containing high volume fraction of γ' phase // *Acta Metall. Mater.* 1992. V. 40. № 6. P. 1321–1327.
[https://doi.org/10.1016/0956-7151\(92\)90433-F](https://doi.org/10.1016/0956-7151(92)90433-F)
16. Кузьмина Н.А., Пьянкова Л.А. Контроль кристаллографической ориентации монокристаллических отливок никелевых жаропрочных сплавов методом рентгеновской дифрактометрии // *Труды ВИАМ.* 2019. № 12 (84). С. 11–19.
17. Шалин Р.Е., Светлов И.Л., Качанов Е.Б., Толораия В.Н., Гаврилин О.С. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов. М: Машиностроение. 1997. 333 с.
18. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
19. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
20. Разумовский И.А. Интерференционно-оптические методы механики деформируемого твердого тела. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 240 с.
21. Одинцев И.Н. Развитие и применение методологии когерентной оптики к исследованию деформационных свойств конструкционных материалов. Автореф. дисс. ... канд. техн. наук: 01.02.04. 2008. 24 С.
22. Epishin A.I., Lisovenko D.S. Comparison of isothermal and adiabatic elasticity characteristics of the single crystal nickel-based superalloy CMSX-4 in the temperature range between room temperature and 1300 °C // *Mech. Solids.* 2023. V. 58. № 5. P. 1587–1598.
<https://doi.org/10.3103/S0025654423601301>
23. Alers G.A., Neighbours J.R., Sato H. Temperature dependent magnetic contributions to the high field elastic constants of nickel and an Fe-Ni alloy // *J. Phys. Chem. Solids.* 1960. V. 13. № 1–2. P. 40–55.
[https://doi.org/10.1016/0022-3697\(60\)90125-6](https://doi.org/10.1016/0022-3697(60)90125-6)
24. Prikhodko S.V., Yang, H., Ardell, A.J. et al. Temperature and composition dependence of the elastic constants of Ni3Al // *Metall. Mater. Trans. A.* 1999. V. 30. P. 2403–2408.
<https://doi.org/10.1007/s11661-999-0248-9>
25. Светлов И.Л., Суханов Н.Н., Кривко А.И. и др. Температурно-ориентационная зависимость характеристик кратковременно прочности, модуля Юнга и коэффициента линейного расширения монокристаллов сплава ЖС6Ф // *Проблемы прочности.* 1987. № 1. С. 51–56.
26. Соловьев А.Е., Голынец С.А., Хвацкий К.К. анизотропия характеристик упругости при растяжении монокристаллических жаропрочных никелевых сплавов // *Труды ВИАМ.* 2017. № 10 (58). С. 112–118.
27. Epishin A., Fedelich B., Finn M. et al. I. Investigation of elastic properties of the single-crystal nickel-base superalloy CMSX-4 in the temperature interval between room temperature and 1300 °C // *Crystals* 2021. V. 11. № 2. P. 152.
<https://doi.org/10.3390/cryst11020152>
28. Siebörger D., Knake H., Glatzel U. Temperature dependence of the elastic moduli of the nickel-base superalloy CMSX-4 and its isolated phases // *Mater. Sci. Eng. A.* 2001. V. 298. № 1–2 P. 26–33.
[https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(00\)01318-6](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(00)01318-6)
29. Kuhn H.-A., Sockel H. G. Contributions of the different phases of two nickel-base superalloys to the elastic behaviour in a wide temperature range // *Phys. Stat. Sol. A.* 1990. V. 119. P. 93–105.
<https://doi.org/10.1002/pssa.2211190112>
30. Demtröder K., Eggeler G., Schreuer J. Influence of microstructure on macroscopic elastic properties and thermal expansion of nickel-base superalloys ERBO/1 and LEK94 // *Mat.-wiss. u. Werkstofftech.* 2015. V. 46. № 6. P. 563–576.
<https://doi.org/10.1002/mawe.201500406>
31. Yang S.W. Elastic constants of a monocrystalline nickel-base superalloy // *Metall. Trans. A.* 1985. V. 16. P. 661–665.
<https://doi.org/10.1007/BF02814240>

MEASUREMENT OF ELASTIC CHARACTERISTICS OF SINGLE-CRYSTALS OF A NICKEL-BASE SUPERALLOY BY SPECKLE INTERFEROMETRY

A. I. Epishin^{a, *}, I. N. Odintsev^b, D. S. Lisovenko^{c, **}, N. V. Petrushin^d,
I. L. Svetlov^d

^a*Merzhanov Institute of Structural Macrokinetics and Materials Science RAS, Chernogolovka
Moscow Region, Russia*

^b*Mechanical Engineering Research Institute RAS, Moscow, Russia*

^c*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^d*All-Russian Research Institute of Aviation Materials (VIAM) NRC "Kurchatov Institute",
Moscow, Russia*

*e-mail: a.epishin2021@gmail.com, **e-mail: lisovenk@ipmnet.ru

Abstract. The elastic properties of single crystals of a nickel-base superalloy VGM7 have been investigated by speckle interferometry. Plate-shaped specimens of different crystallographic orientations were loaded under pure shear conditions and speckle interference patterns were imaged. Numerical processing of the interference patterns allowed us to determine the values of Young's modulus in directions [001] and [011], $E_{001} = 138$ GPa and $E_{001} = 241$ GPa, the basic value of Poisson's ratio $\nu_0 = 0.39$ in the coordinate system $\langle 001 \rangle$, as well as its minimum and maximum values $\nu_{\min} = -0.10$ and $\nu_{\max} = 0.69$ under longitudinal loading along [101] and transverse deformation along $[10\bar{1}]$ and [010], respectively. Using the measured values E_{001} , E_{011} , ν_0 , ν_{\min} and ν_{\max} the single-crystal elastic stiffnesses $C_{11} = 264$ GPa, $C_{12} = 166$ GPa and $C_{44} = 133$ GPa, and elastic compliances $S_{11} = 7.35$ TPa⁻¹, $S_{12} = -2.84$ TPa⁻¹ and $S_{44} = 7.52$ TPa⁻¹ we calculated. The applied method allows one to unambiguously determine the sign of Poisson's ratio and, therefore, it should be recommended for studying the elastic properties of auxetic materials, for which determination of the sign of Poisson's ratio is of great importance.

Keywords: nickel-base superalloys, cubic crystals, elastic constants, Poisson's ratio, speckle interferometry

REFERENCES

1. Köster W., Franz H. Poisson's ratio for metals and alloys // Metallurgical Reviews. 1961. V. 6. № 21. P. 1–55.
<https://doi.org/10.1179/mtlr.1961.6.1.1>
2. Epishin A.I., Lisovenko D.S. Influence of the crystal structure and type of interatomic bond on the elastic properties of monatomic and diatomic cubic crystals // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 6. P. 1344–1358.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422060206>
3. Evans K., Nkansah M., Hutchinson I., Rogers S.C. Molecular network design // Nature. 1991. V. 353. № 6340. P. 124–125.
<https://doi.org/10.1038/353124a0>

4. *Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S.* Auxetics among materials with cubic anisotropy // *Mech. Solids*. 2020. V.55. № 4. P. 461–474.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420040044>
5. *Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S., Volkov M.A.* Negative Poisson's ratio for cubic crystals and nano/microtubes // *Phys. Mesomech*. 2014. V. 17. № 2. P. 97–115.
<http://dx.doi.org/10.1134/S1029959914020027>
6. *Epishin A.I.* Structure, anisotropy of physico-mechanical properties and mechanisms of high-temperature creep of single crystals of heat-resistant nickel alloys: dissertation, PhD, Moscow: MISiS 2007. (In Russian)
7. *Epishin A.I., Lisovenko D.S.* Extreme values of Poisson's ratio of cubic crystals // *Technical Physics*. 2016. V. 61. № 10. P. 1516–1524.
<http://dx.doi.org/10.1134/S1063784216100121>
8. *Wiederhorn S.M., Fields R.J.* Measurement methods for materials properties: Elasticity, Handbook of Measurement Methods. Springer-Verlag, 2017.
<https://www.nist.gov/publications/measurement-methods-materials-properties-elasticity> (Accessed September 4, 2024).
9. *Bell J.F.* The Experimental foundations of solid mechanics. Mechanics of Solid. V. 1. Springer. 1973.
10. *Svetlov I.L., Epishin A.I., Krivko A.I. et al.* Anisotropy of Poisson ratio of nickel base alloy single crystals // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1988. V. 302. № 6. P. 1372–1375.
11. *Swain D., Thomas B.P., Selvan S.K. and Philip J.* Measurement of elastic properties of materials employing 3-D DIC in a Cornu's experiment // *Mater. Res. Express*. 2021. V. 8. P. 125201.
<https://doi.org/10.1088/2053-1591/ac452d>
12. *Kablov E.N., Ospennikova O.G., Petrushin N.V., Visik E.M.* Monocrystalline heat-resistant nickel alloy of a new generation with low density // *Aviation Materials and Technologies*. 2015. № 2. P. 14–25. (In Russian)
<https://doi.org/10.18577/2071-9140-2015-0-2-14-25>
13. *Kablov E.N., Petrushin N.V.* Computer method of designing foundry heat-resistant nickel alloys // *Foundry heat-resistant alloys. The S.T. Kishkin effect*. M.: Nauka, 2006. P. 56–78. (In Russian)
14. *Bondarenko Yu.A., Echin A.B., Surova V.A., Narsky A.R.* Development of technologies and equipment for producing blades of the hot path of gas turbine engines from heat-resistant alloys with directional and monocrystalline structure // *Proceedings of VIAM*. 2023. № 7 (125). Article 01. (In Russian)
<https://doi.org/10.18577/2307-6046-2023-0-7-3-14>
15. *Müller L., Glatzel U., Feller-Kniepmeier M.* Modelling thermal misfit stresses in nickel-base superalloys containing high volume fraction of γ' phase // *Acta Metall. Mater*. 1992. V. 40. № 6. P. 1321-1327.
[https://doi.org/10.1016/0956-7151\(92\)90433-F](https://doi.org/10.1016/0956-7151(92)90433-F)
16. *Kuzmina N.A., Pyankova L.A.* Control of the crystallographic orientation of single-crystal castings of nickel-base superalloys by X-ray diffractometry // *Proceedings of VIAM*. 2019. № 12 (84). P. 11–19. (In Russian)
<https://doi.org/10.18577/2307-6046-2019-0-12-11-19>
17. *Shalin R.E., Svetlov I.L., Kachanov E.B., Toloraia V.N., Gavrilin O.S.* Single crystals of nickel-base superalloys. Moscow: Mashinostroenie. 1997. 333 P. (In Russian)
18. *Timoshenko S.P., Voinowsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. McGraw-Hills 1959. 580 p.
19. *Lehknitskii S.R.* Theory of elasticity of an anisotropic body. NY: Dover Publications, 1981.
20. *Razumovsky I.A.* Interference-optical methods of deformable solid mechanics. M. Bauman Moscow State Technical University, 2007. 240 P. (In Russian)
21. *Odinsev I.N.* Development and application of the methodology of coherent optics to the study of deformation properties of structural materials. The abstract. Dissertation of the Candidate of

Technical Sciences (In Russian)

https://new-disser.ru/_avtoreferats/01003421090.pdf

22. *Epishin A.I., Lisovenko D.S.* Comparison of isothermal and adiabatic elasticity characteristics of the single crystal nickel-based superalloy CMSX-4 in the temperature range between room temperature and 1300 °C // *Mech. Solids*. 2023. V. 58. № 5. P. 1587–1598.
<https://doi.org/10.3103/S0025654423601301>
23. *Alers G.A., Neighbours J.R., Sato H.* Temperature dependent magnetic contributions to the high field elastic constants of nickel and an Fe-Ni alloy // *J. Phys. Chem. Solids*. 1960. V. 13. № 1–2. P. 40–55.
[https://doi.org/10.1016/0022-3697\(60\)90125-6](https://doi.org/10.1016/0022-3697(60)90125-6)
24. *Prikhodko S.V., Yang, H., Ardell, A.J. et al.* Temperature and composition dependence of the elastic constants of Ni3Al // *Metall. Mater. Trans. A*. 1999. V. 30. P. 2403–2408.
<https://doi.org/10.1007/s11661-999-0248-9>
25. *Svetlov I.L., Sukhanov N.N., Krivko A.I., etc.* The temperature-orientation dependence of the characteristics of short-term strength, Young's modulus and the coefficient of linear expansion of single crystals of the ZHS6F alloy // *Problems of strength*. 1987. № 1. P. 51–56. (In Russian)
26. *Solovyov A.E., Golynets S.A., Khvatsky K.K.* Anisotropy of tensile elasticity characteristics of monocrystalline heat-resistant nickel alloys // *Proceedings of VIAM*. 2017. № 10 (58). P. 112–118. (In Russian)
<https://doi.org/10.18577/2307-6046-2017-0-10-12-12>
27. *Epishin A., Fedelich B., Finn M. et al.* I. Investigation of elastic properties of the single-crystal nickel-base superalloy CMSX-4 in the temperature interval between room temperature and 1300 °C // *Crystals* 2021. V. 11. №. 2. P. 152.
<https://doi.org/10.3390/cryst11020152>
28. *Sieböcker D., Knake H., Glatzel U.* Temperature dependence of the elastic moduli of the nickel-base superalloy CMSX-4 and its isolated phases // *Mater. Sci. Eng. A*. 2001. V. 298. № 1–2, P. 26–33.
[https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(00\)01318-6](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(00)01318-6)
29. *Kuhn H.-A., Sockel H. G.* Contributions of the different phases of two nickel-base superalloys to the elastic behaviour in a wide temperature range // *Phys. Stat. Sol. A*. 1990. V. 119. P. 93–105.
<https://doi.org/10.1002/pssa.2211190112>
30. *Demtröder K., Eggeler G., Schreuer J.* Influence of microstructure on macroscopic elastic properties and thermal expansion of nickel-base superalloys ERBO/1 and LEK94 // *Mat.-wiss. u. Werkstofftech.* 2015. V. 46. № 6. P. 563–576.
<https://doi.org/10.1002/mawe.201500406>
31. *Yang S.W.* Elastic constants of a monocrystalline nickel-base superalloy // *Metall. Trans. A*. 1985. V. 16. P. 661–665.
<https://doi.org/10.1007/BF02814240>

УДК 539.3

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ВТОРОГО ТИПА В ЛИНЕЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕДАХ

© 2024 г. Ю. Н. Радаев^а, *

^а*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com*

Поступила в редакцию 30.09.2024 г.

После доработки 06.10.2024 г.

Принята к публикации 07.10.2024 г.

В представляемой работе механика микрополярных упругих тел распространяется на более общие термоупругие среды с целью учета влияния температуры на их механическое поведение. Поскольку термоупругая микрополярная среда проводит тепло, то возникает необходимость включения того или иного механизма теплопроводности в основные соотношения микрополярной термоупругости. Выполнено построение модели термоупругого микрополярного тела CGNII на основе волнового принципа передачи тепла (т.е. теплопроводности второго типа), характеризующейся нулевым внутренним производством энтропии. Все основные уравнения развиваемой теории выводятся из конвенциональных уравнений баланса механики континуума и фундаментального термодинамического неравенства. Определяющие уравнения линейного анизотропного термоупругого микрополярного тела CGNII конструируются с помощью квадратичной энергетической формы. Подробно исследуется случай гемитропной среды, когда компоненты одного из определяющих псевдотензоров четвертого ранга оказываются чувствительными к зеркальным отражениям трехмерного пространства. В терминах трансляционных перемещений, микроповоротов и температурного смещения получена замкнутая система дифференциальных уравнений, предназначенная для решения прикладных задач термомеханики, связанных с волновой передачей тепла в микрополярных упругих средах.

Ключевые слова: микрополярное тело, теплопроводность, анизотропия, гемитропия, свободная энергия, определяющий тензор, энтропия, производство энтропии, CGNII термоупругость

DOI: 10.31857/S1026351924060126, **EDN:** TXGLQL

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Современные микрополярные модели сплошных деформируемых тел весьма часто реализуются на представлении о микроповоротах (микровращениях), присущих каждому элементу микрополярного континуума. Указанное понятие унаследовано из оригинальной работы Е. Cosserat и F. Cosserat (1909 г., [1]) и обеспечивает наличие дополнительных степеней свободы при деформации сплошной среды. Два кинематически независимых векторных поля, характеризующих деформацию микрополярного континуума (поле трансляционных перемещений и поле микроповоротов (или спинорных перемещений)), вводятся в механику микрополярного упругого тела на основании хорошо известных результатов классической аналитической механики, касающихся перемещений свободных абсолютно твердых тел в трехмерном пространстве. Эти результаты принадлежат (или приписываются) Шалю (М. Chasles) и выступают как теоретический фундамент исследований движений абсолютно твердых тел в трехмерном пространстве. Существенные для механики микрополярных тел положения кинематики абсолютно твердых тел и используемая при этом специальная терминология разъясняются в [2]. В этой же работе можно найти указания на литературные первоисточники.

Соответствующая концепции микроповоротов теория микрополярного термоупругого тела получила свой более или менее законченный вид в ряде известных публикаций, относящихся к 50–60-м гг. прошлого века. Все они были “просуммированы” (иногда, правда, без необходимой в целом ряде случаев полноты) в более поздней монографии В. Новацкого [3], которая к настоящему времени считается устаревшей¹, особенно в плане описания связанных термоупругих неанізотропных сред (и прежде всего гемитропных) и включения нестандартных механизмов передачи тепла: речь здесь безусловно идет о моделях теплопроводности микрополярных упругих тел второго (CGNII) и третьего типов (CGNIII). Первая из них появилась в работе [4] и в дальнейшем получила широкое распространение в механике термоупругих тел; указания на эту модель узнаваемы в современной научной литературе по сокращению GNII.

Заметим, что теплопроводность второго типа, т.е. в форме незатухающих, распространяющихся с конечной скоростью термоупругих волн, представляет собой наиболее интересный вариант термомеханики микрополярных тел, поскольку в этом случае процесс распространения тепла не сопровождается внутренним производством энтропии и затуханием термоупругой волны в процессе ее распространения.

В настоящей работе выполнено построение теоретической модели второго типа (type-II) анизотропного теплопроводящего микрополярного упругого тела (CGNII micropolar thermoelasticity). В качестве примера в терминах трансляционных перемещений, микроповоротов и температурного смещения получена замкнутая система дифференциальных уравнений гемитропной микрополярной термоупругости, вызывающая значительный интерес с точки зрения исследования прикладных проблем.

¹ Ценность монографии В. Новацкого существенно снижается наличием большого количества опечаток в основных уравнениях и незавершенностью изложения, например в случае исследования плоских гармонических термоупругих волн, выступающих как связка температурного инкремента, трансляционных перемещений и микровращений.

Представляемая работа в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты, изложенные в более ранней статье [5]. Особенно это касается модели микрополярного гемитропного тела, которую удалось развить, не опираясь на представления изотропных тензоров четвертого ранга [6], а привлекая полную систему неприводимых рациональных инвариантов системы трех изотропных определяющих тензоров четвертого ранга. Стоит также отметить, что в указанной статье микрополярная теория упругости была построена исходя из принципа виртуальных перемещений, что позволило трактовать силовые и моментные напряжения как множители Лагранжа, т.е. как силы и пары, возникающие в ответ (и в виде реакции) на наложение на деформируемое тело дополнительных связей, обеспечивающих его полную “заморозку”. Все выше сказанное позволяет рассматривать настоящую публикацию в качестве естественного продолжения и развития исследований, выполненных в работе [5].

Несколько слов следует сказать о псевдотензорных представлениях в термомеханике микрополярных сред. Микрополярная теория упругости гемитропного тела в принципе неразвиваема без привлечения псевдовектора микроповоротов нечетного алгебраического веса (обычно +1 или –1) и, как следствие, определяющего псевдотензора четвертого ранга нечетного алгебраического веса. Лишь на заключительном этапе с помощью степеней псевдотензорных единиц удастся устранить *все* без исключения псевдотензорные объекты и в конце концов получить формулировку исключительно в терминах *абсолютных тензоров*. В настоящей работе (так же как и в [5]) псевдотензорные объекты не используются, т.е. неявно предполагается финальный переход к соответствующим абсолютным тензорам во всех уравнениях.

Так же как и в работе [5], изложение с самого начала задумывалось в полностью ковариантной форме, пригодной для произвольной криволинейной координатной системы x^j ($j = 1, 2, 3$) и наиболее подходящей для решения прикладных задач микрополярной термоупругости.

2. Конвенциональные уравнения баланса в линейной термомеханике микрополярных сред. Как было упомянуто в первом разделе статьи, с микрополярной средой связываются два кинематически независимых векторных поля: u_j – поле трансляционных перемещений и ϕ^k – поле микроповоротов. С помощью этих полей легко конструируется асимметричный тензор деформации

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - e_{ijk} \phi^k, \quad (2.1)$$

где ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования, e_{ijk} – альтернирующий тензор (тензор перестановок). Заметим, что определенный таким образом тензор деформации не имеет физической размерности и его одного недостаточно для представления деформации микрополярного тела. Поэтому приходится оперировать с еще одним асимметричным тензором второго ранга – тензором изгиба–кручения:

$$\kappa_i^{\cdot s} = \nabla_i \phi^s. \quad (2.2)$$

В силу своего определения тензор изгиба–кручения обладает физической размерностью кривизны (т.е. обратной длины) и может быть приведен к физически безразмерной форме умножением на характерную микродлину

микрополярного тела. Указанная микродлина может быть явно введена в уравнения гемитропной микрополярной упругости так, как это сделано в работе [5].

Следуя [5], определим асимметричные тензоры силовых и моментных напряжений t^{ik} и $\mu_{\cdot k}^{i\cdot}$ и с их помощью запишем следующие уравнения баланса (количества движения и момента количества движения):

$$\begin{aligned}\nabla_i t^{ik} &= -\rho(f^k - \ddot{u}^k), \\ \nabla_i \mu_{\cdot k}^{i\cdot} + e_{ksl} t^{[sl]} &= -\rho(l_k - \mathfrak{I} \ddot{\phi}_k),\end{aligned}\quad (2.3)$$

где ρ — плотность, f^k — массовые силы, l_k — массовые пары, \mathfrak{I} — коэффициент микроинерции. Здесь и ниже точкой обозначается частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных переменных:

$$\dot{A} = \partial_t A.$$

Рассмотрим далее уравнение баланса внутренней энергии:

$$\rho \dot{u} = t^{is} \dot{\epsilon}_{is} + \mu_{\cdot s}^{i\cdot} \dot{\kappa}_{i\cdot}^s + \rho q - \nabla_i h^i,$$

где u — плотность внутренней энергии (в расчете на единицу массы), h^k — вектор потока тепла ($h^k n_k dA$ — количество тепла, поступающее в единицу времени через элементарную площадку $n_k dA$), q — лучистое тепло (в расчете на единицу массы).

Наконец приведем уравнение баланса энтропии:

$$\rho \dot{s} = -\nabla_k J^k + \rho \sigma + \rho \xi, \quad (2.4)$$

где s — энтропии (в расчете на единицу массы), J^k — вектор потока энтропии, ξ — внутреннее (неконтролируемое) производство энтропии (в расчете на единицу массы), σ — внешнее (контролируемое) производство энтропии (в расчете на единицу массы).

Термомеханический принцип необратимости гласит, что внутреннее производство энтропии не может быть отрицательным ни для какого термодинамически допустимого процесса, т.е. при отсутствии лучистого притока тепла не допускает стока энтропии:

$$\xi \geq 0. \quad (2.5)$$

3. Свободная энергия и определяющие уравнения микрополярной упругой теплопроводящей среды второго типа (CGNII). Для термоупругих континуумов второго типа вместо термодинамической температуры θ приходится вводить другую термодинамическую переменную состояния — температурное смещение ϑ согласно

$$\dot{\vartheta} = \theta.$$

Свободная энергия Гельмгольца (в расчете на единицу массы) в этом случае выступает как термодинамический потенциал состояния следующего вида:

$$\psi = \bar{\psi}(\partial, \vartheta, \nabla_i \vartheta, \epsilon_{is}, \kappa_{i\cdot}^s).$$

Его отличительной особенностью является явная зависимость от компонент 4-градиента температурного смещения

$$\partial.\vartheta = \partial_4\vartheta, \nabla_i\vartheta,$$

наряду с отсутствием явных вхождений самого температурного смещения.

Энтропия, следовательно, вычисляется как каноническая термодинамическая производная

$$s = - \frac{\partial \bar{\Psi}(\partial.\vartheta, \nabla_i\vartheta, \epsilon_{is}, \kappa_{i.}^s)}{\partial(\partial.\vartheta)}$$

по специфической составляющей 4-градиента температурного смещения.

Из уравнений баланса внутренней энергии и энтропии легко синтезируется так называемое приведенное уравнение энергии, пока в предварительной форме:

$$-\rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + t^{is}\epsilon_{is}^{\cdot} + \mu_{.s}^i\kappa_{i.}^{\cdot s} - J^i\nabla_i\theta + \nabla_i(\theta J^i - h^i) + \rho(q - \theta\sigma) = \rho\theta\xi.$$

Полученное уравнение несколько упрощается, если положить

$$\theta J^i = h^i, \theta\sigma = q,$$

т.е. связать с точностью до термодинамической температуры векторы потока энтропии и потока тепла, а также внешнее производство энтропии с лучистым теплом, поступающим в среду. В результате приходим к окончательным формам приведенного уравнения энергии:

$$-\rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + t^{is}\epsilon_{is}^{\cdot} + \mu_{.s}^i\kappa_{i.}^{\cdot s} - \theta^{-1}h^i\nabla_i\theta = \rho\theta\xi,$$

или

$$-\rho(\bar{\dot{\psi}} + \bar{s}\dot{\theta}) + t^{is}\epsilon_{is}^{\cdot} + \mu_{.s}^i\kappa_{i.}^{\cdot s} - \theta^{-1}h^i\nabla_i\theta = \rho\theta\xi. \quad (3.1)$$

С помощью приведенного уравнения энергии (3.1) неравенство необратимости (2.5) приводится к

$$C\dot{\theta} + A^{is}\epsilon_{is}^{\cdot} + B_{.s}^i\kappa_{i.}^{\cdot s} + \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \nabla_k\vartheta} \nabla_k\theta + \theta^{-1}h^i\nabla_i\theta = -\rho\theta\xi \leq 0,$$

где введены следующие обозначения:

$$C = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial(\partial.\vartheta)} + \rho\bar{s},$$

$$A^{is} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \epsilon_{is}^{\cdot}} - t^{is},$$

$$B_{.s}^i = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \kappa_{i.}^{\cdot s}} - \mu_{.s}^i.$$

Неравенство (2.5) обязано выполняться для всех термодинамических процессов, что позволяет считать независимыми и произвольными скорости любого термодинамического процесса:

$$\dot{\theta}, \nabla_i\dot{\vartheta} = \nabla_i\theta, \epsilon_{is}^{\cdot}, \kappa_{i.}^{\cdot s}.$$

Поэтому C , A^{is} , $B_s^{i\cdot}$ равны нулю, что сразу приводит к определяющим соотношениям для континуума CGNII:

$$\bar{s} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial(\partial_s \vartheta)}, \quad (3.2)$$

$$t^{is} = \rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \epsilon_{is}}, \quad (3.3)$$

$$\mu_s^{i\cdot} = \rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \kappa_{i\cdot}^s}. \quad (3.4)$$

В результате внутреннее производство энтропии вычисляется в виде

$$\rho \theta \xi = -\rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \nabla_k \vartheta} \nabla_k \theta - \theta^{-1} h^i \nabla_i \theta = -\rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \nabla_k \vartheta} \nabla_k \theta - J^i \nabla_i \theta$$

или

$$\rho \theta \xi = -\left(J^k + \rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \nabla_k \vartheta} \right) \nabla_k \theta.$$

Таким образом, внутреннее производство энтропии исчезает

$$\xi = 0,$$

если вектор потока энтропии задать следующим определяющим уравнением:

$$J^k = -\rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \nabla_k \vartheta}.$$

4. Анизотропная/гемитропная теплопроводящие микрополярные среды CGNII.

Линейная теплопроводящая анизотропная микрополярная среда характеризуется свободной энергией, квадратичной по отношению к отклонениям термодинамических переменных состояния от их значений, наблюдаемых в положении равновесия. В частности, анизотропная микрополярная среда CGNII задается следующим термодинамическим потенциалом состояния:

$$\begin{aligned} 2\rho \bar{\psi} = & H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{i\cdot l\cdot} \kappa_{i\cdot}^s \kappa_{l\cdot}^m + H_3^{isl\cdot} \epsilon_{is} \kappa_{l\cdot}^m + \\ & + G_1^{is} \epsilon_{is} \theta + G_2^{i\cdot s} \kappa_{i\cdot}^s \theta + F \theta^2 + \\ & + \theta_0^{-1} \Lambda^{is} \nabla_i \vartheta \nabla_s \vartheta. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь в целях сокращения записи переменная θ на самом деле обозначает температурный инкремент $\theta \rightarrow \theta - \theta_0$, где θ_0 есть отсчетная температура.

Заметим, что определяющие тензоры заведомо удовлетворяют уравнениям симметрии:

$$H_1^{islm} = H_1^{lmis}, \quad H_2^{i\cdot l\cdot} = H_2^{l\cdot i\cdot}, \quad \Lambda^{is} = \Lambda^{si}.$$

Опираясь на результаты, полученные в предыдущем разделе работы, находим определяющие уравнения анизотропной микрополярной среды CGNII:

$$t^{is} = H_1^{islm} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} H_3^{isl\cdot} \kappa_{l\cdot}^m + \frac{1}{2} G_1^{is} \theta,$$

$$\mu_{\cdot s}^{i\cdot} = H_{\cdot s \cdot m}^{i\cdot l\cdot} \kappa_{l\cdot}^{\cdot m} + \frac{1}{2} H_{\cdot s \cdot s}^{lmi\cdot} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} G_{\cdot s}^{i\cdot} \theta,$$

$$h^i = -\Lambda^{is} \nabla_s \vartheta,$$

$$-2p_s = G_1^{is} \epsilon_{is} + G_2^{\cdot s} \kappa_{i\cdot}^{\cdot s} + 2F\theta.$$

Подстановка полученных определяющих уравнений в уравнения баланса (2.3) и замена тензора деформации и тензора изгиба–кручения в соответствии с формулами (2.1) и (2.2) дает дифференциальные уравнения движения и распространения тепла для анизотропной микрополярной среды CGNII, сформулированные в терминах вектора трансляционных перемещения и спин-вектора. Поскольку указанные уравнения без труда выписываются, то они здесь не приводятся. Далее рассмотрим своеобразный и практически важный случай гемитропной микрополярной среды, когда три определяющих тензора четвертого ранга в энергетической форме (4.1) имеют компоненты, не чувствительные к поворотам пространственного координатного триэдра, а три тензора второго ранга оказываются шаровыми².

Обратим внимание на то обстоятельство, что в энергетической форме (4.1) третий из определяющих тензоров четвертого ранга на самом деле получен из псевдотензора четвертого ранга нечетного алгебраического веса в результате стандартной процедуры перехода от псевдотензорных представлений к абсолютным тензорным. Последние как раз и используются в данной статье, несколько затемняя сущность математического описания микрополярности. Тем не менее определяющий тензор $H_{\cdot s \cdot m}^{isl\cdot}$ в модели гемитропного микрополярного тела сначала появляется как псевдотензор четвертого ранга нечетного веса, компоненты которого чувствительны к зеркальным преобразованиям трехмерного пространства. Такое положение дел обусловлено возможностью описания поворотов в трехмерном пространстве в виде двух псевдовекторов алгебраического веса +1 или –1, а также одного абсолютного вектора нулевого веса:

$$\begin{matrix} [-1] \\ \phi_l, \phi_l \end{matrix} \text{ или } \begin{matrix} [+1] \\ \phi^l, \phi^l \end{matrix}.$$

Подробная дискуссия по векторным представлениям как конечных, так и инфинитезимальных поворотов в трехмерном пространстве имеется в статье [7].

Чувствительность компонент одного из определяющих тензоров к зеркальным преобразованиям трехмерного пространства с математической точностью выражает смысл определения гемитропного микрополярного тела как такового, “механические свойства которого зависят от зеркальных симметрий”.

²Обратим внимание на то, что высказанное только что положение может, если угодно, приниматься в качестве определения, выделяющего среди анизотропных сред именно гемитропные среды. В современной научной литературе гемитропные среды иногда называют полуизотропными, демитропными, изотропными нецентральносимметричными/ацентрическими.

Следуя [6], находим следующие представления гемитропных определяющих тензоров, пригодные для произвольной координатной системы:

$$H_1^{ism} = a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl},$$

$$H_2^{ism} = a_2 g^{is} g^{lm} + b_2 g^{il} g^{sm} + c_2 g^{im} g^{sl},$$

$$H_3^{ism} = a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl};$$

$$G_1^{is} = d_1 g^{is}, \quad G_{2,s}^{i\cdot} = d_2 \delta_s^i, \quad \Lambda^{is} = \Lambda g^{is}.$$

Видно, что определяющие тензоры гемитропной микрополярной среды CGNII выражаются только через метрический тензор, а коэффициенты представляют собой абсолютные скаляры, и даже более того — постоянные, не чувствительные ни к каким преобразованиям координатной системы, которые мы будем называть определяющими постоянными.

Введенные выше определяющие постоянные удобны с алгебраической точки зрения, но не совсем приемлемы в механике деформируемых сред. По этой причине вводятся новые постоянные согласно

$$\begin{aligned} a_1 &= 2G\nu(1-2\nu)^{-1}, & b_1 &= G(1+c_1), & c_1 &= G(1-c_1); \\ a_2 &= 2GL^2c_3, & b_2 &= GL^2(1+c_2), & c_2 &= GL^2(1-c_2); \\ a_3 &= 4GLc_6, & b_3 &= 2GL(c_4+c_5), & c_3 &= 2GL(c_4-c_5); \\ d_1 &= -4G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha, \\ d_2 &= -4GL^2 \beta, \\ F &= -\frac{\rho c}{\theta_0}. \end{aligned}$$

Поясним, что в данных выше формулах используются стандартные модули термомеханики и “почти” конвенциональные определяющие постоянные, характерные для микрополярных упругих сред:

G — модуль сдвига;

ν — коэффициент Пуассона;

L характеристическая длина микрополярной среды;

$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — физически безразмерные постоянные;

α — коэффициент линейного температурного расширения;

β — коэффициент температурного искажения;

Λ — характерная скорость теплопроводности;

c — теплоемкость в расчете на единицу массы.

Таким образом, для гемитропной микрополярной среды CGNII можно получить определяющие уравнения вида:

$$\begin{aligned}
t_{is} &= G[(1 + c_1)\epsilon_{is} + (1 - c_1)\epsilon_{si} + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}g_{is}\epsilon_{ij}^j + \\
&+ L(2c_6g_{is}\kappa_{ij}^j + (c_4 + c_5)\kappa_{is} + (c_4 - c_5)\kappa_{si}) - 2(1 + \nu)(1 - 2\nu)^{-1}\alpha\theta g_{is}^*, \\
\mu_{is} &= GL^2[(1 + c_2)\kappa_{is} + (1 - c_2)\kappa_{si} + 2c_3g_{is}\kappa_{ij}^j + \\
&+ L^{-1}(2c_6g_{is}\epsilon_{ij}^j + (c_4 + c_5)\epsilon_{is} + (c_4 - c_5)\epsilon_{si}) - 2\beta\theta g_{is}^*], \\
h_s &= -\Lambda\nabla_s\vartheta.
\end{aligned}$$

Эти уравнения связывают тензоры силовых и моментных напряжений с тензором деформации, тензором изгиба–кручения и температурным инкрементом. Вектор потока тепла согласно определяющим уравнениям пропорционален антиградиенту температурного смещения.

5. Уравнение распространения тепла в анизотропном/гемитропном микрополярном упругом теле. Уравнение распространения тепла в CGNII континууме представляет наибольший интерес при моделировании волновых механизмов передачи тепла. Поскольку внутреннее производство энтропии в CGNII континууме исчезает, то можно вести речь о волновом механизме теплопроводности в форме распространяющихся незатухающих связанных волн перемещений, микровращений и температуры.

Вывод уравнения распространения тепла начнем с уравнения баланса энтропии (2.4), предварительно заменив в нем физическое поле s на функцию термодинамических переменных состояния \bar{s} , вектор потока энтропии — его выражением через вектор потока тепла, а внешнее производство энтропии — через лучистое тепло. Учтем также отсутствие внутреннего производства энтропии, положив $\xi = 0$. Выполняя частное дифференцирование по времени функциональной зависимости для \bar{s} , приходим к следующему уравнению:

$$\rho \frac{\partial \bar{s}}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \rho \frac{\partial \bar{s}}{\partial \kappa_{ij}^j} \dot{\kappa}_{ij}^j + \rho \frac{\partial \bar{s}}{\partial \nabla_k \vartheta} \nabla_k \dot{\vartheta} + \rho \frac{\partial \bar{s}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} = -\nabla_j (\theta^{-1} h^j) + \theta^{-1} \rho q.$$

Последнее уравнение без труда линеаризуется, в результате чего получаем:

$$\begin{aligned}
\rho \theta_0 \epsilon_{ij}^j \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_{\epsilon_{lk}=0, \kappa_{lj}^k=0, \theta=\theta_0} + \rho \theta_0 \kappa_{ij}^j \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \kappa_{ij}^j} \right)_{\epsilon_{lk}=0, \kappa_{lj}^k=0, \theta=\theta_0} + \\
+ \rho \theta_0 \dot{\theta} \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \dot{\theta}} \right)_{\epsilon_{lk}=0, \kappa_{lj}^k=0, \theta=\theta_0} = \Lambda^{js} \nabla_j \nabla_s \vartheta + \rho q.
\end{aligned}$$

Линеаризованное уравнение баланса энтропии включает несколько термодинамических производных, для которых разумно принять следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_{\epsilon_{lk}=0, \kappa_{lj}^k=0, \theta=\theta_0} &= g^{ij}, \quad \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \kappa_{ij}^j} \right)_{\epsilon_{lk}=0, \kappa_{lj}^k=0, \theta=\theta_0} = k_{ij}^j, \\
\left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial \dot{\theta}} \right)_{\epsilon_{lk}=0, \kappa_{lj}^k=0, \theta=\theta_0} &= \frac{c}{\theta_0}.
\end{aligned}$$

После этого линейное уравнение баланса энтропии приобретает форму:

$$-\Lambda^{js}\nabla_j\nabla_s\vartheta = -\rho\theta_0(g^{ij}\epsilon_{ij}^{\cdot} + k_{\cdot j}^i k_{\cdot i}^j + \theta_0^{-1}c\dot{\vartheta}) + \rho q. \quad (5.1)$$

Собственно, это уравнение и следует, как это принято в термомеханике континуума, трактовать как уравнение теплопроводности для линейной *анизотропной* термоупругой микрополярной среды CGNII. По существу же оно представляет собой линеаризованное уравнение баланса энтропии.

Заметим, что на основании (3.2) и (4.1) будут справедливы равенства:

$$\rho g^{ij} = -\frac{1}{2}G_1^{ij}, \quad \rho k_{\cdot j}^i = -\frac{1}{2}G_2^{i\cdot j}.$$

Уравнение распространения тепла (1) упрощается в гемитропном случае. Поскольку для гемитропной среды

$$\rho g^{ij} = -\frac{1}{2}G_1^{ij} = -\frac{1}{2}d g^{ij}, \quad \rho k_{\cdot j}^i = -\frac{1}{2}G_2^{i\cdot j} = -\frac{1}{2}d \delta_j^i, \quad \Lambda^{js} = \Lambda g^{js},$$

то вместо (5.1) имеем:

$$\frac{\rho c}{\Lambda} \partial \vartheta = \nabla^i \nabla_i \vartheta + \frac{\theta_0}{2\Lambda} (d \partial \epsilon_{\cdot j}^{\cdot j} + d \partial \kappa_{\cdot j}^{\cdot j}) + \frac{\rho q}{\Lambda},$$

или

$$\frac{\rho c}{\Lambda} \ddot{\vartheta} = \nabla^i \nabla_i \vartheta + \frac{\theta_0}{2\Lambda} (d \nabla_j \dot{u}^j + d \nabla_j \dot{\phi}^j) + \frac{\rho q}{\Lambda}. \quad (5.2)$$

Нетрудно видеть, что “термическая” главная часть уравнения распространения тепла (5.2) сводится к

$$\nabla^i \nabla_i \vartheta - \frac{\rho c}{\Lambda} \ddot{\vartheta},$$

что при условии $\Lambda > 0$ обеспечивает гиперболичность процессов теплопроводности, т.е. их волновую природу. Очевидно, что уравнение теплопроводности (5.2) не может исследоваться отдельно: оно, как хорошо видно, связывается с полями трансляционных и спинорных перемещений, поскольку включает пространственные градиенты их скоростей.

В изотропном случае уравнение теплопроводности CGNII примет наиболее простую форму из всех рассмотренных ранее:

$$\frac{\rho c}{\Lambda} \partial^2 \vartheta = \nabla^i \nabla_i \vartheta + \frac{\theta_0}{2\Lambda} d \nabla_j \partial u^j + \frac{\rho q}{\Lambda},$$

или в несколько более развернутом виде:

$$\frac{\rho c}{\Lambda} \partial^2 \vartheta = \nabla^i \nabla_i \vartheta - \frac{2\theta_0}{\Lambda} G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \nabla_j \partial u^j + \frac{\rho q}{\Lambda}.$$

В него уже не будут входить микроповороты и характеристическая микро-длина L ; “термическая” главная часть совпадает с таковой для гемитропной микрополярной среды.

6. Заключительные замечания. Изложенные в предыдущих разделах работы результаты дают возможность сформулировать замкнутую систему дифференциальных уравнений термоупругого континуума CGNII с волновым механизмом передачи тепла. Ограничиваясь моделью гемитропной среды, получим следующую систему связанных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left\{ \begin{aligned} & G(1+c_1)\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + G(1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + GL(c_4+c_5)\nabla \cdot \nabla \phi + \\ & + GL(c_4-c_5+2c_6)\nabla \nabla \cdot \phi + 2Gc_1\nabla \times \phi - 2G(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}\alpha \nabla \dot{\vartheta} = -\rho(\mathbf{f}-\ddot{\mathbf{u}}), \\ & GL(c_4+c_5)\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + GL(c_4-c_5+2c_6)\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + 2Gc_1\nabla \times \mathbf{u} + GL^2(1+c_2)\nabla \cdot \nabla \phi + \\ & + GL^2(1-c_2+2c_3)\nabla \nabla \cdot \phi + 4GLc_5\nabla \times \phi - 4Gc_1\phi - 2GL^2\beta \nabla \dot{\vartheta} = -\rho(1-\mathcal{I}\ddot{\phi}), \\ & \frac{\rho c}{\Lambda} \ddot{\vartheta} = \nabla \cdot \nabla \vartheta - \frac{2G\theta_0}{\Lambda} \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + L^2 \beta \nabla \cdot \dot{\phi} \right) + \frac{\rho q}{\Lambda}. \end{aligned} \right.$$

Уравнение распространения тепла в гемитропном случае (в отличие от изотропного) включает дивергенцию скоростей микроповоротов

$$\nabla \cdot \dot{\phi},$$

правда, с коэффициентом, имеющим второй порядок малости по характеристической микродлине L . Следовательно, гемитропное термоупругое CGNII тело выступает как наиболее простое из всего спектра анизотропных тел, процесс передачи тепла в котором в явном виде зависит от поля скоростей микроповоротов. Неявно скорости микроповоротов влияют на теплопроводность из-за связанности дифференциальных уравнений движения (двух первых векторных уравнения в данной выше системе) с пространственным градиентом скорости температурного смещения. То же самое справедливо и в случае гемитропного термоупругого тела CGNI (см., например, [3]), передача тепла в котором реализуется стандартным механизмом — законом теплопроводности Фурье.

Постановка прикладных задач подразумевает формулировку граничных условий. С этой целью приведем формулы для векторов силовых t_s и моментных m_s напряжений в гемитропном теле, действующих на двумерный элемент площади, ортогональный единичному вектору n^j :

$$\begin{aligned} t_s = n^i t_{is} &= G[(1+c_1)(n^i \nabla_i)u_s + (1-c_1)n^i \nabla_s u_i + 2\nu(1-2\nu)^{-1}n_s \nabla_k u^k + 2c_1 e_{sil} n^i \phi^l + \\ & + 2L(c_6 n_s \nabla_l \phi^l + \frac{c_4+c_5}{2}(n^i \nabla_i)\phi_s + \frac{c_4-c_5}{2}n^i \nabla_s \phi_i) - 2(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}\alpha \theta n_s], \\ m_s = n^i \mu_{is} &= GL^2[(1+c_2)(n^i \nabla_i)\phi_s + (1-c_2)n^i \nabla_s \phi_i + 2c_3 n_s \nabla_l \phi^l + \\ & + 2L^{-1}(c_6 n_s \nabla_l u^l + \frac{c_4+c_5}{2}(n^i \nabla_i)u_s + \frac{c_4-c_5}{2}n^i \nabla_s u_i + c_5 e_{sil} n^i \phi^l) - 2\beta \theta n_s]. \end{aligned}$$

Эти уравнения допускают дальнейшие преобразования, если воспользоваться формулами:

$$\begin{aligned} n^i \nabla_s u_i &= (n^i \nabla_i)u_s + e_{sij} e^{jkl} n^i \nabla_k u_l, \\ n^i \nabla_s \phi_i &= (n^i \nabla_i)\phi_s + e_{sij} e^{jkl} n^i \nabla_k \phi_l. \end{aligned}$$

В итоге получим следующие представления для векторов \mathbf{t} и \mathbf{m} :

$$\left\{ \begin{aligned} G^{-1} \mathbf{t} &= 2(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (1 - c_1) \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1} \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2c_1 \mathbf{n} \times \boldsymbol{\phi} + \\ &\quad + 2Lc_6 \mathbf{n}(\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}) + 2Lc_4 (\mathbf{n} \cdot \nabla) \boldsymbol{\phi} + L(c_4 - c_5) \mathbf{n} \times (\nabla \times \boldsymbol{\phi}) - 2(1 + \nu)(1 - 2\nu)^{-1} \alpha \theta \mathbf{n}, \\ (GL)^{-1} \mathbf{m} &= 2c_4 (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (c_4 - c_5) \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2c_6 \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2c_5 \mathbf{n} \times \boldsymbol{\phi} + \\ &\quad + 2Lc_3 \mathbf{n}(\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}) + 2L(\mathbf{n} \cdot \nabla) \boldsymbol{\phi} + L(1 - c_2) \mathbf{n} \times (\nabla \times \boldsymbol{\phi}) - 2L\beta \theta \mathbf{n}, \end{aligned} \right.$$

из которых непосредственно можно заключить, что вектор \mathbf{t} будет “не мал” даже при малых микродлинах L , а вектор \mathbf{m} имеет, вообще говоря, первый порядок малости по отношению к микродлине (и, кроме того, дополнительно корректируется членами второго порядка малости по L).

Работа выполнена по теме госзадания (госрегистрация 124012500437-9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 p.
2. *Radayev Y.N.* Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids // *Mech. Solids*. 2023. V. 58. № 5. P. 1517–1527. <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>
3. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt, 1986. viii+383 p.
4. *Green A.E., Naghdi P.M.* Thermoelasticity without energy dissipation // *J. Elasticity*. 1993. V. 31. P. 189–208. <http://doi.org/10.1007/BF00044969>
5. *Радаев Ю.Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки*. 2018. Т. 22. № 3. С. 504–517. <http://doi.org/10.14498/vsgtu1635>
6. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge, Cambridge University Press, 1969. VII+93 p.
7. *Radayev Y.N.* Two-point rotations in geometry of finite deformations. In: Altenbach H., Mkhitarian S.M., Hakobyan V., Sahakyan A.V. (eds) *Solid Mechanics. Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials*. V. 185. Springer, Cham, 2023. P. 275–283. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9_20

TYPE-II THERMOELASTICITY OF LINEAR ANISOTROPIC MICROPOLAR MEDIA

Yu. N. Radayev^{a, *}^a*Institute for Problems in Mechanics of RAS, Leading Researcher, Moscow, Russia*^{*}*e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com*

Abstract. In this paper, the mechanics of micropolar elastic solids is extended to more general thermoelastic media in order to take account of the effect of temperature on their states and mechanical behavior. Since a thermoelastic micropolar medium conducts heat, it is required to include one or another mechanism of thermal conductivity in the basic equations of micropolar thermoelasticity. A model of thermoelastic micropolar medium CGNII is developed on ground of the wave principle of heat transfer (i.e., thermal conductivity of the second type known from previous discussions by Green and Naghdi), characterized by zero internal entropy production. All the basic equations of the theory presented in this study are derived from the conventional equations of balance of continuum mechanics and the fundamental thermodynamic inequality. Constitutive equations for a linear anisotropic thermoelastic micropolar medium (CGNII) are obtained by using a quadratic energy form for the Helmholtz free energy. Special attention is paid to hemitropic micropolar medium, when the components of one of the fourth rank constitutive pseudotensors demonstrate sensitivity to mirror reflections of three-dimensional space. A closed system of coupled differential equations is given in terms of translational displacements, microrotations and temperature displacement. It is important since can be used in formulations of applied problems of thermomechanics regarding to the wave heat transfer mechanism in micropolar elastic media.

Keywords: micropolar solid, heat conduction, anisotropy, hemitropy, free energy, constitutive tensor, entropy, entropy production, CGNII thermoelasticity

REFERENCES:

1. *Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables.* Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 pp.
2. *Radayev Y.N. Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids // Mech. of Solids.* 2023. V. 58. N. 5. P. 1517–1527.
<https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>
3. *Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity.* Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt, 1986. viii+383 pp.
4. *Green A.E, Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity.* 1993. V. 31. P. 189–208.
5. *Radayev Y.N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories. Journal of Samara State Technical University. Ser. Physics and Mathematics.* 2018. V. 22. N. 3. P. 504–517 (in Russian).
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>
6. *Jeffreys H. Cartesian Tensors.* Cambridge, Cambridge University Press, 1969. VII+93 pp.
7. *Radayev Y.N. Two-Point Rotations in Geometry of Finite Deformations. In: Altenbach H., Mkhitarian S.M., Hakobyan V., Sahakyan A.V. (eds) Solid Mechanics. Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials.* V. 185. Springer, Cham, 2023. P. 275–283.

Информация

о статье

Горра Г.В. «Прецессионные движения гиростата, имеющего неподвижную точку, в трех однородных силовых полях»

В журнале «Известия РАН. Механика твердого тела» в 4-м номере 2024 года была опубликована статья Горра Г.В. «Прецессионные движения гиростата, имеющего неподвижную точку, в трех однородных силовых полях» (Изв. РАН. МТТ. 2024. № 4. С. 15–35.), которая дублирует аналогичную статью во 2-м номере (Изв. РАН. МТТ. 2024. № 2. С. 283–304).

В связи с этим статья «Горра Г.В. Прецессионные движения гиростата, имеющего неподвижную точку, в трех однородных силовых полях». Изв. РАН. МТТ. 2024. № 4. С. 15–35.» отзывается.