

*Известия*

ISSN 1026-3519

*Российской академии наук*



# МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



НАУКА  
— 1727 —

2024

2



## СОДЕРЖАНИЕ

---

|                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Теория тонких упругих пластин — история и современное состояние проблемы<br><i>В. В. Васильев</i>                                                                                                                                                    | 3   |
| Наноиндентирование гибридных кристаллов нано-SiC/Si и тонких пленок ALN, AlGa <sub>N</sub> , GaN, Ga <sub>2</sub> O <sub>3</sub> на нано-SiC/Si<br><i>А. С. Гращенко, С. А. Кукушкин, А. В. Осипов</i>                                               | 40  |
| Землетрясение Кахраманмарас 06.02.2023: математические модели, оценки и методы сейсмической защиты<br><i>А. И. Каракозова, С. В. Кузнецов, В. Л. Мондрус</i>                                                                                         | 90  |
| Кватернионные регулярные уравнения задачи двух тел и задачи о движении спутника в гравитационном поле земли в переменных Кустаанхеймо—Штифеля и модифицированных четырехмерных переменных: динамика относительного движения<br><i>Ю. Н. Челноков</i> | 103 |
| Мембранный пьезоэлектрический MDS-актюатор с плоской двойной спиралью взаимодействующих электродов<br><i>А. А. Паньков</i>                                                                                                                           | 139 |
| Динамические уравнения распространения акустических волн в предварительно деформированных материалах<br><i>А. А. Маркин, М. Ю. Соколова</i>                                                                                                          | 166 |
| Расчет эффективной нормальной жесткости деформируемого колеса с наклоненной осью вращения<br><i>Е. В. Балакина, М. С. Кочетов</i>                                                                                                                    | 183 |
| Расчет износа манжетного уплотнения вала при случайно изменяющихся температуре и нагрузке<br><i>И. А. Солдатенков</i>                                                                                                                                | 198 |
| Еще раз о контактной задаче для однородной плоскости с конечной трещиной с учетом трения<br><i>В. Н. Акопян, А. А. Амирджанян, Л. В. Акопян</i>                                                                                                      | 216 |
| Вероятностные соотношения для ресурсных режимов нагружения при транспортировке<br><i>А. Ю. Бондаренко, А. И. Лиходед, В. А. Титов, С. П. Фунтиков, А. Н. Шилин</i>                                                                                   | 233 |
| Совместность деформаций и трижды дифференцируемость поля перемещений<br><i>Д. В. Георгиевский</i>                                                                                                                                                    | 244 |

|                                                                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Эволюция индикаторов повреждаемости при циклическом нагружении композиционной пластины с отверстием<br><i>А. С. Дзюба, С. И. Елеонский, М. Д. Зайцев, В. С. Писарев</i> | 249 |
| Влияние циклической нагрузки на физико-механические свойства тонкопленочных мембранных структур<br><i>Н. А. Дюжнев, Е. Э. Гусев, Е. О. Портнова, О. В. Новикова</i>     | 269 |
| Прецессионные движения гиростата, имеющего неподвижную точку, в трех однородных силовых полях<br><i>Г. В. Горр</i>                                                      | 283 |
| О кинетической физико-математической теории ползучести металлов, контролируемой термоактивированным скольжением дислокаций<br><i>В. М. Грешнов, Р. И. Шайхутдинов</i>   | 305 |
| Неосесимметричная связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра<br><i>Д. А. Шляхин, В. А. Юрин</i>                     | 325 |

---



---

УДК 539.3

## ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ПЛАСТИН – ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

© 2024 г. В. В. Васильев<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup>Центральный НИИ специального машиностроения, Хотьково, Россия

\*e-mail: vvvas@dol.ru

Поступила в редакцию 09.10.2023 г.

После доработки 24.10.2023 г.

Принята к публикации 27.10.2023 г.

Статья является аналитическим обзором и посвящена теории тонких, изотропных упругих пластин. Приводятся основные соотношения теории, основанной на кинематической гипотезе, согласно которой тангенциальные перемещения распределяются линейно по толщине пластины, а ее прогиб не зависит от нормальной координаты. В результате получена система уравнений шестого порядка относительно двух потенциальных функций – проникающего потенциала, определяющего прогиб пластины, и краевого потенциала, позволяющего поставить на краю пластины три граничных условия и устранить известное противоречие теории пластин Кирхгофа. Рассмотрены задачи, не имеющие корректного решения в рамках теории Кирхгофа – цилиндрический изгиб пластины со свободным краем, изгиб прямоугольной пластины с неклассическим шарнирным закреплением, кручение квадратной пластины моментами, распределенными по контуру, изгиб пластины жестким штампом. В заключение представлен краткий исторический обзор работ, посвященных теории изгиба пластин.

*Ключевые слова:* теория тонких упругих пластин

DOI: 10.31857/S1026351924020018, EDN: uwrosi

**1. Введение.** Рассмотрим прямоугольную пластину, отнесенную к координатам  $x, y, z$ , и определим ее как тело, относительная толщина которого  $\bar{h} = h/a$ , где  $a$  – характерный размер пластины в плане (рис. 1), значительно меньше единицы. Асимптотический анализ уравнений теории упругости показывает [1], что если принять порядок деформаций пластины в плоскости  $xu$  равным  $\varepsilon$ , то порядок деформаций сдвига в плоскостях  $xz$  и  $yz$  оказывается равным  $\bar{h}^2\varepsilon$ , а порядок деформации в направлении оси  $z$  составляет  $\bar{h}^4\varepsilon$ . Таким образом, трансверсальные по отношению к плоскости  $xu$  деформации для относительно тонких пластин оказываются второстепенными. Это обстоятельство, по существу, и лежит в основе традиционно называемой классической теории пластин, построенной в XIX в. С. Пуассоном и Г. Кирхгофом [2] и предполагающей линейное распределение

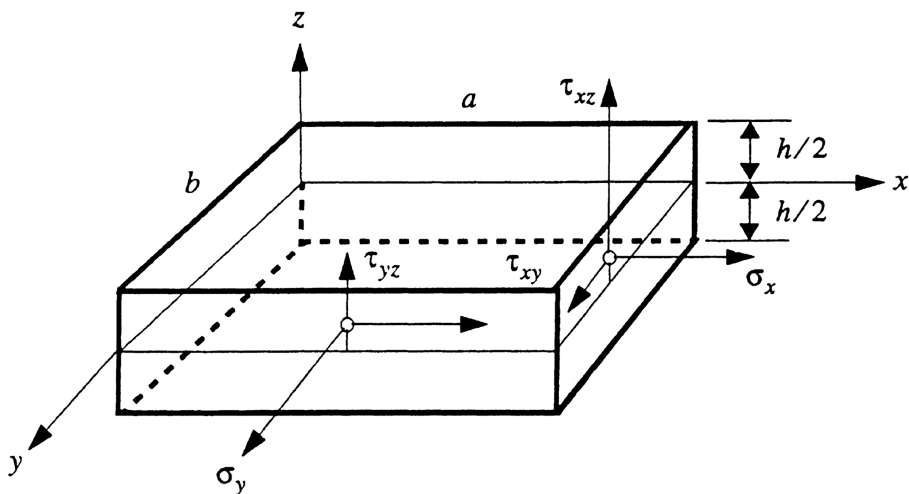


Рис. 1. Напряжения, действующие в пластине.

тангенциальных перемещений по толщине пластины и независимость прогиба от нормальной координаты, то есть

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) = z\theta_x(x, y), \quad u_y(x, y, z) = z\theta_y(x, y), \\ u_z(x, y, z) = w(x, y) \end{aligned}, \quad (1.1)$$

Здесь  $\theta_x$  и  $\theta_y$  — углы поворота элемента пластины в плоскостях  $xz$  и  $yz$ , которые выражаются через прогиб пластины:

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.2)$$

Для поля перемещений, определяемого равенствами (1.1) и (1.2), имеем  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$  и  $\varepsilon_z = 0$ , то есть трансверсальные деформации отсутствуют. В результате теория сводится к бигармоническому уравнению для прогиба:

$$D\Delta\Delta(w) = p. \quad (1.3)$$

где  $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$  — изгибная жесткость пластины и  $p$  — давление, действующее на ее поверхности.

Традиционная классическая теория обладает принципиальным недостатком, следующим из соотношений (1.2). В задаче изгиба элемент пластины обладает тремя независимыми степенями свободы, соответствующими перемещению  $w$  и углам поворота  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ . Однако в обсуждаемой теории эти кинематические переменные не являются взаимно независимыми, так как углы поворота выражаются через прогиб. В результате возникает известное противоречие между порядком уравнения (1.3) и числом граничных условий — на краю пластины действуют три напряжения (два касательных и одно нормальное,

(рис. 1), а уравнение (1.3) позволяет сформулировать только два условия. Это противоречие породило многолетнюю дискуссию, которая завершилась формальным преобразованием статических граничных, предложенных Г. Кирхгофом [3] и физически обоснованных Томсоном и Тэтом [4], но не приведших к окончательному решению проблемы [5]. Попытки построить теорию пластин, свободную от отмеченного недостатка, продолжаются [6]. Здесь не обсуждаются многочисленные работы, посвященные уточненным теориям пластин из материалов с относительно низкой трансверсальной жесткостью. Рассматриваются тонкие изотропные пластины, то есть предлагается ревизия традиционной классической теории пластин.

**2. Уравнения теории пластин.** Приведем основные соотношения теории, выведенные в работах [7–9] и основанные на результатах, полученных Г. Кирхгофом [3], Г. Генки [10] и Л. Болле [11]. Поле перемещений задается, как и в теории Г. Кирхгофа, равенствами (1.1), в которых углы поворота являются независимыми переменными и не связаны с прогибом равенствами (1.2). Эти равенства, предложенные Г. Генки [10], обеспечивают существование трех независимых степеней свободы элемента пластины и устраняют основной недостаток традиционной классической теории. При этом трансверсальные деформации сдвига оказываются отличными от нуля и учитываются приближенно, а деформация в направлении оси  $z$  остается равной нулю. Напряжения, действующие в плоскости пластины, определяются законом Гука и имеют вид:

$$\sigma_x = \bar{E}z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) (x, y), \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} \bar{E}(1 - \nu)z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right), \quad \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}. \quad (2.1)$$

Символ  $(x, y)$  обозначает перестановку индексов, позволяющую получить из равенства для направления  $x$  аналогичное равенство для направления  $y$ . Имеется принципиальная возможность использовать аналогичный подход для определения трансверсальных касательных напряжений, то есть

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2} \bar{E}(1 - \nu) \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \bar{E}(1 - \nu) \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) (x, y). \quad (2.2)$$

Это выражение не удовлетворяет статическим граничным условиям на поверхностях пластины, которые свободны от нагрузки так, что  $\tau_{xz}(z = \pm h/2) = 0$  (рис. 1). Однако полученный результат является неправомерным, так как он требует дифференцирования перемещения  $u_x$  по координате  $z$ . Дело в том, что функция  $u_x(z)$  в равенствах (1.1) является приближенной, а дифференцирование приближенных функций, как известно, не допускается. Для того чтобы исключить операцию дифференцирования, введем равнодействующие касательных напряжений – поперечные силы:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = \frac{1}{2} \bar{E}(1 - \nu) \left[ u_x(h/2) - u_x(-h/2) + h \frac{\partial w}{\partial x} \right] = S\gamma_x(x, y), \quad (2.3)$$

$$\gamma_x = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (x, y). \quad (2.4)$$

Здесь  $\gamma_x$  – осредненная по толщине пластины деформация сдвига, а  $S = \bar{E}h(1 - \nu) / 2$  – жесткость пластины при трансверсальном сдвиге. Таким образом, равенство (2.2) в рассматриваемой теории отсутствует, а соотношения упругости для трансверсального сдвига существуют только в форме осредненной по толщине. Такая ситуация представляется естественной, так как деформация пластины в направлении оси  $z$  равна нулю, то есть она считается абсолютно жесткой в этом направлении. Как известно, распределение напряжений по поверхности абсолютно жесткого тела не влияет на его поведение – существенны только равнодействующие силы (в рассматриваемом случае это поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ ).

Напряжения (2.1) статически эквивалентны моментам:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = D \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) (x, y), \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = \frac{1}{2} D(1 - \nu) \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Моменты и поперечные усилия, действующие на элемент пластины, связаны традиционными уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0. \quad (2.6)$$

Подставляя в эти уравнения силы и моменты из равенств (2.3), (2.4) и (2.5), получим следующую систему:

$$L_{11}(\theta_x) + L_{12}(\theta_y) + L_{13}(w) = 0 \quad (2.7)$$

$$L_{21}(\theta_x) + L_{22}(\theta_y) + L_{23}(w) = 0 \quad (2.8)$$

$$L_{31}(\theta_x) + L_{32}(\theta_y) + L_{33}(w) + p = 0 \quad (2.9)$$

Здесь

$$L_{11}(\cdot) = \frac{D}{S} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} - (\cdot), \quad L_{12}(\cdot) = L_{21}(\cdot) = k^2 \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial y},$$

$$L_{22}(\cdot) = \frac{D}{S} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + k^2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} - (\cdot), \quad L_{13}(\cdot) = -\frac{1}{S} L_{31}(\cdot) = -\frac{\partial(\cdot)}{\partial x},$$

$$L_{23}(\cdot) = -\frac{1}{S} L_{32}(\cdot) = -\frac{\partial(\cdot)}{\partial y}, \quad L_{33}(\cdot) = S \Delta(\cdot).$$

$$k^2 = \frac{D}{2S}(1 - \nu), \quad \Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}.$$

Используя операторный метод, приведем эту систему к одному уравнению относительно функции  $F$  в соответствии с равенствами:

$$\begin{aligned} \theta_x &= L_{12}L_{23}(F) - L_{13}L_{22}(F) = -\frac{\partial}{\partial x}L(F), \\ \theta_y &= L_{21}L_{13}(F) - L_{23}L_{11}(F) = -\frac{\partial}{\partial y}L(F), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$w = L_{11}L_{22}(F) - L_{12}L_{21}(F) = L(F) - \frac{D}{S}\Delta L(F), \quad L(F) = F - k^2\Delta F. \quad (2.11)$$

Подстановка равенств (2.10) в уравнения (2.7) и (2.8) приводит к тождественному удовлетворению этих уравнений, а подстановка в уравнение (2.9) дает

$$D\Delta\Delta\Delta(F) = p. \quad (2.12)$$

Предположим, что  $L(F) \neq 0$ , и введем потенциальную функцию:

$$\varphi = L(F). \quad (2.13)$$

Тогда из соотношений (2.10) и (2.11) следует:

$$\theta_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \theta_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = \varphi - \frac{D}{S}\Delta\varphi. \quad (2.14)$$

и уравнение (2.12) приводится к форме:

$$D\Delta\Delta\varphi = p. \quad (2.15)$$

Следует заметить, что уравнение (2.15) имеет четвертый порядок, тогда как система (2.7)–(2.9) имеет шестой порядок. Следовательно, должно существовать еще одно уравнение второго порядка. Учтем, что преобразования (2.10), (2.11) несправедливы, если  $L(F) = 0$ . В этом случае, согласно равенствам (2.11),  $w = 0$ . Как следует из соотношений (2.14), функция  $\varphi$  является потенциалом движения в плоскости пластины. Действительно, при  $z = z_0$  из равенств (1.1) имеем:

$$u_x^0 = \theta_x z_0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} z_0, \quad u_y^0 = \theta_y z_0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} z_0. \quad (2.16)$$

В результате угол поворота в плоскости пластины

$$\omega_z^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x^0}{\partial y} - \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.17)$$

Как известно из кинематики, в общем случае движение складывается из потенциальной и вращательной составляющей. Вращение в плоскости пластины описывается соотношениями:

$$\theta_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad w = 0. \quad (2.18)$$

В этом случае аналогично равенствам (2.16) и (2.17) имеем:

$$u_x^0 = \frac{\partial \psi}{\partial y} z_0, \quad u_y^0 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} z_0, \quad \omega_z^0 = \frac{z_0}{2} \Delta \psi.$$

Подстановка равенств (2.18) в уравнение (2.9) дает  $p = 0$ , а уравнения (2.7) и (2.8) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} L(\psi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} L(\psi) = 0.$$

Оператор  $L(\cdot)$  определяется равенством (2.11). Таким образом,  $L(\psi) = \text{const}$ . Принимая несущественную для потенциальной функции константу равной нулю, получим:

$$k^2 \Delta \psi - \psi = 0, \quad k^2 = \frac{D}{2S} (1 - \nu) = \frac{h^2}{6(1 - \nu)}. \quad (2.19)$$

Поскольку задача является линейной, ее общее решение определяется суперпозицией решений (2.14) и (2.19), то есть

$$\theta_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad w = \phi - \frac{D}{S} \Delta \phi. \quad (2.20)$$

Потенциалы  $\phi$  и  $\psi$  определяются из уравнений (2.15) и (2.19). Моменты и поперечные усилия выражаются через потенциальные функции следующим образом:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right], \\ M_y &= -D \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right], \\ M_{xy} &= -D(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$Q_x = S \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta \phi + S \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad Q_y = S \left( \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta \phi + S \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

Напряжения, действующие в плоскости пластины, следуют из равенств (2.1) и (2.5):



$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3}z, \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3}z, \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3}z. \quad (2.22)$$

Трансверсальные касательные напряжения определяются интегрированием уравнений равновесия теории упругости с учетом граничных условий на поверхностях пластины и имеют следующий окончательный вид:

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right). \quad (2.23)$$

При  $S \rightarrow \infty$  имеем  $k = 0$ , из уравнений (2.15) и (2.19) следует  $\varphi = w$ ,  $\psi = 0$ , и рассматриваемая теория вырождается в традиционную классическую теорию пластин. При конечном значении коэффициента сдвиговой жесткости построенная теория учитывает два эффекта, связанные с деформацией сдвига. Первый эффект связан со вторым членом в последнем равенстве (2.14) и учитывает влияние сдвига на прогиб пластины при изгибе. Второй эффект описывается уравнением (2.19), которое определяет быстро изменяющееся напряженное состояние, связанное с кручением пластины. Это состояние невозможно описать, если считать, что пластина обладает бесконечно большой жесткостью при поперечном сдвиге.

Таким образом, рассматриваемая теория сводится к уравнениям (2.15) и (2.19) для потенциальных функций  $\varphi$  и  $\psi$ . Аналогичные функции были впервые введены в работе Л. Болле [11].

В теории Кирхгофа, как следует из соотношений (1.2) и (2.17),  $\varphi = w$  и  $\psi = 0$ , то есть потенциальной функцией для углов поворота является прогиб, а потенциал, позволяющий учесть возможный поворот элемента пластины в ее плоскости, отсутствует.

**3. Граничные условия.** Полученные уравнения имеют в совокупности шестой порядок, и их решение должно удовлетворять на краю пластины трем граничным условиям. Для формулировки граничных условий воспользуемся вариационным принципом Лагранжа. В рамках принятых гипотез вариация функционала Лагранжа имеет вид:

$$\delta L = \iiint \left[ \sigma_x \delta \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \sigma_y \delta \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \tau_{xy} \delta \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \delta \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \tau_{yz} \delta \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy dz - \iint p \delta w dx dy$$

С учетом соотношений, представленных в разделе 2, этот функционал может быть приведен к двумерной форме:

$$\delta L = \iint \left[ M_x \delta \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + M_y \delta \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + M_{xy} \delta \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + Q_x \gamma_x + Q_y \gamma_y - p \delta w \right] dx dy. \quad (3.1)$$

Используя вариационный принцип Лагранжа и традиционные операции варьирования, из функционала (3.1) можно получить три уравнения равновесия (2.6). Отсюда следует, что рассматриваемая теория является энергетически согласованной. Таковой предлагается считать теорию, для которой из вариационного принципа Лагранжа следуют уравнения, обеспечивающие равновесие бесконечно малого элемента пластины как твердого тела [12, 13]. Заметим, что теория Кирхгофа не является энергетически согласованной. Действительно, вариация функционала (3.1) для этой теории имеет вид

$$\delta L = \iint \left[ M_x \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_y \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2M_{xy} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - p \delta w \right] dx dy. \quad (3.2)$$

и приводит к следующему вариационному уравнению:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0. \quad (3.3)$$

Равновесие бесконечно малого элемента пластины как твердого тела обеспечивается уравнениями (2.6). Вариационное уравнение (3.3) следует из них, но не эквивалентно им. Возможное нарушение условий равновесия элемента пластины в теории Кирхгофа отмечается в работе П.А. Жилина [14].

Вернемся к обсуждаемой теории. Осуществляя варьирование в функционале (3.1) и используя принцип Лагранжа, получим:

$$\begin{aligned} \delta L = \iint & \left\{ (D \Delta \Delta \varphi - p) \delta w + \frac{\partial}{\partial y} \left[ S \psi - \frac{D}{2} (1 - \nu) \Delta \psi \right] \delta \theta_x + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left[ S \psi - \frac{D}{2} (1 - \nu) \delta \psi \right] \delta \theta_y \right\} dx dy \\ & + \left[ \int (M_x \delta \theta_x + M_{xy} \delta \theta_y + Q_x \delta w) dy \right]_x + \\ & + \left[ \int (M_y \delta \theta_y + M_{xy} \delta \theta_x + Q_y \delta w) dx \right]_y = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отсюда следуют уравнения (2.15) и (2.19) и три естественные граничные условия. Рассмотрим типовые граничные условия.

Предположим, что край  $x = 0$  жестко закреплен. На нем, согласно уравнению (3.4), должны выполняться граничные условия  $\theta_x = \theta_y = w = 0$ . При этом из равенств (1.1) следует  $u = v = w = 0$ , т.е. в рамках принятых гипотез перемещения

на закрепленном краю тождественно равны нулю. Используя равенства (2.20), имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{D}{S} \Delta \varphi = \varphi. \quad (3.5)$$

Рассмотрим случай свободного опирания края  $x = 0$ . В рассматриваемой теории возможны два варианта граничного условия.

Классическое условие соответствует пластине, опертой на стенки, которые являются абсолютно гибкими и абсолютно жестким в своей плоскости. В этом случае на краю имеем  $w = M_x = \theta_y = 0$ . С учетом соотношений (2.20) и (2.21) получим:

$$\varphi = \frac{D}{S} \Delta \varphi, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Проведем некоторые преобразования. Используя последнее условие (3.6), исключим  $\partial \psi / \partial x$  из второго условия. В результате получим  $\Delta \varphi = 0$ . Тогда с учетом первого условия для края  $x = 0$  имеем:

$$\varphi = \Delta \varphi = 0. \quad (3.7)$$

С учетом этих соотношений последнее условие (3.6) дает  $\partial \psi / \partial x = 0$  на краях  $x = 0, a$ . Аналогично на краях  $y = 0, b$  получим  $\partial \psi / \partial y = 0$ . Таким образом, функция  $\psi$  определяется из однородного уравнения (2.19) с однородными граничными условиями, накладываемыми на нормальную производную функции. Такая краевая задача имеет тривиальное решение, т.е.  $\psi = 0$  [15]. Таким образом, свободно опертая в традиционном смысле пластина описывается уравнением (2.15) с граничными условиями (3.7).

Второй случай свободного опирания соответствует пластине со свободными краями, лежащей на опорах. В этом случае  $w = M_x = M_{xy} = 0$  или

$$\varphi = \frac{D}{S} \Delta \varphi, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right). \quad (3.8)$$

Исключая из последнего условия  $\partial^2 \psi / \partial x^2$  с помощью уравнения (2.19), получим:

$$\psi - \frac{D}{S} (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) = 0.$$

При  $S \rightarrow \infty$  отсюда имеем  $\psi = 0$ , и первые два условия (3.8) вырождаются в классические условия свободного опирания края пластины.

Критическими для теории Кирхгофа являются граничные условия для свободного края пластины. Выполняя операцию варьирования в функционале (3.2) и вводя поперечные силы с помощью уравнений равновесия (2.6), имеем:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \iint \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p \right) \delta w dx dy + \\
& + \left[ \int_0^b M_x \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \right]_x + \left[ \int_0^a M_y \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \right]_y - \\
& - \left[ \int_0^b \left( Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta w dy \right]_x - \left[ \int_0^a \left( Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta w dx \right]_y + 2 [M_{xy} \delta w]_{x,y}.
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Из условия  $\delta L = 0$  получим уравнение (3.3) и два граничных условия на краю  $x = 0$  — одно для изгибающего момента и второе для обобщенной поперечной силы Кирхгофа:

$$K_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] (x, y). \quad (3.10)$$

Вторая часть этого условия была формально получена из вариационного принципа Г. Кирхгофом [3] без ассоциации с какой-либо силой. Первая часть условия (3.10) была получена позже У. Томсоном и П. Тэтом [4], которые использовали теорему статики, позволяющую привести крутящий момент к паре сил. Справедливость этой операции вызывает сомнение, так как такое приведение строго возможно для абсолютно жесткого тела, каковым не является упругая пластина. Еще один сомнительный момент связан с последним членом в равенстве (3.9). В угловой точке прямоугольной пластины (она обозначается символом  $x, y$ ) удвоенный крутящий момент умножается на  $\delta w$  и может быть интерпретирован как сосредоточенная сила:

$$P = 2M_{xy}. \quad (3.11)$$

В общем случае такие силы на пластину не действуют.

Вернемся к теории, рассмотренной в разделе 2. Если край  $x = 0$  свободен от нагрузки, из равенства (3.4) имеем  $M_x = M_{xy} = Q_x = 0$ . Из соотношений (2.22) и (2.23) при этом следует, что  $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ , то есть в рамках принятых гипотез напряжения на свободном краю пластины отсутствуют. С помощью равенств (2.21) получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right), \quad \frac{D}{S} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (3.12)$$

Преобразуем второе из этих условий. Исключая из него  $\partial^2 \psi / \partial x^2$  с помощью уравнения (2.19), дифференцируя вдоль края (по  $y$ ) и используя последнее условие (3.12) для исключения  $\partial \psi / \partial y$ , найдем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{D}{S} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta \phi \right] = 0.$$

При  $S \rightarrow \infty$  имеем  $\phi = w$  и получаем граничное условие Кирхгофа, выражающееся через обобщенную поперечную силу (3.10). При этом угловые силы (3.11) не появляются. Рассмотрим некоторые задачи, иллюстрирующие теорию.

**4. Анализ конкретных задач теории пластин.** В качестве первой задачи рассмотрим пластину, занимающую область  $0 \leq x < \infty$ ,  $0 \leq y \leq b$ , у которой края  $y = 0$  и  $y = b$  свободно оперты, а край  $x = 0$  свободен от нагрузки (рис. 2). Пластина нагружена давлением, изменяющимся по закону  $p_1 = p_0 \sin \pi y / b$ .

Для свободно опертых продольных краев пластины имеем следующие граничные условия:

$$\phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (4.1)$$

Этим условиям удовлетворяет решение в виде:

$$\phi = \Phi(x) \sin \lambda y, \quad \psi = \Psi(x) \cos \lambda y, \quad \lambda = \pi / b. \quad (4.2)$$

Подставляя выражения (4.2) в уравнения (2.15) и (2.19), получим:

$$D(\Phi^{(4)} - 2\lambda^2 \Phi^{(2)} + \lambda^4 \Phi) = p_0, \quad \Psi^{(2)} - r^2 \Psi = 0, \quad r^2 = \lambda^2 + \frac{1}{k^2}, \quad \lambda = \frac{\pi}{b}.$$

Решения этих уравнений для полубесконечной пластины (рис. 2) записываются следующим образом:

$$\Phi = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 x e^{-\lambda x} + \frac{p_0}{D \lambda^4}, \quad \Psi = C_3 e^{-rx}.$$

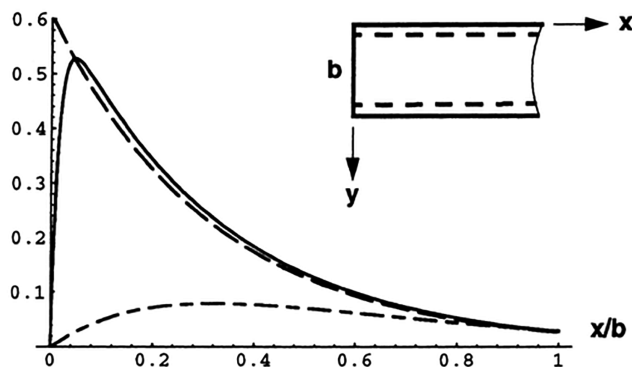


Рис. 2. Распределение относительных поперечных сил по продольной координате: —  $\bar{Q}_x(x, y = b/2)$ , ----  $\bar{Q}_x^k(x, y = b/2)$ , - · -  $K_x(x, y = b/2)$ .

Предположим, что край  $x = 0$  свободен от нагрузки, то есть на нем выполняются условия  $M_x = 0$ ,  $M_{xy} = 0$ ,  $Q_x = 0$ , из которых определяются постоянные  $C_{1,2,3}$ . В качестве примера рассмотрим пластину с параметрами  $h/b = 0.05$ ,  $\nu = 0.3$ , для которой  $\lambda = 3.14/b$ ,  $r = 69.35/b$ . Окончательно получим:

$$w = \frac{p_0}{D\lambda^4} \left[ 1 + 0.178e^{-\lambda x} \left( 1 - 1.69 \frac{x}{b} \right) \right] \sin \lambda y, \quad Q_x = 0.64 \frac{p_0 \nu}{\lambda} (e^{-\lambda x} - e^{-rx}) \sin \lambda y. \quad (4.3)$$

Для сравнения запишем решение, соответствующее классической теории пластин, которое при  $x = 0$  должно удовлетворять условиям  $M_x = 0$ ,  $K_x = 0$ , где  $K_x$  — обобщенная поперечная сила Кирхгофа (3.10). Имеем:

$$w_k = \frac{p_0}{D\lambda^4} \left[ 1 + 0.169e^{-\lambda x} \left( 1 - 1.69 \frac{x}{b} \right) \right] \sin \lambda y, \quad Q_x^k = 0.606 \frac{p_0 \nu}{\lambda} e^{-\lambda x} \sin \lambda y, \quad (4.4)$$

$$K_x = 0.666 \frac{p_0 \nu}{b\lambda} x e^{-\lambda x} \sin \lambda y. \quad (4.5)$$

Сравнивая классическое решение (4.4) с равенствами (4.3), можно заключить, что прогибы пластины  $w$  и  $w_k$  различаются незначительно. Изменение относительных поперечных усилий  $(\bar{Q}, \bar{K}) = \lambda(Q, K) / p_0 \nu$  по продольной координате показано на рис. 2. Усилие  $\bar{Q}_x$  (4.3) в соответствие с граничным условием обращается в ноль при  $x = 0$ . Усилие  $\bar{Q}_x^k$  (4.4) не удовлетворяет этому условию, однако вдали от края  $x = 0$  оно практически совпадает с усилием  $\bar{Q}_x$ . Усилие  $\bar{K}_x$  (4.5) удовлетворяет граничному условию, однако не имеет ничего общего с усилием  $\bar{Q}_x$ .

Известная проблема классической теории пластин связана с расчетом пластин, опирающихся ко контуру на упругие балки. Возникает вопрос: какую силу реактивную следует передавать на балку — поперечную силу  $Q$  или обобщенную поперечную силу  $K$ ? Для ответа на этот вопрос рассмотрим пластину, показанную на рис. 2, и предположим, что край  $x = 0$  этой пластины подкреплён упругой балкой. Возможны два варианта уравнений равновесия балки. Согласно теории пластин, описанной в разделе 2, на балку действуют со стороны пластины поперечное усилие  $Q_x^0$  и крутящий момент  $M_{xy}^0$ , которые изгибают балку (индекс 0 обозначает, что решение теории пластин записывается для края  $x = 0$ ). Соответствующие уравнения равновесия балки имеют вид:

$$\frac{dQ_b}{dy} + Q_x^0 = 0, \quad \frac{dM_b}{dy} - Q_b + M_{xy}^0 = 0. \quad (4.6)$$

Используя равенства (2.21) и решение (4.2) при  $S \rightarrow \infty$  и  $\psi = 0$  (балка описывается классической теорией) имеем:

$$Q_x^0 = -D \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi \right)_0 = -D (\Phi_0''' - \lambda^2 \Phi_0') \sin \lambda y,$$

$$M_{xy}^0 - D(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_0 = -D(1 - \nu) \lambda \Phi_0' \cos \lambda y .$$

Интегрируя первое уравнение (4.6) и учитывая условие симметрии, согласно которому  $Q_b(y = b/2) = 0$ , получим:

$$Q_b = -\frac{D}{\lambda} (\Phi_0''' - \lambda^2 \Phi_0') \cos \lambda y .$$

В результате второе уравнение (4.6) принимает вид:

$$\frac{dM_b}{dy} + \frac{D}{\lambda} [\Phi_0''' - \lambda^2 (2 - \nu) \Phi_0'] \cos \lambda y = 0 . \quad (4.7)$$

Теперь, согласно теории Кирхгофа, предположим, что на балку действует со стороны пластины только обобщенная поперечная сила:

$$K_x^0 = Q_x^0 + \frac{\partial M_{xy}^0}{\partial y} = -D [\Phi_0''' - (2 - \nu) \lambda^2 \Phi_0'] \sin \lambda y .$$

В этом случае уравнения равновесия балки имеют вид:

$$\frac{dQ_b}{dy} + K_x^0 = 0, \quad \frac{dM_b}{dy} - Q_b = 0 . \quad (4.8)$$

Интегрируя первое уравнение (4.8), найдем:

$$Q_b = -\frac{D}{\lambda} [\Phi_0''' - (2 - \nu) \lambda^2 \Phi_0'] \cos \lambda y .$$

Подстановка этого результата во второе уравнение (4.8) приводит к уравнению (4.7). Таким образом, возможны два эквивалентных подхода к определению краевых реакций пластины, воздействующих на балку, — приложение краевой поперечной силы  $Q_x^0$  в сочетании с краевым крутящим моментом  $M_{xy}^0$  или приложение обобщенной поперечной силы  $K_x^0$ . Полученный результат представляется естественным, так как обобщенная поперечная сила получается в результате статического преобразования крутящего момента к поперечной силе. Таким образом, при расчете пластин с краем, подкрепленным балкой, в рамках теории Кирхгофа силу взаимодействия между пластиной и балкой следует определять как обобщенную поперечную силу Кирхгофа.

В качестве второго примера рассмотрим прямоугольную пластину, показанную на рис. 3 и нагруженную давлением, распределенным по закону:

$$q = -p = q_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} . \quad (4.9)$$

Такая нагрузка, с одной стороны, позволяет существенно упростить решение, а с другой стороны, позволяет сохранить все качественные особенности решения, соответствующего произвольной нагрузке. При традиционном свободном

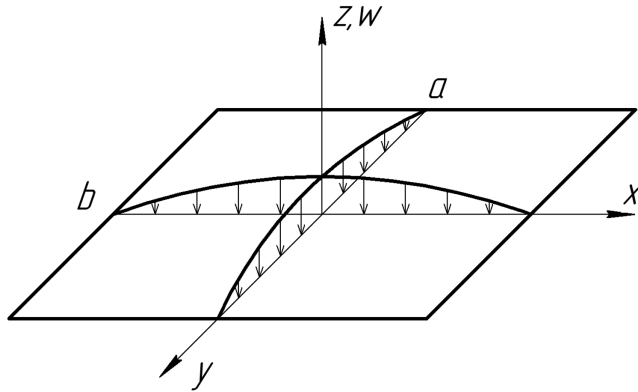


Рис. 3. Прямоугольная свободно опертая пластина.

опирании на краю пластины отсутствуют прогиб, изгибающий момент и угол поворота в плоскости края.

Изгиб пластины описывается уравнениями (2.15) и (2.19) с граничными условиями в форме (3.7). Представим функцию  $\varphi$ , удовлетворяющую этим граничным условиям, в виде:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Используя уравнение (2.15) для нагрузки в форме (4.9), получим:

$$\varphi_0 = -\frac{q_0 a^4 b^4}{\pi^4 D (a^2 + b^2)^2}.$$

В результате прогиб пластины (2.14) принимает вид:

$$w_0 = -\frac{q_0 a^4 b^4}{\pi^4 D (a^2 + b^2)^2} \left[ 1 + \frac{\pi^2 D}{S} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right] \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Второе слагаемое в квадратных скобках учитывает влияние деформации сдвига на прогиб пластины. Для рассматриваемых граничных условий  $\psi = 0$ . Равенства (2.21) приводят к следующим выражениям для поперечных усилий:

$$Q_x = Q_x^0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \quad Q_y = Q_y^0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (4.10)$$

где

$$Q_x^0 = \frac{q_0 a b^2}{\pi (a^2 + b^2)}, \quad Q_y^0 = \frac{q_0 a^2 b}{\pi (a^2 + b^2)}.$$

Найдем равнодействующую опорных реакций. С учетом равенств (4.10) имеем:



$$R = \int_{-b/2}^{b/2} [Q_x(a/2) - Q_x(-a/2)] dy + \int_{-a/2}^{a/2} [Q_y(b/2) - Q_y(-b/2)] dx = \frac{4}{\pi^2} q_0 ab. \quad (4.11)$$

С другой стороны, равнодействующая внешней нагрузки (4.9) имеет вид:

$$R = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} q dx dy = \frac{4}{\pi^2} q_0 ab. \quad (4.12)$$

Таким образом, поперечные усилия  $Q_x$  и  $Q_y$  уравнивают внешнюю нагрузку. Распределение безразмерного усилия  $\bar{Q}_x = Q_x / Q_0$  по краю  $x = a/2$  для квадратной ( $a = b$ ) пластины показано на рис. 4.

Рассмотрим аналогичную задачу в рамках классической теории пластин. При нагрузке (4.9) решение уравнения (1.3) имеет вид:

$$w = -\frac{q_0 a^4 b^4}{\pi^4 D (a^2 + b^2)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Поперечные усилия  $Q$ , действующие на краях пластины, уравнивают внешнюю нагрузку, однако традиционно [16] в качестве опорных реакций в рассматриваемой задаче предлагается считать обобщенные поперечные усилия Кирхгофа (3.10), т.е., например:

$$K_x = -\frac{q_0 ab^2}{\pi(a^2 + b^2)^2} [b^2 + (2 - \nu)a^2] \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \quad (4.13)$$

Замена  $Q$  на  $K$  в выражении (4.11) дает следующую равнодействующую опорных реакций:

$$R_1 = R \left[ 1 + \frac{2(1 - \nu)a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} \right].$$

Эта величина не совпадает с силой  $R$ , определяемой равенством (4.11), т.е. обобщенные поперечные усилия Кирхгофа не уравнивают внешнюю нагрузку. Для квадратной ( $a = b$ ) пластины различие составляет  $(1 - \nu) / 2$ , т.е. 35%. Для других задач это различие может быть еще больше [17]. Распределение безразмерного усилия  $\bar{K}_x = K_x / Q_0$  по краю  $x = a/2$  для квадратной пластины показано на рис. 4. Для выполнения условия равновесия пластины как твердого тела необходимо учесть сосредоточенные силы (3.11), приложенные в угловых точках пластины. Если обобщенные усилия Кирхгофа трактуются как реальные контурные реакции, то и эти силы (необходимые для равновесия пластины) следует считать реальными. В результате равнодействующая опорных реакций имеет вид

$$R = R_1 - \Delta R, \quad \Delta R = 8 \left[ M_{xy} \right]_{x,y} = \frac{2(1-\nu)q_0 a^2 b^2}{\pi^2 (a^2 + b^2)^2}$$

и уравнивает приложенную нагрузку.

Заметим, что точное решение задачи теории упругости для свободно опертой плиты получено в 1931 г. Б.Г. Галеркиным. Для плиты, поверхности  $z = \pm h/2$  которой свободны от касательных напряжений, а поверхность  $z = -h/2$  нагружена давлением (4.9), трансверсальные напряжения имеют вид:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-\nu) \Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right], \quad \tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-\nu) \Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right]$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2-\nu) \Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right], \quad \Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2},$$

где

$$F = (C_1 \operatorname{sh} \lambda z + C_2 \operatorname{ch} \lambda z + C_3 z \operatorname{ch} \lambda z + C_4 z \operatorname{sh} \lambda z) \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \quad \lambda = \pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

Постоянные  $C_1 - C_4$  определяются из граничных условий  $\sigma_z(-h/2) = 0$ ,  $\sigma_z(h/2) = -q$ ,  $\tau_{xz}(-h/2) = \tau_{xz}(h/2) = 0$  (или  $\tau_{yz}(h/2) = \tau_{yz}(-h/2) = 0$ ).

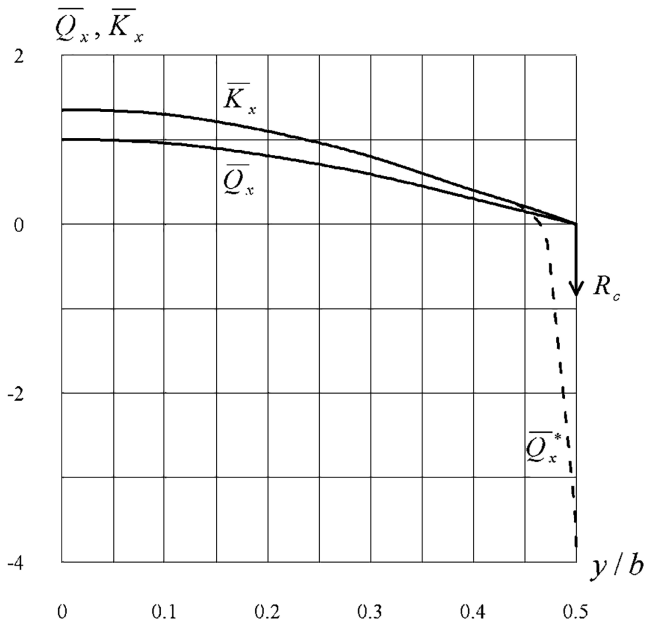


Рис. 4. Распределение поперечных усилий по краю пластины.

Не останавливаясь на определении этих постоянных, заметим, что приведенное решение, очевидно, не имеет особенностей в угловых точках пластины, которые могут быть интерпретированы как сосредоточенные силы. Таким образом, для свободно опертой пластины преобразования Кирхгофа и Томсона–Тэта явно несправедливы. Более того, в этих преобразованиях просто нет необходимости.

Рассмотрим прямоугольную пластину с нетрадиционным вариантом свободного опирания, при котором на краю пластины отсутствуют прогиб, изгибающий и крутящий моменты. В этом случае граничные условия определяются равенствами (3.8). Для края  $x = \text{const}$  граничные условия имеют вид:

$$\phi - \frac{D}{S} \Delta \phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.14)$$

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.15)$$

Рассмотрим квадратную ( $a = b$ ) пластину, нагруженную давлением (4.9) (рис. 3), и будем искать решение уравнений (2.15) и (2.19) в форме [15]:

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{qa^4}{4\pi^4 D} \cos \lambda_1 x \cos \lambda_1 y + \\ & + \sum_m \left[ C_1^m (\text{ch } \lambda_m y \cos \lambda_m x + \text{ch } \lambda_m x \cos \lambda_m y) + \right. \\ & \left. + C_2^m (y \text{ sh } \lambda_m y \cos \lambda_m x + x \text{ sh } \lambda_m x \cos \lambda_m y) \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\psi = \sum_m B_m (\text{sh } \kappa_m y \sin \lambda_m x + \text{sh } \kappa_m x \sin \lambda_m y),$$

$$\lambda_m = (2m - 1) \frac{\pi}{a}, \quad \kappa_m^2 = \lambda_m^2 + s^2.$$

Подстановка решений (4.16) в граничные условия (4.14) позволяет выразить коэффициенты  $C_1^m$  и  $C_2^m$  через  $B_m$ , а граничное условие (4.15) приводит к бесконечной системе алгебраических уравнения для коэффициентов  $B_m$ . Есть основания ожидать, что для одночленной аппроксимации давления (4.9) можно ограничиться в рядах (4.16) только одним первым членом, приняв  $m = 1$  и  $\lambda_m = \lambda_1 = \pi / a$ . В результате можно получить приближенное распределение поперечного усилия по краю  $x = a/2$  пластины в виде:

$$\bar{Q}_x^* = \frac{Q_x^*}{Q_x^0} = \cos \frac{\pi y}{a} - \frac{1 - \nu}{\pi} \left( \frac{\sqrt{3} a \text{ ch } \lambda y}{h \text{ ch } \bar{\lambda}} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi y}{a} \right),$$

где

$$Q_x^0 = \frac{q_0 a}{2\pi}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{12}{h^2}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{2} \lambda a.$$

Распределение усилия  $\bar{Q}_x^*(y/b)$  по краю  $x = a/2$  пластины с относительной толщиной  $h/a = 0.1$  показано на рис. 4 штриховой линией. В середине рассматриваемой стороны, т.е. при  $y = 0$  имеем:

$$\bar{Q}_x^*(y = 0) = 1 + (1 - \nu) / 2.$$

При  $y=0$  усилие  $Q_x^*$  совпадает не с поперечным усилием  $Q_x$ , следующим из классической теории пластин, а с обобщенным усилием Кирхгофа  $K_x$ . В угловой точке края, т.е. при  $y = a/2$ , получим:

$$\bar{Q}_x^*(y = a/2) = -(1 - \nu)\sqrt{3}a / \pi h. \quad (4.17)$$

Как следует из рис. 4, в средней части края кривая отражает распределение обобщенного поперечного усилия Кирхгофа классической теории пластин (сплошная линия  $\bar{K}_x$ ), а в окрестности угловой точки имеет место краевой эффект (штриховая кривая  $\bar{Q}_x^*$ ), изменяющий знак усилия  $Q_x^*$ . Для абсолютно тонкой пластины ( $h \rightarrow 0$ ) равенство (4.17) имеет особенность, которую можно интерпретировать как сосредоточенную силу. Таким образом, для рассматриваемых граничных условий обобщенное поперечное усилие Кирхгофа является контурной реакцией в средней части края, а сосредоточенная сила, получаемая в угловой точке края в результате преобразований Кирхгофа и Томсона—Тэта, может быть истолкована как асимптотическое приближение для бесконечно тонкой пластины. Заметим, что этот анализ справедлив только для пластины, лежащей на опорах. В работе [16] он неправомерно используется для обоснования теории Кирхгофа применительно к задаче об изгибе пластины с традиционным вариантом классического шарнирного опирания.

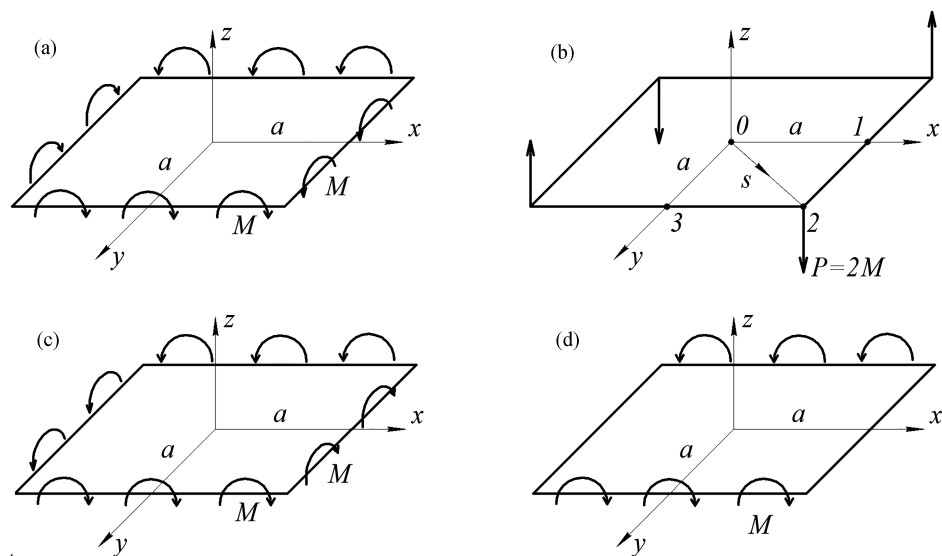


Рис. 5. Кручение пластины распределенными моментами и угловыми силами.

Асимптотическая интерпретация преобразований Кирхгофа и Томсона–Тэта обсуждается в работе П.А. Жилина [14].

Рассмотрим еще одну классическую задачу теории упругих пластин – кручение квадратной изотропной пластины моментами, распределенными по краям пластины и силами, приложенными в угловых точках (рис. 5) [18].

Задача о кручении пластины угловыми силами занимает особое место в теории пластин. Ее традиционное решение, полученное в конце XIX в. Г. Лэмбом, В. Томсоном и П. Тэтом [19] и экспериментально обоснованное А. Надаи [20], до настоящего времени используется в учебной литературе для иллюстрации преобразований Кирхгофа и Томсона–Тэта [16] и служит основой для экспериментального метода определения модуля сдвига ортотропных материалов [21].

Рассмотрим чистое кручение пластины моментами  $M$ , равномерно распределенными по ее сторонам (рис. 5, а). Прогиб пластины  $w$  описывается в рамках традиционной классической теории пластин уравнением (1.3). Задавая прогиб в виде

$$w = -\frac{Mxy}{D(1-\nu)} \quad (4.18)$$

и полагая, что давление  $p = 0$ , можно тождественно удовлетворить уравнение (1.3) и получить решение, соответствующее условиям нагружения пластины, показанной на рис. 5, а. Однако в теории Кирхгофа существует обсуждавшееся выше преобразование, приводящее крутящий момент к обобщенной поперечной силе (3.10). Для прогиба в форме (4.18) эта сила равна нулю, и отличными от нуля оказываются только угловые сосредоточенные силы (3.11). Таким образом, формально задача о кручении пластины распределенными краевыми моментами (рис. 5, а) в рамках теории Кирхгофа сводится к задаче кручения пластины угловыми сосредоточенными силами  $P = 2M_{xy}$ . Для пластины, показанной на рис. 5, б, имеем  $P = 2M$ . Прогиб такой пластины определяется равенством (4.18), если выразить  $M$  через  $P$ , то есть

$$w = \frac{Pxy}{2D(1-\nu)}. \quad (4.19)$$

Таким образом, задачи о кручении пластин, показанных на рис. 5, а и 5, б, формально являются идентичными, если справедливы преобразования Кирхгофа. Однако фактически эти задачи различаются, что вызывает сомнение в справедливости этих преобразований. Действительно, выражение (4.18) является точным решением задачи о кручении пластины моментами (рис. 5, а). При таком нагружении в пластине действуют только крутящие моменты, и пластина находится в равновесии при отсутствии поперечных сил  $Q_x$  и  $Q_y$ . Однако в задаче о кручении пластины угловыми силами (рис. 5, б) поперечные силы также оказываются равными нулю. Если выделить некоторой гладкой кривой участок пластины в окрестности ее угла, то этот участок оказывается нагруженным только угловой силой  $P$  и не находится в равновесии.

Ограниченность традиционной классической теории пластин применительно к рассматриваемой задаче о кручении пластины в еще большей степени проявляется в задаче о кручении пластины моментами, равномерно распределенными по

контур (рис. 5, с). В этом случае сила Кирхгофа оказывается равной нулю, и угловые силы, появляющиеся в результате преобразования Кирхгофа, отсутствуют. В результате задача классической теории пластин оказывается однородной и имеет только тривиальное решение. Таким образом, нагрузка, показанная на рис. 5, с, не вызывает деформации пластины, что трудно признать корректным решением.

На основании изложенного выше можно заключить, что для решения задачи о кручении пластины угловыми силами необходимо привлекать теорию пластин, описанную в разделе 2. Эта теория сводится к уравнениям (2.15) и (2.19) для потенциальных функций  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$ . Рассмотрим задачу о кручении пластины краевыми моментами, показанную на рис. 5, а. Примем решение в виде:

$$\varphi = \frac{Mxy}{D(1-\nu)}, \quad \psi = 0.$$

Тогда уравнения (2.15) и (2.19) удовлетворяются тождественно (при  $p = 0$ ), изгибающие моменты и поперечные силы (2.21) оказываются равными нулю, крутящий момент  $M_{xy} = M$ , а последнее равенство (2.20) приводит к соотношению (4.18) для прогиба пластины. Таким образом, для пластины, нагруженной моментами (рис. 5, а), полученное решение совпадает с решением, следующим из традиционной классической теорий пластин.

Получим решение задачи о кручении пластины угловыми силами (рис. 5, б). Введем безразмерные координаты  $\bar{x} = x/a$ ,  $\bar{y} = y/a$ , где  $2a$  – длина стороны пластины так, что  $-1 \leq \bar{x}, \bar{y} \leq 1$ , и представим угловые силы в виде поверхностной нагрузки, действующей на срединную плоскость пластины. Разлагая эту нагрузку в двойной тригонометрический ряд, получим:

$$p = \frac{4P}{a^2} \sum_m \sum_n \sin \lambda_m \sin \lambda_n \sin \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_n \bar{y}, \quad \lambda_m = \frac{2m-1}{2} \pi, \quad \lambda_n = \frac{2n-1}{2} \pi.$$

Подставляя  $p$  в уравнение (2.15), найдем его частное решение:

$$\varphi_p = \frac{4Pa^2}{D} \sum_m \sum_n \frac{\sin \lambda_m \sin \lambda_n}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} \sin \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_n \bar{y}. \quad (4.20)$$

Учитывая условия симметрии задачи, общие решения однородных уравнений (2.15) и (2.19) будем искать в форме:

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & \sum_m C_1^m (\sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y} + \sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}) + \\ & + \sum_m C_2^m (\bar{x} \cosh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} + \bar{y} \cosh \lambda_m \bar{y} \sin \lambda_m \bar{x}), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\psi_0 = \sum_m C_3^m (\cos \lambda_m \bar{x} \cosh \eta_m \bar{y} - \cosh \eta_m \bar{x} \cos \lambda_m \bar{y}), \quad \eta_m^2 = \lambda_m^2 + \frac{12a^2}{h^2}. \quad (4.22)$$

В результате общие решения принимают вид  $\varphi = \varphi_p + \varphi_0$  и  $\psi = \psi_0$ . Подставляя эти решения в равенства (2.20) и (2.21), получим следующие выражения для прогиба, моментов и поперечной силы:

$$\begin{aligned}
 w = \frac{4Pa^2}{D} & \left\{ \sum_m \bar{C}_1^m (\sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y} + \sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}) + \right. \\
 & + \sum_m \bar{C}_2^m [\bar{x} \cosh \lambda_m \bar{y} \sin \lambda_m \bar{x} + \bar{y} \cosh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} - \\
 & - \frac{\lambda_m h^2}{3(1-\nu)a^2} (\sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} + \sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y})] + \\
 & \left. + \sum_m \sum_n \frac{\sin \lambda_m \sin \lambda_n}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} \left[ 1 + \frac{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2) h^2}{6(1-\nu)a^2} \right] \sin \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_n \bar{y} \right\}, \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x = -4P(1-\nu) & \left\{ \sum_m \bar{C}_1^m \lambda_m^2 (\sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_n \bar{y} - \sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y}) + \right. \\
 & + \sum_m \bar{C}_2^m \lambda_m \left[ \frac{2}{1-\nu} (\sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} + \sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y}) + \right. \\
 & - (2 \sinh \lambda_m \bar{y} + \lambda_m \bar{y} \cosh \lambda_m \bar{y}) \sin \lambda_m \bar{x} + \lambda_m \bar{x} \cosh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} \left. \right] + \\
 & + \sum_m \bar{C}_3^m \lambda_m \eta_m (\sin \lambda_m \bar{x} \sinh \eta_m \bar{y} - \sinh \eta_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}) \left. \right\} + \\
 & + 4P \sum_m \sum_n \frac{\lambda_m^2 + \nu \lambda_n^2}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} \sin \lambda_m \sin \lambda_n \sin \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_n \bar{y}, \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xy} = -2P(1-\nu) & \left\{ 2 \sum_m \bar{C}_1^m \lambda_m^2 (\cos \lambda_m \bar{x} \cosh \lambda_m \bar{y} + \cosh \lambda_m \bar{x} \cos \lambda_m \bar{y}) + \right. \\
 & + 2 \sum_m \bar{C}_2^m \lambda_m [(\cosh \lambda_m \bar{y} + \lambda_m \bar{y} \sinh \lambda_m \bar{y}) \cos \lambda_m \bar{x} + \\
 & + (\cosh \lambda_m \bar{x} + \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{x}) \cos \lambda_m \bar{y}] - \\
 & - \sum_m \bar{C}_3^m (\lambda_m^2 + \eta_m^2) (\cosh \eta_m \bar{x} \cos \lambda_m \bar{y} + \cos \lambda_m \bar{x} \cosh \eta_m \bar{y}) + \\
 & \left. + 2 \sum_m \sum_n \lambda_m \lambda_n \frac{\sin \lambda_m \sin \lambda_n}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} \cos \lambda_m \bar{x} \cos \lambda_n \bar{y} \right\}, \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_x = 24 \frac{Pa}{h^2} & \left[ \sum_m \bar{C}_3^m (\eta_m \cos \lambda_m \bar{x} \sinh \eta_m \bar{y} + \lambda_m \cosh \eta_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}) \cdot \right. \\
& - \sum \bar{C}_2^m \frac{\lambda_m^2 h^2}{3(1-\nu)a^2} (\cosh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} + \cos \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y}) \Big] + \\
& + + \frac{4P}{a} \sum_m \sum_n \lambda_m \frac{\sin \lambda_m \sin \lambda_n}{\lambda_m^2 + \lambda_n^2} \cos \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_n \bar{y}.
\end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь введены безразмерные коэффициенты:

$$\bar{C}_i^m = C_i^m \frac{D}{4Pa^2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.27)$$

Постоянные  $\bar{C}_i^m$  определяются из граничных условий, которые для края  $\bar{x} = 1$  имеют вид:

$$Q_x(\bar{y}) = 0, \quad M_{xy}(\bar{y}) = 0, \quad M_x(\bar{y}) = 0. \quad (4.28)$$

Из первого и второго граничных условий (4.28) найдем:

$$\begin{aligned}
\bar{C}_3^m &= \frac{\lambda_m h^2 \cosh \lambda_m}{3(1-\nu)a^2 \cosh \eta_m} \bar{C}_2^m, \quad \bar{C}_1^m = -c_m \bar{C}_2^m, \\
c_m &= \frac{1}{\lambda_m} + \tanh \lambda_m - \frac{(\lambda_m^2 + \eta_m^2)h^2}{6\lambda_m(1-\nu)a^2}.
\end{aligned} \quad (4.29)$$

Подставляя коэффициенты (4.29) в третье граничное условие (4.28), умножая его на  $\sin \lambda_i \bar{y}$  и интегрируя по  $\bar{y}$  от 1 до 2, получим следующую связанную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных  $\bar{C}_2^m$ :

$$\begin{aligned}
& \bar{C}_2^i \lambda_i \frac{\cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i} \left[ 2 \tanh \lambda_i + \lambda_i (1-\nu) (1 - c_i \tanh \lambda_i) - \frac{\lambda_i \eta_i h^2}{3a^2} \tanh \eta_i \right] + \\
& + \sum_m \bar{C}_2^m \frac{2\lambda_m^2}{\lambda_m^2 + \lambda_i^2} \sin \lambda_m \cosh \lambda_m \left[ (1-\nu) \left( c_m \lambda_m - \lambda_m \tanh \lambda_m + \frac{\lambda_m^2 - \lambda_i^2}{\lambda_m^2 + \lambda_i^2} \right) \right. \\
& \left. + 2\nu + \frac{\eta_m^2 h^2 (\lambda_m^2 + \lambda_i^2)}{3a^2 (\eta_m^2 + \lambda_i^2)} \right] = \sum_m \frac{\lambda_m^2 + \nu \lambda_i^2}{(\lambda_m^2 + \lambda_i^2)^2}.
\end{aligned} \quad (4.30)$$

В работе А. Надаи [20] приведены результаты экспериментального исследования стальной пластины с параметрами  $a = 81.32$  мм,  $h = 14.96$  мм ( $h / 2a = 0.092$ ),  $E = 198.44$  ГПа,  $\nu = 0.3$  и  $P = 4.96$  кН. Прогиб пластины измерялся с высокой точностью (до 0.001 мм) в точках, расположенных на диагонали 0–2 пластины, показанной на рис. 5, б. Для точек диагонали



имеем  $\bar{x} = \bar{y} = \bar{s}\sqrt{2}$ , где  $\bar{s} = s/a$  и  $s$  – диагональная координата (рис. 5, б). Для численного анализа в приведенных выше разложениях принималось  $m = n = i = 10$ . Результаты представлены на рис. 6, где показаны зависимости относительного прогиба пластины  $\bar{w} = wD / (Pa^2)$  от диагональной координаты  $\bar{s}$ . Точками показаны результаты эксперимента. Сплошная линия соответствует решению (4.23), штриховая линия соответствует традиционному классическому решению (4.19).

Как следует из рис. 6, классическая теория пластин описывает прогиб с удовлетворительной точностью. Однако этот вывод справедлив только для

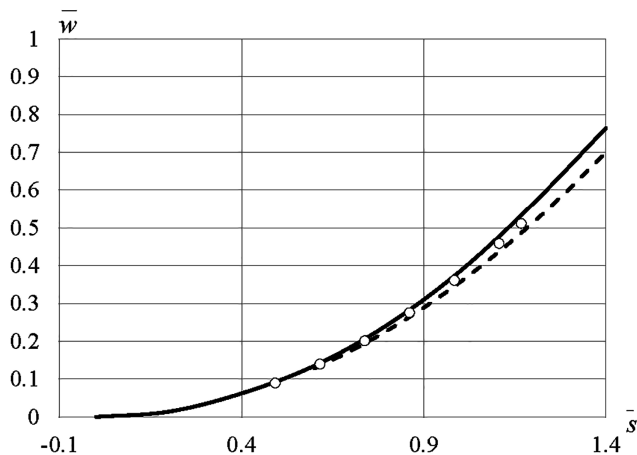


Рис. 6. Распределение прогиба вдоль диагонали квадратной пластины, соответствующее решениям (4.23) (—) и (4.19) (---) и эксперименту (о).

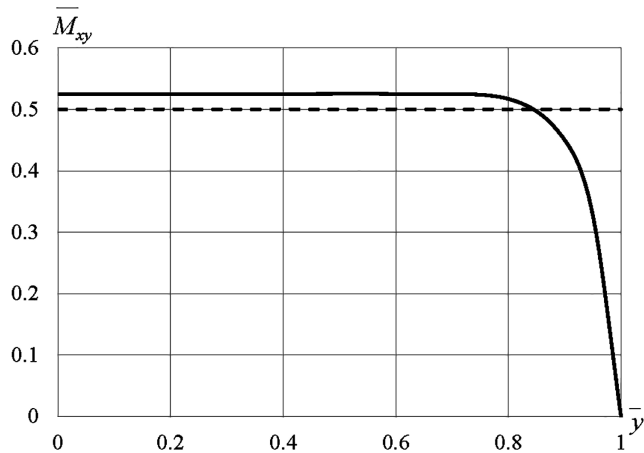


Рис. 7. Распределение относительного крутящего момента по координате  $\bar{y}$  при  $\bar{x} = 0$ , соответствующее уравнению (4.25) (—) и теории Кирхгофа (---).

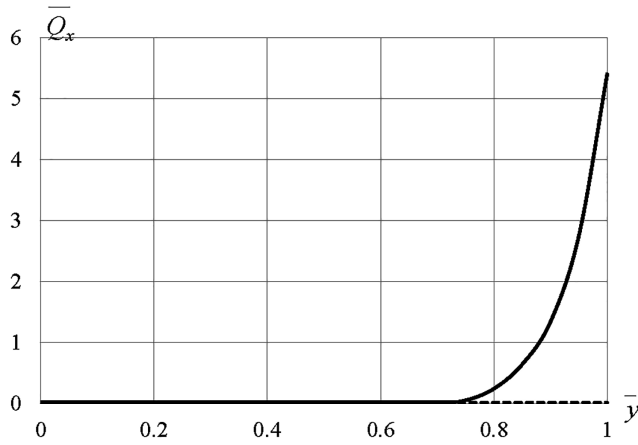


Рис. 8. Распределение относительной поперечной силы по координате  $\bar{y}$  при  $\bar{x} = 0$ , соответствующее уравнению (4.26) (—) и теории Кирхгофа (- - -).

прогиба. На рис. 7 показано распределение относительного крутящего момента  $\bar{M}_{xy} = M_{xy} / P$  в сечении  $x = 0$ .

Сплошная линия соответствует рассматриваемой теории, а штриховая — традиционной классической теории. На рис. 8 представлено распределение относительной поперечной силы  $\bar{Q}_x = Q_x a / P$  в сечении  $x = 0$ , из которого следует, что поперечная сила, действующая в сечении, ортогональном краю, отлична от нуля на краю пластины и уравнивает угловую силу. Теория Кирхгофа дает  $\bar{Q}_x = 0$  (штриховая линия на рис. 8).

Рассмотрим задачу о кручении пластины краевыми моментами, не изменяющими своего направления при обходе контура пластины (рис. 5, с). Граничные условия для такой пластины отличаются знаком крутящего момента от условий, соответствующих пластине, показанной на рис. 5, а, то есть

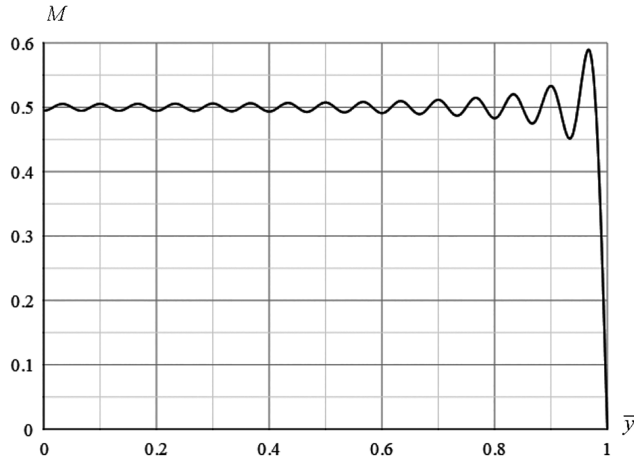
$$M_x = 0, Q_x = 0, M_{xy} = -M \text{ при } x = a, \quad (4.31)$$

$$M_y = 0, Q_y = 0, M_{xy} = M \text{ при } y = a. \quad (4.32)$$

Для того чтобы удовлетворить эти граничные условия, решения следует искать в виде:

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_m [\bar{C}_1^m (\sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y} - \sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}) + \\ + \bar{C}_2^m (\bar{y} \cosh \lambda_m \bar{y} \sin \lambda_m \bar{x} - \bar{x} \cosh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y})] \\ \psi = \sum_m \bar{C}_3^m (\cos \lambda_m \bar{x} \cosh \eta_m \bar{y} + \cosh \eta_m \bar{x} \cos \lambda_m \bar{y}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

где, как и ранее,

Рис. 9. Зависимость  $M(\bar{y})$ .

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \bar{y} = \frac{y}{a}, \lambda_m = \frac{2m-1}{2} \pi, \eta_m^2 = \lambda_m^2 + \frac{12a^2}{h^2}.$$

Для решения задачи достаточно удовлетворить граничные условия (4.31). При этом граничные условия (4.32) удовлетворяются автоматически. Представим момент  $M$ , действующий на краю  $\bar{x} = 1$ , следующим образом:

$$M = \sum_m M_m \cos \lambda_m \bar{y}, \quad M_m = \frac{2M}{\lambda_m} \sin \lambda_m. \quad (4.34)$$

Заметим, для того чтобы симметрия касательных напряжений не нарушалась в угловых точках края пластины, момент в этих точках должен обращаться в ноль. Разложение (4.34) удовлетворяет этому условию — зависимость  $M(\bar{y})$  показана на рис. 9.

Из третьего и второго граничного условия (4.31) получим выражения для постоянных  $\bar{C}_3^m$  и  $\bar{C}_1^m$ :

$$\psi = \sum_m B_m (\operatorname{sh} \kappa_m y \sin \lambda_m x + \operatorname{sh} \kappa_m x \sin \lambda_m y)$$

$$\bar{C}_1^m = -d_m \bar{C}_2^m - \frac{2Ma^2 \sin \lambda_m}{D(1-\nu)\lambda_m^3 \cosh \lambda_m} \quad d_m = \frac{1}{\lambda_m} + \tanh \lambda_m + \frac{(\lambda_m^2 + \eta_m^2)h^2}{6\lambda_m(1-\nu)a^2},$$

где  $\bar{C}_i^m = C_i^m Ma^2 / D$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Первое граничное условие (4.31) приводит к системе алгебраических уравнений для постоянных  $\bar{C}_2^m$ :

$$\begin{aligned}
& \bar{C}_2^i \lambda_i \frac{\cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i} \left[ \lambda_i (1 - \nu) (1 + d_i \tanh \lambda_i) - 2 \tanh \lambda_i + \frac{\lambda_i \eta_i h^2}{3a^2} \right] + \\
& + 2 \sum_m \lambda_m^2 \bar{C}_2^m \frac{\sin \lambda_m \cosh \lambda_m}{\lambda_m^2 + \lambda_i^2} \times \\
& \times \left[ (1 - \nu) \left( d_m \lambda_m + \lambda_m \tanh \lambda_m + \frac{2(2 - \nu)}{1 - \nu} \frac{\lambda_m^2 - \lambda_i^2}{\lambda_m^2 + \lambda_i^2} \right) + \frac{h^2 \eta_m^2 (\lambda_m^2 + \lambda_i^2)}{3a^2 (\eta_m^2 + \lambda_i^2)} \right] = \\
& = -\frac{2}{\lambda_i} \tanh \lambda_i - \sum_m \frac{4}{\lambda_m^2 + \lambda_i^2}.
\end{aligned}$$

Прогиб пластины определяется равенством:

$$\begin{aligned}
w = \frac{Ma^2}{D} \sum_m \bar{C}_2^m \left\{ \left[ d_m - \frac{\lambda_m h^2}{3(1 - \nu)a^2} \right] (\sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} - \sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y}) + \right. \\
\left. + [\bar{y} \cosh \lambda_m \bar{y} - \bar{x} \cosh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}] \right\} - \\
- \frac{2Ma^2}{D(1 - \nu)} \sum_m \frac{\sin \lambda_m}{\lambda_m^3 \cosh \lambda_m} (\sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y} - \sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}).
\end{aligned} \quad (4.35)$$

Зависимость относительного прогиба  $\bar{w} = Dw / Ma^2$  от координаты  $\bar{x} = x / a$  на краю пластины  $y = a$  (рис. 5, с) представлена на рис. 10 сплошной линией. В рамках теории Кирхгофа для такой задачи получим  $w = 0$ .

Суперпозицией решений для пластин, показанных на рис. 5, а и 5, с, можно получить решение для пластины, у которой поперечные края нагружены

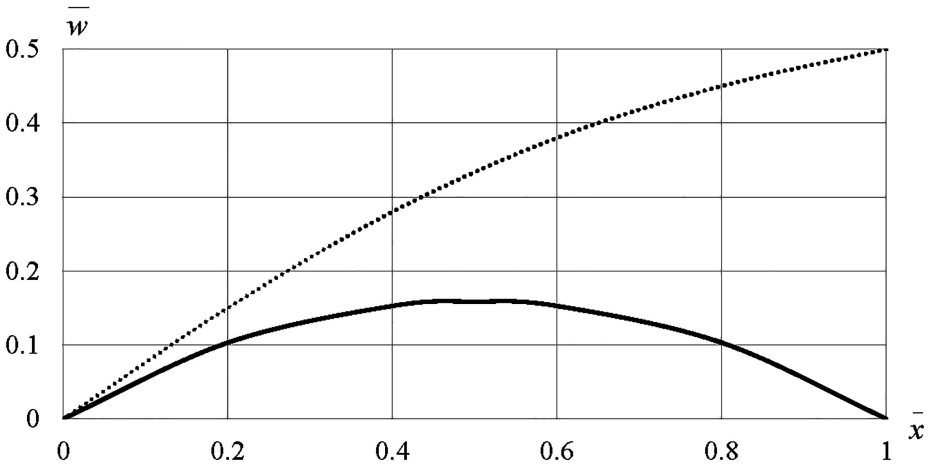


Рис. 10. Зависимость относительного прогиба от координаты  $\bar{x}$  на краю  $\bar{y} = 1$ .

распределенными крутящими моментами, а продольные края свободны (рис. 5, d). Соответствующая зависимость для прогиба показана на рис. 10 точечной линией.

В качестве последнего примера рассмотрим пластину, изгибаемую жестким штампом. В зоне контакта пластины со штампом прогиб пластины соответствует поверхности штампа. Предположим, что эта поверхность такова, что  $\Delta w = 0$ . Тогда из уравнения теории Кирхгофа (1.3) следует, что  $p = 0$ , то есть давление, изгибающее пластину, отсутствует. Этот результат не имеет физического смысла. Используем для решения этой задачи уравнения (2.14) и (2.15). Преобразуем эти уравнения. Воздействуя бигармоническим оператором на последнее уравнение (2.14), имеем:

$$\Delta \Delta w = \Delta \Delta \varphi - \frac{D}{S} \Delta \Delta \Delta \varphi.$$

Выражая  $\Delta \Delta \varphi$  через  $p$  с помощью уравнения (2.15), получим следующее уравнение для контактного давления:

$$\Delta p - \frac{S}{D} p = 0.$$

Это уравнение Гельмгольца, решение которого имеет характер краевого эффекта. Таким образом, контактное давление сосредоточено вблизи границы области контакта между пластиной и штампом.

В заключение рассмотрим вопрос о практической применимости теории Кирхгофа для расчета пластин. Выше были приведены примеры задач, для которых эта теория не позволяет получить корректного решения. Однако эти примеры специально подобраны и не отражают реальной ситуации — для большинства практически значимых задач теория Кирхгофа приводит к вполне приемлемым результатам. Для выявления таким задач вернемся к вариации функционала Лагранжа (3.2) и, используя уравнения равновесия (2.6), приведем ее к виду:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iint \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p \right) \delta w dx dy + \\ & = \left[ \int_0^b M_x \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \right]_x + \left[ \int_0^a M_y \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \right]_y - \\ & \quad - \left[ \int_0^b Q_x \delta w dy \right]_x - \left[ \int_0^a Q_y \delta w dx \right]_y + \\ & \quad + \left[ \int_0^b M_{xy} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \right]_x + \left[ \int_0^a M_{xy} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right]_y. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Дальнейшее варьирование приводит к выражению (3.9), однако мы ограничимся анализом функционала (4.36). Для внутренней области выполняется уравнение равновесия (3.3) и двойной интеграл обращается в нуль. Предположим,

что пластина оперта по контуру, на котором  $w = 0$ . Тогда обращаются в нуль интегралы, включающие поперечные силы. Поскольку на контуре пластины прогиб равен нулю, то соответственно равна нулю и производная от прогиба вдоль контура. В результате обращаются в нуль все остальные интегралы в выражении (4.16). Таким образом,  $\delta L = 0$  и теория Кирхгофа фактически требует только двух граничных условий – отсутствия прогиба на контуре пластины и отсутствия изгибающих моментов или углов поворота в направлении нормали к контуру пластины. Это соответствует традиционным условиям шарнирного опирания или жесткого закрепления краев пластины. Для таких пластин два граничных условия соответствуют четвертому порядку уравнения (1.3). Для большинства практически важных задач сформулированные выше условия удовлетворяются, и теория Кирхгофа является вполне корректной.

**5. К истории теории пластин.** Исторический обзор, начинающийся с результатов, полученных С. Пуассоном, А. Навье и Г. Кирхгофом, представлен в работах [7, 22]. Здесь обсуждаются результаты, имеющие непосредственное отношение к теории, представленной в разделе 2.

Традиционно начало проблемы ассоциируется с работой С.П. Тимошенко [23] по динамике балок, в которой к прогибу, вызванному изгибом пластины, добавлялся прогиб, вызванный сдвигом. Анализ этой и близких к ней теорий представлен в работе [24].

В дальнейшем этот подход был распространен Я.С. Уфляндом на пластины [25]. Вводимая изначально геометрически, гипотеза С.П. Тимошенко, по существу, соответствует соотношениям (2.4), согласно которым

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_x - \theta_x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_y - \theta_y.$$

То есть углы поворота касательной к деформированной срединной поверхности пластины не равны углам поворота нормали к этой поверхности (с обратным знаком) и отличаются от них на деформации сдвига, которые связаны с поперечными усилиями равенствами (2.3). В результате получаются уравнения, позволяющие учитывать влияние сдвига на прогиб пластины. Предложенная в работе С. П. Тимошенко сдвиговая модель, оказалась настолько привлекательной, что впоследствии все теории пластин с линейным распределением перемещений по толщине часто связывались с его именем. Для этого нет оснований. Уравнение теории пластин, основанное на этой модели, имеет четвертый порядок и не решает принципиальной проблемы традиционной классической теории – несоответствия числа граничных условий порядку уравнения. Теория пластин должна сводиться к системе уравнений шестого порядка.

Интересно, что Я.С. Уфляндом получена система уравнений шестого порядка, аналогичная системе (2.7)–(2.8), однако она сведена к уравнению динамики четвертого порядка, аналогичному уравнению статики (2.15), а дополнительное уравнение второго порядка, аналогичное уравнению (2.19), в теории отсутствует.

Исследование влияния инерции поворота элемента пластины и деформации сдвига на частоты свободных колебаний прямоугольных пластин представлено в работе Р.Д. Миндлина [26]. Эта работа получила столь широкое распространение, что соответствующая теория пластин в зарубежной литературе имеет название

«Теория Миндлина». Для этого нет оснований – фактически в работе [26] используется уравнение, полученное Я.С. Уфляндом [25].

Принципиально новый результат был опубликован в 1944–1945 гг. Э. Рейсснером [27, 28]. Теория построена в напряжениях. В качестве исходных приняты выражения для напряжений (2.22) и (2.23), следующие из теории Кирхгофа, то есть

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z(x, y), \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z, \quad \tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) (x, y). \quad (5.1)$$

Для вывода уравнений использовался вариационный принцип Кастильяно. С этой целью напряжения (5.1) подставлялись в выражение для потенциальной энергии деформации и учитывались уравнения равновесия классической теории пластин. В частности, в последнее равенство (5.1) подставлялось выражение

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} (x, y),$$

следующее из уравнений равновесия (2.6), и строился расширенный функционал, включающий уравнение равновесия для моментов:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p_1 = 0.$$

Это уравнение вводилось в функционал с помощью множителя Лагранжа, которым являлся прогиб пластины  $w$ . В результате минимизации функционала получены довольно громоздкие уравнения

$$D\Delta\Delta w = p_1 - \frac{(2-\nu)h^2}{10(1-\nu)} \Delta p_1. \quad (5.2)$$

$$M_{xy} - \frac{h^2}{10} \Delta M_{xy} = -(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left[ \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial y} + D(1+\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta w \right] \quad (5.3)$$

и еще два аналогичных уравнения для  $M_x$  и  $M_y$ . В результате Э. Рейсснером были установлены два фундаментальных результата. Во-первых, показано, что уравнение для прогиба (5.2) имеет четвертый порядок. Дело в том, что в теории пластин, в которой напряжения сводятся к силам и моментам, согласно равенствам (5.1), уравнение для прогиба шестого порядка существовать не может. Действительно, в случае цилиндрического изгиба пластины на ее краю действуют только два силовых фактора – поперечная сила и изгибающий момент, соответствующие уравнению четвертого порядка. Во-вторых, обнаружен краевой эффект, описываемый левой частью уравнения (5.3). В дальнейшем для этого эффекта было получено отдельное уравнение:

$$\frac{h^2}{10} \Delta \chi - \chi = 0, \quad (5.4)$$

где  $\chi$  – функция напряжений такая, что  $Q_x = \partial \chi / \partial y$ ,  $Q_y = -\partial \chi / \partial x$ .

Особенностью теории Э. Рейсснера является то, что она построена на основе теории Кирхгофа и принципа Кастильяно, не использовавшегося ранее для этой цели. Причины этого обсуждаются ниже.

Я познакомился с Э. Рейсснером в апреле 1993 г. на конференции в Калифорнии и затем состоял с ним в переписке. Меня интересовали причины, по которым он использовал нетрадиционный подход к построению теории пластин, основанный на принципе Кастильяно. Дело в том, что принятые им в качестве исходных соотношения (5.1) соответствуют полю перемещений (1.1), то есть линейному распределению тангенциальных перемещений по толщине пластины. Как показано в разделе 2, использование этих соотношений позволяет получить значительно более простые уравнения, описывающие те же эффекты, что и теория Рейсснера. Насколько я понял, соображения, которыми он руководствовался, связаны с равенствами (2.2). Он справедливо полагал, что дифференцирование перемещений по нормальной координате приведет к потере точности и нарушению статических граничных условий для касательных напряжений. В связи с этим они были приняты в форме (5.1), удовлетворяющей этим граничным условиям. Как показано в разделе (2), возможную потерю точности можно избежать, компенсировав дифференцирование по нормальной координате интегрированием с использованием равенства (2.3).

Следующей классической работой является статья Г. Генки [10], в которой впервые было использовано поле перемещений в форме (1.1). При этом возможная потеря точности, которую пытался избежать Э. Рейсснер, вообще не обсуждалась, и для трансверсальных касательных напряжений были получены равенства (2.2), не удовлетворяющие граничным условиям. В результате была получена система уравнений (2.7)–(2.9), которые сведены к следующим уравнениям:

$$D\Delta\Delta w = p - \frac{h^2}{6(1-\nu)} \Delta p, \quad (5.5)$$

$$\frac{h^2}{12} \Delta\omega - \omega = 0, \quad \omega = \frac{\partial\theta_x}{\partial y} - \frac{\partial\theta_y}{\partial x}, \quad (5.6)$$

$$D\Delta f = -p, \quad f = \frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \frac{\partial\theta_y}{\partial y}. \quad (5.7)$$

Уравнения (5.5) и (5.6) отличаются от уравнений Э. Рейсснера (5.2) и (5.4) только коэффициентами, однако порядок системы явно завышен. Статья Г. Генки завершается уравнениями (5.5)–(5.7). Граничные условия не обсуждаются. Отсутствует и анализ специфического для теории пластин уравнения (5.6). Статья [10], опубликованная в 1947 г., была представлена в ноябре 1944 г. Создается впечатление, что статья не завершена.

В 1991 г. на последнем Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике я выступил с докладом по теории пластин и предложил квалифицировать теорию, изложенную в разделе 2, как современный вариант теории пластин. Это предложение встретило неоднозначную реакцию. Под руководством С.А. Алексеева, А.Л. Гольденвейзера и В.И. Феодосьева был



проведен семинар по этой проблеме, и на страницах журнала “Механика твердого тела” была организована дискуссия. В ней приняли участие Н.А. Алфутов [17], К.Ю. Волох [29], В.М. Даревский [30], А.Л. Гольденвейзер [31, 32] и П.А. Жилин [14, 33]. В целом, за исключением некоторых деталей, критика теории Кирхгофа получила одобрение в процессе дискуссии. Принципиальным противником критики этой теории оказался А.Л. Гольденвейзер, который выступил с критикой теории Э. Рейсснера еще в 1958 г. [34]. Существо этой критики связано с уравнением Гельмгольца (5.4), которое дополняет уравнение классической теории. Это уравнение рекомендуется отбросить, во-первых, потому, что оно описывает краевой эффект, быстро затухающий при удалении от края пластины, и, во-вторых, потому, что его решение имеет асимптотически более высокий порядок по отношению к малому параметру (относительной толщине пластины) по сравнению с классическим решением. Эта критика представляется необоснованной. Во-первых, быстрое затухание решения при удалении от края не является основанием для того, чтобы его отбрасывать. Функция  $\exp(-kx)$  стремится к нулю при увеличении  $x$ , однако при  $x = 0$  она равна единице и затухающее решение взаимодействует с проникающим через граничные условия. Это иллюстрируется задачей о цилиндрическом изгибе пластины, рассмотренной в разделе 4. Именно наличие затухающего решения позволяет обратить в ноль поперечное усилие на свободном краю пластины. Во-вторых, формальное требование одинакового асимптотического порядка составляющих решения, следующее из асимптотического метода, не является обязательным для физической теории, в которой могут равноправно состоять составляющие решения с различными асимптотическими порядками, если это обуславливается физическим смыслом задачи. Уравнение Гельмгольца необходимо в теории пластин, поскольку без него нарушаются условия равновесия и не удовлетворяются граничные условия. Эта дискуссия отражена в работах [35, 36].

Статья Л. Болле [11], опубликованная в трудах Лозаннского университета в Швейцарии, долгое время оставалась мне неизвестной — я получил ее в 2001 г. когда читал лекции в университете Сорбонна во Франции. В качестве исходного Л. Болле принимает без обоснования распределение деформаций по толщине пластины, следующее из равенств (1.1), то есть, по существу, из распределения перемещений, предложенного Г. Генки,

$$\varepsilon_x = z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}(x, y), \quad \varepsilon_{xy} = z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}(x, y).$$

То обстоятельство, что получаемые из этих соотношений выражения для трансверсальных касательных напряжений не удовлетворяют статическим граничным условиям, не обсуждается. Из уравнений равновесия получена система, аналогичная уравнениям (2.7)–(2.9), которая преобразуется введением двух функций  $\varphi$  и  $\omega$  таких, что

$$\theta_x = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{h^2}{5} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right), \quad \theta_y = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{h^2}{5} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right).$$

В результате получены уравнения:

$$D\Delta\Delta\varphi = p, \quad \Delta\omega - \frac{10}{h^2}\omega = 0,$$

первое из которых совпадает с уравнением (2.15), а второе отличается от уравнения (2.19) коэффициентом и совпадает с уравнением (5.4), полученным Э. Рейсснером. Таким образом, теория изгиба пластин, сводящаяся к системе уравнений шестого порядка и сформулированная в перемещениях, была фактически построена Л. Болле. В примечании к своей статье Л. Болле отмечает, что работа была доложена в 1946 г. на конгрессе по прикладной механике в Париже, после чего ему стало известно о работах Э. Рейсснера [27, 28], где были получены аналогичные результаты.

Различие в коэффициентах уравнений, соответствующих различным теориям, связано с так называемым корректирующим коэффициентом  $k_s$ , учитывающим неравномерность распределения трансверсальных касательных напряжений по толщине пластины. В общем случае зависимость между поперечными силами и осредненными по толщине деформациями трансверсального сдвига можно принять в виде  $Q_x = k_s \gamma_x(x, y)$ . Из равенства (2.3) следует, что для теории, описанной в разделе 2,  $k_s = 1$ . В работе Э. Рейсснера при параболическом распределении касательных напряжений (5.1) получено  $k_s = 5/6$ . В работе Я.С. Уфлянда [25] принято  $k_s = 2/3$ , что является отношением среднего касательного напряжения к его максимальному значению, следующему из равенства (5.1). В статье Р. Миндлина [26] из условия согласования решения, следующего из теории пластин, с решением трехмерной задачи динамики найден коэффициент  $k_s = \pi^2/12$ . Существует множество других выражений для этого коэффициента [24]. Заметим, что конкретная величина этого коэффициента не имеет большого значения. Учет деформации сдвига в теории пластин имеет скорее принципиальное, чем прикладное значение. Он позволяет получить систему уравнений шестого порядка и рассматривать задачи, не имеющие корректного решения в рамках теории Кирхгофа. Для большинства прикладных задач теории тонких изотропных пластин, поправка, вносимая в решение учетом деформации сдвига, несущественна и конкретная величина  $k$  не имеет большого значения.

**6. Заключение.** Через 30 с лишним лет, прошедших после последнего Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, я возвращаюсь к своему предложению квалифицировать теорию пластин, описанную в разделе 2, как современную форму классической теории пластин и излагать ее в учебных курсах. Основанная на естественном обобщении гипотез Г. Кирхгофа и методе перемещений, эта теория сопоставима с теорией Г. Кирхгофа по степени сложности. Вывод уравнений теории оказывается более сложным, но формулировка краевой задачи, не требующая преобразования Кирхгофа и Томсона–Тэта, существенно упрощается. Для пластин, закрепленных по контуру, краевым эффектом можно пренебречь, и теория сводится к теории Кирхгофа. Для пластин со свободными или нагруженными краями обобщенная сила Кирхгофа образуется естественным путем, не требующим приведения крутящего момента к поперечной силе и не вызывающим появление трудно

объяснимых угловых сил. Имеется опыт изложения этой теории в учебной литературе [37].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-11-00275), выданного Институтом прикладной механики РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 270 с.
2. *Todhunter L., Pearson K.* A history of the theory of elasticity and the strength of materials. N.-Y.: Dover, 1960. Pt. 1. 762 p. Pt. 2. 546 p.
3. *Кирхгоф Г.* Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
4. *Томсон У., Тэт П.* Тракта́т по натуральной философии. М., Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика” Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. Ч. 2. 560 с.
5. *Васильев В.В.* О преобразованиях Кирхгофа и Томсона–Тэта в классической теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 5. С. 98–107.
6. *Carrera E., Elishakoff I., Petrolo M.* Who needs refined structural theories? // Compos. Struct. 2021. V. 264. P. 1–16.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113671>
7. *Васильев В.В.* К теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.
8. *Васильев В.В.* Классическая теория пластин — история и современный анализ // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 3. С. 46–58.
9. *Vasiliev V.V.* Modern conceptions of plate theory // Compos. Struct. 2000. V. 48. № 1–3. P. 39–48.  
[https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(99\)00071-9](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00071-9)
10. *Hencky H.* Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten // Ing.-Archiv. 1947. V. 16. P. 72–76. <https://doi.org/10.1007/BF00534518>
11. *Bolle L.* Contribution au problem lineaire de flexion d’une plaque elastique // Bull. Tech. Suisse Romander. 1947. V. 11. P. 32.
12. *Васильев В.В., Лурье С.А.* К проблеме построения неклассических теорий пластин // Изв. РАН. МТТ. 1990. № 2. С. 158–167.
13. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* On refined theories of beams, plates and shells // J. Compos. Mater. 1992. V. 26. № 4. P. 546–557.  
<https://doi.org/10.1177/002199839202600405>
14. *Жилин П.А.* О классической теории пластин и преобразовании Кельвина–Тэта // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 134–140.
15. *Шереметьев М.П., Пелех Б.Л., Дячина О.П.* Исследование влияния деформации сдвига на изгиб квадратной пластины сосредоточенной силой // Прикладная механика. 1968. Т. 4. Вып. 4. С. 1–7.
16. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
17. *Алфутов Н.А.* О некоторых парадоксах теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 65–72.
18. *Васильев В.В.* Кручение квадратной изотропной пластины угловыми силами и распределенными моментами // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 2. С. 20–31.
19. *Тимошенко С.П.* История науки о сопротивлении материалов. М.: URSS, 2001. 536 с.
20. *Nadai A.* Die elastischen Platten. Berlin.: Verlag von Julius Springer, 1925. 125 p.

21. Методы статических испытаний армированных пластиков. Справочное пособие под ред. Ю.М. Тарнопольского. Рига.: Зинатне, 1972. 227 с.
22. *Jamielita G.* On the winding paths of the theory of plates // *Mechanika Teoretyczna i Stosowana. J. Theor. Appl. Mech.* 1993. V. 31. № 2. P. 312–327.
23. *Timoshenko S.P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // *Phil. Mag.* 1921. V. 41. № 245. P. 744–746.  
<https://doi.org/10.1080/14786442108636264>
24. *Elishakoff I.* Handbook on Timoshenko–Ehrenfest beam and Uflyand–Mindlin plate theories. World scientific publ. Co. 2020. 769 p.
25. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 8. С. 287–300.
26. *Mindlin R.D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates // *J. Appl. Mech.* 1951. V. 18 (1). P. 31–38.  
<https://doi.org/10.1115/1.4010217>
27. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates // *J. Math. Phys.* 1944. V. 23. № 4. P. 184–191.
28. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates // *Trans. ASME.* 1945. V. 15. P. A69–A77.
29. *Волох К.Ю.* О классической теории пластин // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 156–165.
30. Даревский В.М. О статических граничных условиях в классической теории пластин и оболочек // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 129–132.
31. *Гольденвейзер А.Л.* О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 134–149.
32. *Гольденвейзер А.Л.* Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 96–108.
33. *Жилин П.А.* О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 48–64.
34. *Гольденвейзер А.Л.* О теории изгиба пластинок Райсснера // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1958. № 4. С. 99–109.
35. *Васильев В.В.* Об асимптотическом методе обоснования теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 150–155.
36. *Гольденвейзер А.Л.* Замечание о статье В.В. Васильева “Об асимптотическом методе обоснования теории пластин” // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 4. С. 150–158.
37. *Сливкер В.И.* Строительная механика: вариационные основы. Учебное пособие. М.: Изд. Ассоц. строит. вузов, 2005. 736 с.

UDC 539.3

## THEORY OF THIN ELASTIC PLATE: HISTORY AND CURRENT STATE OF THE PROBLEM

© 2024 г. V. V. Vasil'ev<sup>a, \*</sup><sup>a</sup>Central Research Institute of Special Machine Building, Hotkovo, Russia

\*e-mail: vvvas@dol.ru

**Abstract** — The article is an analytical review and is devoted to the theory of thin, isotropic elastic plates. There are basic relations of the theory based on the kinematic hypothesis confirming that the tangential displacements are distributed linearly along the thickness of the plate and its deflection does not depend on the normal coordinate. As a result, a system of equations of the sixth order with respect to two potential functions — the penetrating potential, which determines the plate deflection, and the boundary potential which makes it possible to set three boundary conditions on the plate edge and eliminate the known contradiction of Kirchhoff's plate theory was obtained. Problems that have no correct solution in the framework of Kirchhoff's theory — cylindrical bending of a plate with a free edge, bending of a rectangular plate with non-classical hinge fixing, torsion of a square plate by moments distributed along the contour, and bending of a plate by a rigid die — are considered. In conclusion, a brief historical review of the papers devoted to the theory of plate bending was presented.

**Keywords:** theory of thin elastic plates

## REFERENCES

1. Vasil'ev V.V. Mechanics of structures made of composite materials. M.: Mashinostroenie, 1988. 270 pp. [in Russian]
2. Todhunter L., Pearson K. A history of the theory of elasticity and the strength of materials. N.-Y.: Dover, 1960. Pt. 1. 762 p. Pt. 2. 546 p.
3. Kirghof G. Mechanics. M: Publ. of the USSR Academy of Sciences, 1962. 402 pp. [in Russian]
4. Thomson U., Tait P. Treatise on Natural Philosophy. M., Izhevsk: SIC "Regular and Chaotic Dynamics" Izhevsk Institute of Computer Research, 2011. Part 2. 560 p. [in Russian]
5. Vasil'ev V.V. On Kirchhoff and Thomson-Tait transformations in classical plate theory // RAS bulletin. Sol. Mech. 2012. № 5. P. 98–107. [in Russian]
6. Carrera E., Elishakoff I., Petrolo M. Who needs refined structural theories? // Compos. Struct. 2021. V. 264. P. 1–16.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113671>
7. Vasil'ev V.V. On the theory of thin plates // RAS bulletin. Sol. Mech. 1992. № 3. P. 26–47. [in Russian]
8. Vasil'ev V.V. Classical plate theory — history and modern analysis // RAS bulletin. Sol. Mech. 1998. № 3. P. 46–58. [in Russian]
9. Vasiliev V.V. Modern conceptions of plate theory // Compos. Struct. 2000. V. 48. № 1–3. P. 39–48.  
[https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(99\)00071-9](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00071-9)

10. *Hencky H.* Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten // Ing.-Archiv. 1947. V. 16. P. 72–76.  
<https://doi.org/10.1007/BF00534518>
11. *Bolle L.* Contribution au problem lineaire de flexion d'une plaque elastique // Bull. Tech. Suisse Romander. 1947. V. 11. P. 32.
12. *Vasil'ev V.V., Lur'e S.A.* On the problem of constructing non-classical theories of plates // RAS bulletin. Sol. Mech. 1990. № 2. P. 158–167. [in Russian]
13. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* On refined theories of beams, plates and shells // J. Compos. Mater. 1992. V. 26. № 4. P. 546–557.  
<https://doi.org/10.1177/002199839202600405>
14. *Zhilin P.A.* On classical plate theory and the Kelvin-Tait transformation // RAS bulletin. Sol. Mech. 1995. № 4. P. 134–140. [in Russian]
15. *Sheremet'ev M.P., Peleh B.L., Dyachina O.P.* Investigation of the influence of shear deformation on the bending of a square plate by a concentrated force // Applied Mechanics. 1968. Vol. 4. Iss. 4. P. 1–7. [in Russian]
16. *Timoshenko S.P., Voinovskii-Kriger S.* Plates and shells. M.: Fizmatgiz, 1963. 635 pp. [in Russian]
17. *Alfutov N.A.* On some paradoxes of the theory of thin plates // RAS bulletin. Sol. Mech. 1992. № 3. P. 65–72. [in Russian]
18. *Vasil'ev V.V.* Torsion of a square isotropic plate by angular forces and distributed moments // RAS bulletin. Sol. Mech. 2017. № 2. P. 20–31. [in Russian]
19. *Timoshenko S.P.* History of the strength of materials science. M.: URSS, 2001. 536 c.
20. *Nadai A.* Die elastischen Platten. Berlin.: Verlag von Julins Springer, 1925. 125 p.
21. Methods of static tests of reinforced plastics. Reference manual ed. by Y.M. Tarnopolskiy. Riga: Zinatne, 1972. 227 pp. [in Russian]
22. *Jamielita G.* On the winding paths of the theory of plates // Mechanika Teoretyczna i Stosowana. J. Theor. Appl. Mech. 1993. V. 31. № 2. P. 312–327.
23. *Timoshenko S.P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Phil. Mag. 1921. V. 41. № 245. P. 744–746.  
<https://doi.org/10.1080/14786442108636264>
24. *Elishakoff I.* Handbook on Timoshenko-Ehrenfest beam and Uflyand-Mindlin plate theories. World scientific publ. Co. 2020. 769 p.
25. *Uflyand Ya.S.* Wave propagation in transverse vibrations of rods and plates // J. App. Math. Mech. 1948. Vol. 12. Iss. 8. P. 287–300. [in Russian]
26. *Mindlin R.D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. V. 18(1). P. 31–38.  
<https://doi.org/10.1115/1.4010217>
27. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates // J. Math. Phys. 1944. V. 23. № 4. P. 184–191.
28. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates // Trans. ASME. 1945. V. 15. P. A69-A77.
29. *Voloh K.Ju.* On the classical theory of plates // J. App. Math. Mech. 1994. Vol. 58. Iss. 6. P. 156–165. [in Russian]
30. *Darevskii V.M.* On static boundary conditions in the classical theory of plates and shells // RAS bulletin. Sol. Mech. 1995. № 4. P. 129–132. [in Russian]
31. *Gol'denveizer A.L.* On approximate methods of calculation of thin elastic shells and plates // RAS bulletin. Sol. Mech. 1997. № 3. P. 134–149. [in Russian]
32. *Gol'denveizer A.L.* Algorithms for asymptotic construction of linear two-dimensional thin shell theory and Saint-Venant's principle // J. App. Math. Mech. 1994. Vol. 58. Iss. 6. P. 96–108. [in Russian]

- 
33. *Zhilin P.A.* On the Poisson and Kirchhoff plate theories in terms of modern plate theory // RAS bulletin. Sol. Mech. 1992. № 3. P. 48–64. [in Russian]
  34. *Gol'denveizer A.L.* On the bending theory of Reissner plates // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Dept. of Technical Sciences. 1958. № 4. P. 99–109. [in Russian]
  35. *Vasil'ev V.V.* On the asymptotic justification method of the theory of plates // RAS bulletin. Sol. Mech. 1997. № 3. P. 150–155. [in Russian]
  36. *Gol'denveizer A.L.* Note on the article by V.V. Vasiliev “On the asymptotic method of justification of the theory of plates” // RAS bulletin. Sol. Mech. 1997. № 4. P. 150–158. [in Russian]
  37. *Slivker V.I.* Structural mechanics: variation bases. Textbook. M: Publ. of the Association of Civil Engineering Universities, 2005. 736 p. [in Russian]

УДК 531

**НАНОИНДЕНТИРОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ КРИСТАЛЛОВ  
НАНО-SiC/Si И ТОНКИХ ПЛЕНОК ALN, AlGa<sub>N</sub>, GaN, Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>  
НА НАНО-SiC/Si**

© 2024 г. А. С. Гращенко<sup>а,\*</sup>, С. А. Кукушкин<sup>а,\*\*</sup>, А. В. Осипов<sup>а</sup>

<sup>а</sup>*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия*

<sup>\*</sup>*e-mail: asgrashchenko@bk.ru,*

<sup>\*\*</sup>*e-mail: sergey.a.kukushkin@gmail.com*

Поступила в редакцию 08.12.2023 г.

После доработки 11.12.2023 г.

Принята к публикации 12.12.2023 г.

В обзоре приводится систематизация и анализ экспериментальных данных по наноиндентированию (НИ) целого класса новых материалов – широкозонных гетероструктур AlN, GaN, AlGa<sub>N</sub> и β-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, сформированных на гибридной подложке нового типа SiC/Si, которые синтезированы методом согласованного замещения атомов. Подробно описаны деформационные и механические свойства исследованных материалов. Описывается методика проведения НИ, анализируются и достоинства, и недостатки метода НИ. Приводится описание аппаратуры, с помощью которой были выполнены эксперименты по НИ. Излагаются основные положения новой модели описания деформационных свойств наномасштабной жесткой двухслойной структуры на пористом упругом основании. Приведено описание оригинального метода визуализации остаточной (после механического взаимодействия) деформации в прозрачных и полупрозрачных материалах. Приведены экспериментально определенные значения модулей упругости и твердости наномасштабных слоев SiC на Si, сформированных методом согласованного замещения на трех основных кристаллических плоскостях Si, а именно (100), (110) и (111), и упругих модулей и характеристик (модуль упругости, твердость, прочность) поверхностных слоев полупроводниковых гетероструктур AlN/SiC/Si, AlGa<sub>N</sub>/SiC/Si, AlGa<sub>N</sub>/AlN/SiC/Si, GaN/SiC/Si и GaN/AlN/SiC/Si, выращенных на гибридных подложках SiC/Si. Приводится описание уникальных механических свойств нового материала β-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, сформированного на слоях SiC, выращенных на поверхностях Si ориентаций (100), (110) и (111).

**Ключевые слова:** наноиндентирование, тонкие пленки, гетероструктуры, широкозонные полупроводники, карбид кремния, SiC/Si, AlN, GaN, AlGa<sub>N</sub>, Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, твердость, модуль упругости

**DOI:** 10.31857/S1026351924020023, **EDN:** uwrcwy



**Введение.** Современные электронные приборы, компьютеры, средства связи, датчики, передающие и воспроизводящие аппаратуры имеют в своей основе микросхемы, созданные на основе полупроводниковых материалов. Кремний (Si) является одним из основных полупроводниковых материалов. На основе Si изготавливаются различные устройства, такие как солнечные батареи, мобильные телефоны, спутниковое ТВ, радары, видеоаппаратура и различная бытовая техника. Важным преимуществом использования кремния в электронике по сравнению с другими материалами является простота его обработки. Пластины Si из-за простоты изготовления, полировки, очистки и резки находят широкое применение в промышленности. Производство пластин из кремния для чипов и микросхем хорошо освоены во всем мире, поэтому приборы, изготовленные на основе пластин кремния недорогие и надежные. Однако кремний обладает и рядом недостатков. Например, полупроводниковые приборы на основе кремния стабильно работают только в узком диапазоне температур. Кроме того, кремний неустойчив к радиоактивным излучениям.

Поэтому в настоящее время активно идут поиски других материалов, способных хотя бы частично заменить кремний. На сегодняшний день востребованы материалы, устойчивые к радиоактивным излучениям, выдерживающие высокую механическую и ударную нагрузку и при этом сохраняющие свои электрические и оптические свойства. В связи с этим в последнее время особый интерес вызывают такие полупроводниковые материалы, как карбид кремния (SiC), нитрид алюминия (AlN), нитрид галлия (GaN), нитрид алюминия-галлия (AlGaIn), оксид галлия ( $\text{Ga}_2\text{O}_3$ ) и ряд других материалов. Эти полупроводники обладают прекрасными электрическими характеристиками и могут обеспечить работу электронных и оптоэлектронных приборов в условиях повышенных температур и радиации. Данные полупроводниковые материалы обладают высокой твердостью и высокими значениями модулей упругости. Карбид кремния, например, приближается по твердости к алмазу. Такие полупроводниковые материалы, как SiC, AlN, GaN, AlGaIn и  $\text{Ga}_2\text{O}_3$ , обладают широкой запрещенной энергетической зоной. Ширина зоны этих материалов изменяется от 2.4 до 6.1 эВ для SiC кубического политипа и AlN соответственно. Поэтому эти материалы называются широкозонными полупроводниками.

Такие материалы, как SiC, AlN, GaN, широко используются в микроэлектронике и промышленности. У каждого из этих полупроводников есть свои преимущества. Кристаллы SiC являются очень прочным материалом с модулем упругости до 420 ГПа и обладают высокой термической стабильностью, что позволяет использовать их в высокотемпературной электронике. Также SiC используется в производстве силовых транзисторов и диодов. Нитрид алюминия имеет высокую теплопроводность до  $285 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$  для монокристаллов, что делает его перспективным для создания электронных приборов, работающих на высоких частотах, светодиодов, лазеров и транзисторов. Нитрид галлия обладает высокой электронной подвижностью, что позволяет его использовать в светодиодах, лазерах и транзисторах. Он также используется в производстве силовых транзисторов. Дальнейшие исследования материалов SiC, AlN и GaN и интеграция их с другими полупроводниками могут привести к созданию новых электронных приборов с уникальными характеристиками и более высокой

эффективностью. Это может способствовать увеличению производительности и экономической эффективности в различных отраслях промышленности, таких как энергетика, автомобилестроение, аэрокосмическая промышленность и др. Однако необходимо отметить, что производство этих материалов является сложным и дорогостоящим процессом.

В настоящее время особый интерес у исследователей вызывают пленки твердых растворов AlGaN. Пленки AlGaN являются твердыми растворами соединений AlN и GaN, которые смешиваются между собой при температуре выше 105°C в произвольных пропорциях. Как правило, пленки AlGaN, имеющие переменный состав, обозначаются химической формулой вида  $Al_xGa_{1-x}N$ , где  $x$  — атомная доля Al в твердом растворе  $Al_xGa_{1-x}N$ . Ширина запрещенной зоны  $Al_xGa_{1-x}N$ , в зависимости от содержания Al, может изменяться от 3.4 эВ при  $x = 0$  до 6.2 эВ при  $x = 1$ , что позволяет создавать материалы с различными оптическими свойствами. Кроме того, изменение содержания Al может приводить к изменению электронной подвижности и теплопроводности пленок AlGaN. Пленки AlGaN используют в качестве основного материала для создания ультрафиолетовых детекторов. Детекторы на основе AlGaN могут использоваться для анализа состава газов и жидкостей, а также для мониторинга качества воздуха и воды. Кроме того, пленки AlGaN могут быть использованы в качестве материала для создания сенсоров, которые способны обнаруживать различные химические и биологические вещества, такие как бактерии, вирусы и токсичные вещества. Использование пленок AlGaN в качестве материала для создания ультрафиолетовых детекторов и сенсоров является перспективным направлением в области мониторинга и контроля качества окружающей среды. Исследования свойств пленок AlGaN позволяют расширять возможности их применения и создавать материалы с оптимальными характеристиками для конкретных задач.

В последнее время большой всплеск интереса возник к такому широкозонному полупроводнику, как  $Ga_2O_3$ . Оксид галлия обладает шириной запрещенной зоны ~4.9 эВ и сохраняет прозрачность в ультрафиолетовой области спектра до 260 нм. Кристаллы  $Ga_2O_3$  обладают высоким напряжением электрического пробоя ~8 В·см<sup>-1</sup> и легко легируются, что делает их очень перспективными для приложений микро- и оптоэлектроники [1, 2]. Важной особенностью  $Ga_2O_3$  является то, что он может находиться в нескольких кристаллических модификациях. Обзоры [3, 4] указывают пять фаз в качестве основных, а именно: стабильную  $\beta$ -фазу с моноклинной структурой  $C2/m$  и метастабильные  $\mu$ -фазу с орторомбической структурой  $Pna2_1$ ,  $\pm$ -фазу с ромбоэдрической структурой  $R\bar{3}c$  (структура корунда),  $\delta$ -фазу с объемно-центрированной кубической структурой  $la\bar{3}$  и  $\gamma$ -фазу с кубической структурой  $Fd\bar{3}m$ . Несмотря на достаточное большое количество метастабильных фаз, получить их крайне сложно, так как растет в основном лишь стабильная  $\beta$ -фаза.

На сегодняшний день уже созданы энергоэффективные светодиоды, полевые транзисторы, диоды Шоттки, УФ-фотодетекторы, газовые датчики и высоковольтные транзисторы на основе эпитаксиальных слоев. Пленки  $\beta$ - $Ga_2O_3$  выращивают методами молекулярно-пучковой эпитаксии, эпитаксией из металлоорганических соединений, методом хлорид-гидридной эпитаксии и

рядом других методов. Одним из наиболее эффективных способов роста эпитаксиальных слоев  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  является метод хлорид-гидридной эпитаксии (ХГЭ), который позволяет выращивать высококачественные пленки с высокой скоростью роста. Основной подложкой для роста эпитаксиальных слоев  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  являются сапфировые пластины, но сапфир является диэлектриком и снижает потенциал электрических приборов, сделанных на основе слоев  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  на  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . Наиболее эффективным для производства электрических приборов является сопряжение эпитаксиальных слоев  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  с кремнием Si, который является основным материалом электроники. Однако традиционные методы роста пленок  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  не позволяют интегрировать их с кремниевыми подложками из-за неустойчивости последних в условиях, при которых формируются слои  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  эпитаксиального качества. В работе [5] был предложен метод роста пленок  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  на кремниевых подложках с предварительно синтезированным на них буферным слоем карбида кремния SiC, который формировали методом химического замещения атомов на поверхности кремния. Такой подход позволяет интегрировать эпитаксиальные слои  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  с кремниевыми подложками для производства электрических приборов.

Основным препятствием реализации высоких потенциальных возможностей широкозонных полупроводников является отсутствие технологий, позволяющих производить доступные по цене и качеству эпитаксиальные слои этих полупроводников. Кроме того, важно обеспечить и возможность интеграции широкозонных полупроводников с традиционной кремневой электроникой. Это необходимо для того, чтобы приборы с широкозонными структурами было бы возможно изготавливать на кремниевых подложках, технология производства которых и технология обработки в настоящее время доведены до совершенства. В настоящее время решением этой проблемы занимаются все промышленно развитые страны и крупнейшие электронные компании мира.

В 2004 г. был открыт принципиально новый метод роста наномасштабных эпитаксиальных слоев SiC на кристаллах кремния [6–8]. Метод основан на согласованном замещении части атомов в кремнии на атомы углерода без разрушения кремниевой основы. По сути дела, впервые в мировой практике была реализована последовательная согласованная замена атомов одного сорта другими атомами внутри приповерхностного слоя исходного кристалла без разрушения его кристаллической структуры. Открытие данного метода позволяет выращивать такие широкозонные полупроводники, как AlN, GaN, AlGaIn и  $\text{Ga}_2\text{O}_3$ , и ряд твердых растворов этих соединений на кремниевой подложке, покрытой буферным слоем SiC. Это открывает беспрецедентные возможности для создания нового типа приборов (рис. 1).

В процессе синтеза как самого буферного слоя SiC, так и последующих слоев AlN, GaN, AlGaIn и  $\text{Ga}_2\text{O}_3$  образуются различного рода дефекты, а именно: микро- и нанотрещины, дефекты упаковки кристаллических решеток и т.п. Наличие подобного рода дефектов не допустимо при производстве полупроводниковых и оптоэлектронных приборов. При выращивании слоев SiC, AlN, GaN, AlGaIn и  $\text{Ga}_2\text{O}_3$  на кремнии используются химические реакции. Поэтому важным является определение условий, при которых рост пленки будет устойчивым. Основной сложностью при изготовлении наноматериалов являются

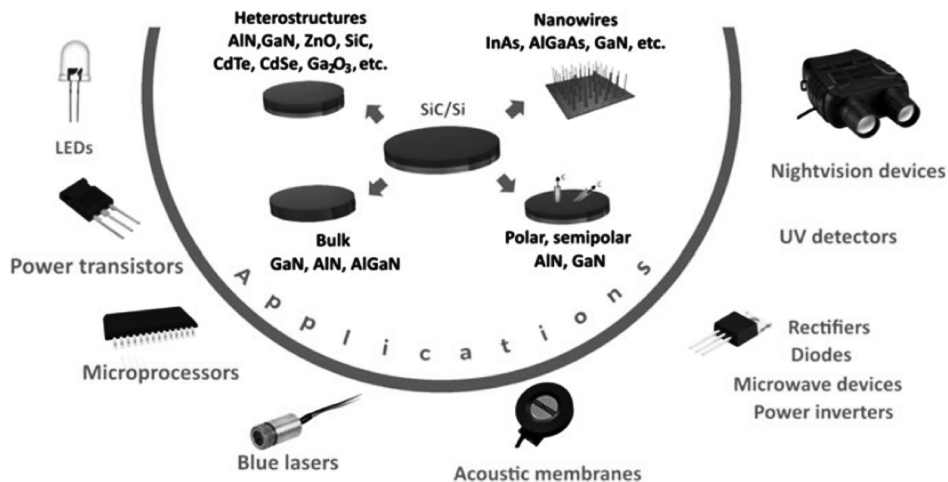


Рис. 1. Возможные области применения гибридных подложек SiC/Si, а также III-нитридных полупроводниковых гетероструктур, выращенных на их основе.

как малый размер их структурных элементов, так и сильная зависимость их полупроводниковых свойств от флуктуаций состава, возникающих в процессе выращивания. Флуктуации состава, возникающие в процессе роста гетероструктур, приводят, в свою очередь, к неоднородностям их механических свойств. В связи с этим встает острая необходимость в определении упругих механических и прочностных свойств тонких слоев SiC, AlN, GaN, AlGaIn и Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, выращенных на кремниевой подложке.

Измерение механических характеристик в тонкопленочных, многослойных системах, суммарная толщина всех слоев которых часто не превышают 100 нм, а толщины отдельных слоев могут быть и еще меньше (не более 10–20 нм), представляет сложную и до настоящего времени не решенную задачу. Экспериментальные исследования деформаций в наноматериалах (материалы характерный размер, которых не превышает 100 нм), возникающих в результате механических воздействий, являются важным вкладом в механику деформируемого твердого тела. Действительно, с уменьшением размеров кристаллитов или толщины пленки, что соответствует нашему случаю, внешняя поверхность слоя пленки и граница раздела пленка–подложка будут приводить к изменению механических свойства материала, по сравнению со свойствами этого же материала в объемной фазе. Интерес к этим исследованиям в последнее время возрастает, поскольку наноматериалы стали широко применяться в различных сферах современной жизни. Для использования наноматериалов в прикладных областях необходимо понимать отличие их свойств от свойств этих же материалов, но находящихся в объемной фазе. Так, в работах [9, 10] подробно описаны особенности релаксации напряжений, пластической деформации, зарождения и роста трещин, протекающих в наноматериалах под нагрузкой. В работе [11] авторы вывели обобщенную систему уравнений фон Кармана, описывающую изгиб нанопластины с учетом возникающих на ее лицевых поверхностях упругих напряжений. Авторы [11] теоретически показали, что упругие модули пластины, имеющей

толщину в несколько десятков нанометров, отличаются от значений упругих модулей этого же материала, но находящегося в объемной фазе. Согласно теоретическим выводам работы [11], упругие модули нанопластины могут как превышать величину упругих модулей объемного материала, из которого эта нанопластина изготовлена, так и принимать меньшие значения. В настоящий момент, однако, практически полностью отсутствуют экспериментальные данные, которые могли бы подтвердить или отвергнуть теоретические выводы ряда работ о влиянии поверхностных напряжений на механические характеристики тонких пленок. Если отдельные экспериментальные исследования упругих механических свойств пленок толщиной в несколько мкм и проводились [12, 13], то упругие механические свойства пленок толщиной 100 нм и меньше вообще не исследовались. Тем более не проводились исследования механических свойств полупроводниковых пленок SiC, AlN, GaN, AlGaIn и Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, выращенных на кремниевой подложке с буферным слоем SiC. В литературных источниках отсутствуют данные об исследованиях механических свойств этих гетероструктур. Поскольку толщина слоя SiC не превышает 100 нм, то пленки SiC, синтезированные методом согласованного замещения атомов, могут выступать как хороший модельный объект при исследованиях механических свойств широкого класса наноструктур. Поэтому экспериментальные данные, полученные в ходе экспериментальных исследований деформаций, возникающих в гибридных подложках SiC/Si при вдавливании острого алмазного наконечника, вносят существенный вклад в механику деформируемых твердых наноматериалов.

На сегодняшний день наиболее эффективной методикой измерения упругих свойств тонких пленок является метод наноиндентирования [12, 13]. Наноиндентирование положительно себя зарекомендовало как простая и надежная экспериментальная методика измерения механических свойств твердых тел. Однако даже в случае наноиндентирования пленок толщиной порядка 500 нм возникают сложности в точном определении упругих свойств материала пленки, вызванные именно наномасштабностью структуры, не говоря уже о более тонких слоях. Например, сложность измерения механических модулей пленки SiC, выращенной методом согласованного замещения атомов на подложке Si, связана с тем, что более твердая пленка SiC находится на более мягкой, да к тому же пористой подложке Si. Требуется определенное “искусство” для того, чтобы выделить из общего сигнала (сигнал от пленки и подложки) прибора сигнал, исходящий только от пленки. Малая толщина пленки и пористая структура подложки лишь усугубляют ситуацию. Следует отметить, что к анализу данных, полученных методом наноиндентирования, следует относиться с некоторой долей осторожности. Это связано с тем, что при вдавливании наноиндентора на подверженную вдавливанию поверхность кристалла, как правило, образуются “отпечатки”, у кончиков которых могут образовываться зоны с повышенной концентрацией дислокаций, нанотрещин, вакансий и нанопор, что и было обнаружено в ряде работ [14, 15]. Это может привести к неточностям в измерениях механических модулей. Поэтому необходимо иметь в виду, что для точного нахождения механических свойств наноматериалов важно использовать иные методики анализа. В частности, в работе В.И. Веттегрена и др. [16] показано,

что процесс механического воздействия можно исследовать при помощи метода фрактолюминесценции.

Структура SiC на Si (SiC/Si), получаемая методом согласованного замещения атомов, не имеет аналогов. Это абсолютно новый, ранее никем не исследованный материал. В общем случае это композиционный материал, поэтому он является наиболее сложным и в тоже время весьма интересным объектом для исследований большинства механических свойств. Экспериментальные исследования деформаций, происходящих в гибридных подложках SiC/Si, сформированных методом замещения атомов, являются существенно новым уникальным вкладом в механику деформированного состояния. Новые данные о величине механических модулей, параметров и характеристик нового материала SiC/Si, с учетом отмеченных особенностей метода наноиндентирования, являются важным вкладом в мировую справочную базу данных механических свойств материалов.

С созданием метода согласованного замещения атомов открылась возможность развить новое направление — исследование механических свойств методом наноиндентирования целых классов новых материалов и широкозонных гетероструктур на кремниевой подложке. Так, в настоящий момент для микро- и оптоэлектроники наиболее востребованными материалами являются монокристаллы и монокристаллические пленки нитрида алюминия AlN и нитрида галлия GaN. Эти полупроводники широко применяются при создании высокоэффективных светодиодов, микротранзисторов нового поколения и других продуктов микро- и оптоэлектроники. Однако, как правило, они выращиваются либо на подложках сапфира, либо на дорогостоящих монокристаллах SiC. Использование для роста пленок AlN и GaN гибридных подложек SiC/Si, синтезированных с помощью согласованного замещения атомов, позволяет осуществить интеграцию традиционной кремниевой микроэлектроники с современными полупроводниковыми материалами.

**1. Методика эксперимента.** Наноиндентирование (НИ) — эксперимент по вдавливанию геометрически аттестованного наконечника в исследуемый материал с непрерывной и одновременной регистрацией силы вдавливания и смещения индентора относительно исходной поверхности образца в процессе нагрузки и разгрузки [12, 13]. Метод НИ позволяет осуществлять вдавливание индентора в исследуемый материал на несколько нанометров. При НИ используется метод косвенного измерения проекции площади контакта индентора с образцом ( $A_c$ ), что является существенным преимуществом. На сегодняшний день метод НИ является одним из наиболее чувствительных методов измерения механических характеристик материала, определяемых из данных по вдавливанию. Метод НИ обладает также и самой высокой разрешающей способностью среди механических испытаний подобного типа. Эксперимент по НИ используется для измерения твердости ( $H$ ), модуля упругости ( $E$ ), показателя деформационного упрочнения, вязкости при разрушении (для хрупких материалов) и различных вязкоупругих свойств материалов. Все вышеперечисленные характеристики рассчитываются из анализа зависимости смещения индентора относительно исходной поверхности исследуемого образца (глубина индентирования  $h$ ), от силы вдавливания ( $F$ ). Зависимость такого типа в литературе называют кривой



индентирования, или НИ. Кривая НИ состоит из нагрузочной и разгрузочной веток, которые могут совпадать в случае обратимого вдавливания с преимущественно упругой деформацией и различаться при развитии упругопластической деформации. Обычно нагрузочную ветку можно разделить на две части: преимущественно упругая часть — начальная часть, где упругая составляющая деформации существенно преобладает, и упругопластическая часть — участок кривой нагрузки, где деформация имеет сопоставимую упругую и пластическую составляющую. Следует отметить, что наиболее информативной частью кривой НИ является начальный этап разгрузочной кривой, именно по наклону которой происходит расчет значений твердости и модуля упругости исследуемого материала. Важнейшим параметром в расчетах твердости и модуля упругости по методу НИ является проекция площади контакта индентора с исследуемым материалом  $A_c$ . Обычно она вычисляется из геометрии индентора по значениям контактной глубины погружения ( $h_c$ ), предполагая, что индентор имеет идеальную геометрическую форму. На практике форма реального индентора, особенно его наконечник, отличается от идеальной геометрической фигуры, параметры которой учитываются в расчетах. К тому же по мере использования индентора его геометрия изменяется. Кристаллическая анизотропия алмазных инденторов также может влиять на геометрическую форму. Таким образом, измерение фактической геометрии индентора очень важно для точных измерений твердости и модуля упругости по средствам метода НИ. Фактическая геометрия индентора может быть измерена напрямую с помощью атомно-силовой микроскопии (АСМ) или сканирующей электронной микроскопии СЭМ [17, 18]. Однако обычно используется косвенный метод для определения геометрии индентора. Геометрию наконечника представляют как функцию проекции площади контакта индентора с образцом от контактной глубины погружения. Эта зависимость рассчитывается из данных НИ калибровочного образца с известными параметрами твердости и модуля упругости.

В связи с развитием нанотехнологий в последнее время наблюдается рост интереса к исследованиям механических характеристик различных тонкопленочных систем и небольших объемных материалов с помощью НИ сферическими или пирамидальными инденторами. Обычно главной целью таких исследований является определение модуля упругости и твердости материала образца по экспериментальной зависимости нагрузки, приложенной к индентору, от глубины его проникновения в материал. Стандартные методики анализа данных НИ предназначены для высчитывания механических характеристик объемных тел и толстых пленочных покрытий. В этих случаях обычно анализ упругого НИ осуществляют с помощью соотношения Герца для взаимодействия жесткой сферы с упругим полупространством [19–21], а данные упругопластического НИ — методом Оливера—Фарра [22]. Производители приборов, реализующих концепцию НИ, рекомендуют для анализа данных НИ использовать именно эти две методики.

*Анализ начального сегмента НИ.* Начальный этап НИ, когда происходит деформация преимущественно упругого характера, можно представить как взаимодействие двух упругих объектов. Изучением упругой деформации, происходящей в результате вдавливания, занимался Герц в 80-х гг. XIX в. Результатом

решения задачи Герца о взаимодействии жесткой сферы радиусом  $R$  с упругим полупространством является соотношение, связывающее силу вдавливания  $F$ , смещение индентора и приведенный модуль упругости вблизи поверхности ( $E'_{\text{sur}}$ ) материала, в который вдавливают сферу:

$$F = \frac{4}{3} E'_{\text{sur}} h^{3/2} \sqrt{R}. \quad (1.1)$$

При этом  $E'_{\text{sur}}$  определяется из выражения:

$$\frac{1}{E'_{\text{sur}}} = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_s^2}{E_s}, \quad (1.2)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E_i$  и  $\nu_i$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала индентора, а  $E_s$  и  $\nu_s$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала образца. Еще одной характеристикой упруго-напряженного состояния в начальный момент вдавливания является среднее контактное давление  $p_m$ . Поскольку упругая деформация происходит в условиях НИ сферической части индентора, то  $p_m$ , согласно решению задачи Герца о взаимодействии жесткой сферы с упругим полупространством, определяется следующим образом:

$$p_m(h_c) = \frac{F}{\pi h_c (2R - h_c^2)}. \quad (1.3)$$

Между собой  $p_m$  и  $E'_{\text{sur}}$  можно связать следующим соотношением:

$$p_m(h_c) = \frac{4\sqrt{2Rh_c - h_c^2}}{3\pi R} E'_{\text{sur}}. \quad (1.4)$$

Таким образом, метод Герца позволяет эффективно измерять модуль упругости и среднее контактное давление. Метод Герца является эффективным инструментом для измерения  $p_m$  и  $E'_{\text{sur}}$  как объемных тел, так и тонких пленок. Этими выражениями можно описать начальный этап НИ, на котором пластическая деформация стремится к нулю. Однако анализ данных начального этапа НИ калибровочного образца из плавленого кварца, модуль упругости  $E$  которого равен 72 ГПа [12, 23] показал, что при использовании соотношений (1.1) и (1.4) рассчитанный параметр модуля упругости  $E$  не совпадает с его аттестованным значением. Поэтому при анализе данных НИ, представленных в настоящем обзоре, использовались модифицированные соотношения для силы вдавливания и среднего контактного давления. Эти соотношения имеют вид:

$$F(h) = \frac{4}{3} \omega h^{3/2} \sqrt{R} \left[ \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \right]^{-1}, \quad (1.5)$$

$$p_m(h_c) = \frac{4\sqrt{2h_c}}{3\pi\sqrt{R}} \xi \left[ \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \right]^{-1}. \quad (1.6)$$



Изменения формул (1.1) и (1.4) обусловлены добавлением безразмерных коэффициентов  $\omega$  и  $\xi$ , которые предназначены для компенсации геометрических искажений формы индентора от идеальной сферы. Из анализа экспериментальных данных упругого НИ калибровочного образца из плавленого кварца было определено, что для используемого индентора Берковича коэффициенты  $\omega = 1.09$  и  $\xi = 1.14$ .

*Упругопластический контакт.* Обычно в исследованиях механических характеристик твердых тел и пленочных покрытий измерения  $H$  и  $E$  осуществляются по данным НИ в условиях развития упругой и пластической деформации. Наиболее распространенным методом обработки кривых НИ в случае упругопластической деформации является метод Оливера и Фарра [22]. В 1992 г. в работе У. Оливера и Дж. Фарра был представлен новый метод определения твердости и модуля упругости по зависимости приложенной к индентору силы от глубины его проникновения в исследуемый материал. Анализ данных НИ и расчет  $H$  и  $E$  осуществляется следующей последовательностью. Во-первых, измеряется угол наклона начального этапа кривой разгрузки  $F(h)$ . Оливер и Фарр в своей работе при расчетах использовали такой параметр, как жесткость контакта ( $S$ ). В настоящее время в современных программах анализа данных НИ вместо параметра  $S$  используется такой параметр, как контактная податливость ( $C$ ), который является обратной величиной от  $S$ . Параметры жесткости контакта и контактной податливости определяются по наклону начального этапа разгрузки индентора следующим образом:

$$S = \frac{1}{C} = \operatorname{tg} \alpha = \left( \frac{\partial F}{\partial h} \right)_{h=h_{\max}}, \quad (1.7)$$

где  $h_{\max}$  — максимальная глубина погружения индентора относительно исходной поверхности исследуемого образца.

Далее величина  $C$  используется для нахождения  $h_c$ , которая вычисляется следующим образом:

$$h_c = h_{\max} - \varepsilon \cdot C \cdot F_{\max}, \quad (1.8)$$

где  $\mu$  — безразмерная эмпирическая константа, которая в случае индентора Берковича равна 0.75. По полученному значению  $h_c$  вычисляется  $A_c$ . Для индентора Берковича  $A_c$  рассчитывается следующими образом:

$$A_c = 3\sqrt{3}h_c^2 \operatorname{tg}^2 65.27^\circ \approx 24.5h_c^2. \quad (1.9)$$

Твердость в этом случае определяется по формуле:

$$H = \frac{F_{\max}}{A_c} \approx \frac{F_{\max}}{24.5h_c^2}. \quad (1.10)$$

Модуль упругости исследуемого материала образца ( $E_s$ ) вычисляется из соотношения:

$$E_s = \frac{(1 - \nu_s^2)}{2\sqrt{A_c} / C\sqrt{\pi} - (1 - \nu_i^2) / E_i}. \quad (1.11)$$

Метод Оливера и Фарра позволяет быстро и точно определить основные механические характеристики твердого тела. Этот метод достаточно универсален и успешно используется для измерения  $H$  и  $E$  как объемных тел, так и тонких пленок толщиной несколько микрометров. Однако эксперименты по НИ тонких пленок и их моделирование показывают, что метод Оливера и Фарра позволяет эффективно определять параметры  $H$  и  $E$  исследуемого слоя только на глубине до 10% от общей толщины покрытия.

*Измерение эффективной микротвердости.* Метод Оливера и Фарра позволяет определять  $H$  и  $E$  материала только на максимальной глубине погружения индентора в образец. При этом динамика деформации, которая происходит в процессе нагружения не учитывается. Обычно кривую нагрузки анализируют отдельно. Это делается для выявления резких скачков деформации, которые связаны с упругопластическим переходом, образованием трещин в материале, прохождением индентора через границу разделов пленка–подложка и другими причинами. В работах [24, 25] был предложен и экспериментально применен метод измерения универсальной твердости ( $H_u$ ) и истинной твердости ( $H_{tr}$ ) по данным кривой нагрузки. Для этого вводится понятие микротвердости ( $H_m$ ), которая измеряется в каждой точке экспериментальной зависимости  $F(h)$  по формуле:

$$H_m = \frac{F}{A} = \frac{F}{24.5h^2}, \quad (1.12)$$

где  $A$  — площадь проекции невосстановленного отпечатка.

При измерении  $H_u$  в [24, 25] предлагается вместо площади проекции невосстановленного отпечатка использовать площадь боковой поверхности внедренной части пирамиды Берковича ( $S_{lat}$ ):

$$H_u = \frac{F}{S_{lat}} = \frac{F}{26.434h^2}. \quad (1.13)$$

В работах [24, 25] предложена такая характеристика материала, как истинная твердость, которая измеряется из отношения силы вдавливания при нагружении к объему внедренной части индентора в образец:

$$H_{tr} = \frac{F}{V} = \frac{F}{10.3107h^3}. \quad (1.14)$$

Таким образом, с помощью этих методов можно быстро преобразовывать экспериментальную кривую  $F(h)$ , полученную при нагружении индентора, и представить ее в виде зависимостей  $H_m(h)$ ,  $H_u(h)$  или  $H_{tr}(h)$ .

*Наноиндентирование тонких пленок.* Одним из наиболее популярных приложений НИ в настоящее время является определение механических свойств тонких пленок. В тестах на НИ свойства пленки могут быть определены без

удаления пленки с подложки, как это делается в других типах испытаний. Метод НИ позволяет исследовать пространственное распределение свойств пленок как вдоль их поверхности, так и по глубине слоя. Такому виду испытаний поддается широкое разнообразие пленок — от ионно-имплантированных поверхностей до оптических и полимерных покрытий. Помимо испытаний на системах пленка—подложка, метод НИ применяется для пленок в виде отдельных слоев или мембран [26]. Как было отмечено ранее, в измерениях  $H$  и  $E$  тонких пленок важно исключить влияние подложки на данные НИ. В случае толстых пленок это можно сделать, уменьшив глубину погружения до значения меньше 10% от толщины пленки. В случае пленок толщиной 100 нм и меньше этот способ исключения влияния подложки становится неэффективным, поскольку влияние материала подложки на измерения твердости пленки ( $H_f$ ) и модуля упругости пленки ( $E_f$ ) неизбежно. Несмотря на это, существуют методики, позволяющие определить  $H_f$  и  $E_f$  из зависимостей эффективной твердости ( $H_{\text{eff}}$ ) и эффективного приведенного модуля упругости ( $E_{\text{eff}}$ ) от глубины погружения индентора в поверхность исследуемого образца  $h$ . Обычно величины  $H_{\text{eff}}$  и  $E_{\text{eff}}$  определяются по методу Оливера и Фарра, затем полученные зависимости описываются с помощью математических моделей.

В работе [27] Бюкле предположил, что  $H_{\text{eff}}$  тонкопленочной системы может быть выражена как:

$$H_{\text{eff}}(h) = H_{\text{sub}} + a(H_f - H_{\text{sub}}), \quad (1.15)$$

где  $H_{\text{sub}}$  — твердость материала подложки,  $a$  — эмпирический параметр.

Позже в работе [28] предлагалось описывать экспериментальную зависимость  $H_{\text{eff}}(h)$  с помощью закона смешивания площадей:

$$H_{\text{eff}}(h) = H_f \frac{A_f}{A} + H_{\text{sub}} \frac{A_{\text{sub}}}{A}, \quad (1.16)$$

где  $A_f$  и  $A_{\text{sub}}$  — площадь контакта индентора с пленкой и подложкой соответственно,  $A$  — общая площадь контакта.

В работе [29] было проведено компьютерное моделирование процесса НИ тонких пленок с помощью метода конечных элементов. Это исследование показало, что экспериментальная зависимость  $H_{\text{eff}}(h_c)$ , полученная при НИ системы мягкой пленки на твердой подложке, определяется моделью:

$$H_{\text{eff}}(h_c) = H_{\text{sub}} + (H_f - H_{\text{sub}}) \exp \left( - \frac{Y_f}{Y_{\text{sub}}} \frac{E_{\text{sub}}}{E_f} \left( \frac{h_c}{t} \right)^2 \right), \quad (1.17)$$

где  $Y$  и  $E$  — пределы текучести и модуль упругости материала, индексы sub и f относятся к материалам пленки и подложки,  $t$  — толщина пленки.

В случае твердой пленки на мягкой подложке экспериментальная зависимость  $H_{\text{eff}}(h)$  описывается следующим образом:

$$H_{\text{eff}}(h_c) = H_{\text{sub}} + (H_f - H_{\text{sub}}) \exp \left( - \frac{H_f}{H_{\text{sub}}} \frac{Y_{\text{sub}}}{Y_f} \frac{h_c}{t} \sqrt{\frac{E_{\text{sub}}}{E_f}} \right). \quad (1.18)$$

Эта модель использовалась для расчетов  $H_f$ , представленных в настоящем обзоре. В работе [30] была предложена энергетическая модель, описывающая зависимость  $H_{\text{eff}}(h_c)$  в виде:

$$H_{\text{eff}}(h_c) = H_{\text{sub}} + \frac{(H_f - H_{\text{sub}})}{1 + \frac{t}{k} \left( \frac{h_c}{t} \right)^2}, \quad (1.19)$$

где  $k$  — коэффициент, зависящий от механических характеристик материалов пленки и подложки. В работе [30] авторы рассматривают два вида деформации пленки: деформация с формированием многочисленных трещин в пленке под индентором и деформация, приводящая к пластической деформации. В случае формирования трещин коэффициент  $k$  имеет размерность длины и зависит от отношения вязкости разрушения материала пленки  $K_f$  к твердости подложки  $H_{\text{sub}}$ . В случае пластической деформации коэффициент  $k$  зависит от отношения твердости пленки  $H_f$  к твердости подложки  $H_{\text{sub}}$  и толщины пленки  $t$ .

В работе [31] была проведена модификация вышеупомянутых моделей с учетом размерных эффектов, происходящих при вдавливании. В результате [31] было предложено использовать для описания зависимости  $H_{\text{eff}}(h)$  следующую модель:

$$H_{\text{eff}}(h_c) = H_{\text{sub}} + (H_f - H_{\text{sub}}) \exp \left( -l \left( \frac{h_c}{t} \right)^m \right) \quad (1.20)$$

В этой модели предполагается, что вклад подложки в  $H_{\text{eff}}$  следует учитывать, как только индентор пересекает условную границу, определяемую некоторой долей толщины пленки. В общем случае условная граница не совпадает с фактической границей раздела между пленкой и подложкой. Параметры  $l$  и  $m$  являются безразмерными константами, которые описывают скорость изменения твердости, когда пластическая зона пересекает условную границу. Значения этих параметров определяются эмпирически, в случае пленок толщиной 1 мкм и более параметры  $m$  и  $l$  находятся в диапазоне значений 0.4–0.9 и 1.9–4.9 соответственно. Следует отметить, что вышеупомянутая условная граница зависит от механических характеристик материалов пленки и подложки.

Для нахождения  $E_f$  обычно экспериментальные зависимости  $E_{\text{eff}}(h_c)$  описывают двумя моделями, которые были разработаны с помощью эмпирического и теоретического подходов. Влияние механических свойств материала подложки на измерения модуля упругости тонкой пленки методом НИ экспериментально исследовали Doerner и Nix [32]. В этом исследовании авторы предложили эмпирическую модель, описываемую выражением (1.21), с помощью которой достаточно точно можно промоделировать зависимость  $E_{\text{eff}}(h_c)$  структуры пленка–подложка, полученную при НИ:

$$E_{\text{eff}}(h_c) = \frac{(1 - \nu_f^2)}{E_f} \left( 1 - e^{-\gamma \frac{t}{h_c}} \right) + \frac{(1 - \nu_{\text{sub}}^2)}{E_{\text{sub}}} \left( e^{-\gamma \frac{t}{h_c}} \right) + \frac{(1 - \nu_i^2)}{E_i}, \quad (1.21)$$

где  $\nu_f$  и  $\nu_{sub}$  — коэффициент Пуассона материала пленки и подложки соответственно,  $\gamma$  — эмпирическая константа.

Эта модель успешно применяется при НИ индентором Берковича и может быть использована для анализа зависимости  $E_{eff}(h_c)$ , полученной пирамидальными инденторами других типов. Gao, Chiu и Lee в своей работе [33] использовали метод модуляционных возмущений, в котором решение в замкнутой форме приводит к выражению для объединенного модуля упругости  $E_{eff}$  комбинации пленка—подложка:

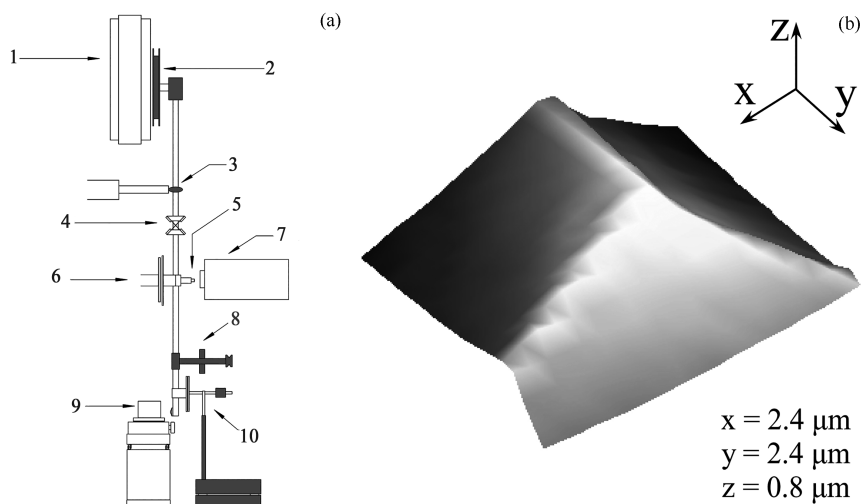
$$E_{eff}(h_c) = E_{sub} + (E_f - E_{sub}) \cdot I_0 \left( \frac{t}{h_c} \right) \quad (1.22)$$

$$I_0(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}(x) + \left[ (1 - 2\nu) \cdot x \cdot \ln \left( \frac{1 + x^2}{x^2} \right) - \frac{x}{1 + x^2} \right] \left( \frac{1}{2\pi(1 - \nu)} \right)$$

$$\nu(x) = 1 - \frac{(1 - \nu_{sub}) \cdot (1 - \nu_f)}{1 - (1 - I_1(x)) \cdot \nu_f - I_1(x) \cdot \nu_{sub}}$$

$$I_1(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{\pi} \cdot \ln \left( \frac{1 + x^2}{x^2} \right).$$

В этой формуле  $I_0$  представляет собой весовую функцию, которая равна нулю, когда толщина пленки приближается к нулю, и приближается к единице для больших значений толщины пленки. Эти уравнения имеют большое значение, поскольку они учитывают реальную природу упругих взаимодействий в пленке и в подложке, которые неразрывно связаны друг с другом. В грубом приближении в системе из двух последовательно соединенных пружин разной жесткости на зафиксированном основании деформация происходит последовательно, одновременно в обеих пружинах. Независимо от того, насколько низкое усилие приложено к индентору, всегда будет вклад от подложки. Однако на практике в поле напряжения вдавливания нагрузка на индентор поддерживается не только прямым сжатием в вертикальном направлении, но и сжимающими напряжениями, действующими в образце с его боковых поверхностей. Это делает вклад от пленки несколько больше, чем ожидаемый от простого сжатия только в вертикальном направлении. Поскольку во время испытания на вдавливание всегда наблюдается и некоторое упругое смещение подложки. Традиционное правило 10% не применимо для измерений модуля упругости тонкопленочных систем. Несмотря на этот факт, метод НИ является наиболее эффективным способом экспериментального измерения механических характеристик и деформационных свойств тонких пленок. Следует отметить, что все вышеперечисленные модели были так или иначе испытаны исключительно на однослойных пленках толщиной больше микрометра, которые лежат на однородной подложке.



**Рис. 2.** Схема устройства маятника для наноиндентирования (а) и АСМ-изображение используемого наконечника Берковича (b). 1 — магнит, 2 — катушка, 3 — ограничитель движения, 4 — мягкие пружины, 5 — индентор, 6 — пластины конденсатора, 7 — держатель образца, 8 — баллансировочный груз, 9 — импульсный механизм, 10 — демпфирующая пластина.

Экспериментальные исследования по НИ, представленные в настоящем обзоре, проводились на многофункциональном твердомере Nanotest 600 фирмы Micro Materials с помощью алмазного индентора Берковича. Схема устройства маятника, которым осуществлялись эксперименты по НИ, представлена на рис. 2, а. Используемый в исследованиях наконечник Берковича — это трехгранная равносторонняя пирамида с закруглением вершины радиусом 100 нм. Механические характеристики индентора следующие: модуль упругости 1140 ГПа, коэффициент Пуассона 0.07. Реальное изображение наконечника используемого индентора, полученное с помощью АСМ, представлено на рис. 2, b. Все эксперименты по вдавливанию осуществляли при температуре 22°C.

Структуру поверхности исследуемых пленок и гибридных подложек исследовали с помощью атомно-силовой микроскопии на приборе Easy scan фирмы Nanosurf. Толщину слоев определяли из анализа данных оптической спектральной эллипсометрии на приборе VASE J.A. Woollam.

**2. Наноиндентирование кристаллов Si и SiC.** *Механические характеристики Si и SiC полярных поверхностей граней монокристалла SiC.* Хорошо известно, что физические и другие свойства кристаллических граней двухкомпонентных кристаллов, например граней SiC вюрцитной модификации, со стороны грани (0001) и со стороны грани (000 $\bar{1}$ ) различаются. Различие в свойствах граней называется полярностью. В связи с этим возникают следующие вопросы. Различаются ли механические свойства граней SiC различной полярности? И если различаются, то значительно ли это отличие? Ответ на эти вопросы весьма важен не только с фундаментальной точки зрения, он важен и для исследования гибридных пленок SiC/Si. Связано это с тем, что обычно полярность граней определяют методом химического травления. Этот метод сложно применять к

очень тонким пленкам SiC. Химические реагенты могут проникнуть под слой SiC и начать вытравливать внутренности пор и т.п. Для решения этой проблемы в работе [34] были проведены экспериментальные исследования деформаций, происходящих при НИ кристалла 4H-SiC со стороны C- и Si-полярных граней.

Исследование механических характеристик объемного SiC осуществляли при помощи НИ монокристаллической пластины 4H-политипа SiC. Пластина была вырезана из монокристалла 4H-SiC, выращенного модифицированным методом Лели. Рост монокристалла осуществлялся на затравках SiC, ориентированных по направлению к оси роста C-гранью. Условия роста подбирались таким образом, чтобы формирование кристалла осуществлялось одновременно в базисной плоскости 4H-политипа [35]. Во время роста поддерживался постоянный уровень легирования азотом  $5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , а температурный градиент по площади пластины составлял 10–20 К/см. Для однозначного определения полярности поверхности на скругление пластины наносились два среза разного размера. Полярность граней определяли с помощью химического травления. В результате травления на Si-границы декорируются структурные дефекты и осуществляется селективное травление, а на C-границы происходит изотропное травление [35]. Рельеф травления наблюдался с помощью оптического микроскопа. Далее обе поверхности подвергались двухстадийной четырехчасовой механической полировке. Полировали тканевым притиром из искусственного волокна двумя алмазными пастами с зернами диаметром 3 и 1 мкм. Исследование поверхностей пластины SiC с помощью спектральной эллипсометрии в диапазоне энергий 0.7–6.5 эВ показывает, что шероховатость поверхности C- и Si-полярной грани равна 8 и 5 нм соответственно.

В работе [36] авторы исследовали изменения твердости кристаллов SiC на C- и Si-полярных гранях при различных температурах. Однако авторы этой работы исследовали механические свойства SiC методом индентирования, а не методом НИ. Индентор они погружали на глубину порядка нескольких микронов. Авторам [36] не удалось обнаружить существенных различий в механических свойствах C- и Si-полярных граней. И это понятно, поскольку только метод НИ способен выявить различие в свойствах очень тонких приповерхностных областей граней. Только при температуре 1200°C авторам [36] удалось обнаружить различия в механических свойствах граней C и Si. Оказалось, что твердость кристалла SiC со стороны C-границы выше примерно на 15% твердости грани со стороны Si. Авторы пытались объяснить это различием в природе ядер дислокаций, формирующихся в условиях повышенных температур при индентировании Si- и C-граней на микрометровом масштабе. Однако различия в механических характеристиках, зафиксированных при индентировании в микрометровом масштабе, должны проявляться и в нанометровом масштабе, особенно при глубине проникновения, стремящейся к нулю, потому что энергия Si-границы кристалла SiC значительно ниже, чем энергия C-границы [37]. Как известно [38], в процессе деформации формируется новая поверхность [38]. Отсюда следует, что механические свойства твердого тела будут связаны с энергией его поверхности. Таким образом, очевидно, что при НИ приповерхностной области кристалла SiC характер деформации будет зависеть от поверхностной энергии индентируемой грани.



Измерение твердости и модуля упругости кристаллической пластины SiC осуществляли методом НИ при максимальной силе вдавливания 200 мН, анализ экспериментальных данных проводили с помощью метода Оливера и Фарра [22]. Данные НИ со стороны Si- и С-полярных граней монокристаллической подложки SiC оказались идентичными. Погрешность в определении экспериментальных данных была менее 5%. Анализ полученных кривых НИ показывает, что твердость и модуль упругости исследуемого SiC на глубине индентирования 750 нм равны  $26 \pm 1$  ГПа и  $320 \pm 12$  ГПа соответственно. Влияние поверхностной энергии на механические свойства кристалла исследовали при помощи анализа начального этапа НИ, то есть в области, в которой происходит преимущественно упругая деформация. Индентирование проводили при максимальной нагрузке в 1.5 мН. Типичный вид кривых нагружения представлен на рис. 3, а в виде зависимости приложенной силы  $F$  в мН от глубины индентирования  $h$  в нм. На рис. 3, а отчетливо проявляется различие между данными НИ кристалла SiC со стороны Si-границ (черные квадратные точки) и С-границ (белые круглые точки). Наибольшее различие в характере НИ наблюдалось в начальный момент НИ, тогда, когда индентор достигал глубины проникновения порядка 25 нм. Это различие можно определить по углу наклона экспериментальных зависимостей  $F(h)$ . Исследования показали, что при НИ кристалла SiC на малых глубинах погружения индентора модуль упругости Si-границ в 2.3 раза меньше, чем у С-границ. Различие в упругих свойствах граней Si- и С-полярности с гранями пластины 4H-SiC вблизи их поверхности отчетливо проявляется в зависимости среднего контактного давления  $p_m$  в ГПа от контактной глубины погружения  $h_c$  в нм (рис. 3, б). При измерении  $p_m$  граней Si и С пластины SiC учитывалась реальная геометрия индентора, а измерения были осуществлены на глубинах погружения до 30 нм. Из экспериментальной зависимости видно, как со стороны Si-границ (черные квадратные точки) и С-границ (белые круглые точки) с увеличением глубины погружения индентора в кристалл его  $p_m$  растет. Причем для Si-границ увеличение  $p_m$  происходит значительно медленнее, чем увеличение  $p_m$  С-границ. На глубине индентирования до 30 нм в среднем твердость Si-границ в 2 раза меньше, чем у С-границ. Анализ зависимостей  $p_m(h_c)$  и сопоставление

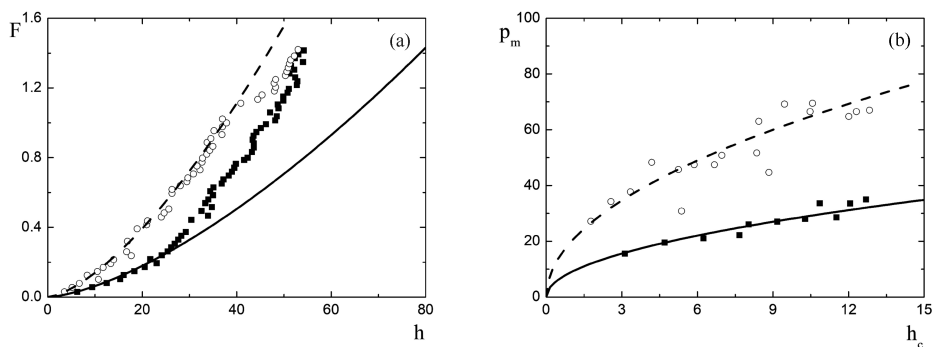


Рис. 3. Зависимости силы вдавливания от глубины погружения (а) и зависимости среднего контактного давления от контактной глубины погружения (б) кристалла SiC 4H-SiC со стороны Si- и С-полярных граней.



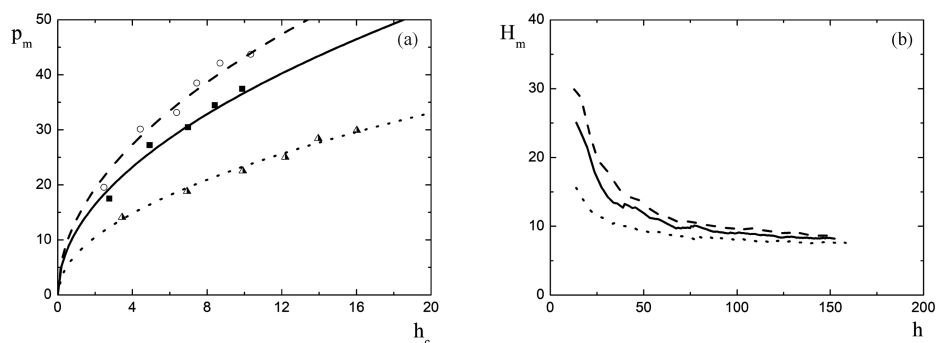
их с функцией (1.6) с использованием метода наименьших квадратов показывает, что наилучшее сопоставление экспериментальных данных наблюдается при  $E'_{\text{sur}}$  170 ГПа (сплошная линия) и 400 ГПа (пунктирная линия) для Si- и C-граней соответственно.

Измерения микротвердости при НИ Si- и C-полярных граней кристалла SiC приводят к аналогичным результатам. Зависимости  $H_m(h)$  для граней Si и C подобны, а именно: они, зависимости, убывают с ростом глубины погружения индентора. Однако значения  $H_m$  у Si-границы значительно меньше, чем у C-границы. При глубине погружения до 20 нм  $H_m$  C-границы в 2 раза больше, чем у Si-границы. Подобное поведение механических и деформационных характеристик кристалла SiC связано с тем фактом, что энергия поверхности Si-границы ниже, чем у C-границы, поэтому процесс образования новой поверхности у Si-границы протекает легче.

Таким образом, установлено, что энергия поверхности Si- и C-полярных граней существенно влияет на механические характеристики кристалла SiC только на начальном этапе упругой деформации вблизи поверхности и практически не оказывает никакого влияния на изотермические измерения твердости и модуля упругости при глубинах погружения, превышающих 60 нм. Показано, что энергия поверхности Si-границы кристалла SiC примерно в 1.5 раза меньше, чем у C-границы, что согласуется с данными моделирования методом функционала плотности [39, 40].

*НИ монокристаллических подложек Si.* Для получения информации о механических свойствах гибридных структур SiC/Si необходимо определить свойства не только “чистого” кристалла SiC, но и “чистой” подложки Si, на которой будет сформирована пленка SiC. Для этого проводились эксперименты по НИ на монокристаллических пластинах Si с кристаллографическими направлениями (001), (011) и (111) без отклонения от базовой плоскости. Именно на таких подложках и синтезировали слой SiC. Для измерений использовались пластины Si, легированного фосфором (n-тип Si) марки КЭФ, и пластины Si, легированного бором (p-тип Si) марки КДБ, выращенные методом Чохральского [41]. Подложка Si марки КЭФ имела кристаллическую ориентацию (001), а пластины Si КДБ имели кристаллическую ориентацию (011) и (111). Исследуемые плоскости подложек Si были предварительно отполированы до среднеквадратичной шероховатости поверхности 0.2–0.4 нм. Измерения проводились в стандартном и циклическом режимах вдавливания. В случае стандартного НИ нагружение осуществляли до максимальной силы 5 мН. Циклическое НИ проводили в 4 цикла, нагружая индентор до максимальных нагрузок 5, 10, 15 и 20 мН. Скорость нагрузки и разгрузки была 1 мН/сек. Анализ данных НИ осуществляли с помощью метода Оливера и Фарра [22].

Из анализа данных НИ можно сделать вывод, что в случае вдавливания с максимальной силой 5 мН подложка Si с ориентацией (111) является самой мягкой ( $11.8 \pm 0.6$  ГПа) и упругой ( $164 \pm 5$  ГПа), а кристалл Si с ориентацией (011) наиболее твердым ( $13.7 \pm 0.6$  ГПа) и жестким ( $185 \pm 4$  ГПа). В случае пластины Si с ориентацией (001) твердость и модуль упругости равны  $13.1 \pm 0.8$  ГПа и  $175 \pm 7$  ГПа соответственно. Данные НИ в циклическом режиме показали, что распределение пластин Si по твердости и модулю упругости сохраняются при



**Рис. 4.** Зависимости среднего контактного давления от контактной глубины погружения (а) и зависимости микротвердости от глубины погружения (б) кристаллов Si с ориентациями (001) — сплошная линия и черные квадратные точки, (011) — пунктирная линия и белые круглые точки, (111) — прерывистая линия и черно-белые треугольные точки.

увеличении максимально силы вдавливания до 20 мН, однако в этом случае значения твердости и модуля упругости образцов отличаются несущественно. Средние значения твердости и модуля упругости кристаллов Si по данным циклического НИ лежат в диапазонах 11.2–12 ГПа и 153–161 ГПа соответственно.

Анализ начального этапа НИ пластин Si показал, что экспериментальную зависимость  $F(h)$  можно описать модернизированным соотношением Герца для сферического наконечника при значениях  $E'_{\text{sur}}$ , равных  $170 \pm 10$ ,  $180 \pm 10$  и  $110 \pm 10$  ГПа для подложек Si с ориентациями (001), (011) и (111) соответственно. Описание экспериментальных зависимостей  $p_m$  в ГПа от  $h_c$  в нм, полученных при НИ пластин Si и представленных на рис. 4, а. Сопоставление происходит при тех же параметрах модулях упругости, что и при анализе зависимости  $F(h)$ .

Измерения  $H_m$  в ГПа кристаллов Si на глубинах погружения до 160 нм (рис. 4, б) в целом дают похожий результат: подложка с ориентацией (111) является наименее твердой, а пластины Si с ориентацией (001) и (011) близки по своим деформационным характеристикам.

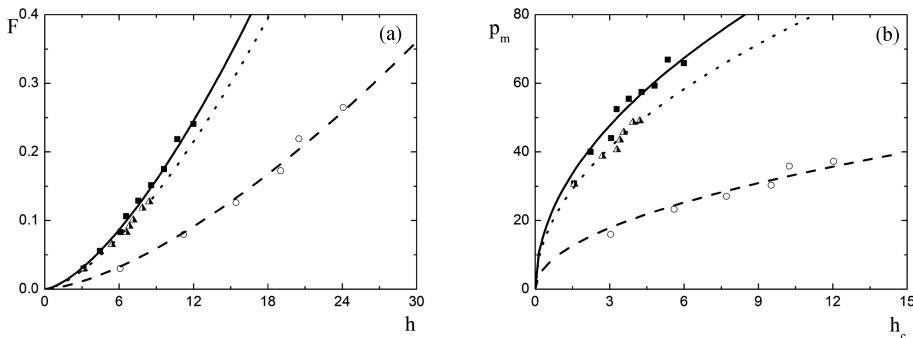
Следует отметить, что при НИ в циклическом режиме для всех образцов при разгрузке индентора были зафиксированы скачки деформации, связанные с фазовыми превращениями в напряженной области Si под индентором [42, 43].

**3. Наноиндентирование пленок нано-SiC на Si.** В связи с уменьшением размеров электрооптических компонентов современной электроники все чаще объектами производства и исследований становятся наномасштабные системы. Существует много экспериментальных методик, с помощью которых проводятся исследования физических свойств такого рода объектов. Наиболее распространены оптические методики определения структурных характеристик и других физических свойств наномасштабных систем. Но ряд характеристик твердых тел невозможно определить средствами оптики. К таким характеристикам относятся физико-механические свойства. Наиболее чувствительным и соответственно максимально эффективным методом исследования физико-механических характеристик и деформационных свойств твердых тел является метод НИ [13, 44, 45]. В отношении тонких пленок принято считать, что

глубина погружения индентора не должна превышать 10% от толщины пленки [13, 46]. Поскольку обычно глубина погружения индентора в образец составляет 100 нм и более, то методом НИ, как правило, исследуются пленки толщиной 1–10 мкм или даже толще. По этой причине методики анализа механических свойств тонких пленок ориентированы на характерные толщины в несколько микрон. Однако непрерывное уменьшение характерных размеров исследуемых объектов приводит к необходимости изучать деформационные и прочностные свойства наномасштабных пленок толщиной несколько сотен или даже десятков нанометров. Современные нанотестеры обладают высокой чувствительностью и разрешающей способностью, что позволяет измерять деформацию и механические свойства на глубине погружения 10–30 нм с погрешностью 10% и менее. Это открывает новые возможности для качественного анализа данных НИ в нанометровом масштабе и измерения физико-механических свойств пленок толщиной от 50 нм. Однако экспериментальных исследований, посвященных НИ пленок толщиной 50–100 нм, практически нет. Например, ранее не проводились измерения механических характеристик методом НИ систем, таких как наномасштабная алмазоподобная пленка на кристаллическом основании с порами. Это приводит к отсутствию методик анализа данных НИ таких систем. Гибридные кристаллические структуры нано-SiC/Si, синтезированные методом замещения атомов, могут быть использованы в качестве материала для разработки методики НИ твердой наномасштабной пленки на мягкой подложке.

На данный момент были проведены эксперименты по НИ гибридных подложек SiC/Si, синтезированных методом замещения атомов на кристаллах Si трех основных ориентаций (001), (011) и (111). Синтез этих образцов осуществляли в атмосфере газовой смеси CO и SiH<sub>4</sub> в течении 10–20 мин при температуре 1250–1300°C. Шероховатость поверхности исследуемых образцов по данным АСМ составляла 11, 17 и 20 нм для слоев нано-SiC на Si с ориентацией (001), (011) и (111) соответственно. Данные АСМ показывают, что морфология поверхности нано-SiC мозаичная. Шероховатость поверхности элементов структуры нано-SiC для всех образцов равна  $3 \pm 1$  нм. По данным оптической спектральной эллипсометрии пленки нано-SiC являются двухслойными, а общая толщина слоя SiC равна 80, 70 и 120 нм в случае образцов на Si с ориентацией (001), (011) и (111) соответственно. Однако по данным НИ видно, что деформационные и механические свойства гибридной подложки SiC/Si(011) существенно отличаются от остальных. Анализ начального этапа вдавливания показал, что экспериментальные зависимости НИ описываются модифицированными соотношениями Герца (1.5) и (1.6) с параметрами модуля упругости вблизи поверхности, равными  $400 \pm 40$ ,  $160 \pm 10$  и  $350 \pm 30$  ГПа для структур нано-SiC на Si с ориентацией (001), (011) и (111) соответственно. Экспериментальные зависимости силы вдавливания  $F$  в мН от смещения индентора относительно исходной поверхности образца  $h$  в нм на начальном этапе вдавливания в виде точек и соответствующие этим данным соотношения (1.5) в виде линий представлены на рис. 5, а. Зависимости среднего контактного давления в ГПа от контактной глубины погружения в нм, полученные для структур SiC/Si, представлены на рис. 5, б.

Полученные данные однозначно свидетельствуют о том, что структуры нано-SiC на Si с ориентацией (001) и (111) вблизи поверхности существенно



**Рис. 5.** Зависимости силы вдавливания от глубины погружения (а) и зависимости среднего контактного давления от контактной глубины погружения (б) нано-SiC на Si с ориентациями (001) — сплошная линия и черные квадратные точки, (011) — пунктирная линия и белые круглые точки, (111) — прерывистая линия и черно-белые треугольные точки.

жестче, чем образец SiC/Si(011). Поэтому эксперименты по НИ структуры SiC/Si(011) будут проанализированы и рассмотрены отдельно.

*Наноиндентирование нано-SiC на Si с ориентацией (001) и (111).* Деформационные свойства гибридных подложек SiC/Si целесообразнее всего исследовать с помощью анализа данных НИ, которые регистрируются в результате нагружения индентора. Нагрузочная часть является наиболее чувствительным элементом кривой НИ, поскольку именно в результате нагрузки происходит регистрация деформационных особенностей, таких как упругопластический переход, образование трещин, регистрация границы разделов и другие процессы, сопровождающиеся скачками деформации и изменениями наклона экспериментальной зависимости  $F(h)$ . Для анализа деформационных характеристик наиболее удобно представить нагрузочную кривую  $F(h)$  в виде зависимости  $H_m(h)$ . Для анализа зависимости  $H_m(h)$  наномасштабных пленок SiC на Si в работе [47] была использована модернизированная модель (1.18):

$$H_m(h) = H_{\text{sub}} + (H_f - H_{\text{sub}}) \exp \left[ - \left( \frac{H_f}{H_{\text{sub}}} \frac{h}{\alpha t} \right)^n \right], \quad (3.1)$$

где  $n$  и  $\alpha = (Y_f / Y_{\text{sub}}) \sqrt{E_f / E_{\text{sub}}}$  — безразмерные константы,  $Y_f$  и  $Y_{\text{sub}}$  — пределы текучести материала пленки и подложки,  $E_f$  и  $E_{\text{sub}}$  — модули упругости пленки и подложки соответственно,  $t$  — толщина пленки. Модификация по сравнению с [29] заключается в том, что член в круглых скобках содержит подгоночный параметр  $n$ , учитывающий жесткость подложки. Тогда как в [29] для мягкой подложки эксперименту удовлетворяла модель при  $n = 1$ . Это связано с тем, что при погружении индентора зона пластичного деформирования вначале вовлекает всю толщину пленки и только затем воздействует на подложку. Кроме модели (3.1) для определения величин  $H_f$ ,  $H_{\text{sub}}$  и  $t$  использовались и другие функции, предложенные в работах [28, 48–51]. Однако эти модели не подошли для описания  $H_m(h)$  наномасштабных твердых и жестких пленок,

поскольку определенное в рамках этих подходов среднеквадратичное отклонение было слишком большим. Сравнивая измеренные зависимости  $H_m$  с предложенной аппроксимационной зависимостью (3.1), можно определить  $H_f$ ,  $H_{sub}$  и  $t$ . Для этого вначале измерялось отношение модулей упругости пленки и подложки. Значения  $E_f$  и  $E_{sub}$  определяли по данным НИ с максимальным смещением индентора относительно исходной поверхности образца 20 и 250 нм соответственно. Измерения для образца SiC/Si(001) дают  $\sqrt{E_f / E_{sub}} \approx 1.4$ , а для образца SiC/Si(111)  $\sqrt{E_f / E_{sub}} \approx 1.5$ , что довольно близко к табличному значению  $\sqrt{E_f / E_{sub}} \approx 1.65$  [48]. Отношение  $Y_f / Y_{sub} \approx 2.5$  определялось из справочных данных [48], что дает  $\alpha = 3.5 - 4.1$ . Константы  $H_f$ ,  $H_{sub}$ ,  $t$  и  $n$ , входящие в модель (3.1), определялись путем сопоставления модели (3.1) с экспериментальной зависимостью микротвердости  $H_m$  в ГПа от смещения индентора относительно исходной поверхности образца  $h$  в нм, которые представлены на рис. 6. Аппроксимацию осуществляли с помощью метода наименьших квадратов. Максимальное совмещение экспериментальных зависимостей с моделью (3.1) с параметром  $n = 2$  происходит в случае структуры SiC/Si(001) при  $\alpha = 3.5$  дает:  $H_f = 40 \pm 5$  ГПа,  $H_{sub} = 8 \pm 1$  ГПа,  $t = 75 \pm 10$  нм, а в случае SiC/Si(111) при  $\alpha = 3.8$  дает:  $H_f = 42 \pm 2$  ГПа,  $H_{sub} = 42 \pm 2$  ГПа,  $t = 75 \pm 10$  нм. Теоретические кривые модели (3.1) при этих значениях констант приведены на рис. 6 в виде сплошных линий. Следует подчеркнуть, что использование степени как параметра минимизации привело к резкому уменьшению среднеквадратичного отклонения теоретической зависимости от экспериментальной. Аппроксимация методом наименьших квадратов экспериментальных зависимостей моделью (1.19) в случае гибридной структуры SiC/Si(001) при  $t = 80$  нм дает:  $H_f = 42 \pm 3$  ГПа,  $H_{sub} = 7 \pm 1$  ГПа,  $k = 9 \pm 1$  нм, а в случае системы SiC на Si(111) при  $t = 100$  нм дает:  $H_f = 45 \pm 4$  ГПа,  $H_{sub} = 1.5 \pm 0.5$  ГПа,  $k = 5 \pm 1$  нм. Эти результаты однозначно свидетельствуют о необходимости варьирования толщины переходного слоя между  $H_f$  и  $H_{sub}$ , поскольку заранее эта величина точно не известна. Толщину пленки, измеренную методом НИ, мы сравнивали с толщиной, измеренной при помощи метода эллипсометрии, наблюдается корреляция между результатами. Из рис. 6, b видно, что основное различие между теоретической функцией (3.1) и экспериментальными зависимостями состоит в том, что в области погружения индентора 50–80 нм экспериментальная зависимость более плавная. Именно поэтому экспериментальные значения микротвердости имеют большую величину, чем если бы они были вычислены по теоретической зависимости (3.1). Это различие может быть объяснено тем, что на самом деле пленки SiC двухслойные, а модель (3.1) описывает только однослойные пленки. Таким образом, было показано, что даже в случае однослойной однородной пленки толщиной порядка 100 нм возникают большие сложности в определении деформационных свойств материала пленки, вызванные именно наномасштабностью структуры. Однако в реальной ситуации однородных пленок толщиной порядка 100 нм и менее практически не существует, так как на границе раздела пленка–подложка образуются различные буферные или переходные слои, толщина которых, как

правило, составляет десятки нанометров [52]. Такие слои существенно понижают энергию границы раздела пленка–подложка, которая может иметь как химическую, так и механическую природу. Поскольку в случае наномасштабных покрытий толщина переходных слоев становится сопоставимой с толщиной пленки, наномасштабные пленки уже нельзя считать однородными по толщине. В такой ситуации приходится считать пленку состоящей из нескольких однородных слоев. Подобный подход используется, например, в оптических исследованиях [52], очень чувствительных к однородности слоев. Однако при исследовании деформационных характеристик наноструктур многослойные подходы практически не применяются, что вызвано отсутствием эффективных моделей описания упругих свойств многослойных наноструктур.

В работе [53] была представлена методика, позволяющая распространить модель описания  $H_m(h)$  системы пленка–подложка для однослойного случая на многослойную систему, в частности на случай двухслойной наномасштабной пленки на подложке. Предлагается модифицировать модель (3.1) для случая многослойной структуры. В частности, для двухслойной структуры, лежащей на подложке, для этого предлагается рассматривать нижний слой вместе с подложкой как подложку для верхнего слоя, т.е. промежуточную или буферную подложку. Иными словами, предполагается, что слои являются независимыми друг от друга и имеют различные параметры  $H$ ,  $t$ ,  $\alpha$  и  $n$ . В рамках этого допущения для двухслойной модели получим:

$$H_m(h) = H_b + (H_1 - H_b) \exp \left[ - \left( \frac{H_1}{H_2} \frac{h}{\alpha_1 t_1} \right)^{n_1} \right], \quad (3.2)$$

$$H_b = H_{\text{sub}} + (H_2 - H_{\text{sub}}) \exp \left[ - \left( \frac{H_2}{H_s} \frac{h}{\alpha_2 t_2} \right)^{n_2} \right], \quad (3.3)$$

где  $H_b$  – микротвердость промежуточной буферной подложки,  $H_1$  – микротвердость верхнего слоя толщиной  $t_1$ ,  $H_2$  – микротвердость нижнего слоя толщиной  $t_2$ . Подстановка (3.2) в (3.3) дает:

$$H_m(h) = H_{\text{sub}} + (H_1 - H_{\text{sub}}) \exp \left[ - \left( \frac{H_1}{H_2} \frac{h}{\alpha_1 t_1} \right)^{n_1} \right] + \\ + (H_2 - H_{\text{sub}}) \exp \left[ - \left( \frac{H_2}{H_{\text{sub}}} \frac{h}{\alpha_2 t_2} \right)^{n_2} \right] \left[ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{H_1}{H_2} \frac{h}{\alpha_1 t_1} \right)^{n_1} \right] \right]. \quad (3.4)$$

Из выражения (3.4) следует, что вклады слоев в эффективную микротвердость суммируются подобно выражению (3.1), но с разными весовыми коэффициентами. Верхний слой суммируется с весом 1, так же как и в (3.1), а нижний слой суммируется с весом  $1 - \exp[-(H_1 h / H_2 \alpha_1 t_1)^{n_1}]$ , зависящим от толщины верхнего слоя  $t_1$ . Как и следовало ожидать, при  $t_1 \rightarrow \infty$  этот весовой множитель стремится к 0. Аналогично можно построить модель микротвердости и для многослойной системы. Для этого, начиная с самого нижнего слоя, необходимо трактовать



нижний слой с подложкой как промежуточную подложку для следующего слоя. Результаты сопоставлений для обоих гибридных подложек SiC/Si приведены на рис. 6. В рамках двухслойной модели (3.4), которая изображена на рис. 6 пунктирными линиями, среднеквадратичное отклонение модели от экспериментальных данных уменьшается в несколько раз, и в этом случае характерный перегиб экспериментальной зависимости идеально описывается. Параметры  $n_1$  и  $n_2$  были определены из анализа экспериментальных данных НИ, которые однозначно показали, что эти параметры примерно равны 1 и 4 соответственно. Для расчетов значения параметры и были округлены. Сопоставление кривой (3.4) с экспериментальной зависимостью для образца SiC/Si(001) при  $n_1 = 1.0$  и  $n_2 = 4$  дает:  $H_1 = 42$  ГПа,  $H_2 = 36$  ГПа,  $H_{\text{sub}} = 8$  ГПа,  $t_1 = 30$  нм,  $t_2 = 60$  нм,  $\alpha_1 = 1.1$ ,  $\alpha_2 = 1.6$ , для гибридной структуры SiC/Si(111):  $H_1 = 40$  ГПа,  $H_2 = 45$  ГПа,  $H_{\text{sub}} = 2.6$  ГПа,  $t_1 = 25$  нм,  $t_2 = 95$  нм,  $\alpha_1 = 0.9$ ,  $\alpha_2 = 4$ . Сравнивая полученные результаты с данными оптической спектральной эллипсометрии, можно сделать следующие выводы. Двухслойная модель (3.4) очень хорошо описывает поведение микротвердости многослойных наноструктур и даже позволяет приблизительно определить толщины слоев в совокупности с параметрами, которые зависят от механических свойств слоев исследуемых наномасштабных гетероструктур. Однако определение фактора отдельно для каждого слоя выходит за рамки предлагаемой модели и может быть осуществлено, например, численным моделированием или сопоставлением с эллипсометрическими данными. В любом случае для данной системы погрешность в определении суммарной толщины была меньше 10%. Микротвердость слоев SiC в образцах SiC/Si, т.е. твердого раствора SiC и Si, оказалась несколько выше микротвердости объемного SiC (~33 ГПа). В случае гибридной структуры SiC/Si(001) микротвердость верхнего слоя SiC больше, чем у нижнего и у объемного SiC (~42 ГПа, ~36 ГПа, ~33 ГПа соответственно). Микротвердость кремниевого основания с порами, находящимися на существенном расстоянии друг от друга, близка к микротвердости объемного Si (~8 ГПа и ~9 ГПа соответственно). В случае образца SiC/Si(111) микротвердость второго слоя SiC больше, чем микротвердость первого слоя SiC, т.е. SiC с дилатационными диполями, и объемного SiC (~45 ГПа, ~40 ГПа, ~33 ГПа соответственно). Микротвердость модифицированного Si с пустотами стала существенно меньше микротвердости объемного Si (~2.6 ГПа и ~9 ГПа соответственно). Первый и второй слой в обоих образцах SiC/Si являются когерентно сопряженными, на границе между ними нет дефектов, в результате константа равна 1 для обоих образцов. Между вторым слоем и подложкой имеется очень большое количество дефектов, как следствие, величина возрастает до значений порядка 4.

Таким образом, предложенная модель для описания деформационных свойств твердой двухслойной наномасштабной пленки на мягкой подложке (3.4) позволяет адекватно интерпретировать экспериментальные результаты по микротвердости двухслойных наноструктур и может быть распространена на случай многослойных наноструктур.

Исследования параметров твердости и модуля упругости нано-SiC на Si с ориентациями (001) и (111) проводили путем измерения экспериментальных зависимостей  $H_{\text{eff}}(h_c)$  и  $E_{\text{eff}}(h_c)$ . Для этого были проведены эксперименты по

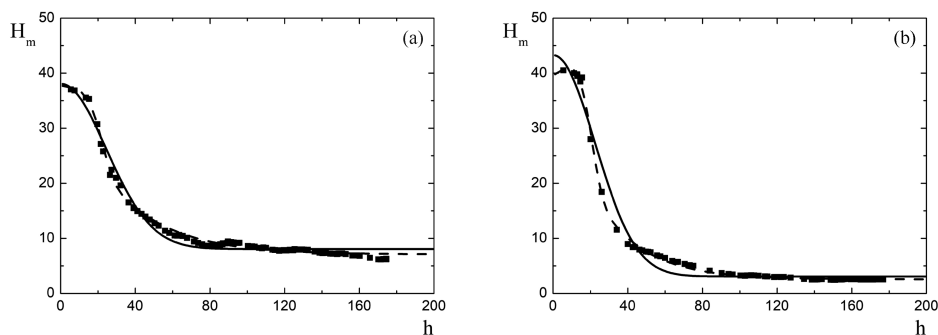


Рис. 6. Зависимости микротвердости от глубины погружения для гибридных структур SiC/Si(001) – а и SiC/Si(111) – б.

НИ в стандартном и циклическом режимах на глубины погружения от 10 до 400 нм и максимальными силами вдавливания от 0.25 до 25 мН. Данные НИ анализировали с помощью метода Оливера–Фарра. Для каждой контактной глубины погружения  $h_c$  в нм рассчитывались средние значения параметров  $H_{\text{eff}}$  и  $E_{\text{eff}}$ , измеряемые в ГПа. Полученные зависимости  $H_{\text{eff}}(h_c)$  описывали моделями (3.1) и (1.19), а  $E_{\text{eff}}(h_c)$  – моделями (1.21) и (1.22). Зависимости  $H_{\text{eff}}(h_c)$  для гибридных подложек нано-SiC на Si с ориентациями (001) и (111), изображенные точками, модель (3.1) – сплошная линия и модель (1.19) – пунктирная линия представлены на рис. 7, а и рис. 7, б соответственно. Аппроксимация методом наименьших квадратов экспериментальных зависимостей моделью (3.1) с параметром  $n = 2$  в случае структуры SiC на Si(001) при  $\alpha = 3.5$  дает:  $H_f = 30$  ГПа,  $H_{\text{sub}} = 9$  ГПа,  $t = 120$  нм, а в случае системы SiC на Si(111) при  $\alpha = 3.8$  дает:  $H_f = 29$  ГПа,  $H_{\text{sub}} = 6$  ГПа,  $t = 160$  нм. Модель (1.19) для SiC/Si(001) при толщине слоя SiC, равной 80 нм:  $H_f = 31$  ГПа,  $H_{\text{sub}} = 6$  ГПа,  $k = 160$  нм. Для структуры SiC/Si(111) при толщине слоя SiC, равной 120 нм:  $H_f = 30$  ГПа,  $H_{\text{sub}} = 3$  ГПа,  $k = 100$  нм. Как хорошо видно из рис. 7, погрешность такого рода измерения параметра твердости SiC/Si составляет 30–40% при НИ на глубине погружения до 100 нм. Однако зависимости средних значений эффективной

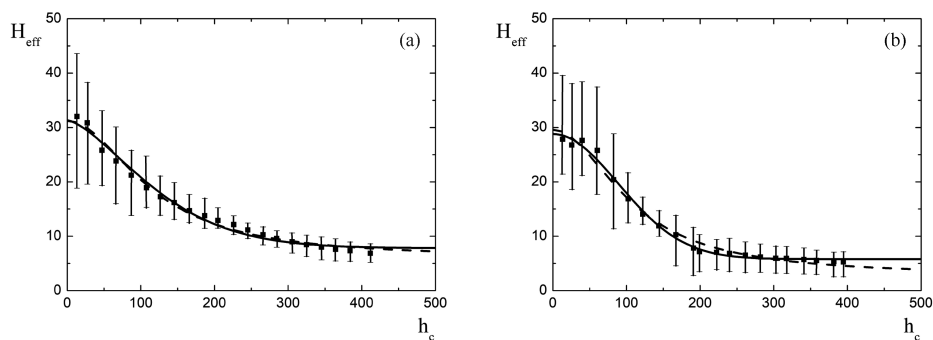
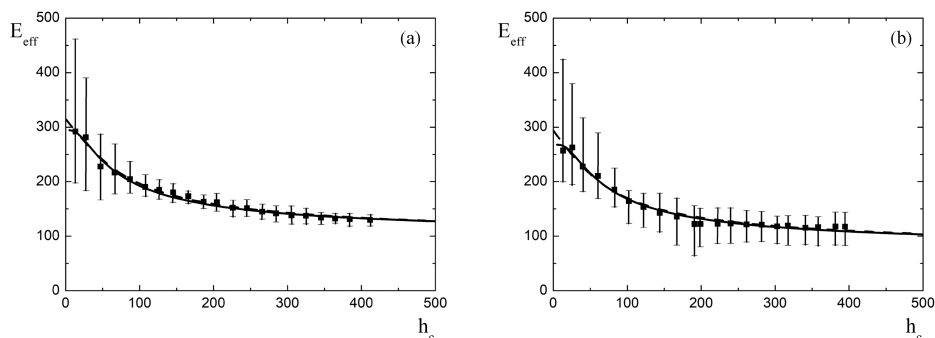


Рис. 7. Зависимости эффективной твердости от контактной глубины погружения для SiC/Si(001) – а и SiC/Si(111) – б.





**Рис. 8.** Зависимости эффективного модуля упругости от контактной глубины погружения для SiC/Si(001) – а и SiC/Si(111) – б.

твердости от глубины контакта достаточно хорошо описываются с помощью моделей (3.1) и (1.19), предназначенных для однослойного случая. Следует отметить, что в случае гибридной структуры SiC/Si(001) аппроксимационные функции (3.1) и (1.19) практически идентичны.

Зависимости  $E_{\text{eff}}(h_c)$  для гибридных подложек нано-SiC на Si с ориентациями (001) и (111), изображенные точками (модель (1.21) – сплошная линия, модель (1.22) – пунктирная линия), представлены на рис. 8, а и рис. 8, б соответственно. Аппроксимация методом наименьших квадратов экспериментальных зависимостей моделью (1.21) в случае структуры SiC на Si(001) при  $\gamma = 1.3$  дает:  $E_f = 371$  ГПа,  $E_{\text{sub}} = 123$  ГПа,  $t = 80$  нм, а в случае системы SiC на Si(111) при  $\gamma = 1.0$  дает:  $E_f = 330$  ГПа,  $E_{\text{sub}} = 96$  ГПа,  $t = 120$  нм. Модель (1.22) для SiC/Si(001) при толщине слоя SiC, равной 80 нм:  $E_f = 315$  ГПа,  $E_{\text{sub}} = 93$  ГПа,  $\varepsilon = 0.9$ . Для структуры SiC/Si(111) при толщине слоя SiC, равной 120 нм:  $E_f = 295$  ГПа,  $E_{\text{sub}} = 72$  ГПа,  $\varepsilon = 1.4$ .

Таким образом, измерения нанопленок SiC/Si ориентаций (001) и (111) показали, что значения их эффективных модулей  $E_{\text{eff}}(h_c)$  на малых толщинах (вблизи поверхности) практически совпадают с эффективными модулями объемного монокристалла 4H-SiC. Этот факт однозначно говорит о высоком уровне качества и монокристалличности слоев SiC, выращиваемых на Si методом согласованного замещения атомов [54].

**Наноиндентирование нано-SiC на Si с ориентацией (011).** По данным анализа начального сегмента НИ можно сделать вывод, что в результате синтеза по методу согласованного замещения атомов на поверхности подложки Si(011) формируется слой более упругий и менее твердый, чем приповерхностная область исходного кристалла Si с ориентацией (011). Экспериментальные зависимости среднего контактного давления  $p_m$  в ГПа от контактной глубины погружения  $h_c$  в нм для SiC/Si(011) – черные квадратные точки и Si(011) – белые круглые точки изображены на рис. 9, а. Аппроксимация функцией (1.6) в случае SiC/Si(011) происходит с параметром приведенного модуля упругости вблизи поверхности  $160 \pm 20$  ГПа. Существенное расхождение между экспериментальными зависимостями НИ образцов SiC/Si(011) и Si(011) регистрируется при смещении индентора относительно исходной поверхности примерно на 70 нм,

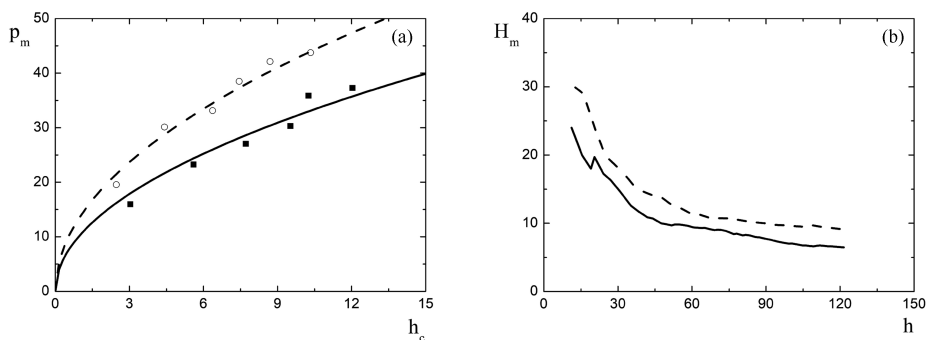


Рис. 9. Зависимости среднего контактного давления от контактной глубины погружения (а) и зависимости микротвердости от глубины погружения (б).

что практически соответствует толщине слоя SiC, определенного с помощью оптической спектральной эллипсометрии. Для эффективного сравнения деформационных характеристик гибридной подложки SiC/Si(011) и исходной пластины Si(011) представим соответствующие данные НИ в виде зависимостей микротвердости  $H_m$  в ГПа от глубины погружения  $h$  в нм. Зависимости  $H_m(h)$  для SiC/Si(011) и Si(011) изображены на рис. 9, б сплошной и пунктирной линиями соответственно. Отчетливо видно, что микротвердость гибридной структуры SiC/Si(011) меньше, чем у исходной пластины Si(011).

Анализ зависимостей микротвердости от глубины погружения для SiC/Si(011) и исходного Si(011) показал, что на глубине погружения от 10 до 70 нм микротвердость SiC/Si(011) на 20% меньше, чем у исходного кристалла Si(011). Таким образом, полученные данные НИ показывают, что механические и деформационные характеристики гибридной подложки SiC/Si(011) меньше, чем у исходной монокристаллической пластины Si с ориентацией (011).

**4. Наноиндентирование пленок AlN, GaN, AlGaN и  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> на SiC/Si.** В последнее время в сфере производства микро- и оптоэлектронных приборов произошла революция. Был открыт класс новых материалов, называемых широкозонными полупроводниками. Такими материалами, в частности, являются: нитрид алюминия, нитрид галлия, нитрид алюминия-галлия и оксид галлия. Электрические свойства этих материалов значительно превосходят свойства Si. Эти материалы обладают прямой запрещенной зоной. Это позволяет производить на их основе различные оптоэлектронные приборы, и в частности голубые лазеры, синие светодиоды и другие оптоэлектронные компоненты. Однако вырастить монокристаллы этих полупроводников – сложная проблема. Эти материалы тугоплавки, поэтому требуются большие затраты электроэнергии для их производства, а многие из этих полупроводников, например GaN, растут только при очень высоких давлениях в специальных автоклавах. Перечисленные выше широкозонные материалы проще вырастить в виде тонких пленок на различных подложках, например с использованием специальных химических реакции. В этом случае не требуется использования очень высоких температур и давлений. Однако в этом случае возникает другая проблема. Для роста широкозонных полупроводников высокого кристаллического совершенства, а

только такие пленки и нужны промышленности, необходимо иметь подложки, на поверхности которых эти материалы можно было бы вырастить. Именно такой подложкой и является гибридная структура нано-SiC/Si, выращенная методом согласованного атомного замещения. Преимущества таких подложек заключаются в том, что, во-первых, рост, травление, резка пластин и подготовка поверхности Si хорошо отработаны, а метод согласованного замещения атомов позволяет наносить слой нано-SiC на пластины Si любого диаметра и ориентации. Во-вторых, материал SiC близок по структурным и термическим свойствам к основным широкозонным полупроводниковым материалам. Таким образом, гибридные подложки нано-SiC/Si хорошо подходят для выращивания на их основе эпитаксиальных слоев AlN, GaN, AlGaIn,  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и других широкозонных полупроводников.

Исследование кристаллической структуры на наличие дефектов является важной задачей для производителей полупроводниковых устройств. Толщина отдельных слоев в современных приборах может составлять десятки и сотни нанометров, поэтому для их диагностики применяют различные высокоточные техники. Механические характеристики тонкопленочных кристаллических структур можно исследовать с помощью метода НИ. Однако исследование образцов со слоем тонкой пленки, а иногда и несколькими слоями методом НИ является нетривиальной задачей. Сложность данной задачи связана с тем, что ввиду малой толщины исследуемых пленок из общей реакции структуры на вдавливание трудно выделить полезный сигнал непосредственно от пленки, поскольку существенный вклад в сигнал дает подложка. В последние годы были развиты новые теоретические и экспериментальные подходы и методы, позволяющие обойти эту проблему и вычислять модуль упругости, твердость и другие параметры пленки из экспериментальных данных НИ.

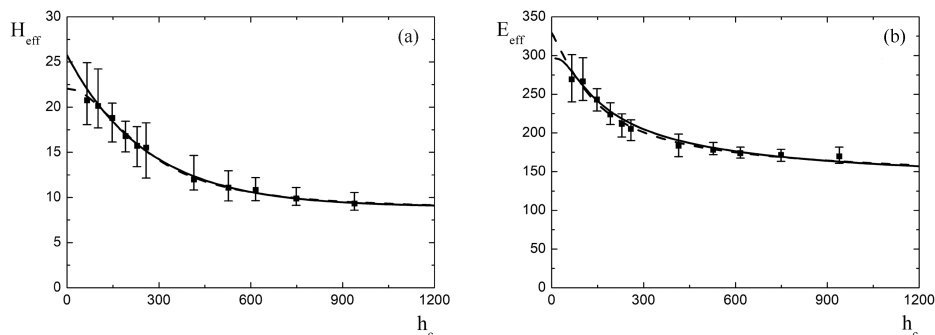
*Наноиндентирование тонкой пленки AlN на SiC/Si.* Измерения механических характеристик эпитаксиальной пленки AlN проводили методом НИ на слое AlN, который был сформирован методом ХГЭ [55, 56] на гибридной подложке SiC/Si. В качестве подложки для роста пленки AlN использовалась пластина SiC/Si, синтезированная методом согласованного замещения атомов на кристалле Si с ориентацией (111). Толщина слоя SiC используемой подложки SiC/Si составляла 140 нм, а шероховатость поверхности — 7 нм. Исследуемая пленка AlN имеет следующие структурные характеристики: толщина 1 мкм, шероховатость поверхности 11 нм. Эксперимент по НИ гетероструктуры AlN/SiC/Si осуществляли при максимальных силах вдавливания от 2 до 200 мН. Анализ начального этапа НИ показал, что экспериментальные зависимости описываются модернизированными соотношениями Герца (1.5) и (1.6) с параметром модуля упругости равным  $290 \pm 20$  ГПа. Метод Оливера—Фарра использовался для анализа начального этапа разгрузки данных НИ и определения параметров  $H_{\text{eff}}$  и  $E_{\text{eff}}$  в зависимости от  $h_c$ . Полученные зависимости  $H_{\text{eff}}(h_c)$  и  $E_{\text{eff}}(h_c)$  описывали с помощью аппроксимационных моделей (1.19), (3.1) для зависимости  $H_{\text{eff}}(h_c)$  и (1.21), (1.22) — для  $E_{\text{eff}}(h_c)$ .

Усредненные значения параметров эффективной твердости  $H_{\text{eff}}$  в ГПа и эффективного модуля упругости  $E_{\text{eff}}$  в ГПа, рассчитанные по методу Оливера и Фарра в зависимости от контактной глубины погружения  $h_c$  в нм, представлены

на рис. 10. Зависимость  $H_{\text{eff}}(h_c)$  аппроксимировали моделями (1.19) и (3.1) с использованием метода наименьших квадратов при условии, что параметр  $t = 1$  мкм. Для аппроксимации данных НИ использовали модель (3.1) со степенным параметром  $n = 1$ . Метод наименьших квадратов в этом случае дает следующий результат:  $H_f = 24$  ГПа,  $H_{\text{sub}} = 9$  ГПа и  $\alpha = 0.85$ . Отметим, что  $\alpha = (Y_f / Y_{\text{sub}}) \sqrt{E_f / E_{\text{sub}}}$  значительно меньше, чем следовало ожидать, применяя в качестве параметров подложки характеристики Si, а с другой стороны, совершенно очевидно, что слой SiC толщиной 140 нм существенно упрочняет механические свойства подложки, особенно область интерфейса с пленкой AlN. Таким образом, вероятно, что в ситуации НИ твердой пленки, которая нанесена на мягкую подложку с более жестким буферным слоем, для расчета параметра  $\pm$  в качестве параметров подложки нужно использовать характеристики буферного слоя или что-то среднее. Модель (1.19) максимально совпадает с экспериментальными данными при следующих параметрах:  $H_f = 22$  ГПа,  $H_{\text{sub}} = 9$  ГПа и  $k = 68$  нм. Модели (3.1) и (1.19) с соответствующими параметрами представлены на рис. 10, а сплошной и пунктирной линиями соответственно. Экспериментальную зависимость  $E_{\text{eff}}(h_c)$  сопоставляли с аппроксимационными моделями (1.21) и (1.22). Эти модели представлены на рис. 10, б сплошной и пунктирной линиями соответственно. При использовании модели (1.21) экспериментальная зависимость описывается при следующих параметрах:  $E_f = 340$  ГПа,  $E_{\text{sub}} = 120$  ГПа и  $\gamma = 0.5$ . В случае модели (1.22) сопоставление происходит при  $E_f = 315$  ГПа,  $E_{\text{sub}} = 130$  ГПа и  $\mu = 4.8$ . Сопоставления осуществляли с учетом того, что толщина слоя AlN равна 1 мкм.

Таким образом, были впервые измерены механические характеристики пленки AlN, сформированной на гибридной структуре SiC/Si, синтезированной методом согласованного замещения атомов. Данные НИ показывают, что значения твердости и модуля упругости пленки AlN на SiC/Si лежат в диапазонах 22–24 и 290–340 ГПа соответственно.

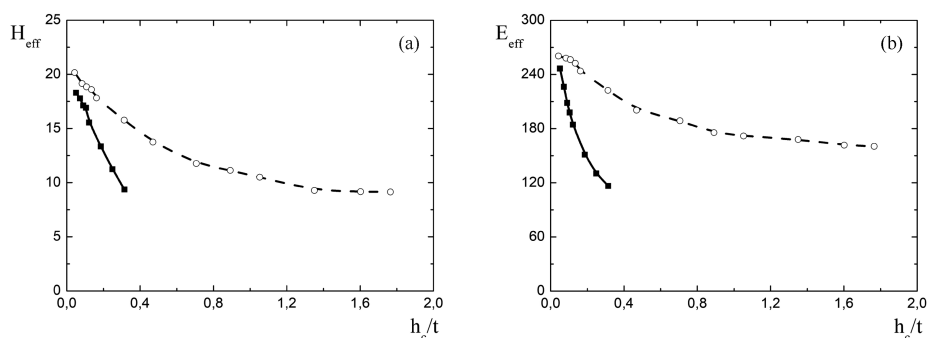
**Наноиндентирование тонких пленок GaN на SiC/Si.** В [14, 57] были проведены эксперименты исследования, направленные на изучение механических и деформационных характеристик тонких пленок GaN, выращенных на гибридных подложках SiC/Si. Измерения слоев GaN на SiC/Si осуществляли методом



**Рис. 10.** Зависимости эффективных параметров твердости (а) и модуля упругости (б) от глубины погружения для тонкой пленки AlN на SiC/Si.

НИ на двух кристаллических гетероструктурах: пленка GaN непосредственно на гибридной структуре SiC/Si и пленка GaN на SiC/Si с буферным слоем AlN толщиной 10 нм. Пленки GaN и буферный слой AlN формировали методом ХГЭ. В случае гетероструктуры GaN/SiC/Si слой GaN имеет толщину 2.1 мкм и покрыт ростовыми ямками. Так называемые питы (pit) – ростовые дефекты, образования которых связаны с особенностями роста пленок GaN на дефектных и несовершенных по кристаллическому качеству местах подложек. Теория образования питов на поверхности слоев GaN, выращенных на гибридных подложках SiC/Si методом ХГЭ, подробно изложена в работе [58]. Питы имеют шестиугольную огранку, определяемую гексагональной симметрией GaN, а их глубина, по данным АСМ, не превышает 700 нм. Шероховатость поверхности GaN с учетом питов равна 23 нм, а в областях пленки без питов равна 9 нм. Толщина слоя GaN, выращенного на AlN/SiC/Si, соответствует 1 мкм, а шероховатость поверхности равна 10 нм.

Экспериментальные зависимости  $F(h)$  на начальном этапе вдавливания описываются модернизированными соотношениями Герца (1.5) и (1.6) при параметрах приведенного модуля упругости вблизи поверхности  $215 \pm 30$  и  $200 \pm 20$  ГПа для слоев GaN на SiC/Si и AlN/SiC/Si соответственно. Для обоих образцов с помощью метода Оливера–Фарра были построены зависимости средних значений эффективных параметров твердости и модуля упругости от контактной глубины погружения. Полученные зависимости были описаны аппроксимационными моделями (1.18), (1.19), (1.21) и (1.22), при расчетах толщины слоев GaN на SiC/Si и AlN/SiC/Si считали равными 2.1 и 1 мкм соответственно. Экспериментальные зависимости  $H_{\text{eff}}(h_c)$ , полученные при НИ гетероструктур GaN/SiC/Si и GaN/AlN/SiC/Si, сопоставляли методом наименьших квадратов с моделями (1.18) и (1.19). Аппроксимация данных НИ моделью (1.18) в случае гетероструктуры GaN/SiC/Si дает  $H_f = 22$  ГПа,  $H_{\text{sub}} = 5$  ГПа и  $\alpha = 1.1$ , в случае пленки GaN на SiC/Si с буферным слоем AlN дает  $H_f = 21$  ГПа,  $H_{\text{sub}} = 9$  ГПа и  $\alpha = 1.4$ . Наилучшее сопоставление модели (1.19) с экспериментальными данными НИ в случае системы GaN/SiC/Si происходит при следующих параметрах модели:  $H_f = 19$  ГПа,  $H_{\text{sub}} = 4$  ГПа и  $k = 120$  нм. В случае гетероструктуры GaN/AlN/SiC/Si наилучшая аппроксимация данных НИ моделью (1.19) происходит при  $H_f = 20$  ГПа,  $H_{\text{sub}} = 9$  ГПа и  $k = 190$  нм. Данные НИ гетероструктур GaN/SiC/Si и GaN/AlN/SiC/Si, преобразованные в зависимости  $E_{\text{eff}}(h_c)$ , аппроксимировали моделями (1.21) и (1.22). Аппроксимация экспериментальной моделью (1.21) данных НИ гетероструктуры GaN/SiC/Si показывает, что сопоставление происходит при следующих параметрах модели:  $E_f = 320$  ГПа,  $E_{\text{sub}} = 50$  ГПа и  $\gamma = 0.57$ . В случае экспериментальных данных НИ системы GaN/AlN/SiC/Si наилучшая аппроксимация происходит при  $E_f = 330$  ГПа,  $E_{\text{sub}} = 130$  ГПа и  $\gamma = 0.84$ . Сопоставление экспериментальной зависимости  $E_{\text{eff}}(h_c)$  гетероструктуры GaN/SiC/Si моделью (1.22) происходит при  $E_f = 310$  ГПа,  $E_{\text{sub}} = 32$  ГПа и  $\mu = 6.2$ . В случае гетероструктуры GaN/AlN/SiC/Si наилучшая аппроксимация экспериментальной зависимости  $E_{\text{eff}}(h_c)$  происходит при следующих параметрах модели (1.22):  $E_f = 270$  ГПа,  $E_{\text{sub}} = 130$  ГПа и  $\mu = 1.8$ . Используемые модели позволяют достаточно точно определить средние значения параметров твердости и модуля упругости слоев GaN, однако параметры  $\alpha$ ,  $k$ ,  $\gamma$  и в случае



**Рис. 11.** Зависимости средних значений эффективных параметров твердости (а) и модуля упругости (б) от отношения контактной глубины погружения  $h_c$  к толщине  $t$  слоя GaN для тонких пленок GaN на гибридной подложке SiC/Si с буферным слоем AlN и без него.

пленок GaN на SiC/Si с буферным слоем AlN и без него существенно отличаются. Отличие этих параметров на экспериментальных зависимостях проявляется как более быстрое уменьшение эффективных параметров твердости и модуля упругости с увеличением глубины погружения в случае гетероструктуры GaN/SiC/Si. На рис. 11 изображены экспериментальные зависимости средних значений эффективных параметров твердости  $H_{eff}$  и модуля упругости  $E_{eff}$ , измеряемых в ГПа от отношения контактной глубины погружения  $h_c$  к толщине  $t$  слоя GaN. Экспериментальные данные НИ пленки GaN на SiC/Si на рис. 11 изображены черными квадратными точками, а гетероструктуры GaN/AlN/SiC/Si — белыми круглыми точками.

Такое отличие эффективных параметров твердости и модуля упругости не свойственно для тонких пленок одного вещества с разной толщиной [59, 60]. Существенное различие между экспериментальными зависимостями связано в основном с наличием питов в одной из пленок GaN, что является причиной увеличения скорости деформации при погружении индентора в материал. В работах [61, 62] было проведено многомасштабное моделирование с использованием метода квазиконтинуума процесса НИ объекта с дефектом в виде поверхностной ямки и показано, что наличие такого рода дефекта влияет на предел текучести и эффект задержки зарождения дислокаций. В исследовании, представленном в настоящем обзоре, экспериментально показано, что ямы в пленке существенно влияют на деформацию системы. С одной стороны, на начальном этапе вдавливания ямы ограничивают движение дислокаций, останавливая их на границе материала с дефектом, что проявляется в увеличении параметра модуля упругости вблизи поверхности. С другой стороны, после разрушения границы материала с дефектом ямы являются дополнительными источниками пластической деформации. Это приводит к увеличению контактной площади при НИ и уменьшению параметров твердости и модуля упругости. Отметим, что частичное отличие эффективных параметров твердости и модуля упругости гетероструктур GaN/SiC/Si и GaN/AlN/SiC/Si может быть связано с механическими характеристиками пористой структуры под слоем SiC.



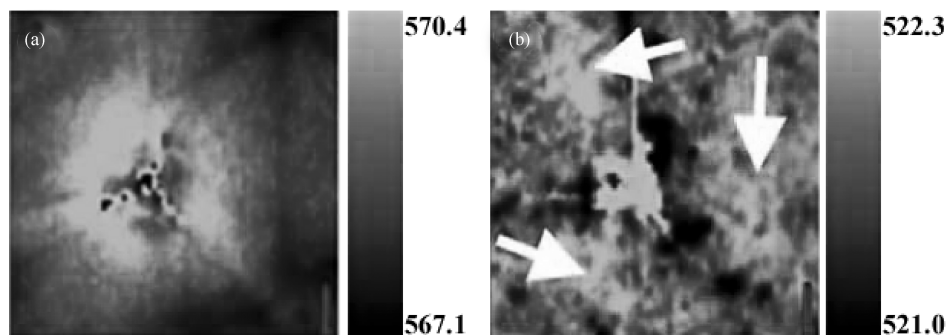


Рис. 12. Рамановские карты области НИ по положению линий нитрида галлия ( $567\text{ см}^{-1}$ ) — а и кремния ( $520\text{ см}^{-1}$ ) — б.

Области гетероструктуры GaN/AlN/SiC/Si, в которых осуществлялось НИ, были исследованы методом рамановской спектроскопии. С помощью микро-рамановской техники были сняты карты спектров вокруг следов от НИ. Рамановский спектр вдали от зоны, в которой проходило НИ, и в центре отпечатка, который остался после вдавливания. С помощью анализа спектров была получена информация о распределении остаточной после НИ деформации как пленки GaN, так и подложки Si. Линии GaN ( $567\text{ см}^{-1}$ ) и Si ( $520\text{ см}^{-1}$ ) [63] были аппроксимированы функцией Гаусса, и рамановские карты построены по их абсолютному положению на спектре (рис. 12). Интенсивность линии позволяет оценить количество рассеивающих центров, ее положение коррелирует с локальными механическими напряжениями [63].

Таким образом, был предложен экспериментальный метод визуализации остаточной деформации после НИ или других механических воздействий.

*Наноиндентирование тонких пленок AlGaN на нано-SiC/Si.* В работе [64] были проведены экспериментальные исследования механических и структурных характеристик тонких пленок соединения AlGaN, сформированных на гибридных подложках SiC/Si. В качестве подложек для роста слоев AlGaN использовали пластины Si с ориентациями (001), (011) и (111), на которых были синтезированы методом согласованного замещения атомов слои SiC толщиной 3 нм. В случае подложки Si с ориентацией (001) кристалл был отклонен от базового направления на  $4^\circ$  к направлению (111). Шероховатость поверхности подложек SiC/Si была исследована методом оптической профилометрии. По экспериментальным данным среднеквадратичная шероховатость поверхности слоев нано-SiC на площади  $140\text{ мкм}^2$  составила  $0.4 \pm 0.1\text{ нм}$ . Рост пленок AlGaN осуществляли на двух типах подложки: непосредственно на нано-SiC на Si и на буферном слое AlN, предварительно выращенном на гибридной структуре SiC/Si. Пленки AlGaN и буферные слои AlN выращивали методом ХГЭ. В случае пленок AlGaN, выращенных непосредственно на гибридных подложках SiC/Si, толщина слоя AlGaN равна 6–9 мкм. Толщина пленок AlGaN на AlN/SiC/Si и буферных слоях AlN составляла 3–5 мкм и 2–3 мкм соответственно.

Морфология поверхности исследуемых пленок AlGaN по данным ACM существенно различается в зависимости от ориентации кристаллов Si. В случае пленок AlGaN, выращенных на подложках Si с ориентацией (001), поверхность

имеет пилообразный профиль и состоит из кластеров в виде хребтов. Среднеквадратичная шероховатость поверхности пленок AlGaN на подложке SiC/Si(001) и на гетероструктуре AlN/SiC/Si(001) равна 810 и 680 нм соответственно. Боковые плоскости гребнеподобных структурных элементов в случае гетероструктуры AlGaN/SiC/Si(001) наклонены на  $45 \pm 5^\circ$  и  $20 \pm 3^\circ$  относительно общей плоскости поверхности образца, тогда как для слоя AlGaN на AlN/SiC/Si(001) они наклонены на  $40 \pm 5^\circ$  и  $25 \pm 2^\circ$ . Высота гребнеподобных кластеров AlGaN на SiC/Si(001) и AlN/SiC/Si(001) составляет 2–4 мкм и 1–3 мкм соответственно. Таким образом, в случае роста пленок AlGaN на SiC/Si(001) использование буферного слоя AlN приводит к изменению характерных размеров и ориентации кристаллических структурных элементов поверхности.

Поверхность пленок AlGaN, выращенных на подложках Si с ориентацией (011), имеет мозаичную структуру с выраженными ступенями. По данным АСМ, структура поверхности пленок AlGaN, сформированных на гибридной подложке SiC/Si(011), представляет собой гладкие террасы площадью до 20 мкм<sup>2</sup> с резкими наклонами по краям. Террасы занимают 70 и 55% от общей площади АСМ изображения пленок AlGaN на SiC/Si(011) и на AlN/SiC/Si(011) соответственно. Наклон террас и откосов относительно общей плоскости поверхности образца в случае слоя AlGaN на SiC/Si(011) составляет  $5 \pm 1^\circ$  и  $25 \pm 5^\circ$  соответственно. Высота склонов структуры поверхности AlGaN/SiC/Si(011) составляет  $2.0 \pm 0.3$  мкм. Наклон террас и откосов относительно общей плоскости поверхности образца в случае AlGaN/AlN/SiC/Si(011) составляет  $5.3 \pm 0.2^\circ$  и  $28 \pm 5^\circ$  соответственно. Высота ступеней, то есть расстояние от нижней точки склона до плоскости террасы, у гетероструктур AlGaN/SiC/Si(011) и AlGaN/AlN/SiC/Si(011) отличается и составляет 1–2 и 2–5 мкм. Среднеквадратичная шероховатость пленок AlGaN, сформированных на подложках SiC/Si(011) и AlN/SiC/Si(011), составляет 480 и 700 нм соответственно, то есть, в отличие от подложек SiC/Si(001) и AlN/SiC/Si(001), предварительно выращенный слой AlN привел к увеличению шероховатости.

Анализ АСМ-изображений слоев AlGaN, выращенных на структурах SiC/Si(111) и AlN/SiC/Si(111), показал, что поверхность в процесс роста сформировалась в виде холмов. Согласно данным АСМ, холмики имеют округлую форму. Поверхность пленки AlGaN на нано-SiC/Si покрыта холмообразными кластерами с диаметром основания 10–30 мкм и высотой 200–400 нм. В случае гетероструктуры AlGaN/AlN/SiC/Si холмообразная структура имеет диаметр основания 20–50 мкм и высоту 300–500 нм. Среднеквадратичная шероховатость поверхности пленок AlGaN в обоих случаях составляет 60 нм. Наклон боковых склонов поверхности слоя AlGaN на нано-SiC/Si относительно общей плоскости образца составляет  $1.5 \pm 0.5^\circ$ . Наклон боковых склонов холмистой структуры слоев AlGaN на AlN/SiC/Si относительно общей плоскости образца составляет от  $2.0 \pm 0.5^\circ$ . В пленках AlGaN на нано-SiC/Si(111) обнаружены дефекты роста в виде ростовых ям (питов), образование которых связано с особенностями роста пленок AlGaN на дефектных и неидеальных по кристаллическому качеству местах гибридных подложек SiC/Si.

Эксперимент по НИ проводили при максимальных силах вдавливания 5, 10, 15 и 20 мН. В случае пленок AlGaN, сформированных на гибридной подложке



SiC/Si(001) и на гетероструктуре AlN/SiC/Si(001), данные НИ можно по наклону кривых нагрузки и разгрузки разделить на два типа. Анализ начального этапа вдавливания соотношением (1.5) показал, что параметр  $E'_{\text{sur}}$  равен  $150 \pm 50$  и  $195 \pm 60$  ГПа для слоев AlGaN на SiC/Si(001) и на AlN/SiC/Si(001) соответственно. В случае НИ образца AlGaN/SiC/Si(001) метод Оливера—Фарра показывает, что условный 1 тип данных можно охарактеризовать параметрами твердости и приведенного модуля упругости  $12.0 \pm 1.0$  и  $260 \pm 50$  ГПа соответственно. Для 2 типа данных НИ гетероструктуры AlGaN/SiC/Si(001) параметры твердости и приведенного модуля упругости соответствуют значениям  $15.7 \pm 2.9$  и  $340 \pm 40$  ГПа соответственно. В случае анализа методом Оливера—Фарра кривых НИ AlGaN/AlN/SiC/Si(001) 1 тип данных соответствует твердости  $12.5 \pm 2.6$  ГПа и приведенному модулю упругости  $240 \pm 45$  ГПа, а 2 тип данных характеризуется твердостью  $19 \pm 4.6$  ГПа и приведенным модулем упругости  $330 \pm 70$  ГПа. Анализ данных НИ образца AlGaN/SiC/Si(011) показал, что экспериментальные зависимости на начальном этапе вдавливания можно охарактеризовать приведенным модулем упругости вблизи поверхности, равным  $190 \pm 50$  ГПа. При этом параметры твердости и приведенного модуля упругости, рассчитанные методом Оливера—Фарра на контактных глубинах погружения от 130 до 270 нм, равны  $12.2 \pm 1.2$  ГПа и  $300 \pm 40$  ГПа соответственно. В случае гетероструктуры AlGaN/AlN/SiC/Si(011)  $E'_{\text{sur}}$  равен  $100 \pm 10$  ГПа, а значения твердости и приведенного модуля упругости на контактной глубине погружения индентора от 140 до 260 нм равны  $11.8 \pm 1.3$  ГПа и  $260 \pm 40$  ГПа соответственно. В случае измерения пленок AlGaN, сформированных на гибридной подложке SiC/Si(111) и гетероструктуре AlN/SiC/Si(111), экспериментальные кривые на начальном этапе нагружения соответствуют параметру  $E'_{\text{sur}}$   $310 \pm 40$  и  $160 \pm 15$  ГПа соответственно. Анализ данных НИ с контактной глубиной погружения  $100\text{--}230$  нм методом Оливера—Фарра показал, что у пленки AlGaN на гибридной подложке SiC/Si(111) твердость равна  $18.0 \pm 3.6$  ГПа, а приведенный модуль упругости  $300 \pm 40$  ГПа. В случае гетероструктуры AlGaN/AlN/SiC/Si(111) параметры твердости и приведенного модуля упругости в интервале контактных глубин погружения от 120 до 240 нм равны  $14.1 \pm 1.3$  и  $290 \pm 30$  ГПа соответственно.

В работе [65] было обнаружено явление самоорганизации при росте пленок AlGaN на гибридных подложках nano-SiC/Si. Результаты исследования показали, что процесс роста слоя AlGaN из паровой фазы, содержащей 50% молярный состав по Ga и Al, на подложке SiC/Si(111) происходит в несколько этапов, причем рост слоев AlGaN непосредственно на гибридной структуре SiC/Si и на буферном слое AlN, предварительно сформированном на SiC/Si, различается. В случае AlGaN/SiC/Si первые несколько нанометров пленки содержат AlN, затем начинается формирование слоев AlGaN с низким содержанием Al (около 20%). По достижении толщины порядка 1.7 мкм начинает расти прослойка AlGaN толщиной порядка 90–100 нм, имеющая состав, близкий к стехиометрическому. Далее растет только GaN с содержанием Ga, близким к 85–95% в атомных процентах. На поверхности вновь происходит уменьшение содержания Ga в слое и повышение содержания Al. Распределение концентрации Al и Ga по толщине слоя образца AlGaN/AlN/SiC/Si(111) несколько иное. Начинается рост слоя практически с роста чистого GaN, а AlGaN не осаждается. Затем, по

достижению, толщины порядка 2.6 мкм, начинается рост прослойки AlGaIn, в которой примерно 25–30% Al, толщиной порядка 90–100 нм. После этого растет слой только GaN с содержанием Ga, близким к стехиометрическому. Образование прослойки с повышенным содержанием Al на поверхности данного образца обнаружено не было. По данным наноиндентирования [66, 67] AlN и GaN, приведенный модуль упругости этих материалов оказался равным 320 и 295 ГПа соответственно. Используя закон Вегарда и значения модулей упругости AlN и GaN из [66, 67], можно оценить концентрации Al и Ga в верхней части слоя пленок AlGaIn, сформированных на гибридных подложках нано-SiC/Si с буферным слоем AlN и без него. В случае пленок AlGaIn на нано-SiC/Si приведенный модуль упругости в среднем равен 300 ГПа для всех структур, что по закону Вегарда соответствует приведенному модулю упругости твердого раствора  $\text{Al}_{0.2}\text{Ga}_{0.8}\text{N}$ . Средние значения приведенного модуля упругости пленок AlGaIn на AlN/SiC на Si с ориентацией (001), (011) и (111) равны 295, 260 и 290 ГПа соответственно, что практически совпадает с параметром приведенного модуля упругости GaN. Таким образом, результаты наноиндентирования согласуются с данными работы [65].

*Наноиндентирование тонких пленок  $\text{Ga}_2\text{O}_3$  на SiC/Si.* В случае  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  механические свойства исследовались в основном у тонких пленок, сформированных на основе кристаллов сапфира, и у объемных кристаллов этого широкозонного соединения [68, 69]. Экспериментальные исследования механических характеристик тонких пленок  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ , сформированных на гибридных подложках SiC/Si, были впервые проведены в работах [70, 71]. В этих исследованиях НИ осуществляли в пленки  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  толщиной 5, 2.5 и 1.5 мкм, выращенных методом ХГЭ на нано-SiC, синтезированном на Si с ориентациями (001), (011) и (111) соответственно. Морфология поверхности слоев  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  в этих трех образцах различается. Шероховатость поверхности исследуемых образцов равна 0.6, 0.3 и 0.7 мкм для структур  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3/\text{SiC}$  на Si с ориентациями поверхностей (001), (011) и (111) соответственно. Анализ начальной части кривых НИ показал, что наклон соответствует соотношениям Герца с параметром приведенного модуля упругости вблизи поверхности равным  $200 \pm 20$ ,  $120 \pm 20$  и  $170 \pm 20$  ГПа для пленок  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ , выращенных на гибридных подложках SiC/Si(001), SiC/Si(011) и SiC/Si(111) соответственно. Небольшое значение приведенного модуля упругости вблизи поверхности пленки  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  на подложке SiC/Si(011), скорее всего, связано с поверхностной энергией лицевой плоскости пленки, как это показано в исследованиях упругих свойств SiC с C- и Si-полярными гранями. Так можно считать, поскольку при дальнейшем НИ кривая разгрузки резко меняет свой угол, что свидетельствует о увеличении модуля упругости исследуемой структуры. Анализ наклона начального этапа разгрузки методом Оливера—Фарра в случае слоя  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  на гибридной структуре SiC/Si(001) дает  $H = 11 \pm 1$  ГПа,  $E = 215 \pm 15$  ГПа в случае пленки  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  на SiC/Si(011) расчеты показывают, что  $H = 10 \pm 2$  ГПа,  $E = 185 \pm 25$  ГПа, а для пленки  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  на Si(111)/SiC данные НИ соответствуют следующим параметрам:  $H = 9 \pm 2$  ГПа,  $E = 120 \pm 15$  ГПа. Следует отметить, что для расчета модуля упругости исследуемых образцов был взят усредненный по методу Хилла [72] коэффициент Пуассона для поликристаллического  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ , значение которого

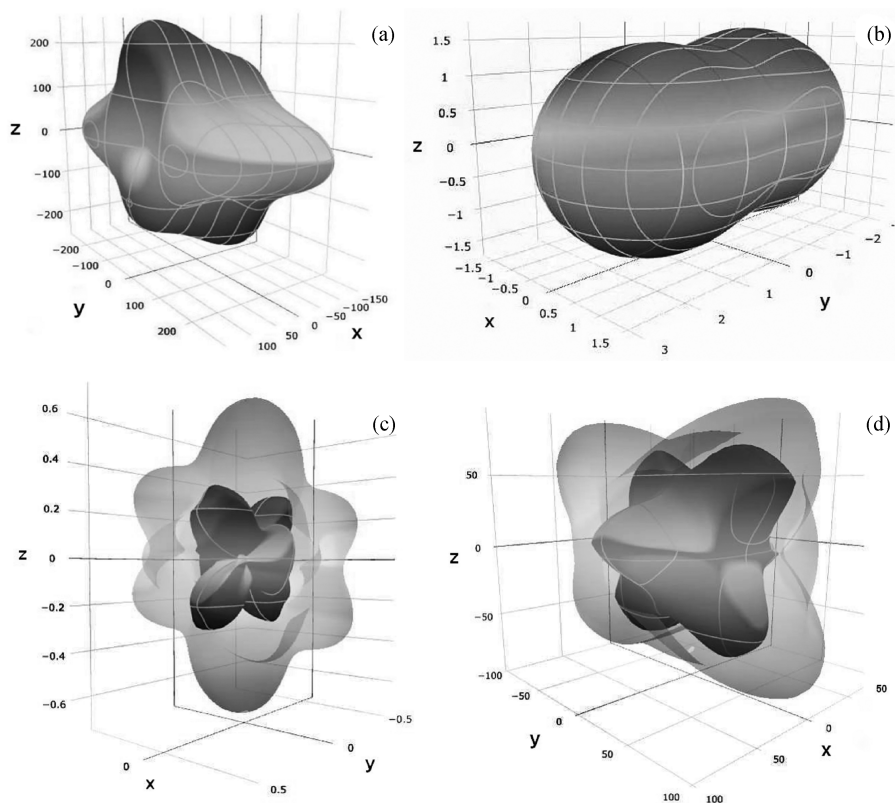
составило 0.31. Использование усредненного коэффициент Пуассона обусловлено анизотропией кристалла  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ .

Для сопоставления полученных экспериментальных данных с теоретическими упругие свойства кристалла  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  были промоделированы методами квантовой химии [73]. Прежде всего, необходимо отметить, что  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  обладает моноклинной  $C2/m$ -симметрией, что означает, что упругие свойства по осям  $x, y, z$  будут различными. В случае моноклинной симметрии из 36 элементов тензора имеются лишь 13 различных ненулевых элементов. Вычисление тензора упругости проводилось методом функционала плотности в базе плоских волн с использованием приближения псевдопотенциалов. Для этого использовался код Quantum Espresso [74]. Обменно-корреляционные эффекты вычислялись в рамках градиентного функционала PBESOL [75]. Для расчетов использовались наиболее точные нормосохраняющие псевдопотенциалы, приводящие к погрешности порядка 0.3 мэВ/атом. Энергия обрезания плоских волн составляла 75 хартри. В обратном пространстве использовалась сетка по схеме Монхорста–Пака из  $7 \times 7 \times 4$  точек, отвечающая расстоянию между точками  $0.051 / \text{\AA}$ . Результаты расчетов таковы:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 227 & 128 & 135 & 0 & -4 & 0 \\ 128 & 335 & 83 & 0 & 0 & 0 \\ 135 & 73 & 313 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & 18 & 0 & 83 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 99 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где все компоненты выражены в ГПа, причем  $c_{15}$ ,  $c_{25}$  оказались равными 0. Компоненты данного тензора не сильно отличаются от результатов расчета в рамках приближения локальной плотности с использованием присоединенных плоских волн [76]. Отсюда могут быть вычислены зависимости от направления модуля Юнга ( $E_Y$ ), коэффициента Пуассона, модуля сдвига ( $G$ ) и других упругих характеристик  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ . В частности, модули Юнга по направлениям (100), (010), (001) равны соответственно  $E_{Y(x)} = 138$  ГПа,  $E_{Y(y)} = 263$  ГПа,  $E_{Y(z)} = 228$  ГПа, а коэффициенты Пуассона равны  $\nu_{xy} = 0.30$ ,  $\nu_{xz} = 0.37$ ,  $\nu_{yx} = 0.57$ ,  $\nu_{yz} = -0.02$ ,  $\nu_{zx} = 0.61$ ,  $\nu_{zy} = -0.01$ . С помощью инструмента для анализа тензоров упругой жесткости второго порядка реализованным и представленным в работе [77] были рассчитаны основные упругопластические характеристики  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ . Автономным онлайн-приложением ELATE были визуализированы анизотропные механические свойства  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ , а именно, модуль Юнга (рис. 13, а), коэффициент линейной сжимаемости (рис. 13, б), коэффициент Пуассона (рис. 13, с), модуль сдвига (рис. 13, д).

Усреднение по методу Хилла [72] дает следующие результаты для поликристалла  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ : объемный модуль  $B = 171$  ГПа, модуль сдвига  $G = 73$  ГПа, модуль Юнга  $E_Y = 192$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.31$ . Именно это значение коэффициента Пуассона использовалось при обработке данных НИ. Твердость можно определить косвенно, зная предел прочности  $A$ , а предел прочности можно оценить, рассчитав



**Рис. 13.** Характеристики  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ , рассчитанные по тензору упругости (4.1): а) поверхность модуля Юнга; б) поверхность линейной сжимаемости; в) поверхности наибольшего возможного и наименьшего возможного значений коэффициента Пуассона; д) поверхности наибольшего возможного и наименьшего возможного значений модуля сдвига.

методами квантовой химии зависимость напряжение–деформация. Моноклинная симметрия означает очень сложную зависимость как предела прочности, так и твердости от направления. Поэтому в настоящей работе моделировалась деформация лишь в направлении  $\langle 100 \rangle$ , так как именно в этом направлении модуль Юнга наименьший по сравнению с  $\langle 010 \rangle$  и  $\langle 001 \rangle$ . По заданной деформации методом функционала плотности вычислялся модуль напряжения в кристалле. Использовались те же самые приближения, что и при расчете тензора упругости, т.е. функционал PBESOL [75], энергия обрезания плоских волн 60 Ha сетка по схеме Монхорста–Пака из  $7 \times 7 \times 4$  точек. Предел прочности  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  в направлении  $\langle 100 \rangle$   $\sigma_x$  оценивается как точка максимума этой кривой, т.е.  $\sigma_x = 27$  ГПа. Тогда по классической изотропной модели расширяющейся полости, предложенной Джонсоном [78], можно оценить твердость кристалла  $H$ :

$$H = \frac{2}{3} \sigma \left[ 1 + \ln \left( \frac{E_Y \cos \theta}{3\sigma} \right) \right], \quad (4.2)$$

где  $E_Y$  – модуль Юнга,  $\theta$  – половина угла индентора. Учитывая, что в направлении  $\langle 100 \rangle$   $E_x = 138$  ГПа, из формулы (4.2) получим  $H \approx 10.7$  ГПа. Оценить твердость в других направлениях по изотропной формуле (4.2) невозможно, так как маленький модуль Юнга  $E_{Y(x)}$  будет искажать деформацию в направлениях, где модуль Юнга больше.

Таким образом, в этом исследовании был впервые проведен анализ упруго-пластических свойств пленок  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ , выращенных на различных гибридных подложках SiC/Si(001), SiC/Si(011) и SiC/Si(111) с использованием метода НИ. Было обнаружено, что пленка  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  на подложке Si(001)/SiC обладает наибольшей жесткостью, в то время как на гибридной подложке Si(111)/SiC – наименьшей жесткостью. Моделирование упругих свойств  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  с применением методов квантовой химии показало их сильную анизотропию. Кроме того, коэффициент Пуассона оксида галлия оказался сильно зависимым от направления, а в некоторых случаях он принимает нулевые или даже небольшие отрицательные значения, что указывает на то, что данный материал является близким к ауксетикам. Эти результаты подтверждают перспективность данного материала и свидетельствуют о том, что упругопластические свойства пленок  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ , выращенных на подложках Si с буферным слоем SiC, примерно соответствуют свойствам объемных кристаллов.

**Заключение.** В обзоре впервые проведен систематический анализ результатов экспериментальных исследований деформационных и механических характеристик кристаллов SiC, Si, кристаллических гибридных структур SiC/Si, синтезированных методом согласованного замещения атомов и пленок AlN, GaN, AlGaIn и  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ , сформированных на гибридных подложках SiC/Si методом ХГЭ. Основные механические характеристики исследуемых кристаллов и тонких пленок, определенные из анализа данных НИ, представлены в таблице.

Приводится анализ уникальных экспериментальных данных по деформационным и механическим свойствам поверхностных слоев граней C и Si толщиной несколько десятков нанометров гексагональных кристаллов SiC. Приведено подробное описание новой аппроксимационной модели, позволяющей адекватно описывать деформационные свойства наномасштабных двухслойных пленок, включая жесткие пленки на мягких подложках, и с определенной степенью точности по экспериментальным данным определять не только микротвердость пленки и подложки, но и толщину пленки. Впервые на примере пленок SiC на Si продемонстрировано, что метод НИ может быть использован для анализа деформационных характеристик не только пленок микронной толщины, но и пленок толщиной в несколько десятков нанометров. Приведены экспериментальные значения модуля упругости и твердости наномасштабных слоев SiC, сформированных методом согласованного замещения атомов внутри матрицы Si для трех основных кристаллических плоскостей, а именно для (100), (110) и (111). Приведены экспериментальные значения упругих модулей и характеристик (модуля упругости, твердости, прочности) поверхностных слоев

**Таблица.** Механические и деформационные параметры исследуемых кристаллов и тонких пленок на гибридных подложках SiC/Si, определенные методом наноиндентирования

| Образцы                                              | $H, ГПа$                                | $E, ГПа$                     | $E'_{sur}, ГПа(1.5)$ |
|------------------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------|----------------------|
| 4H-SiC C-грань                                       | $26 \pm 1$ (1.10)                       | $320 \pm 10$ (1.11)          | $400 \pm 20$         |
| 4H-SiC Si-грань                                      | $26 \pm 1$ (1.10)                       | $320 \pm 10$ (1.11)          | $170 \pm 10$         |
| Si(001)                                              | $13.1 \pm 0.8$ (1.10)                   | $175 \pm 7$ (1.11)           | $170 \pm 10$         |
| Si(011)                                              | $13.7 \pm 0.6$ (1.10)                   | $185 \pm 4$ (1.11)           | $180 \pm 10$         |
| Si(111)                                              | $11.8 \pm 0.6$ (1.10)                   | $164 \pm 5$ (1.11)           | $110 \pm 10$         |
| SiC/Si(001)                                          | $30 \pm 12$ (1.10)<br>$39 \pm 3$ (1.12) | $370$ (1.21)<br>$315$ (1.22) | $400 \pm 40$         |
| SiC/Si(011)                                          | —                                       | —                            | $160 \pm 10$         |
| SiC/Si(111)                                          | $30 \pm 9$ (1.10)<br>$42 \pm 5$ (1.12)  | $330$ (1.21)<br>$295$ (1.22) | $350 \pm 30$         |
| AlN/SiC/Si(111)                                      | $24$ (1.18)<br>$22$ (1.19)              | $340$ (1.21)<br>$315$ (1.22) | $290 \pm 20$         |
| AlGaIn/SiC/Si(001)                                   | $15 \pm 4$ (1.10)                       | $300 \pm 100$ (1.11)         | $150 \pm 50$         |
| AlGaIn/SiC/Si(011)                                   | $12 \pm 1$ (1.10)                       | $300 \pm 40$ (1.11)          | $190 \pm 50$         |
| AlGaIn/SiC/Si(111)                                   | $18 \pm 4$ (1.10)                       | $300 \pm 40$ (1.11)          | $310 \pm 40$         |
| AlGaIn/AlN/SiC/Si(001)                               | $17 \pm 7$ (1.10)                       | $295 \pm 85$ (1.11)          | $195 \pm 60$         |
| AlGaIn/AlN/SiC/Si(011)                               | $12 \pm 1$ (1.10)                       | $260 \pm 40$ (1.11)          | $100 \pm 10$         |
| AlGaIn/AlN/SiC/Si(111)                               | $14 \pm 1$ (1.10)                       | $290 \pm 30$ (1.11)          | $160 \pm 15$         |
| GaN/SiC/Si(111)                                      | $22$ (1.18)<br>$19$ (1.19)              | $320$ (1.21)<br>$310$ (1.22) | $215 \pm 30$         |
| GaN/AlN/SiC/Si(111)                                  | $21$ (1.18)<br>$20$ (1.19)              | $330$ (1.21)<br>$270$ (1.22) | $200 \pm 20$         |
| $\beta$ -Ga <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /SiC/Si(001) | $11 \pm 1$ (1.10)                       | $215 \pm 15$ (1.11)          | $200 \pm 20$         |
| $\beta$ -Ga <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /SiC/Si(011) | $10 \pm 2$ (1.10)                       | $185 \pm 25$ (1.11)          | $120 \pm 20$         |
| $\beta$ -Ga <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /SiC/Si(111) | $9 \pm 2$ (1.10)                        | $120 \pm 15$ (1.11)          | $170 \pm 20$         |

полупроводниковых гетероструктур AlN/SiC/Si, AlGaIn/SiC/Si, AlGaIn/AlN/SiC/Si, GaN/SiC/Si и GaN/AlN/SiC/Si, выращенных на гибридных подложках SiC/Si. Подробно описана новая методика, позволяющая визуализировать остаточные



механические напряжения в прозрачном и полупрозрачном кристалле вокруг отпечатка, сформированного в процессе НИ. Приводится описание экспериментальных данных о структуре и упругопластических свойствах слоев нового материала  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, сформированных на слоях SiC, выращенных на поверхностях Si ориентаций (100), (110) и (111). Обнаружено, что кристалл  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> является ауксетиком, поскольку при некоторых направлениях растяжения его коэффициент Пуассона принимает отрицательные значения.

**Финансирование работы.** Работа выполнена в рамках госзадания ФГУП ИПМаш РАН № FFNF-2021-0001 Министерства науки и высшего образования РФ.

**Благодарности.** Исследования проводились с использованием оборудования УНУ “Физика, химия и механика кристаллов тонких пленок” ИПМаш РАН, Санкт-Петербург.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Osipov A.V., Sharofidinov S.S., Osipova E.V., Kandakov A.V., Ivanov A.Y., Kukushkin S.A. Growth and optical properties of Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> layers of different crystalline modifications // *Coatings*. 2022. V. 12. № 12. P. 1802.  
<https://doi.org/10.3390/coatings12121802>
2. Tsymbal E. Y., Žutić I. Spintronics handbook: spin transport and magnetism: volume one: metallic spintronics. CRC press. 2019. P. 600.  
<https://doi.org/10.1201/9780429441189>
3. Doherty M.W., Manson N.B., Delaney P., Jelezko F., Wrachtrup J., Hollenberg L.C. The nitrogen-vacancy colour centre in diamond // *Phys. Rep.* 2013. V. 528. № 1. P. 1–45.  
<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2013.02.001>
4. Von Bardeleben H.J., Zargaleh S.A., Cantin J.L., Gao W.B., Biktagirov T., Gerstmann U. Transition metal qubits in 4 H-silicon carbide: A correlated EPR and DFT study of the spin S = 1 vanadium V<sup>3+</sup> center // *Phys. Rev. Mater.* 2019. V. 3. № 12. P. 124605.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevMaterials.3.124605>
5. Kukushkin S.A., Nikolaev V.I., Osipov A.V., Osipova E.V., Pechnikov A.I., Feoktistov N.A. Epitaxial gallium oxide on a SiC/Si substrate // *Phys. Solid State*. 2016. V. 58. P. 1876–1881.  
<https://doi.org/10.1134/S1063783416090201>
6. Kukushkin S.A., Osipov A.V. New method for growing silicon carbide on silicon by solid-phase epitaxy: Model and experiment // *Phys. Solid State*. 2008. V. 50. P. 1238–245.  
<https://doi.org/10.1134/S1063783408070081>
7. Kukushkin S.A., Osipov A.V. Theory and practice of SiC growth on Si and its applications to wide-gap semiconductor films // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2014. V. 47. № 31. P. 313001.  
<http://dx.doi.org/10.1088/0022-3727/47/31/313001>
8. Kukushkin S.A., Osipov A.V., Feoktistov N.A. Synthesis of epitaxial silicon carbide films through the substitution of atoms in the silicon crystal lattice: A review // *Phys. Solid State*. 2014. V. 56. P. 1507–1535.  
<https://doi.org/10.1134/S1063783414080137>
9. Goldstein R.V., Morozov N.F. Mechanics of deformation and fracture of nanomaterials and nanotechnology // *Phys. Mesomech.* 2007. V. 10. № 5–6. P. 235–246.  
<https://doi.org/10.1016/j.physme.2007.11.002>
10. Овидько И.А., Семенов Б.Н., Шейнерман А.Г. Механика деформируемых наноматериалов. СПб.: Изд-во С.-Петербурга. ун-та, 2012. 156 с.

11. Бочкарев А.О., Греков М.А. Влияние поверхностных напряжений на жесткостные свойства и устойчивость нанопластины в задаче Кириша // Физ. мезомех. 2017. Т. 20. № 6. С. 62–76.  
<https://doi.org/10.24411/1683-805X-2017-00068>
12. Golovin Y.I. Nanoindentation and mechanical properties of solids in submicrovolumes, thin near-surface layers, and films: A Review // Phys. Solid State. 2008. V. 50. P. 2205–2236.  
<https://doi.org/10.1134/S1063783408120019>
13. Fischer-Cripps A.C. Nanoindentation test standards. Springer New York, 2011.  
[https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9872-9\\_10](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9872-9_10)
14. Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V., Redkov A.V. Nanoindentation of GaN/SiC thin films on silicon substrate // J. Phys. Chem. Solids. 2017. V. 102. P. 151–156.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jpcs.2016.11.004>
15. Guzilova L.I., Grashchenko A.S., Butenko P.N., Chikiryaka A.V., Pechnikov A.I., Nikolaev V.I. Mechanical properties of epilayers of metastable  $\alpha$ - and  $\epsilon$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> phases studied by nanoindentation // Tech. Phys. Lett. 2021. V. 47. № 10. P. 709–713.  
<https://doi.org/10.1134/S106378502107021X>
16. Vettegren V.I., Bashkarev A.Y., Mamalimov R.I., Shcherbakov I.P. Fractoluminescence of crystalline quartz upon an impact // Phys. Solid State. 2008. V. 50. P. 28–31.  
<https://doi.org/10.1134/S1063783408010071>
17. Herrmann K., Jennett N.M., Wegener W., Meneve J., Hasche K., Seemann R. Progress in determination of the area function of indenters used for nanoindentation // Thin Solid Films. 2000. V. 377. P. 394–400.  
[https://doi.org/10.1016/S0040-6090\(00\)01367-5](https://doi.org/10.1016/S0040-6090(00)01367-5)
18. Enders S., Grau P., Hawthorne H.M. Determination of the real indenter shape for nanoindentation/nanotribology tests by surface metrological and analytical investigations // MRS Online Proc. Libr. 2000. V. 649. P. 36.  
<https://doi.org/10.1557/PROC-649-Q3.6>
19. Hertz H. On the contact of elastic solids // J. Reine Angew. Math. 1881. V. 92. P. 146–162.
20. Hertz H. On hardness // Verh. Ver. Beförderung Gewerbe Fleisses. 1882. V. 61. P. 410.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
22. Oliver W.C., Pharr G.M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments // J. Mater. Res. 1992. V. 7. № 6. P. 1564–1583.  
<https://doi.org/10.1557/JMR.1992.1564>
23. Chen X., Zhang S., Wagner G.J., Ding W., Ruoff R.S. Mechanical resonance of quartz microfibers and boundary condition effects // J. Appl. Phys. 2004. V. 95. № 9. P. 4823–4828.  
<https://doi.org/10.1063/1.1697635>
24. Мощенко В.И. Наноиндентирование и нанотвердость материалов // Автомобильный транспорт. 2008. № 22.
25. Пятак А.И., Мощенко, В.И., Дощечкина И.В., Кухарева И.Е. Новые принципы оценки твердости массового контроля качества деталей машин // Вісник Харківського національного автомобільно-дорожного університету. 2008. № 43.
26. Weihs T.P., Hong S., Bravman J.C., Nix W.D. Mechanical deflection of cantilever microbeams: A new technique for testing the mechanical properties of thin films // J. Mater. Res. 1988. V. 3. № 5. P. 931–942.  
<https://doi.org/10.1557/JMR.1988.0931>
27. Böklén R. The Science of Hardness Testing and Its Applications // H. Westbrook, H. Conrad, ASM, Metals Park, OH. 1973. 109 p.
28. Jönsson B., Hogmark S. Hardness measurements of thin films // Thin Solid Films. 1984. V. 114. № 3. P. 257–269.



- [https://doi.org/10.1016/0040-6090\(84\)90123-8](https://doi.org/10.1016/0040-6090(84)90123-8)
29. *Bhattacharya A.K., Nix W.D.* Finite element simulation of indentation experiments // *Int. J. Solids Struct.* 1988. V. 24. № 9. P. 881–891.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(88\)90039-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(88)90039-X)
30. *Korsunsky A.M., McGurk M.R., Bull S.J., Page T.F.* On the hardness of coated systems // *Surf. Coat. Technol.* 1998. V. 99. № 1–2. P. 171–183.  
[https://doi.org/10.1016/S0257-8972\(97\)00522-7](https://doi.org/10.1016/S0257-8972(97)00522-7)
31. *Puchi-Cabrera E.S., Berrios J.A., Teer D.G.* On the computation of the absolute hardness of thin solid films // *Surf. Coat. Technol.* 2002. V. 157. № 2–3. P. 185–196.  
[https://doi.org/10.1016/S0257-8972\(02\)00153-6](https://doi.org/10.1016/S0257-8972(02)00153-6)
32. *Doerner M.F., Nix W.D.* A method for interpreting the data from depth-sensing indentation instruments // *J. Mater. Res.* 1986. V. 1. № 4. P. 601–609.  
<https://doi.org/10.1557/JMR.1986.0601>
33. *Huajian G., Cheng-Hsin C., Jin L.* Elastic contact versus indentation modeling of multi-layered materials // *Int. J. Solids Struct.* 1992. V. 29. № 20. P. 2471–2492.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90004-D](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90004-D)
34. *Osipov A.V., Grashchenko A.S., Gorlyak A.N., Lebedev A.O., Luchinin V.V., Markov A.V., Panov M.F., Kukushkin S.A.* Investigation of the hardness and young's modulus in thin near-surface layers of silicon carbide from the Si- and C-faces by nanoindentation // *Tech. Phys. Lett.* 2020. V. 46. № 8. P. 763–766.  
<https://doi.org/10.1134/S106378502008012X>
35. *Avrov D.D., Lebedev A.O., Tairov Y.M.* Polytype inclusions and polytype stability in silicon-carbide crystals // *Semiconductors.* 2016. V. 50. P. 494–501.  
<https://doi.org/10.1134/S1063782616040059>
36. *Ning X.J., Huvey N., Pirouz P.* Dislocation Cores and hardness polarity of 4H-SiC // *J. Am. Ceram. Soc.* 1997. V. 80. № 7. P. 1645–1652.  
<https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1997.tb03033.x>
37. *Filimonov S.N.* Ab initio calculations of absolute surface energies of clean and hydrogen covered 3C-SiC (001), (110) and (111) surfaces // *Materials Science Forum. Trans Tech Publications Ltd.* 2015. V. 821. P. 363–366.  
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.821-823.363>
38. *Rebinder P.A., Shchukin E.D.* Surface phenomena in solids during the course of their deformation and failure // *Sov. Phys. Usp.* 1973. V. 15. № 5. P. 533–554.  
<https://doi.org/10.1070/PU1973v015n05ABEH005002>
39. *Osipov A.V.* A continuum model for thin-film condensation // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1995. V. 28. № 8. P. 1670.  
<https://doi.org/10.1088/0022-3727/28/8/016>
40. *Kaneko T., Yamasaki T., Tajima N., Ohno T.* First-principles study on reconstruction of 4H-SiC (0001) and (000  $\bar{1}$ ) // *Surf. Sci.* 2016. V. 647. P. 45–50.  
<https://doi.org/10.1016/j.susc.2015.11.019>
41. *Czochralski J.* A new method for the measurement of the crystallization rate of metals // *Zeitschrift für physikalische Chemie.* 1918. V. 92. P. 219–221.
42. *Huang H., Yan J.* Possibility for rapid generation of high-pressure phases in single-crystal silicon by fast nanoindentation // *Semicond. Sci. Technol.* 2015. V. 30. № 11. P. 115001.  
<https://doi.org/10.1088/0268-1242/30/11/115001>
43. *Wang S., Liu H., Xu L., Du X., Zhao D., Zhu B., Zhu B., Yu M., Zhao H.* Investigations of phase transformation in monocrystalline silicon at low temperatures via nanoindentation // *Sci. Rep.* 2017. V. 7. № 1. P. 8682.  
<https://doi.org/10.1038/s41598-017-09411-x>

44. *Shugurov A.R., Panin A.V., Oskomov K.V.* Specific features of the determination of the mechanical characteristics of thin films by the nanoindentation technique // *Phys. Solid State*. 2008. V. 50. P. 1050–1055.  
<https://doi.org/10.1134/S1063783408060097>
45. *Bhushan B.* Nanotribology and Nanomechanics. V. 1. Measurement techniques and nanomechanics. 2011. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-15283-2>
46. *Hay J.L., O'Hern M.E., Oliver W.C.* Tie Importance of Contact Radius for Substrate-Independent Property Measurement of Thin Films // *MRS Online Proc. Libr.* 1998. V. 522. № 1. P. 27–32.  
<https://doi.org/10.1557/PROC-522-27>
47. *Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V.* Nanoindentation and deformation properties of nanoscale silicon carbide films on silicon substrate // *Tech. Phys. Lett.* 2014. V. 40. P. 1114–1116.  
<https://doi.org/10.1134/S1063785014120268>
48. *Quay R.* Gallium nitride electronics. Springer Science and Business Media, 2008. V. 96.
49. *Iost A., Guillemot G., Rudermann Y., Biggerelle M.* A comparison of models for predicting the true hardness of thin films // *Thin Solid Films*. 2012. V. 524. P. 229–237.  
<https://doi.org/10.1016/j.tsf.2012.10.017>
50. *Westbrook J.H., Peyer H.C.* The science of hardness testing and its research applications // (No Title). 1973. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:60081093>
51. *Chicot D., Lesage J.* Absolute hardness of films and coatings // *Thin Solid Films*. 1995. V. 254. № 1–2. P. 123–130. h  
[https://doi.org/10.1016/0040-6090\(94\)06239-H](https://doi.org/10.1016/0040-6090(94)06239-H)
52. *Losurdo M., Hingerl K.* Ellipsometry at the Nanoscale. Berlin: Springer, 2013. P. 730.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-33956-1>
53. *Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V.* Microhardness study of two-layer nanostructures by a nanoindentation method // *Mater. Phys. Mech.* 2015. V. 24. № 1. P. 35–40.  
[https://mpm.spbstu.ru/userfiles/files/MPM124\\_05\\_grashchenko.pdf](https://mpm.spbstu.ru/userfiles/files/MPM124_05_grashchenko.pdf)
54. *Kukushkin S.A., Osipov A.V.* Epitaxial silicon carbide on silicon. method of coordinated substitution of atoms (a review) // *Russ. J. Gen. Chem.* 2022. V. 92. № 4. P. 584–610.  
<https://doi.org/10.1134/S1070363222040028>
55. *Бессолов В.Н., Давыдов В.Ю., Жилев Ю.В., Коненкова Е.В., Мосина Г.Н., Раевский С.Д., Родин С.Н.* Хлоридная газофазная эпитаксия GaN слоев, выращенных на подложке Si (111) с AlN буферным подслоем // *Письма в ЖТФ*. 2005. V. 31. № 21. С. 30–36.  
URL: <http://j.ioffe.ru/articles/viewPDF/13374>
56. *Bessolov V.N., Zhilyaev Y.V., Konenkova E.V., Sorokin L.M., Feoktistov N.A., Sharofidinov S.S., Shcheglov M.P., Kukushkin S.A., Mets L.I., Osipov A.V.* Aluminum nitride on silicon: Role of silicon carbide interlayer and chloride vapor-phase epitaxy technology // *Tech. Phys. Lett.* 2010. V. 36. P. 496–499.  
<https://doi.org/10.1134/S1063785010060039>
57. *Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V.* Elastic properties of GaN and AlN films formed on SiC/Si hybrid substrate, a porous basis // *Mech. Solids*. 2020. V. 55. P. 157–161.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654420020107>
58. *Kukushkin S.A., Sharofidinov Sh.Sh., Osipov A.V., Redkov A.V., Kidalov V.V., Grashchenko A.S., Soshnikov I.P., Dydenchuk A.F.* The mechanism of growth of GaN films by the HVPE method on SiC synthesized by the substitution of atoms on porous Si substrates // *ECS J. Solid State Sci. Technol.* 2018. V. 7. № 9. P. 480.  
<https://doi.org/10.1149/2.0191809jss>

59. Zhang W., Li J., Xing Y., Nie X., Lang F., Yang S., Hou X., Zhao C. Experimental study on the thickness-dependent hardness of SiO<sub>2</sub> thin films using nanoindentation // *Coatings*. 2020. V. 11. № 1. P. 23.  
<https://doi.org/10.3390/coatings11010023>
60. Shaohua C., Lei L., Tzuchiang W. Nanoindentation of thin-film-substrate system: determination of film hardness and Young's modulus // *Acta Mech. Sin.* 2004. V. 20. № 4. P. 383–392.  
<https://doi.org/10.1007/BF02489376>
61. Zhang Z., Ni Y., Zhang J., Wang C., Ren X. Multiscale analysis of size effect of surface pit defect in nanoindentation // *Micromachines*. 2018. V. 9. № 6. P. 298.  
<https://doi.org/10.3390/mi9060298>
62. Zhang Z., Ni Y. Multiscale analysis of delay effect of dislocation nucleation with surface pit defect in nanoindentation // *Comput. Mater. Sci.* 2012. V. 62. P. 203–209.  
<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2012.05.047>
63. Tripathy S., Chua S.J., Chen P., Miao Z.L. Micro-Raman investigation of strain in GaN and Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>N/GaN heterostructures grown on Si (111) // *J. Appl. Phys.* 2002. V. 92. № 7. P. 3503–3510.  
<https://doi.org/10.1063/1.1502921>
64. Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V., Sharofidinov S.S. Nanoindentation of AlGaIn films formed on SiC/Si substrates grown by the method of coordinated substitution of atoms // *Mech. Solids*. 2023. V. 58. № 4. P. 1089–1097. <https://doi.org/10.3103/S0025654423700164>
65. Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V., Sharofidinov S.S. Self-organization of the composition of Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>N films grown on hybrid SiC/Si substrates // *Phys. Solid State*. 2021. V. 63. P. 442–448.  
<https://doi.org/10.1134/S1063783421030100>
66. Rawdanowicz T.A., Sankar J., Narayan J., Godbole V. Hardness and elastic modulus measurements of AlN and TiN sub-micron thin films using the continuous stiffness measurement technique with fem analysis // *MRS Online Proc. Libr.* 1999. V. 594.  
<https://doi.org/10.1557/PROC-594-507>
67. Nowak R., Pessa M., Suganuma M., Leszczynski M., Grzegory I., Porowski S., Yoshida F. Elastic and plastic properties of GaN determined by nano-indentation of bulk crystal // *Appl. Phys. Lett.* 1999. V. 75. № 14. P. 2070–2072.  
<https://doi.org/10.1063/1.124919>
68. Wu Y.Q., Gao S., Huang H. The deformation pattern of single crystal β-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> under nanoindentation // *Mater. Sci. Semicond. Process.* 2017. V. 71. P. 321–325.  
<https://doi.org/10.1016/j.mssp.2017.08.019>
69. Гузилова Л.И., Гращенко А.С., Печников А.И., Маслов В.Н., Завьялов Д.В., Абдрахманов В.Л., Романов А.Е., Николаев В.И. Исследование эпитаксиальных слоев и монокристаллов β-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> методом наноиндентирования // *Mater. Phys. Mech.* 2016. V. 29. № 2. P. 166. URL: [https://www.ipme.ru/e-journals/MPM/no\\_22916/MPM229\\_09\\_guzilova.pdf](https://www.ipme.ru/e-journals/MPM/no_22916/MPM229_09_guzilova.pdf)
70. Osipov A.V., Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Nikolaev V.I., Osipova E.V., Pechnikov A.I., Soshnikov I.P. Structural and elastoplastic properties of β-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> films grown on hybrid SiC/Si substrates // *Continuum Mech. Thermodyn.* 2018. V. 30. P. 1059–1068.  
<https://doi.org/10.1007/s00161-018-0662-6>
71. Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V. Study of elastic properties of SiC films synthesized on Si substrates by the method of atomic substitution // *Phys. Solid State*. 2019. V. 61. P. 2310–2312.  
<https://doi.org/10.1134/S106378341912014X>
72. Nye J.F. Physical properties of crystals: their representation by tensors and matrices. Oxford university press, 1985.

- <https://doi.org/10.1088/0031-9112/36/12/027>
73. Lee J.G. Computational materials science: an introduction. CRC press, 2016.  
<https://doi.org/10.1201/9781315368429>
  74. Giannozzi P., Baroni S., Bonini N. et al. Quantum espresso: A modular and open-source software project for quantum simulations of materials // J. Phys.: Condens. Matter. 2009. V. 21. № 39. P. 395502.  
<https://doi.org/10.1088/0953-8984/21/39/395502>
  75. Perdew J.P., Ruzsinszky A., Csonka G.I., Vydrov O.A., Scuseria G.E., Constantin L.A., Zhou X., Burke K. Restoring the density-gradient expansion for exchange in solids and surfaces // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. № 13. P. 136406.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.136406>
  76. Oshima Y., Ahmadi E., Badescu S.C., Wu F., Speck, J.S. Composition determination of  $\beta$ -(Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>)<sub>2</sub>O<sub>3</sub> layers coherently grown on (010)  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> substrates by high-resolution X-ray diffraction // Appl. Phys. Express. 2016. V. 9. № 6. P. 061102.  
<https://doi.org/10.7567/apex.9.061102>
  77. Gaillac R., Pullumbi P., Coudert F.X. Elate: an open-source online application for analysis and visualization of elastic tensors // J. Phys.: Condens. Matter. 2016. V. 28. № 27. P. 275201.  
<https://doi.org/10.1088/0953-8984/28/27/275201>
  78. Galanov B.A., Domnich V., Gogotsi Y. Elastic-plastic contact mechanics of indentations accounting for phase transformations // Exp. Mech. 2003. V. 43. P. 303–308.  
<https://doi.org/10.1007/BF02410528>

## NANOINDENTATION OF NANO-SIC/SI HYBRID CRYSTALS AND ALN, ALGAN, GAN, GA<sub>2</sub>O<sub>3</sub> THIN FILMS ON NANO-SIC/SI

A. S. Grashchenko<sup>a,\*</sup>, S.A. Kukushkin<sup>a,\*\*</sup>, A.V. Osipov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy  
of Sciences, St. Petersburg, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: asgrashchenko@bk.ru;*

<sup>\*\*</sup>*e-mail: sergey.a.kukushkin@gmail.com*

**Abstract** – The review presents systematization and analysis of experimental data on nanoindentation (NI) of a whole class of new materials – wide-gap AlN, GaN, AlGaN and  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> heterostructures formed on a hybrid substrate of a new SiC/Si type, which were synthesized by the method of coordinated atom substitution. The deformational and mechanical properties of the investigated materials are described in detail. The methodology of the NI is described, and both advantages and disadvantages of the NI method were analyzed. The description of the apparatus to conduct the experiments on NI was given. The basic provisions of a new model for describing the deformation properties of a nanoscale rigid two-layer structure on a porous elastic base were proposed. The original method of visualization of residual (after mechanical interaction) deformation in transparent and translucent materials was described. Experimentally determined values of elastic moduli and hardness of SiC nanoscale layers on Si formed by the method of coordinated substitution on three main crystal planes of Si, namely (100), (110) and (111), and elastic moduli and characteristics (elastic modulus, hardness, strength) of surface layers of semiconductor heterostructures AlN/SiC/Si, AlGaN/SiC/Si, AlGaN/AlN/SiC/Si,

GaN/SiC/Si and GaN/AlN/SiC/Si grown on SiC/Si hybrid substrates. The unique mechanical properties of a new material  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> formed on SiC layers grown on Si surfaces of orientations (100), (110) and (111) were described.

*Keywords:* nanoindentation, thin films, heterostructures, wide-gap semiconductors, silicon carbide, SiC/Si, AlN, GaN, AlGaIn, Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, hardness, modulus of elasticity

## REFERENCES

1. *Osipov A.V., Sharofidinov S.S., Osipova E.V. et al.* Growth and Optical Properties of Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> Layers of Different Crystalline Modifications // *Coatings*. 2022. V. 12. № 12. P. 1802; <https://doi.org/10.3390/coatings12121802>
2. *Tsymbal E.Y., Žutić I.* Spintronics Handbook: Spin Transport and Magnetism: Volume One: Metallic Spintronics. CRC press. 2019. P. 600; <https://doi.org/10.1201/9780429441189>
3. *Doherty M.W., Manson N.B., Delaney P. et al.* The nitrogen-vacancy colour centre in diamond // *Phys. Rep.* 2013. V. 528. № 1. P. 1–45; <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2013.02.001>
4. *Von Bardeleben H.J., Zargaleh S.A., Cantin J.L. et al.* Transition metal qubits in 4 H-silicon carbide: A correlated EPR and DFT study of the spin S = 1 vanadium V3+ center // *Phys. Rev. Mater.* 2019. V. 3. № 12. P. 124605; <https://doi.org/10.1103/PhysRevMaterials.3.124605>
5. *Kukushkin S.A., Nikolaev V.I., Osipov A.V. et al.* Epitaxial gallium oxide on a SiC/Si substrate // *Phys. Solid State*. 2016. V. 58. P. 1876–1881; <https://doi.org/10.1134/S1063783416090201>
6. *Kukushkin S.A., Osipov A.V.* New method for growing silicon carbide on silicon by solid-phase epitaxy: Model and experiment // *Phys. Solid State*. 2008. V. 50. P. 1238–1245; <https://doi.org/10.1134/S1063783408070081>
7. *Kukushkin S.A., Osipov A.V.* Theory and practice of SiC growth on Si and its applications to wide-gap semiconductor films // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2014. V. 47. № 31. P. 313001; <http://doi.org/10.1088/0022-3727/47/31/313001>
8. *Kukushkin S.A., Osipov A.V., Feoktistov N.A.* Synthesis of epitaxial silicon carbide films through the substitution of atoms in the silicon crystal lattice: A review // *Phys. Solid State*. 2014. V. 56. P. 1507–1535; <https://doi.org/10.1134/S1063783414080137>
9. *Goldstein R.V., Morozov N.F.* Mechanics of deformation and fracture of nanomaterials and nanotechnology // *Phys. Mesomech.* 2007. V. 10. № 5–6. P. 235–246; <https://doi.org/10.1016/j.physme.2007.11.002>
10. *Ovidko I.A., Semyonov B.N., Sheinerman A.G.* Mechanics of deformable nanomaterials. St. Petersburg: St. Petersburg State University Publishing House., 2012. P. 156.
11. *Bochkarev A.O., Grekov M.A.* Influence of surface stresses on the nanoplate stiffness and stability in the Kirsch problem // *Phys. Mesomech.* 2019. V. 22. P. 209–223; <https://doi.org/10.1134/S1029959919030068>
12. *Golovin Y.I.* Nanoindentation and mechanical properties of solids in submicrovolumes, thin near-surface layers, and films: A Review // *Phys. Solid State*. 2008. V. 50. P. 2205–2236; <https://doi.org/10.1134/S1063783408120019>
13. *Fischer-Cripps A.C.* Nanoindentation test standards. Springer New York, 2011;

- [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9872-9\\_10](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9872-9_10)
14. *Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V., Redkov A.V.* Nanoindentation of GaN/SiC thin films on silicon substrate // *J. Phys. Chem. Solids*. 2017. V. 102. P. 151–156;  
<http://doi.org/10.1016/j.jpcs.2016.11.004>
  15. *Guzilova L.I., Grashchenko A.S., Butenko P.N. et al.* Mechanical Properties of Epilayers of Metastable  $\alpha$ - and  $\epsilon$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> Phases Studied by Nanoindentation // *Tech. Phys. Lett.* 2021. P. 1–5;  
<https://doi.org/10.1134/S106378502107021X>
  16. *Vettegren V.I., Bashkarev A.Y., Mamalimov R.I., Shcherbakov I.P.* Fractoluminescence of crystalline quartz upon an impact // *Phys. Solid State*. 2008. V. 50. P. 28–31;  
<https://doi.org/10.1134/S1063783408010071>
  17. *Herrmann K., Jennett N.M., Wegener W. et al.* Progress in determination of the area function of indenters used for nanoindentation // *Thin solid films*. 2000. V. 377. P. 394–400;  
[https://doi.org/10.1016/S0040-6090\(00\)01367-5](https://doi.org/10.1016/S0040-6090(00)01367-5)
  18. *Enders S., Grau P., Hawthorne H.M.* Determination of the real indenter shape for nanoindentation/nanotribology tests by surface metrological and analytical investigations // *MRS Online Proc. Libr.* 2000. V. 649. P. Q3. 6;  
<https://doi.org/10.1557/PROC-649-Q3.6>
  19. *Hertz H.* On the contact of elastic solids // *J. Reine Angew. Math.* 1881. V. 92. P. 146–162.
  20. *Hertz H.* On hardness // *Verh. Ver. Beförderung Gewerbe Fleisses*. 1882. V. 61. P. 410.
  21. *Landau L.D., Lifshits E.M.* Theory of Elasticity. M.: Nauka, 1965. P. 204.
  22. *Oliver W.C., Pharr G.M.* An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments // *J. Mater. Res.* 1992. V. 7. № 6. P. 1564–1583;  
<https://doi.org/10.1557/JMR.1992.1564>
  23. *Chen X., Zhang S., Wagner G.J. et al.* Mechanical resonance of quartz microfibers and boundary condition effects // *J. Appl. Phys.* 2004. V. 95. № 9. P. 4823–4828;  
<https://doi.org/10.1063/1.1697635>
  24. *Moschenok V.I.* Nanoindentation and nanohardness of materials // *Automobile transport*. 2008. № 22.
  25. *Pyatak A.I., Moshenok V.I., Doschechkina I.V., Kukhareva I.E.* New principles of hardness evaluation of mass quality control of machine parts // *Bulletin of Kharkiv National Automobile and Highway University*. 2008. № 43.
  26. *Weihs T.P., Hong S., Bravman J.C., Nix W.D.* Mechanical deflection of cantilever microbeams: A new technique for testing the mechanical properties of thin films // *J. Mater. Res.* 1988. V. 3. № 5. P. 931–942;  
<https://doi.org/10.1557/JMR.1988.0931>
  27. *Böcklen R.* The Science of Hardness Testing and Its Applications // H. Westbrook, H. Conrad, ASM, Metals Park, OH. 1973. 109 p.
  28. *Jönsson B., Hogmark S.* Hardness measurements of thin films // *Thin solid films*. 1984. V. 114. № 3. P. 257–269;  
[https://doi.org/10.1016/0040-6090\(84\)90123-8](https://doi.org/10.1016/0040-6090(84)90123-8)
  29. *Bhattacharya A.K., Nix W.D.* Finite element simulation of indentation experiments // *Int. J. Solids Struct.* 1988. V. 24. № 9. P. 881–891;  
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(88\)90039-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(88)90039-X)
  30. *Korsunsky A.M., McGurk M.R., Bull S.J., Page T.F.* On the hardness of coated systems // *Surf. Coat. Technol.* 1998. V. 99. № 1–2. P. 171–183;  
[https://doi.org/10.1016/S0257-8972\(97\)00522-7](https://doi.org/10.1016/S0257-8972(97)00522-7)
  31. *Puchi-Cabrera E.S., Berrios J.A., Teer D.G.* On the computation of the absolute hardness of thin solid films // *Surf. Coat. Technol.* 2002. V. 157. № 2–3. P. 185–196;  
[https://doi.org/10.1016/S0257-8972\(02\)00153-6](https://doi.org/10.1016/S0257-8972(02)00153-6)



32. *Doerner M.F., Nix W.D.* A method for interpreting the data from depth-sensing indentation instruments // *J. Mater. Res.* 1986. V. 1. № 4. P. 601–609;  
<https://doi.org/10.1557/JMR.1986.0601>
33. *Huajian G., Cheng-Hsin C., Jin L.* Elastic contact versus indentation modeling of multi-layered materials // *Int. J. Solids Struct.* 1992. V. 29. № 20. P. 2471–2492;  
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90004-D](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90004-D)
34. *Osipov A.V., Grashchenko A.S., Gorlyak A.N. et al.* Investigation of the hardness and young's modulus in thin near-surface layers of silicon carbide from the Si-and C-faces by nanoindentation // *Tech. Phys. Lett.* 2020. V. 46. № 8. P. 763–766;  
<https://doi.org/10.1134/S106378502008012X>
35. *Avrov D.D., Lebedev A.O., Tairov Y.M.* Polytype inclusions and polytype stability in silicon-carbide crystals // *Semiconductors.* 2016. V. 50. P. 494–501;  
<https://doi.org/10.1134/S1063782616040059>
36. *Ning X.J., Huvey N., Pirouz P.* Dislocation Cores and Hardness Polarity of 4H-SiC // *J. Am. Ceram. Soc.* 1997. V. 80. № 7. P. 1645–1652;  
<https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1997.tb03033.x>
37. *Filimonov S.N.* Ab initio calculations of absolute surface energies of clean and hydrogen covered 3C-SiC (001), (110) and (111) surfaces // *Materials Science Forum. Trans Tech Publications Ltd.* 2015. V. 821. P. 363–366;  
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.821-823.363>
38. *Rebinder P.A., Shchukin E.D.* Surface phenomena in solids during the course of their deformation and failure // *Sov. Phys. Usp.* 1973. V. 15. № 5. P. 533–554;  
<https://doi.org/10.1070/PU1973v015n05ABEH005002>
39. *Osipov A.V.* A continuum model for thin-film condensation // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1995. V. 28. № 8. P. 1670;  
<https://doi.org/10.1088/0022-3727/28/8/016>
40. *Kaneko T., Yamasaki T., Tajima N., Ohno T.* First-principles study on reconstruction of 4H-SiC (0001) and (0001 $\bar{1}$ ) // *Surf. Sci.* 2016. V. 647. P. 45–50;  
<https://doi.org/10.1016/j.susc.2015.11.019>
41. *Czochralski J.* A new method for the measurement of the crystallization rate of metals // *Zeitschrift für physikalische Chemie.* 1918. V. 92. P. 219–221.
42. *Huang H., Yan J.* Possibility for rapid generation of high-pressure phases in single-crystal silicon by fast nanoindentation // *Semicond. Sci. Technol.* 2015. V. 30. № 11. P. 115001;  
<https://doi.org/10.1088/0268-1242/30/11/115001>
43. *Wang S., Liu H., Xu L. et al.* Investigations of phase transformation in monocrystalline silicon at low temperatures via nanoindentation // *Sci. Rep.* 2017. V. 7. № 1. P. 8682;  
<https://doi.org/10.1038/s41598-017-09411-x>
44. *Shugurov A.R., Panin A.V., Oskomov K.V.* Specific features of the determination of the mechanical characteristics of thin films by the nanoindentation technique // *Phys. Solid State.* 2008. V. 50. P. 1050–1055;  
<https://doi.org/10.1134/S1063783408060097>
45. *Bhushan B.* Nanotribology and Nanomechanics. Vol. 1. Measurement techniques and nanomechanics. 2011;  
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-15283-2>
46. *Hay J.L., O'Hern M.E., Oliver W.C.* Tie Importance of Contact Radius for Substrate-Independent Property Measurement of Thin Films // *MRS Online Proc. Libr.* 1998. V. 522. № 1. P. 27–32;  
<https://doi.org/10.1557/PROC-522-27>
47. *Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V.* Nanoindentation and deformation properties of nanoscale silicon carbide films on silicon substrate // *Tech. Phys. Lett.* 2014. V. 40. P. 1114–1116;  
<https://doi.org/10.1134/S1063785014120268>

48. Quay R. Gallium nitride electronics. Springer Science and Business Media, 2008. V. 96.
49. Iost A., Guillemot G., Rudermann Y., Biggerelle M. A comparison of models for predicting the true hardness of thin films // *Thin Solid Films*. 2012. V. 524. P. 229–237;  
<https://doi.org/10.1016/j.tsf.2012.10.017>
50. Westbrook J.H., Peyer H.C. The science of hardness testing and its research applications // (No Title). 1973;  
URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:60081093>
51. Chicot D., Lesage J. Absolute hardness of films and coatings // *Thin solid films*. 1995. V. 254. № 1–2. P. 123–130;  
[https://doi.org/10.1016/0040-6090\(94\)06239-H](https://doi.org/10.1016/0040-6090(94)06239-H)
52. Losurdo M., Hingerl K. Ellipsometry at the Nanoscale. Berlin: Springer. 2013. P. 730;  
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-33956-1>
53. Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V. Microhardness study of two-layer nanostructures by a nanoindentation method // *Mater. Phys. Mech*. 2015. V. 24. № 1. P. 35–40;  
URL: [https://mpm.spbstu.ru/userfiles/files/MPM124\\_05\\_grashchenko.pdf](https://mpm.spbstu.ru/userfiles/files/MPM124_05_grashchenko.pdf)
54. Kukushkin S.A., Osipov A.V. Epitaxial silicon carbide on silicon. method of coordinated substitution of atoms (a review) // *Russ. J. Gen. Chem*. 2022. V. 92. № 4. P. 584–610;  
<https://doi.org/10.1134/S1070363222040028>
55. Bessolov V.N., Davydov V.Y., Zhilyaev Y.V. et al. Chloride gas-phase epitaxy of GaN layers grown on Si (111) substrate with AlN buffer sublayer // *Tech. Phys. Lett*. 2005. V. 31. № 21. P. 30–36;  
URL: <http://j.ioffe.ru/articles/viewPDF/13374>
56. Bessolov V.N., Zhilyaev Y.V., Konenkova E.V. et al. Aluminum nitride on silicon: Role of silicon carbide interlayer and chloride vapor-phase epitaxy technology // *Tech. Phys. Lett*. 2010. V. 36. P. 496–499;  
<https://doi.org/10.1134/S1063785010060039>
57. Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V. Elastic properties of GaN and AlN films formed on SiC/Si hybrid substrate, a porous basis // *Mech. Solids*. 2020. V. 55. P. 157–161;  
<https://doi.org/10.3103/S0025654420020107>
58. Kukushkin S.A., Sharofidinov Sh.Sh., Osipov A.V. et al. The mechanism of growth of GaN films by the HVPE method on SiC synthesized by the substitution of atoms on porous Si substrates // *ECS J. Solid State Sci. Technol*. 2018. V. 7. № 9. P. 480;  
<https://doi.org/10.1149/2.0191809js>
59. Zhang W., Li J., Xing Y. et al. Experimental study on the thickness-dependent hardness of SiO<sub>2</sub> thin films using nanoindentation // *Coatings*. 2020. V. 11. № 1. P. 23;  
<https://doi.org/10.3390/coatings11010023>
60. Shaohua C., Lei L., Tzuchiang W. Nanoindentation of thin-film-substrate system: determination of film hardness and Young's modulus // *Acta Mech. Sin*. 2004. V. 20. № 4. P. 383–392;  
<https://doi.org/10.1007/BF02489376>
61. Zhang Z., Ni Y., Zhang J. et al. Multiscale analysis of size effect of surface pit defect in nanoindentation // *Micromachines*. 2018. V. 9. № 6. P. 298;  
<https://doi.org/10.3390/mi9060298>
62. Zhang Z., Ni Y. Multiscale analysis of delay effect of dislocation nucleation with surface pit defect in nanoindentation // *Comput. Mater. Sci*. 2012. V. 62. P. 203–209;  
<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2012.05.047>
63. Tripathy S., Chua S.J., Chen P., Miao Z.L. Micro-Raman investigation of strain in GaN and Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>N/GaN heterostructures grown on Si (111) // *J. Appl. Phys*. 2002. V. 92. № 7. P. 3503–3510;  
<https://doi.org/10.1063/1.1502921>



64. *Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V., Sharofidinov S.S.* Nanoindentation of AlGa<sub>N</sub> Films Formed on SiC/Si Substrates Grown by the Method of Coordinated Substitution of Atoms // *Mech. Solids*. 2023. V. 58. № 4. P. 1089–1097; <https://doi.org/10.3103/S0025654423700164>
65. *Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V., Sharofidinov S.S.* Self-Organization of the Composition of Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>N Films Grown on Hybrid SiC/Si Substrates // *Phys. Solid State*. 2021. V. 63. P. 442–448; <https://doi.org/10.1134/S1063783421030100>
66. *Rawdanowicz T.A., Sankar J., Narayan J., Godbole V.* Hardness and Elastic Modulus Measurements of AlN and TiN Sub-Micron Thin Films Using the Continuous Stiffness Measurement Technique with Fem Analysis // *MRS Online Proc. Libr.* 1999. V. 594; <https://doi.org/10.1557/PROC-594-507>
67. *Nowak R., Pessa M., Suganuma M. et al.* Elastic and plastic properties of GaN determined by nano-indentation of bulk crystal // *Appl. Phys. Lett.* 1999. V. 75. № 14. P. 2070–2072; <https://doi.org/10.1063/1.124919>
68. *Wu Y.Q., Gao S., Huang H.* The deformation pattern of single crystal  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> under nanoindentation // *Mater. Sci. Semicond. Process.* 2017. V. 71. P. 321–325; <https://doi.org/10.1016/j.mssp.2017.08.019>
69. *Guzilova L.I., Grashchenko A.S., Pechnikov A.I. et al.* Investigation of epitaxial layers and single crystals of  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> by nanoindentation method // *Mater. Phys. Mech.* 2016. V. 29. № 2. P. 166; URL: [https://www.ipme.ru/e-journals/MPM/no\\_22916/MPM229\\_09\\_guzilova.pdf](https://www.ipme.ru/e-journals/MPM/no_22916/MPM229_09_guzilova.pdf)
70. *Osipov A.V., Grashchenko A.S., Kukushkin S.A. et al.* Structural and elastoplastic properties of  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> films grown on hybrid SiC/Si substrates // *Continuum Mech. Thermodyn.* 2018. V. 30. P. 1059–1068; <https://doi.org/10.1007/s00161-018-0662-6>
71. *Grashchenko A.S., Kukushkin S.A., Osipov A.V.* Study of elastic properties of SiC films synthesized on Si substrates by the method of atomic substitution // *Phys. Solid State*. 2019. V. 61. P. 2310–2312; <https://doi.org/10.1134/S106378341912014X>
72. *Nye J.F.* Physical properties of crystals: their representation by tensors and matrices. Oxford university press, 1985; <https://doi.org/10.1088/0031-9112/36/12/027>
73. *Lee J.G.* Computational materials science: an introduction. CRC press, 2016; <https://doi.org/10.1201/9781315368429>
74. *Espresso Q.* a modular and open-source software project for quantum simulations of materials / P. Giannozzi [et al.] // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2009. V. 21. № 39. P. 395502; <https://doi.org/10.1088/0953-8984/21/39/395502>
75. *Perdew J.P., Ruzsinszky A., Csonka G.I. et al.* Restoring the density-gradient expansion for exchange in solids and surfaces // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 100. № 13. P. 136406; <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.136406>
76. *Oshima Y., Ahmadi E., Badescu S.C. et al.* Composition determination of  $\beta$ -(Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>)<sub>2</sub>O<sub>3</sub> layers coherently grown on (010)  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> substrates by high-resolution X-ray diffraction // *Appl. Phys. Express*. 2016. V. 9. № 6. P. 061102; <https://doi.org/10.7567/apex.9.061102>
77. *Gaillac R., Pullumbi P., Coudert F.X.* ELATE: an open-source online application for analysis and visualization of elastic tensors // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2016. V. 28. № 27. P. 275201; <https://doi.org/10.1088/0953-8984/28/27/275201>
78. *Galanov B.A., Domnich V., Gogotsi Y.* Elastic-plastic contact mechanics of indentations accounting for phase transformations // *Exp. Mech.* 2003. V. 43. P. 303–308; <https://doi.org/10.1007/BF02410528>

УДК 53.072.23:534.5

**ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ КАХРАМАНМАРАС 06.02.2023:  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОЦЕНКИ И МЕТОДЫ  
СЕЙСМИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ**

© 2024 г. А. И. Каракозова<sup>а, \*</sup>, С. В. Кузнецов<sup>а, b, c</sup>, В. Л. Мондрус<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Московский государственный строительный университет, Москва

<sup>b</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского, Москва

<sup>c</sup>Московский государственный технический университет им. Баумана, Москва

\*e-mail: karioca@mail.ru

Поступила в редакцию 01.02.2023 г.

После доработки 23.02.2023 г.

Принята к публикации 27.02.2023 г.

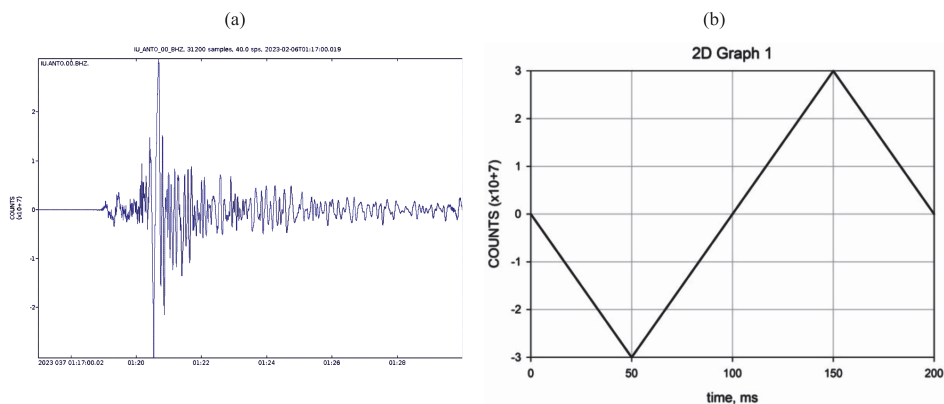
Недавнее землетрясение в районе Кахраманмарас (Kahramanmaraş) 06.02.2023 на территории Турции и Сирии имело магнитуду  $M_w 7.8$ , его интенсивность в некоторых районах Турции достигала XI баллов по модифицированной шкале Меркалли. Землетрясение вызвало катастрофические последствия, приведшие к гибели более 52 800 человек, а также многочисленные разрушения объектов инфраструктуры. В статье анализируются последствия появления в сейсмограмме землетрясения необычайно сильного дельта-импульса, ассоциируемого с приходом горизонтально поляризованной S-волны. Обсуждаются вопросы создания систем сейсмической защиты от дельтаобразных импульсов высокой интенсивности.

*Ключевые слова:* землетрясение, сейсмограмма, дельта-импульс, спектр, разрушение

DOI: 10.31857/S1026351924020034, EDN: uwqrql

**1. Введение.** Недавнее землетрясение (06.02.2023) магнитудой  $M_w 7.8$  и следующие сильные афтершоки магнитудой  $M_w 7.5$ , произошедшие в районе Кахраманмарас (Kahramanmaraş) в Турции и близких к ней регионах Сирии, имели относительно неглубокий гипоцентр, расположенный в осадочных слоях земной коры, примерно на 10 000 м ниже уровня океана [1, 2]. Оценка интенсивности землетрясения в городах Газиантеп и Килис составила XI баллов по модифицированной шкале Меркалли [3, 4]. В настоящее время афтершоки продолжают и, вероятно, будут продолжаться еще около года после главного толчка [3].

Анализ сейсмограмм, записанных на разных станциях, показывает наличие значительного горизонтально-поляризованного дельтаобразного импульса, имевшего место во временном интервале 01:20–01:22 (рис. 1, а). Это связано с приходом пика горизонтально поляризованной S-волны большой интенсивности и малой длительности. По оценкам авторов, длительность

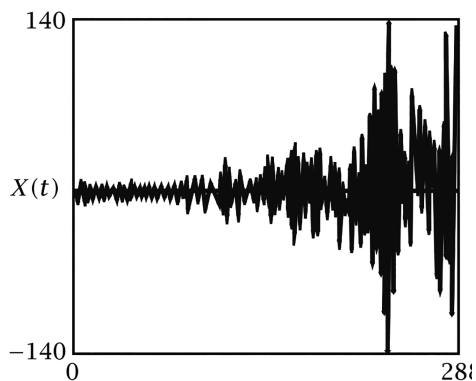


**Рис. 1.** а) горизонтальная компонента сейсмограммы главного толчка в 01:17 по Гринвичу, измерения на станции IU ANTO, Анкара, Турция, расположенной в 235 км от эпицентра; б) дельтаподобный импульс, соответствующий первым двум самым большим пикам, каждый длительностью примерно 100 мс.

пиковых импульсов составляет  $\sim 100$  мс. Рассмотрение этой сейсмограммы в лучшем разрешении показывает, что два пика на самом деле состоят из двух дельтаобразных импульсов почти одинаковой амплитуды и длительности, как показано на рис. 1, б. Отметим, что разрешение сейсмограммы ограничено временем дискретизации порядка 50 мс [5, 6].

Аналогичные чрезвычайно большие импульсы малой продолжительности также были зарегистрированы при некоторых сильных землетрясениях, вызвавших большие человеческие жертвы и серьезные разрушения, например землетрясение в Кобе магнитудой 6.9 произошло 17 января 1995 г. [7]; рис. 2.

Иногда большие пики имеют место при появлении волн Рэлея, Рэлея–Лэмба или горизонтально поляризованных волн Лява большой интенсивности [8, 9]; см. сейсмограмму землетрясения в Гаити магнитудой Mw 7.0 от 12.01.2010 г.; рис. 3.



**Рис. 2.** Сейсмограмма землетрясения в Кобе, произошедшего 17 января 1995 г. [7].

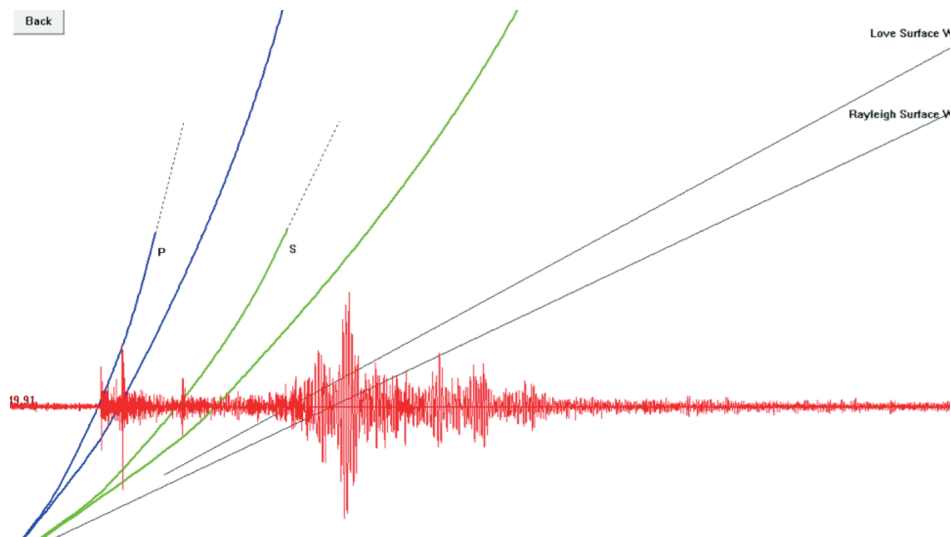


Рис. 3. Большая интенсивность и малая длительность пиков связаны с приходом поверхностных волн Рэлея магнитудой  $M_w$  7.0; землетрясение в Гаити 12.01.2010 [10].



Рис. 4. Типичная сейсмограмма; землетрясение вблизи острова Северная земля, произошедшее 19 апреля 1997 [11]; красной линией отмечено начало прихода S-волн.

Следует отметить, что более распространенной является ситуация, когда записанные сейсмограммы не содержат импульсов столь большой величины и малой длительности; образец такой сейсмограммы приведен на рис. 4.

**2. Спектр треугольного импульса.** Рассмотрим интегральное преобразование Фурье одиночного треугольного импульса, показанного на рис. 1, b.

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-T}^T f(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (2.1)$$

где  $\omega$  — круговая частота колебаний;  $f(t)$  — это функция, интегрируемая во временной области:  $\text{supp} f = [-T; T]$

$$f(t) = \frac{p}{T} \times \begin{cases} t+T, & -T < t < 0 \\ T-t, & 0 < t < T \end{cases}. \quad (2.2)$$

В уравнении (2.2)  $p$  – амплитудный множитель. Здесь импульс сдвинут на  $T$  по оси времени, чтобы избежать асимметрии, что обеспечивает отсутствие мнимой части в спектре Фурье. Применение преобразования к функции дает соответствующую спектральную функцию Фурье [12]:

$$\tilde{f}(\omega) = pT \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right), \quad (2.3)$$

где

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}. \quad (2.4)$$

Ввиду уравнения графики для соответствующих спектров Фурье будут выглядеть следующим образом – см. рис. 5.

Графики на рис. 5 четко указывают на существенные максимумы на нулевой частоте.

**3. АЧХ для типового сейсмоизолирующего устройства.** Предположим, что здание оборудовано сейсмоизолирующим устройством, соответствующим модели Кельвина–Фойгта или более сложной модели Ценера, известной также как стандартная вязкоупругая модель [13, 14]; см. рис. 6, а, в. Основные уравнения для моделей Кельвина–Фойгта и Ценера могут быть представлены в форме Коши [15]:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Y}(t) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{Y}(t) + \mathbf{U}(t), \quad (3.1)$$

где для модели Кельвина–Фойгта

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -\eta/m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}(t) = U_0 \exp(i\omega t). \quad (3.2)$$

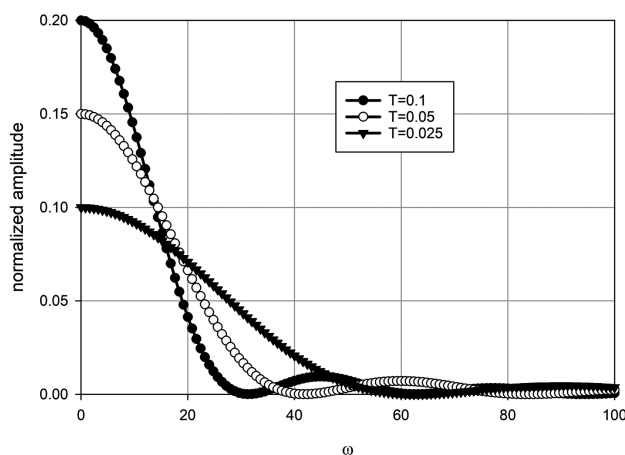


Рис. 5. Спектры Фурье дельта-подобных импульсов при разных  $T$ .

Здесь  $x(t)$  — перемещение массы;  $v(t) = \dot{x}(t)$ ;  $\eta$  — вязкость демпфера;  $k$  — жесткость пружины;  $m$  — масса;  $U_0$  — амплитуда внешней нагрузки. Отметим, что  $\mathbf{G}$  — полустабильная матрица [15]. Для модели Ценера со вспомогательной пружиной соответствующие параметры будут выглядеть следующим образом

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k' / \eta & -k' / \eta & 0 \\ -(k + k') / m & k' / m & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где  $x_1(t)$ ,  $v_1(t)$  — отклонение и скорость массы;  $x_2(t)$  — отклонение вспомогательной пружины;  $k'$  — жесткость вспомогательной пружины. Решение уравнения при разных частотах возбуждения дает амплитудно-частотную характеристику (АЧХ); типичная АЧХ для модели Ценера показана на рис. 6, с.

График на рис. 6, с наглядно свидетельствует о том, что типичный сейсмоизолятор идеально подходит для демпфирования относительно высоких частот ( $\omega > 1$ ), но генерирует значительное усиление сигнала в меньшем диапазоне частот ( $\omega < 1$ ), точнее, там, где дельта-подобный импульс достигает максимума; см. рис. 4. Таким образом, рассматриваемые сейсмоизолирующие устройства становятся не только бесполезными на низких частотах, но и усиливают сейсмические сигналы в низкочастотном диапазоне.

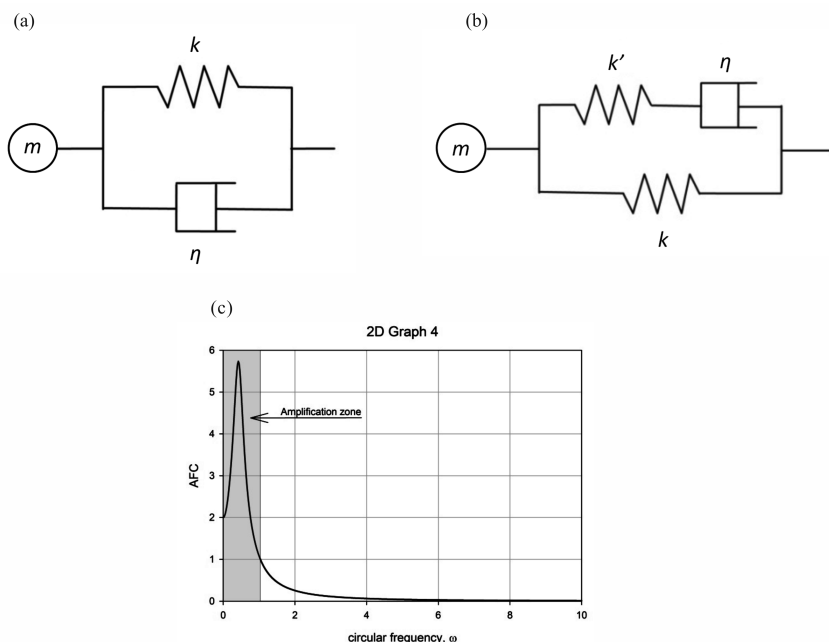


Рис. 6. а) модель Кельвина—Фойгта; б) модель Ценера; в) типичная АЧХ сейсмоизолятора, созданного по модели Ценера; серым цветом показана зона усиления сигнала.

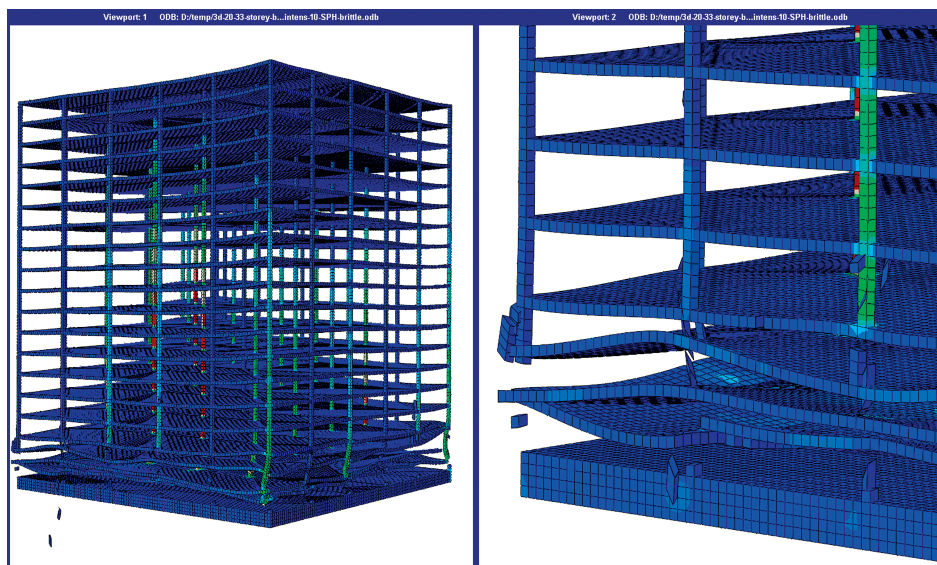
**4. Обрушение каркасного здания без сейсмоизоляции.** Рассмотрим далее воздействие высокоинтенсивной сейсмической дельтаобразной S-волны на каркас здания, не имеющего сейсмоизоляции.

Анализ методом конечных элементов (МКЭ) воздействия дельтаобразного импульса S-волны большой амплитуды и малой длительности, соответствующего ускорению  $1\text{ g}$  ( $\sim 9.8\text{ м/с}^2$ ), показывает (I) появление полей напряжений высокой интенсивности как в колоннах, так и в плитах, особенно в нижней части здания; (II) множественные зоны повреждения, появляющиеся в основном на задних фронтах отраженных волн; и (III) разрушение элементов каркаса до начала колебаний, т.е. до начала образования стоячих; см. рис. 7. Последний вывод наглядно иллюстрирует бесполезность применения виброгасителей для смягчения высокоинтенсивных и кратковременных дельтаобразных импульсных нагрузок.

Рис. 7 иллюстрирует разрушение элементов каркаса здания, начиная с нижних этажей, при этом S-волна высокой интенсивности распространяется вверх. Таким образом, проведенный МКЭ-анализ, наряду с многочисленными наблюдениями [1–11], указывает на необходимость создания систем сейсмозащиты от рассматриваемых видов кратковременных сейсмических импульсов большой интенсивности.

## **5. Как обеспечить сейсмическую защиту при появлении ударных волн высокой интенсивности?**

**5.1. Сейсмические подушки, обзор.** Возникает закономерный вопрос, как обеспечить сейсмозащиту от мощных, но при этом кратковременных сейсмических



**Рис. 7.** Обрушение каркаса здания, вызванное появлением ударных волн высокой интенсивности; КЭ-моделирование.



импульсов. Это особенно важно ввиду принципиальной неспособности широко используемых сейсмоизолирующих устройств гасить столь короткие импульсы.

По-видимому, первой известной системой естественной сейсмической защиты, способной защитить от сильных колебаний грунта, вызванных сейсмическими волнами высокой интенсивности, является гостиница “Империял” в Токио, спроектированная в 1923 г. Фрэнком Ллойдом Райтом. Здание располагалось над реликтовым болотом, которое выполняло роль сейсмической подушки, защищавшей здание от S-волн во время Великого землетрясения Канто с Mw 7.9–8.2, произошедшего 01.09.1923 г., в том же году, когда строительство здания было завершено [16]. Также известно [17], что большая часть окружающих зданий была разрушена землетрясением. Принципиальная схема сейсмической площадки представна на рис. 8.

В настоящее время существует несколько подходов к смягчению воздействия рассматриваемых сильных ударных импульсов поперечных S-волн. Некоторые из этих подходов уже разработаны, в то время как другие еще находятся в стадии разработки. Отметим следующие подходы:

- (I) При проектировании фундаментов для мостов в сейсмоопасных районах было разработано и реализовано решение, основанное на создании сейсмической подушки из калиброванных природных камней, размещенных между оголовками свай и нижней поверхностью ростверка. Таким образом, по-видимому, впервые для столь крупных сооружений ростверк был отделен от свай. Это решение было использовано при строительстве моста Рион-Антирион и некоторых других большепролетных мостов [18, 19], проект выполнен компанией Geodynamique® (Франция). Хотя такая подушка не может отражать энергию сейсмических волн из-за небольшой разницы в акустическом импедансе между сейсмической подушкой и железобетонном, она все же может рассеивать часть волновой энергии внутри подушки благодаря относительному движению камней [20].
- (II) Система сейсмозащиты зданий, разработанная компанией Marathon Alliance® (Австралия), заключается в установке сейсмической подушки либо под фундаментную плиту (рис. 9, а), либо внутри ростверка в случае

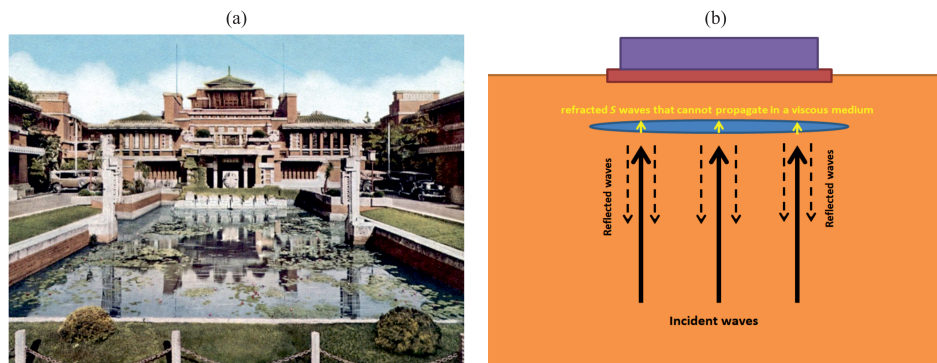
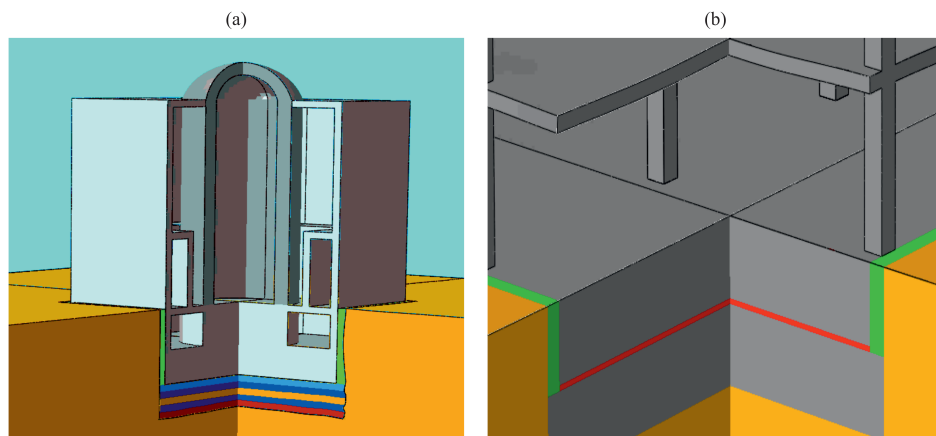


Рис. 8. а) отель “Империял” Токио, 1923 г. [16]; б) принципиальная схема сейсмической подушки на основе реликтового болота.





**Рис. 9.** Сейсмические подушки для защиты а) здание реактора АЭС защищено как от Р-волн, так и от S-ударных волн, композитная подушка из акустически контрастных слоев (слои выделены разными цветами) размещена под конструкцией фундамента [21]; б) разделение фундаментной плиты сейсмостойкой подушкой (красная линия).

- свайного фундамента (рис. 9,б); см. [21]. Разрабатываемые сейсмические подушки выполнены из гранулированных метаматериалов, обеспечивающих (1) отражение приходящих сейсмических волн в широком диапазоне соответствующих спектральных частот и (2) поглощение механической энергии сейсмических волн внутри гранулированного метаматериала за счет образования в микроструктуре материала множественных ударных волновых фронтов. Таким образом, более чем в четыре раза ослабляется энергия сейсмических волн. Срок службы этих гранулированных метаматериалов сравним со сроком службы защищаемого сооружения из-за неорганической природы гранул, изготавливаемых из плавленного базальта [21].
- (III) Сейсмические подушки, специально сконструированные для сейсмоизоляции высокоточного оборудования, например использование эластомерных листов в сочетании с механическими ползунками [22].
- (IV) Сейсмические прокладки из листов фторопласта, имеющие очень малый коэффициент трения и служащие для получения поверхностей, практически свободных от трения скольжения [23, 24]. Этот подход также можно отнести к системам сейсмозащиты на основе метаповерхностей, так как он основан на концепции поверхностей скольжения.

**5.2. Сейсмические подушки, основные принципы.** Рассмотренные сейсмические подушки способны обеспечить сейсмическую защиту от S-волн большой интенсивности в широком диапазоне частот, причем, как уже упоминалось ранее, некоторые виды подушек способны защищать как от продольных, так и от поперечных волн. В этой вязи можно сформулировать три основных принципа, обеспечивающих применимость и эффективность рассматриваемых сейсмических подушек:

- (А) Различие акустических импедансов окружающего массива грунта, бетона и гранулированного метаматериала, используемого для сейсмической

подушки (не относится к сейсмической подушке из фторопластовых листов). Этот принцип обеспечивает отражение энергии сейсмических волн на границах между сейсмической подушкой и грунтом или бетоном, тем самым уменьшая энергию волн, распространяющихся в вышележащие конструкции защищаемого сооружения. Отметим также, что коэффициенты отражения-преломления не зависят от частоты волны в соответствии с теорией Knott–Zoeppritz [25], независимость от частоты обеспечивает главное преимущество сейсмической подушки перед более распространенными сейсмоизолирующими устройствами; см. раздел 2.

- (В) Формирование и распространение ударных волновых фронтов в микроструктуре гранулированного метаматериала, что приводит к существенной диссипации волновой энергии внутри сейсмической подушки [26]. Этот необычный эффект доминирует в рассеянии волновой энергии внутри гранулированного метаматериала [27].
- (С) Возможность относительного перемещения различных гранул внутри подушки, что обеспечивает дополнительное ослабление энергии сейсмических волн. Учет сухого трения на контактирующих поверхностях между гранулами дает еще один источник рассеяния механической энергии метаматериалом [28].

**6. Заключительные замечания.** Анализ сейсмограмм недавнего разрушительного землетрясения магнитудой  $M_w$  7.8, произошедшего 6 февраля 2023 г. в районе Кахраманмарас (Kahramanmaraş), выявил появление на сейсмограмме землетрясения необычно сильного дельтаобразного импульса S-волны. Как было указано, наблюдаемый дельтаобразный импульс соответствует большому пику, имеющему максимум на нулевой частоте, что делает большинство широко используемых сейсмоизолирующих устройств практически непригодными, или даже опасными при появлении дельтаобразных импульсов, поскольку рассматриваемые сейсмоизоляторы усиливают сигналы вблизи нулевой частоты.

Анализ существующих и разрабатываемых способов сейсмозащиты на основе различных сейсмических подушек, содержащих гранулированные метаматериалы, выявил основные преимущества этих способов сейсмозащиты по сравнению с другими видами сейсмоизоляции, особенно в связи с появлением дельтаобразных импульсов на сейсмограммах землетрясений.

**Благодарность.** Работа финансировалась Министерством науки и высшего образования РФ, проект № FSWG-2023-0004 “Система территориальной сейсмической защиты критически важных объектов инфраструктуры на основе гранулированных метаматериалов, обладающих свойствами широкодиапазонных фононных кристаллов”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. USGS, 6 February 2023. “USGS earthquake catalogue”. Archived from the original on 7 February 2023.
2. National Earthquake Information Center (6 February 2023). “M 7.8 – 26 km ENE of Nurdağı, Turkey”. United States Geological Survey (2023);  
URL: <https://earthquake.usgs.gov/earthquakes/eventpage/us6000jllz/executive>

3. *Emre Ö., Duman T.Y., Özalp S. et al.* Active fault database of Turkey // Bull. Earthquake Eng. 2018. № 16 (8). P. 3229–3275;  
<https://doi.org/10.1007/s10518-016-0041-2>
4. *Kawoosa V.M., Scarr S., Gerry D.* (eds.). 10,000 tremors. Reuters. 2 March (2023). <https://www.reuters.com/graphics/TURKEY-QUAKE/AFTERSHOCKS/dwpkdkzklevm/>
5. *Kinoshita S.* Low-frequency and trend compensation of broadband seismograms // Earth Planet Space. 2012. № 64. e5–e8;  
<https://doi.org/10.5047/eps.2012.02.002>
6. *Larsonnier F. et al.* Comparison on seismometer sensitivity following ISO 16063-11 standard // 19th International Congress of Metrology. 2019. Paper 27003;  
<https://doi.org/10.1051/metrology/201927003>
7. *Singh N., Tampubolon D., Yadavalli V.S.S.* Time series modelling of the Kobe-Osaka earthquake recordings // Int. J. Math. Math. Sci. 2002. № 29 (8). P. 467–479;  
<https://doi.org/10.1155/S0161171202007548>
8. *Eberhard M.O. et al.* The M W 7.0 Haiti earthquake of January 12, 2010; USGS/EERI Advance Reconnaissance Team report. U.S. Geological Survey Report 2010–1048. 2010;  
URL: <http://pubsdata.usgs.gov/pubs/of/2010/1048/index.html>
9. *DesRochers R. et al.* Overview of the 2010 Haiti earthquake // Earthquake Spectra. 2011. № 27 (1, suppl. 1). P. 1–21;  
<https://doi.org/10.1193/1.3630129>
10. Magnitude 7.0 HAITI Tuesday, January 12, 2010 at 21:53:09 UTC. IRIS (2010);  
URL: [https://www.iris.edu/hq/files/programs/education\\_and\\_outreach/retm/tm\\_100112\\_haiti/100112haiti.pdf](https://www.iris.edu/hq/files/programs/education_and_outreach/retm/tm_100112_haiti/100112haiti.pdf)
11. *Bormann P., Wielandt E.* Seismic signals and noise. In: *Bormann, P.* (Ed.), New Manual of Seismological Observatory Practice 2 (NMSOP2). Potsdam: GFZ. 2013. P. 1–62 ;  
[https://doi.org/10.2312/GFZ.NMSOP-2\\_ch4](https://doi.org/10.2312/GFZ.NMSOP-2_ch4)
12. *Ye W., Entezari A.* A geometric construction of multivariate sinc functions // IEEE Trans. Image Processing. 2012. № 21 (6). P. 2969–2979;  
<https://doi.org/10.1109/TIP.2011.2162421>
13. *Jóźwiak B., Orczykowska M., Dziubiński M.* Fractional generalizations of Maxwell and Kelvin-Voigt models for biopolymer characterization // PLoS ONE. 2015. № 10 (11). Paper e0143090;  
<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0143090>
14. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V., Khudyakov M.A.* Study of forced vibrations of the Kelvin-Voigt model with an asymmetric spring // Mech. Solids. 2015. № 50 (3). P. 294–304;  
<https://doi.org/10.3103/S0025654415030061>
15. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations for media with arbitrary elastic anisotropy // Quart. Appl. Math. 2005. № 63 (3). P. 455–467.
16. *Smith K.* Frank Lloyd Wright and the Imperial Hotel: A postscript // The Art Bulletin. 1985. № 67 (2). P. 296–310;  
<https://doi.org/10.1080/00043079.1985.10788262>
17. *Hammer J.* The Great Japan earthquake of 1923 // Smithsonian Magazine. 2011. Paper 1764539.
18. *Dobry R. et al.* Damping/global energy balance in FE model of bridge foundation lateral response // Soil Dynam. Earthquake Eng. 2003. № 23 (6). P. 483–495;  
[https://doi.org/10.1016/S0267-7261\(03\)00050-2](https://doi.org/10.1016/S0267-7261(03)00050-2)
19. *Teyssandier J.P., Combault J., Pecker A.* Rion Antirion: le pont qui défie les séismes // La Recherche. 2000. № 334. P. 42–46.
20. *Cremer C., Pecker A. & Davenne L.* Cyclic macro-element of soilstructure interaction: material and geometrical nonlinearities // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 2001. № 25 (13). P. 1257–1284.
21. Granular metamaterials. Booklet. Adelaide, Australia: Marathon Allaince. 2022;

- URL: <https://www.marathonalliance.com.au/metamaterials>
22. *Begambre-Carrillo O.J.* et al. Passive seismic protection systems with mechanical metamaterials: A current review // *Struct. Eng. & Mech.* 2022. № 82 (4). Article 417; <https://doi.org/10.12989/sem.2022.82.4.417>
  23. *Mirzaev I., Turdiev M.* Vibrations of buildings with sliding foundations under real seismic effects // *Constr. Unique Build. Struct.* 2021. № 94. Article № 9407; <https://doi.org/10.4123/CUBS.94.7>
  24. *Mirzaev I., Yuvmitov A., Turdiev M., Shomurodov J.* Influence of the vertical earthquake component on the shear vibration of buildings on sliding // *E3S Web Conf.* 2021. № 264. Article № 02022; <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126402022>
  25. *Avesth P., Mukerji T., Mavko G.* Quantitative Seismic Interpretation. Cambridge, UK: Cambridge University Press. 2005. 408 p.; <https://doi.org/10.1017/CBO9780511600074>
  26. *Lucchesi M., Pagni A.* Longitudinal oscillations of bimodular rods // *Int. J. Struct. Stability Dynam.* 2005. № 5 (1). P. 37–54; <https://doi.org/10.1142/S0219455405001490>
  27. *Pelat A., Gautier F., Conlon S.C., Semperlotti F.* The acoustic black hole: A review of theory and applications // *J. Sound Vibr.* 2020. № 476. Paper 115316; <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115316>
  28. *Goldstein R.V., Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V.* The modified Cam-Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading // *Arch. Appl. Mech.* 2016. № 86 (12). P. 2021–2031; <https://doi.org/10.1007/s00419-016-1169-x>

UDC 53.072.23:534.5

## KAHRAMANMARAS EARTHQUAKE ON FEBRUARY 6, 2023: MATHEMATICAL MODELS, ESTIMATES AND METHODS OF SEISMIC PROTECTION

© 2024 г.    **A. I. Karakozova<sup>a, \*</sup>, S. V. Kuznetsov<sup>a, b, c</sup>, V. L. Mondrus<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

<sup>b</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>c</sup>*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

\*e-mail: karioca@mail.ru

**Abstract** — The recent earthquake in Turkey and Syria occurred on February 6, 2023. In the Kahramanmaras region the earthquake had an estimated magnitude of Mw7.8, and reached intensity XI by the modified Mercalli scale. The earthquake had catastrophic consequences, leading to the deaths of more than 52,800 people, as well as the multiple damages of the structures and buildings. The paper relates to the analyses of the seismograms and the detection of an unusually strong delta impulse, which can be associated with the arrival of a horizontally polarized S-wave.

**Keywords:** earthquake, seismogram, delta pulse, spectrum; destruction

## REFERENCES

1. USGS, 6 February 2023. "USGS earthquake catalogue". Archived from the original on 7 February 2023.
2. National Earthquake Information Center (6 February 2023). "M 7.8 – 26 km ENE of Nurdağı, Turkey". United States Geological Survey (2023);  
URL: <https://earthquake.usgs.gov/earthquakes/eventpage/us6000jllz/executive>
3. *Emre Ö., Duman T.Y., Özalp S. et al.* Active fault database of Turkey // Bull. Earthquake Eng. 2018. № 16 (8). P. 3229–3275;  
<https://doi.org/10.1007/s10518-016-0041-2>
4. *Kawoosa V.M., Scarr S., Gerry D.* (eds.). 10,000 tremors. Reuters. 2 March (2023);  
URL: <https://www.reuters.com/graphics/TURKEY-QUAKE/AFTERSHOCKS/dwpkdzklevm/>
5. *Kinoshita S.* Low-frequency and trend compensation of broadband seismograms // Earth Planet Space. 2012. № 64. e5–e8;  
<https://doi.org/10.5047/eps.2012.02.002>
6. *Larsonnier F. et al.* Comparison on seismometer sensitivity following ISO 16063-11 standard // 19th International Congress of Metrology. 2019. Paper 27003;  
<https://doi.org/10.1051/metrology/201927003>
7. *Singh N., Tampubolon D., Yadavalli V.S.S.* Time series modelling of the Kobe-Osaka earthquake recordings // Int. J. Math. Math. Sci. 2002. № 29 (8). P. 467–479;  
<https://doi.org/10.1155/S0161171202007548>
8. *Eberhard M.O. et al.* The M W 7.0 Haiti earthquake of January 12, 2010; USGS/EERI Advance Reconnaissance Team report. U.S. Geological Survey Report 2010–1048. 2010;  
URL: <http://pubsdata.usgs.gov/pubs/of/2010/1048/index.html>
9. *DesRochers R. et al.* Overview of the 2010 Haiti earthquake // Earthquake Spectra. 2011. № 27 (1, suppl. 1). P. 1–21;  
<https://doi.org/10.1193/1.3630129>
10. Magnitude 7.0 HAITI Tuesday, January 12, 2010 at 21:53:09 UTC. IRIS (2010);  
URL: [https://www.iris.edu/hq/files/programs/education\\_and\\_outreach/retm/tm\\_100112\\_haiti/100112haiti.pdf](https://www.iris.edu/hq/files/programs/education_and_outreach/retm/tm_100112_haiti/100112haiti.pdf)
11. *Bormann P., Wielandt E.* Seismic signals and noise. In: *Bormann P.* (Ed.), New Manual of Seismological Observatory Practice 2 (NMSOP2). Potsdam: GFZ. 2013. P. 1–62;  
[https://doi.org/10.2312/GFZ.NMSOP-2\\_ch4](https://doi.org/10.2312/GFZ.NMSOP-2_ch4)
12. *Ye W., Entezari A.* A geometric construction of multivariate sinc functions // IEEE Trans. Image Processing. 2012. № 21 (6). P. 2969–2979;  
<https://doi.org/10.1109/TIP.2011.2162421>
13. *Jóźwiak B., Orczykowska M. & Dziubiński M.* Fractional generalizations of Maxwell and Kelvin-Voigt models for biopolymer characterization // PLoS ONE. 2015. № 10 (11). Paper e0143090;  
<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0143090>
14. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V., Khudyakov M.A.* Study of forced vibrations of the Kelvin-Voigt model with an asymmetric spring // Mech. Solids. 2015. № 50 (3). P. 294–304;  
<https://doi.org/10.3103/S0025654415030061>
15. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations for media with arbitrary elastic anisotropy // Quart. Appl. Math. 2005. № 63 (3). P. 455–467.
16. *Smith K.* Frank Lloyd Wright and the Imperial Hotel: A postscript // The Art Bulletin. 1985. № 67 (2). P. 296–310;  
<https://doi.org/10.1080/00043079.1985.10788262>

17. *Hammer J.* The Great Japan earthquake of 1923 // *Smithsonian Magazine*. 2011. Paper 1764539.
18. *Dobry R.* et al. Damping/global energy balance in FE model of bridge foundation lateral response // *Soil Dynam. Earthquake Eng.* 2003. № 23 (6). P. 483–495;  
[https://doi.org/10.1016/S0267-7261\(03\)00050-2](https://doi.org/10.1016/S0267-7261(03)00050-2)
19. *Teyssandier J.P., Combault J., Pecker A.* Rion Antirion: le pont qui defie les seismes // *La Recherche*. 2000. № 334. P. 42–46.
20. *Cremer C., Pecker A., Davenne L.* Cyclic macro-element of soilstructure interaction: material and geometrical nonlinearities // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2001. № 25 (13). P. 1257–1284.
21. Granular metamaterials. Booklet. Adelaide, Australia: Marathon Alliance. 2022;  
URL: <https://www.marathonalliance.com.au/metamaterials>
22. *Begambre-Carrillo O.J.* et al. Passive seismic protection systems with mechanical metamaterials: A current review // *Struct. Eng. & Mech.* 2022. № 82 (4). Article 417;  
<https://doi.org/10.12989/sem.2022.82.4.417>
23. *Mirzaev I., Turdiev M.* Vibrations of buildings with sliding foundations under real seismic effects // *Constr. Unique Build. Struct.* 2021. № 94. Article № 9407;  
<https://doi.org/10.4123/CUBS.94.7>
24. *Mirzaev I., Yuvmitov A., Turdiev M., Shomurodov J.* Influence of the vertical earthquake component on the shear vibration of buildings on sliding // *E3S Web Conf.* 2021. № 264. Article № 02022;  
<https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126402022>
25. *Avesth P., Mukerji T., Mavko G.* Quantitative Seismic Interpretation. Cambridge, UK: Cambridge University Press. 2005. 408 p.;  
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511600074>
26. *Lucchesi M., Pagni A.* Longitudinal oscillations of bimodular rods // *Int. J. Struct. Stability Dynam.* 2005. № 5 (1). P. 37–54;  
<https://doi.org/10.1142/S0219455405001490>
27. *Pelat A., Gautier F., Conlon S.C., Semperlotti F.* The acoustic black hole: A review of theory and applications // *J. Sound Vibr.* 2020. № 476. Paper 115316;  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115316>
28. *Goldstein R.V., Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V.* The modified Cam-Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading // *Arch. Appl. Mech.* 2016. № 86 (12). P. 2021–2031;  
<https://doi.org/10.1007/s00419-016-1169-x>

УДК 531.01, 531.32, 629.78

**КВАТЕРНИОННЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ  
ДВУХ ТЕЛ И ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ СПУТНИКА  
В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ В ПЕРЕМЕННЫХ  
КУСТААНХЕЙМО–ШТИФЕЛЯ И МОДИФИЦИРОВАННЫХ  
ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ:  
ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ**

© 2024 г. Ю. Н. Челноков<sup>а</sup>, \*

<sup>а</sup>*Институт проблем точной механики и управления РАН*

<sup>\*</sup>*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 11.04.2023 г.

После доработки 09.06.2023 г.

Принята к публикации 17.06.2023 г.

В статье развита предложенная нами ранее в рамках возмущенной пространственной задачи двух тел кватернионная регуляризация дифференциальных уравнений (ДУ) относительного возмущенного движения изучаемого тела: уравнений движения центра масс этого тела в системе координат, вращающейся в инерциальной системе координат по произвольно заданному закону, а также развита кватернионная регуляризация ДУ движения изучаемого тела относительно системы координат, связанной с Землей. Предложены новые кватернионные ДУ возмущенного движения искусственного спутника Земли относительно системы координат, связанной с Землей. Эти уравнения имеют (в новом времени) вид ДУ относительного движения возмущенного четырехмерного осциллятора в переменных Кустаанхеймо–Штифеля или в предложенных нами модифицированных четырехмерных переменных, дополненных ДУ уравнениями для энергии движения спутника и времени. В этих уравнениях возмущенного относительного движения спутника учитываются зональные, тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли. Предложенные уравнения, в отличие от классических уравнений, регулярны (не содержат особых точек типа сингулярности (деления на ноль)) для относительного движения спутника в ньютоновском гравитационном поле Земли. Уравнения удобны для применения методов нелинейной механики и высокоточных численных расчетов при исследовании орбитального движения спутника относительно Земли и прогнозе его движения.

*Ключевые слова:* возмущенная пространственная задача двух тел, искусственный спутник Земли, кватернионная регуляризация, регулярные кватернионные уравнения, абсолютное и относительное движения, переменные Кустаанхеймо–Штифеля, модифицированные четырехмерные переменные, энергия движения; зональные, тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли



**1. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел для абсолютного движения.** В основе небесной механики и астродинамики (механики космического полета) лежит векторное ньютоновское дифференциальное уравнение возмущенной пространственной задачи двух тел: уравнение для абсолютного движения второго (изучаемого) тела (для движения этого тела в инерциальной системе координат):

$$d^2\mathbf{r} / dt^2 + f(m+M)r^{-3}\mathbf{r} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r} / dt). \quad (1.1)$$

В уравнении (1.1)  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор центра масс второго тела, проведенный из центра масс первого (центрального) тела;  $r = |\mathbf{r}|$  — расстояние от центра масс второго тела до центра масс первого тела,  $m$  и  $M$  — массы второго и первого тел;  $f$  — гравитационная постоянная;  $\mathbf{p}$  — вектор возмущающего ускорения центра масс второго тела,  $t$  — время.

Это уравнение вырождается при соударении второго тела с центральным телом (при равенстве нулю расстояния  $r$  между телами), что делает использование этого уравнения неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат создает не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности.

Проблема устранения указанной особенности известна в небесной механике и астродинамике как проблема регуляризации дифференциальных уравнений задачи двух тел и восходит к Эйлеру (1765) [1] и Леви-Чивита (1920) [2–4], давшим решения одномерной и двумерной задачам о соударении двух тел (в случаях прямолинейного и плоского движений). Эффективная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, так называемая спинорная или *KS*-регуляризация, была предложена Кустаанхеймо и Штифелем (1964–1965) [5, 6]. Она представляет собой обобщение регуляризации Леви-Чивита уравнений плоского движения и наиболее полно изложена в широко известной монографии Штифеля и Шейфеле (1971) [7].

Изучению различных аспектов кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений пространственной задачи двух тел с использованием переменных Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-переменных) посвящены работы [8–25], а также работы автора статьи [26–46]. В работах приводятся результаты сравнения численного решения уравнений орбитального движения небесных и космических тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, параметрах Эйлера (Родрига–Гамильтона) и в других переменных, которые свидетельствуют об эффективности использования *KS*-переменных и параметров Эйлера в задачах небесной механики и астродинамики.

В основе регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела, так называемое *KS*-преобразование, обобщающее преобразование Леви-Чивиты, имеющее вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_0 \\ u_2 & u_1 & -u_0 & -u_3 \\ u_3 & u_0 & u_1 & u_2 \\ u_0 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u}_{KS}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$



где  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – декартовы координаты центра масс изучаемого тела в инерциальной системе координат  $X$ , имеющей начало в центре масс центрального тела и координатные оси, направленные на удаленные звезды;  $u_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) – новые переменные ( $KS$ -переменные),  $L(\mathbf{u}_{KS})$  – обобщенная матрица Леви-Чивиты, называемая  $KS$ -матрицей, содержащая в левом верхнем углу двумерную квадратную матрицу Леви-Чивиты.

В скалярной записи преобразование (1.2) имеет вид:

$$x_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad x_2 = 2(u_1 u_2 - u_0 u_3), \quad x_3 = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2) \quad (1.3)$$

и с точностью до перестановки индексов совпадает с отображением Хопфа (1931) [55].

Регулярные дифференциальные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля возмущенной пространственной задачи двух тел имеют в скалярной записи следующий вид [7]:

$$u_j'' - \frac{1}{2} h u_j = \frac{1}{2} r q_j, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (1.4)$$

$$h' = 2(q_0 u_0' + q_1 u_1' + q_2 u_2' + q_3 u_3'), \quad (1.5)$$

$$t' = r, \quad r = |\mathbf{r}| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (1.6)$$

$$q_0 = u_0 p_1 - u_3 p_2 + u_2 p_3, \quad q_1 = u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3$$

$$q_2 = -u_2 p_1 + u_1 p_2 + u_0 p_3, \quad q_3 = -u_3 p_1 - u_0 p_2 + u_1 p_3.$$

Здесь верхний штрих – символ дифференцирования по новой независимой переменной  $\tau$ , называемой фиктивным временем и связанной с временем  $t$  дифференциальным уравнением (1.6):  $dt/d\tau = r$ ;  $h$  – кеплеровская энергия, рассматриваемая как дополнительная переменная и определяемая соотношениями:

$$h = \frac{1}{2} v^2 - f(m + M) \frac{1}{r}, \quad v = |\mathbf{v}|, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

$p_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – проекции возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$  центра масс второго тела на оси инерциальной системы координат. Время  $t$  также рассматривается как дополнительная (зависимая) переменная.

Уравнения (1.4)–(1.6) образуют систему десяти обыкновенных нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений относительно четырех переменных Кустаанхеймо–Штифеля  $u_j$ , кеплеровской энергии  $h$  и времени  $t$ .

Уравнения (1.4) эквивалентны матричному уравнению:

$$\mathbf{u}_{KS}'' - \frac{1}{2} h \mathbf{u}_{KS} = \frac{1}{2} r L(\mathbf{u}_{KS}) \mathbf{P}_{KS}, \quad \mathbf{u}_{KS} = (u_1, u_2, u_3, u_0), \quad \mathbf{P}_{KS} = (p_1, p_2, p_3, 0),$$

где  $\mathbf{u}_{ks}$  — четырехмерный вектор-столбец  $KS$ -переменных,  $\mathbf{P}_{ks}$  — четырехмерный вектор-столбец, сопоставляемый трехмерному вектору возмущающего ускорения  $\mathbf{p}$ .

Отметим следующие основные достоинства уравнений Кустанхеймо—Штифеля (1.4)–(1.6) [34–37, 47–50, 56]:

- они, в отличие от ньютоновских уравнений, регулярны в центре притяжения;
- линейны для невозмущенных кеплеровских движений (в отличие от существенно нелинейных ньютоновских уравнений для этих движений) и имеют в этом случае (в новом времени  $\tau$  ( $dt = r d\tau$ )) вид системы четырех независимых линейных дифференциальных уравнений второго порядка с одинаковыми постоянными коэффициентами, равными отрицательной половинной кеплеровской энергии  $h$ :

$$u_j'' - \frac{1}{2} h u_j = 0, \quad h = \text{const}, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

для эллиптического кеплеровского движения, когда кеплеровская энергия  $h < 0$ , эти уравнения эквивалентны уравнениям движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, квадрат частоты которого равен половине кеплеровской энергии, взятой со знаком минус;

- позволяют выработать единый подход (с использованием функций Штумпфа) к изучению всех трех типов кеплеровского движения;
- близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений;
- позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Эти свойства регулярных уравнений позволили разработать эффективные методы нахождения решений в аналитической или численной форме таких трудных для классических методов задач, как исследование движения вблизи притягивающих масс или движения по орбитам с большими эксцентриситетами. Так, Штифелем, Шейфеле, Бордовицкой, Шарковским, Fukushima и др. [7, 47–50] показано, что использование регулярных уравнений в переменных Кустанхеймо—Штифеля позволяет повысить точность численного решения ряда задач небесной механики и астродинамики, например задачи о движении искусственного спутника Земли (ИСЗ) по орбитам с большими эксцентриситетами, от трех до пяти порядков по сравнению с решениями, полученными при использовании классических ньютоновских уравнений.

В основе регуляризации Кустанхеймо—Штифеля, как уже отмечалось, лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат (1.3). Причем это преобразование состоит в переходе от трехмерного пространства декартовых координат  $x_k$  к четырехмерному пространству новых координат  $u_j$ . Поэтому вскоре после открытия  $KS$ -преобразования было рассмотрено использование кватернионов Гамильтона (четырёхмерных гиперкомплексных чисел) и четырёхмерных кватернионных матриц для регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел. Однако в своей книге Штифель и Шейфеле полностью отвергли эту идею, написав [7, с. 288], что “Любая попытка заменить теорию  $KS$ -матриц более популярной теорией кватернионных матриц приводит

поэтому к неудаче или, во всяком случае, к очень громоздкому формализму". Позже (в конце 1970-х и начале 1980-х гг.) автором статьи в работах [26–29] было показано, что в действительности кватернионный подход к регуляризации позволяет дать прямой и наглядный вывод регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, а также позволяет дать наглядные геометрическую и кинематическую интерпретации регуляризующему  $KS$ -преобразованию. Этот подход позволяет раскрыть геометрический смысл неоднозначности  $KS$ -преобразования и позволяет получить более общие регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, частным случаем которых (в скалярной записи) являются регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля.

Так, автором статьи было показано, что регуляризующее преобразование координат Кустаанхеймо–Штифеля (1.2) или (1.3) заключается в переходе от декартовых координат  $x_k$  центра масс второго тела в инерциальной системе координат к новым переменным  $u_j$ , которые являются нормированными определенным образом параметрами Эйлера (Родрига–Гамильтона)  $\lambda_j$ , характеризующими ориентацию вращающейся в инерциальном пространстве системы координат  $\eta$ , ось  $\eta_1$  которой направлена вдоль радиус-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс второго тела:

$$u_0 = r^{1/2}\lambda_0, \quad u_k = -r^{1/2}\lambda_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.7)$$

Нормирующий множитель равен квадратному корню из расстояния  $r$  от центра масс второго тела до центра притяжения, взятому со знаком плюс или минус.

В кватернионной записи эти соотношения имеют следующий вид:

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} = r^{1/2}(\lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} - \lambda_3\mathbf{k}) = r^{1/2}\bar{\lambda}, \quad (1.8)$$

где  $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}$  — кватернион ориентации системы координат  $\eta$  в инерциальной системе координат  $X$ ,  $\bar{\lambda}$  — сопряженный кватернион:  $\bar{\lambda} = \lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} - \lambda_3\mathbf{k}$ ;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — векторные мнимые единицы Гамильтона.

Нами также установлено, что билинейное соотношение Кустаанхеймо–Штифеля

$$u_1u'_0 - u_0u'_1 + u_3u'_2 - u_2u'_3 = 0, \quad (1.9)$$

связывающее между собой переменные Кустаанхеймо–Штифеля  $u_j$  и их первые производные  $u'_j$  по переменной  $t$  и играющее, по словам Штифеля и Шейфеле, основную роль в их построении регулярной небесной механики [7, с. 29], накладывает на движения системы координат  $\eta$  дополнительное (неголономное) условие, заключающееся в равенстве нулю проекции  $\omega_1$  вектора  $\omega$  абсолютной угловой скорости системы координат  $\eta$  на направление радиус-вектора  $\mathbf{r}$  (ось  $\eta_1$ ):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(-\lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_0\dot{\lambda}_1 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3) = \\ &= 2r^{-2}(u_1u'_0 - u_0u'_1 + u_3u'_2 - u_2u'_3) = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь и далее верхняя точка — символ дифференцирования по времени  $t$ .

Отметим, что регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля были получены нами [26,

27] в кватернионных матрицах [26] и в кватернионах Гамильтона [27] в общем случае, когда не требуется выполнения билинейного соотношения (1.9), т.е. когда проекция  $\omega_1$  вектора абсолютной угловой скорости системы координат  $\eta$ , определяемая соотношением (1.10), не равна нулю, а является произвольно задаваемой функцией времени.

Полученные нами кватернионные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля в случае, когда выполняется билинейное соотношение (1.9), имеют следующий вид [27] (см. также [36, 37]):

$$\mathbf{u}'' - \frac{1}{2}h\mathbf{u} = \frac{1}{2}r\mathbf{q}, \quad h' = 2\text{scal}(\bar{\mathbf{u}}' \circ \mathbf{q}), \quad t' = r \quad (1.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} r = \|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \\ \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x, \quad \mathbf{p}_x = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$\mathbf{p}_x$  — отображение вектора  $\mathbf{p}$  возмущающего ускорения центра масс изучаемого тела на инерциальный базис  $X$ , символ « $\circ$ » означает кватернионное умножение; верхняя черта — символ кватернионного сопряжения;  $\text{scal}(\bullet)$  — скалярная часть кватерниона, стоящего в круглых скобках;  $\mathbf{u}$  — кватернионная регулярная переменная, определяемая соотношениями (1.8).

В кватернионных уравнениях (1.11) в качестве переменных выступают кватернион  $\mathbf{u}$ , компонентами которого являются регулярные переменные Кустаанхеймо–Штифеля  $u_i$ , кеплеровская энергия  $h$  и время  $t$ . Эти уравнения имеют все ранее указанные достоинства регулярных уравнений (1.4)–(1.6), предложенных Кустаанхеймо и Штифелем.

Для нахождения декартовых координат  $x_k$  изучаемого тела в инерциальной системе координат  $X$  и проекций  $v_k = dx_k/dt$  вектора его скорости  $\mathbf{v}$  на оси этой системы координат служат кватернионные соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_x = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = d\mathbf{r}_x / dt = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ (d\mathbf{u} / dt) = 2r^{-1}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ (d\mathbf{u} / d\tau), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $\mathbf{r}_x$  и  $\mathbf{v}_x$  — отображения векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  на инерциальный базис,  $v_k$  — проекции вектора скорости  $\mathbf{v}$  оси инерциальной системы координат  $X$ .

Позднее эффективность применения кватернионов для решения проблемы регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел была продемонстрирована в работах ряда зарубежных авторов [9–11, 14–17]. Так, в 2008 г. Вальдфогелем (Waldvogel) была опубликована статья [17] под названием “Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way” (“Кватернионы для регуляризации небесной механики: верный путь”), в которой говорится, что кватернионы “являются идеальным инструментом для описания и разработки теории пространственной регуляризации в небесной механике”. В работе [17] Вальдфогель говорит: “Это утверждение (имеется в виду цитированное ранее утверждение Штифеля и Шейфеле о бесперспективности использования в теории регуляризации кватернионных матриц) было впервые опровергнуто

Челноковым (1981), который представил теорию регуляризации пространственной задачи Кеплера, используя геометрические представления во вращающейся системе координат и кватернионные матрицы. В серии статей (например, 1992 и 1999) тем же автором была расширена теория кватернионной регуляризации и приведены практические применения”.

Отметим вышедшую в 2011 г. книгу [36] автора статьи, в которой, в частности, излагается кватернионный метод регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенного пространственного центрального движения материальной точки, приводятся кватернионные регулярные модели небесной механики и астродинамики и даются их приложения к решению задач оптимального управления траекторным (орбитальным) движением космического аппарата. Также отметим обзорные работы [37–39] автора статьи по проблеме регуляризации уравнений небесной механики и астродинамики, вышедшие в 2013–2015 гг., а также его статью [41].

Логиновым и автором статьи [46] проведено сравнительное исследование точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и космический аппарат) в декартовых координатах и построенных нами [41, 42] регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой задачи в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, принимающих вид кватернионных регулярных уравнений (1.11) возмущенной пространственной задачи двух тел в случае отсутствия поля тяготения Луны.

Регулярные кватернионные уравнения в  $KS$ -переменных показали значительно более высокую точность в сравнении с уравнениями в декартовых координатах: для круговой орбиты точность оказалась выше на 2 порядка, для возмущенных эллиптических орбит со средним эксцентриситетом — на 4 порядка, для возмущенной эллиптической орбиты с высоким эксцентриситетом — на 7 порядков. Отметим, что в книге Бордовицыной [47] приведены результаты численных исследований решений уравнений невозмущенной и возмущенной пространственной задачи двух тел (решений уравнений невозмущенного и возмущенного движения ИСЗ) ряда авторов с использованием известных канонических уравнений в  $KS$ -переменных и уравнений в декартовых координатах, демонстрирующие преимущество уравнений в  $KS$ -переменных перед уравнениями в декартовых координатах (в смысле точности их численного интегрирования). Сравнение этих результатов с нашими показало, что они в целом согласуются между собой.

Полученные нами результаты подтверждают значительные преимущества регулярных кватернионных уравнений в  $KS$ -переменных в задачах прогноза движения небесных и космических тел, а также в задачах коррекции параметров орбитального движения КА и инерциальной навигации в космосе.

Автором статьи также получены другие регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и ИСЗ в новых четырехмерных переменных: модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, введенных автором статьи в работе [31] (см. также [36, 37]). Эти уравнения обладают всеми достоинствами выше приведенных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, но имеют более простую и симметричную структуру

для движения второго тела (КА) в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются не только центральная (ньютоновская), но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники [31, 45].

Введение модифицированных переменных основано на выше приведенных геометрической и кинематической интерпретациях регуляризующего преобразования Кустаанхеймо—Штифеля и их билинейного соотношения. В случае Кустаанхеймо—Штифеля ось  $\eta_1$  ранее введенной нами вращающейся системы координат  $\eta$  направляется по радиус-вектору  $\mathbf{r}$  центра масс второго тела (спутника). Координаты  $x_i$  тела в инерциальной системе координат  $X$  связаны с переменными Кустаанхеймо—Штифеля  $u_j$  скалярными соотношениями (1.3) и первым кватернионным соотношением (1.13).

Нами предложено направить по радиус-вектору  $\mathbf{r}$  не ось  $\eta_1$  системы координат  $\eta$ , а ось  $\eta_3$ . В этом случае все кватернионные уравнения (1.11)–(1.13) сохраняют свой вид, лишь вместо орта  $\mathbf{i}$  необходимо взять орт  $\mathbf{k}$  (это, кстати, демонстрирует удобство использования кватернионных моделей астродинамики). Новые переменные  $u_j$ , определяемые через параметры Эйлера, как и в случае Кустаанхеймо—Штифеля, формулами (1.7), будут связаны с координатами  $x_i$  соотношениями:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2r(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) = 2(u_1u_3 - u_0u_2) \\x_2 &= 2r(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) = 2(u_2u_3 + u_0u_1) \\x_3 &= r(\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2) = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_3^2,\end{aligned}$$

которые отличны от соотношений (1.3) и в кватернионной записи имеют вид:

$$\mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = r\lambda \circ \mathbf{k} \circ \bar{\lambda} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{u},$$

где новая кватернионная переменная  $\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$  имеет смысл, отличный от кватернионной переменной, использованной нами в случае Кустаанхеймо—Штифеля.

Расстояние  $r$  по-прежнему находится через новые переменные  $u_j$  по формуле:

$$r = \|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2,$$

а отображение  $\mathbf{v}_x$  вектора скорости  $\mathbf{v}$  на инерциальный базис — по другой формуле:

$$\mathbf{v}_x = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = d\mathbf{r}_x / dt = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{k} \circ d\mathbf{u} / dt = 2r^{-1}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{k} \circ d\mathbf{u} / d\tau.$$

Модифицированные переменные  $u_j$  связаны с переменными Кустаанхеймо—Штифеля (будем их здесь обозначать  $u_{jKS}$  вместо ранее использованного обозначения  $u_j$ ) соотношениями:

$$\begin{aligned}u_0 &= (1/2)(u_{0KS} + u_{1KS} + u_{2KS} + u_{3KS}) \\u_1 &= -(1/2)(u_{0KS} - u_{1KS} - u_{2KS} + u_{3KS}) \\u_2 &= -(1/2)(u_{0KS} + u_{1KS} - u_{2KS} - u_{3KS}) \\u_3 &= -(1/2)(u_{0KS} - u_{1KS} + u_{2KS} - u_{3KS})\end{aligned}$$

и являются их линейными композициями.

В кватернионной записи эти соотношения принимают вид ортогонального преобразования:

$$\mathbf{u} = \alpha \circ \mathbf{u}_{KS}, \quad \alpha = (1/2)(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$\mathbf{u}_{KS} = u_{0KS} + u_{1KS}\mathbf{i} + u_{2KS}\mathbf{j} + u_{3KS}\mathbf{k},$$

Билинейное соотношение для модифицированных переменных  $u_j$  имеет другой вид:

$$u_1 u'_0 - u_0 u'_1 + u_3 u'_2 - u_2 u'_3 = 0.$$

Полученные нами в работах [31, 45] кватернионные уравнения движения спутника в гравитационном поле Земли в модифицированных четырехмерных переменных  $u_j$  обладают всеми достоинствами уравнений движения спутника в переменных Кустаанхеймо–Штифеля  $u_{jKS}$  (также полученных в этой статье), но имеют более простую и симметричную структуру. Это обусловлено тем, что выражения переменной  $\gamma = \sin\varphi$  ( $\varphi$  – геоцентрическая широта), от которой зависит потенциал гравитационного поля Земли, через модифицированные переменные  $u_j$  могут быть представлены в двух различных, более компактных симметричных формах:

$$\gamma = 1 - 2r^{-1}(u_1^2 + u_2^2) = 2r^{-1}(u_0^2 + u_3^2) - 1, \quad r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

в сравнении с ее представлением:

$$\gamma = 2r^{-1}(u_{1KS}u_{3KS} + u_{0KS}u_{2KS}), \quad r = u_{0KS}^2 + u_{1KS}^2 + u_{2KS}^2 + u_{3KS}^2$$

в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, что и позволяет получить более простые и симметричные, чем в случае использования переменных Кустаанхеймо–Штифеля, уравнения движения спутника.

Более простые и симметричные структуры уравнений приводят к более эффективным вычислительным алгоритмам при численном интегрировании дифференциальных уравнений движения спутника. Удобство и эффективность использования полученных уравнений движения спутника в модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля для аналитического исследования движения показано нами в работе [45] на примере рассмотрения движения спутника в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются его центральная (ньютоновская) и зональные гармоники. В этой работе найдены первые интегралы уравнений движения спутника в модифицированных переменных в указанном случае, предложены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения спутника замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности системы уравнений четвертого и третьего порядков.

Во всех работах по проблеме регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, известных автору статьи, рассматривается регуляризация уравнений движения центра масс второго (изучаемого) тела, описывающих движение тела относительно системы координат, движущейся в инерциальной системе координат поступательно, т.е. рассматривается



регуляризация уравнений абсолютного движения центра масс изучаемого тела. В недавней работе автора статьи [43] ([44] – англоязычная версия этой статьи) предложено кватернионное решение задачи регуляризации уравнений движения центра масс изучаемого тела, описывающих движение тела в системе координат, вращающейся относительно инерциальной системы координат по произвольно заданному закону, т.е. предложена регуляризация уравнений относительного движения изучаемого тела. В этой работе также получены кватернионные регулярные уравнения изучаемого тела относительно системы координат, связанной с Землей, принимаемой за первое (центральное) тело.

В настоящей работе предлагаются более общие, в сравнении с работой [43], регулярные кватернионные уравнения возмущенного движения ИСЗ относительно системы координат, связанной с Землей, в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля и в модифицированных четырехмерных переменных, предложенных нами в работе [31]. В этих уравнениях относительного движения учитываются зональные, тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли. Полученные уравнения имеют вид уравнений относительного движения возмущенного четырехмерного осциллятора. Они, в отличие от классических уравнений, регулярны (не содержат особых точек типа сингулярности (деления на ноль)) для движения спутника в ньютоновском гравитационном поле. В этих уравнениях помимо основных переменных, которыми являются переменные Кустаанхеймо–Штифеля или наши модифицированные переменные, используются дополнительные переменные: энергия движения спутника и время. Уравнения удобны для высокоточных численных расчетов, проводимых при исследовании орбитального движения КА относительно Земли и прогнозе движения КА.

Дополнительно отметим, что полученные в статье уравнения относительного возмущенного движения спутника в гравитационном поле Земли в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и в наших модифицированных четырехмерных переменных, в отличие от известных уравнений возмущенного абсолютного движения спутника в этих переменных, позволяют непосредственно изучать движение спутника относительно Земли. При этом географическая долгота, фигурирующая в формулах, описывающих тессеральные и секториальные гармоники потенциала гравитационного поля Земли, вычисляется не по формулам, используемым в случае абсолютного движения и содержащим в явном виде время  $t$ , а по формулам, не содержащим время  $t$ . Широта и долгота, фигурирующие в потенциале гравитационного поля Земли, описывают положение спутника в системе координат, связанной с Землей, что также говорит об удобстве предлагаемых в статье уравнений относительного движения.

Отметим также, что проблема кватернионной регуляризации уравнений небесной механики и механики космического полета, основанная на использовании четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля или четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), а также применение этих регулярных уравнений в астродинамике активно разрабатываются зарубежными учеными и обсуждаются в ведущих журналах западной Европы и США.

**2. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел для относительного движения.** В курсах

теоретической механики для сложения движений с использованием векторного способа описания движения и для получения векторной формы уравнений относительного движения материальной точки используется векторная операция сложения переносного и относительного движений (в виде суммы двух векторов, описывающих переносное и относительное движения), т.е. используется аддитивная форма сложения движений. Для сложения движений с использованием кватернионного способа описания движения нами используется кватернионная операция в виде кватернионного произведения двух кватернионов, один из которых характеризует переносное движение, а другой — относительное, т.е. используется мультипликативная форма сложения движений. Это кардинальное отличие векторного и кватернионного способов описания движения (аддитивность и мультипликативность сложения движений) приводит к существенным отличиям в способах получения векторных и кватернионных дифференциальных уравнений динамики относительного движения материальной точки (т.е. уравнений относительного орбитального движения).

Векторный способ получения векторного дифференциального уравнения динамики относительного движения материальной точки основан на подстановке в векторное дифференциальное уравнение абсолютного движения материальной точки вместо вектора абсолютного ускорения векторной суммы переносного, относительного и кориолисова ускорений (в соответствии с теоремой о сложении ускорений), полученной в результате последовательного дифференцирования векторной суммы двух векторов, описывающих переносное и относительное движения (с использованием понятий абсолютной и локальной производных от вектора), и последующего введения сил инерции.

Наш способ получения кватернионного динамического уравнения относительного движения материальной точки основан на подстановке в полученное нами кватернионное дифференциальное уравнение абсолютного движения материальной точки вместо кватерниона, характеризующего положение точки в инерциальной системе координат, кватернионного произведения двух кватернионов, один из которых характеризует переносное движение, а другой — относительное движение, и последующего учета кватернионного кинематического уравнения переносного вращения.

Будем рассматривать движение второго (изучаемого) тела относительно системы координат  $Z$ , вращающейся относительно инерциальной системы координат  $X$  с угловой скоростью  $\omega_e$  ( $\omega_e$  — переносная угловая скорость). Эта система координат характеризует собой переносное движение. Начало системы координат  $Z$  совместим с началом системы координат  $X$ , а ее ориентацию в инерциальной системе координат  $X$  будем задавать нормированным кватернионом  $\mu = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}$ . Ориентацию ранее введенной системы координат  $\eta$ , ось  $\eta_1$  которой направлена вдоль радиус-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс изучаемого тела, во вращающейся системе координат  $Z$  будем задавать нормированным кватернионом  $\mathbf{v} = v_0 + v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$ .

Нормы кватернионов  $\mu$  и  $\mathbf{v}$  равны единице, а их компоненты  $\mu_j$  и  $v_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) являются параметрами Эйлера (Родрига—Гамильтона), характеризующими ориентации систем координат  $Z$  и  $\eta$  в системах координат  $X$  и  $Z$  соответственно. Ориентацию системы координат  $\eta$  в инерциальной системы координат  $X$  будем

по-прежнему задавать нормированным кватернионом  $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k}$  (этот кватернион характеризует собой абсолютное движение в инерциальной системе координат).

Будем считать, что все введенные кватернионы являются собственными [57, 58]: каждый из них определен своими компонентами в своей, преобразуемой этим кватернионом, системе координат. Тогда в соответствии с кватернионной формулой сложения двух конечных поворотов [57–59] собственные кватернионы  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$  будут связаны соотношением:

$$\lambda = \mu \circ \nu. \quad (2.1)$$

Эта формула является кватернионной формулой сложения переносного и относительного вращений.

Введем кватернионы

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k} = r^{1/2} (\lambda_0 - \lambda_1 \mathbf{i} - \lambda_2 \mathbf{j} - \lambda_3 \mathbf{k}) = r^{1/2} \bar{\lambda}, \quad \lambda = r^{-1/2} \bar{\mathbf{u}}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{s} = s_0 + s_1 \mathbf{i} + s_2 \mathbf{j} + s_3 \mathbf{k} = r^{1/2} (v_0 - v_1 \mathbf{i} - v_2 \mathbf{j} - v_3 \mathbf{k}) = r^{1/2} \bar{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v} = r^{-1/2} \bar{\mathbf{s}}. \quad (2.3)$$

Компоненты  $u_j$  и  $s_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) кватернионов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{s}$  связаны с параметрами Эйлера  $\lambda_j$  и  $v_j$  и расстоянием  $r$  от центра масс второго тела до центра притяжения (центра масс первого (центрального) тела) соотношениями:

$$u_0 = r^{1/2} \lambda_0, \quad u_k = -r^{1/2} \lambda_k, \quad k = 1, 2, 3; \quad u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = r,$$

$$s_0 = r^{1/2} v_0, \quad s_k = -r^{1/2} v_k, \quad k = 1, 2, 3; \quad s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = r.$$

Эти компоненты являются переменными Кустанхеймо–Штифеля, связанными с декартовыми координатами  $x_k$  и  $z_k$  центра масс изучаемого тела в инерциальной системе координат  $X$  и во вращающейся системе координат  $Z$  соотношениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, & x_2 &= 2(u_1 u_2 - u_0 u_3), & x_3 &= 2(u_1 u_3 + u_0 u_2), \\ z_1 &= s_0^2 + s_1^2 - s_2^2 - s_3^2, & z_2 &= 2(s_1 s_2 - s_0 s_3), & z_3 &= 2(s_1 s_3 + s_0 s_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В кватернионной записи соотношения (2.4) имеют вид:

$$\mathbf{r}_x = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{r}_z = z_1 \mathbf{i} + z_2 \mathbf{j} + z_3 \mathbf{k} = \bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s}. \quad (2.5)$$

Из соотношений (2.1)–(2.3) следует соотношение

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} \circ \bar{\mu},$$

которым устанавливается связь основных кватернионных (четырёхмерных) переменных  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{s}$ , характеризующих абсолютное и относительное движения точки (кватернион  $\mu$  характеризует переносное вращение).

Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел для относительного движения (движения изучаемого тела относительно системы координат  $Z$ , вращающейся в инерциальной системе координат  $X$  по произвольно заданному закону  $\mu = \mu(t)$ ) в переменных Кустаанхеймо—Штифеля имеют (во времени  $t$ ) вид уравнений [43, 44]:

$$\mathbf{s}'' + \mathbf{s} \circ \bar{\mu}'' \circ \mu + 2\mathbf{s}' \circ \bar{\mu}' \circ \mu - \frac{1}{2}h\mathbf{s} = -\frac{1}{2}r\mathbf{q}^* \quad (2.6)$$

$$h' = 2\text{scal}\left((\bar{\mathbf{s}}' + \bar{\mu} \circ \mu' \circ \bar{\mathbf{s}}) \circ \mathbf{q}^*\right) \quad (2.7)$$

$$t' = r = \|\mathbf{s}\| = \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \quad (2.8)$$

Здесь

$$\mathbf{q}^* = -\mathbf{i} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z, \quad \mathbf{p}_z = \bar{\mu} \circ \mathbf{p}_x \circ \mu, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{p}_z = p_{1z}\mathbf{i} + p_{2z}\mathbf{j} + p_{3z}\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_x = p_{1x}\mathbf{i} + p_{2x}\mathbf{j} + p_{3x}\mathbf{k}.$$

$\mathbf{p}_z$  и  $\mathbf{p}_x$  — отображения вектора  $\mathbf{p}$  возмущающего ускорения центра масс изучаемого тела на оси вращающейся  $Z$  и инерциальной  $X$  систем координат,  $p_{kz}$  и  $p_k$  — проекции вектора  $\mathbf{p}$  на оси систем координат  $Z$  и  $X$  соответственно.

Производные в новом времени  $t$  от кватерниона  $\mu$ , характеризующие угловую скорость и угловое ускорение переносного вращения, имеют вид:

$$\begin{aligned} \mu' &= r(d\mu(t) / dt) \\ \mu'' &= r'(d\mu(t) / dt) + r^2(d^2\mu(t) / dt^2). \end{aligned}$$

Основное кватернионное уравнение (2.6) относительного движения получено нами в результате дифференцирования выше приведенного кватернионного соотношения  $\mathbf{u} = \mathbf{s} \circ \bar{\mu}$  дважды по времени и подстановки результата дифференцирования в кватернионное дифференциальное уравнение абсолютного движения (в первое уравнение из системы уравнений (1.11)).

В уравнениях (2.6)–(2.8) в качестве переменных выступают кватернион  $\mathbf{s}$ , компонентами которого являются переменные  $s_j$ , кеплеровская энергия  $h$  и время  $t$ . Кватернион  $\mathbf{s}$  характеризует относительное движение центра масс изучаемого тела. Эти уравнения, также как и уравнения (1.11) возмущенной пространственной задачи двух тел для абсолютного движения в переменных Кустаанхеймо—Штифеля, регулярны в центре притяжения. Они сложнее уравнений для абсолютного движения, но, в отличие от них, позволяют непосредственно изучать движение второго тела относительно не инерциальной, а выбранной вращающейся системы координат, связанной, например, с той или иной планетой.

Для нахождения декартовых координат  $z_k$  изучаемого тела во вращающейся системе координат  $Z$  и проекций  $v_{rk} = dz_k/dt$  его вектора относительной скорости  $\mathbf{v}_r$  на оси этой системы координат служат второе соотношение (2.5) и соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{r_z} &= v_{r1}\mathbf{i} + v_{r2}\mathbf{j} + v_{r3}\mathbf{k} = d\mathbf{r}_z / dt = \\ &= \bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ (d\mathbf{s} / dt) + (d\bar{\mathbf{s}} / dt) \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s} = r^{-1}(\bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s}' + \bar{\mathbf{s}}' \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s}), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{v}_{r_z}$  — отображение вектора относительной скорости  $\mathbf{v}_r$  на вращающийся базис  $Z$ .

Используя кватернионное кинематическое уравнение переносного вращения

$$2\boldsymbol{\mu}' = r\boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\omega}_{e_z},$$

где  $\boldsymbol{\omega}_{e_z}$  — отображение вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_e$  вращающейся системы координат  $Z$  на ее же координатные оси, запишем уравнения (2.6)–(2.8) относительного движения в другом виде:

$$\mathbf{s}'' - r\mathbf{s}' \circ \boldsymbol{\omega}_{e_z} - \frac{1}{2}\mathbf{s} \circ (r'\boldsymbol{\omega}_{e_z} + \boldsymbol{\varepsilon}_{e_z}) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_e^2 r^2 + h\right)\mathbf{s} = -\frac{1}{2}r\mathbf{q}^* \quad (2.10)$$

$$h' = \text{scal}\left((2\bar{\mathbf{s}}' + r\boldsymbol{\omega}_{e_z} \circ \bar{\mathbf{s}}) \circ \mathbf{q}^*\right), \quad t' = r = \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \quad (2.11)$$

Здесь  $r' = 2(s_0s_0' + s_1s_1' + s_2s_2' + s_3s_3')$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{e_z} = d\boldsymbol{\omega}_{e_z} / dt$  — отображение вектора углового ускорения  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  вращающейся системы координат  $Z$  на ее же координатные оси,  $\boldsymbol{\omega}_e = |\boldsymbol{\omega}_e|$ .

В основном регулярном кватернионном дифференциальном уравнении (2.10) первое слагаемое  $\mathbf{s}''$  в левой части уравнения характеризует относительное ускорение центра масс изучаемого тела во вращающейся системе координат  $Z$ , сумма слагаемых

$$-\frac{1}{2}\mathbf{s} \circ (r'\boldsymbol{\omega}_{e_z} + \boldsymbol{\varepsilon}_{e_z}) - \frac{1}{4}\boldsymbol{\omega}_e^2 r^2 \mathbf{s}$$

характеризует переносное ускорение, а слагаемое  $-r\mathbf{s}' \circ \boldsymbol{\omega}_{e_z}$  характеризует ускорение Кориолиса (напомним, что движение рассматривается в новом времени  $t$ , определяемом дифференциальным соотношением  $dt = r d\tau$ ).

Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел для относительного движения в модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, имеют вид уравнений (2.6)–(2.8) или (2.10) и (2.11), в которых кватернион  $\mathbf{q}^*$ , содержащий отображение  $\mathbf{p}_z$  вектора  $\mathbf{p}$  возмущающего ускорения центра масс изучаемого тела на оси вращающейся системы координат  $Z$ , определяется другими соотношениями:

$$\mathbf{q}^* = -\mathbf{k} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z, \quad \mathbf{p}_z = \boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{p}_x \circ \boldsymbol{\mu},$$

$$\mathbf{p}_x = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}.$$

Декартовы координаты  $z_i$  изучаемого тела во вращающейся системе координат  $Z$  находятся через модифицированные переменные Кустаанхеймо–Штифеля  $s_j$  по формулам:

$$z_1 = 2(s_1s_3 - s_0s_2), \quad z_2 = 2(s_2s_3 + s_0s_1), \quad z_3 = s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 + s_3^2, \quad (2.12)$$

которые в кватернионной записи имеют вид:

$$\mathbf{r}_z = z_1 \mathbf{i} + z_2 \mathbf{j} + z_3 \mathbf{k} = \bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{s}. \quad (2.13)$$

Для нахождения проекций  $v_{rk} = dz_k/dt$  вектора относительной скорости  $\mathbf{v}_r$  тела на оси этой системы координат служит соотношение:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{rz} &= v_{r1} \mathbf{i} + v_{r2} \mathbf{j} + v_{r3} \mathbf{k} = \bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{k} \circ (d\mathbf{s} / dt) + \\ &+ (d\bar{\mathbf{s}} / dt) \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{s} = r^{-1} (\bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{s}' + \bar{\mathbf{s}}' \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{s}), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{v}_{rz}$  — по-прежнему отображение вектора относительной скорости  $\mathbf{v}_r$  на вращающийся базис  $Z$ .

**3. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения изучаемого тела относительно Земли.** Приведем регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения второго (изучаемого) тела относительно Земли, принимаемой за первое (центральное) тело, в переменных Кустанхеймо—Штифеля. Инерциальную систему координат  $X$ , в которой задается вращение системы координат  $Z$ , введем следующим образом: ее начало поместим в центр Земли  $O$ , ось  $OX_3$  направим вдоль оси суточного вращения Земли к ее северному полюсу, а ось  $OX_1$  — в точку весеннего равноденствия. Вращающуюся систему координат  $Z$  жестко свяжем с Землей (центральным телом), направив ее ось  $OZ_3$  вдоль оси суточного вращения Земли (вдоль оси  $OX_3$ ), а ось  $OZ_1$  — вдоль линии пересечения плоскости экватора и гринвичского меридиана. Тогда ориентация вращающейся системы координат  $Z$  в инерциальной системе координат  $X$  будет характеризоваться нормированным кватернионом:

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = \mu_0 + \mu_3 \mathbf{k}, \quad \mu_0 = \cos((\chi_0 + \Omega_E t) / 2), \quad \mu_3 = \sin((\chi_0 + \Omega_E t) / 2),$$

где  $\chi_0 = \text{const}$  — значение угла  $\chi$  разворота системы координат  $Z$  относительно системы координат  $X$  вокруг оси  $OX_3$  в начальный момент времени,  $\Omega_E = \omega_e = \text{const}$  — угловая скорость суточного вращения Земли.

В рассматриваемом случае сопряженные кватернионы

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}' = -(1/2)\Omega_E r \mathbf{k} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}}, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}}'' = -\left((1/4)\Omega_E^2 r^2 + (1/2)\Omega_E r' \mathbf{k}\right) \circ \bar{\boldsymbol{\mu}}. \quad (3.1)$$

Поэтому из уравнений (2.6)–(2.9) получаем следующие регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения изучаемого тела относительно Земли, принимаемой за центральное тело, в переменных Кустанхеймо—Штифеля:

$$\mathbf{s}'' - \Omega_E r \mathbf{s}' \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2} \Omega_E r' \mathbf{s} \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \Omega_E^2 r^2 + h \right) \mathbf{s} = \frac{1}{2} r \mathbf{q}^*, \quad (3.2)$$

$$h' = \text{scal} \left( (2\bar{\mathbf{s}}' + \Omega_E r \mathbf{k} \circ \bar{\mathbf{s}}) \circ \mathbf{q}^* \right), \quad (3.3)$$

$$t' = r = \|\mathbf{s}\| = \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \quad (3.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^* &= -\mathbf{i} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z, \quad \mathbf{p}_z = (\mu_0 - \mu_3 \mathbf{k}) \circ \mathbf{p}_x \circ (\mu_0 + \mu_3 \mathbf{k}) \\ r' &= 2(s_0 s'_0 + s_1 s'_1 + s_2 s'_2 + s_3 s'_3).\end{aligned}\quad (3.5)$$

В уравнениях (3.2)–(3.4) в качестве переменных выступают кватернионная переменная  $\mathbf{s}$ , компоненты которой – переменные  $s_j$ , кеплеровская энергия  $h$  и время  $t$ , а в качестве независимой переменной – “фиктивное” время  $\tau$ . Отметим, что уравнения (3.2) и (3.3) также следуют из уравнений (2.10) и (2.11), так как в рассматриваемом случае  $\boldsymbol{\omega}_{ez} = \Omega_E \mathbf{k} = \text{const}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_E = 0$ .

Уравнение (3.2) получено нами в работе [43]. Уравнение (3.7) работы [43] для кеплеровской энергии  $h$ , приведенное в этой работе, содержит ошибку: из правой части этого уравнения нужно убрать выражение, заключенное в квадратных скобках (это уравнение должно иметь вид уравнения (3.3) нашей статьи).

Введем вместо кеплеровской энергии  $h$  новую переменную  $h^+$ , определяемую соотношением:

$$h^+ = h + (1/2)\Omega_E^2 r^2.$$

Тогда уравнения (3.2) и (3.3) в переменных Кустаанхеймо–Штифеля примут следующий вид:

$$\mathbf{s}'' - \Omega_E r \mathbf{s}' \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2} \Omega_E r' \mathbf{s} \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2} h^+ \mathbf{s} = \frac{1}{2} r \mathbf{q}^*, \quad (3.6)$$

$$\left(h^+\right)' = \Omega_E^2 r r' + \text{scal}\left((2\mathbf{s}' + \Omega_E r \mathbf{k} \circ \mathbf{s}) \circ \mathbf{q}^*\right). \quad (3.7)$$

Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения изучаемого тела относительно Земли в модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля имеют вид уравнений (3.2)–(3.4) или (3.6), (3.7), (3.4), в которых кватернион  $\mathbf{q}^*$ , содержащий отображение  $\mathbf{p}_z$  вектора  $\mathbf{p}$  возмущающего ускорения центра масс изучаемого тела на оси вращающейся системы координат  $Z$ , определяется соотношениями, отличными от соотношений (3.5):

$$\mathbf{q}^* = -\mathbf{k} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z, \quad \mathbf{p}_z = (\mu_0 - \mu_3 \mathbf{k}) \circ \mathbf{p}_x \circ (\mu_0 + \mu_3 \mathbf{k})$$

Декартовы координаты  $z_i$  изучаемого тела во вращающейся системе координат  $Z$  находятся через модифицированные переменные Кустаанхеймо–Штифеля  $s_j$  (напомним, что они обозначаются нами так же, как и переменные Кустаанхеймо–Штифеля) по формулам (2.12) или (2.13). Для нахождения проекций  $v_{rk} = dz_k/dt$  вектора относительной скорости  $\mathbf{v}_r$  тела на оси этой системы координат служит соотношение (2.14).

**4. Кватернионные уравнения возмущенного абсолютного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в переменных Кустаанхеймо–Штифеля.** В векторной форме дифференциальные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли имеют следующий вид:



$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial \Pi_E}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p} = -\left( \frac{d\Pi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{r}} \right) + \mathbf{p}$$

$$r = |\mathbf{r}|, \quad \Pi_E = \Pi + \Pi^*, \quad \Pi = \Pi(r) = -\frac{fm_E}{r},$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r} / dt)$$

где  $\mathbf{r}$  — геоцентрический радиус-вектор спутника,  $m_E$  — масса Земли,  $\Pi_E$  — потенциал гравитационного поля Земли,  $\Pi = \Pi(r)$  — его центральная составляющая,  $\Pi^* = \Pi_z^*(\mathbf{r}) + \Pi_{ts}^*(t, \mathbf{r})$  — составляющая, обусловленная нецентральной гравитационного поля Земли ( $\Pi_z^*(\mathbf{r})$  — составляющая потенциала, содержащая зональные гармоники гравитационного поля Земли,  $\Pi_{ts}^*(t, \mathbf{r})$  — составляющая потенциала, содержащая тессеральные и секториальные гармоники этого поля [60–62]),  $f$  — постоянная тяготения,  $\mathbf{p}$  — возмущающее ускорение центра масс спутника от действующих на спутник других сил.

Кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного абсолютного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли (относительно инерциальной системы координат) в переменных Кустанхеймо–Штифеля имеют следующий вид [45]:

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* \mathbf{u} = -\frac{1}{4} \frac{\partial (r \Pi^*)}{\partial \mathbf{u}} + \frac{1}{2} r \mathbf{q}, \quad (4.1)$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r \frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial t} + 2 \text{scal} \left( \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \quad (4.2)$$

В уравнениях (4.1) и (4.2)

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \Pi^*(t, \mathbf{r}_x), \quad \mathbf{q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = \\ &= -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x, \quad \mathbf{p}_x = p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k} = \mathbf{p}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) \\ \mathbf{r}_x &= x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_x = \dot{\mathbf{r}}_x = \dot{x}_1 \mathbf{i} + \dot{x}_2 \mathbf{j} + \dot{x}_3 \mathbf{k} = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{u}} = 2r^{-1} \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ (d\mathbf{u} / d\tau)$$

полная энергия спутника  $h^*$  определяется соотношением:

$$h^* = h + \Pi^*(t, \mathbf{r}_x), \quad h = 2r \sum_{j=0}^3 \dot{u}_j^2 + \Pi(r) = \frac{2}{r} \sum_{j=0}^3 \left( \frac{du_j}{d\tau} \right)^2 + \Pi(r).$$

Систему координат  $X$ , в которой рассматривается движение спутника, введем следующим образом: ее начало  $O$  поместим в центр Земли, ось  $OX_3$  направим к северному полюсу Земли, а ось  $OX_1$  — в точку весеннего равноденствия.

Потенциал гравитационного поля Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник имеет вид [60–62]:

$$\Pi_E = \Pi(r) + \Pi_z^*(\mathbf{r}) + \Pi_{ts}^*(t, \mathbf{r}) = \Pi(r) + \Pi_z^*(r, \varphi) + \Pi_{ts}^*(r, \varphi, \lambda),$$

где составляющие потенциала

$$\begin{aligned} \Pi(r) &= -\frac{fm_E}{r}, \quad r = |\mathbf{r}| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\ \Pi_z^*(r, \varphi) &= \frac{fm_E}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi), \quad \sin \varphi = x_3 / r \\ \Pi_{ts}^*(r, \varphi, \lambda) &= -\frac{fm_E}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_{nk}(\sin \varphi) (C_{nk} \cos(k\lambda) + S_{nk} \sin(k\lambda)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь  $R$  – средний экваториальный радиус Земли,  $J_n$  – безразмерные постоянные, характеризующие фигуру Земли,  $P_n$  – полином Лежандра  $n$ -го порядка,  $\varphi$  – геоцентрическая широта,  $C_{nk}$  и  $S_{nk}$  – безразмерные постоянные, характеризующие фигуру Земли,  $P_{nk}$  – присоединенные функции Лежандра,  $\lambda$  – географическая долгота.

Географическая долгота определяется через декартовы координаты  $x_k$  спутника в системе координат  $X$  и переменные Кустаанхеймо–Штифеля  $u_j$  посредством соотношений:

$$\lambda = \lambda_a - \Omega_E t, \quad \lambda_a = \arctan \frac{x_2}{x_1} = \arctan \frac{2(u_1 u_2 - u_0 u_3)}{u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2}. \quad (4.4)$$

где  $\lambda_a$  – абсолютная долгота,  $\Omega_E$  – угловая скорость суточного вращения Земли.

Тригонометрические функции  $\cos(k\lambda)$  и  $\sin(k\lambda)$  находятся через функции  $\cos \lambda$  и  $\sin \lambda$  с помощью кватернионных соотношений, вытекающих из формулы Муавра:

$$\begin{aligned} \cos 2\lambda + i \sin 2\lambda &= (\cos \lambda + i \sin \lambda) \circ (\cos \lambda + i \sin \lambda) = (\cos \lambda + i \sin \lambda)^2 \\ \cos 3\lambda + i \sin 3\lambda &= (\cos \lambda + i \sin \lambda)^3, \dots, \cos(k\lambda) + i \sin(k\lambda) = (\cos \lambda + i \sin \lambda)^k. \end{aligned}$$

Уравнения возмущенного абсолютного движения спутника в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в переменных Кустаанхеймо–Штифеля в скалярной записи имеют вид [45]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* u_j &= \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) u_j - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} \right) u_j^* - \\ &- \frac{1}{4(x_1^2 + x_2^2)} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \left( x_1 \frac{\partial x_2}{\partial u_j} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial u_j} \right) + \frac{1}{2} r q_j, \quad j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r \frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial t} + 2 \sum_{j=0}^3 \left( \frac{du_j}{d\tau} q_j \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r. \quad (4.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_0^* &= u_2, \quad u_1^* = u_3, \quad u_2^* = u_0, \quad u_3^* = u_1, \\ \Pi^+ &= \Pi_{\tau}^+(r, \gamma) + \Pi_{ts}^+(r, \gamma, \lambda), \quad \gamma = \sin \varphi = \cos \vartheta = x_3 / r, \\ \Pi_{\tau}^+(r, \gamma) &= r \Pi_{\tau}^*(r, \gamma) = fm_E \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\gamma), \\ \Pi_{ts}^+(r, \gamma, \lambda) &= r \Pi_{ts}^*(r, \gamma, \lambda) = \\ &= -fm_E \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_{nk}(\gamma) (C_{nk} \cos(k\lambda) + S_{nk} \sin(k\lambda)), \\ r &= u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2; \quad x_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \\ x_2 &= 2(u_1 u_2 - u_0 u_3), \quad x_3 = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2), \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_0} &= 2u_0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u_1} = 2u_1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u_2} = -2u_2, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u_3} = -2u_3, \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_0} &= -2u_3, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u_1} = 2u_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = 2u_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u_3} = -2u_0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Географическая долгота  $\lambda$  определяется через переменные Кустаанхеймо–Штифеля  $u_j$  и  $\Omega_E t$  посредством соотношений (4.4).

В кватернионной записи уравнения (4.5) и (4.6) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* \mathbf{u} &= \frac{1}{2} \left( \gamma \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) \mathbf{u} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} \right) \mathbf{u}^* - \\ &- \frac{1}{4(x_1^2 + x_2^2)} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \left( x_1 \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{u}} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{u}} \right) + \frac{1}{2} r \mathbf{q} \\ \frac{dh^*}{d\tau} &= r \frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial t} + 2 \text{scal} \left( \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q} \right) \\ \frac{dt}{d\tau} &= r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= u_0^* + u_1^* \mathbf{i} + u_2^* \mathbf{j} + u_3^* \mathbf{k} = u_2 + u_3 \mathbf{i} + u_0 \mathbf{j} + u_1 \mathbf{k}, \\ \frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{u}} &= \frac{\partial x_i}{\partial u_0} + \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \mathbf{i} + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \mathbf{j} + \frac{\partial x_i}{\partial u_3} \mathbf{k}, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

частные производные  $\partial x_i / \partial u_j$  определяются соотношениями (4.7).

**5. Кватернионные уравнения возмущенного абсолютного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в модифицированных четырехмерных переменных.** Уравнения возмущенного абсолютного движения спутника в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, обозначаемых, как и переменные Кустаанхеймо–Штифеля, “ $u_j$ ”, в скалярной записи имеют в сравнении с уравнениями в классических переменных Кустаанхеймо–Штифеля более простой вид. Они были получены нами в работе [45] и после преобразований частных производных  $\partial \lambda / \partial u_j$ , фигурирующих в этих уравнениях, принимают следующий вид:

$$\frac{d^2 u_k}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* u_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma - 1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) u_k - \frac{1}{4} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} + \frac{1}{2} r q_k, \quad k = 0, 3, \quad (5.1)$$

$$\frac{d^2 u_s}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* u_s = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma + 1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) u_s - \frac{1}{4} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u_s} + \frac{1}{2} r q_s, \quad s = 1, 2, \quad (5.2)$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = -r \Omega_E \frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial \lambda} + 2 \sum_{j=0}^3 \left( \frac{du_j}{d\tau} q_j \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r. \quad (5.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u_0} &= \frac{u_3}{u_0^2 + u_3^2}, & \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} &= -\frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2}, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} &= \frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2}, & \frac{\partial \lambda}{\partial u_3} &= -\frac{u_0}{u_0^2 + u_3^2}, \end{aligned}$$

$$\Pi^+ = \Pi_z^+(r, \gamma) + \Pi_{ts}^+(r, \gamma, \lambda),$$

$$\Pi_z^+(r, \gamma) = r \Pi_z^*(r, \gamma) = f m_E \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\gamma), \quad (5.4)$$

$$\Pi_{ts}^+(r, \gamma, \lambda) = r \Pi_{ts}^*(r, \gamma, \lambda) = -f m_E \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_{nk}(\gamma) (C_{nk} \cos(k\lambda) + S_{nk} \sin(k\lambda)),$$

$$\gamma = \sin \varphi = \cos \vartheta = x_3 / r =$$

$$= r^{-1} (u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_3^2) = 1 - 2r^{-1} (u_1^2 + u_2^2) = 2r^{-1} (u_0^2 + u_3^2) - 1,$$

$$r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad x_1 = 2(u_1 u_3 - u_0 u_2)$$

$$x_2 = 2(u_2 u_3 + u_0 u_1), \quad x_3 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_3^2,$$

Географическая долгота  $\lambda$  определяется через модифицированные переменные Кустанхеймо–Штифеля  $u_j$  посредством соотношений, отличных от соотношений (4.4) в переменных Кустанхеймо–Штифеля и имеющих следующий вид:

$$\lambda = \lambda_a - \Omega_E t, \quad \lambda_a = \arctan \frac{x_2}{x_1} = \arctan \frac{u_2 u_3 + u_0 u_1}{u_1 u_3 - u_0 u_2}. \quad (5.5)$$

В кватернионной записи уравнения (5.1)–(5.3) принимают вид:

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma \mp 1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) \mathbf{u} - \frac{1}{4} \frac{\partial \Pi_{fs}^+}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}} + \frac{1}{2} r \mathbf{q}, \quad (5.6)$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = -r \Omega_E \frac{\partial \Pi_{fs}^*}{\partial \lambda} + 2 \text{scal} \left( \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r. \quad (5.7)$$

Здесь

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = -\mathbf{k} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x, \quad \mathbf{p}_x = p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k} = \mathbf{p}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x),$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_0} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} \mathbf{i} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} \mathbf{j} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_3} \mathbf{k} = \frac{u_3}{u_0^2 + u_3^2} - \frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2} \mathbf{i} + \frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2} \mathbf{j} - \frac{u_0}{u_0^2 + u_3^2} \mathbf{k},$$

$$\gamma - 1 = -2r^{-1} (u_1^2 + u_2^2), \quad \gamma + 1 = 2r^{-1} (u_0^2 + u_3^2).$$

Знак “–” берется для первого и четвертого уравнения системы (5.6), эквивалентной четырем скалярным уравнениям, когда  $j = 0, 3$ , а знак “+” – для второго и третьего уравнения этой системы, когда  $j = 1, 2$ .

Отметим, что кватернион  $\mathbf{q} = -\mathbf{k} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x$ , фигурирующий в уравнениях (5.6) и (5.7), отличается от кватерниона  $\mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x$ , фигурирующего в уравнениях (4.1) и (4.2): вместо орта  $\mathbf{i}$  используется орт  $\mathbf{k}$ . Это обусловлено тем, что при введении наших модифицированных переменных вместо переменных Кустанхеймо–Штифеля вдоль радиус-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс спутника направляется не ось  $\eta_1$  вращающейся системы координат  $\eta$ , а ее ось  $\eta_3$ .

**6. Кватернионные уравнения возмущенного относительного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в переменных Кустанхеймо–Штифеля.** Для получения уравнения возмущенного относительного движения спутника (относительно Земли) в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в переменных Кустанхеймо–Штифеля продифференцируем кватернионное соотношение  $\mathbf{u} = \mathbf{s} \circ \bar{\mu}$  дважды по переменной  $\tau$  и подставим результат дифференцирования, а также соотношение для переменной  $\mathbf{u}$  в уравнения (4.8). Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \mathbf{s}}{d\tau^2} \circ \bar{\mu} + 2 \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} \circ \frac{d\bar{\mu}}{d\tau} + \mathbf{s} \circ \frac{d^2 \bar{\mu}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* \mathbf{s} \circ \bar{\mu} = \\ & = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) \mathbf{s} \circ \bar{\mu} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} \right) \mathbf{u}^* - \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4(x_1^2 + x_2^2)} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \left( x_1 \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{u}} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{u}} \right) + \frac{1}{2} r \mathbf{q} \\
\frac{dh^*}{d\tau} &= r \frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial t} + 2 \text{scal} \left( \left( \mu \circ \frac{d\bar{\mathbf{s}}}{d\tau} + \frac{d\mu}{d\tau} \circ \bar{\mathbf{s}} \right) \circ \mathbf{q} \right), \\
\frac{dt}{d\tau} &= r = \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2
\end{aligned}$$

Умножим первое кватернионное уравнение системы (6.1) справа на кватернион  $\mu$ . Получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \mathbf{s}}{d\tau^2} + 2 \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} \circ \frac{d\bar{\mu}}{d\tau} \circ \mu + \mathbf{s} \circ \frac{d^2 \bar{\mu}}{d\tau^2} \circ \mu - \frac{1}{2} h^* \mathbf{s} = \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) \mathbf{s} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} \right) \mathbf{u}^* \circ \mu - \\
& - \frac{1}{4(x_1^2 + x_2^2)} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \left( x_1 \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{u}} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{u}} \right) \circ \mu + \frac{1}{2} r \mathbf{q} \circ \mu.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Из уравнений (3.1) получаем:

$$2\bar{\mu}' \circ \mu = -\Omega_E r \mathbf{k}, \quad \bar{\mu}'' \circ \mu = -(1/2) \left( (1/2) \Omega_E^2 r^2 + \Omega_E r' \mathbf{k} \right), \tag{6.3}$$

С учетом этих соотношений, а также соотношений

$$\mathbf{u}^* \circ \mu = (u_2 + u_3 \mathbf{i} + u_0 \mathbf{j} + u_1 \mathbf{k}) \circ (\mu_0 + \mu_3 \mathbf{k}) = s_2 + s_3 \mathbf{i} + s_0 \mathbf{j} + s_1 \mathbf{k} = \mathbf{s}^*,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = z_1^2 + z_2^2, \quad x_1 \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{u}} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{s}^* \circ (x_1 \mathbf{i} + 2x_2 \mathbf{j}) \circ \mu,$$

$$\mathbf{q} \circ \mu = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x \circ \mu = -\mathbf{i} \circ \mathbf{s} \circ \bar{\mu} \circ \mathbf{p}_x \circ \mu = -\mathbf{i} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z = \mathbf{q}^*$$

уравнение (6.2) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \mathbf{s}}{d\tau^2} - \Omega_E r \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2} \Omega_E r' \mathbf{s} \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \Omega_E^2 r^2 + h^* \right) \mathbf{s} = \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) \mathbf{s} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} \right) \mathbf{s}^* - \\
& - \frac{1}{4(z_1^2 + z_2^2)} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \mathbf{s}^* \circ (x_1 \mathbf{i} + 2x_2 \mathbf{j}) \circ \mu^2 + \frac{1}{2} r \mathbf{q}^*.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Это кватернионное уравнение необходимо дополнить дифференциальными скалярными уравнениями для полной энергии спутника  $h^*$  и времени  $t$ , получающимися из второго и третьего уравнений системы (6.1) и имеющими вид:

$$\frac{dh^*}{d\tau} = -r\Omega_E \frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial \lambda} + \text{scal} \left( \left( 2 \frac{d\bar{s}}{d\tau} + \Omega_E r \mathbf{k} \circ \bar{s} \right) \circ \mathbf{q}^* \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r. \quad (6.5)$$

В уравнениях (6.4) и (6.5)

$$\begin{aligned} r &= \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad \mathbf{s}^* = s_2 + s_3 \mathbf{i} + s_0 \mathbf{j} + s_1 \mathbf{k} \\ \mathbf{q}^* &= -\mathbf{i} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z, \quad \mathbf{p}_z = \bar{\boldsymbol{\mu}} \circ \mathbf{p}_x \circ \boldsymbol{\mu} = (\mu_0 - \mu_3 \mathbf{k}) \circ \mathbf{p}_x \circ (\mu_0 + \mu_3 \mathbf{k}) = \\ &= [\cos(\chi_0 + \Omega_E t) p_1 + \sin(\chi_0 + \Omega_E t) p_2] \mathbf{i} + \\ &+ [\cos(\chi_0 + \Omega_E t) p_2 - \sin(\chi_0 + \Omega_E t) p_1] \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k} \\ x_1 &= (\mu_0^2 - \mu_3^2) z_1 - 2\mu_0 \mu_3 z_2 = \cos(\chi_0 + \Omega_E t) z_1 - \sin(\chi_0 + \Omega_E t) z_2 \\ x_2 &= (\mu_0^2 - \mu_3^2) z_2 + 2\mu_0 \mu_3 z_1 = \cos(\chi_0 + \Omega_E t) z_2 + \sin(\chi_0 + \Omega_E t) z_1 \\ z_1 &= s_0^2 + s_1^2 - s_2^2 - s_3^2, \quad z_2 = 2(s_1 s_2 - s_0 s_3), \quad z_3 = 2(s_1 s_3 + s_0 s_2) \\ \boldsymbol{\mu}^2 &= \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\mu} = (\mu_0 + \mu_3 \mathbf{k})^2 = \cos(\chi_0 + \Omega_E t) + \sin(\chi_0 + \Omega_E t) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Присутствующие в этих уравнениях потенциалы  $\Pi^+$ ,  $\Pi_{ts}^+$  и  $\Pi_{ts}^*$  определяются соотношениями (5.4) и третьим из соотношений (4.3).

После вычисления частных производных  $\partial \Pi^+ / \partial r$ ,  $\partial \Pi^+ / \partial \gamma$ ,  $\partial \Pi_{ts}^+ / \partial \lambda$  и  $\partial \Pi_{ts}^* / \partial \lambda$  в полученные соотношения необходимо будет подставить выражения для переменных  $r$ ,  $\gamma = \sin \varphi$  и  $\lambda$  (расстояния, синуса широты и географической долготы) через основные переменные  $s_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned} r &= \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad \gamma = \sin \varphi = \\ &= \cos \vartheta = x_3 / r = z_3 / r = 2(s_1 s_3 + s_0 s_2) / r \\ \lambda &= \arctan \frac{z_2}{z_1} = \arctan \frac{2(s_1 s_2 - s_0 s_3)}{s_0^2 + s_1^2 - s_2^2 - s_3^2}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Полученные уравнения (6.4) и (6.5) возмущенного относительного движения в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в переменных Кустаанхеймо–Штифеля  $s_j$ , в отличие от уравнений возмущенного абсолютного движения спутника (4.8) в переменных Кустаанхеймо–Штифеля  $u_j$ , позволяют непосредственно изучать движение спутника относительно Земли. При этом географическая долгота  $\lambda$ , фигурирующая в третьей формуле (4.3) для тессеральных и секториальных гармоник  $\Pi_{ts}^*$  потенциала гравитационного поля Земли, вычисляется не по формулам



(5.5), используемым в случае абсолютного движения и содержащим в явном виде время  $t$ , а по формуле (6.6), не содержащей время  $t$ .

**7. Кватернионные уравнения возмущенного относительного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в модифицированных четырехмерных переменных.** Для получения уравнения возмущенного относительного движения спутника (относительно Земли) в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в модифицированных переменных Кустанхеймо—Штифеля продифференцируем кватернионное соотношение  $\mathbf{u} = \mathbf{s} \circ \bar{\mu}$  дважды по переменной  $\tau$  и подставим результат дифференцирования, а также соотношение для переменной  $\mathbf{u}$  в уравнения (5.6) и (5.7). Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \mathbf{s}}{d\tau^2} \circ \bar{\mu} + 2 \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} \circ \frac{d\bar{\mu}}{d\tau} + \mathbf{s} \circ \frac{d^2 \bar{\mu}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* \mathbf{s} \circ \bar{\mu} = \\ & = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma \mp 1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) \mathbf{s} \circ \bar{\mu} - \frac{1}{4} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}} + \frac{1}{2} r \mathbf{q} \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = -r \Omega_E \frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial \lambda} + 2 \text{scal} \left( \left( \bar{\mu} \circ \frac{d\bar{\mathbf{s}}}{d\tau} + \frac{d\bar{\mu}}{d\tau} \circ \bar{\mathbf{s}} \right) \circ \mathbf{q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = -\mathbf{k} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x = -\mathbf{k} \circ \mathbf{s} \circ \bar{\mu} \circ \mathbf{p}_x, \\ \mathbf{p}_x &= p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k} = \mathbf{p}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x). \end{aligned}$$

Умножим первое кватернионное уравнение системы (7.1) справа на кватернион  $\mu$ . Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \mathbf{s}}{d\tau^2} + 2 \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} \circ \frac{d\bar{\mu}}{d\tau} \circ \mu + \mathbf{s} \circ \frac{d^2 \bar{\mu}}{d\tau^2} \circ \mu - \frac{1}{2} h^* \mathbf{s} = \\ & = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma \mp 1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) \mathbf{s} - \frac{1}{4} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}} \circ \mu + \frac{1}{2} r \mathbf{q} \circ \mu. \end{aligned}$$

Это уравнение с учетом соотношений (6.3) и соотношений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}} \circ \mu = \left( \frac{\partial \lambda}{\partial u_0} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} \mathbf{i} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} \mathbf{j} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_3} \mathbf{k} \right) \circ \mu = \\ & = \left( \frac{u_3}{u_0^2 + u_3^2} - \frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2} \mathbf{i} + \frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2} \mathbf{j} - \frac{u_0}{u_0^2 + u_3^2} \mathbf{k} \right) \circ \mu = \\ & = \left( \frac{\mu_0 s_3 - \mu_3 s_0}{s_0^2 + s_3^2} - \frac{\mu_0 s_2 + \mu_3 s_1}{s_1^2 + s_2^2} \mathbf{i} + \frac{\mu_0 s_1 - \mu_3 s_2}{s_1^2 + s_2^2} \mathbf{j} - \frac{\mu_0 s_0 + \mu_3 s_3}{s_0^2 + s_3^2} \mathbf{k} \right) \circ (\mu_0 + \mu_3 \mathbf{k}) = \\ & = \frac{s_3}{s_0^2 + s_3^2} - \frac{s_2}{s_1^2 + s_2^2} \mathbf{i} + \frac{s_1}{s_1^2 + s_2^2} \mathbf{j} - \frac{s_0}{s_0^2 + s_3^2} \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{q} \circ \mu = -\mathbf{k} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x \circ \mu = -\mathbf{k} \circ \mathbf{s} \circ \bar{\mu} \circ \mathbf{p}_x \circ \mu = -\mathbf{k} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z = \mathbf{q}^*$$

преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \mathbf{s}}{d\tau^2} - \Omega_E r \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2} \Omega_E r' \mathbf{s} \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \Omega_E^2 r^2 + h^* \right) \mathbf{s} = \\ & = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma \mp 1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) \mathbf{s} - \\ & - \frac{1}{4} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \left( \frac{s_3}{s_0^2 + s_3^2} - \frac{s_2}{s_1^2 + s_2^2} \mathbf{i} + \frac{s_1}{s_1^2 + s_2^2} \mathbf{j} - \frac{s_0}{s_0^2 + s_3^2} \mathbf{k} \right) + \frac{1}{2} r \mathbf{q}^*. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь

$$r = \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (7.3)$$

$$\gamma = \sin \varphi = \cos \vartheta = z_3 / r = r^{-1} (s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 + s_3^2) = \quad (7.4)$$

$$= 1 - 2r^{-1} (s_1^2 + s_2^2) = 2r^{-1} (s_0^2 + s_3^2) - 1$$

$$\gamma - 1 = -2r^{-1} (s_1^2 + s_2^2), \quad \gamma + 1 = 2r^{-1} (s_0^2 + s_3^2), \quad (7.5)$$

$$\lambda = \arctan \frac{z_2}{z_1} = \arctan \frac{s_2 s_3 + s_0 s_1}{s_1 s_3 - s_0 s_2} \quad (7.6)$$

$$z_1 = 2(s_1 s_3 - s_0 s_2), \quad z_2 = 2(s_2 s_3 + s_0 s_1), \quad z_3 = s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 + s_3^2, \quad (7.7)$$

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{q} \circ \mu = -\mathbf{k} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z, \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_z &= \mu \circ \mathbf{p}_x \circ \mu = (\mu_0 - \mu_3 \mathbf{k}) \circ \mathbf{p}_x \circ (\mu_0 + \mu_3 \mathbf{k}) = \\ &= [\cos(\chi_0 + \Omega_E t) p_1 + \sin(\chi_0 + \Omega_E t) p_2] \mathbf{i} + \\ &+ [\cos(\chi_0 + \Omega_E t) p_2 - \sin(\chi_0 + \Omega_E t) p_1] \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Кватернионное уравнение (7.2) в переменных  $s_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) необходимо дополнить дифференциальными скалярными уравнениями для полной энергии спутника  $h^*$  и времени  $t$ , получающимися из второго и третьего уравнений системы (7.1) и имеющими вид:

$$\frac{dh^*}{d\tau} = -r \Omega_E \frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial \lambda} + \text{scal} \left( \left( 2 \frac{d\bar{\mathbf{s}}}{d\tau} + \Omega_E r \mathbf{k} \circ \bar{\mathbf{s}} \right) \circ \mathbf{q}^* \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r. \quad (7.10)$$

Здесь кватернион  $\mathbf{q}^*$  в отличие от первого уравнения из подсистемы (6.5) определяется соотношениями (7.8) и (7.9).

Таким образом, нами получены уравнения (7.2) и (7.10) возмущенного движения спутника относительно Земли в ее гравитационном поле с учетом зональных, тессеральных и секториальных гармоник этого поля в модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Присутствующие в этих уравнениях потенциалы  $\Pi^+$ ,  $\Pi_{Is}^+$  и  $\Pi_{Is}^*$  определяются соотношениями (5.4) и третьим из соотношений (4.3). После вычисления частных производных  $\partial\Pi^+/\partial r$ ,  $\partial\Pi^+/\partial\gamma$ ,  $\partial\Pi_{Is}^+/\partial\lambda$  и  $\partial\Pi_{Is}^*/\partial\lambda$  в полученные соотношения необходимо будет подставить выражения для переменных  $r$ ,  $\gamma = \sin\varphi$  и  $\lambda$  (расстояния, синуса широты и географической долготы) через основные переменные  $s_j$  в соответствии с формулами (7.3)–(7.7).

Полученные уравнения (7.2) и (7.10) возмущенного относительного движения спутника в модифицированных переменных  $s_j$ , в отличие от уравнений возмущенного абсолютного движения спутника (5.6) и (5.7) в модифицированных переменных  $u_j$ , позволяют непосредственно изучать движение спутника относительно Земли. При этом географическая долгота  $\lambda$ , фигурирующая в третьей формуле (4.3) для тессеральных и секториальных гармоник  $\Pi_{Is}^*$  потенциала гравитационного поля Земли, вычисляется не по формулам (4.4), используемым в случае абсолютного движения и содержащим в явном виде время  $t$ , а по формуле (7.6), не содержащей время  $t$ .

Отметим, что уравнения (7.2) и (7.10) возмущенного движения спутника относительно Земли в модифицированных переменных  $s_j$  имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями (6.4) и (6.5) этого движения спутника в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, обозначаемых нами также  $s_j$ . Это обусловлено тем, что выражения переменной  $\gamma = \sin\varphi$  ( $\varphi$  – геоцентрическая широта), от которой зависит потенциал гравитационного поля Земли, через модифицированные переменные могут быть представлены в двух различных, более компактных симметричных формах:

$$\gamma = \sin\varphi - 2r^{-1}(s_1^2 + s_2^2) = 2r^{-1}(s_0^2 + s_3^2) - 1, \quad r = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

в сравнении с ее представлением

$$\gamma = \sin\varphi = 2(s_1s_3 + s_0s_2) / r, \quad r = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, что и позволяет получить более простые и симметричные, чем в случае использования переменных Кустаанхеймо–Штифеля, уравнения движения спутника.

**Заключение.** Во всех работах, посвященных проблеме регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, известных автору статьи, рассматривается регуляризация уравнений абсолютного движения второго (изучаемого) тела, т.е. рассматривается регуляризация уравнений движения центра масс изучаемого тела, описывающих движение тела относительно системы координат, движущейся в инерциальной системе координат поступательно.

В статье развита предложенная нами в работе [43] кватернионная регуляризация уравнений относительного движения изучаемого тела, т.е. уравнений движения центра масс изучаемого тела, описывающих движение этого тела в системе

координат, вращающейся в инерциальной системе координат по произвольно заданному закону, а также развита предложенная в этой работе кватернионная регуляризация уравнений движения изучаемого тела относительно системы координат, связанной с Землей, принимаемой за первое (центральное) тело.

Предложены регулярные кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли относительно системы координат, связанной с Землей, в четырехмерных переменных Кустаанхеймо—Штифеля и в модифицированных четырехмерных переменных, предложенных нами ранее. В полученных уравнениях относительного возмущенного движения учитываются зональные, тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли. Эти уравнений удобны для изучения движения ИСЗ, поскольку многие силы, действующие на спутник, и в первую очередь сила притяжения Земли (точнее, потенциал гравитационного поля Земли), зависят от относительных координат местоположения спутника: от географических координат (широты и долготы) спутника, а не от его абсолютных координат в инерциальной системе координат.

Полученные уравнения имеют вид уравнений относительного движения четырехмерного возмущенного осциллятора. Они, в отличие от классических уравнений, регулярны (не содержат особых точек типа сингулярности (деления на ноль)) для движения спутника в ньютоновском гравитационном поле Земли под действием возмущающих сил, в описании которых не содержатся отрицательные степени расстояния спутника до центра Земли выше первой. В этих уравнениях помимо основных переменных, которыми являются переменные Кустаанхеймо—Штифеля или наши модифицированные переменные, используются дополнительные переменные: энергия движения спутника и время. Новая независимая переменная связана с временем дифференциальным соотношением Зундмана, содержащим расстояние спутника до центра масс Земли.

Полученные уравнения относительного возмущенного движения спутника в гравитационном поле Земли в переменных Кустаанхеймо—Штифеля и в наших модифицированных четырехмерных переменных, в отличие от уравнений возмущенного абсолютного движения спутника в этих переменных, позволяют непосредственно изучать движение спутника относительно Земли. При этом географическая долгота, фигурирующая в формуле, описывающей тессеральные и секториальные гармоники потенциала гравитационного поля Земли, вычисляется не по формулам, используемым в случае абсолютного движения и содержащим в явном виде время  $t$ , а по формулам, не содержащим время  $t$ .

Уравнения возмущенного движения спутника относительно Земли в модифицированных переменных имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями этого движения спутника в переменных Кустаанхеймо—Штифеля. Это обусловлено тем, что выражения геоцентрической широты, от которой зависит потенциал гравитационного поля Земли, через модифицированные переменные представляются в двух различных, более компактных симметричных формах в сравнении с ее представлением в переменных Кустаанхеймо—Штифеля.

Полученные уравнения удобны для применения методов нелинейной механики и высокоточных численных расчетов при исследовании орбитального движения КА относительно Земли и прогнозе движения КА.

Отметим, что обзор работ по кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенного центрального движения материальной точки с использованием переменных Кустаанхеймо—Штифеля и модифицированных четырехмерных переменных (уравнений, традиционно рассматриваемых в рамках теории абсолютного движения материальной точки) был дан автором статьи в его недавней работе [63].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. V. 11. P. 144–151.
2. *Levi-Civita T.* Traiettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. mat. pura appl. 1904. V. 9. P. 1–32.
3. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144.
4. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du problem restreint des trois corps // Opere matematiche. 1956. № 2. P. 411–417.
5. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku. 1964. V. 73. P. 3–7.
6. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Angew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
7. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. [Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.]
8. *Velte W.* Concerning the regularizing KS-transformation // Celest. Mech. 1978. V. 17. P. 395–403.
9. *Vivarelli M.D.* The KS transformation in hypercomplex form // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1983. V. 29. P. 45–50.
10. *Vivarelli M.D.* Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // Celest. Mech. 1988. V. 41. P. 359–370.
11. *Vivarelli M.D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex KS-transformation // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1991. V. 50. P. 109–124.
12. *Шагов О.Б.* О двух видах уравнений движения искусственного спутника Земли в осцилляторной форме // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 3–8.
13. *Deprit A., Eliepe A. and Ferrer S.* Linearization: Laplace vs. Stiefel // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1994. V. 58. P. 151–201.
14. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // Can. J. Phys. 1994. V. 72. P. 141–146.
15. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternion form // J. Phys. 1995. V. 28. P. 193–198.
16. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2006. V. 95. P. 201–212;  
[http://doi.org/10.1007/978-1-4020-5325-2\\_11](http://doi.org/10.1007/978-1-4020-5325-2_11)
17. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2008. V. 102. № 1. P. 149–162;  
<http://doi.org/10.1007/s10569-008-9124-y>
18. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo–Stiefel transform in gravitational dynamics // MNRAS 400. 2009. № 1. P. 228–231;  
<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x>

19. Zhao L. Kustaanheimo–Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // Regul. Chaotic Dyn. 2015. V. 20. № 1. P. 19–36;  
<https://doi.org/10.1134/S1560354715010025>
20. Roa J., Urrutxua H., Pelaez J. Stability and chaos in Kustaanheimo–Stiefel space induced by the Hopf fibration // Mon. Notices Royal Astron. Soc. 2016. V. 459. № 3. P. 2444–2454;  
<https://doi.org/10.1093/mnras/stw780>
21. Roa J., Pelaez J. The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2017. V. 127. P. 343–368;  
<https://doi.org/10.1007/s10569-016-9730-z>
22. Breiter S., Langner K. Kustaanheimo–Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2017. V. 128. P. 323–342;  
<https://doi.org/10.1007/s10569-017-9754-z>
23. Breiter S., Langner K. The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2018. V. 130. P. 68;  
<https://doi.org/10.1007/s10569-018-9862-4>
24. Breiter S., Langner K. The Lissajous–Kustaanheimo–Stiefel transformation // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. P. 9;  
<https://doi.org/10.1007/s10569-019-9887-3>
25. Ferrer S., Crespo F. Alternative Angle-Based Approach to the KS-Map. An interpretation through Symmetry // J. Geometric Mech. 2018. V. 10. № 3. P. 359–372;  
<https://doi.org/10.3934/jgm.2018013>
26. Челноков Ю.Н. К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12–21. [Chelnokov Yu.N. On the regularization of the equations of the three-dimensional two body problem // Mech. Solids. 1981. V. 16. № 2. P. 1–10].
27. Челноков Ю.Н. О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158. [Chelnokov Yu.N. Regular equations of the three-dimensional two-body problem // Mech. Solids. 1984. V. 19. № 1. P. 1–7].
28. Челноков Ю.Н. Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 1: Общая теория. Приложения к задаче регуляризации и к задаче о движении ИСЗ. М., 1985. 36 с. Деп. в ВИНТИ 13.12.85. № 218628-В.
29. Челноков Ю.Н. Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 2: Пространственная задача невозмущенного центрального движения. Задача с начальными условиями. М., 1985. 18 с. Деп. в ВИНТИ 13.22.85. № 8629-В.
30. Челноков Ю.Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Космические исследования. 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759–770. [Chelnokov Yu.N. Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I // Cosmic Research. 1992. V. 30. № 6. P. 612–621].
31. Челноков Ю.Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // Космические исследования. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15. [Chelnokov Yu.N. Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // Cosmic Research. 1993. V. 31. № 3. P. 409–418].
32. Челноков Ю.Н. Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 20–30. [Chelnokov Yu.N. Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. I // Mech. Solids. 1993. V. 28. № 1. P. 16–25].
33. Челноков Ю.Н. Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 3–15. [Chelnokov Yu.N. Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. II // Mech. Solids. 1993. V. 28. № 2. P. 1–12].

34. Челноков Ю.Н. Применение кватернионов в механике космического полета // Гироскопия и навигация. 1999. № 4. С. 47–66.
35. Челноков Ю.Н. Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 5. С. 18–44. [Chelnokov Yu.N. Analysis of optimal motion control for a material point in a central field with application of quaternions // J. Comp. Syst. Sci. Int. 2007. V. 46. № 5. P. 688–713].
36. Челноков Ю.Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
37. Челноков Ю.Н. Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. I // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 5. С. 389–401. [Chelnokov Yu.N. Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. I // Cosmic Research. 2013. V. 51. № 5. P. 353–364. <https://doi.org/10.7868/S0023420613050026>].
38. Челноков Ю.Н. Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // Космические исследования. 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336. <https://doi.org/10.7868/S0023420614030029> [Chelnokov Yu.N. Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. II // Cosmic Research. 2014. V. 52. № 4. P. 304–317. <https://doi.org/10.1134/S0010952514030022>].
39. Челноков Ю.Н. Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. III // Космические исследования. 2015. Т. 53. № 5. С. 430–446. <https://doi.org/10.7868/S0023420615050040> [Chelnokov Yu.N. Quaternion regularization in celestial mechanics, astrodynamics, and trajectory motion control. III // Cosmic Research. 2015. V. 53. № 5. P. 394–409. <https://doi.org/10.1134/S0010952515050044>].
40. Челноков Ю.Н. Кватернионная регуляризация уравнений задачи двух тел и ограниченной задачи трех тел // В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров. 2015. С. 4051–4053; URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=24826037>
41. Челноков Ю.Н. Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 24–54. [Chelnokov Yu.N. Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I // Mech. Solids. 2017. V. 52. № 6. P. 613–639. <https://doi.org/10.3103/S0025654417060036>].
42. Челноков Ю.Н. Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. II // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 6. С. 41–63. <https://doi.org/10.31857/S057232990000712-3> [Chelnokov Yu.N. Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: II // Mech. Solids. 2018. V. 53. № 6. P. 634–651. <https://doi.org/10.3103/S0025654418060055>].
43. Челноков Ю.Н. Возмущенная пространственная задача двух тел: регулярные кватернионные уравнения относительного движения // ПММ. 2018. Т. 82. № 6. С. 721–733; <https://doi.org/10.31857/S003282350002736-9>
44. Chelnokov Yu.N. Perturbed spatial two-body problem: regular quaternion equations of relative motion // Mech. Solids. 2019. V. 54. № 2. P. 169–178; <https://doi.org/10.3103/S0025654419030075>



45. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли // Космические исследования. 2019. Т. 57. № 2. С. 117–131. <https://doi.org/10.1134/S002342061902002X> [*Chelnokov Yu.N.* Quaternion equations of disturbed motion of an artificial Earth satellite // Cosmic Research. 2019. V. 57. № 2. P. 101–114. <https://doi.org/10.1134/S0010952519020023>].
46. *Челноков Ю.Н., Логинов М.Ю.* Новые кватернионные модели регулярной механики космического полета и их приложения в задачах прогноза движения космических тел и инерциальной навигации в космосе // Сборник материалов: XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург, 2021. С. 292–295.
47. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
48. *Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А.* Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007.
49. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // Astronomical J. 2005. V. 129. № 5. P. 2496: <http://doi.org/10.1086/429546>
50. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // Astronomical J. 2007. V. 133. № 6. P. 2815: <http://doi.org/10.1086/518165>
51. *Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A.* A special perturbation method in orbital dynamics // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2007. V. 97. P. 131–150: <http://doi.org/10.1007/s10569-006-9056-3>
52. *Bau G., Bombardelli C., Pelaez J., Lorenzini E.* Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // Monthly Notices Royal Astron. Soc. 2015. V. 454. № 3. P. 2890–2908: <https://doi.org/10.1093/mnras/stv2106>
53. *Amato D., Bombardelli C., Bau G., Morand V., Rozengren A.J.* Non-averaged regularized formulations as an alternative to semianalytical orbit propagation methods // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. № 5. P. 21: <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9897-1>
54. *Bau G., Roa J.* Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2020. V. 132. P. 10: <https://doi.org/10.1007/s10569-020-9952-y>
55. *Hopf H.* Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphere auf die Kugelfläche // Math. Ann. 1931. V. 104. № 1. P. 637–665.
56. *Брумберг В.А.* Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980. 205 с.
57. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 511 с.
58. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
59. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
60. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1971. 584 с.
61. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика: Методы теории движения искусственных небесных тел. М.: Наука, 1983. 351 с.



62. Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.—Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевский институт компьютерных исследований. 2010. 352 с.
63. Chelnokov Y.N. Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math. Mech. – Engl. 2022. V. 43. № 1. P. 21–80:  
<https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>

UDC 531.01, 531.32, 629.78

**QUATERNION REGULAR EQUATIONS OF THE TWO-BODY PROBLEM AND THE PROBLEM OF THE MOTION OF A SATELLITE IN THE GRAVITATIONAL FIELD OF THE EARTH IN THE KUSTAAHEIMO-STIEFEL VARIABLES AND MODIFIED FOUR-DIMENSIONAL VARIABLES: DYNAMICS OF RELATIVE MOTION**

© 2024 г. Yu. N. Chelnokov<sup>a</sup>, \*

<sup>a</sup>*Institute for Problems of Precision Mechanics and Control RAS, Saratov, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

**Abstract** — The article develops the quaternion regularization of differential equations (DE) of the relative perturbed motion of the body under study, which we previously proposed within the framework of the perturbed spatial problem of two bodies: the equations of motion of the center of mass of this body in a coordinate system rotating in an inertial coordinate system according to an arbitrarily given law, and also develops a quaternion regularization of the motion DEs for the body under study relative to the coordinate system associated with the Earth. New quaternion DEs for the perturbed motion of an artificial Earth satellite relative to the coordinate system associated with the Earth are proposed. These equations have (in new times) the form of DE for the relative motion of a perturbed four-dimensional oscillator in the Kustaanheimo-Stiefel variables or in the modified four-dimensional variables we proposed, supplemented by DEs for the satellite’s motion energy and time. These equations for the perturbed relative motion of the satellite take into account the zonal, tesseral and sectorial harmonics of the Earth’s gravitational field. The proposed equations, in contrast to classical equations, are regular (do not contain special points such as singularity (division by zero)) for the relative motion of a satellite in the Newtonian gravitational field of the Earth. The equations are convenient for applying methods of nonlinear mechanics and high-precision numerical calculations when studying the orbital motion of a satellite relative to the Earth and predicting its motion.

**Keywords:** perturbed spatial two-body problem, artificial Earth satellite, quaternion regularization, regular quaternion equations, absolute and relative motion, Kustaanheimo-Stiefel variables, modified four-dimensional variables, energy of motion; zonal, tesseral and sectorial harmonics of the Earth’s gravitational field

## REFERENCES

1. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. V. 11. P. 144–151.
2. *Levi-Civita T.* Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. mat. pura appl. 1904. V. 9. P. 1–32.
3. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144.
4. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du problem restreint des trois corps // Opere matematiche. 1956. № 2. P. 411–417.
5. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku. 1964. V. 73. P. 3–7.
6. *Kustaanheimo P.* Stiefel E. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Angew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
7. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971.
8. *Velte W.* Concerning the regularizing *KS*-transformation // Celest. Mech. 1978. V. 17. P. 395–403.
9. *Vivarelli M.D.* The *KS* transformation in hypercomplex form // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1983. V. 29. P. 45–50.
10. *Vivarelli M.D.* Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // Celest. Mech. 1988. V. 41. P. 359–370.
11. *Vivarelli M.D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex *KS*-transformation // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1991. V. 50. P. 109–124.
12. *Shagov O.B.* On two types of equations of motion of an artificial Earth satellite in oscillatory form // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of solids. 1990. № 2. P. 3–8.
13. *Deprit A., Elpe A. and Ferrer S.* Linearization: Laplace vs. Stiefel // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1994. V. 58. P. 151–201.
14. *Vrbrik J.* Celestial mechanics via quaternions // Can. J. Phys. 1994. V. 72. P. 141–146.
15. *Vrbrik J.* Perturbed Kepler problem in quaternion form // J. Phys. 1995. V. 28. P. 193–198.
16. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2006. V. 95. P. 201–212.
17. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2008. V. 102. № 1. P. 149–162.
18. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo–Stiefel transform in gravitational dynamics // MNRAS 400. 2009. P. 228–231;  
<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x>. arXiv:0803.4441
19. *Zhao L.* Kustaanheimo–Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // Regul. Chaotic Dyn. 2015. V. 20. № 1. P. 19–36;  
<https://doi.org/10.1134/S1560354715010025>
20. *Roa J., Urrutxua H., Pelaez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo–Stiefel space induced by the Hopf fibration // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2016. V. 459. № 3. P. 2444–2454.
21. *Roa J., Pelaez J.* The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // Celest. Mech. Dyn. Astron., September 2016.
22. *Breiter S. and Langner K.* Kustaanheimo–Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2017. V. 128. P. 323–342.
23. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2018. V. 130. P. 68.

24. *Breiter S., Langner K.* The Lissajous–Kustaanheimo–Stiefel transformation // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2019. V. 131. P. 9.
25. *Ferrer S., Crespo F.* Alternative Angle-Based Approach to the *KS*-Map. An interpretation through Symmetry // *Journal of Geometric Mechanics*. 2018. V. 10. № 3. P. 359–372.
26. *Chelnokov Yu.N.* On the regularization of the equations of the three-dimensional two body problem // *Mech. Solids*. 1981. V. 16. № 6. P. 1–10.
27. *Chelnokov Yu.N.* Regular equations of the three-dimensional two-body problem // *Mech. Solids*. 1984. V. 19. № 1. P. 1–7.
28. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Methods in the Problems of Perturbed Motion of a Material Point, Part 1: General Theory. Applications to the Problem of Regularization and to the Problem of Satellite Motion. Available from VINITI. № 218628-V (Moscow, 1985) [in Russian].
29. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Methods in the Problems of Perturbed Motion of a Material Point, Part 2: Three-Dimensional Problem of Unperturbed Central Motion. Problem with Initial Conditions, Available from VINITI, № 8629-V (Moscow, 1985) [in Russian].
30. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I // *Cosmic Research*. 1992. V. 30. № 6. P. 612–621.
31. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // *Cosmic Research*. 1993. V. 31. № 3. P. 409–418.
32. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. I // *Mech. Solids*. 1993. V. 28. № 1. P. 16–25.
33. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. II // *Mech. Solids*. 1993. V. 28. № 2. P. 1–12.
34. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in space flight mechanics // *Gyroscopy and navigation*. 1999. № 4. P. 47–66.
35. *Chelnokov Yu.N.* Analysis of optimal motion control for a material point in a central field with application of quaternions // *J. Comp. Syst. Sci. Int.* 2007. V. 46. № 5. P. 688–713.
36. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion models and methods of dynamics, navigation and motion control. M.: Fizmatlit, 2011.
37. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. I // *Cosmic Research*. 2013. V. 51. № 5. P. 353–364;  
<https://doi.org/10.7868/S0023420613050026>
38. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. II // *Cosmic Research*. 2014. V. 52. № 4. P. 304–317;  
<https://doi.org/10.1134/S0010952514030022>
39. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics, astrodynamics, and trajectory motion control. III // *Cosmic Research*. 2015. V. 53. № 5. P. 394–409;  
<https://doi.org/10.1134/S0010952515050044>
40. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the two-body problem and the limited three-body problem // In the collection: XI All-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics. Collection of reports. Compiled by: D.Yu. Akhmetov, A.N. Gerasimov, Sh.M. Khaidarov. 2015. P. 4051–4053.  
URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=24826037>

41. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I // *Mech. Solids*. 2017. Vol. 52. № 6. P. 613–639;  
<https://doi.org/10.3103/S0025654417060036>
42. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: II // *Mech. Solids*. 2018. V. 53. № 6. P. 634–651;  
<https://doi.org/10.3103/S0025654418060055>
43. *Chelnokov Yu.N.* Perturbed spatial problem of two bodies: regular quaternion equations of relative motion // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2018. T. 82. № 6. P. 721–733;  
<https://doi.org/10.31857/S003282350002736-9>
44. *Chelnokov Yu.N.* Perturbed spatial two-body problem: regular quaternion equations of relative motion // *Mech. Solids*. 2019. V. 54. № 2. P. 169–178;  
<https://doi.org/10.3103/S0025654419030075>
45. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion equations of disturbed motion of an artificial Earth satellite // *Cosmic Research*. 2019. V. 57. № 2. P. 101–114;  
<https://doi.org/10.1134/S0010952519020023>
46. *Chelnokov Yu.N., Loginov M.Yu.* New quaternion models of regular mechanics of space flight and their applications in problems of forecasting the motion of cosmic bodies and inertial navigation in space // *Collection of materials: XXVIII St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*. St. Petersburg, 2021. P. 292–295.
47. *Bordovitsyna T.V.* Modern numerical methods in problems of celestial mechanics. M.: Nauka, 1984.
48. *Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A.* Theory of motion of artificial Earth satellites. Analytical and numerical methods. Tomsk: Publishing house Tom. University, 2007.
49. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // *The Astronomical Journal*. 2005. V. 129. № 5. P. 2496;  
<http://doi.org/10.1086/429546>
50. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // *The Astronomical Journal*. 2007. V. 133. № 6. P. 2815.
51. *Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A.* A special perturbation method in orbital dynamics // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* February 2007;  
<https://doi.org/10.1007/s10569-006-9056-3>
52. *Bau G., Bombardelli C., Pelaez J., Lorenzini E.* Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. September 2015.
53. *Amato D., Bombardelli C., Bau G., Morand V., Rozengren A.J.* Non-averaged regularized formulations as an alternative to semianalytical orbit propagation methods // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* May 2019.
54. *Bau G., Roa J.* Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* January 2020.
55. *Hopf H.* Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphere auf die Kugelfläche // *Math. Ann.* 1931. V. 104. № 1. P. 637–665.
56. *Brumberg V.A.* Analytical algorithms of celestial mechanics. M.: Nauka, 1980.
57. *Chelnokov Yu.N.* Quaternionic and biquaternionic models and methods of solid mechanics and their applications. Geometry and kinematics of motion. M.: Fizmatlit, 2006.
58. *Branets V.N., Shmyglevsky I.P.* Application of quaternions in problems of rigid body orientation. M.: Nauka, 1973.
59. *Zhuravlev V.F.* Fundamentals of theoretical mechanics. M.: Fizmatlit, 2008.

- 
60. *Abalakin V.K., Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G., Ryabov Yu.A.* A reference guide to celestial mechanics and astrodynamics. M.: Nauka, 1976.
  61. *Duboshin G.N.* Celestial mechanics: Methods of the theory of motion of artificial celestial bodies. M.: Nauka, 1983.
  62. *Demin V.G.* Movement of an artificial satellite in a non-central gravitational field. M.—Izhevsk: Research Center “Regular and Chaotic Dynamics”, Izhevsk Institute of Computer Research. 2010.
  63. *Chelnokov Y.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Applied Mathematics and Mechanics (English Edition). 2022. Vol. 43. № 1. P. 21–80;  
<https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>

## МЕМБРАННЫЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ MDS-АКТЮАТОР С ПЛОСКОЙ ДВОЙНОЙ СПИРАЛЬЮ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЕКТРОДОВ

© 2024 г. А. А. Паньков<sup>а</sup>, \*

<sup>а</sup>*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь, Россия*

*\*e-mail: a\_a\_pankov@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.06.2023 г.

После доработки 27.07.2023 г.

Принята к публикации 31.07.2023 г.

Представлена принципиальная схема и математическая модель функционирования нового пьезоэлектрического мембранного (MDS) актюатора с двойными спиралями (DS) электродов на верхней и/или нижней поверхностях тонкого пьезоэлектрического слоя с осесимметричной и периодической (с малым периодом) по радиальной координате взаимообратной электрической поляризации. Поляризация слоя осуществлена в результате подключения поляризующего значения электрического напряжения к выходам двойных спиралей электродов. Электроды каждой (верхней и нижней) двойной спирали MDS-актюатора выполнены в виде электродированных ленточных покрытий на поверхностях пьезоэлектрического слоя в непосредственной близости друг от друга (что обусловлено малым шагом спирали) для создания высоких значений напряженности электрического поля вдоль силовых линий в локальных областях пьезоэлектрического слоя между ними при подключении к электродам переменного или постоянного управляющего электрического напряжения, в частности с положительным и отрицательным значениями электрических потенциалов. Важным является то, что силовые линии электрического поля и, как следствие, поляризация пьезоэлектрического слоя MDS-актюатора ориентированы в основном вдоль (т.е. по направлению или против) радиальной координаты мембраны, в отличие от многих традиционных схем актюаторов. Результаты численного моделирования для круглой упругой мембраны с установленными на ее верхней и нижней поверхностях пьезоэлектрическими актюаторами подтвердили эффективность предложенного пьезоэлектрического MDS-актюатора при его функционировании по схеме “биморф”, в том числе с использованием предложенного нового конструктивного элемента (секции) — пьезоэлектрического MDS-“кольца поджатия” при различных геометрических и управляющих параметрах. Выявлен эффект значительного увеличения прогиба мембраны с установленными пьезоэлектрическими MDS-актюаторами по сравнению с использованием традиционных однородных пластинчатых пьезоэлектрических актюаторов биморфного типа для различных условий закрепления мембраны, в частности неподвижного (жесткого) закрепления ее центра. Для гибридного пьезоэлектрического MDS-актюатора, включающего в

себя независимые концентрические круговую и кольцевую (т.е. “кольцо поджатия”) секции, выявлен немонотонный характер и осуществлен численный анализ нелинейной зависимости наибольшего прогиба в центре шарнирно-неподвижно закрепленной по краю мембраны от отношения радиусов ее круговой и кольцевой MDS-секций. Выявлены случаи, при которых проявляется эффект “кольца поджатия”, т.е. когда максимальный прогиб мембраны с “кольцом поджатия” превышает наилучшее возможное значение прогиба этой мембраны без его использования по традиционной схеме “биморф”. Новый пьезоэлектрический MDS-актюатор может быть использован в микромеханике, управляемой оптике, сенсорной технике, акустике, в частности при изготовлении пьезоэлектрических акустических или сенсорных элементов мембранного типа, электромеханических преобразователей для сбора вибрационной энергии.

*Ключевые слова:* пьезоэлектрический MDS-актюатор, двойная спираль электродов, биморф, изгиб мембраны, начальная нагрузка, кольцо поджатия, численное моделирование

DOI: 10.31857/S1026351924020056, EDN: uwiako

**1. Введение.** Пьезоактивные композиты с пьезоэлектрическими и/или магнитострикционными элементами структуры используются в современных “интеллектуальных” конструкциях в качестве функциональных элементов: преобразователей, датчиков, актюаторов [1–5], функционирующих на основе эффектов связанностей деформационного, электрического и/или магнитного полей. Пьезоэлектрические датчики работают в режиме генератора на основе прямого пьезоэффекта с преобразованием внешнего динамического усилия в деформирование пьезоэлемента и далее в электрические сигналы напряжения или заряда на электродах с их последующей регистрацией и обработкой приемным устройством. Пьезоэлектрические актюаторы основаны на обратном пьезоэффекте — преобразовании электрических сигналов от внешнего источника питания в перемещения (деформации) и/или механические усилия исполнительных элементов. Недостатком традиционных пьезоэлектрических актюаторов является малая эффективность — отношение величины (амплитуды) осевых перемещений рабочих участков поверхности пьезоэлектрического актюатора к значениям приложенного управляющего напряжения вследствие малости деформационных пьезомодулей материала (керамики) пьезоэлектрического слоя.

Гибкие биморфные пьезоэлектрические слоистые структуры (биморфы) консольного или мембранного типов состоят из двух или более однородных пьезоэлектрических слоев (пластин, пленок) равной толщины с одинаковой или противоположенной поляризацией, внутренних (межслойных) и наружных электродов [6–13]. Гибкие биморфы используются в качестве генераторов электрической энергии [9, 14–18], датчиков [8, 19, 20] и “актюаторов” — пьезоэлектрических преобразователей электрических сигналов от источника питания в движение (микроперемещение), манипулирования или сборки микромасштабных объектов [7, 8, 10, 13, 21–29], в частности пьезоэлектрических шаговых

двигателей [22], микрозахватов [24], элементов управления геометрией отражающих [13] или аэродинамических [27, 29] поверхностей в современных мик-роэлектромеханических системах (МЭМС), системах автоматического управления радиотехники, электроники, оптики, аэрокосмической и медицинской техники. Гибкий биморфный пьезокантилевер [7, 23] работает как исполнительный механизм (актюатор) и одновременно как датчик самоконтроля — мониторинга информации о текущем значении действующей на кантилевер внешней силы и/или смещения (прогиба). Многослойные гибкие биморфы [13] используют для повышения чувствительности — отношения величины изгибных деформаций биморфа к приложенному на электроды управляющему электрическому напряжению, в частности, когда отражающая поверхность деформируемого зеркала расположена на внешней стороне одного из слоев биморфа [13]. Пьезоактюатор с управляемой жесткостью на изгиб [30] представляет собой многослойный пакет из элементарных биморфных слоев с управляемой механической связанностью между смежными слоями. Широкое применение в различных областях науки, и в частности аэрокосмической техники, находят современные MFC-актюаторы [31], которые состоят из композитного пьезоэлектрического слоя в виде близко уложенных в один ряд однонаправленных пьезокерамических (PZT-5A) стержней — волокон с прямоугольным поперечным сечением в полимерном (эпоксидном) связующем, на верхней и нижней поверхности пьезоэлектрического слоя установлены пленочные “встречно-гребенчатые” взаимодействующие электроды (IDE), расстояния между соседними разнонаправленными прямолинейными узкими тонкими полосками электродов 0,5 мм, при этом полная толщина такого пленочного MFC-актюатора 0.3 мм [32–35]. Дополнительное улучшение рабочих характеристик MFC-актюатора возможно посредством использования монокристаллических пьезоэлектрических волокон [33] вместо традиционно используемых поликристаллических пьезоэлектрических волокон в композитном пьезоактивном слое актюатора. Необходимость использования сегментированных электродов для электромеханических преобразователей (актюаторов) сбора вибрационной энергии деформирования зажатой с обоих торцов балки исследована в [36], что обусловлено наличием узловых “точек перегиба” — точек смены знака кривизны изогнутой оси балки при таком виде закрепления.

Эффект увеличения пьезоэлектрических модулей предварительно напряженных пластинчатых пьезоэлектрических элементов исследован ранее в [29, 37, 38]. Повышение пьезочувствительности биморфа в составе конструкции, когда биморф закрепляют на поверхности гибкой подложки, например обшивке аэродинамического профиля лопасти [29], осуществляется посредством начального сжатия гибкой подложки. В [39] предложено уникальное устройство эллиптического, в частности, кругового пьезоэлектрического гибридного биморфно-мембранного (GBM) актюатора изгибного типа, которое включает в себя две пьезоэлектрические секции — центральную круговую биморфную “секцию инициации” изгиба и кольцевую “секцию поджатия” с общим внутренним круговым электродом и различными для каждой секции внешними двухсторонними управляющими электродами. Пьезоэлектрическая секция поджатия имеет ленточный кольцевой вид и расположена вдоль круговой



границы мембраны (общего для обеих секций внутреннего кругового электрода на срединной поверхности), неподвижно закрепленной (шарнирно или жестко) по своему периметру. В целом пьезоэлектрический GBM-актюатор имеет вид тонкого гибкого пакета из двух круговых пьезоэлектрических слоев (пластин) с разделяющим их внутренним круговым электродом — упругой электропроводной подложкой в виде мембраны, неподвижно (шарнирно или жестко) закрепленной по своему краю, при этом на нижней и верхней поверхностях этого пакета слоев попарно (друг напротив друга) установлены концентрические круговые и кольцевые управляющие электроды — электродированные покрытия каждой, т.е. круговой и кольцевой секций. Поляризация, в общем различная для обеих секций пьезоэлектрических слоев, осуществляется посредством приложения поляризующего электрического напряжения к внешним электродам каждой из секций и общему внутреннему электроду гибридного актюатора. Функционирование пьезоэлектрического GBM-актюатора осуществляется подключением, в, общем знакопеременного управляющего электрического напряжения  $U_{\text{con}}$  и знакопостоянного электрического напряжения поджатия  $U_0$  на соответствующие внешние круговые и кольцевые управляющие электроды обеих секций относительно заданного, например равного нулю, электрического потенциала на внутреннем электроде. Поляризации слоев и знаки электрических напряжений  $U_{\text{con}}$ ,  $U_0$  для каждой из секций обуславливают изгиб круговой секции по схеме “биморф” и возникновение распределенного усилия поджатия  $p_0$  по периметру мембраны. Величина усилия поджатия  $p_0$  не превышает значения потери устойчивости мембраны, что обуславливает возвращение мембраны из изогнутого (например, для случая  $U_{\text{con}} > 0$ ,  $U_0 \neq 0$ ) в начальное прямолинейное состояние при  $U_{\text{con}} = 0$ ,  $U_0 \neq 0$ . При смене знака управляющего электрического напряжения ( $U_{\text{con}} < 0$ ,  $U_0 \neq 0$ ) направление прогиба изменяется на противоположное с сохранением эффекта усиления. В результате эффект улучшения изгибных характеристик гибридного мембранного пьезоэлектрического актюатора проявляется как при знакопостоянных, так и при знакопеременных значениях управляющего электрического напряжения  $U_{\text{con}}$  на управляющих внешних электродах круговой (биморфной) секции.

Цель — разработка математической модели гибридного (двухсекционного, т.е. с круговой и кольцевой секциями) мембранного пьезоэлектрического MDS-актюатора [40] с плоскими двухсторонними двойными спиралями взаимодействующих поверхностных электродов, численный анализ эффективности предложенного MDS-актюатора в качестве накладных круговых и кольцевых композитных пьезоактивных элементов на верхней и нижней поверхностях тонкой упругой мембраны с учетом действия “кольца поджатия” [39] при различных геометрических и управляющих параметрах.

**1. Пьезоэлектрический MDS-актюатор.** Представлен новый пьезоэлектрический мембранный (MDS) актюатор (рис. 1) с двойными спиралями (DS) электродов на верхней и/или нижней поверхностях тонкого пьезоэлектрического слоя (с осесимметричной взаимобратной поляризацией слоя по радиальной координате) для осуществления управляемых осесимметричных радиальных осевых деформаций и перемещений. Тонкий пьезоэлектрический слой и в целом MDS-актюатор имеют вид сплошной или кольцевой эллиптической,

тонкой и гибкой композитной пластины (пленки), в частности круговой формы (см. рис. 1) с внешним защитным электроизолирующим покрытием, при этом двухпроводная токопроводящая линия MDS-актюатора выполнена в виде двух (верхней и нижней) эллиптических (круговых) ленточных двойных спиралей (т.е. “двухзаходной” спирали) электродов. Электроды каждой (верхней и нижней) двойной спирали MDS-актюатора выполнены в виде электродированных ленточных покрытий на поверхности пьезоэлектрического слоя в непосредственной близости друг от друга (что обусловлено малым шагом спирали) для создания высоких значений напряженности электрического поля вдоль силовых линий (рис. 2, а) в локальных областях пьезоэлектрического слоя между ними при подключении к ним переменного или постоянного управляющего электрического напряжения  $U_{con}$ , в частности с положительным (+) и отрицательным (–) значениями электрических потенциалов. Важным является то, что силовые линии электрического поля и, как следствие, периодические взаимообратные поляризации  $\pm p$  пьезоэлектрического слоя MDS-актюатора ориентированы в основном вдоль (т.е. по направлению или против) радиальной координаты  $\rho$  мембраны в отличие от традиционных схем (рис. 2, б) актюаторов. Отметим, что поверхностные электроды традиционных пьезоэлектрических актюаторов выполнены, как правило, в виде сплошных электродированных покрытий (рис. 2, б) на боковых (верхней и нижней) поверхностях пьезоэлектрического слоя, при этом поляризация  $p$  пьезоэлектрического слоя ортогональна радиальной координате  $\rho$  мембраны. Первая двойная спираль электродов токопроводящей линии пьезоэлектрического MDS-актюатора расположена на верхней, а

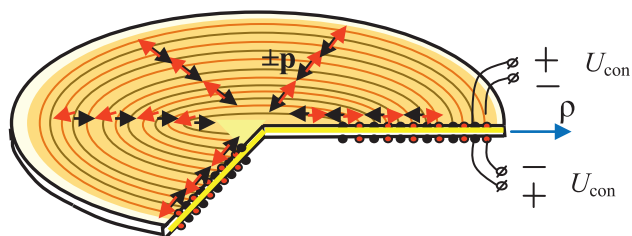


Рис. 1. MDS-актюатор с двойными спиралями электродов на верхней и нижней поверхностях пьезоэлектрического слоя.

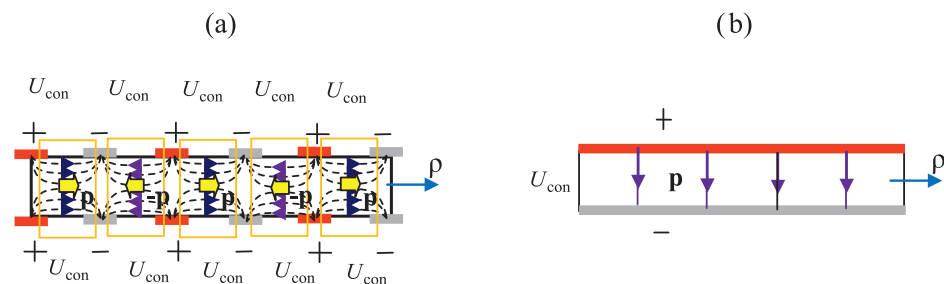


Рис. 2. Расположение электродов на верхней и нижней поверхностях и направление поляризаций в поперечном радиальном сечении пьезоэлектрического слоя  $\pm p$  для MDS (а) и традиционного  $p$  (б) актюаторов.

вторая — на нижней поверхности пьезоэлектрического слоя (рис. 1), при этом однополярные, т.е. с положительным (+) или отрицательным (–) потенциалом электроды верхней и нижней двойных спиралей, расположены друг напротив друга на расстоянии, равном толщине пьезоэлектрического слоя (рис. 2, а). Взаимообратная поляризация локальных областей пьезоэлектрического слоя между витками двойных спиралей электродов токопроводящей линии осуществляется посредством приложения соответствующего поляризующего электрического напряжения к электродам двойных спиралей.

**2. Функционирование MDS-актюатора.** Пленочные пьезоэлектрические MDS-актюаторы (рис. 1, рис. 2, а) устанавливаются, в частности приклеиваются, на верхней и нижней поверхностях гибкой упругой мембраны (рис. 3), закрепленной, например, по своему внешнему контуру или на малом локальном (круглом) участке в центре основания. Осуществляется подключение управляющих электрических напряжений  $U_{con1}$ ,  $U_{con2} = -U_{con1}$  к электродам верхнего ( $U_{con1}$ ) и нижнего ( $U_{con2}$ ) MDS-актюаторов.

Для верхнего MDS-актюатора с управляющим электрическим напряжением  $U_{con1} > 0$  силовые линии электрических полей сонаправлены линиям криволинейной поляризации его пьезоэлектрического слоя, а для нижнего MDS-актюатора при  $U_{con2} < 0$  — противоположно направлены. При этом для обоих MDS-актюаторов в локальных областях пьезоэлектрических слоев между витками электродов возникают высокие значения напряженности  $E_{1,2} \approx U_{con1,2}/\Delta_1$  электрического поля, что обусловлено малым значением расстояния  $\Delta_1 = 0.5$  мм между соседними взаимодействующими электродами и большими (до 1500 В) величинами управляющих напряжений  $U_{con1,2}$ . В результате обратного пьезоэффекта в пьезоэлектрических слоях обоих MDS-актюаторов возникают “рабочие” сжимающие или растягивающие (в зависимости от знака управляющего электрического напряжения  $U_{con}$ ) осевые деформации вдоль силовых

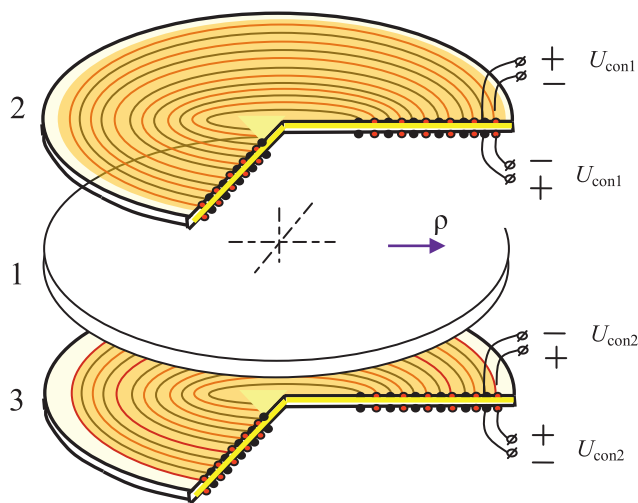


Рис. 3. Круглая мембрана с установленными по типу “биморф” MDS-актюаторами: 1 — мембрана, 2, 3 — верхний и нижний MDS-актюаторы.

(радиальных) линий электрического поля, что обуславливает возникновение значительных растягивающих ( $\epsilon_{rr1}$ ) или сжимающих ( $\epsilon_{rr2}$ ) осевых радиальных деформаций  $\epsilon_{rr1,2}$  соответственно, при этом  $\epsilon_{rr2} = -\epsilon_{rr1} < 0$ .

Для изгиба мембраны с установленными по типу “биморф” на ее верхней и нижней поверхностях MDS-актюаторами (рис. 3) “включаем” верхний актюатор на растяжение, а нижний — на сжатие по радиальной координатной оси  $r$  (линиям поляризации MDS-актюаторов). В результате действия этих факторов MDS-актюатор имеет улучшенные рабочие характеристики относительно многих известных пьезоэлектрических актюаторов (рис. 2, b). При этом пьезоэлектрический MDS-актюатор, установленный (приклеенный) на одной (например, верхней) или обеих (верхней и нижней) поверхностях упругой мембраны (пластины) может функционировать в режиме пьезоэлектрического датчика — электромеханического преобразователя изгибных деформаций упругой мембраны в информативные электрические сигналы электрического напряжения  $U_{inf}$  на выходах электродов двойной спирали.

В зависимости от функционального назначения и закрепления мембраны на ее верхней и/или нижней поверхностях могут быть установлены дополнительные (при наличии центрального “кругового”) один или несколько концентрических кольцевых MDS-актюаторов. Значения управляющих электрических напряжений на концентрических кольцевых секциях устанавливаются с учетом места их установки — удаленности от центра на верхней и/или нижней поверхностях мембраны, вида закрепления (жесткой заделки или шарнирного опирания) внешнего контура и, как следствие, характера распределения деформационного поля, т.е. локальных областей растяжения и сжатия, в частности распределения поверхностных осевых радиальных деформаций “по радиусу” мембраны например при ее виртуальном изгибе в отсутствие актюаторов. Отдельный случай имеем, когда периферийный кольцевой MDS-актюатор используется в качестве “кольца поджатия” мембраны с неподвижным закреплением по своему внешнему контуру для увеличения изгиба мембраны (например, от действия верхнего и нижнего круговых MDS-актюаторов по типу “биморф”) в результате управляемого сильного “поджатия” (без превышения предела устойчивости) мембраны по ее внешнему контуру [39].

**3. Математическая постановка задачи.** Решение задачи о контролируемом деформировании MDS-актюатора (рис. 1) с двойными спиралями ленточных электродов, установленными на верхней и нижней поверхностях пьезоэлектрического слоя в общем сводится к решению связанной краевой задачи электроупругости с быстро-осциллирующими квазипериодическими коэффициентами. Решение такой краевой задачи электроупругости может быть получено, в частности, точными асимптотическими методами осреднения Бахвалова—Победри [41], где дано решение подобной задачи теории упругости для рулона неоднородной по толщине ленты (в нашем случае это двухслойная лента с взаимнообратной поляризацией слоев по толщине с наличием электродов) для случая малой величины толщины ленты по отношению к радиусу рулона, что позволяет считать структуру рулона осесимметричной. Отметим, что эффективные свойства пьезоэлектрических композитов со взаимнообратной поляризацией фаз исследованы ранее в [42], в том числе для слоистых композитов с взаимнообратной поляризацией

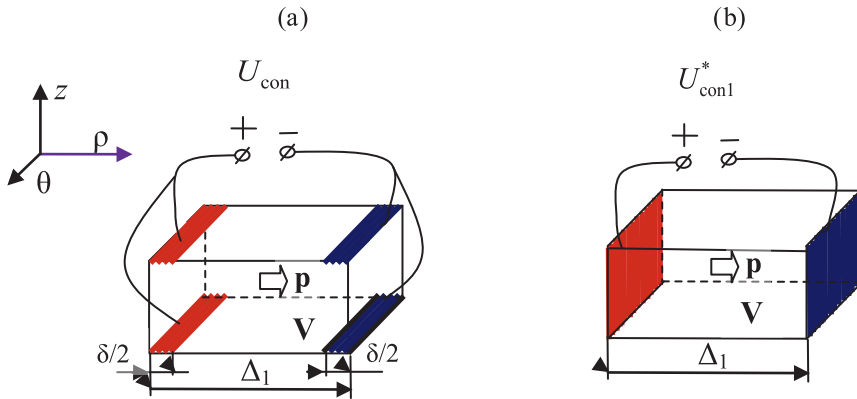


Рис. 4. Элементарная ячейка MDS-актюатора (а) и ее приведенная расчетная схема (б) в цилиндрической системе координат  $\rho, \theta, z$ .

слоев, когда композит имеет однородные упругие и диэлектрические свойства, а неоднородность — лишь для направления поляризации слоев, при этом знак пьезомодулей меняется на противоположный при переходе через границу слоев. Расчетную схему MDS-актюатора (рис. 1) считаем (аналогично [41]) осесимметричной, и непрерывные ленточные двойные спирали электродов с малыми значениями “угла подъема”, ширины  $\delta = 0.1$  мм и шага  $2\Delta_1$  (относительно радиуса актюатора) моделируем чередующимися разнополярными концентрическими кольцевыми электродами (с заданными на них значениями электрических потенциалов  $\pm\phi$ ,  $U_{\text{con}} = 2\phi$ ) с расстоянием  $\Delta_1 = 0.5$  мм между центрами соседних взаимодействующих кольцевых электродов (рис. 4, а).

**3.1 Элементарная ячейка MDS-актюатора.** Пьезоэлектрический элемент в области  $V$  элементарной ячейки (рис. 4, а) имеет однородные трансверсально-изотропные электроупругие свойства, которые характеризуется тензорами упругих  $\mathbf{C}$ , пьезоэлектрических  $\mathbf{e}$  и диэлектрических  $\lambda$  свойств керамики PZT-5A с прямолинейной поляризацией вдоль координатной оси  $\xi_\rho$ . В дальнейшем возможно уточнение искомых решений  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ ,  $\phi(\mathbf{r})$  посредством учета особенностей реального неоднородного поля поляризации в области  $V$  элементарной ячейки (рис. 4, а) для заданного расположения на ней поверхностных ленточных электродов (рис. 4, а) и, как следствие, неоднородности и криволинейной анизотропии электроупругих свойств пьезоэлектрического элемента, что представляет отдельную сложную задачу нелинейной механики пьезоэлектрических материалов [43–45].

Используем приведенную расчетную схему (рис. 4, б) элементарной ячейки MDS-актюатора (рис. 4, а), по которой для области  $V$  в определяющих соотношениях

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijmn}\varepsilon_{mn} - e_{nij}E_n \\ D_i &= e_{imn}\varepsilon_{mn} + \lambda_{in}E_n\end{aligned}\quad (3.1)$$

с учетом прямого и обратного пьезоэффектов, где  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\lambda$  — тензоры упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических свойств пьезоэлектрического элемента,

$\sigma$ ,  $\varepsilon$  – тензоры напряжений и деформаций,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  – векторы индукции и напряженности электрического поля для компоненты электрической напряженности  $E_3(\xi) = E_{\text{con}}(\xi) + \Delta E_3(\xi)$ , полагаем равенство

$$E_3(\xi) \approx < E_{\text{con}} > \equiv E_{\text{con}}^* = U_{\text{con1}}^* / \Delta_1 = \kappa U_{\text{con}} / \Delta_1 \quad (3.2)$$

из-за пренебрежимой малости величины поправки  $\Delta E_3$  (обусловленной прямым пьезоэффектом) относительно управляющей составляющей  $E_{\text{con}}(\xi) \approx < E_{\text{con}} >$  компоненты  $E_3$  с учетом, что значения управляющего электрического напряжения  $U_{\text{con}} \approx 1000\text{В}$ , длина элементарной ячейки  $\Delta_1 = 0.5\text{мм}$  (рис. 4, а), где  $<...>$  – оператор осреднения по области  $\mathbf{V}$  ячейки. В (3.2) характеристика ячейки  $\kappa$  – это коэффициент неоднородности управляющего электрического поля  $E_{\text{con}}(\xi)$  как решения связанной краевой задачи электроупругости для ячейки на рис. 4, а, который рассчитывается по формуле (3.2):

$$\kappa \equiv U_{\text{con1}}^* / U_{\text{con}} = \frac{< E_{\text{con}} >}{U_{\text{con}}} \Delta_1 \quad (3.3)$$

с учетом ( $0 < \kappa < 1$ ) особенностей расположения поверхностных ленточных электродов на верхней и нижней гранях ячейки (рис. 4,а) при заданном на них управляющем электрическом напряжении  $U_{\text{con}}$ . То есть  $\kappa$  – это поправочный коэффициент для приведенного значения управляющего электрического напряжения  $U_{\text{con1}}^* = \kappa U_{\text{con}}$  (3.2) для расчетной схемы ячейки (рис. 4, б) с размещением поверхностных электродов на ее двух боковых гранях из условия равенства  $< E_{\text{con}} > = E_{\text{con}}^*$  электрических напряженностей обеих расчетных схем (рис. 4).

Для области  $\mathbf{V}$  элементарной ячейки MDS-актюатора (рис. 4, а) связанная краевая задача электроупругости включает в себя уравнения равновесия и непрерывности

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0 \quad (3.4)$$

для полей напряжений  $\sigma(\mathbf{r})$  и электрической индукции  $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ , физические соотношения (3.1) с учетом прямого и обратного пьезоэффектов, выражений компонент деформаций  $\varepsilon(\mathbf{r})$  и электрической напряженности  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2, \quad E_i = -\phi_{,i} \quad (3.5)$$

через искомые поля перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  и электрического потенциала  $\phi(\mathbf{r})$ . Определяющие соотношения (3.1) можно записать в виде:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijmn} \sigma_{mn} + d_{nij} E_n, \quad D_i = d_{imn} \sigma_{mn} + \lambda_{in}^{(\sigma)} E_n \quad (3.6)$$

через тензоры упругих податливостей  $\mathbf{S} \equiv \mathbf{C}^{-1}$  и пьезоэлектрических свойств

$$d_{nij} \equiv S_{ijpq} e_{npq}, \quad \lambda_{in}^{(\sigma)} = \lambda_{in} + e_{ipq} d_{npq} \quad (3.7)$$

при значении  $\sigma = 0$ . Компоненты тензоров упругих  $\mathbf{C}$ , пьезоэлектрических  $\mathbf{e}$  и диэлектрических  $\lambda$  свойств пьезоэлектрического элемента (рис. 4, а) определяются по выражениям (индекс 3 соответствует направлению поляризации по радиальной оси  $\rho$ , индексы 1 и 2 – осям  $\theta, z$  в плоскости изотропии керамики):

$$\begin{aligned} C_{ijmn} &= c_{12}\delta_{ij}\delta_{mn} + c_{66}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) + \\ &+ (c_{11} + c_{33} - 2c_{13} - 4c_{44})\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{m3}\delta_{n3} + (c_{13} - c_{12})(\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{mn} + \delta_{ij}\delta_{m3}\delta_{n3}) + \\ &+ (c_{44} - c_{66})(\delta_{i3}\delta_{m3}\delta_{jn} + \delta_{j3}\delta_{n3}\delta_{im} + \delta_{i3}\delta_{n3}\delta_{jm} + \delta_{j3}\delta_{m3}\delta_{in}) \\ e_{kmn} &= e_{31}\delta_{k3}\delta_{mn} + (e_{33} - e_{31} - 2e_{15})\delta_{k3}\delta_{m3}\delta_{n3} + e_{15}(\delta_{kn}\delta_{m3} + \delta_{km}\delta_{n3}) \\ \lambda_{kn} &= \lambda_1\delta_{kn} + (\lambda_3 - \lambda_1)\delta_{k3}\delta_{n3} \end{aligned}$$

через известные независимые упругие ( $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ ), пьезоэлектрические ( $e_{31}, e_{15}, e_{33}$ ) и диэлектрические ( $\lambda_1, \lambda_3$ ) константы керамики PZT-5A, где  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера,  $c_{66} = (c_{11} - c_{12}) / 2$ , или в матричной форме записи:

$$\begin{aligned} \|c_{ij}\| &= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{vmatrix}, \\ \|e_{ij}\| &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \|\lambda_{ij}\| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где тензорные и матричные индексы связаны между собой соотношениями:  $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \text{ и } 32 \rightarrow 4, 13 \text{ и } 31 \rightarrow 5, 12 \text{ и } 21 \rightarrow 6$ .

Верхняя грань ячейки (рис. 4,а)  $\Gamma_1 = \Gamma_{1e}' \cup \Gamma_{1e}'' \cup \bar{\Gamma}_1$  включает в себя электродированные участки  $\Gamma_{1e}', \Gamma_{1e}''$  – левый и правый верхние электроды,  $\bar{\Gamma}_1$  – участок между ними. Аналогичные обозначения используем для участков нижней грани  $\Gamma_2 = \Gamma_{2e}' \cup \Gamma_{2e}'' \cup \bar{\Gamma}_2$ . Задаем управляющее электрическое напряжение  $U_{\text{con}} = 2\phi$  через значения электрических потенциалов  $\pm\phi$  на электродах

$$\phi_{\Gamma_{1e}'} = \phi_{\Gamma_{2e}'} = \phi, \quad \phi_{\Gamma_{1e}''} = \phi_{\Gamma_{2e}''} = -\phi, \quad (3.8)$$

а на остальных участках верхней, нижней и боковых граней – равенство нулю электрической индукции

$$(D_i n_i)|_{\bar{\Gamma}} = 0, \quad (3.9)$$



где граница  $\bar{\Gamma}$  – вся поверхность ячейки (рис. 4, а) за исключением участков электродов  $\Gamma_{1e}, \dots, \Gamma_{2e}$ ,  $n_i$  – координаты нормали к локальному участку границы  $\bar{\Gamma}$  с учетом, что на боковых гранях  $\Gamma_3, \dots, \Gamma_6$  ячейки (рис. 4, а) имеем условия симметрии электрического (3.9) и деформационного полей. Считаем, что нижняя грань ячейки неподвижна, а верхняя грань – свободная поверхность, т.е. выполняются равенства:

$$(\sigma_{ij}n_j)|_{\Gamma_1} = 0, \quad u|_{\Gamma_2} = 0. \quad (3.10)$$

В результате численного моделирования – решения краевой задачи (3.1), (3.4)–(3.7) с граничными условиями (3.8)–(3.10) определено значение поправочного коэффициента  $\kappa \approx 0.92$  для нахождения приведенного значения управляющего электрического напряжения  $U_{con1}^* = \kappa U_{con}$  (3.2), (3.3) расчетной схемы ячейки (рис. 4, б) с размещением поверхностных электродов на ее двух боковых гранях.

Для случая (рис. 2, а) множества из  $n$  соединенных боковыми гранями элементарных ячеек (рис. 4, а) с общей длиной  $\Delta_n = n\Delta_1$  приведенная однородная расчетная область  $V_n$  (рис. 5) также имеет длину  $\Delta_n$  при величине управляющего электрического напряжения

$$U_{con}^* = nU_{con1}^* \quad (3.11)$$

между двумя поверхностными электродами на внешних боковых гранях области  $V_n$ , которое обуславливает однородную электрическую напряженность

$$E_{con}^* = \frac{U_{con}^*}{\Delta_n} = \frac{nU_{con1}^*}{\Delta_n} = \kappa n U_{con} / \Delta_n \quad (3.12)$$

по всей длине  $\Delta_n$  расчетной области  $V_n$  (рис. 5) с учетом равенства

$$U_{con}^* = \kappa n U_{con} \quad (3.13)$$

Отметим, что известный подход “термоанalogии” [46] основан на аналогии между обратным пьезоэлектрическим эффектом и термоупругим эффектом, поэтому прикладываемое к пьезоэлектрическому актюатору электрическое поле моделируется как тепловая нагрузка, а пьезоэлектрические коэффициенты деформации, характеризующие исполнительный механизм, вводятся как коэффициенты теплового расширения. В результате учитывают лишь обратный

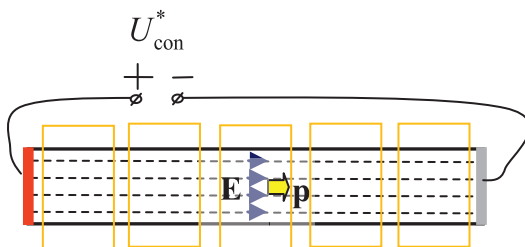


Рис. 5. Приведенная расчетная схема для множества  $n$  элементарных ячеек при  $n = 5$ .



пьезоэффект от действия сравнительно больших значений управляющего электрического напряжения  $U_{\text{con}}$  и, как следствие, решение задачи электроупругости сводится к решению соответствующей задачи теории термоупругости с определяющим соотношением:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijmn} \sigma_{mn} + \alpha_{ij} \Delta T \quad (3.14)$$

— аналогом соотношения (3.6), (3.2) вида

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijmn} \sigma_{mn} + d_{3ij} \kappa U_{\text{con}} / \Delta_1 \quad (3.15)$$

с учетом принятого равенства  $E_3 = \kappa U_{\text{con}} / \Delta_1$  (3.2) и используемых обозначений для приведенных коэффициентов “линейного теплового расширения”  $\alpha_{ij}$  и “температуры нагрева”  $\Delta T$  в виде

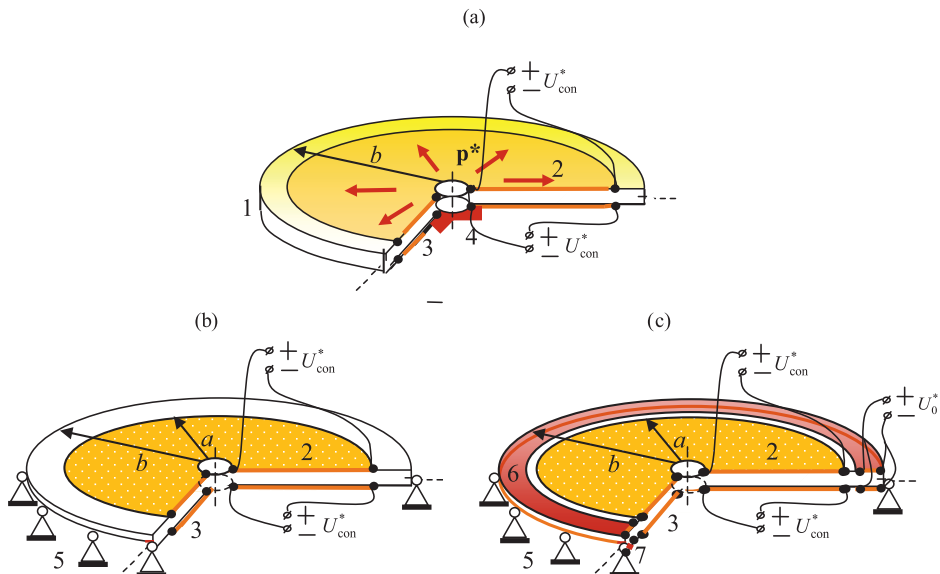
$$\alpha_{ij} \equiv kd_{3ij} / \Delta_1, \quad \Delta T \equiv U_{\text{con}}, \quad (3.16)$$

где  $U_{\text{con}}$  — управляющее электрическое напряжение, приложенное к электродам ячейки (рис. 4, а), т.е. к выходам двойной спирали электродов MDS-актюатора. Отметим, что гомогенизированные (эффективные) электроупругие свойства MDS-актюатора с поляризацией по радиальной координате могут быть приравнены к эффективным свойствам MFC-актюатора [32, 34, 35] с аналогичной (рис. 4) представительной ячейкой.

**3.2. Мембраны с двухсторонними MDS-актюаторами.** Расчетные схемы мембран с установленными на верхней и нижней поверхностях MDS-актюаторами в виде осесимметричных однородных пьезоэлектрических (с поляризацией по радиальной координате) кольцевых покрытий (слоев) из керамики PZT-5A даны на рис. 6, в том числе с наличием периферийных “колец поджатия” на рис. 6, с. Изотропные упругие свойства мембраны характеризуем модулем Юнга 20 ГПа, коэффициентом Пуассона 0.3. Были заданы следующие значения геометрических параметров расчетной области: внешний радиус мембраны  $b = 6$  см, толщина мембраны  $h = 0.2$  мм; толщина каждого MDS-актюатора  $h_a = 0.3$  мм,  $a_0 \approx 0.1$  мм — внутренний радиус (электрода) центрального актюатора. Область мембраны —  $\rho \in (0; b)$ ,  $z \in (-h/2; h/2)$ ,  $\theta \in (0; 2\pi)$ , область верхнего центрального актюатора —  $\rho \in (a_0; a)$ ,  $z \in (h/2; h/2 + h_a)$ ,  $\theta \in (0; 2\pi)$  с электродированными поверхностями при  $\rho = a_0$  (электрод  $I_{1e}$ ) и  $\rho = a$  (электрод  $I_{1e}$ ) при  $z \in (h/2; h/2 + h_a)$ , для области нижнего центрального актюатора отличие лишь в значении  $z \in (-h/2 - h_a; -h/2)$  и обозначениях  $I_{2e}$ ,  $I_{2e}$  соответствующих электродов. Область верхнего периферийного актюатора “кольца поджатия” —  $\rho \in (a; b)$ ,  $z \in (h/2; h/2 + h_a)$ ,  $\theta \in (0; 2\pi)$  с электродированными поверхностями при  $\rho = a$  (электрод  $II_{1e}$ ) и  $\rho = b$  (электрод  $II_{1e}$ ),  $z \in (h/2; h/2 + h_a)$ , для области нижнего периферийного актюатора отличие лишь в значении  $z \in (-h/2 - h_a; -h/2)$  и обозначениях  $II_{2e}$ ,  $II_{2e}$  соответствующих электродов (рис. 6, с).

Нагружение пьезоэлектрических актюаторов осуществляется (рис. 5) приложением приведенных величин  $U_{\text{con}}^* = \kappa h_1 U_{\text{con}}$ ,  $U_0^* = \kappa h_2 U_0$  (3.11)–(3.13) управляющих электрических напряжений  $U_{\text{con}}$ ,  $U_0$  на соответствующие пары концентрических

кольцевых электродов – внутреннюю и внешнюю электродированные цилиндрические поверхности соответствующего актюатора, в частности подключаем величины  $\pm \kappa n_1 U_{\text{con}}$  – соответственно для электродов  $I_{1e}, I_{1e}$  верхнего ( $\kappa n_1 U_{\text{con}}$ ) и для электродов  $I_{2e}, I_{2e}$  нижнего ( $-\kappa n_1 U_{\text{con}}$ ) центральных актюаторов, величина  $\kappa n_2 U_0$  – для электродов  $\Pi_{1e}, \Pi_{1e}$  верхнего и (такая же) для электродов нижнего  $\Pi_{2e}, \Pi_{2e}$  периферийных актюаторов, где  $n_1 \approx (a - a_0) / \Delta_1$ ,  $n_2 \approx (b - a) / \Delta_1$  – число элементарных ячеек (рис. 4, а) вдоль радиуса соответствующего пьезоэлектрического актюатора,  $U_{\text{con}}, U_0 \equiv U_{0\text{con}}$  – действительные значения управляющих электрических напряжений, подключаемые к выходам двойных спиралей электродов рассматриваемых центральных и периферийных MDS-актюаторов с учетом найденного численного значения коэффициента  $\kappa \approx 0.92$  (3.2), (3.3). Выполняются условия идеального контакта (т.е. условия непрерывности полей перемещений  $\mathbf{u}$ , электрического потенциала  $\phi$ , компонент векторов напряжений  $\sigma_{zz}, \sigma_{z\theta}$  ( $\sigma_{z\theta} = 0$  в силу осевой симметрии задачи) и электрической индукции  $D_z$ ) на межфазных границах с нормалью  $\mathbf{n} = \{0; 0; 1\}$  между мембраной и актюаторами (рис. 6), в частности, когда  $\rho \in (a_0; a)$ ,  $z = \pm h / 2$ , и дополнительно при  $\rho \in (a; b)$ ,  $z = \pm h / 2$  для случая на рис. 6,с. Для случая на рис. 6,а локальная круглая область в центре нижней поверхности мембраны  $\rho \in (0; a_0)$ ,  $z = -h / 2$  неподвижно закреплена, т.е. здесь  $\mathbf{u}|_{\rho \in (0; a_0), z = -h/2} = 0$ , а при  $\rho \in (0; a_0)$ ,  $z = h / 2$  – свободная поверхность, при этом свободной также является боковая цилиндрическая граница мембраны при  $\rho = b$ ,  $z \in (-h / 2; h / 2)$ . Для случаев на рис. 6, б,с свободные поверхности имеем при  $\rho \in (0; a_0)$ ,  $z = \pm h / 2$ , при  $\rho = b$ ,  $z \in (-h / 2; 0) \cup (0; h / 2)$  на внешней боковой цилиндрической границе мембраны и дополнительно при  $\rho \in (a; b)$

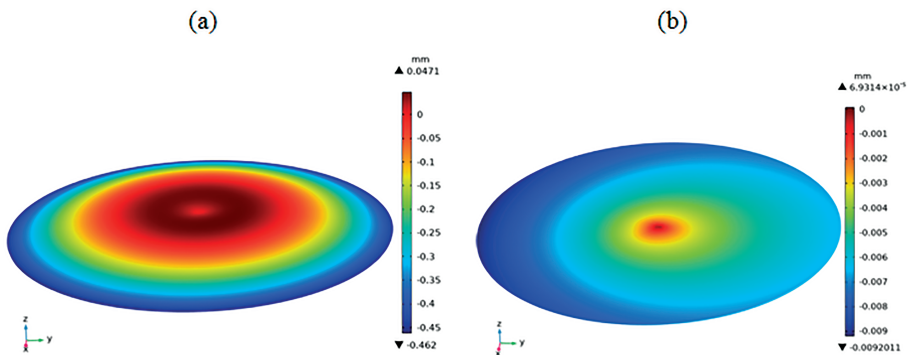


**Рис. 6.** Приведенные расчетные схемы мембраны с MDS-актюаторами (а)–(с) при наличии “колец поджатия” (с), где 1 – мембрана, 2, 3 – верхний и нижний актюаторы, 4 – жесткое закрепление по центру (а), 5 – шарнирное неподвижное закрепление, 6, 7 – “кольца поджатия”,  $\mathbf{p}^*$  – радиальная поляризация.

,  $z = \pm h / 2$  для случая на рис. 6, б с закреплением внешнего контура мембраны  $\mathbf{u}|_{\rho=b, z=0} = 0$  при  $\rho = b$ ,  $z = 0$ . Свободными поверхностями также являются внешние границы центральных актюаторов ( $\rho \in (a_0; a)$ ,  $z = \pm(h / 2 + h_a)$ ) и мембраны ( $\rho \in (a; b)$ ,  $z = \pm h / 2$ ) для случаев на рис. 6, а, б, а для случая на рис. 6, с – при  $\rho \in (a_0; b)$ ,  $z = \pm(h / 2 + h_a)$ . На перечисленных свободных поверхностях (с соответствующей нормалью  $\mathbf{n}$ ) выполняются равенства нулю векторов напряжений  $\sigma_{ij}n_j$  и электрической индукции  $D_jn_j$ .

Отметим, что расчетные схемы на рис. 6 в рамках “термоанalogии” [46] (3.14)–(3.16) соответствуют случаям “нагрева”  $\Delta T_1 > 0$  и “охлаждения”  $\Delta T_2 < 0$  (или наоборот) верхнего и нижнего центральных покрытий и “нагрева”  $\Delta T_0 > 0$  обоих (верхнего и нижнего) периферийных кольцевых покрытий – “колец поджата” на рис. 6, с.

**4. Результаты численного моделирования. 4.1. Эффект MDS-актюатора.** Проведем сравнение картин деформирования мембран (рис. 6, а) с различными, в частности новыми MDS (рис. 2, а), и традиционными пластинчатыми (рис. 2, б) актюаторами на основе керамики PZT-5A, установленными на верхней и нижней поверхностях мембраны по схеме “биморф”, при одинаковых значениях геометрических параметров мембран, актюаторов и значении управляющего электрического напряжения  $U_{\text{con}}$ . На рис. 7 и в табл. 1 даны в сравнении эпюры прогибов (рис. 7) и наибольшие значения прогиба  $w_b$  на внешнем контуре мембраны (табл. 1) с MDS-актюаторами (рис. 6, а) и традиционными (рис. 2, б) пьезоэлектрическими (поляризованными по толщине, т.е. по оси  $z$ ) пластинами по схеме “биморф” при значениях управляющих электрических напряжений  $U_{\text{con}2} = -U_{\text{con}1} = 1000$  В, при этом верхняя пьезоэлектрическая пластина сжимается, а нижняя – растягивается в радиальном направлении. Выявлен эффект значительного – более чем в 50 раз увеличения численного значения прогиба (рис. 7, табл. 1) на свободном краю мембраны с двухсторонними (т.е. установленными на ее верхней и нижней поверхностях) пьезоэлектрическими MDS-актюаторами по сравнению с использованием двухсторонних традиционных однородных пластинчатых пьезоэлектрических актюаторов биморфного типа, например при неподвижном жестком закреплении центра мембраны (рис. 6, а).



**Рис. 7.** Эпюра перемещений мембраны (закрепленной по центру) с установленными двухсторонними MDS (а) и традиционными пластинчатыми (б) актюаторами.

Таблица 1. Прогиб  $w_b$  на краю мембраны, закрепленной по центру

| Вид актюатора         | $w_b$ , мм |
|-----------------------|------------|
| MDS-актюатор          | 0.456      |
| Традиционный актюатор | 0.009      |

4.2. *Эффект MDS-“кольца поджатия”*. Считаем, что на обеих (верхней и нижней) поверхностях мембраны установлены центральные ( $a_0 < \rho < a$ ) (рис. 6, б, с) и дополнительные периферийные “кольца поджатия” ( $a < \rho < b$ ) (рис. 6, с) в виде пьезоэлектрических покрытий с приведенными характеристиками MDS-актюаторов, где радиус  $a = qb$ , коэффициент  $q = 0.2, 0.6, 0.8, 1$ ; при значении  $q = 1$  “кольца поджатия” отсутствуют. Были заданы следующие три (I, II, III) различные сочетания ( $U_{con1}, U_{con2}$ ) управляющих электрических напряжений на верхнем  $U_{con1}$  и нижнем  $U_{con2}$  центральных MDS-актюаторах: I – (1000, –1000), II – (1500, –1500), III – (1500, –500). При наличии верхнего и нижнего периферийных кольцевых MDS-актюаторов – “колец поджатия” (рис. 6, с) на них были заданы одинаковые значения управляющих электрических напряжений, равные  $U_0 = 0, 1000 \text{ В}$ , 1500 В, т.е. задаем на них режимы “выключено” (для сравнения с режимом “включено”) или “сильное растяжение” – это случай “поджатия” мембраны. Результаты численного моделирования, в частности эпюры перемещений мембраны с центральными MDS-актюаторами без “кольца поджатия” и с “кольцом поджатия” при  $q = 0.2, 0.6, 1$ , представлены на рис. 8, графики зависимостей прогиба  $w_0$  в центре мембраны от параметра  $q$  для трех (I, II, III) различных комбинаций значений управляющих электрических напряжений на верхнем  $U_{con1}$  и нижнем  $U_{con2}$  центральных MDS-актюаторах мембраны – на рис. 9 (табл. 2, 3). Нелинейность графиков на рис. 9 обусловлена конструктивным фактором (взаимодействием центральных и периферийных актюаторов) при линейности физических и геометрических соотношений электроупругости для используемых материалов. Прогиб  $w_0$  центра мембраны радиусом  $b$  с установленными на ней центральными и периферийными актюаторами (рис. 6, с) с радиусом  $a$  границы между ними в общем складывается из двух составляющих  $w_0^{(1)} + w_0^{(2)}$ , где  $w_0^{(1)}$  – прогиб, обусловленный действием центральных “биморфных” актюаторов,  $w_0^{(2)}$  – дополнительный прогиб, обусловленный действием на изогнутую (с прогибом  $w_0^{(1)}$ ) мембрану сжимающего (в плоскости мембраны) усилия от периферийных актюаторов – “колец поджатия”. В результате при увеличении значения параметра  $q = a / b$  увеличивается размер центральных “биморфных” актюаторов и, как следствие, увеличивается “начальный” изгиб мембраны  $w_0^{(1)}$ , однако при увеличении  $q$  уменьшается размер “колец поджатия” и, как следствие, уменьшаются величина поджатия и значение составляющей прогиба  $w_0^{(2)}$ , что обуславливает немонотонный характер графиков зависимости результирующего прогиба  $w_0 = w_0^{(1)} + w_0^{(2)}$  в центре мембраны от параметра  $q$  на рис. 9. Дополнительно можно отметить, что

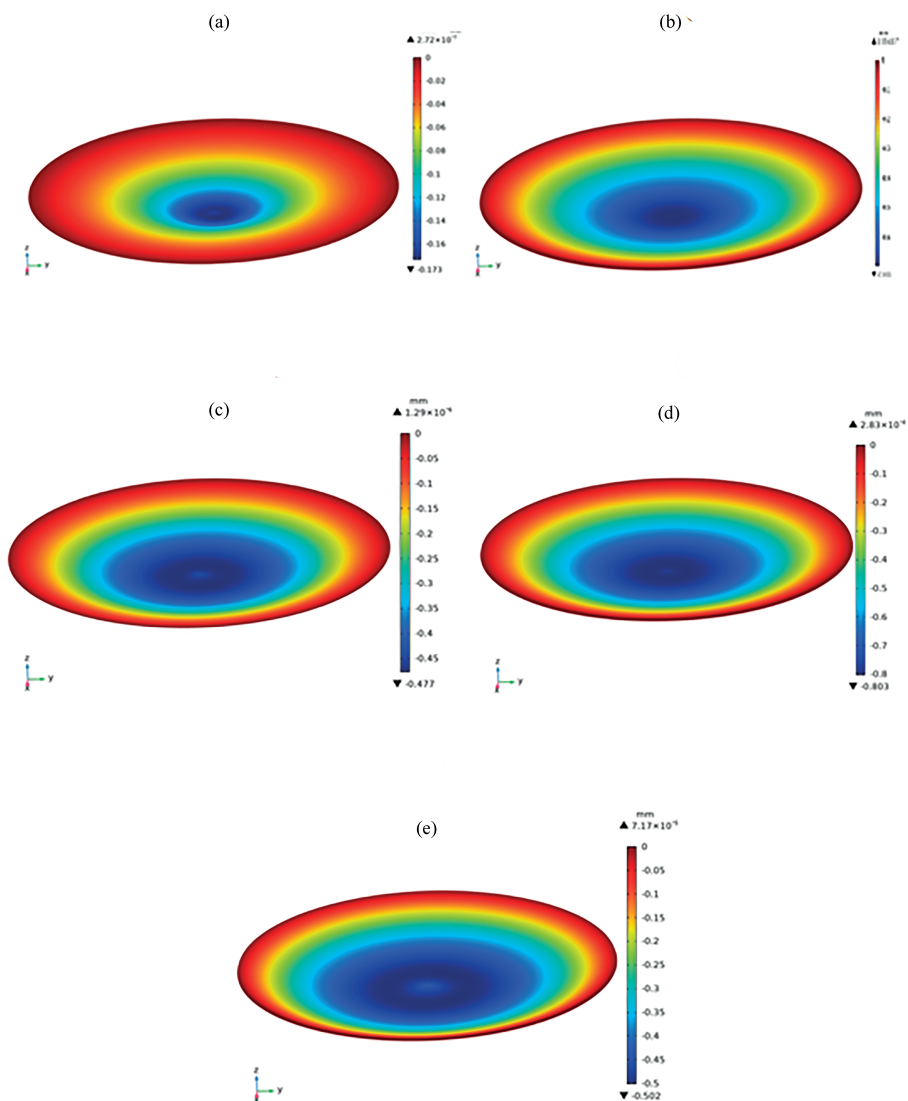
**Таблица 2.** Прогиб  $w_0$  в центре мембраны с двухсторонними круговыми MDS-актюаторами без “кольца поджатия”

| $q$ | $\frac{U_{1\text{ con}}}{U_{2\text{ con}}}$               | $w_0, \text{мм}$ |
|-----|-----------------------------------------------------------|------------------|
| 0.2 | $\text{I} \rightarrow \left( \frac{1000}{-1000} \right)$  | 0.139            |
|     | $\text{II} \rightarrow \left( \frac{1500}{-1500} \right)$ | 0.209            |
|     | $\text{III} \rightarrow \left( \frac{1500}{-500} \right)$ | 0.173            |
| 0.4 | I                                                         | 0.282            |
|     | II                                                        | 0.424            |
|     | III                                                       | 0.361            |
| 0.6 | I                                                         | 0.379            |
|     | II                                                        | 0.568            |
|     | III                                                       | 0.477            |
| 0.8 | I                                                         | 0.454            |
|     | II                                                        | 0.681            |
|     | III                                                       | 0.525            |
| 1   | I                                                         | 0.398            |
|     | II                                                        | 0.596            |
|     | III                                                       | 0.502            |

на рис. 9 графики для мембран с актюаторами без “кольца поджатия” (–) расположены несколько выше графиков для случая наличия “выключенных” (т.е. при  $U_0 = 0$ ) “колец поджатия”, так как наличие “кольца поджатия” увеличивают изгибную жесткость устройства (рис. 6, с) в целом.

**Таблица 3.** Прогиб  $w_0$  в центральной точке мембраны с двухсторонними круговыми MDS-актюаторами и MDS-“кольцом поджатия”

| $q$ | $\frac{U_{1\text{ con}}}{U_{2\text{ con}}}$               | $w_0, \text{мм}$    |                        |                        |
|-----|-----------------------------------------------------------|---------------------|------------------------|------------------------|
|     |                                                           | $U_0 = 0 \text{ В}$ | $U_0 = 1000 \text{ В}$ | $U_0 = 1500 \text{ В}$ |
| 0.2 | $\text{I} \rightarrow \left( \frac{1000}{-1000} \right)$  | 0.102               | 0.498                  | 0.696                  |
|     | $\text{II} \rightarrow \left( \frac{1500}{-1500} \right)$ | 0.153               | 0.549                  | 0.747                  |
|     | $\text{III} \rightarrow \left( \frac{1500}{-500} \right)$ | 0.110               | 0.505                  | 0.703                  |
| 0.4 | I                                                         | 0.224               | 0.601                  | 0.791                  |
|     | II                                                        | 0.336               | 0.713                  | 0.902                  |
|     | III                                                       | 0.248               | 0.625                  | 0.815                  |
| 0.6 | I                                                         | 0.326               | 0.612                  | 0.757                  |
|     | II                                                        | 0.489               | 0.774                  | 0.918                  |
|     | III                                                       | 0.371               | 0.658                  | 0.803                  |
| 0.8 | I                                                         | 0.387               | 0.5458                 | 0.625                  |
|     | II                                                        | 0.580               | 0.738                  | 0.818                  |
|     | III                                                       | 0.458               | 0.618                  | 0.698                  |
| 1   | I                                                         | 0.398               | 0.398                  | 0.398                  |
|     | II                                                        | 0.596               | 0.596                  | 0.596                  |
|     | III                                                       | 0.502               | 0.502                  | 0.502                  |



**Рис. 8.** Эпюры перемещений мембраны с круговыми MDS-актюаторами без “кольца поджатия” (a, c, e) и с “кольцом поджатия” ПП (b, d) при  $q = 0.2$  (a, b),  $0.6$  (c, d),  $1$  (e).

**Заключение.** Представлена принципиальная схема и математическая модель функционирования нового пьезоэлектрического мембранного (MDS) актюатора с двойными спиралями (DS) электродов [40] на верхней и/или нижней поверхностях тонкого пьезоэлектрического слоя с осесимметричной и периодической (с малым периодом) по радиальной координате взаимобратной электрической поляризации. Выявлен эффект значительного увеличения рабочих изгибных

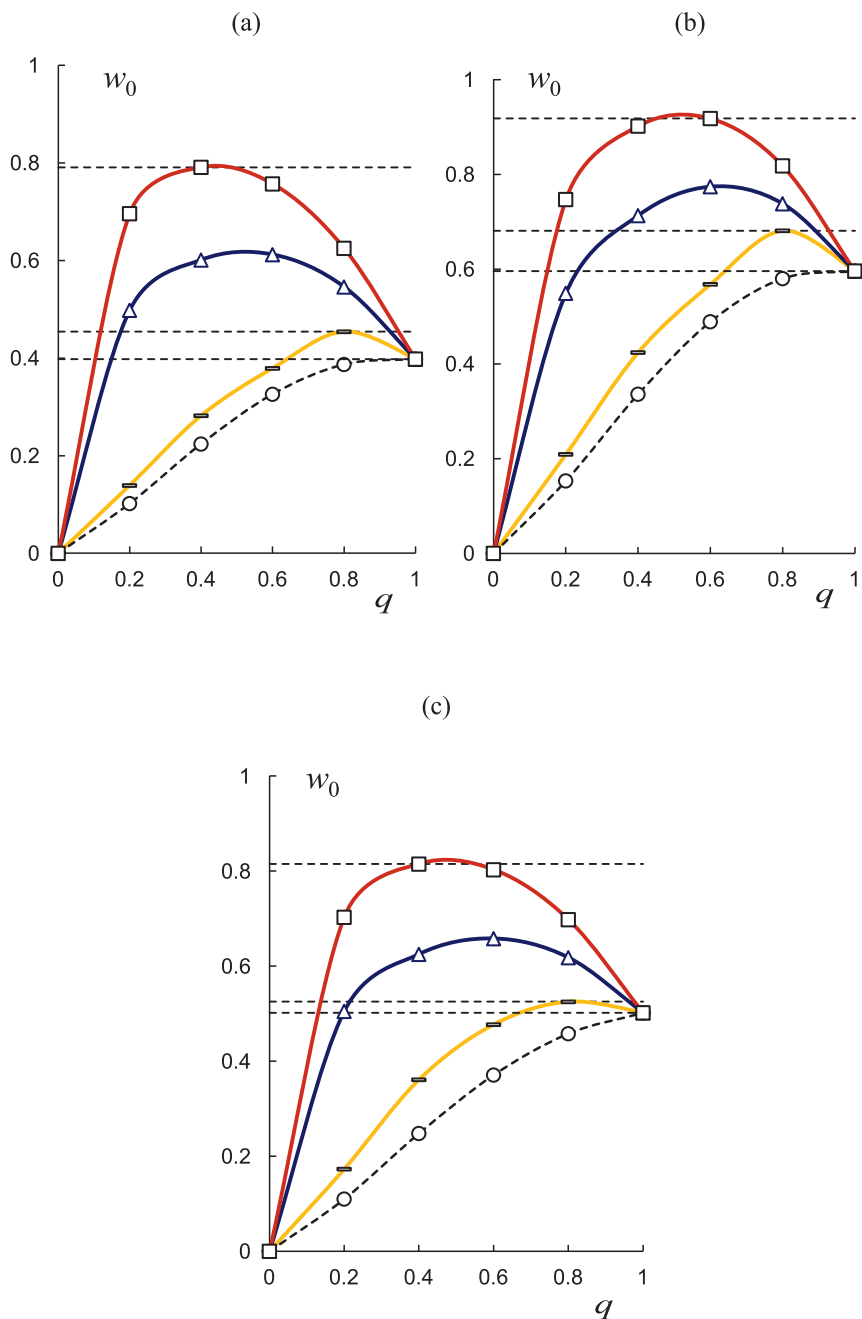


Рис. 9. Прогиб  $w_0$  [мм] в центре мембраны для случаев I (а), II (б), III (с) с круговыми MDS-актюаторами без “кольца поджатия” (—) и с MDS-“кольцом поджатия” для случаев  $U_0 = 0$  (○), 1000 В (Δ), 1500 В (□).



характеристик, в частности прогиба (рис. 7, табл. 1) и блокирующего усилия исполнительных участков мембраны с двухсторонними (т.е. установленными на ее верхней и нижней поверхностях) пьезоэлектрическими MDS-актюаторами по сравнению с использованием традиционных однородных пластинчатых пьезоэлектрических актюаторов биморфного типа для различных условий закрепления мембраны, например неподвижного жесткого закрепления ее центра (рис. 6, а). Выявлен (рис. 9, табл. 2, табл. 3) немонотонный характер и осуществлен численный анализ нелинейной зависимости прогиба  $w_0$  от геометрического параметра  $q$  — отношения радиуса центрального MDS-актюатора к радиусу мембраны при фиксированных значениях других параметров численной модели мембраны с двухсторонними центральными (круговыми) и периферийными кольцевыми пьезоэлектрическими MDS-актюаторами (рис. 6, б, в). Выявлены диапазоны значений параметра  $q$ , при которых “кольцо поджатия” обуславливает эффект — величина прогиба  $w_0$  центра мембраны превышает наилучшее возможное значение (без его использования, т.е. по традиционной схеме “биморф” даже при использовании разработанных круговых MDS-актюаторов) для каждого из трех случаев: I (рис. 9, а), II (рис. 9, б), III (рис. 9, с) различных комбинаций значений управляющих электрических напряжений на верхнем ( $U_{con1}$ ) и нижнем ( $U_{con2}$ ) круговых MDS-актюаторах и различных значений управляющего электрического напряжения  $U_0$  на MDS-“кольце поджатия” мембраны (рис. 6, б, в), закрепленной по своей границе по типу “неподвижный шарнир”. Наиболее ярко этот эффект наблюдается в диапазоне значений  $q \in (0.4; 0.6)$  для случая II (рис. 9, б). Результаты численного моделирования подтвердили, что предложенное техническое решение — устройство мембранного пьезоэлектрического MDS-актюатора с плоской двойной спиралью электродов — позволяет значительно повысить эффективность пьезоэлектрического актюатора. Использование предложенного двухстороннего пьезоэлектрического MDS-“кольца поджатия” (рис. 6, в) [39], установленного на верхней и нижней поверхностях упругой мембраны вблизи ее неподвижной границы, в частности заделки или шарнирного закрепления периметра круглой мембраны (рис. 9), дополнительно значительно повышает эффективность разработанного устройства. MDS-актюатор может быть использован в микромеханике, управляемой оптике, сенсорной технике, акустике, в частности при изготовлении пьезоэлектрических акустических или сенсорных элементов мембранного типа, электромеханических преобразователей сбора вибрационной энергии.

Результаты получены при выполнении государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на выполнение фундаментальных научных исследований (проект № FSNM-2023-0006).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tzou H.S. Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua)*. Kluwer Academic Publishers. 1993. 320 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-94-011-1783-8>

2. Rubio W.M., Vatanabe S.L., Paulino G.H., Silva E.C.N. Functionally graded piezoelectric material systems – a multiphysics perspective / In book Advanced computational materials modeling: from classical to multi-scale techniques. Edited by M. Vaz J'uniior, E.A. de Souza Neto, P.A. Munoz-Rojas. Weinheim, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2011. 414 p. P. 301–339.  
<http://doi.org/10.1002/9783527632312>
3. Ebrahimi F. Piezoelectric materials and devices – practice and applications. IntechOpen, 2013. 176 p.  
<http://doi.org/10.5772/45936>
4. Уорден К. Новые интеллектуальные материалы и конструкции. Свойства и применение. М.: Техносфера, 2006. 224 с.
5. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Физическая акустика. Т. 1: Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А. М.: Мир, 1966. С. 204–326.
6. Han J.M., Adriaens T.A., Koning W.L., Banning R. Modelling Piezoelectric Actuators // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2000. V. 5. № 4. P. 331–341.  
<https://doi.org/10.1109/3516.891044>
7. Ivan I.A., Rakotondrabe M., Lutz P., Chaillet N. Quasistatic displacement self-sensing method for cantilevered piezoelectric actuators // Rev. Sci. Instrum. American Institute of Physics. 2009. V. 80. № 6. P. 065102-1/065102-8.  
<https://doi.org/10.1063/1.3142486>
8. Софронов А., Никифоров В., Климашин В. Биморфные пьезоэлектрические элементы: актуаторы и датчики // Компоненты и технологии. 2003. Т. 30. № 4. С. 46–48.
9. Zhu D., Almusallam A., Beeby S.P., Tudor J., Harris N.R. A bimorph multi-layer piezoelectric vibration energy harvester // PowerMEMS 2010 Proceedings. Belgium, Leuven. 2010. P. 1–4. URL: <http://eprints.soton.ac.uk/id/eprint/271763>
10. Bansevicius R., Navickaitė S., Jūrėnas V., Mažeika D., Lučinskis R., Navickas J. Investigation of novel design piezoelectric bending actuators // J. Vibroengineering. 2013. V. 15. № 2. P. 1064–1068.
11. Ватульян А.О., Гетман И.П., Лапицкая Н.Б. Об изгибе пьезоэлектрической биморфной пластины // Прикладная механика. 1991. Т. 27. № 10. С. 101–105.
12. Ватульян А.О., Рынкова А.А. Об одной модели изгибных колебаний пьезоэлектрических биморфов с разрезными электродами и ее приложениях // Известия РАН. МТТ. 2007. № 4. С. 114–122.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654407040127>
13. Патент РФ № 2099754. Йелстаун Корпорейшн Н.В. Деформируемое зеркало на основе многослойной активной биморфной структуры. Дата заявки: 17.10.1996. Дата публикации: 20.12.1997. 7 с. URL: [https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips\\_servlet](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet)
14. Антоняк Ю.Т., Вассергейсер М.Е. Расчет характеристик изгибного пьезоэлектрического преобразователя мембранного типа // Акустический журнал. 1982. Т. 28. № 3. С. 294–302.
15. Аронов Б.С. Электромеханические преобразователи из пьезоэлектрической керамики. Ленинград: Энергоатомиздат, 1990. 270 с.
16. Williams C.B., Yates R.B. Analysis of a microelectric generator for Microsystems // Sensors and Actuators A: Physical. 1996. V. 52. № 1–3. P. 8–11.  
[http://doi.org/10.1016/0924-4247\(96\)80118-X](http://doi.org/10.1016/0924-4247(96)80118-X)
17. Аббакумов К.Е., Коновалов Р.С., Цаплев В.М. Экспериментальное исследование дискового биморфного пьезоэлектрического генератора // Известия СПбГЭТУ “ЛЭТИ”. 2014. № 9. С. 59–63.

18. *Liu H., Zhong J., Lee C., Lee S.-W., Lin L.* A comprehensive review on piezoelectric energy harvesting technology: Materials, mechanisms, and applications // *Applied Physics Reviews*. 2018. V. 5. № 4. P. 041306.  
<https://doi.org/10.1063/1.5074184>
19. *Васильев В.А., Веремьев В.А., Тихонов А.И.* Влияние частотных факторов и параметров на информативный сигнал пьезоэлектрических датчиков давления // *Датчики и системы*. 2003. № 8. С. 5–9.
20. *Шарапов В.М., Мусиенко М.П., Шарапова Е.В.* Пьезоэлектрические датчики. М.: Техносфера, 2006. 632 с.
21. *Mouhli M.* Analysis and shape modeling of thin piezoelectric actuators. Virginia Commonwealth University Publ., 2005. 100 p.  
<https://scholarscompass.vcu.edu/etd/1552>
22. *Панич А.Е.* Пьезокерамические актюаторы. Р.-н-Д.: изд-во РГУ, 2008. 159 с.
23. *Yamada H., Sasaki M., Nam Y.* Active vibration control of a micro-actuator for hard disk drives using self-sensing actuator // *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 2008. V. 19. № 1. P. 113–123.  
<https://doi.org/10.1177/1045389X07083693>
24. *El-Sayed A.M., Abo-Ismael A., El-Melegy M.T., Hamzaid N.A., Osman N.A.A.* Development of a micro-gripper using piezoelectric bimorphs // *Sensors*. 2013. V. 13. № 5. P. 5826–5840.  
<https://doi.org/10.3390/s130505826>
25. *Бардин В.А., Васильев В.А., Чернов П.С.* Современное состояние и разработки актюаторов нано- и микроперемещений // *Труды международного симпозиума “Надежность и качество”*. 2014. Т. 2. С. 123–127.
26. *Бардин В.А., Васильев В.А.* Актюаторы нано- и микроперемещений для систем управления, контроля и безопасности // *Современная техника и технологии*. 2014. № 2. С. 1–5. [Электронный ресурс].  
URL: <https://technology.snauka.ru/2014/02/3057>
27. *Zhou J., Dong L., Yang W.* A Double-Acting Piezoelectric actuator for helicopter active rotor // *Actuators*. 2021. № 10(10). P. 1–15.  
<https://doi.org/10.3390/act10100247>
28. *Abedian B., Cundari M.* Resonant frequency of a polyvinylidene fluoride piezoelectric bimorph: the effect of surrounding fluid // *Proceedings Smart Structures and Materials*. 1993. V. 1916: Smart Materials. 23 July 1993.  
<https://doi.org/10.1117/12.148486>
29. Патент РФ № 2723567. Лопасть воздушного винта с управляемой геометрией профиля / *Паньков А.А., Аношкин А.Н., Писарев П.В.* Дата заявки: 18.11.2019. Дата публикации: 16.06.2020. 5 с. URL: [https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips\\_servlet](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet)
30. Патент RU № 2636255. Пьезоактюатор изгибного типа / *Паньков А.А.* Дата заявки: 14.04.2016. Дата публикации: 21.11.2017. 8 с.  
URL: [https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips\\_servlet](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet)
31. Patent US 2003/0056351 A1. Piezoelectric Macro-Fiber Composite Actuator and Method for Making Same / *Wilkie W.K., et al.* Application Publ. March 27, 2003.
32. *Emad D., Fanni M.A., Mohamed A.M., Yoshida S.* Low-computational-cost technique for modeling macro fiber composite piezoelectric actuators using finite element method // *Materials (Basel)*. 2021. № 14 (15). P. 4316.  
<https://doi.org/10.3390/ma14154316>
33. *Park J.-S., Kim J.-H.* Analytical development of single crystal Macro Fiber Composite actuators for active twist rotor blades // *Smart Mater. Struct.* 2005. V. 14. № 4. P. 745–753.  
<https://doi.org/10.1088/0964-1726/14/4/033>

34. Сертификат RU № 2018666421. Компьютерная программа “MFC PROPERTIES” (MFСР) / *Писарев П.В., Аношкин А.Н., Паньков А.А.* опубли.: 17.12.2018. заявка № 2018663978 от 05.12.2018.
35. *Pan'kov A.A., Anoshkin A.N., Pisarev P.V., Bayandin S.R.* Using an electromechanical analogy to describe the damping characteristics of an MFC actuator // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. V. 1093. P. 012023.  
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/1093/1/012023>
36. *Kashyap R., Lenka T. R., Baishya S. A* model for doubly clamped piezoelectric energy harvesters with segmented electrodes // IEEE Electron device letters. 2015. V. 36. № 12. P. 1369–1372. <https://doi.org/10.1109/LED.2015.2496186>
37. Патент RU № 2778161. Способ увеличения пьезочувствительности биморфа изгибного типа / *Паньков А.А.*, опубли.: 15.08.2022 Бюл. № 23, заявка № 2022101875 от 27.01.2022 г. URL: [https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips\\_servlet](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet)
38. Patent US № 5632841. Thin layer composite unimorph ferroelectric driver and sensor / *Hellbaum R.F., Bryant R.G., Fox R.L.* Application Date: 24.01.1997. Publication Date: 27.05.1997. 12 p.  
URL: <https://patents.google.com/patent/US20010043027/fi>
39. Патент RU № 2793564. Пьезоэлектрический биморф изгибного типа / *Паньков А.А.*, опубли.: 04.04.2023 Бюл. № 10, заявка № 2022129727 от 16.11.2022 г.
40. Патент RU № 2803015. Пьезоэлектрический актюатор / *Паньков А.А.*, опубли.: 05.09.2023 Бюл. № 25, заявка № 2023109123 от 11.04.2023 г.  
URL: [https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips\\_servlet](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet)
41. *Победня Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. университета, 1984. 336 с.
42. *Pan'kov A.A.* A piezoelectric material with inverse polarization and Maxwell–Wagner relaxation of layers in a variable electric field // Mechanics of Composite Materials. 2014. V. 49. № 6. P. 577–584.  
<https://doi.org/10.1007/s11029-013-9374-y>
43. *Shindo Y., Narita F., Hirama M.* Electromechanical field concentrations near the electrode tip in partially poled multilayer piezo-film actuators // Smart Mater. Struct. 2009. V. 18. P. 085020. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/18/8/085020>
44. *Skaliukh A.S., Soloviev A.N., Oganessian P.A.* Modeling of piezoelectric elements with inhomogeneous polarization in ACELAN // Ferroelectrics. 2015. V. 483. P. 95–101.  
<https://doi.org/10.1080/00150193.2015.1059138>
45. *Gerasimenko T.E., Kurbatova N.V., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Oganessian P.A., Skaliukh A.S., Soloviev A.N.* Homogenization of piezoelectric composites with internal structure and inhomogeneous polarization in ACELAN-COMPOS finite element package // Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials. Advanced Structured Materials. 2019. V. 109. P. 113–131.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_8)
46. *Dong X.-J., Meng G.* Dynamic analysis of structures with piezoelectric actuators based on thermal analogy method // Int. J. Adv. Manuf. Tech. 2006. V. 27. P. 841–844.  
<https://doi.org/10.1007/s00170-004-2290-5>

## MEMBRANE PIEZOELECTRIC MDS-ACTUATOR WITH A FLAT DOUBLE SPIRAL OF INTERACTING ELECTRODES

© 2024 г. А. А. Пан'ков<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: a\_a\_pankov@mail.ru*

**Abstract** — A schematic diagram and mathematical model of functioning of a new piezoelectric membrane (MDS) actuator with double spiral (DS) electrodes on the upper and/or lower surfaces of a thin piezoelectric layer with axisymmetric and periodic (with a small period) in radial coordinate mutual reversed electric polarization are presented. The polarization of the layer was realized as a result of connecting the polarizing electric voltage of the appropriate value to the outputs of the double spirals of the electrodes. The electrodes of each (upper and lower) double spiral of the MDS-actuator are made in the form of electrodeposited ribbon coatings on the surfaces of the piezoelectric layer in close proximity to each other (due to the small spiral pitch) to create high values of electric field strength along the lines of force in localized areas of the piezoelectric layer between them when an alternating or constant control electric voltage is connected to the electrodes, in particular, with positive and negative values of the electrical potentials. Importantly, the electric field force lines and, as a consequence, the polarization of the piezoelectric layer of the MDS actuator are oriented mainly along (i.e. towards or against) the radial coordinate of the membrane, in contrast to many conventional actuator schemes. The results of numerical modeling for a circular elastic membrane with piezoelectric actuators installed on its upper and lower surfaces confirmed the effectiveness of the proposed piezoelectric MDS-actuator when it functions according to the “bimorph” scheme, including the use of the proposed new structural element (section) — a piezoelectric “compression ring” MDS at various geometric and control parameters. The effect of a significant increase in the membrane deflection with installed piezoelectric MDS-actuators compared to the use of traditional homogeneous plate piezoelectric actuators of bimorph type for different conditions of the membrane fixation, in particular, stationary (rigid) fixation of its center is revealed. For a hybrid piezoelectric MDS-actuator including independent concentric round and circular (i.e. “compression ring”) sections, the non-monotonic nature and numerical analysis of the nonlinear dependence of the largest deflection at the center of a hinge-immobile membrane fixed at the edge on the ratio of the radii of its round and circular MDS sections were revealed. The cases in which the effect of the “compression ring” is manifested, i.e. when the maximum deflection of a membrane with the “compression ring” exceeds the best possible value of the deflection of this membrane without its use in the traditional “bimorph” scheme, are identified. The new piezoelectric MDS-actuator can be used in micromechanics, controlled optics, sensor technology, acoustics, in particular, in the manufacture of piezoelectric acoustic or sensor elements of membrane type, electromechanical transducers for vibration energy collection.

**Keywords:** piezoelectric MDS actuator, double electrode spiral, bimorph, membrane bending, initial load, compression ring, numerical modeling

## REFERENCES

1. *Tzou H.S.* Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua). Kluwer Academic Publishers. 1993. 320 p.
2. *Rubio W.M., Vatanabe S.L., Paulino G.H., Silva E.C.N.* Functionally graded piezoelectric material systems – a multiphysics perspective / In book Advanced computational materials modeling: from classical to multi-scale techniques. Ed. M. Vaz Jr., E.A. de Souza Neto, P.A. Munoz-Rojas. Weinheim, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2011. 414 p. P. 30–339; <https://doi.org/10.1002/9783527632312>
3. *Ebrahimi F.* Piezoelectric materials and devices – practice and applications. IntechOpen, 2013. 176 p. <https://doi.org/10.5772/45936>
4. *Uorden K.* Novye intellektual'nye materialy i konstrukcii. Svoystva i primeneniye [New intelligent materials and structures. Properties and application]. M.: Tekhnosfera, 2006. 224 p
5. *Berlinkur D., Kerran D., ZHaffe G.* P'ezoelektricheskie i p'ezomagnitnye materialy i ih primeneniye v preobrazovatelyah / Fizicheskaya akustika. T. 1: Metody i pribory ul'trazvukovykh issledovaniy. CHast' A [Piezoelectric and piezomagnetic materials and their application in transducers/Physical acoustics. V. 1: Ultrasound methods and instruments. Part A]. M.: Mir, 1966. P. 204–326.
6. *Han J.M., Adriaens T.A., Koning W.L., Banning R.* Modelling Piezoelectric Actuators // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2000. V. 5. № 4. P. 331–341; <https://doi.org/10.1109/3516.891044>
7. *Ivan I.A., Rakotondrabe M., Lutz P., Chaillet N.* Quasistatic displacement self-sensing method for cantilevered piezoelectric actuators // Review of Scientific Instruments. American Institute of Physics. 2009. V. 80. № 6. P. 065102–1/065102-8; <https://doi.org/10.1063/1.3142486>
8. *Sofronov A., Nikiforov V., Klimashin V.* Bimorfnye p'ezoelektricheskie elementy: aktyuatory i datchiki [Bimorphic piezoelectric elements: actors and sensors] // Komponenty i tekhnologii. 2003. V. 30. № 4. P. 46–48.
9. *Zhu D., Almusallam A., Beeby S.P., Tudor J., Harris N.R.* A bimorph multi-layer piezoelectric vibration energy harvester // PowerMEMS 2010 Proceedings. Belgium, Leuven. 2010. P. 1–4.
10. *Bansevičius R., Navickaitė S., Jūrėnas V., Mažeika D., Lučinskis R., Navickas J.* Investigation of novel design piezoelectric bending actuators // Journal of Vibroengineering. 2013. V. 15. № 2. P. 1064–1068.
11. *Vatul'yan A.O., Getman I.P., Lapickaya N.B.* Ob izgibe p'ezoelektricheskoy bimorfnoy plastiny [On bending of a piezoelectric bimorph plate] // Prikladnaya mekhanika. 1991. V. 27. № 10. P. 101–105.
12. *Vatul'yan A.O., Rynkova A.A.* Ob odnoj modeli izgibnykh kolebaniy p'ezoelektricheskikh bimorfov s razreznymi elektrodami i ee prilozheniyah [About one model of bending oscillations of piezoelectric bimorphs with split electrodes and its applications] // Izvestiya RAN. MTT. 2007. № 4. P. 114–122; <https://doi.org/10.3103/S0025654407040127>
13. Patent RF № 2099754. Jelstaun Korporatsiya N.V. Deformiruemoe zerkalo na osnove mnogoslojnoj aktivnoj bimorfnoy struktury [Deformable mirror based on a multilayer active bimorph structure]. Data zayavki: 17.10.1996. Data publikatsii: 20.12.1997. 7 p.; URL: [https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips\\_servlet](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet)
14. *Antonyak YU.T., Vassergiser M.E.* Raschet harakteristik izgibnogo p'ezoelektricheskogo preobrazovatelya membrannogo tipa [Calculation of the characteristics of a membrane-type bending piezoelectric transducer] // Akusticheskij zhurnal. 1982. V. 28. № 3. P. 294–302.
15. *Aronov B.S.* Elektromekhanicheskie preobrazovateli iz p'ezoelektricheskoy keramiki [Electromechanical converters from piezoelectric ceramics]. Leningrad: Energoatomizdat, 1990. 270 p.
16. *Williams C.B., Yates R.B.* Analysis of a microelectric generator for Microsystems // Sensors and Actuators A: Physical. 1996. V. 52. № 1–3. P. 8–11.



17. *Abbakumov K.E., Kononov R.S., Caplev V.M.* Eksperimental'noe issledovanie diskovogo bimorf-nogo p'ezoelektricheskogo generatora [Experimental study of a disk bimorph piezoelectric generator] // *Izvestiya SPbGETU "LETI"*. 2014. № 9. P. 59–63.
18. *Liu H., Zhong J., Lee C., Lee S.-W., Lin L.* A comprehensive review on piezoelectric energy harvesting technology: Materials, mechanisms, and applications // *Applied Physics Reviews*. 2018. V. 5. № 4. P. 041306;  
<https://doi.org/10.1063/1.5074184>
19. *Vasil'ev V.A., Verem'yov V.A., Tihonov A.I.* Vliyanie chastotnykh faktorov i parametrov na informativnyy signal p'ezoelektricheskikh datchikov davleniya [Influence of frequency factors and parameters on the informative signal of piezoelectric pressure sensors] // *Datchiki i sistemy*. 2003. № 8. P. 5–9.
20. *SHarapov V.M., Musienko M.P., SHarapova E.V.* P'ezoelektricheskie datchiki [Piezoelectric sensors]. Moscow: Tekhnosfera, 2006. 632 p.
21. *Mouhli M.* Analysis and shape modeling of thin piezoelectric actuators. Virginia Commonwealth University Publ., 2005. 100 p.;  
URL: <https://scholarscompass.vcu.edu/etd/1552>
22. *Panich A.E.* P'ezokeramicheskie aktyuatory [Piezoceramic actuators]. Rostov na Donu: izd-vo RGU, 2008. 159 p.
23. *Yamada H., Sasaki M., Nam Y.* Active vibration control of a micro-actuator for hard disk drives using self-sensing actuator // *J. Intel. Mat. Syst. Struct.* 2008. V. 19. № 1. P. 113–123;  
<https://doi.org/10.1177/1045389X07083693>
24. *El-Sayed A.M., Abo-Ismael A., El-Melegy M.T. et al.* Development of a micro-gripper using piezo-electric bimorphs // *Sensors*. 2013. V. 13. P. 5826–5840;  
<https://doi.org/10.3390/s130505826>
25. *Bardin V.A., Vasil'ev V.A., CHernov P.S.* Sovremennoe sostoyanie i razrabotki aktyuatorov nano- i mikrop'eremeshchenij [The current state and development of actuators of nano- and micro-movements] / *Trudy mezhdunarodnogo simpoziuma "Nadezhnost' i kachestvo"*. 2014. V. 2. P. 123–127.
26. *Bardin V.A., Vasil'ev V.A.* Aktyuatory nano- i mikrop'eremeshchenij dlya sistem upravleniya, kontrolya i bezopasnosti [Actuators of nano- and micro-movements for control, control and safety systems] // *Sovremennaya tekhnika i tekhnologii*. 2014. № 2. P. 1–5;  
URL: <https://technology.snauka.ru/2014/02/3057>
27. *Zhou J., Dong L., Yang W.* A Double-Acting Piezoelectric actuator for helicopter active rotor // *Actuators*. 2021. № 10 (247). P. 1–15;  
<https://doi.org/10.3390/act10100247>
28. *Abedian B., Cundari M.* Resonant frequency of a polyvinylidene flouride piezoelectric bimorph: the effect of surrounding fluid // *Proceedings Smart Structures and Materials*. 1993. V. 1916: Smart Materials. 23 July 1993;  
<https://doi.org/10.1117/12.148486>
29. Patent RF № 2723567. Lopast' vozdušnogo vinta s upravlyae moy geometriey profilya [Propeller blade with controlled profile geometry] / *Pan'kov A.A., Anoshkin A.N., Pisarev P.V.* Data zayavki: 18.11.2019. Data publikacii: 16.06.2020. 5 p.;  
URL: [https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips\\_servlet](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet)
30. Patent RU № 2636255. P'ezoaktyuator izgibnogo tipa [Bending type piezoactuator] / *Pan'kov A.A.* Data zayavki: 14.04.2016. Data publikacii: 21.11.2017. 8 p.;  
URL: [https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips\\_servlet](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet)
31. Patent US 2003/0056351 A1. Piezoelectric Macro-Fiber Composite Actuator and Method for Making Same / *Wilkie W.K.*, et al. Application Publ. March 27, 2003.
32. *Emad D, Fanni MA, Mohamed AM, Yoshida S.* Low-Computational-Cost Technique for Modeling Macro Fiber Composite Piezoelectric Actuators Using Finite Element Method // *Materials (Basel)*. 2021. № 14 (15). P. 4316.

33. *Park J.-S., Kim J.-H.* Analytical development of single crystal Macro Fiber Composite actuators for active twist rotor blades // *Smart Mater. Struct.* 2005. № 14. P. 745–753;  
<https://doi.org/10.1088/0964-1726/14/4/033>
34. Сертификат RU № 2018666421. Комп'ютерна програма “MFC PROPERTIES” (MFCP) [Computer program “MFC PROPERTIES” (MFCP)] / *Pisarev P.V., Anoshkin A.N., Pan'kov A.A.* opubl.: 17.12.2018. заявка № 2018663978 от 05.12.2018.
35. *Pan'kov A.A., Anoshkin A.N., Pisarev P.V., Bayandin S.R.* Using an electromechanical analogy to describe the damping characteristics of an MFC actuator // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021. V. 1093. P. 012023.
36. *Kashyap R., Lenka T. R., Baishya S.* A model for doubly clamped piezoelectric energy harvesters with segmented electrodes // *IEEE Electron device letters*. 2015. V. 36. № 12. P. 1369–1372.
37. Патент RU № 2778161. Способ увеличения чувствительности биморфа изгибаемого типа [Method for increasing piezosensitivity of bimorph of bending type] / *Pan'kov A.A.*, opubl.: 15.08.2022 Byul. № 23, заявка № 2022101875 от 27.01.2022 г.;  
URL: [https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips\\_servlet](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet)
38. Патент US № 5632841. Thin layer composite unimorph ferroelectric driver and sensor / *Hellbaum R.F., Bryant R.G., Fox R.L.* Application Date: 24.01.1997. Publication Date: 27.05.1997. 12 p.;  
URL: <https://patents.google.com/patent/US20010043027/fi>
39. Патент RU № 2793564. П'езоэлектрический биморф изгибаемого типа [Bending type piezoelectric bimorph] / *Pan'kov A.A.*, opubl.: 04.04.2023 Byul. № 10, заявка № 2022129727 от 16.11.2022 г.
40. Патент RU № 2803015. П'езоэлектрический актуатор [Piezoelectric actuator] / *Pan'kov A.A.*, opubl.: 05.09.2023 Byul. № 25, заявка № 2023109123 от 11.04.2023 г.;  
URL: [https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips\\_servlet](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet)
41. *Pobedrya B.E.* Механика композиционных материалов [Mechanics of composite materials]. Moscow: Izd-vo Mosk. universiteta, 1984. 336 p.
42. *Pan'kov A.A.* A piezoelectric material with inverse polarization and Maxwell-Wagner relaxation of layers in a variable electric field // *Mechanics of Composite Materials*. 2014. V. 49. P. 577–584;  
<https://doi.org/10.1007/s11029-013-9374-y>
43. *Shindo Y., Narita F., Hirama M.* Electromechanical field concentrations near the electrode tip in partially poled multilayer piezo-film actuators // *Smart Mater. Struct.* 2009. V. 18. P. 085020;  
<https://doi.org/10.1088/0964-1726/18/8/085020>
44. *Skaliukh A.S., Soloviev A.N., Oganessian P.A.* Modeling of piezoelectric elements with inhomogeneous polarization in ACELAN // *Ferroelectrics*. 2015. V. 483. P. 95–101;  
<https://doi.org/10.1080/00150193.2015.1059138>
45. *Gerasimenko T.E., Kurbatova N.V., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Oganessian P.A., Skaliukh A.S., Soloviev A.N.* Homogenization of piezoelectric composites with internal structure and inhomogeneous polarization in ACELAN-COMPOS finite element package / *Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials. Advanced Structured Materials*. 2019. V. 109. P. 113–131;  
[https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_8)
46. *Dong X.-J., Meng G.* Dynamic analysis of structures with piezoelectric actuators based on thermal analogy method // *Int. J. Adv. Manufact. Technol.* 2006. V. 27. P. 841–844;  
<https://doi.org/10.1007/s00170-004-2290-5>



УДК 539.3

## ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛАХ

© 2024 г. А. А. Маркин<sup>а, \*</sup>, М. Ю. Соколова<sup>а, \*\*</sup>

<sup>а</sup>Тулский государственный университет, Тула, Россия

<sup>\*</sup>*e-mail: markin-nikram@yandex.ru,*

<sup>\*\*</sup>*e-mail: socolova-m-u@yandex.ru*

Поступила в редакцию 03.04.2023 г.

После доработки 27.05.2023 г.

Принята к публикации 01.08.2023 г.

Рассмотрены два подхода к получению динамических уравнений распространения малых возмущений перемещений, основанные на использовании моделей гиперупругих и гипопругих материалов. Показано, что эти уравнения взаимосвязаны. Для случая плоской монохроматической волны получены выражения акустических тензоров. Проведен сравнительный анализ влияния предварительных деформаций на скорости распространения акустических волн в изотропных и анизотропных материалах. Выявлены эффекты, которые могут быть описаны только в рамках модели гипопругой среды.

*Ключевые слова:* акустические волны, конечные деформации, фазовые скорости распространения волн, константы упругости второго и третьего порядков

DOI: 10.31857/S1026351924020066, EDN: uwgcail

**1. Введение.** Одной из важных проблем современной механики является построение нелинейных моделей деформирования различных сред, их идентификация, верификация и создание на их основе математических моделей процессов и состояний. Идентификация моделей нелинейной упругости связана с определением большого числа констант, особенно если материал изначально обладает анизотропией свойств. Одним из возможных способов определения констант нелинейно упругого материала является измерение скоростей распространения акустических волн в предварительно деформированных телах из этих материалов. Этот способ основан на том, что фазовые скорости упругих волн зависят от величины предварительных напряжений (деформаций), что установлено в работах [1–3]. Интерес к вопросам о распространении акустических волн в настоящее время связан с исследованием свойств кристаллов и горных пород [4, 5], развитием методов неразрушающего контроля в технике [6] и ультразвуковой диагностики в медицине [7, 8], применением их в сейсмологии и сейсмоземлетрясениях [9].

В линейно упругом теле из изотропного материала без предварительных деформаций распространяются волна сжатия (продольная) и волна сдвига (поперечная), что является следствием уравнений движения, записанных в перемещениях [10]. В анизотропных материалах наряду с продольной (квази-продольной) волной распространяются две поперечные (квазипоперечные) волны. Распространение акустических волн в кристаллах в рамках линейной упругости подробно рассмотрено в монографии [11]. Вопросам распространения акустических волн в нелинейно упругих и упругопластических средах с предварительными напряжениями и конечными деформациями посвящены многочисленные работы отечественных и зарубежных исследователей [12–20].

В работах [3, 12–20] динамические уравнения распространения акустических волн получены из уравнений движения упругой среды, записанных в лагранжевой форме. В работах [12, 13, 17–20] последовательно рассматриваются как лагранжев, так и эйлеров подходы к записи уравнений движения. В работе [15] выведены уравнения движения в смешанной форме Лагранжа–Эйлера. В работах [12, 14–16, 20] задача о распространении акустических волн в телах с предварительными конечными деформациями рассматривается как задача о малых возмущениях однородного деформированного состояния. В большинстве работ [12, 14–18, 20] среды в естественном состоянии являются изотропными, а в работах [12, 13, 18–20] распространение акустических волн рассматривается в средах с начальной упругой анизотропией, в частности в ортотропных средах [13, 19, 20].

В большинстве из перечисленных работ используется модель гиперупругого материала, в которой постулируется существование упругого потенциала. В работах [16, 17, 19, 20] получены выражения для скоростей распространения продольных и поперечных волн в изотропных нелинейно упругих средах, которые могут быть использованы для определения констант, входящих в представление для упругого потенциала. В работах [15, 17–19] приведены результаты, отражающие влияние предварительных деформаций и напряжений на скорости распространения акустических волн, в частности проявление анизотропии акустических свойств начально изотропного материала [15, 17].

Наряду с моделями гиперупругих материалов широкое распространение получили гипопругие модели [21–23], в которых устанавливается связь между коротационными производными тензора напряжений Коши и энергетически сопряженными с этим тензором мерами деформаций. В данной работе рассмотрены два подхода к построению динамических уравнений с использованием гиперупругих и гипопругих моделей изотропных и анизотропных сред. Для двух вариантов динамических уравнений рассмотрен случай распространения плоской монохроматической волны, получены выражения акустических тензоров.

В качестве примера рассмотрены гиперупругие материалы с потенциалом, представленным разложением в ряд по степеням тензора деформаций [12, 20, 24, 25]. В работах [14, 24] показано, что при сохранении в разложении членов третьего порядка такая модель для изотропного материала совпадает с моделью Мурнагана. Упругие свойства изотропного материала определяются в этом случае двумя константами второго порядка и тремя константами

третьего порядка. Работа [25] посвящена анализу нелинейных эффектов, описываемых моделью гиперупругого анизотропного материала с симметрией свойств, присущей кристаллам кубической сингонии. По симметрии упругих свойств такой материал наиболее близок к изотропному материалу, но в его модели определяются три константы второго порядка и шесть констант третьего порядка [11]. Модель гиперупругого анизотропного материала с кубической симметрией свойств предложена в работе [26].

На основе полученных результатов проведен анализ влияния вида предварительных деформаций на скорости распространения акустических волн в изотропных и анизотропных материалах в рамках рассмотренных гиперупругих и гиперупругих моделей.

**2. Две формы уравнений распространения акустических волн.** Рассмотрим два возможных подхода к записи динамических уравнений распространения малых возмущений поля перемещений. Первый подход, традиционный [12–20], связан с использованием в определяющих соотношениях тензора деформаций Коши–Грина и энергетически сопряженного с ним второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгоффа. Во втором подходе предлагается в качестве меры конечных деформаций использовать неголономную меру деформаций  $\mathbf{K}$ , введенную в работе [23], и энергетически сопряженный с ней обобщенный тензор истинных напряжений. В обоих случаях процесс распространения акустической волны будем рассматривать как процесс слабых возмущений, накладываемых на конечные деформации.

Пусть в начальный момент времени  $t_0$  в среде отсутствуют деформации и напряжения, а к моменту времени  $t_1$  создано однородное напряженно-деформированное состояние, которому соответствует поле перемещений  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1)$  и напряжения  $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}(t_1)$ . Аффинор деформаций  $\Phi_1 = \Phi(t_1)$  связан с полем перемещений известным соотношением [10]:

$$\Phi_1 = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u}_1 \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичный тензор,  $\nabla^0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$  – набла-оператор начального состояния,

$\mathbf{x}$  – радиус-вектор точки среды в момент времени  $t_0$ .

Нагружение на интервале  $[t_0, t_1]$  полагается квазистатическим, а напряжения  $\mathbf{S}_1$  – уравновешенными, так что

$$\nabla^1 \cdot \mathbf{S}_1 \equiv \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_1 \equiv \mathbf{0} \quad (2.2)$$

где  $\nabla^1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}$  – набла-оператор деформированного состояния в момент времени  $t_1$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}_1$  – ускорение, точкой обозначено скалярное произведение.

В момент времени  $t_1$  в рассматриваемой среде возбуждается звуковая волна с полем перемещений  $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, \tau)$ ,  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \mathbf{u}_1$ ,  $\tau = t - t_1$ . Считаем, что вызываемые волной перемещения  $\mathbf{u}_2$  и их градиенты малы, а также что в любой момент времени  $t > t_1$  перемещения точек среды могут быть определены в виде суммы

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t_1) + \mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, \tau) \quad \forall t > t_1 \quad (2.3)$$

Аффино́р деформаций в момент времени  $t > t_1$  определяется выражением:

$$\Phi = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u} = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u}_1 + \nabla^0 \mathbf{u}_2$$

Учитывая, что перемещения  $\mathbf{u}_2$  определены в конфигурации  $t = t_1$ , а также связь между набла-операторами начального  $\nabla^0()$  и деформированного  $\nabla^1()$  состояний [10, 14] и соотношения (2.1), получим представление для аффино́ра деформаций в виде:

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_1 \cdot \nabla^1 \mathbf{u}_2 = \Phi_1 \cdot (\mathbf{E} + \nabla^1 \mathbf{u}_2) \quad (2.4)$$

Ввиду предположения о малости перемещений  $\mathbf{u}_2$  и градиентов  $\nabla^1 \mathbf{u}_2$  во всех дальнейших преобразованиях слагаемыми, содержащими  $\nabla^1 \mathbf{u}_2$  во второй и более высоких степенях, будем пренебрегать.

Запишем уравнения движения среды в эйлеровой форме для момента времени  $t_2 > t_1$  в виде:

$$\nabla^2 \cdot \mathbf{S}_2 = \rho_2 (\ddot{\mathbf{u}}_1 + \ddot{\mathbf{u}}_2)$$

или с учетом (2.2)

$$\nabla^2 \cdot \mathbf{S}_2 = \rho_2 \ddot{\mathbf{u}}_2 \quad (2.5)$$

В рамках первого подхода к получению динамических уравнений тензор истинных напряжений Коши  $\mathbf{S}_2$  требуется связать с тензором Пиолы–Кирхгоффа в соответствии с известными соотношениями  $\mathbf{S}_2 = J_2^{-1} \Phi_2^T \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \Phi_2$ , где  $J_2 = \det \Phi_2$  [10, 14]. Следуя работе [12], представим тензор  $\mathbf{T}_2$  разложением в ряд в окрестности состояния, соответствующего моменту времени  $t_1$ ,

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 + \left. \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_1} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1) + O(\|\nabla^1 \mathbf{u}_2\|), \quad (2.6)$$

где  $\left. \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_1} \equiv \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)$  – обобщенный тензор жесткости материала.

В соотношениях (2.6) тензор деформаций Коши–Грина  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  в соответствии с (2.1) определяется через поле перемещений  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1)$  соотношениями:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} (\Phi_1 \cdot \Phi_1^T - \mathbf{E}) = \frac{1}{2} (\nabla^0 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \nabla^0 + \nabla^0 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \nabla^0).$$

С учетом представлений (2.3) и (2.4) тензор деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_{12}, \quad (2.7)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2} \Phi_1 \cdot (\nabla^1 \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \nabla^1) \cdot \Phi_1^T$

На основании соотношений (2.6) и (2.7) второй тензор Пиолы–Кирхгоффа в момент времени  $t_2$  представляется выражением:

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_{12}, \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{T}_{12} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{12}$  содержит градиент перемещений  $\nabla^1 \mathbf{u}_2$  в первой степени.

Выражая тензор истинных напряжений  $\mathbf{S}_2$  через  $\mathbf{T}_2$  и подставляя вместе с (2.8) в уравнения движения (2.5), после преобразований получим динамические уравнения в виде:

$$\nabla^1 \cdot (\boldsymbol{\Phi}_1^T \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \boldsymbol{\Phi}_1) + \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \nabla^1 \nabla^1 \mathbf{u}_2 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_2, \quad (2.9)$$

где  $\boldsymbol{\Sigma}_1 = J_1 \mathbf{S}_1$  — обобщенный тензор истинных напряжений в момент времени  $t_1$ . Уравнения (2.9) совпадают по форме с уравнениями, рассматриваемыми в работах [12, 16–20].

Рассмотрим второй подход к построению динамических уравнений. Используемая в этом случае неголономная мера деформаций  $\mathbf{K}$  определяется в любой момент времени как решение дифференциального уравнения [10, 23]

$$\dot{\mathbf{K}}^\Delta = \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W},$$

в котором  $\mathbf{K}^\Delta$  — обобщенная яуманновская производная, тензор деформации скорости  $\mathbf{W}$  и тензор спина  $\boldsymbol{\Omega}$  определяются через левую меру искажения  $\mathbf{U}$  и ортогональный тензор  $\mathbf{R}$ , входящие в полярное разложение аффинора деформаций  $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}$ , соотношениями:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}.$$

В любой фиксированный момент времени компоненты меры  $\mathbf{K}$  не выражаются через поле перемещений конечными соотношениями, однако ее изменение на интервале  $[t_1, t_2]$  ввиду предположения о малости градиентов перемещений  $\nabla^1 \mathbf{u}_2$  определяется выражением:

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 = \frac{1}{2} (\nabla^1 \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \nabla^1). \quad (2.10)$$

Разложим обобщенный тензор напряжений  $\boldsymbol{\Sigma}_2$  в ряд в окрестности состояния, соответствующего моменту времени  $t_1$ :

$$\boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}_1 + \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{K}} \right|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}_1} \cdot (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1) + O(\|\nabla^1 \mathbf{u}_2\|), \quad (2.11)$$

где  $\partial \boldsymbol{\Sigma} / \partial \mathbf{K}|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}_1} \equiv \mathbf{C}(\mathbf{K}_1)$  — тензор четвертого ранга, имеющий смысл тензора жесткости.

Отметим, что при  $\mathbf{K}_1 \rightarrow 0, \boldsymbol{\varepsilon}_1 \rightarrow 0$  тензоры  $\mathbf{C}(\mathbf{K}_1)$  и  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)$  равны и совпадают с постоянным тензором упругости материала, входящим в обобщенный закон Гука. Запишем соотношения (2.11) в виде, аналогичном (2.8):

$$\boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{C}(\mathbf{K}_1) \cdot \mathbf{K}_{12}. \quad (2.12)$$

Учитывая, что тензор истинных напряжений Коши  $\mathbf{S}_2 = J_2^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_2$ , и подставляя (2.12) в уравнения движения (2.5), после преобразований получим динамические уравнения распространения малых возмущений перемещений в виде:

$$\nabla^1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{12} - \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \nabla^1 \nabla^1 \cdot \mathbf{u}_2 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_2. \quad (2.13)$$

Уравнения (2.13) могут быть получены непосредственно из (2.9), если учесть связь между тензорами  $\mathbf{T}_{12}$  и  $\boldsymbol{\Sigma}_{12}$ :  $\boldsymbol{\Phi}_1^T \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_{12} - \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \nabla^1 \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2 \nabla^1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1$ . Уравнения (2.9) и (2.13) являются линейаризованными в том смысле, что при их выводе учитывалась малость градиентов перемещений  $\nabla^1 \mathbf{u}_2$ .

Известным свойством неголономной меры деформаций  $\mathbf{K}$  является связь ее первого инварианта с относительным изменением объема. В соответствии с выражением (2.10)  $\nabla^1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{K}_{12} \cdot \mathbf{E}$ , и уравнения (2.13) могут быть записаны в виде:

$$\nabla^1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{12} - \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \nabla^1 (\mathbf{K}_{12} \cdot \mathbf{E}) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_2. \quad (2.14)$$

Второе слагаемое в (2.14) связано с чисто объемной составляющей малых возмущений поля перемещений.

**3. Динамические уравнения для гиперупругих и гипопругих материалов.** При построении моделей гиперупругих материалов постулируется существование упругого потенциала  $W$ , в качестве которого рассматривается удельная (отнесенная к единице начального объема) потенциальная энергия деформаций, дифференциал которой  $dW = \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}$ . В таких моделях напряжения определяются выражением:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.1)$$

В работах [16, 17, 19, 20, 24–26] используется разложение упругого потенциала в ряд по степеням тензора деформаций Коши–Грина:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2!} \mathbf{N} \cdot \dots \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{3!} \mathbf{L} \cdot \dots \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + \dots, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{L}$  – постоянные тензоры упругости четвертого и шестого рангов соответственно, компоненты которых симметричны по парам индексов:

$$N_{ijkl} = N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}$$

$$L_{ijklmn} = L_{jiklmn} = L_{ijlkmn} = L_{ijklnm} = L_{ijmnlk} = L_{kljlmn}.$$

Компоненты тензора  $\mathbf{N}$  связаны с константами упругости второго порядка, компоненты тензора  $\mathbf{L}$  – с константами упругости третьего порядка. В изотропном материале тензор  $\mathbf{N}$  имеет две независимые компоненты, а тензор  $\mathbf{L}$  – три. Для анизотропных материалов тензоры  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{L}$  имеют наименьшее число ненулевых компонент в базисе главных осей анизотропии [10, 25].

Для материала, в котором упругий потенциал определяется выражением (3.2), обобщенный тензор жесткости на основании соотношений (2.6) и (3.1) определяется выражением:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_1} = \mathbf{N} + \mathbf{L} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1,$$

а динамические уравнения (2.9) преобразуются к виду:

$$\boldsymbol{\Phi}_1 \cdot \left( \boldsymbol{\Phi}_1^T \cdot \nabla^1 \boldsymbol{\varepsilon}_{12} \cdot \boldsymbol{\Phi}_1^T \right) \cdot \cdot \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) \cdot \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \cdot \nabla^1 \nabla^1 \mathbf{u}_2 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_2. \quad (3.3)$$

При рассмотрении гипотупругих материалов полагают, что связь между коротационными производными тензоров  $\boldsymbol{\Sigma}$  и  $\mathbf{K}$  является квазилинейной [21–23]:

$$\boldsymbol{\Sigma}^\Delta = \mathbf{C}(\mathbf{K}) \cdot \cdot \mathbf{K}^\Delta.$$

Для гипотупругого материала определим удельную потенциальную энергию деформаций  $W(\mathbf{K})$ , дифференциал которой  $dW = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \cdot d\mathbf{K}$ , так что

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{K}}.$$

По аналогии с (3.2) разложим потенциал  $W(\mathbf{K})$  в степенной ряд:

$$W(\mathbf{K}) = \frac{1}{2!} \mathbf{N}_R \cdot \cdot \cdot \mathbf{K} \mathbf{K} + \frac{1}{3!} \mathbf{L}_R \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{K} \mathbf{K} \mathbf{K} + \dots, \quad (3.4)$$

где тензоры четвертого и шестого рангов  $\mathbf{N}_R$  и  $\mathbf{L}_R$  отнесены к вращающемуся базису  $\mathbf{n}_i$ .

В этом случае обобщенный тензор жесткости материала может быть представлен выражением:

$$\mathbf{C}(\mathbf{K}_1) = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{K}^2} \right|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}_1} = \mathbf{N}_R + \mathbf{L}_R \cdot \cdot \mathbf{K}_1,$$

а динамические уравнения (2.13) принимают вид:

$$\nabla^1 \mathbf{K}_{12} \cdot \cdot \mathbf{C}(\mathbf{K}_1) - \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \cdot \nabla^1 \nabla^1 \cdot \mathbf{u}_2 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_2. \quad (3.5)$$

В случае изотропного материала компоненты тензоров  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{L}$  в неподвижном базисе  $\mathbf{e}_i$  совпадают с компонентами тензоров  $\mathbf{N}_R$  и  $\mathbf{L}_R$  во вращающемся базисе  $\mathbf{n}_i$  (полярном). Пусть при этом деформации в момент времени  $t_1$  не сопровождаются жестким поворотом  $\mathbf{R}(t_1) \equiv \mathbf{E}$ , тогда неголономная мера  $\mathbf{K}_1 = \ln \mathbf{U}_1$ , т.е. совпадает с логарифмической мерой деформаций Генки. В этом случае потенциал (3.4) является потенциалом модели Генки–Мурнагана, предложенным в работе [24].

Для анизотропного материала совпадение компонент тензоров  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{N}_R$ ,  $\mathbf{L}_R$  возможно только при использовании гипотезы о вращении главных осей анизотропии материала в соответствии с законом  $\mathbf{a}_i(t) = \mathbf{a}_i^0 \cdot \mathbf{R}(t)$ , где  $\mathbf{a}_i^0$  – базис главных осей анизотропии материала в начальный момент времени  $t_0$ . Полагая, что в начальный момент базис главных осей анизотропии совпадает с декартовым базисом  $\mathbf{a}_i^0 = \mathbf{e}_i$ , получим, что в любой момент времени  $t > t_0$  базис главных осей анизотропии совпадает с полярным базисом  $\mathbf{a}_i(t) = \mathbf{n}_i(t)$ . Такое предположение о вращении главных осей анизотропии материала при деформации принималось в работах [10, 26].

**4. Уравнения распространения плоской монохроматической волны.** Рассмотрим в среде с предварительными деформациями распространение плоской монохроматической волны, для которой поле перемещений имеет вид:

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, \tau) = A \exp(i(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_1 + \omega\tau)), \quad (4.1)$$

где  $A$  – амплитуда,  $\mathbf{p}$  – вектор поляризации единичной длины,  $k$  – волновое число,  $\omega$  – частота,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор волновой нормали.

Получим из динамических уравнений (3.3) и (3.5) уравнения распространения акустических волн и выражения для акустического тензора [14]. При рассмотрении гиперупругих материалов для поля перемещений (4.1) запишем тензор деформаций:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2} ik \Phi_1 \cdot (\mathbf{n} \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \mathbf{n}) \cdot \Phi_1^T.$$

Первое слагаемое из уравнений (3.3) преобразуется к виду  $-k^2 \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{M}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) \cdot \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_2$ , где  $\mathbf{F}_1 = \Phi_1^T \cdot \Phi_1$  – мера конечных деформаций Фингера [10, 14],  $\mathbf{M}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) \cdot \mathbf{n}$  – обобщенный тензор Кристоффеля [11], определяемый как свойствами материала, так и направлением распространения волны.

На основании уравнений (3.3) уравнения распространения плоской монохроматической волны могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p}, \quad (4.2)$$

где  $c = \omega/k$  – фазовая скорость распространения волны.

Акустический тензор среды [14] с предварительными деформациями  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  определяется выражением:

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{M}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) \cdot \mathbf{F}_1 + \Sigma_1 \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} \mathbf{E}. \quad (4.3)$$

Из уравнений (4.2) следует, что значение  $\rho_0 c^2$  является собственным значением акустического тензора  $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)$ , а вектор поляризации – его собственным вектором.

При рассмотрении модели гипопругого материала по полю перемещений (4.1) определяется тензор деформаций:

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{1}{2} ik (\mathbf{n} \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \mathbf{n}),$$



а динамические уравнения (3.5) преобразуются к виду (4.2), однако акустический тензор и обобщенный тензор Кристоффеля зависят теперь от направления распространения волны и значения  $\mathbf{K}_1$  неголономной меры деформаций:

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{K}_1) = \mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{K}_1) - \Sigma_1 \cdot \mathbf{nn}, \quad \mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{K}_1) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{K}_1) \cdot \mathbf{n}. \quad (4.4)$$

Полученное выражение для акустического тензора показывает, что в некоторых случаях предварительного напряженно-деформированного состояния материала и при произвольном направлении вектора волновой нормали тензор  $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{K}_1)$  может оказаться несимметричным. В этом случае векторы поляризации продольной и поперечных волн оказываются неортогональными. В изотропном материале при рассмотрении главных волн [3, 14], для которых вектор волновой нормали направлен вдоль главных осей предварительных деформаций, акустический тензор всегда симметричен, а векторы поляризации продольной и поперечных волн ортогональны.

Расчеты скоростей распространения плоских волн через собственные значения акустического тензора (4.4) показали, что наличие слагаемого  $-\Sigma_1 \cdot \mathbf{nn}$  в выражении для акустического тензора в изотропных материалах влияет только на величину скорости распространения продольных волн, которые являются объемными волнами. В анизотропных материалах с кубической симметрией свойств это слагаемое оказывает влияние на величины как продольных, так и поперечных (сдвиговых) волн, распространяющихся под углом к осям анизотропии материала. Этот результат является следствием соотношений (2.14) и свойств неголономной меры деформаций  $\mathbf{K}$ , первый инвариант которой изменяется только при объемном деформировании.

**5. Влияние предварительных деформаций на скорости распространения акустических волн в изотропных и анизотропных материалах.** Полученные в разделах 3 и 4 динамические уравнения могут быть использованы для описания распространения акустических волн как в изотропных, так и в анизотропных материалах. Для этого требуется конкретизировать выражения для упругих потенциалов (3.2) и (3.4), а именно представить тензоры  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{N}_R$ ,  $\mathbf{L}_R$  разложениями по инвариантным для данного типа материала тензорным базисам. В работах [24–26] были получены такие разложения для изотропных материалов и анизотропных материалов с кубической симметрией свойств. Наиболее удобными оказываются разложения тензоров упругих свойств четвертого и шестого рангов по собственным базисным тензорам:

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} N_{\alpha} \mathbf{\Omega}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{L} = \sum_{\beta=1}^{\beta=k} n_{\beta} \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1 \dots m$ , – собственные тензоры для тензоров упругих свойств четвертого ранга,  $\mathbf{B}^{(\beta)}$ ,  $\beta = 1 \dots k$ , – собственные тензоры для тензоров упругих свойств шестого ранга. Число  $m$  равно количеству различных собственных значений тензора упругости четвертого ранга, а число  $k$  – количество различных собственных значений тензора шестого ранга. Собственные тензоры  $\mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$  и  $\mathbf{B}^{(\beta)}$  имеют наиболее простое представление в тензорных базисах

четвертого и шестого рангов, построенных на основе канонического базиса А.А. Ильюшина [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2), \\ \mathbf{I}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{I}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{I}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha), \\ \mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{6}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha), \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, 5$ , а векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — единичные ортогональные векторы, которые в изотропном материале могут быть выбраны произвольно, а в анизотропном материале направлены вдоль главных осей анизотропии материала в начальном состоянии.

Для изотропного материала разложения (5.1) имеют вид:

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} N_\alpha \mathbf{\Omega}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{L} = \sum_{\beta=1}^{\beta=3} n_\beta \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{\Omega}^{(1)} = \mathbf{I}^{00}$ ,  $\mathbf{\Omega}^{(2)} = \mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}$ ,  $\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000}$ ,  
 $\mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022} + \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}$

$$\mathbf{B}^{(3)} = \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{I}^{111} - \frac{6}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{122} + \mathbf{I}^{133}) + \frac{3}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155}) + \frac{3}{\sqrt{2}}(\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244} + 2\mathbf{I}^{345})$$

Константы  $N_1, N_2$  и  $n_1, n_2, n_3$  связаны с константами упругости изотропного материала соответственно второго и третьего порядков [24].

В модели гипопругого материала при построении тензоров  $\mathbf{N}_R$ ,  $\mathbf{L}_R$  векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  следует считать совпадающими с векторами полярного базиса, соотношения (5.2) при этом сохраняют свою форму.

В качестве примера анизотропного материала рассмотрим материал с симметрией упругих свойств, присущей кристаллам кубической сингонии [10, 11, 25]. Для таких анизотропных материалов разложения (5.1) имеют вид:

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} N_\alpha \mathbf{\Omega}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{L} = \sum_{\beta=1}^{\beta=6} n_\beta \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad (5.3)$$

$$\text{где } \mathbf{\Omega}^{(1)} = \mathbf{I}^{00}, \mathbf{\Omega}^{(2)} = \mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22}, \mathbf{\Omega}^{(3)} = \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}, \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000}, \\ \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022}, \mathbf{B}^{(3)} = \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}, \mathbf{B}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{111} - 3\mathbf{I}^{122}), \\ \mathbf{B}^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155} - 2\mathbf{I}^{133}), \mathbf{B}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{I}^{345}.$$

Константы  $N_1, N_2, N_3$  и  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$  связаны с константами упругости второго и третьего порядков анизотропного материала с кубической симметрией свойств [25, 26].

В модели гипопругого анизотропного материала разложения тензоров  $\mathbf{N}_R, \mathbf{L}_R$  по форме совпадают с (5.3), если считать, что векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  совпадают с векторами полярного базиса, в начальном состоянии направленными вдоль главных осей анизотропии.

Рассмотрим результаты решения задачи об определении скоростей распространения акустических волн в изотропном материале и анизотропном материале с кубической симметрией свойств при двух видах предварительных деформаций: всестороннем сжатии  $\mathbf{\Phi}_1 = \lambda \mathbf{E}$  и чистом формоизменении в главных осях  $\mathbf{\Phi}_1 = \lambda \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda^{-1} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$ . При таких предварительных деформациях главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами, а в случае анизотропных материалов и с главными осями анизотропии. В этом случае неголомная мера деформаций  $\mathbf{K}$  совпадает с тензором деформаций Генки. В моделях гиперупругих и гипопругих материалов скорость распространения волны в направлении вектора волновой нормали  $\mathbf{n}$  определяется через собственные значения акустического тензора (4.3) или (4.4) соответственно.

На рис. 1 и 2 приведены графики угловых зависимостей фазовых скоростей распространения акустических волн при двух видах предварительных

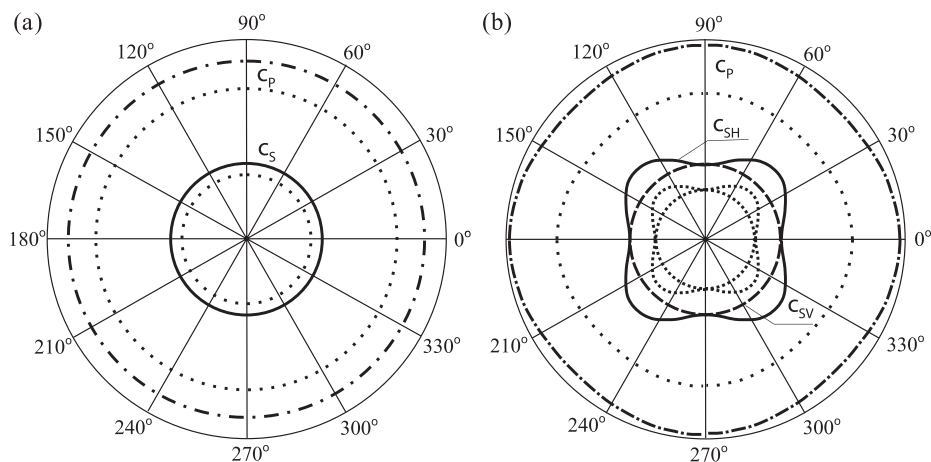
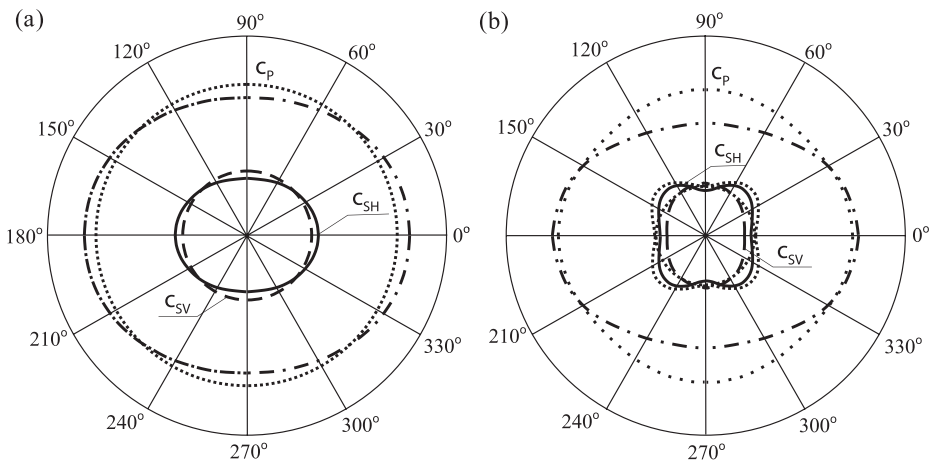


Рис. 1. Угловые зависимости фазовых скоростей распространения продольных  $c_p$  и поперечных  $c_{sh}, c_{sv}$  волн при предварительном всестороннем сжатии: а) изотропный материал; б) анизотропный материал с кубической симметрией свойств.

деформаций для случая, когда вектор волновой нормали лежит в плоскости векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , так что  $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$ . Для обоих случаев предварительных деформаций величина  $\lambda = 0.975$ . Для сравнения на рисунках точками приведены фазовые скорости в рассматриваемых материалах без предварительных деформаций при  $\lambda = 1$ . Приведенные результаты расчетов получены для модели гипопругого материала.

При чисто объемной предварительной деформации (рис. 1) как в изотропном, так и в анизотропном материале вид угловых зависимостей скоростей распространения продольных и поперечных волн по сравнению с недеформированным состоянием не изменяется. Происходит изменение только числовых значений этих скоростей. Как и в недеформированном состоянии после всестороннего сжатия в изотропном материале распространяется продольная волна и множество поперечных волн с векторами поляризации, расположенными в плоскости, перпендикулярной вектору волновой нормали. В анизотропном материале с кубической симметрией свойств наряду с продольной волной (Р-волна) распространяются две поперечные волны: одна с вектором поляризации, расположенным в плоскости векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  (SH-волна), вторая (SV-волна) с вектором поляризации  $\mathbf{e}_3$ . Названия волн, приведенные в скобках, используются в сейсмологии. Отметим, что скорость SV-волны не зависит от угла  $\varphi$ . Расчеты по моделям гиперупругого и гипопругого материалов (при одинаковых значениях констант) дают качественно одинаковые результаты, различия только в абсолютных значениях.

При чистом формоизменении изотропного материала предварительные деформации приводят к появлению анизотропии материала в отношении скоростей распространения акустических волн. Вместе с продольной волной распространяются две поперечные волны. В плоскости векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  у материала появляются акустические оси, ориентированные под углом  $45^\circ$  к главным



**Рис. 2.** Угловые зависимости фазовых скоростей распространения продольных  $c_p$  и поперечных  $c_{SH}$ ,  $c_{SV}$  волн при предварительном формоизменении: а) изотропный материал; б) анизотропный материал с кубической симметрией свойств.

осям деформаций, однако вид угловой зависимости фазовых скоростей в этой плоскости не соответствует известным для какой-либо кристаллографической системы [11]. Отметим, что модели гиперупругих и гипопругих изотропных материалов приводят к качественно отличным результатам при расчетах скоростей поперечных волн с вектором поляризации  $\mathbf{e}_3$ , в направлении которого деформации не происходят. При расчетах по соотношениям (4.3) скорости распространения SV-волн изменяются относительно начальной скорости распространения сдвиговой волны в материале без деформаций, а при расчетах по соотношениям (4.4) скорость распространения этой волны при любом направлении волновой нормали  $\mathbf{n}$  одинакова и равна начальному значению.

В анизотропном материале с кубической симметрией свойств предварительные деформации чистого формоизменения приводят к значительным изменениям картины угловой зависимости скоростей распространения продольных и поперечных волн. В частности, если в таком материале при отсутствии деформаций в плоскости векторов  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  расположены две акустические оси, направленные вдоль векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , то после деформаций эти оси поворачиваются, составляя угол  $\pm 75^\circ$  к вектору  $\mathbf{e}_1$ . В анизотропном материале обе рассмотренные модели прогнозируют изменение скорости поперечной волны с вектором поляризации  $\mathbf{e}_3$ .

**6. Заключение.** В статье рассмотрены два подхода к построению динамических уравнений распространения акустических волн в материалах с предварительными конечными деформациями. Первый (традиционный) подход предполагает использование модели гиперупругого материала, второй (альтернативный) подход использует модель гипопругого материала. Для обоих подходов получены динамические уравнения в общем виде и их конкретизации при прохождении плоской монохроматической волны. Представления акустических тензоров (4.3) и (4.4) различны как по форме, так и тем, что входящие в них обобщенные тензоры Кристоффеля  $\mathbf{M}$  зависят от направления вектора волновой нормали, в модели гиперупругого материала — от значений тензора деформаций Коши—Грина  $\boldsymbol{\epsilon}_1$ , а в модели гипопругого материала — от значений неголономной меры деформаций  $\mathbf{K}_1$ . Свойства меры деформаций  $\mathbf{K}$ , связанные с тем, что ее первый инвариант не меняется при формоизменении, а девиатор не зависит от объемных деформаций, позволяют получить более достоверные результаты при расчетах фазовых скоростей в изотропном материале с предварительными деформациями.

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biot M.A.* The influence of initial stress on elastic waves // *J. Appl. Phys.* 1940. V. 11. № 8. P. 522–530.  
<https://doi.org/10.1063/1.1712807>
2. *Toupin R. A., Bernstein B.* Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect // *J. Acoust. Soc. Am.* 1961. V. 33. № 2. P. 216–225.

- <https://doi.org/10.1121/1.1908623>
3. *Truesdell C.* General and exact theory of waves in finite elastic strain // *Arch. Ratio. Mech. Anal.* 1961. V. 8. № 1. P. 105–138.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-88691-1\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-88691-1_5)
  4. *Kube C.N.* Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 141. № 6. P. 4756–4767.  
<https://doi.org/10.1121/1.4986747>
  5. *Кулиев Г.Г., Агаев Х.Б., Гасанова Г.Г.* Определение модулей упругости третьего порядка для осадочных пород на основе скважинных геофизических данных // *Физика Земли*. 2016. № 6. С. 54–60.  
<https://doi.org/10.7868/S0002333716050069>
  6. *Беляев А.К., Полянский В.А., Третьяков Д.А.* Оценка механических напряжений, пластических деформаций и поврежденности посредством акустической анизотропии // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2020. № 4. С. 130–151.  
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.12>
  7. *Jiang Y., Li G., Qian L.-X., Liang S., Destrade M., Cao Y.* Measuring the linear and nonlinear elastic properties of brain tissue with shear waves and inverse analysis // *Biomech. Model. Mechanobiol.* 2015. V. 14. № 5. P. 1119–1128.  
<https://doi.org/10.1007/s10237-015-0658-0>
  8. *Zaitsev V.Y.* Nonlinear acoustics in studies of structural features of materials // *MRS Bulletin*. 2019. V. 44. P. 350–360.  
<https://doi.org/10.1557/mrs.2019.109>
  9. *Стозний П.В., Хохлов Н.И., Петров И.Б.* Моделирование волновых процессов в геологических трещиноватых средах с использованием модели Шонберга // *ПММ*. 2020. Т. 84. № 3. С. 375–386.  
<https://doi.org/10.31857/S0032823520030091>
  10. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
  11. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 640 с.
  12. *Haupt P., Pao Y.H., Hutter K.* Theory of incremental motion in a body with initial elasto-plastic deformation // *J. Elasticity*. 1992. V. 28. P. 193–221.  
<https://doi.org/10.1007/BF00132211>
  13. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2 т. Киев: Наукова Думка, 1986.
  14. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
  15. *Роменский Е.И., Лысь Е.В., Чеверда В.А., Энов М.И.* Динамика деформирования упругой среды с начальными напряжениями // *ПМТФ*. 2017. Т. 58. № 5. С. 178–189.  
<https://doi.org/10.15372/PMTF20170518>
  16. *Белянкова Т.И., Калинчук В.В., Шейдаков Д.Н.* Модули высших порядков в уравнениях динамики преднапряженного упругого тела // *Изв. РАН. МТТ*. 2019. № 3. С. 3–15.  
<https://doi.org/10.1134/S0572329919030036>
  17. *Pau A., Vestroni F.* The role of material and geometric nonlinearities in acoustoelasticity // *Wave Motion*. 2019. V. 86. P. 79–90.  
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.12.005>
  18. *Destrade M., Ogden R.W.* On stress-dependent elastic moduli and wave speeds // *J. Appl. Math.* 2013. V. 78. № 5. P. 965–997.  
<https://doi.org/10.1093/imatat/hxs003>
  19. *Yang H., Fu Li-Yun, Fu Bo-Ye, Müller T.M.* Acoustoelastic FD simulation of elastic wave propagation in prestressed media // *Front. Earth Sci.* 2022. V. 10.  
<https://doi.org/10.3389/feart.2022.886920>

20. Pao Y.H., Gamer U. Acoustoelastic waves in orthotropic media // J. Acoust. Soc. Am. 1985. V. 77. № 3. P. 806–812.  
<https://doi.org/10.1121/1.392384>
21. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 231 с.
22. Бровко Г.Л. Класс моделей упругих тел при конечных деформациях и устойчивость равновесия // Устойчивость в механике деформируемых тел / Материалы II Всесоюзного симпозиума. Калинин: изд-во КГУ, 1986. С. 111–121.
23. Маркин А.А., Толоконников Л.А. Меры процессов конечного деформирования // Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки. 1987. № 2. С. 49–53.
24. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Вариант соотношений нелинейной упругости // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 68–75.  
<https://doi.org/10.1134/S0572329919060096>
25. Соколова М.Ю., Христич Д.В. Конечные деформации нелинейно упругих анизотропных материалов // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2021. № 70. С. 103–116.  
<https://doi.org/10.17223/19988621/70/9>
26. Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христич Д.В. Нелинейная упругость кубических кристаллов // Упругость и неупругость / Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 2021. С. 100–110.

UDC 539.3

## DYNAMIC EQUATIONS OF ACOUSTIC WAVE PROPAGATION IN PRE-DEFORMED MATERIALS

© 2024 г.    А. А. Маркин<sup>а, \*</sup>, М. Ю. Соколова<sup>а, \*\*</sup>

<sup>а</sup> Tula State University, Tula, Russia

\*e-mail: markin-nikram@yandex.ru;

\*\*e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

**Abstract** – Two approaches to obtaining dynamic equations for the propagation of displacement small disturbances are considered. These approaches are based on the use of models of hyperelastic and hypoelastic materials. We showed that these equations are interrelated. For the case of a plane monochromatic wave, expressions of acoustic tensors are obtained.

A comparative analysis of the effect of preliminary deformations on the propagation velocity of acoustic waves in isotropic and anisotropic materials is carried out. In the model of a hypoelastic material, the acoustic tensor depends on a nonholonomic measure of finite deformations. A nonholonomic measure of deformations is defined in such a way that its first invariant does not change during shape change, and the deviator does not depend on volumetric deformations. In this regard, the use of a hypoelastic material model allows us to obtain more reliable results when calculating phase velocities in an isotropic material with preliminary deformation.

*Keywords:* acoustic waves, finite deformations, phase velocities of wave propagation, second and third orders elastic constants

## REFERENCES

1. *Biot M.A.* The influence of initial stress on elastic waves // *J. Appl. Phys.* 1940. V. 11. № 8. P. 522–530;  
<https://doi.org/10.1063/1.1712807>
2. *Toupin R.A., Bernstein B.* Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect // *J. Acoust. Soc. Am.* 1961. V. 33. № 2. P. 216–225;  
<https://doi.org/10.1121/1.1908623>
3. *Truesdell C.* General and exact theory of waves in finite elastic strain // *Arch. Ratio. Mech. Anal.* 1961. V. 8. № 1. P. 263–296;  
[https://doi.org/10.1007/978-3-642-88691-1\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-88691-1_5)
4. *Kube C.N.* Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 141. № 6. P. 4756–4767;  
<https://doi.org/10.1121/1.4986747>
5. *Guliyev H., Aghayev Kh.B., Hasanova G.* Determination of third-order elastic modulus for sedimentary rocks based on borehole geophysical data // *Izvestiya Physics of the Solid Earth*. 2016. № 6. P. 54–60;  
<https://doi.org/10.7868/S0002333716050069>
6. *Belyaev A.K., Polyanskiy V.A., Tretyakov D.A.* Estimating of mechanical stresses, plastic deformations and damage by means of acoustic anisotropy. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020. № 4. P. 130–151;  
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.12>
7. *Jiang Y., Li G., Qian L.-X. et al.* Measuring the linear and nonlinear elastic properties of brain tissue with shear waves and inverse analysis // *Biomech. Model. Mechanobiol.* 2015. V. 14. № 5. P. 1119–1128;  
<https://doi.org/10.1007/s10237-015-0658-0>
8. *Zaitsev V.Y.* Nonlinear acoustics in studies of structural features of materials // *MRS Bulletin*. 2019. V. 44. P. 350–360;  
<https://doi.org/10.1557/mrs.2019.109>
9. *Stognii P.V., Khokhlov N.I., Petrova I.B.* Modelling of Wave Processes in Fractured Geological Media Using Shoenberg Model // *J. Appl. Math. Mech.* 2020. V. 84. № 3. P. 375–386;  
<https://doi.org/10.31857/S0032823520030091>
10. *Markin A.A., Sokolova M.Yu.* Thermomechanics of Elastoplastic Deformation. 2015. Cambridge: Cambridge International Science Publishing.
11. *Sirotnin Yu.I., Shaskolskaya M.P.* Fundamentals of crystal physics. 1979. M.: Nauka.
12. *Haupt P., Pao YH., Hutter K.* Theory of incremental motion in a body with initial elasto-plastic deformation // *J. Elasticity*. 1992. V. 28. P. 193–221;  
<https://doi.org/10.1007/BF00132211>
13. *Guz A.N.* Elastic waves in bodies with initial stresses. 1986. Kiev: Naukova Dumka.
14. *Lurie A.I.* Non-linear Theory of Elasticity. 2012. North Holland.
15. *Romenskii E.I., Lys' E.B., Cheverda V.A., Epov M.I.* Dynamics of deformation of an elastic medium with initial stresses // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. V. 58. № 5. P. 914–923;  
<https://doi.org/10.15372/PMTF20170518>



16. *Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Sheidakov D.N.* Higher-Order Modules in the Equations of Dynamics of a Prestressed Elastic Solid // *Mech. Solids*. 2019. V. 54, P. 491–501; <https://doi.org/10.3103/S0025654419040010>
17. *Pau A., Vestroni F.* The role of material and geometric nonlinearities in acoustoelasticity // *Wave Motion*. 2019. V. 86. P. 79–90; <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.12.005>
18. *Destrade M., Ogden R.W.* On stress-dependent elastic moduli and wave speeds // *J. Appl. Math.* 2013. V. 78. № 5. P. 965–997; <https://doi.org/10.1093/imamat/hxs003>
19. *Yang H., Fu Li-Yun, Fu Bo-Ye, Müller T.M.* Acoustoelastic FD simulation of elastic wave propagation in prestressed media // *Front. Earth Sci.* 2022. V. 10; <https://doi.org/10.3389/feart.2022.886920>
20. *Pao YH., Gamer U.* Acoustoelastic waves in orthotropic media // *J. Acoust. Soc. Am.* 1985. V. 77. P. 806–812; <https://doi.org/10.1121/1.392384>
21. *Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I.* Large elastoplastic deformations: theory, algorithms, applications. 1986. M.: Nauka.
22. *Brovko G.L.* A class of models of elastic bodies under finite deformations and stability of equilibrium // *Stability in the mechanics of a deformable solid / Materials of the II All-Union Symposium*. Kalinin. 1986. P. 111–121.
23. *Markin A.A., Tolokonnikov L.A.* Measures of the final deformation processes // *Proceedings of the North Caucasian Scientific Center of Higher Education. Natural sciences*. 1987. № 2. P. 49–53.
24. *Markin A.A., Sokolova M.Y.* Variant of nonlinear elasticity relations // *Mechanics of Solids*. 2019. V. 54. № 8. P. 1182–1188; <https://doi.org/10.3103/S0025654419080089>
25. *Sokolova M.Yu., Khristich D.V.* Finite strains of nonlinear elastic anisotropic materials. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 2021. № 70. P. 103–116; <https://doi.org/10.17223/19988621/70/9>
26. *Markin A.A., Sokolova M.Y., Khristich D.V.* Nonlinear elasticity of cubic crystals // *Elasticity and Anelasticity / Materials of the International Scientific Symposium on the problems of mechanics of deformable bodies, dedicated to the 110th anniversary of the birth of A.A. Ilyushin*. Moscow, 2021. P. 100–110.

УДК 629.33

## РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА С НАКЛОНЕННОЙ ОСЬЮ ВРАЩЕНИЯ

© 2024 г. Е. В. Балакина<sup>a</sup>, \*, М. С. Кочетов<sup>a</sup>, \*\*

<sup>a</sup> *Волгоградский государственный технический университет,  
Волгоград, Россия*

*\*e-mail: fahrgestell2011@yandex.ru,*

*\*\*e-mail: kochetov\_m.s.1995@mail.ru*

Поступила в редакцию 23.05.2023 г.

После доработки 03.10.2023 г.

Принята к публикации 10.10.2023 г.

Исследование является актуальным для проектного моделирования траекторного движения транспортных средств на деформируемых опорных колесах. Цель исследования: получение теоретической зависимости для расчета эффективной нормальной жесткости деформируемого колеса с наклоненной осью вращения. Установлены математические взаимосвязи этой жесткости и угла наклона оси вращения колеса. Определено, что эффективная нормальная жесткость изменяется в  $K_{\alpha z}$  раз при указанном наклоне. Получена теоретическая зависимость для расчета корректирующего коэффициента  $K_{\alpha z}$ . Зависимость является функцией  $K_{\alpha z}$  от конструктивных параметров колеса и угла наклона оси вращения  $\alpha$ . Зависимость корректна при углах  $\alpha \leq 10^\circ$ . При допустимых по условиям износа колеса углах наклона (до  $5^\circ$ ) эффективная нормальная жесткость существенно снижается, например у объекта исследования до 25%. Справедливость теоретической зависимости подтверждена лабораторными экспериментами на специально созданной установке для измерения параметров упругих свойств деформируемого колеса при разных положениях его оси вращения. На основании обработки экспериментальных данных определена погрешность расчета  $K_{\alpha z}$  по полученной теоретической зависимости, которая не превышает 6%.

*Ключевые слова:* деформируемое колесо, наклон оси вращения, эффективная нормальная жесткость, методика расчета

**DOI:** 10.31857/S1026351924020077, **EDN:** uwemgms

**1. Введение.** Деформируемыми опорными колесами снабжаются большинство наземных транспортных средств (ТС). Их основными свойствами, влияющими на показатели движения ТС по заданной траектории, являются упругие и сцепные. Упругие свойства колеса по разным координатам определяют его соответствующие деформации под нагрузкой и параметры таких

явлений в контакте с опорной плоскостью как угловой увод и угловые колебания управляемых колес. Эти явления всегда присутствуют у деформируемых колес при действии на ТС внешних сил. То есть упругие свойства таких колес существенно влияют на устойчивость и управляемость ТС. С этими свойствами также связаны виброзащищенность ТС и гистерезисные потери на качение.

Упругие свойства деформируемых колес ТС характеризуются разными коэффициентами жесткости (жесткостями): нормальной (радиальной), боковой, крутильной, угловой. Из приведенных характеристик жесткостей деформируемого колеса основной является нормальная (радиальная) жесткость, связанная с нормальной (радиальной) деформацией колеса. Это один из главных влияющих входных параметров при проектном моделировании траекторного движения ТС [1, 2]. Использование его достоверной величины определяет корректность моделирования движения ТС.

**2. Постановка задачи.** Нормальную (радиальную) жесткость колеса можно определять разными способами: экспериментальным путем, расчетным путем по универсальным теоретическим или расчетно-экспериментальным зависимостям [3–6]. Такие зависимости, например, приведены в табл. 1 (получены с участием авторов).

**Таблица 1.** Зависимости для расчета нормальной (радиальной) жесткости деформируемого колеса с горизонтальной осью вращения\*

| Тип колес             | Зависимость                          | Средняя относительная погрешность, % |
|-----------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| Легковые радиальные   | $C_{tz} = 1.6221 \cdot P_z^{0.544}$  | 7                                    |
| Легковые диагональные | $C_{tz} = 0.3311 \cdot P_z^{0.753}$  | 14.2                                 |
| Все легковые          | $C_{tz} = 1.0739 \cdot P_z^{0.60}$   | 11.1                                 |
| Грузовые радиальные   | $C_{tz} = 0.3240 \cdot P_z^{0.773}$  | 6.4                                  |
| Грузовые диагональные | $C_{tz} = 6.1506 \cdot P_z^{0.473}$  | 6.3                                  |
| Все грузовые          | $C_{tz} = 0.9805 \cdot P_z^{0.661}$  | 7.2                                  |
| Все                   | $C_{tz} = 0.1244 \cdot P_z^{0.8616}$ | 12.0                                 |

\* — в табл. 1  $C_{tz}$  — нормальная (радиальная) жесткость деформируемого колеса с горизонтальной осью вращения в Н/мм;  $P_z$  — нормальная нагрузка колеса в Н.

Однако они справедливы при горизонтальном расположении оси вращения колеса. При этом в последние годы выяснилось, что установка опорных колес ТС с наклоном осей вращения улучшает его устойчивость движения [7–10] и управляемость [11] и не влияет на сопротивление движению [12]. Это связано с изменением жесткости колес. Получено приближенное частное экспериментальное выражение [13] для коррекции нормальной жесткости модели деформируемого колеса при наклоне его оси вращения. Также известно, что нет универсальных методик для расчета нормальной жесткости деформируемого колеса с наклоненной осью вращения. Разработка такой методики является актуальной для совершенствования моделирования траекторного движения ТС.

Цель исследования: получение теоретической зависимости для расчета эффективной нормальной жесткости деформируемого колеса с наклоненной осью вращения.

**3. Методы и подходы.** Для достижения цели исследования применялись методы и подходы, включающие в себя как теоретические, так и экспериментальные исследования.

**3.1. Теоретические исследования.** Колесо ТС не является сплошным однородным телом. Оно представляет собой комбинацию жестко соединенных тел из материалов с разными физико-механическими свойствами. Принято допущение, что его составляющие части подчиняются закону Гука. В соответствии с законом Гука, деформация, возникающая в упругом теле (шине ТС), прямо пропорциональна силе упругости, возникающей в этом теле. На рис. 1 приведена схема деформируемого колеса с горизонтальной осью вращения.

Общепринятое понятие нормальной (радиальной) жесткости как первой производной от нормальной нагрузки колеса по его нормальному прогибу

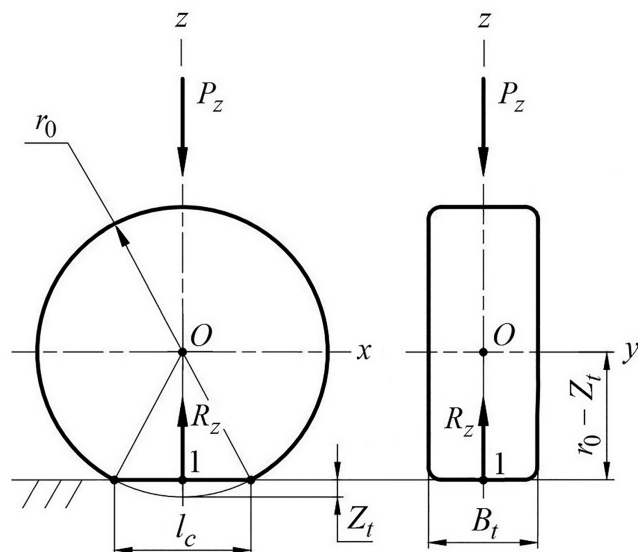


Рис. 1. Схема деформируемого колеса с горизонтальной осью вращения.

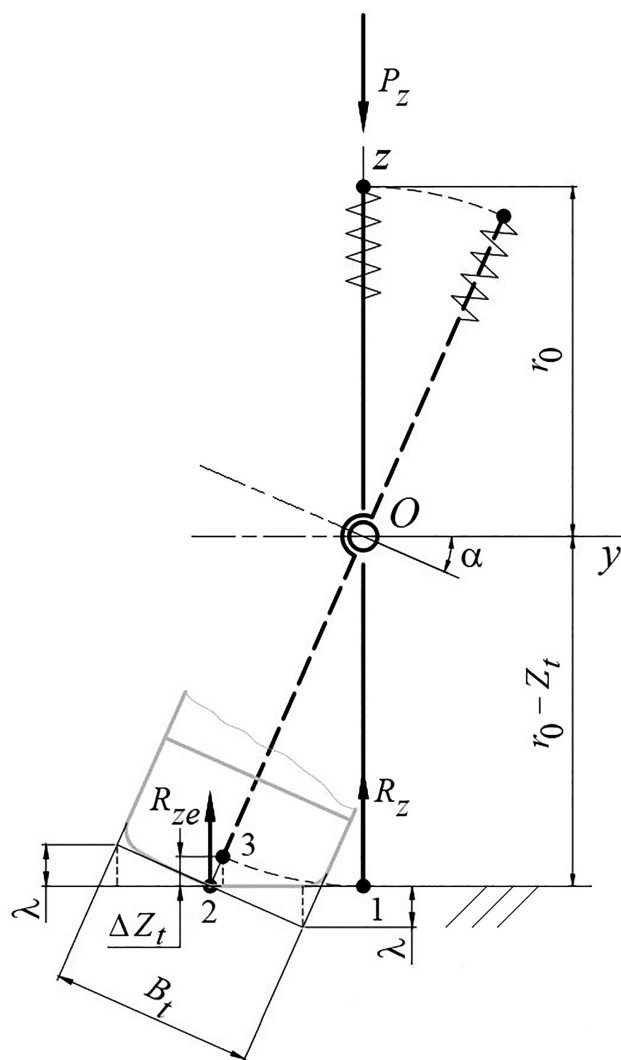


Рис. 2. Расчетная схема деформируемого колеса с наклоненной осью вращения.

относится к вертикальному расположению главной плоскости вращения колеса, т.е. к горизонтальному расположению его оси вращения. В этом случае нормальная жесткость, связанная с вертикальными деформациями, и радиальная жесткость, связанная с радиальными деформациями, совпадают. При наклоне оси вращения колеса в поперечной вертикальной плоскости на угол  $\alpha$ , его радиальная жесткость (в плоскости вращения) не изменяется, но для практических расчетов важна именно нормальная жесткость (по нормали к опорной плоскости), т.к. колеса ТС нагружаются вертикально. Нормальная

жесткость при появлении угла  $\alpha$  изменяется. Чтобы отличать эту жесткость от нормальной жесткости колеса с горизонтальной осью вращения, будем называть ее эффективной нормальной жесткостью.

Для достижения цели исследования необходимо установить математические взаимосвязи эффективной нормальной жесткости деформируемого колеса и угла наклона  $\alpha$  его оси вращения.

На рис. 2 показана предлагаемая расчетная схема для определения сил и деформаций колеса с наклоненной осью вращения.

На рис. 1 и 2 приняты следующие обозначения:

$x, y, z$  — оси координат;

$(\cdot)O$  — центр колеса;

$\alpha$  — угол наклона оси вращения колеса;

$r_0$  — свободный радиус колеса (половина диаметра колеса в свободном состоянии);

$B_t$  — ширина колеса;

$l_c$  — длина пятна контакта;

$Z_t$  — нормальная (радиальная) деформация колеса при горизонтальном расположении оси вращения;

$r_0 - Z_t$  — расстояние от центра, деформированного под нагрузкой колеса, до опорной плоскости;

$P_z$  — нормальная нагрузка колеса;

$R_z$  — нормальная реакция опорной поверхности колеса с горизонтальной осью вращения;

$R_{ze}$  — эффективная нормальная реакция опорной поверхности колеса с наклоненной осью вращения;

$\Delta Z_t$  — изменение деформации  $Z_t$  при наклоне оси вращения колеса;

$\lambda$  — расстояние;

$(\cdot)1$  — центр пятна контакта колеса с горизонтальной осью вращения;

$(\cdot)2$  — центр пятна контакта колеса с наклоненной осью вращения;

$(\cdot)3$  — дополнительная точка.

Светлыми линиями на рис. 2 показан контур колеса с учетом его ширины.

Введено понятие относительной радиальной деформации шины при  $\alpha = 0$ :

$$n = \frac{Z_t}{r_0} \quad (3.1)$$

Введено также понятие коэффициента изменения нормальной жесткости:

$$K_{\alpha z} = \frac{C_{tze}}{C_{tz}}, \quad (3.2)$$

где  $C_{tz}$  — нормальная (радиальная) жесткость деформируемого колеса с горизонтальной осью вращения;  $C_{tze}$  — эффективная нормальная жесткость деформируемого колеса с наклоненной осью вращения.

Для получения искомой зависимости в соответствии с целью исследования требуется найти такое универсальное выражение для расчета безразмерного коэффициента  $K_{\alpha z}$ , которое справедливо для любого деформируемого колеса.

Тогда в соответствии с (3.2) эффективную нормальную жесткость колеса с наклоненной осью вращения можно будет рассчитать по формуле (3.3).

$$C_{tze} = K_{\alpha z} \cdot C_{tz}, \quad (3.3)$$

Нормальная жесткость колеса с горизонтальной осью вращения:

$$C_{tz} \approx \frac{P_z}{Z_t}. \quad (3.4)$$

Эффективную нормальную жесткость колеса с наклоненной осью вращения с учетом его ширины можно определить из схемы рис. 2 следующим образом:

$$C_{tze} \approx \frac{R_{ze}}{Z_t - \Delta Z_t + \lambda} \quad (3.5)$$

$$\lambda = \frac{B_t}{2} |\sin \alpha|; \quad R_{ze} = P_z \cos^2 \alpha$$

$$\Delta Z_t = |23| \cos \alpha$$

$$|23| = |O2| - |O3|; \quad |O3| = |O1| = r_0 - Z_t; \quad |O2| = (r_0 - Z_t) / \cos \alpha$$

$$\Delta Z_t = \left[ \frac{r_0 - Z_t}{\cos \alpha} - (r_0 - Z_t) \right] \cdot \cos \alpha = (r_0 - Z_t)(1 - \cos \alpha).$$

С учетом этих формул выражение (3.5) примет вид:

$$C_{tze} = \frac{P_z \cdot \cos^2 \alpha}{Z_t - [(r_0 - Z_t)(1 - \cos \alpha)] + (B_t/2) \cdot |\sin \alpha|}.$$

Тогда коэффициент изменения нормальной жесткости из (3.2), (3.4) и (3.5):

$$K_{\alpha z} = \frac{C_{tze}}{C_{tz}} = \frac{Z_t \cdot \cos^2 \alpha}{Z_t - [(r_0 - Z_t)(1 - \cos \alpha)] + (B_t/2) \cdot |\sin \alpha|}$$

С учетом формулы (3.1)

$$K_{\alpha z} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - [(1/n) - 1] \cdot (1 - \cos \alpha) + (B_t/(2 \cdot n \cdot r_0)) \cdot |\sin \alpha|} \quad (3.6)$$

При  $\alpha = 0$   $K_{\alpha z} = 1$ .

В формуле (3.6) числитель и знаменатель — безразмерные величины. Коэффициент  $K_{\alpha z}$  также безразмерен.

Таким образом, получена искомая теоретическая зависимость (3.6). Если есть деформируемое колесо с горизонтальной осью вращения, с нормальной (радиальной) жесткостью  $C_{tz}$ , со свободным радиусом  $r_0$  и шириной  $B_t$ , то под нагрузкой  $P_z$  оно будет иметь нормальную (вертикальную, радиальную) деформацию  $Z_t$ . Деление  $Z_t$  на свободный радиус  $r_0$  дает безразмерную величину  $n$ . Если ось вращения такого колеса наклонить на угол  $\alpha$ , то его эффективная нормальная жесткость изменится в  $K_{\alpha z}$  раз в соответствии с формулой (3.6). При этом направление угла наклона не влияет на величину изменения эффективной нормальной жесткости колеса.

3.2. *Экспериментальные исследования.* Для экспериментальной проверки полученной формулы (3.6) и определения ее погрешности создана экспериментальная

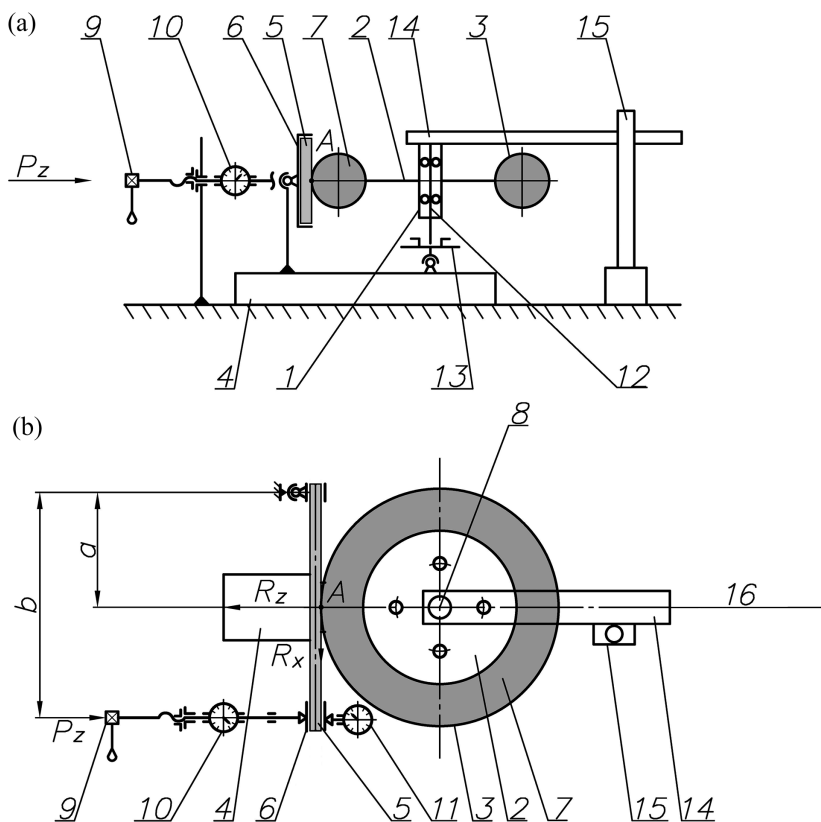


Рис. 3. Кинематическая схема экспериментальной установки:

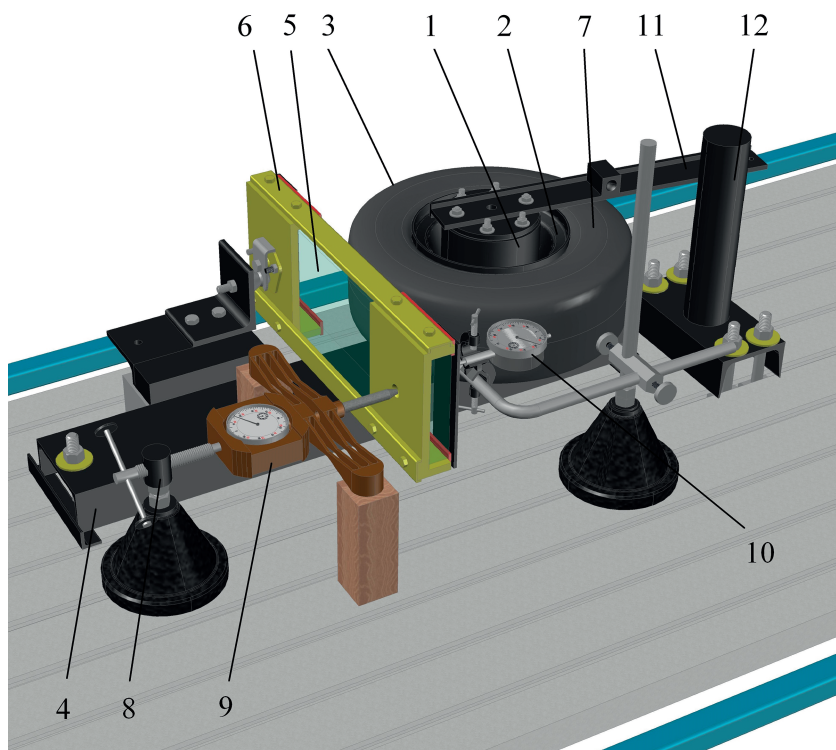
- 1 – ступица; 2 – обод колеса; 3 – колесо; 4 – неподвижная рама;
- 5 – измерительная опорная площадка; 6 – направляющая; 7 – шина;
- 8 – геометрический центр колеса; 9 – устройство нормального нагружения;
- 10 – динамометр нормальной нагрузки;
- 11 – индикатор нормальной деформации колеса; 12 – ось колеса;
- 13 – вертикальная шарнирно-поворотная втулка;
- 14 – поворотная балка; 15 – ограничительная опора; 16 – продольная вертикальная плоскость.



установка для измерения параметров упругих свойств деформируемого колеса при разных положениях его оси вращения, показанная на рис. 3–5.

Установка смонтирована на лабораторном столе. Его столешница выполнена из алюминиевой плиты с Т-образными пазами со следующими параметрами: длина столешницы составляет 1550 мм; ширина – 660 мм; шаг расположения пазов – 70 мм; глубина каждого паза 13 мм; ширина верхней части паза – 12 мм; ширина нижней части паза – 20 мм; высота нижней части паза – 8 мм. На рабочем столе смонтированы: неподвижная рама, к которой крепятся направляющая с измерительной опорной площадкой, ступица, ограничительная опора и устройство нагружения. Измерительная площадка (модель дороги) выполнена из оптически прозрачного материала – трехслойное бронированное стекло. Она служит для визуальной регистрации размеров и формы пятна контакта.

На ступице установлено колесо с шиной 3.50-5 модели B25 2 PR (производство Россия, камерная, для картинга) с возможностью изменения наклона оси вращения колеса. Свободный радиус колеса  $r_0 = 140$  мм, ширина профиля



**Рис. 4.** Конструктивная схема экспериментальной установки:

- 1 – ступица; 2 – обод колеса; 3 – колесо; 4 – неподвижная рама;
- 5 – измерительная опорная площадка; 6 – направляющая; 7 – шина;
- 8 – устройство нормального нагружения; 9 – динамометр нормальной нагрузки;
- 10 – индикатор нормальной деформации колеса; 11 – поворотная балка;
- 12 – ограничительная опора.

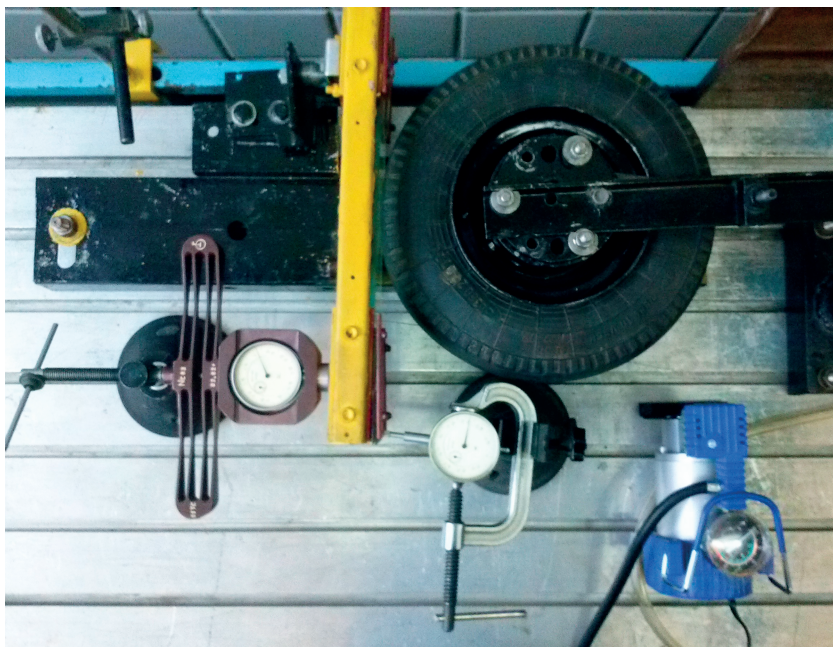


Рис. 5. Фотографии экспериментальной установки (вид сверху).

$B_t = 76$  мм. Давление в шине 0.8 атм. Максимальная нагрузка  $P_z = 800$  Н. Нормальная деформация при максимальной нагрузке и  $\alpha = 0$   $Z_t = 6.7$  мм. Относительная деформация при  $\alpha = 0$   $n = 0.048$ . Давление создавалось компрессором и контролировалось манометром. Прилагаемые нагрузки контролировались динамометрами на сжатие, перемещения — индикаторными головками часового типа. Угол наклона оси вращения колеса задавался  $\alpha = 0^\circ$ ;  $\alpha = \pm 5^\circ$ ;  $\alpha = \pm 10^\circ$  и контролировался по относительному перемещению проекции лазерного луча на перпендикулярную плоскость.

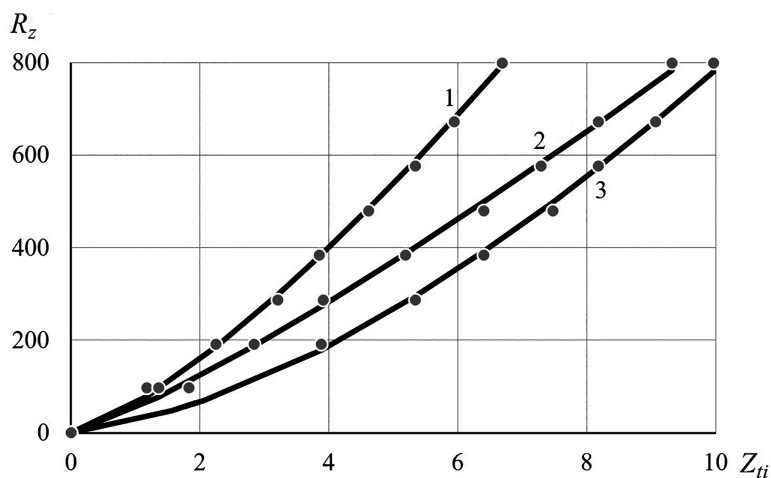
В ходе экспериментов были получены статические нормальные нагрузочные характеристики — зависимости значений нормальной деформации в центре пятна контакта колеса  $Z_{ii}$  от приложенной в той же точке нагрузки  $R_z$  при разных углах наклона оси вращения колеса  $\alpha$ . Результаты занесены в табл. 2. В графическом виде они показаны на рис. 6.

Известно, что динамическая жесткость отличается от статической. При переходе от неподвижного колеса к вращающемуся при  $\alpha = 0^\circ$  наблюдается рост его радиальной жесткости при действии центробежной силы. В результате радиальная жесткость при увеличении скорости ТС от 0 до 100 км/час может увеличиться до 6%.

Экспериментальные зависимости  $R_z = f(Z_{ii})$  были аппроксимированы при каждом угле наклона  $\alpha$  математическими выражениями одинакового вида. То есть при каждом из пяти значений  $\alpha$  зависимость  $R_z = f(Z_{ii})$  была описана показательной функцией одинакового вида:

Таблица 2. Экспериментальные нагрузочные характеристики

| $R_z$ , Н | $Z_{ti}$ , мм          |                            |                             |
|-----------|------------------------|----------------------------|-----------------------------|
|           | при $\alpha = 0^\circ$ | при $\alpha = \pm 5^\circ$ | при $\alpha = \pm 10^\circ$ |
| 0         | 0                      | 0                          | 0                           |
| 96        | 1.17836                | 1.36348                    | 1.8334                      |
| 192       | 2.25704                | 2.848                      | 3.8804                      |
| 288       | 3.21468                | 3.91244                    | 5.34                        |
| 384       | 3.84836                | 5.1976                     | 6.408                       |
| 480       | 4.628                  | 6.408                      | 7.476                       |
| 576       | 5.34                   | 7.298                      | 8.188                       |
| 672       | 5.9452                 | 8.188                      | 9.078                       |
| 800       | 6.6928                 | 9.3272                     | 9.968                       |

Рис. 6. Экспериментальные нагрузочные характеристики  $R_z = f(Z_{ti})$ :1 –  $\alpha = 0^\circ$ ; 2 –  $\alpha = \pm 5^\circ$ ; 3 –  $\alpha = \pm 10^\circ$ .

$$R_z = a \cdot Z_{ti}^b,$$

где  $a, b$  – постоянные коэффициенты.Полученные значения коэффициентов  $a, b$  приведены в табл. 3.Они были аппроксимированы функциями от угла наклона  $\alpha$  вида  $a, b = f(\pm)$ :

$$a = f_1(\alpha); a = 63.42 + 0.308 \cdot |\alpha| - 0.4488 \cdot |\alpha|^2,$$

**Таблица 3.** Коэффициенты аппроксимации функции  $R_z = a \cdot Z_{ii}^b$

| Угол наклона оси вращения<br>колеса $\alpha$ , град | Постоянные коэффициенты |      |
|-----------------------------------------------------|-------------------------|------|
|                                                     | $a$                     | $b$  |
| 0                                                   | 63.42                   | 1.33 |
| $\pm 5$                                             | 53.74                   | 1.2  |
| $\pm 10$                                            | 21.62                   | 1.56 |

$$b = f_2(\alpha); b = 1.33 - 0.075 \cdot |\alpha| + 0.0098 \cdot |\alpha|^2$$

Тогда эффективная нормальная жесткость исследуемого колеса определится как

$$C_{tze} = \frac{\partial(a \cdot Z_{ii}^b)}{\partial Z_{ii}} = a \cdot b \cdot Z_{ii}^{b-1},$$

где  $C_{tzi}$  – эффективная нормальная жесткость исследуемого колеса;  $a, b$  – коэффициенты аппроксимации.

В итоге для колеса – объекта экспериментального исследования получено выражение

$$C_{tze} = (63.42 + 0.308 \cdot |\alpha| - 0.4488 \cdot |\alpha|^2) \cdot (1.33 - 0.075 \cdot |\alpha| + 0.0098 \cdot |\alpha|^2) \times \\ \times Z_{ii}^{1.33 - 0.075 \cdot |\alpha| + 0.0098 \cdot |\alpha|^2 - 1}.$$

При  $\alpha = 0^\circ$  это выражение принимает вид:

$$C_{tz\alpha=0} = 84 \cdot Z_i^{0.33}.$$

Экспериментальный коэффициент изменения нормальной жесткости

$$K_{\alpha z} = \frac{C_{tze}}{C_{tz}}.$$

После математических преобразований получена экспериментальная формула (3.7) для колеса – объекта исследования:

$$K_{\alpha z} = 1 - 0.052|\alpha| + 0.00002|\alpha|^2 + 0.00044|\alpha|^3 - 0.00005|\alpha|^4. \quad (3.7)$$

Коэффициент  $K_{\alpha z}$  рассчитан для объекта исследования двумя способами: по полученной общей теоретической зависимости (3.6) и по частной экспериментальной (3.7). Результаты сравнения показаны на рис. 7.

Из рис. 7 следует, что наибольшая погрешность полученной теоретической зависимости (3.6) не превышает 6%. Она позволяет производить коррекцию нормальной жесткости эластичного колеса при наклоне его оси вращения на угол  $\alpha$ .

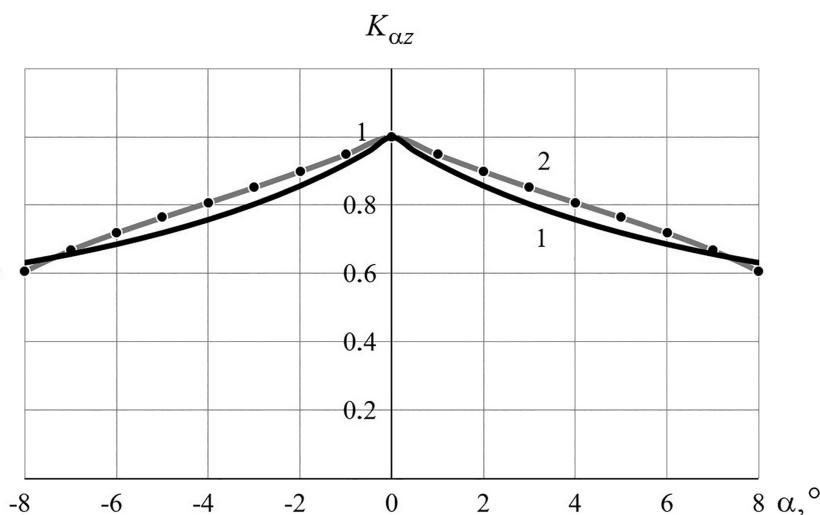


Рис. 7.  $K_{\alpha z} = f(\alpha)$  для шины 3.50–5: 1 – расчет по общей теоретической формуле (3.6); 2 – расчет по частной экспериментальной формуле (3.7).

**4. Анализ результатов.** Полученная теоретическая зависимость (3.6) является универсальной для деформируемых колес ТС. В ней присутствуют: свободный радиус колеса, ширина колеса, угол наклона оси его вращения и относительная радиальная деформация  $n$ . Значение  $n$  можно определить по формуле (3.1). В ней деформация  $Z_t$  соответствует заданной нагрузке  $P_z$  на колесо нормальной (радиальной) жесткости  $C_{tz}$  с горизонтальной осью вращения. Ее следует рассчитывать из выражения (3.4) как

$$Z_t = \frac{P_z}{C_{tz}}.$$

Тогда

$$n = \frac{P_z}{r_0 \cdot C_{tz}}.$$

Таким образом, если имеется деформируемое колесо с горизонтальной осью вращения, нормальной (радиальной) жесткости  $C_{tz}$ , свободного радиуса  $r_0$  и ширины  $B_t$  под нагрузкой  $P_z$ , то этих данных достаточно для определения изменения его нормальной жесткости при наклоне оси вращения на угол  $\alpha$ . При этом радиальная жесткость колеса останется прежней, а изменится только нормальная, названная эффективной. Эффективная нормальная жесткость этого колеса при наклоне оси вращения изменится в  $K_{\alpha z}$  раз (в соответствии с (3.3)), а  $K_{\alpha z}$  можно рассчитать по полученной теоретической зависимости (3.6). Зависимость корректна при углах  $\alpha \leq 10^\circ$ . На практике оси вращения опорных колес не рекомендуется наклонять более чем на  $5^\circ$  вследствие их износа. Но даже при таких малых углах наклона эффективная нормальная жесткость колеса существенно снижается, например у объекта исследования до 25%.

**5. Заключение.** Упругие свойства деформируемого колеса характеризуются разнокоординатными жесткостями, основная из которых — нормальная жесткость, определяющая деформации по вертикальной координате. У деформируемого колеса с горизонтальной осью вращения нормальная жесткость совпадает с радиальной, определяющей деформации в плоскости вращения колеса. У деформируемого колеса с наклоненной осью вращения величина радиальной жесткости остается прежней, а изменяется только нормальная, названная эффективной. Установлено, что эффективная нормальная жесткость деформируемого колеса при наклоне оси его вращения изменяется в  $K_{\alpha z}$  раз. При этом направление угла наклона не влияет на величину изменения эффективной нормальной жесткости колеса. Получена общая теоретическая зависимость для расчета корректирующего коэффициента  $K_{\alpha z}$ . Зависимость является функцией  $K_{\alpha z}$  от конструктивных параметров колеса и угла наклона его оси вращения  $\alpha$ . Зависимость корректна при углах  $\alpha \leq 10^\circ$ . При допустимых по условиям износа колеса углах наклона (до  $5^\circ$ ) эффективная нормальная жесткость колеса существенно снижается, например у объекта исследования до 25%. Справедливость теоретической зависимости подтверждена лабораторными экспериментами на специально созданной установке для измерения параметров упругих свойств деформируемого колеса при разных положениях его оси вращения. На основании обработки экспериментальных данных определена погрешность расчета  $K_{\alpha z}$  по полученной теоретической зависимости, которая не превышает 6%. Исследование является актуальным для проектного моделирования траекторного движения транспортных средств на деформируемых опорных колесах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00004, <https://rscf.ru/project/23-21-00004/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pacejka H.B. Tire and vehicle dynamics. USA: Elsevier Ltd, 2012. 672 p.
2. Reza N. Jazar. Vehicle Dynamics: Theory and Application. UK: Springer Science + Business Media, LLC, 2008. 1015 p.
3. Zadornov V.N., Balakina E.V., Mishenkov N.A. Protector Wear Forecasting on Elastic Characteristics of Tires // Journal of Friction and Wear. 2020. V. 41. №. 4. P. 485–490. <https://doi.org/10.3103/S1068366620040145> [Задворнов В.Н., Балакина Е.В., Мищенко Н.А. Прогнозирование износа протектора по жесткостным характеристикам шин // Трение и износ. 2020. Т. 41. № 4. С. 485–490. <https://doi.org/10.32864/0202-4977-2020-41-4-485-490>]
4. Сальников В.И. и др. Расчетно-экспериментальные универсальные зависимости для определения радиальной жесткости шин // Автомобильная промышленность. 2014. № 7. С. 13–14.
5. Гончаренко С.В., Годжаев З.А., Прядкин В.И. и др. Упругие характеристики шины сверхнизкого давления. Вертикальные нагрузки // Автомобильная промышленность. 2020. № 8. С. 18–21.
6. Выгонный А.Г., Шмелёв А.В., Колесникович А.Н. и др. Расчетно-экспериментальное определение жесткости и демпфирующей способности шин большегрузного самосвала // Механика машин, механизмов и материалов. 2019. № 3. С. 18–25.



7. Balakina E.V., Kochetov M.S., Sarbaev D.S. Assessment of the influence of inclined wheel installation on the vehicle lateral stability // Book ser. Lecture Notes in Mechanical Engineering – LNME. Springer, 2022. P. 100–108.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-030-85233-7\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-85233-7_12)
8. Berote J., Darling J., Plummer A. Lateral dynamics simulation of a three-wheeled tilting vehicle. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers // J. Automobile Eng. 2015. 229 (3). P. 342–356.  
<https://doi.org/10.1177/0954407014542625>
9. Балабин И.В., Чабунин И.С. Повышение устойчивости мобильной машины путем применения отрицательного развала колес // Автомобильная промышленность. 2020. № 7. С. 8–9.
10. Балабин И.В., Чабунин И.С. Углы наклона колес, их влияние на устойчивость мобильной машины // Автомобильная промышленность. 2021. № 11. С. 17–19.
11. Яценко Н.Н. и др. Отрицательный развал задних колес и управляемость легкового автомобиля // Автомобильная промышленность. 2008. № 10. С. 22–23.
12. Балабин И.В. Углы установки управляемых колес и их количественное влияние на сопротивление движению автомобиля // Автомобильная промышленность. 2016. № 9. С. 21–24.
13. Balakina E.V., Kochetov M.S., Sarbaev D.S. Inclined wheel normal stiffness calculation procedure // Book ser. Lecture Notes in Mechanical Engineering – LNME. Springer, 2021. P. 1–8.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-030-54814-8\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-54814-8_1)

UDC 629.33

## CALCULATION OF THE EFFECTIVE NORMAL STIFFNESS OF A DEFORMABLE WHEEL WITH A TILTED ROTATION AXIS

© 2024 г. E. V. Balakina<sup>a, \*</sup>, M. S. Kochetov<sup>a, \*\*</sup>

<sup>a</sup>*Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: fahrgestell2011@yandex.ru,*

<sup>\*\*</sup>*e-mail: kochetov\_m.s.1995@mail.ru*

**Abstract** – The research is relevant for the trajectory movement design modeling of the vehicles on deformable support wheels. The purpose of the research: to obtain a theoretical dependence for calculating the effective normal stiffness of a deformable wheel with an inclined rotation axis. Mathematical relationships between this stiffness and the rotation axis tilt angle of the wheel are defined. It is determined that the effective normal stiffness changes by a factor of  $K_{az}$  at specified tilt angle. A theoretical dependence for calculating the correction factor  $K_{az}$  was obtained. The dependence is a function of the wheel design parameters and the rotation axis tilt angle. The dependence is correct at angles up to 10 degrees. At tilt angles that are permissible under the conditions of wheel wear (up to 5 degrees), the effective normal stiffness is significantly reduced, for example, for the study object, up to 25%. The validity of the theoretical dependence is confirmed by laboratory experiments on a specially designed stand for measuring the parameters of the elastic

properties of the deformable wheel at different positions of its rotation axis. Based on the processing of the experimental data, the calculation error of Kaz according to the obtained theoretical dependence was determined, which does not exceed 6%.

*Keywords:* deformable wheel, rotation axis tilt, effective normal stiffness, calculation method

## REFERENCES

1. Pacejka H.B. Tire and vehicle dynamics, 3rd ed. Elsevier Ltd, Oxford, 2012.
2. Jazar R.N. Vehicle Dynamics: Theory and Application, 1st ed. Springer, Berlin, 2008.
3. Zadvornov V.N., Balakina E.V., Mishenkov N.A. Protector Wear Forecasting on Elastic Characteristics of Tires // J. Friction and Wear. 2020. V. 41. № 4. P. 354–358; <https://doi.org/10.3103/S1068366620040145>
4. Salnikov V.I. et al. Calculation-experimental universal dependencies for determining the tires radial stiffness // Automobile Industry. 2014. № 7. P. 13–14.
5. Goncharenko S.V., Godzhaev Z.A., Pryadkin V.I. et al. Elastic characteristics the ultra-low pressure tire. Vertical loads // Automobile Industry. 2020. № 8. P. 18–21.
6. Vygonnyy A.G., Shmialiou A.V., Kalesnikovich A.N. et al. Calculation-experimental determination of the stiffness and damping capacity the heavy-duty dump truck tires // Mech. Mach., Mech. Mater. 2019. № 3. P. 18–25.
7. Balakina E.V., Kochetov M.S., Sarbaev D.S. Assessment of the influence of inclined wheel installation on the vehicle lateral stability. In Book ser. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Berlin, 2022. P. 100–108; [https://doi.org/10.1007/978-3-030-85233-7\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-85233-7_12)
8. Berote J., Darling J., Plummer A. Lateral Dynamics Simulation of a Three-Wheeled Tilting Vehicle // J. Automob. Eng. 2015. V. 229. № 3. P. 342–356; <https://doi.org/10.1177/0954407014542625>
9. Balabin I.V., Chabunin I.S. Increasing the mobile machine stability during using the wheel negative camber // Automob. Industry. 2020. № 7. P. 8–9.
10. Balabin I.V., Chabunin I.S. Wheel cambers, their influence on the mobile machine stability // Automob. Industry. 2021. № 11. P. 17–19.
11. Yatsenko N.N. et al. Negative rear wheel camber and car handling // Automob. Industry. 2008. № 10. P. 22–23.
12. Balabin I.V. Steering wheel angles and their quantitative influence on vehicle movement resistance // Automob. Industry. 2016. № 9. P. 21–24.
13. Balakina E.V., Kochetov M.S., Sarbaev D.S. Inclined Wheel Normal Stiffness Calculation Procedure. In Book ser. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Berlin, 2021. P. 1–8; [https://doi.org/10.1007/978-3-030-54814-8\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-54814-8_1)



УДК 539.3

## РАСЧЕТ ИЗНОСА МАНЖЕТНОГО УПЛОТНЕНИЯ ВАЛА ПРИ СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ТЕМПЕРАТУРЕ И НАГРУЗКЕ

© 2024 г. И. А. Солдатенков<sup>а</sup>, \*

<sup>а</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: iasoldat@hotmail.com

Поступила в редакцию 01.08.2023 г.

После доработки 09.10.2023 г.

Принята к публикации 10.10.2023 г.

Описывается стохастическая модель процесса изнашивания манжетного уплотнения вала, учитывающая случайные изменения температуры и внешней нагрузки. Приводятся результаты расчета процесса изнашивания уплотнения применительно к условиям работы в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях. Оценивается важность учета случайных изменений температуры и внешней нагрузки для прогнозирования долговечности уплотнения.

*Ключевые слова:* контактная задача, трение, износ, упругий слой, манжетное уплотнение, температура, нагрузка

DOI: 10.31857/S1026351924020089, EDN: uwamiz

**1. Введение.** Расчет уплотнений вала на износ является предметом ряда работ, в которых учитывались различные факторы процесса изнашивания: смазка, поверхностная шероховатость и текстура, давление рабочей среды и др. [1–5].

Ниже описывается метод расчета процесса изнашивания манжетного (сальникового) уплотнения вала в условиях случайно изменяющихся температуры и внешней нагрузки (величина, направление). Подобные условия характерны, например, для узлов трения, работающих в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях [6–9]. Изменение температуры узла трения в этом случае обусловлено его заходом в тень Земли или станции и по разным оценкам лежит в диапазоне от  $-150$  до  $+150^{\circ}\text{C}$ . Для таких узлов трения также следует ожидать значительного разброса величины и направления внешней нагрузки, что обуславливается отсутствием постоянной силы тяжести как основного фактора нагружения.

Отметим, что применительно к условиям работы на орбитальных станциях ранее был выполнен расчет изнашивания радиального подшипника скольжения, который учитывал изменения температуры и внешней нагрузки [10, 11].

Цель описываемых ниже исследований состоит в учете и оценке значимости факторов случайного изменения температуры и внешней нагрузки

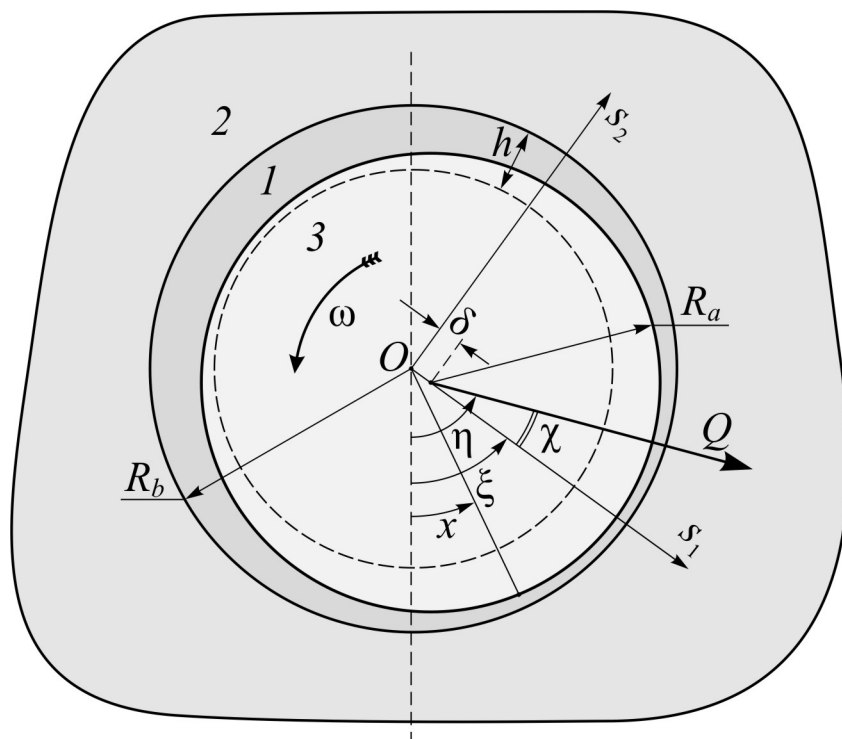


Рис. 1. Схема подвижного контакта уплотнения 1, связанного с обоймой 2, и вала 3.

при моделировании процесса изнашивания манжетного уплотнения вала и прогнозирования его долговечности.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим узел трения, состоящий из манжетного уплотнения 1 в виде тонкого упругого слоя толщины  $h$ , связанного с обоймой 2 (рис. 1). Уплотнение контактирует по всей своей поверхности с валом 3, который может вращаться (движение типа I, показано на рисунке) или совершать возвратно-поступательное перемещение вдоль своей оси (движение типа II). Контактное взаимодействие вала с уплотнением определяется величиной  $Q$  внешней нагрузки на вал и углом  $\eta \in [-\pi, \pi]$  ее приложения, который отсчитывается от вертикали (рис. 1). Модуль упругости  $E$  уплотнения считается значительно более низким, чем модули упругости вала и обоймы, что позволяет считать вал и обойму абсолютно жесткими.

Считается, что оси вала и обоймы располагаются параллельно друг другу, поэтому характер взаимодействия вала и уплотнения не меняется вдоль оси вала, т.е. рассматривается плоская контактная задача. Точки поверхности уплотнения задаются с помощью угловой координаты  $x$  (рис. 1).

Скольжение вала по уплотнению сопровождается трением, которое подчиняется закону Кулона [12]:

$$\tau = \mu p \quad (2.1)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения скольжения,  $p$  — контактное давление,  $\tau$  — касательное контактное напряжение (напряжение трения), причем эти величины принимают неотрицательные значения.

Радиусы  $R_a$  и  $R_b$  вала и обоймы связаны очевидным неравенством  $R_a < R_b$  (рис. 1), поэтому зазор  $d = R_b - R_a$  между валом и обоймой всегда положителен. Предполагается, что имеют место соотношения:

$$h \ll R_b, \quad d \ll R_b, \quad (2.2)$$

первое из которых отвечает условию малости толщины  $h$  уплотнения, а второе — малости зазора  $d$ .

Допускается изменение температуры  $T$  узла трения и, как следствие этого, изменение трибомеханических параметров ( $\mu$ ,  $E$ ), а также изменение размеров уплотнения, вала и обоймы по причине их теплового расширения. Соответствующие температурные зависимости будут приведены в следующем разделе.

В результате взаимодействия с валом уплотнение изнашивается, и это приводит к изменению его толщины  $h$  во времени  $t$  и, вообще говоря, по координате  $x$ , при этом вал считается неизнашиваемым. Скорость изнашивания уплотнения в точке  $x$  в каждый момент времени  $t$  определяется величиной контактного давления  $p$ , скоростью  $V$  скольжения и температурой  $T$  узла трения согласно закону изнашивания [12–14]:

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \equiv -\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = F(p(x,t), V, T), \quad (2.3)$$

причем  $W(x,t) = h_0 - h(x,t)$  — линейный износ уплотнения,  $h_0$  — начальная ( $t = 0$ ) толщина уплотнения, а вид функции  $F(p, V, T)$  определяется износоустойчивыми свойствами уплотнения. В частности, возможен линейный закон изнашивания:

$$-\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \alpha(T) p(x,t) V, \quad (2.4)$$

где  $\alpha$  — коэффициент износа, величина которого зависит от температуры.

В случае движения вала типа I скорость скольжения определяется по формуле  $V = \omega R_a$ , в которой  $\omega$  — постоянная угловая скорость вращения вала. Отметим, что при изменении температуры радиус  $R_a$  вала может меняться вследствие его теплового расширения. Однако это изменение мало по сравнению с самим радиусом  $R_a$  и не оказывает заметного влияния на скорость скольжения  $V = \omega R_a$ , которую, как и угловую скорость  $\omega$ , можно считать постоянной. В случае движения вала типа II скорость скольжения задается постоянной величиной  $V_s$  скорости перемещения вала вдоль своей оси:  $V = V_s$ .

В каждый момент процесса взаимодействия вала и уплотнения величины  $T, \eta, Q$  могут принимать случайные значения, т.е. они являются случайными функциями времени  $t$  (процессами) [15, 16]. При дальнейших выкладках предполагается, что случайные изменения величин  $T, \eta, Q$  во времени  $t$  приводят к тому, что уплотнение изнашивается равномерно по всей поверхности, т.е.

$$h(x,t) = h(t), \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (2.5)$$

Ниже будут указаны условия выполнения равенства (2.5) в терминах средних значений.

Рассматриваемая постановка задачи предполагает контакт вала с уплотнением по всей его поверхности (полный контакт), т.е. выполнение неравенства

$$0 < p_m(t), \quad (2.6)$$

где  $p_m(t) = \min_{x \in [-\pi, \pi]} p(x, t)$  – минимальное значение контактного давления.

Неравенство (2.6) будет в дальнейшем интерпретироваться как условие герметичности уплотнения.

Одной из важнейших характеристик процесса изнашивания уплотнения является его долговечность, определяемая здесь как момент времени  $t_*$ , когда впервые происходит нарушение герметичности уплотнения при некотором  $x$ , т.е. неравенства (2.6). Отметим, что аналогичным образом ранее определялась долговечность поршневого кольца [14].

Ставится задача построения стохастической модели процесса изнашивания уплотнения в рассматриваемом узле трения, учитывающей случайный характер величин  $T, \eta, Q$  и позволяющую рассчитывать долговечность уплотнения.

**3. Основные уравнения.** Для построения модели процесса изнашивания уплотнения рассмотрим вначале контактное взаимодействие вала и уплотнения при некоторых фиксированных значениях  $T, \eta, Q$  и заданной толщине  $h(t)$ .

Учитывая сделанные выше допущения относительно толщины и модуля упругости уплотнения, воспользуемся для описания его упругого поведения уточненной моделью Винклера. В случае движения вала типа I, когда напряжение трения лежит в плоскости задачи (рис. 1), эта модель при учете условия (2.5) представляется соотношением [17]:

$$Bhp(x) = -v(x) - Cv'(x), \quad (3.1)$$

в котором  $v$  – радиальное перемещение поверхности уплотнения,  $v'$  – производная этого перемещения по  $x$ ,  $B$  – коэффициент податливости уплотнения,

$$B = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{(1 - \nu)E}, \quad C = \mu \frac{\kappa - 2}{\kappa - 1} \frac{h}{R_b}, \quad (3.2)$$

$E$  и  $\nu$  – модуль упругости (Юнга) и коэффициент Пуассона,  $\kappa = 3 - 4\nu$ , причем для сокращения выкладок аргументы  $t$  и  $T$ , указывающие на зависимость величин от времени и температуры, здесь опускаются. Отметим, что соотношение (3.1) предполагает, что вращение вала происходит против часовой стрелки, как показано на рис. 1.

В случае движения вала типа II напряжение трения направлено перпендикулярно плоскости задачи (рис. 1) и оно не влияет на контактное давление [13, 14]. В этом случае справедлива традиционная модель Винклера [17, 18]:

$$Bhp(x) = -v(x). \quad (3.3)$$

Если связать перемещение  $v$  с параметрами геометрии контакта в рассматриваемом узле трения (рис. 1), то соотношениям (3.1) и (3.3) несложно придать следующий вид:

$$Bhp(x) = h - d + [\cos(x - \xi) - C \sin(x - \xi)]\delta - \text{движение I}$$

$$Bhp(x) = h - d + \cos(x - \xi) \cdot \delta - \text{движение II} \quad (3.4)$$

где  $\xi$  — угол, определяющий направление смещения центра вала относительно центра обоймы,  $0 \leq \delta$  — величина этого смещения, причем в силу геометрических ограничений:  $\delta < d$  (рис. 1).

Величина смещения  $\delta$  и его направление связаны с величиной нагрузки  $Q$  на вал и ее направлением. Эту связь можно установить на основе условия равновесия вала. Для этого введем в рассмотрение декартову систему координат  $Os_1s_2$ , начало которой свяжем с центром обоймы, ось  $s_1$  расположим по направлению смещения  $\delta$ , а ось  $s_2$  — перпендикулярно этому направлению (рис. 1). Путем интегрирования по угловой координате  $x$ , выполним суммирование проекций на оси системы координат  $Os_1s_2$  напряжения трения  $\tau$  и контактного давления  $p$ , определяемых согласно равенствам (2.1), (3.4). Полученные таким образом величины приравняем к проекциям  $Q_1$  и  $Q_2$  нагрузки  $Q$  на соответствующие оси системы координат  $Os_1s_2$ . В результате получим для рассматриваемых типов движения вала:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\pi R_b}{Bh}(\mu - C)\delta, & Q_2 &= \frac{\pi R_b}{Bh}(1 + \mu C)\delta & - \text{движение I,} \\ Q_1 &= 0, & Q_2 &= \frac{\pi R_b}{Bh}\delta & - \text{движение II.} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из равенств (3.5) несложно получить искомую связь величин  $\delta$  и  $Q$ :

$$Q = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} = \delta \begin{cases} m\sqrt{1 + C^2}D^{-1} & - \text{движение I} \\ D^{-1} & - \text{движение II} \end{cases} \quad (3.6)$$

где

$$D = \frac{Bh}{\pi R_b}, \quad m = \sqrt{1 + \mu^2}. \quad (3.7)$$

Равенства (3.5) позволяют также получить выражение для угла  $\chi$  между направлениями нагрузки  $Q$  и смещения  $\delta$  (рис. 1):

$$\chi = \arctg \frac{Q_1}{Q_2} = \begin{cases} \arctg \frac{\mu - C}{1 + \mu C} & - \text{движение I} \\ 0 & - \text{движение II} \end{cases} \quad (3.8)$$

при этом, в силу определения (3.2) коэффициента  $C$  и первого условия (2.2),  $\chi \in [0, \pi/2)$ .

Углы  $\xi$  и  $\eta$ , задающие направления смещения  $\delta$  и нагрузки  $Q$ , связаны равенством (рис. 1)

$$\xi = \eta - \chi, \quad (3.9)$$

*Замечание 1.* Согласно равенствам (3.8) и (3.9), при отсутствии трения в плоскости задачи (движение вала типа II) углы  $\xi$  и  $\eta$  совпадают. Аналогичное совпадение имеет место в задаче расчет износа радиального подшипника скольжения при отсутствии трения [11].

Подстановка выражения (3.6) в соотношения (3.4) после элементарных тригонометрических преобразований позволяет записать следующие выражения для контактного давления:

$$p(x, t) = \mathcal{P}_\gamma(x, t; T, \eta, Q), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (3.10)$$

где

$$\mathcal{P}_A(x, t; T, \eta, Q) = \frac{1}{B(t)h(t)} \left[ h(t) - d(T) + \cos(x - \xi + \varphi_c(t, T)) \cdot \frac{D(t, T)}{m(T)} Q \right]$$

$$\mathcal{P}_B(x, t; T, \eta, Q) = \frac{1}{B(t)h(t)} [h(t) - d(T) + \cos(x - \xi) \cdot D(t, T) Q]. \quad (3.11)$$

Здесь и далее предполагается, что  $\gamma = A, B$ , причем индекс  $A$  ( $B$ ) отвечает движению вала типа I (II), угол  $\xi$  находится по формулам (3.8), (3.9):

$$d(T) = R_b(T) - R_a(T), \quad \varphi_c(t, T) = \arcsin \frac{C(t, T)}{\sqrt{1 + C^2(t, T)}}.$$

В выражениях (3.11) указаны зависимости используемых величин от времени  $t$  и температуры  $T$ , существующие в силу данных выше определений этих величин. Отметим, что здесь не учитывается изменение толщины  $h$  уплотнения в результате его теплового расширения, что допустимо для тонкого уплотнения – соответствующее обоснование представлено в работе [11].

Располагая выражениями (3.10), (3.11), для контактного давления, можно установить, что для выполнения условия герметичности (2.6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$d(T) + \Lambda_\gamma(T) D(t, T) Q < h(t), \quad (3.12)$$

в котором  $\Lambda_A = m^{-1}(T)$ ,  $\Lambda_B = 1$ .

Примем теперь во внимание случайный характер величин  $T, \eta, Q$  во времени и введем в рассмотрение соответствующую функцию плотности вероятности  $\rho(T, \eta, Q, t)$  [15]. В дальнейшем для более компактной записи формул будут использоваться обозначения:

$$X_1 = T, \quad X_2 = \eta, \quad X_3 = Q. \quad (3.13)$$

Диапазоны изменения случайных процессов  $X_1(t), X_2(t), X_3(t)$  определим следующим образом [11]:

$$X_1(t) \in [T^-, T^+], \quad X_2(t) \in [-\pi, \pi], \quad X_3(t) \in [0, Q_M], \quad (3.14)$$

причем  $Q_M = 0$  при отсутствии нагрузки на вал. Отметим, что функция плотности вероятности  $\rho(X, t)$  удовлетворяет условию нормировки [15]:

$$\int_{\{X\}} \rho(X, t) dX = 1. \quad (3.15)$$

Символом  $X$  для краткости обозначается совокупность величин  $X_1, X_2, X_3$ , запись  $\{X\}$  обозначается множество допустимых значений этих величин, определяемое диапазонами (3.14),  $dX = dX_1 dX_2 dX_3$ .

Для описания рассматриваемого процесса изнашивания уплотнения воспользуемся известным подходом, основанным на статистическом осреднении закона изнашивания (2.3) по параметрам  $T, \xi, Q$  [14]. Результатом такой операции при учете условия (2.5) является равенство:

$$\dot{h}(t) = - \int_{\{X\}} F(\mathcal{P}_\gamma(x, t; X), V, X_1) \rho(X, t) dX, \quad (3.16)$$

в котором  $\dot{h}(t)$  – производная по времени. Здесь и далее  $h$  уже представляет собой среднее статистическое значение толщины уплотнения.

Указанная выше функция  $\mathcal{P}_\gamma(x, t; X)$  определяется выражениями (3.10), (3.11) с учетом обозначений (3.13), поэтому равенство (3.16) представляет собой дифференциальное уравнение, которое при начальном условии  $h(0) = h_0$  описывает кинетику изменения толщины изнашиваемого уплотнения в терминах средних значений. Равенства (3.10), (3.11) и уравнение (3.16) составляют стохастическую модель процесса изнашивания уплотнения и тем самым решают поставленную выше задачу.

Левая часть уравнения (3.16) в силу условия (2.5) не зависит не зависит от координаты  $x$ . Из физических соображений можно предположить, что правая часть (3.16) также не зависит от  $x$ , если направление  $\eta = X_2$  внешней нагрузки на вал является равновероятным и статистически независимым от температуры  $T = X_1$  и нагрузки  $Q = X_3$ , т.е.

$$\rho(X, t) = \frac{1}{2\pi} \rho_{13}(X_1, X_3, t). \quad (3.17)$$

В этом случае можно предположить, что скорость изнашивания  $F(\mathcal{P}_\gamma(x, t; X), V, X_1)$ , будучи функцией координаты  $x$ , равномерно усредняется по  $X_2 \in [-\pi, \pi]$  и это приводит к независимости правой части равенства (3.16) от  $x$ . Справедливость этого предположения проверяется подстановкой выражения в уравнение (3.16) и взятием интеграла по аргументу  $X_2$  с учетом равенства (3.9) и выражений (3.17), (3.11) для контактного давления.

*Замечание 2.* Допущение (3.17), обеспечивающее выполнение условия (2.5), представляется физически приемлемым для узла трения, работающего на околоземной орбитальной станции, где отсутствует сила тяжести и поэтому направления внешней нагрузки на вал можно считать равновероятными. Наличие равенства (2.5) существенно упрощает расчет процесса изнашивания уплотнения, однако это равенство не является принципиально необходимым. Действительно, если допустить зависимость толщины  $h$  уплотнения от угловой координаты  $x$ , то вместо деформационной модели (3.1) можно воспользоваться более общей моделью [17]:

$$Bhp(x) = -v(x) - \frac{\mu(\kappa - 2)}{(\kappa - 1)R_b} h(x)v'(x) - \frac{\mu\kappa}{(\kappa - 1)R_b} h'(x)v(x),$$

включающую производную  $h'$  толщины по координате. В этом случае уравнение (3.16), наряду с производной  $\partial h(x, t) / \partial t$  в левой части, будет содержать производную  $\partial h(x, t) / \partial x$  в правой части. Подобные износосеконтактные задачи рассматривались ранее [17].

Принимая во внимание обозначения (3.13) случайных величин  $X_1, X_2, X_3$  и диапазоны (3.14) их изменения, можно на основе неравенства (3.12) прийти к следующему условию герметичности уплотнения:

$$H_\gamma \equiv \max_{X_1 \in [T^-, T^+]} \left| \frac{d(X_1)}{1 - \Omega_\gamma(X_1)Q_M} \right| < h(t), \quad \Omega_\gamma(X_1) \equiv \frac{B(X_1)\Lambda_\gamma(X_1)}{\pi R_b(X_1)}. \quad (3.18)$$

Постановка рассматриваемой задачи предполагает выполнение условия герметичности (3.18) в начальный момент времени, т.е. выполнение неравенства  $H_\gamma < h_0$ .

Отметим, что для выполнения условия (3.18) необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $\Omega_\gamma(X_1)Q_M < 1$ ,  $X_1 \in [T^-, T^+]$ , обеспечивающее положительность знаменателя в левой части этого условия. Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\max_{X_1 \in [T^-, T^+]} \Omega_\gamma(X_1) < \frac{1}{Q_M}, \quad (3.19)$$

которое налагает ограничение на максимально возможное значение величины  $Q_M$ , определяющей верхнюю границу диапазона изменения нагрузки  $Q$  в силу соотношения (3.14).

В предыдущем разделе была определена долговечность уплотнения, как момент  $t_*$  нарушения условия герметичности (2.6), равносильного условию (3.18). Согласно данным выше определениям:  $\Lambda_A = m^{-1}$ ,  $\Lambda_B = 1$ ,  $m = \sqrt{1 + \mu^2} \geq 1$ , поэтому в условии (3.18):  $\Omega_A(X_1) \leq \Omega_B(X_1)$ . Это означает, что при заданной толщине  $h(t)$  уплотнения условие (3.18) его герметичности нарушается для движения вала типа II ( $\gamma = B$ ) раньше, чем для движения типа I ( $\gamma = A$ ). Соответствующим образом соотносятся долговечности  $t_{*A}$  и  $t_{*B}$  уплотнения для движений I и II:

$$t_{*B} \leq t_{*A}. \quad (3.20)$$

Таким образом, движение вала типа II представляется более опасным, чем движение типа I.

*Замечание 3.* При моделировании процесса изнашивания упругого покрытия в радиальном подшипнике скольжения в качестве долговечности покрытия используется время его полного изнашивания, когда  $h = 0$  [11]. Однако к рассматриваемой задаче изнашивания уплотнения подобное определение долговечности неприменимо, т.к. нарушение герметичности уплотнения происходит до его полного изнашивания — это следует из неравенства (3.18), левая часть которого положительна.



*Замечание 4.* Можно рассмотреть комбинированный тип движения вала, при котором имеет место частое чередование движений I и II. В этом случае уравнение (3.16) кинетики изнашивания уплотнения принимает вид:

$$\dot{h}(t) = - \int_{\{X\}} [q_A F(\mathcal{P}_A(x, t; X), V, X_1) + q_B F(\mathcal{P}_B(x, t; X), V, X_1)] \rho(X, t) dX, \quad (3.21)$$

где  $q_A$  и  $q_B$  — доли общего времени работы уплотнения, приходящиеся на движения I и II, причем  $q_A + q_B = 1$ . Согласно выкладкам, предшествующим неравенству (3.20), при комбинированном типе движения вала долговечность уплотнения определяется условием герметичности (3.18) для движения типа II ( $\gamma = B$ ), т.к. герметичность уплотнения нарушается прежде всего именно при таком типе движения.

**4. Аналитические решения** (линейный закон изнашивания). Рассмотрим процесс изнашивания уплотнения при линейном законе изнашивания, т.е. при

$$F(p, V, T) = \alpha(T) pV. \quad (4.1)$$

Случайные процессы  $X_1(t)$ ,  $X_3(t)$  будем считать стационарными и независимыми, в силу чего функция  $\rho_{13}(X_1, X_3, t)$  в выражении (3.17) имеет вид [15, 16]:

$$\rho_{13}(X_1, X_3, t) = \rho_1(X_1) \rho_3(X_3), \quad (4.2)$$

причем функции плотности вероятности  $\rho_1(X_1)$ ,  $\rho_3(X_3)$  случайных процессов  $X_1(t)$ ,  $X_3(t)$  удовлетворяют условию нормировки (3.15).

При таких допущениях подставим выражения (3.10), (3.11) для контактного давления в уравнение (3.16) кинетики изнашивания уплотнения и выполним в нем интегрирование по аргумента  $X_2$  и  $X_3$ , принимая во внимание выражения (3.17), (4.2) для функции плотности вероятности  $\rho(X, t)$  и условие нормировки (3.15) для функции  $\rho_3(X_3)$ . В результате уравнение (3.16) для обоих типов движения вала (I и II) примет вид равенства:

$$-\dot{h}(t) = a - \frac{b}{h(t)}, \quad (4.3)$$

в котором

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = V \int_{\{X_1\}} \frac{\alpha(X_1)}{B(X_1)} \begin{Bmatrix} 1 \\ d(X_1) \end{Bmatrix} \rho_1(X_1) dX_1 \quad (4.4)$$

и которое не зависит от внешней нагрузки  $Q$ .

Решение дифференциального уравнения (4.3) при начальном условии  $h(0) = h_0$  задается неявно как решение алгебраического уравнения:

$$h(t) - h_0 + d_{av} \ln \left( \frac{h(t) - d_{av}}{h_0 - d_{av}} \right) = -at, \quad (4.5)$$

где

$$d_{av} \equiv \frac{b}{a} = d(X_{1av}), \quad X_{1av} \in [T^-, T^+], \quad (4.6)$$

причем последнее равенство получается, если применить ко второму интегралу (4.4) теорему о среднем [19]. Отметим, что при выполнении условия герметичности (3.8) имеет место неравенство:  $d(X_1) < h(t)$ ,  $X_1 \in [T^-, T^+]$ , поэтому, учитывая соотношения (4.6), можно заключить, что в равенстве (4.5):  $0 < h(t) - d_{av}$ ,  $0 < h_0 - d_{av}$ .

Для каждого значения  $h(t)$  толщины уплотнения, найденного из равенства (4.5) при увеличении времени  $t$ , необходимо выполнить проверку условия метичности (3.18) уплотнения. В отличие от уравнения (4.3) кинетики изнашивания и его решения (4.5), это условие зависит от максимального значения  $Q_M$  внешней нагрузки и различается для движений вала типа I ( $\gamma = A$ ) и II ( $\gamma = B$ ). Согласно данному в разделе 1 определению, по нарушению условия (3.18) находятся долговечности  $t_{*A}$  и  $t_{*B}$  для движений I и II. Результаты соответствующих расчетов будут представлены в следующем разделе.

*Пример 1.* Рассмотрим частный случай постоянной температуры узла трения. Это означает, что величина  $X_1$  не является случайной и принимает некоторое постоянное значение  $T$ , поэтому формально можно положить:

$$\rho_1(X_1) = \delta(X_1 - T), \quad (4.7)$$

где  $\delta(X)$  — дельта-функция.

Если подставить выражение (4.7) в равенства (4.4) и учесть определение (4.6), то можно получить следующие выражения для коэффициентов  $a, b, d_{av}$  в рассматриваемом случае:

$$a = \frac{\alpha V}{B}, \quad b = \frac{\alpha V}{B} d, \quad d_{av} = d, \quad (4.8)$$

причем здесь и далее  $\alpha = \alpha(T)$ ,  $B = B(T)$ ,  $d = d(T)$ .

При постоянной температуре  $X_1 = T$  условие герметичности (3.18) имеет вид:

$$\frac{d}{1 - \Omega_\gamma Q_M} < h(t), \quad (4.9)$$

Согласно равенству (4.5), толщина  $h$  уплотнения монотонно убывает со временем  $t$ . При достижении толщиной  $h$  значения

$$h_\gamma = \frac{d}{1 - \Omega_\gamma Q_M}$$

происходит нарушение неравенства (4.9) как условия герметичности уплотнения. Соответствующий момент времени  $t_{*\gamma}$ , задающий долговечность уплотнения, находится непосредственно из равенства (4.5) при  $h = h_\gamma$ ,  $d_{av} = d$ :

$$t_{*\gamma} = \frac{1}{a} \left[ h_0 - h_\gamma - d \ln \left( \frac{h_\gamma - d}{h_0 - d} \right) \right]. \quad (4.10)$$

Отметим, что, используя формулу (4.10), можно подтвердить полученное выше неравенство (3.20):  $t_{*B} \leq t_{*A}$ . В следующем разделе будут представлены некоторые результаты по оценке долговечности уплотнения на основе этой формулы.

*Пример 2.* Рассмотрим детерминированную постановку задачи, допустив в рассмотренном выше примере отсутствие внешней нагрузки  $Q$  на вал, т.е. положив  $Q_M = 0$ . В этом случае остаются прежними уравнение (4.3) кинетики изнашивания уплотнения и его решение (4.5) при наличии выражений (4.8). Однако условие (4.9) герметичности уплотнения принимает более простой вид, одинаковый для обоих типов (I и II) движения вала:

$$d < h(t). \quad (4.11)$$

Несложный анализ равенства (4.5) при  $d_{av} = d$  показывает, что функция  $h(t)$  является монотонно убывающей и обладает следующим асимптотическим свойством:  $h(t) \rightarrow d + 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Это означает, что условие герметичности (4.11) выполняется при любом  $t \in [0, \infty)$ , т.е., в отличие от стохастического случая примера 1 (формула (4.10)), здесь формально  $t_{*y} = \infty$ ,  $y = A, B$ .

**5. Численные результаты.** Ниже описываются и анализируются некоторые результаты расчетов процесса изнашивания уплотнения, выполненных на основе полученных выше формул. Предметом анализа, в частности, является оценка важности учета случайных изменений температуры и внешней нагрузки для прогнозирования долговечности уплотнения.

При выборе параметров материала уплотнения для расчетов будем ориентироваться на использование самосмазывающихся композитов, в том числе на полимерной основе. Подобные композиты успешно используются в узлах трения, работающих в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях в условиях вакуума и при значительных перепадах температуры [6–9].

Как показывают эксперименты [20–22], для полимерных композитов характерно существенное снижение модуля упругости с ростом температуры, которое может достигать нескольких порядков. По этой причине для расчетов воспользуемся экспоненциальной зависимостью [21]

$$E(T) = E_0 \exp(k_E \theta), \quad E_0 = E(T_0) \quad (5.1)$$

с отрицательным параметром  $k_E$ . Здесь и далее  $\theta = T - T_0$  – температура, отсчитываемая от нормальной температуры  $T_0$ . Подстановка выражения (5.1) в равенство (3.2) определяет температурную зависимость  $B(T)$  коэффициента податливости уплотнения, при этом без ограничения общности рассмотрения можно считать коэффициент Пуассона независимым от температуры.

Результаты трибологических испытаний свидетельствуют о том, что с ростом температуры скорость  $W$  износа полимерных композитов может претерпевать значительные изменения, достигающие нескольких порядков [21–25]. В отличие от температурной зависимости (5.1) модуля упругости, зависимость скорости износа от температуры может быть как возрастающей, так и убывающей. С учетом указанных обстоятельств, имея в виду линейный закон изнашивания (2.4), примем экспоненциальную зависимость коэффициента износа от температуры:

$$\alpha(T) = \alpha_0 \exp(n_\alpha \theta), \quad \alpha_0 = \alpha(T_0), \quad (5.2)$$

в которой параметр  $n_\alpha$  может принимать как отрицательные, так и положительные значения.

Согласно экспериментальным данным [21, 23–25], коэффициент трения  $\mu$  с ростом температуры может как увеличиваться, так и уменьшаться в несколько раз. Это дает основание использовать для расчетов линейную зависимость

$$\mu(T) = \mu_0(1 + n_\mu \theta), \quad \mu_0 = \mu(T_0), \quad (5.3)$$

при этом допускаются как отрицательные, так и положительные значения параметра  $n_\mu$ .

При увеличении температуры происходит тепловое расширение вала и обоймы, учитываемое в выражениях (3.11) для контактного давления. В рассматриваемом случае тонкого и мягкого уплотнения можно пренебречь его влиянием на расширение обоймы, полагая [10, 26]:

$$R_i(T) = R_{i0}(1 + k_i \theta), \quad R_{i0} = R_i(T_0), \quad i = a, b, \quad (5.4)$$

где  $k_a$  и  $k_b$  – коэффициенты линейного теплового расширения вала и обоймы.

В силу равенств (3.17) и (4.2), функция плотности вероятности случайных процессов  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ ,  $X_3(t)$  имеет вид:  $\rho(X, t) = (2\pi)^{-1} \rho_1(X_1) \rho_3(X_3)$ . Функция плотности вероятности  $\rho_3(X_3)$  случайного процесса  $X_3(t) \in [0, Q_M]$ , согласно выкладкам предыдущего раздела, может иметь произвольный вид. В отношении функции  $\rho_1(X_1)$  будем считать, что

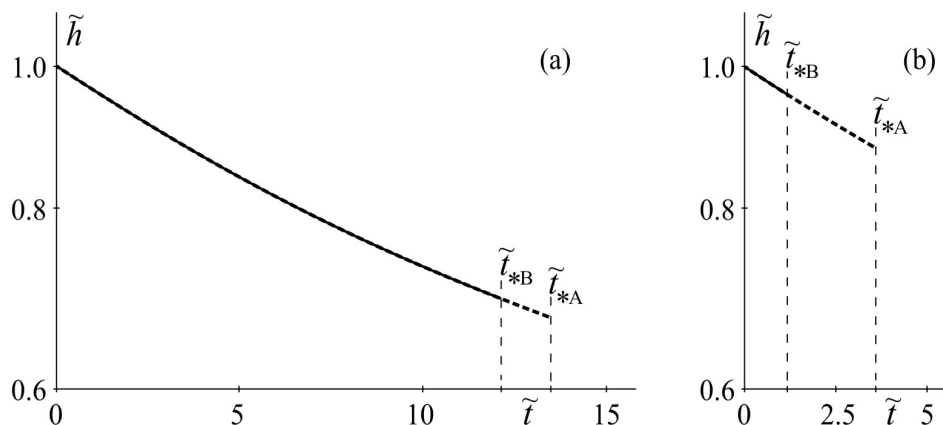
$$\rho_1(X_1) = \rho_{10} + \rho_{11} \cos\left(\pi \frac{X_1 - T_0}{\theta_M}\right), \quad (5.5)$$

где  $\theta_M = (T^+ - T_0)/2$ ,  $\rho_{10} = (T^+ - T^-)^{-1} > 0$ ,  $\rho_{11}$  – произвольный параметр, удовлетворяющий неравенству  $|\rho_{11}| \leq \rho_{10}$ , которое обеспечивает неотрицательность функции  $\rho_1(X_1)$ . Здесь предполагается, что  $T_0$  представляет собой среднюю температуру, т.е.  $T_0 = (T^+ + T^-)/2$ . Нетрудно проверить выполнение условия нормировки (3.15) для функции (5.5). Отметим также, что функция  $\rho_1(X_1)$  принимает вид равномерного распределения, если  $\rho_{11} = 0$ .

С учетом экспериментальных данных по полимерным композитам из упомянутых выше литературных источников для расчетов процесса изнашивания уплотнения были выбраны следующие значения трибофизических параметров:  $E = 10$  МПа,  $\nu = 0.3$ ,  $k_E = -0.01$  К<sup>-1</sup>,  $\alpha_0 = 10^{-15}$  Па<sup>-1</sup>,  $\mu_0 = 0.3$ ,  $k_a = 2 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>,  $k_b = 3 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>,  $T_0 = 293$  К (20°С). Геометрические параметры узла трения и условия его работы определялись значениями  $h_0 = 2$  мм,  $R_{a0} = 10$  мм,  $R_{b0} = 11$  мм,  $\omega = 2\pi$  с<sup>-1</sup>,  $T^- = 143$  К (-130°С),  $T^+ = 443$  К (170°С). Значения остальных параметров указываются ниже для каждого конкретного примера.

Отметим, что указанные значения коэффициентов линейного теплового расширения вала  $k_a$  и обоймы  $k_b$  характерны для алюминиевых и магниевых сплавов [27], а выбранный диапазон изменения температуры  $T$  соответствует условиям работы узлов трения в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях [6–9].

Расчеты процесса изнашивания уплотнения проводились при линейном законе изнашивания (2.4) на основе соответствующего решения (4.5), при этом



**Рис. 2.** Зависимость толщины  $h$  изнашиваемого уплотнения от времени  $t$  при двух значениях максимальной нагрузки  $Q_M$ , кН/м: 30 (а) и 50 (б). Пунктирной (сплошной) линией показаны зависимости для движения вала типа I (II).

скорости скольжения для движений вала типа I и II полагались одинаковыми:  $V_s = \omega R_a$ . Долговечности  $t_{*A}$  и  $t_{*B}$  уплотнения для движений I и II, как принято, определялись по нарушению условия (3.18). Полученные результаты расчетов представлены ниже с использованием безразмерных величин  $\tilde{h} = h / h_0$  и  $\tilde{t} = t / t_c$ ,  $t_c = 10^5$  с  $\approx 27.8$  ч.

Рис. 2 иллюстрирует зависимость толщины  $h$  изнашиваемого уплотнения от времени  $t$  для двух значений максимальной нагрузки  $Q_M$ , кН/м: 30 (а) и 50 (б), при этом в формулах (5.2), (5.3) полагалось  $n_\alpha = 0.02$ ,  $n_\mu = 0.003$  и использовалось равномерное распределение  $\rho_1(X_1)$  (выражение (5.5) при  $\rho_{11} = 0$ ). Пунктирная и сплошная линии отвечают движениям вала типа I и II, причем до момента времени  $t_{*B}$  эти линии совпадают, т.к. используемое решение (4.5) не зависит от типа движения вала. На рис. 2 указаны значения  $\tilde{t}_{*A} = t_{*A} / t_c$ ,  $\tilde{t}_{*B} = t_{*B} / t_c$  долговечности уплотнения для каждого из этих типов движения.

**Таблица 1.** Значения долговечностей  $\tilde{t}_{*A}$ ,  $\tilde{t}_{*B}$  уплотнения для различных значений параметров  $n_\mu$  и  $Q_M$  при равномерном распределении  $\rho_1(X_1)$  и  $n_\alpha = 0.02$

| $n_\mu$<br>$Q_M$ , кН / м | – 0.003 |      | 0     |      | 0.003 |      |
|---------------------------|---------|------|-------|------|-------|------|
|                           | 30      | 50   | 30    | 50   | 30    | 50   |
| $\tilde{t}_{*A}$          | 12.37   | 1.57 | 12.84 | 2.41 | 13.50 | 3.58 |
| $\tilde{t}_{*B}$          | 12.16   | 1.16 | 12.16 | 1.16 | 12.16 | 1.16 |

**Таблица 2.** Значения долговечностей  $\tilde{t}_{*A}, \tilde{t}_{*B}$  уплотнения для различных значений параметра  $n_\mu$  и видов распределения  $\rho_1(X_1)$  (равномерное (—), неравномерное (~~)) при  $Q_M = 50$  кН/м и  $n_\alpha = -0.02$ .

| $n_\mu$<br>$\rho_1(X_1)$ | - 0.003 |       | 0     |       | 0.003 |       |
|--------------------------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                          | —       | ~~    | —     | ~~    | —     | ~~    |
| $\tilde{t}_{*A}$         | 0.218   | 0.668 | 0.334 | 1.03  | 0.495 | 1.52  |
| $\tilde{t}_{*B}$         | 0.162   | 0.495 | 0.162 | 0.495 | 0.162 | 0.495 |

В табл. 1 представлены значения долговечностей  $\tilde{t}_{*A}, \tilde{t}_{*B}$  уплотнения для различных значений параметров  $n_\mu$  и  $Q_M$ , при этом функция плотности вероятности  $\rho_1(X_1)$  полагается постоянной (равномерное распределение),  $n_\alpha = 0.02$  (возрастающая зависимость  $\alpha(T)$ ). При таких условиях значения долговечностей  $\tilde{t}_{*A0}$  и  $\tilde{t}_{*B0}$ , отвечающие случаю постоянной температуры  $T = T_0$  и рассчитанные по формуле (4.10), составляют 30.44 и 30.03 – для  $Q_M = 30$  кН/м, 25.40 и 24.96 – для  $Q_M = 50$  кН/м.

В табл. 2 представлены значения долговечностей  $\tilde{t}_{*A}, \tilde{t}_{*B}$  уплотнения для различных значений параметра  $n_\mu$  и двух видов распределения  $\rho_1(X_1)$  – равномерного (—) и неравномерного (~~), рассчитанного по общей формуле (5.5) при  $\rho_{11} = \rho_{10}$ . Здесь считается, что  $Q_M = 50$  кН/м,  $n_\alpha = -0.02$  (убывающая зависимость  $\alpha(T)$ ). Значения долговечностей  $\tilde{t}_{*A0}$  и  $\tilde{t}_{*B0}$  составляют 3.61 и 3.54 – для равномерного распределения  $\rho_1(X_1)$ , 11.00 и 10.81 – для неравномерного распределения  $\rho_1(X_1)$ .

**6. Обсуждение результатов.** Согласно графикам рис. 2, толщина  $h$  уплотнения со временем монотонно уменьшается, как и следовало ожидать. Увеличение максимальной нагрузки  $Q_M$  приводит к существенному увеличению предельно допустимого износа уплотнения и, соответственно, к снижению его долговечности  $t_*$ . При этом наблюдается увеличение расхождения значений долговечностей  $t_{*A}$  и  $t_{*B}$ , соответствующих движениям I и II. Рис. 2 свидетельствует также о том, что движение вала типа II является более опасным для герметичности уплотнения, чем движение типа I, подтверждая тем самым неравенство (3.20).

Приведенные в табл. 1 результаты демонстрируют возможность значительного снижения долговечности  $t_*$  уплотнения при увеличении максимальной нагрузки  $Q_M$  для обоих типов I и II движения вала, что согласуется с графиками рис. 2. В связи с этим следует отметить, что при отсутствии нагрузки на вал ( $Q_M = 0$ ) и постоянной температуре уплотнение имеет неограниченную долговечность (Пример 2).

В случае движения вала типа I, согласно данным табл. 1 и 2, на долговечность  $t_*$  уплотнения оказывает влияние характер зависимости коэффициента трения  $\mu$  от температуры  $T$  (формула (5.3.)). А именно при увеличении параметра  $n_\mu$ , определяющего наклон прямой  $\mu(T)$ , долговечность уплотнения растет. Особенно сильно это влияние проявляется при больших значениях максимальной нагрузки  $Q_M$  (табл. 1).

Сравнение данных табл. 1 и 2 между собой позволяет заключить, что на долговечность  $t_*$  уплотнения может оказывать существенное влияние характер зависимости коэффициента износа  $\alpha$  от температуры  $T$  (формула (5.2)). А именно переход от убывающей зависимости  $\alpha(T)$  ( $n_\alpha = -0.02$ ) к возрастающей зависимости  $\alpha(T)$  ( $n_\alpha = 0.02$ ) приводит к увеличению долговечности  $t_*$  для обоих типов I и II движения вала.

Сравнение данных табл. 1 и 2 с указанными в предыдущем разделе значениями долговечностей  $\hat{t}_{*A0}$  и  $\hat{t}_{*B0}$  уплотнения в случае постоянной температуры  $T = T_0$  позволяет сделать вывод о важности учета фактора случайности величины  $X_1 = T$  при оценке долговечности уплотнения. Этот вывод также подтверждают данные о влиянии вида функции плотности вероятности  $\rho_1(X_1)$  на долговечность  $t_*$ , приведенные в табл. 2. Действительно, согласно этим данным, переход от равномерного распределения  $\rho_1(X_1)$  к неравномерному приводит к существенному увеличению долговечности  $t_*$  для обоих типов I и II движения вала.

Отметим также, что максимальная нагрузка  $Q_M$  является параметром случайной величины  $X_3 = Q$ , который задает диапазон ее изменения в силу отношения (3.14). Данное обстоятельство позволяет расценивать указанное выше влияние  $Q_M$  на долговечность  $t_*$  уплотнения как дополнительное свидетельство важности учета фактора случайности величины  $X_3 = Q$ .

**Выводы.** 1. Предложена стохастическая модель процесса изнашивания тонкого уплотнения, учитывающая случайные изменения температуры и внешней нагрузки и позволяющая оценивать долговечность уплотнения по критерию его герметичности.

2. Проведены расчеты процесса изнашивания уплотнения, ориентированные на условия работы узла трения в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях. Получены соответствующие оценки долговечности уплотнения.

3. Выявлены зависимости долговечности уплотнения от ряда параметров задачи. В частности, установлено, что увеличение максимальной нагрузки  $Q_M$  приводит к существенному снижению долговечности  $t_*$  уплотнения. Также долговечность  $t_*$  снижается, если вращение вала (движение типа I) заменяется на возвратно-поступательное перемещение (движение типа II).

4. Показана важность учета фактора случайности температуры  $T$  и внешней нагрузки  $Q$  при оценке долговечности уплотнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-49-02010.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guo F., Jia X., Longke W., Salant R. F., Wang Y. The effect of wear on the performance of a rotary lip seal // ASME. J. Tribol. 2014. V. 136. № 4. 041703. <https://doi.org/10.1115/1.4027623>
2. Продан В.Д., Божко Г.В. Сальниковые уплотнения с мягкой набивкой: учебное пособие. Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВО "ТГТУ", 2016. 124 с.



3. Kaufmann A., Lindner-Silwester T., Antretter T. Modeling dry wear of piston rod sealing elements of reciprocating compressors considering gas pressure drop across the dynamic sealing surface // ASME. J. Tribol. 2018. V. 140. № 4. 042201. <https://doi.org/10.1115/1.4038863>
4. Ran H., Liu D., Wang S. A numerical wear simulation method of reciprocating seals with a textured rod // Materials. 2020. V. 13. № 19. 4458. <https://doi.org/10.3390/ma13194458>
5. Grün J., Feldmeth S., Bauer F. Wear on radial lip seals: a numerical study of the influence on the sealing mechanism // Wear. 2021. V. 476. 203674. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2021.203674>
6. Маленков М.И., Каратушин С.И., Тарасов В.М. Конструкционные и смазочные материалы космических механизмов. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2007. 54 с.
7. Spacecraft Systems Engineering / Ed. P. Fortescue, G. Swinerd, J. Stark. Chichester: John Wiley & Sons, 2011. <https://doi.org/10.1002/9781119971009>
8. Броневец М.А. Трибология и космические транспортные системы // Вестник РГУПС. 2017. № 1. С. 18–23.
9. Мышкин Н.К., Григорьев А.Я., Басинюк В.Л., Мардосевич Е.И., Ковальчук Г.Ф., Папина С.С., Ковалева И.Н., Кудрицкий В.Г. Космическая трибология: состояние и перспективы // Механика машин, механизмов и материалов. 2012. № 3–4 (20–21). С. 126–130.
10. Александров В.М., Броневец М.А., Солдатенков И.А. Математическое моделирование изнашивания подшипника скольжения в условиях открытого космоса // Трение и износ. 2008. Т. 29. № 3. С. 238–245.
11. Солдатенков И.А. Расчет износа радиального подшипника скольжения при случайно изменяющихся температуре и нагрузке // МТТ. 2023. № 2. С. 166–175.
12. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
13. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
14. Солдатенков И.А. Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа. М.: Физматкнига, 2010. 160 с.
15. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятности и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.
16. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000. 384 с.
17. Солдатенков И.А. К расчету кинетики изнашивания покрытия: использование уточненных деформационных моделей // ПММ. 2020. Т. 84. № 1. С. 122–136.
18. Механика контактных взаимодействий / Под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. 670 с.
19. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х томах). М.: Физматлит, 2003. Т. 2. 864 с.
20. Friedrich K., Schlarb A.K. Tribology of polymeric nanocomposites // Amsterdam: Elsevier, 2008.
21. Polymer Tribology / Ed. S.K. Sinha, B.J. Briscoe. London: Imperial College Press, 2009.
22. Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения / Под ред. А.В. Герасимова. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. 311 с.
23. Бартнев Г.М., Лаврентьев В.В. Трение и износ полимеров. Л. Химия, 1972. 240 с.
24. Fusaro R.L., Sliney H.E. Lubricating characteristics of polyimide bonded graphite fluoride and polyimide thin films // ASLE Trans., 1973. V. 16. P. 189–196. <https://doi.org/10.1080/05698197308982721>



25. *Burris D.L.* Investigation of the tribological behavior of polytetrafluoroethylene at cryogenic temperatures // *Tribology Trans.* 2008. V. 51. № 1. P. 92–100.  
<https://doi.org/10.1080/10402000701660618>
26. *Кикоин А.К., Кикоин И.К.* Молекулярная физика. М.: Наука, 1976. 480 с.
27. *Физические величины: справочник* / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

UDC 539.3

## WEAR CALCULATION FOR A SHAFT LIP SEAL UNDER RANDOMLY CHANGING TEMPERATURE AND LOAD

© 2024 г.    I. A. Soldatenkov<sup>a</sup>, \*

<sup>a</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

\**e-mail: iasoldat@hotmail.com*

**Abstract** — A stochastic model of the wear process of a shaft lip seal that takes into account random changes in the temperature and external load was described. The results of a numerical analysis of the process of seal wear in relation to the conditions of operation in open space at near-Earth orbital stations are presented. The importance of taking into account random changes in temperature and external load for predicting the seal durability was evaluated.

**Keywords:** contact problem, friction, wear, elastic layer, lip seal, temperature, load

## REFERENCES

1. *Guo F., Jia X., Longke W. et al.* The effect of wear on the performance of a rotary lip seal // *ASME J. Tribol.* 2014. V. 136. № 4. 041703;  
<https://doi.org/10.1115/1.4027623>
2. *Prodan V.D., Bozhko G.V.* Stuffing box seals with soft package: tutorial. GTU, Tambov, 2016 [in Russian].
3. *Kaufmann A., Lindner-Silvester T., Antretter T.* Modeling dry wear of piston rod sealing elements of reciprocating compressors considering gas pressure drop across the dynamic sealing surface // *ASME. J. Tribol.* 2018. V. 140. 042201;  
<https://doi.org/10.1115/1.4038863>
4. *Ran H., Liu D., Wang S.* A numerical wear simulation method of reciprocating seals with a textured rod // *Materials.* 2020. V. 13. 4458;  
<https://doi.org/10.3390/ma13194458>
5. *Grün J., Feldmeth S., Bauer F.* Wear on radial lip seals: a numerical study of the influence on the sealing mechanism // *Wear.* 2021. V. 476. 203674;  
<https://doi.org/10.1016/j.wear.2021.203674>
6. *Malenkov M.I., Karatushin S.I., Tarasov V.M.* Constructional and Lubricating Materials of Space Mechanisms. Balt. GTU, St. Petersburg, 2007 [in Russian].
7. *Spacecraft Systems Engineering*, Ed. by P. Fortescue, G. Swinerd, and J. Stark. John Wiley & Sons, Chichester, 2011.

8. *Bronovets M.A.* Tribology and space transport systems // Vestnik RGUPS. 2017. № 1. P. 18–23 [in Russian].
9. *Myshkin N.K., Grigoriev A.Ya., Basiniuk V.L. et al.* Space tribology: the states and prospects // Mekh. Mashin Mekh. Mater. 2012. № 3–4 (20–21). P. 126–130 [in Russian].
10. *Aleksandrov V.M., Bronovets M.A., Soldatenkov I.A.* Mathematical modeling of wear of journal bearings in outer space // J. Frict. Wear. 2008. V. 29. P. 182–187;  
<https://doi.org/10.3103/S1068366608030057>
11. *Soldatenkov I.A.* Wear Calculation for a Radial Plain Bearing under Randomly Changing Temperature and Load // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. № 2. P. 516–523;  
<https://doi.org/10.3103/S0025654422601276>
12. *Kragelsky I.V., Dobychin M.N., Kambalov V.S.* Friction and Wear: Calculation Methods. Mashinostroenie, Moscow, 1977; Pergamon, Oxford, 1982.
13. *Galin L.A.* Contact Problems: The Legacy of L.A. Galin. Springer, Berlin, 2008.
14. *Soldatenkov I.A.* Wear Contact Problem with Applications to Engineering Wear Calculations. Fizmatkniga, Moscow, 2010 [in Russian].
15. *Wentzel E., Ovcharov L.* Applied Problems in Probability Theory. Mir Publishers, Moscow, 1986.
16. *Wentzel E.S., Ovcharov L.A.* Theory of Random Processes and its Engineering Applications. Vysshaya Shkola, Moscow, 2000 [in Russian].
17. *Soldatenkov I.A.* On the Calculation of Coating Wear Kinetics: the Use of Refined Deformation Models // Mechanics of Solids. 2020. V. 55. № 7. P. 1093–1104;  
<https://doi.org/10.3103/S0025654420070201>
18. Mechanics of Contact Interactions, Ed. I.I. Vorovich, V.M. Aleksandrov. Fizmatlit, Moscow, 2001 [in Russian].
19. *Fikhtengol'ts G.M.* Course of Differential and Integral Calculus. In 3 Vols. Fizmatlit, Moscow, 2001. V. 1 [in Russian].
20. *Friedrich K., Schlarb A.K.* Tribology of Polymeric Nanocomposites. Elsevier: Amsterdam, 2008.
21. Polymer Tribology, Ed. by S.K. Sinha, B.J. Briscoe. Imperial College Press, London, 2009.
22. Dispersion-Filled Polymer Composites for Technical and Medical Purpose, Ed. by A.V. Gerasimov. SO RAN, Novosibirsk, 2017 [in Russian].
23. *Bartenev G.M., Lavrentev V.V.* Friction and Wear of Polymers. Leningrad, Khimia, 1972; Amsterdam, Elsevier, 1981.
24. *Fusaro R.L., Sliney H.E.* Lubricating characteristics of polyimide bonded graphite fluoride and polyimide thin films // ASLE Trans. 1973. V. 16. P. 189–196;  
<https://doi.org/10.1080/05698197308982721>
25. *Burris D.L.* Investigation of the tribological behavior of polytetrafluoroethylene at cryogenic temperatures // Tribol. Trans. 2008. V. 51. P. 92–100;  
<https://doi.org/10.1080/10402000701660618>
26. *Kikoin A.K., Kikoin I.K.* Molecular Physics. Moscow, Nauka, 1976; Moscow, Mir, 1978.
27. Handbook of Physical Quantities. Ed. by I.S. Grigoriev, E.Z. Meilikhov. Moscow, Energoatomizdat, 1991; CRC Press, Boca Raton, 1996.

УДК 539.3

## ЕЩЕ РАЗ О КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С КОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

© 2024 г. В. Н. Акопян<sup>а, \*</sup>, А. А. Амирджанян<sup>а, \*\*</sup>, Л. В. Акопян<sup>а, \*\*\*</sup>

<sup>а</sup>Институт механики Национальной Академии Наук Армении, Ереван, Армения

\*e-mail: [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am),

\*\*e-mail: [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com),

\*\*\*e-mail: [lhakobyan@gmail.com](mailto:lhakobyan@gmail.com)

Поступила в редакцию 28.07.2023 г.

После доработки 10.10.2023 г.

Принята к публикации 11.10.2023 г.

Построено точное решение контактной задачи о вдавливании абсолютно жесткого штампа с прямым основанием с учетом трения в один из берегов конечной трещины, находящейся в однородной упругой плоскости. Принимается, что касательные контактные напряжения прямо пропорциональны нормальному контактному давлению. При этом считается, что коэффициент трения прямо пропорционален координате соприкасающихся точек контактирующих поверхностей. Выведена определяющая система уравнений задачи в виде неоднородной задачи Римана для двух функций с переменными коэффициентами, и построено ее замкнутое решение в квадратурах. Получены простые формулы для контактных напряжений и нормальной компоненты дислокации смещений точек берегов трещины. Изучены закономерности изменения контактных напряжений и раскрытия трещины в зависимости от максимального значения коэффициента трения.

*Ключевые слова:* контактная задача, трение, штамп, трещина

DOI: 10.31857/S1026351924020099, EDN: uvzytt

**1. Введение.** Известно, что многие инженерные сооружения и конструкции по ряду причин содержат трещины и полностью или частично сцепленные включения. Вокруг этих концентраторов напряжений возникают быстро изменяющиеся локальные поля напряжений, которые часто приводят к частичному или полному разрушению конструкции. Поэтому изучение закономерностей изменения этих локальных полей напряжений является одним из приоритетных направлений развития контактных и смешанных задач теории упругости и механики разрушения. Это позволит провести более точный расчет конкретных конструкций и принять меры для предотвращения их разрушения.

Многие основополагающие результаты в этом направлении приведены в монографиях [1–5]. Что же касается контактных задач для упругих

тел с трещинами, когда на один из берегов трещины вдавливается жесткое включение, то первая работа в этом направлении принадлежит Д.И. Шерману [4]. В этой работе построено точное решение контактной задачи для упругой плоскости с трещиной, на одном из берегов которой спаяно тонкое жесткое включение. В дальнейшем замкнутое решение аналогичной осесимметричной контактной задачи для пространства с дискообразной трещиной было получено Г.Я. Поповым в [6]. В работах [7, 8] получены разрывные решения плоской и осесимметричной теории упругости для составных плоскостей и пространств с межфазными трещинами, на основе которых получены точные решения задач для составных плоскостей и пространств с частично оторванными от матрицы жесткими межфазными включениями. В монографии [9] и в работах [10–15] приведены замкнутые решения ряда осесимметричных и плоских смешанных и контактных задач для однородных и составных плоскостей и пространств с трещинами. Особо отметим работу [14], где численно-аналитическим методом механических квадратур, в рамках контактной модели Л.А. Галина, построено решение контактной задачи для плоскости с трещиной, на один из берегов которой вдавливается жесткий штамп.

Здесь же в рамках модели контакта с трением, предложенной в работе [15], построено точное решение задачи для однородной плоскости с трещиной, на один из берегов которой вдавливается жесткий штамп с трением.

**2. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.** Пусть однородная плоскость с коэффициентами Ламэ  $\alpha$  и  $\lambda$ , отнесенная к декартовой системе координат  $Oxy$ , находящаяся в состоянии плоской деформации, на интервале  $(-a, a)$  оси абсцисс расслаблена конечной трещиной и деформируется при помощи абсолютно жесткого штампа, вдавливаемого в нижний берег трещины при помощи нормальной сосредоточенной нагрузки величины  $P_0$ , приложенной в центре штампа (рис. 1). Полагается, что под штампом, помимо нормальных контактных напряжений, возникают также касательные контактные напряжения,

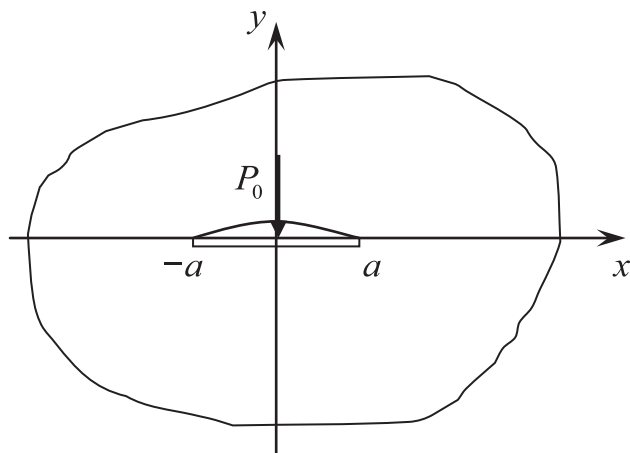


Рис. 1. Схематическое представление задачи.

которые связаны с нормальным контактным давлением законом сухого трения, коэффициент трения которого прямо пропорционален координатам точек контактирующих поверхностей [15].

Требуется построить замкнутое решение поставленной задачи, изучить закономерности изменения контактных напряжений, действующих под штампом, и раскрытие трещины в зависимости от максимального значения коэффициента трения.

Мысленно разделив плоскость по оси абсцисс на две полуплоскости и снабдив все характерные величины нижней и верхней полуплоскостей соответственно индексами 1 и 2, поставленную задачу сформулируем в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \sigma_y^{(2)}(x, 0) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \tau_{xy}^{(2)}(x, 0), \quad (|x| > a) \\ u^{(1)}(x, 0) &= u^{(2)}(x, 0)\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$v^{(1)}(x, 0) = v^{(2)}(x, 0)$$

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = -f \frac{x}{a} \sigma_y^{(2)}(x, 0), \quad (|x| < a) \quad (2.2)$$

$$v^{(2)}(x, 0) = \delta.$$

Здесь  $\sigma_y^{(j)}(x, y)$  и  $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ) – компоненты тензора напряжений, действующих в верхней и нижней полуплоскостях соответственно,  $u^{(j)}(x, y)$  и  $v^{(j)}(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ) горизонтальные и нормальные составляющие вектора смещений в соответствующих полуплоскостях,  $f$  – максимальное значение коэффициента трения, а  $\delta$  – жесткое смещение штампа по направлению оси  $Oy$ .

Для решения граничной задачи (2.1)–(2.2) используем разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости с межфазной трещиной, приведенные в [8], которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (2.1). При помощи этих решений для напряжений, действующих на берегах трещины и производных от смещений точек берегов трещины, для однородной плоскости получим выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \frac{1}{2} \sigma(x) + \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \frac{(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds, \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \frac{1}{2} \tau(x) - \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds, \\ v_2'(x, 0) &= -\frac{1}{2} v'(x) - \frac{1}{4\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds,\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$u'_2(x, 0) = -\frac{1}{2}u'(x) - \frac{1}{4\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds,$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0) = -\sigma_y^{(2)}(x, 0), \\ \tau(x) &= \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = -\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = f \frac{x}{a} \sigma_y^{(2)}(x, 0) = -f \frac{x}{a} \sigma(x), \\ u^{(1)}(x, 0) - u^{(2)}(x, 0) &= u(x), \quad v^{(1)}(x, 0) - v^{(2)}(x, 0) = v(x),\end{aligned}$$

$$\vartheta_1 = \frac{\mu^2}{(\lambda + 3\mu)}, \quad \vartheta_2 = \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 3\mu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Используя представления (2.3), удовлетворим условиям на берегах трещины (2.2), предварительно продифференцировав последнее из них. В результате для определения неизвестных функций  $\sigma(x)$ ,  $\tau(x)$  и функций дислокации смещений  $u'(x)$  и  $v'(x)$  придем к следующей определяющей системе сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma(x) + \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \frac{(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds &= 0, \\ \frac{1}{2}\tau(x) - \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds &= 0, \\ \frac{1}{2}v'(x) + \frac{1}{4\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds &= 0, \\ \tau(x) &= -f \frac{x}{a} \sigma(x).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Систему (2.4) нужно рассматривать при условиях равновесия штампа и непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = P_0, \quad \int_{-a}^a v'(x) dx = 0, \quad \int_{-a}^a u'(x) dx = 0.\tag{2.5}$$

Далее из второго и третьего уравнений исключим скачок горизонтальных смещений. Тогда с первым и последним уравнениями (2.3) придем к системе:

$$\begin{aligned}
\sigma(x) + \frac{\alpha}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds &= 0 \\
\alpha \tau(x) - \beta v'(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds &= 0 \\
\tau(x) = -f \frac{x}{a} \sigma(x),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\alpha = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, \quad \beta = \frac{2(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\vartheta_2}.$$

Теперь, подставляя значение функции  $\tau(x)$  из последнего уравнения (2.6) в первые два уравнения, после некоторых выкладок с учетом первого условия (2.5) придем к следующей определяющей системе сингулярных интегральных уравнений второго рода с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
\sigma(x) - \frac{f\alpha x}{\pi a} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds &= A \quad \left( A = \frac{f\alpha}{\pi a} P_0 \right) \\
f\alpha \frac{x}{a} \sigma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \beta v'(x) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений второго рода с переменными коэффициентами (2.7) при первых двух условиях (2.5).

**3. Решение системы определяющих уравнений.** Для построения решения системы (2.7) при первых двух условиях (2.5) введем в рассмотрение аналитические во всей комплексной плоскости, разрезанной по интервалу  $(-a, a)$ , функции

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-z} ds, \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-z} ds \tag{3.1}$$

и, используя формулы Племеля–Сохоцкого [4, 16], систему (2.7) напомним в виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^+(x) \left[ 1 - \frac{f\alpha x i}{a} \right] - \Phi_1^-(x) \left[ 1 + \frac{f\alpha x i}{a} \right] + i\beta [\Phi_2^+(x) + \Phi_2^-(x)] &= A \\
\Phi_1^+(x) \left[ 1 - \frac{f\alpha x i}{a} \right] + \Phi_1^-(x) \left[ 1 + \frac{f\alpha x i}{a} \right] - i\beta [\Phi_2^+(x) - \Phi_2^-(x)] &= 0
\end{aligned}$$

Отсюда после некоторых простых выкладок придем к следующей задаче Римана для двух функций:

$$\begin{aligned}\Phi_1^+(x) &= v_1(x)\Phi_2^-(x) + f_1(x) \\ \Phi_2^+(x) &= v_2(x)\Phi_1^-(x) + f_2(x).\end{aligned}\quad (3.2)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}v_1(x) &= -\frac{i\beta}{1 - icx/a}, \quad v_2(x) = -\frac{i[1 + icx/a]}{\beta}, \\ f_1(x) &= \frac{A}{2(1 - icx/a)}, \quad f_2(x) = -\frac{iA}{2\beta}, \quad (c = f\alpha),\end{aligned}$$

а верхние индексы  $+$  и  $-$  здесь и далее будут означать значения комплексной функции соответственно на верхнем и нижнем берегах интервала интегрирования.

Следуя работе [11], построим решения системы (3.2), имеющие интегрируемые особенности в концевых точках интервала интегрирования. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned}\ln v_1(x) &= \ln \left[ -\frac{i\beta}{1 - icx/a} \right] = \ln \left| \beta / \sqrt{1 + (cx/a)^2} \right| + i \left[ 2\pi k - \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{cx}{a} \right] \\ \ln v_2(x) &= \ln \left[ -\frac{i[1 + icx/a]}{\beta} \right] = \ln \left[ \frac{\sqrt{1 + (cx/a)^2}}{\beta} \right] + i \left[ 2\pi n - \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{cx}{a} \right].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\ln[v_1(x)v_2(x)] &= \ln \left| -\frac{1 + icx/a}{1 - icx/a} \right| + \\ &+ i \arg[v_1(x)v_2(x)] = i \left[ 2\pi(k + n) - \pi + 2 \arctg \frac{cx}{a} \right] \\ \ln[v_1(x)/v_2(x)] &= \ln |v_1(x)/v_2(x)| + \\ &+ i \arg[v_1(x)/v_2(x)] = \ln \left[ \frac{\beta^2}{1 + (cx/a)^2} \right] + 2\pi i(k - n)\end{aligned}$$

где  $k$  и  $n$  — целые числа.

Канонические решения соответствующей однородной задачи Римана даются формулами [11]:

$$\begin{aligned}X_1^{(k,n)}(z) &= \frac{1}{z-a} \exp \left[ \frac{1}{2} \Gamma_0^{(k,n)}(z) + \frac{1}{2} \Gamma^{(k,n)}(z) \right] \\ X_2^{(k,n)}(z) &= \frac{1}{z-a} \exp \left[ \frac{1}{2} \Gamma_0^{(k,n)}(z) - \frac{1}{2} \Gamma^{(k,n)}(z) \right].\end{aligned}\quad (3.3)$$

По формулам, приведенным в [9], для функций  $\Gamma_0^{(k,n)}(z)$  и  $\Gamma^{(k,n)}(z)$  получим следующие выражения:



$$\Gamma_0^{(k,n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln[v_1(s)v_2(s)]}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{i \left[ 2\pi(k+n) - \pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{cs}{a} \right]}{s-z} ds$$

$$\Gamma^{(k,n)}(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \ln \left[ \frac{v_1(\tau)}{v_2(\tau)} \right] \frac{d\tau}{B^+(\tau)(\tau-z)} =$$

$$= \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \left\{ \ln \left[ \frac{\beta^2}{1 + (c\tau/a)^2} + 2\pi i(k-n) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{d\tau}{B^+(\tau)(\tau-z)} \right\}, \quad \left( B(z) = \sqrt{(z+a)(z-a)} \right).$$

Легко проверить, что эти решения будут иметь интегрируемые особенности в точке  $x = -a$  только в двух случаях, когда  $k = 1$ ;  $n = 0$  и  $k = n = 1$ . В первом из этих случаев

$$\Gamma_0^{(1,0)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{i \left[ \pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{cs}{a} \right]}{s-z} ds \quad (3.4)$$

$$\Gamma^{(1,0)}(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \left\{ \ln \left[ \frac{\beta^2}{1 + (c\tau/a)^2} \right] + 2\pi i \right\} \frac{d\tau}{B^+(\tau)(\tau-z)},$$

а во втором случае

$$\Gamma_0^{(1,1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{i \left[ 3\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{cs}{a} \right]}{s-z} ds \quad (3.5)$$

$$\Gamma^{(1,1)}(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \left\{ \ln \left[ \frac{\beta^2}{1 + (c\tau/a)^2} \right] \right\} \frac{d\tau}{B^+(\tau)(\tau-z)}.$$

Общее решения задачи Римана (3.3) запишем в виде:

$$\Phi_j(z) = C_1 X_j^{(1,0)}(z) + C_2 X_j^{(1,1)}(z) + \frac{1}{2} \Phi_j^{(1,0)}(z) + \frac{1}{2} \Phi_j^{(1,1)}(z) \quad (j = 1, 2), \quad (3.6)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — неизвестные постоянные, подлежащие определению, а функции  $\Phi_j^{(1,0)}(z)$  и  $\Phi_j^{(1,1)}(z)$  ( $j = 1, 2$ ) — частные решения системы (3.2), построенные на основе каждой из канонических решений, и даются формулами [11]:

$$\Phi_j^{(1,n)}(z) = X_j^{(1,n)}(z) \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_{-a}^a \frac{F_+^{(1,n)}(s) ds}{s-z} - (-1)^j \frac{B(z)}{4\pi i} \int_{-a}^a \frac{F_-^{(1,n)}(s) ds}{B^+(s)(s-z)} \right\} \quad (3.7)$$

$$F_{\pm}^{(1,n)}(x) = \frac{f_1(s)}{X_1^{(1,n)+}(s)} \pm \frac{f_2(s)}{X_2^{(1,n)+}(s)}, \quad (j = 1, 2; \quad n = 0, 1).$$

В рассматриваемом случае значения канонических решений  $X_j^{(1,n)}(z)$  ( $j = 1, 2; \quad n = 0, 1$ ), определяемые формулами (3.3), на верхнем и нижнем берегах разреза  $(-a, a)$  будут даваться формулами:

$$\begin{aligned} X_1^{(1,0)+}(x) &= -\frac{\chi(x)}{\omega(x)}, \quad X_1^{(1,0)-}(x) = i\frac{\chi(-x)}{\omega(x)}, \quad X_2^{(1,0)+}(x) = i\nu_2(x)\frac{\chi(-x)}{\omega(x)} \\ X_2^{(1,0)-}(x) &= -\frac{\chi(x)}{\omega(x)\nu_1(x)}, \quad X_1^{(1,1)+}(x) = -\frac{\chi(x)}{\omega(-x)}, \quad X_1^{(1,1)-}(x) = -i\frac{\chi(-x)}{\omega(-x)} \\ X_2^{(1,1)+}(x) &= -i\nu_2(x)\frac{\chi(-x)}{\omega_1(-x)}, \quad X_2^{(1,1)-}(x) = -\frac{\chi(x)}{\nu_1(x)\omega(-x)} \\ \chi(x) &= \sqrt[4]{q(x)}e^{3\pi i/4}e^{i\psi_*(x)}e^{\psi_1(x)}, \quad \omega(x) = (a+x)^{1/4+\gamma(x)}(a-x)^{3/4-\gamma(x)} \end{aligned}$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{cx}{a}, \quad \psi_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\left[ \operatorname{arctg} \frac{cs}{a} - \operatorname{arctg} \frac{cx}{a} \right]}{s-x} ds$$

$$\psi_*(x) = \frac{1}{2} [\operatorname{arctg}(cx/a) + \psi_2(x)], \quad q(x) = \frac{\beta^2}{1 + (cx/a)^2}$$

$$\psi_2(x) = -\frac{B^+(x)}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\ln q(\tau) d\tau}{B^+(\tau)(\tau-x)} = \frac{B^+(x)}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\ln [1 + (cx/a)^2] d\tau}{B^+(\tau)(\tau-x)}.$$

Отметим, что при выводе последней из этих формул было использовано соотношение [17]:

$$\int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2}(s-x)} = 0 \quad (|x| < a).$$

Используя вышеприведенные формулы, для функций  $F_{\pm}^{(1,n)}(x)$  ( $n = 0, 1$ ) получим выражения:

$$\begin{aligned} F_+^{(1,0)}(x) &= iA\omega(x)F(x), \quad F_-^{(1,0)}(x) = A\omega(x)F(-x) \\ F_+^{(1,1)}(x) &= -iF_+^{(1,0)}(-x) = A\omega(-x)F(-x) \\ F_-^{(1,1)}(x) &= iF_-^{(1,0)}(-x) = iA\omega(-x)F(x) \\ F(x) &= \frac{[(1+cx/a)\cos\psi_*(x) - (1-cx/a)\sin\psi_*(x)]}{\sqrt[4]{4q(x)}\exp[\psi_1(x)][1+(cx/a)^2]}. \end{aligned}$$

Определим постоянные  $C_j$  ( $j = 1, 2$ ). Для этого сравним коэффициенты при  $z^{-1}$  разложения функций  $\Phi_j(z)$  ( $j = 1, 2$ ) на бесконечности по представлениям (3.1) и (3.7). Используя первые два условия (2.5), получим:

$$\begin{aligned} iC_1 + C_2 &= -\frac{e^{-B_0/2}P_0}{2\neq i} - iD_0 - D_1, \\ -iC_1 + C_2 &= -iD_0 + D_1 \end{aligned}$$

Откуда при помощи значения интеграла [17]

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln(1+(cx)^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\neq \ln \left[ \frac{1+\sqrt{1+c^2}}{2} \right]$$

найдем

$$C_1 = \frac{e^{-B_0/2}P_0}{4\neq} + iD_1, \quad C_2 = -\frac{e^{-B_0/2}P_0}{4\neq i} - iD_0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{8\neq} \int_{-a}^a \frac{F_-^{(1,0)}(s)ds}{\sqrt{a^2-s^2}}, \quad D_1 = \frac{1}{8\neq} \int_{-a}^a \frac{F_-^{(1,1)}(s)ds}{\sqrt{a^2-s^2}} \\ B_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\ln q(\tau)d\tau}{\sqrt{a^2-\tau^2}} = \ln \left[ \frac{2\beta}{1+\sqrt{1+c^2}} \right]. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что  $D_1 = -iD_0$ . Действительно, так как  $F_-^{(1,1)}(x) = iF_-^{(1,0)}(-x)$ ,

то можем записать

$$D_1 = \frac{1}{4\neq} \int_{-a}^a \frac{F_-^{(1,1)}(s)ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = \frac{i}{4\neq} \int_{-a}^a \frac{F_-^{(1,0)}(-s)ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = \frac{i}{4\neq} \int_{-a}^a \frac{F_-^{(1,0)}(s)ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = iD_0.$$

Значит, постоянные  $C_j$  ( $j = 1, 2$ ) можем представить в следующем виде:

$$C_1 = \frac{e^{-B_0/2}P_0}{4\neq} - D_0, \quad C_2 = iC_1.$$

Далее для определения контактного давления и нормального составляющего дислокации смещений по формулам Племяля–Сохоцкого [4] получим формулы:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = C_1 \left[ X_1^{(1,0)+}(x) - X_1^{(1,0)-}(x) \right] + \\ &\quad + C_2 \left[ X_1^{(1,1)+}(x) - X_1^{(1,1)-}(x) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \Phi_1^{(1,0)+}(x) - \Phi_1^{(1,0)-}(x) \right] + \frac{1}{2} \left[ \Phi_1^{(1,1)+}(x) - \Phi_1^{(1,1)-}(x) \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
v'(x) = & \Phi_2^+(x) - \Phi_2^-(x) = C_1 \left[ X_2^{(1,0)+}(x) - X_2^{(1,0)-}(x) \right] + \\
& + C_2 \left[ X_2^{(1,1)+}(x) - X_2^{(1,1)-}(x) \right] \frac{1}{2} \left[ \Phi_2^{(1,0)+}(x) - \Phi_2^{(1,0)-}(x) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left[ \Phi_2^{(1,1)+}(x) - \Phi_2^{(1,1)-}(x) \right].
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя в формулы (3.8) и (3.9) приведенные значения функций и введя обозначения

$$\begin{aligned}
Q_1(x) &= \sqrt[4]{4q(x)} \exp[\psi_1(x)] [\cos \psi_*(x) + \sin \psi_*(x)] \\
Q_2(x) &= \sqrt[4]{4q(x)} \exp[\psi_1(x)] [(1 + cx/a) \cos \psi_*(x) - (1 - cx/a) \sin \psi_*(x)] \\
\psi_*(x) &= \frac{1}{2} [\arctg(cx/a) + \psi_2(x)],
\end{aligned}$$

после некоторых математических выкладок для нормального контактного давления и нормального составляющего дислокации смещений точек берегов трещины получим выражения:

$$\sigma(x) = \eta_1(-x) + \eta_1(x), \quad v'(x) = \frac{1}{\beta} [\eta_2(-x) - \eta_2(x)]. \quad (3.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\eta_i(x) &= \frac{A}{4[1 + (cx/a)^2]} + \frac{Q_i(x)}{\omega(x)} \left( C_1 + \frac{A}{4} I_1(x) \right) + \frac{A}{4} \frac{Q_i(x)}{\omega(-x)} I_2(x), \quad (i = 1, 2) \\
I_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\omega(s) F(s)}{s - x} ds, \quad I_2(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\omega(-s) F(s) ds}{\sqrt{a^2 - s^2} (s - x)}.
\end{aligned}$$

Касательные контактные напряжения можно определять по последней из соотношений системы (2.6). Горизонтальный же компонент дислокации смещения точек берегов трещины  $u'(x)$  можно определить, решив второе или третье уравнение системы (2.4) или же уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s - x} ds = f \frac{x}{2\vartheta_2 a} \sigma(x) - \alpha v'(x), \quad (3.11)$$

которое получается при помощи линейной комбинации указанных уравнений. Решение уравнения (3.11) при третьем из условий (2.5) записывается в виде [4]:

$$u'(x) = - \frac{1}{2\pi\vartheta_2 a \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - s^2} (f\sigma(s) - 2\vartheta_2 a \alpha v'(s)) ds}{s - x}.$$

Отметим, что в частном случае, когда трение отсутствует, будем иметь:

$$c = A = \gamma(x) = \psi_1(x) = \psi_2(x) = F(x) = D_0 = 0,$$

$$Q_1(x) = Q_2(x) = \sqrt{2\beta}, \quad e^{B_0/2} = \sqrt{\beta}, \quad q(x) = 2\ln\beta, \quad C_1 = \frac{P_0}{4\pi\sqrt{\beta}},$$

$$\omega(x) = (a+x)^{1/4}(a-x)^{3/4}.$$

Тогда из формул (3.10) и (3.11) для нормального контактного давления и нормальной составляющей дислокации смещений точек берегов трещины получим выражения:

$$\sigma(x) = \frac{\sqrt{2}P_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{\omega(x)} + \frac{1}{\omega(-x)} \right]$$

$$v'(x) = -\frac{\sqrt{2}P_0}{4\pi\beta} \left[ \frac{1}{\omega(x)} - \frac{1}{\omega(-x)} \right],$$

которые точно совпадают с результатами работы [13], если в них принять коэффициент трения равным нулю.

**4. Численные расчеты.** Приведем также некоторые численные результаты. Очевидно, что численные значения контактных напряжений и раскрытие трещины можно вычислить при помощи выше полученных формул. Однако мы пойдем другим путем и построим решение системы (2.7) численно-аналитическим методом механических квадратур, который, на наш взгляд, более общий и дает возможность решать аналогичные задачи для ограниченных областей, т.е. когда интегральные уравнения будут содержать регулярные части. С этой целью сформулируем систему (2.6) на интервале  $(-1, 1)$  и, обозначив

$$\sigma_*(x) = a\sigma(ax) / P_0, \quad v'_*(x) = v'(ax), \quad \frac{\beta a}{P_0} = \beta_*,$$

запишем ее в виде:

$$\sigma_*(x) - \frac{cx}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_*(s)}{s-x} ds + \frac{\beta_*}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v'_*(s)}{s-x} ds = A_* \quad \left( A_* = \frac{f\alpha}{\pi} \right)$$

$$cx\sigma_*(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_*(s)}{s-x} ds + \beta_* v'_*(x) = 0. \quad (4.1)$$

Далее введем в рассмотрение новые искомые функции  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ) по формулам:

$$\sigma_*(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad v'_*(x) = \frac{\sqrt{1+c^2}}{\beta_*} [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)].$$

Подставляя эти значения искомым функции в систему (4.1), после некоторых преобразований для определения функций  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ) приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{1+c^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(s)ds}{s-x} + \left[ \left( cx + \sqrt{1+c^2} \right)^2 + 1 \right] \varphi_1(x) + c^2(x^2-1)\varphi_2(x) &= A_* \\ -\frac{2\sqrt{1+c^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(s)ds}{s-x} + \left[ \left( cx - \sqrt{1+c^2} \right)^2 + 1 \right] \varphi_2(x) + c^2(x^2-1)\varphi_1(x) &= A_{**}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

При этом первые два условия (2.5) через функции  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ) запишутся в следующем виде:

$$\int_{-1}^1 \varphi_j(s)ds = 0.5 \quad (j = 1, 2). \quad (4.3)$$

Несложно заметить, что в первом уравнении доминирующей, в смысле особенности, является функция  $\varphi_1(x)$ , так как коэффициент при функции  $\varphi_2(x)$  равен нулю при  $x = \pm 1$ , а во втором уравнении —  $\varphi_2(x)$ . Кроме того, очевидно, что если во втором уравнении системы (4.2) заменим  $x$  на  $-x$  и обозначим  $\varphi_2(-x) = \varphi_1(x)$ , то получим первое уравнение системы (4.2), т.е.  $\varphi_2(x) = \varphi_1(-x)$ . Определим поведение функции в концевых точках интервала интегрирования. Используя соотношение [16]:

$$\int_a^b \frac{\chi(\xi)d\xi}{(\xi-c)^\gamma(\xi-\eta)} = \pm \pi \frac{ctg\pi\gamma}{(\eta-c)^\gamma} \chi(c) + \Phi(\eta),$$

где нужно взять верхний знак в случае, когда  $c = a$ , и нижний знак, когда  $c = b$ , а функция  $\Phi(\eta)$  принадлежит классу  $H$  в окрестности точки  $c$ , при помощи первого уравнения (4.2) несложно убедиться, что функция  $\varphi_1(x)$ , как и в выше полученных замкнутых решениях, в точке  $x = -1$  имеет степенную особенность типа  $(1+x)^{-\gamma}$ , а в точке  $x = 1$  — степенную особенность типа  $(1+x)^{\gamma-1}$ . При помощи второго же уравнения (4.2) убеждаемся, что функция  $\varphi_2(x)$  в точке  $x = -1$  имеет степенную особенность типа  $(1+x)^{\gamma-1}$ , а в точке  $x = 1$  степенную особенность типа  $(1+x)^{-\gamma}$ , где

$$\gamma = 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctg \left[ \sqrt{1+c^2} - c \right] = 0.75 - \frac{1}{2\pi} \arctg(c).$$

Исходя из вышесказанного, искомые функции представим в виде:

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi_1^*(x)}{(1+x)^\gamma(1-x)^{1-\gamma}}, \quad \varphi_2(x) = \frac{\varphi_2^*(x)}{(1+x)^{1-\gamma}(1-x)^\gamma},$$

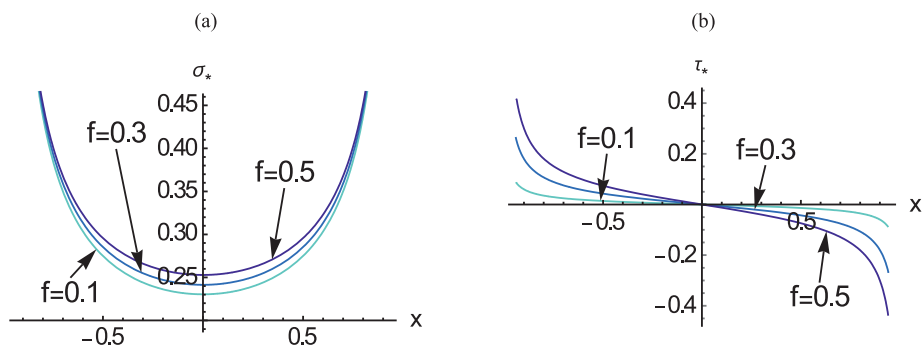


Рис. 2. Нормальное (а) и касательное (б) контактные напряжения.

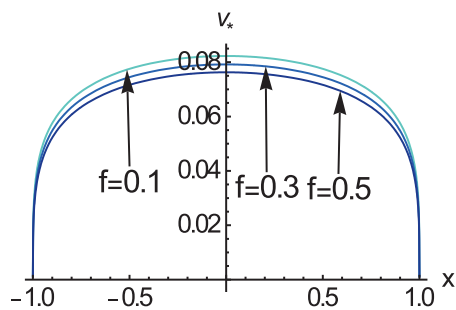


Рис. 3. Раскрытие трещины.

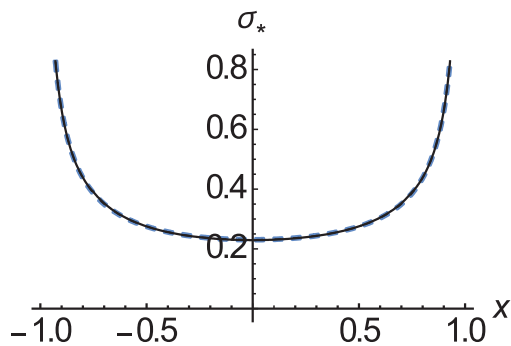


Рис. 4. Нормальное контактное давление по принятой модели и по модели контакта Галина.

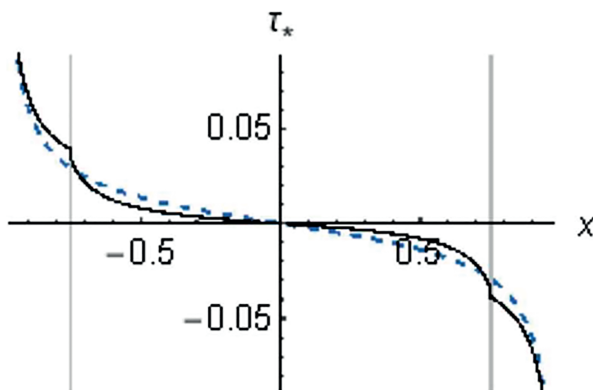


Рис. 5. Касательное контактное напряжение по принятой модели и по модели контакта Галина.

где функции  $\varphi_1^*(x)$  и  $\varphi_2^*(x)$  – ограниченные, гладкие функции на замкнутом интервале  $[-1, 1]$ .

Подставляя эти выражения функции  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ) в систему (4.2) и в условия (4.3) по обычной процедуре [18], для определения функций  $\varphi_j^*(x)$  ( $j = 1, 2$ ) в точках коллокации  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) приходим к системе алгебраических уравнений.

Проведены численные расчеты и вычислены значения приведенного контактного давления  $\sigma_*(x)$ , касательного контактного напряжения  $\tau_*(x) = -fx\sigma_*(x)$  и раскрытия трещины  $v_*(x) = v(ax)/a$  в случае, когда  $v = 0.3$ ,  $aE/P_0 = 1$  для различных значений максимального значения коэффициента трения  $f$ .

Результаты вычислений приведены в виде графиков (рис. 2–5). На рис. 2 приведены графики нормального давления и касательных напряжений под включением в зависимости от максимального значения коэффициента трения  $f$ . Из них видно, что контактное давление мало зависит от  $f$ , тогда как при увеличении  $f$  касательные напряжения возрастают.

На рис. 3 приведены графики раскрытия трещины с использованной здесь модели трения в случае, когда  $f = 0.1, 0.3, 0.5$ . Из них явствует, что при увеличении максимального значения коэффициента трения раскрытие трещины уменьшается.

На рис. 4 и рис. 5 приведены графики нормального давления и касательных напряжений под включением, вычисленные с использованием здесь принятой модели трения (пунктирные линии) и модели контакта Л.А. Галина (сплошные линии) в случае, когда  $\rho = 0.1$ . Как видно из графиков, нормальные давления почти не отличаются друг от друга, а касательные напряжения довольно близки и мало отличаются друг от друга.

**5. Заключение.** Таким образом, изучено плоско-деформированное состояние однородной упругой плоскости с конечной трещиной, на один из берегов которой вдавливается абсолютно жесткий штамп с трением, когда касательные контактные напряжения связаны с нормальным контактным давлением законом сухого трения. При этом считается, что коэффициент трения зависит от



координат соприкасающихся точек контактирующих поверхностей и прямо пропорционален им. Выведено ключевое уравнение в виде задачи Римана для двух функций, и построено ее точное решение. Построено решение задачи также численно-аналитическим методом механических квадратур, и изучены закономерности изменения контактных напряжений и раскрытия трещины в зависимости от максимального значения коэффициента трения. Проведен сравнительный анализ с решением той же задачи в рамках контактной модели Л.А. Галина.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта 21Т-2С209.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270 с.
3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
5. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стацук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
6. Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения. В сб.: “Современные проблемы механики и авиации”, посв. И.Ф. Образцову. 1980. С. 156–162.
7. Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с монетообразной трещиной // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 3. С. 31–46.
8. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной // Изв. НАН РА. Механика. 1995. Т. 48. № 4. С. 57–65.
9. Hakobyan V.N. Stress concentrators in continuous deformable bodies. *Advanced Structured Materials*. V. 181. Springer, 2022. 397 p.
10. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жестком включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 3. С. 153–166.
11. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 907–912.
12. Mkhitarian S.M. On the stress-strain state of an elastic infinite plate with a crack expanding by means of smooth thin inclusion indentation// *Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*. 2019. V. 72. № 4. P. 38–64.  
<http://doi.org/10.33018/72.4.4>
13. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Контактная задача для однородной плоскости с трещиной // Известия НАН РА. Механика. 2020. Т. 73. № 4. С. 3–12.  
<http://doi.org/10.33018/73.4.1>
14. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Dashtoyan L.L., Sahakyan A.V. Indentation of an Absolutely Rigid Thin Inclusion into One of the Crack Faces in an Elastic Plane Under Slippage at the

- Ends // In Book: *Altenbach H., Bauer S., Belyaev K., et al. (eds). Advances in Solid and Fracture Mechanics. A Liber Amicorum to Celebrate the Birthday of N. Morozov.* 2022. P. 187–197.
15. *Акопян В.Н., Акопян Л.В.* Об одной модели трения применительно к контактным задачам теории упругости // Изв. НАН РА. Механика. 2023. Т. 76. № 2. С. 20–31.  
<http://doi.org/10.54503/0002-3051-2023.76.2-20>
  16. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
  17. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
  18. *Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A.* Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. V. 991. 012070.  
<http://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012070>

UDC 539.3

## ON A CONTACT PROBLEM FOR A HOMOGENEOUS PLANE WITH A FINITE CRACK UNDER FRICTION

© 2024 г. V. Hakobyan<sup>a, \*</sup>, H. Amirjanyan<sup>a, \*\*</sup>, L. Hakobyan<sup>a, \*\*\*</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia,  
Yerevan, Armenia*

<sup>\*</sup>*e-mail: [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am),*

<sup>\*\*</sup>*e-mail: [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com),*

<sup>\*\*\*</sup>*e-mail: [lhakobyan@gmail.com](mailto:lhakobyan@gmail.com)*

**Abstract** — An exact solution to the contact problem of indentation of an absolutely rigid punch with a straight base, taking into account friction, into one of the edges of a finite crack located in a homogeneous elastic plane was derived. It is assumed that shear contact stresses are directly proportional to normal contact pressure. In this case, it is assumed that the friction coefficient is directly proportional to the coordinates of the contacting points of the contacting surfaces. The governing system of equations for the problem was derived in the form of the heterogeneous Riemann problem for two functions with variable coefficients and its closed solution is constructed in quadratures. Simple formulas for contact stresses and the normal dislocation component of displacements of crack edge points were obtained. The patterns of changes in contact stresses and crack opening depending on the maximum value of the friction coefficient have been studied.

**Keywords:** contact problem, friction, stamp, crack

## REFERENCES

1. *Galin L.A.*, 1980. Contact Problems in the Theory of Elasticity and Viscoelasticity. Nauka, 1980. 304 p.
2. *Shtaerman I.Ya.* Contact Problem of Elasticity Theory. Gostekhizdat, 1949. 270 p.
3. *Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P.* The Stress Distribution near Cracks in Plates and Shells. Kiev: Naukova Dumka, 1976. 443 p.
4. *Muskhelishvili N.I.* Some Problems of Mathematical Theory of Elasticity. M.: Nauka, 1966. 708 p.
5. *Berezhnitsky L., Panasiuk V., Staschuk N.* 1983. Interaction of Rigid Linear Inclusions and Cracks in Deformable Body. Kiev: Naukova Dumka, 1983. 288 p.
6. *Popov G.Ya.* About Concentration of the Elastic Stresses Near Thin Detached Inclusion. "Contemporary Problems of Mechanics and Aviation", Dedicated to I. Abramtsov. 1980. P. 156–162.
7. *Hakobyan V.N., Mirzoyan S.E., Dashtoyan L.L.* Axisymmetric Mixed Boundary Value Problem for Composite Space with Coin-Shaped Crack // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2015. № 3 (60). P. 31–46;  
<https://doi.org/10.18698/1812-3368-2015-3-31-46>
8. *Hakobyan V.N.* 1995. On One Mixed Problem for Composite Plate, Weakened by Crack // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. 1995. V. 48. № 4. P. 57–65.
9. *Hakobyan V.N.* Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies, Advanced Structured Materials, V. 181. Springer, 2022. 397 p.
10. *Il'ina I.I., Silvestrov V.V.* The Problem of a Thin Interfacial Inclusion Detached from the Medium Along One Side // Mech. Solids. 2005. V. 40. № 3. P. 153–166.
11. *Cherepanov G.P.* Solution of a Linear Boundary Value Problem of Riemann for Two Functions and its Application to Certain Mixed Problems in the Plane Theory of Elasticity // J. Appl. Math. Mechanics. 1962. V. 26. № 5. P. 907–312.
12. *Mkhitaryan S.M.* On the Stress-Strain State of an Elastic Infinite Plate with a Crack Expanding by Means of Smooth Thin Inclusion Indentation // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. 2019. V. 72. № 4. P. 38–64;  
<https://doi.org/10.33018/72.4.4>
13. *Hakobyan V.N., Hakobyan L.V.* Contact problem for a homogeneous plane with crack // Proc. NAS RA. Mechanics. 2020. V. 73. № 4. P. 3–12.
14. *Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Dashtoyan L.L., Sahakyan A.V.* Indentation of an Absolutely Rigid Thin Inclusion into One of the Crack Faces in an Elastic Plane Under Slippage at the Ends. In Book: *Altenbach H., Bauer S., Belyaev K. et al.* (eds), Advances in Solid and Fracture Mechanics, A Liber Amicorum to Celebrate the Birthday of N. Morozov. 2022. P. 187–197.
15. *Hakobyan V.N., Hakobyan L.V.* On a model of friction for contact problems of the theory of elasticity // Proc. NAS RA. Mechanics. 2023. V. 76. № 2. P. 20–31;  
<https://doi.org/10.54503/0002-3051-2023.76.2-20>
16. *Muskhelishvili N.I.* Singular integral equations. Moscow: Nauka, 1968. 511 p.
17. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and Series. Moscow: Nauka, 1981. 738 p.
18. *Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A.* Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // IOP Conf. Series: J. Physics: Conf. Series. 2018. V. 991. 012070;  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012070>

УДК 629.7.036.54

## ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РЕСУРСНЫХ РЕЖИМОВ НАГРУЖЕНИЯ ПРИ ТРАНСПОРТИРОВКЕ

© 2024 г. А. Ю. Бондаренко<sup>а, \*</sup>, А. И. Лиходед<sup>а, \*\*</sup>, В. А. Титов<sup>а</sup>,  
С. П. Фунтиков<sup>б</sup>, А. Н. Шилин<sup>б</sup>

<sup>а</sup>Центральный научно-исследовательский институт машиностроения,  
г.о. Королёв, Россия

<sup>б</sup>Ракетно-космический центр “Прогресс”, г. Самара, Россия

\*e-mail: andrei.bondarenko@phystech.edu,

\*\*e-mail: likhoded@tsniimash.ru

Поступила в редакцию 04.07.2023 г.

После доработки 23.08.2023 г.

Принята к публикации 24.08.2023 г.

Существует ряд случаев эксплуатаций конструкций, в которых внешние воздействия носят случайный колебательный характер. Это в первую очередь транспортировочные случаи — железнодорожная и автомобильная транспортировки.

Поэтому при формировании режимов нагружения для оценки ресурсной прочности конструкций в этих случаях используется вероятностно-статистический подход. Представлены основные принципы такого подхода при формировании спектров циклического нагружения для отработки и анализа ресурсной прочности изделий. Проведена оценка уровней циклического нагружения, и сформированы предложения по использованию разработанного подхода при оценке ресурсной прочности конструкций.

*Ключевые слова:* случайная вибрация, вероятностно-статистический подход, спектр циклического нагружения, ресурсная прочность, транспортирование изделий

DOI: 10.31857/S1026351924020108, EDN: uvzimc

**1. Введение.** При проектировании и испытаниях конструкций ракетно-космической техники широко распространен принцип, согласно которому достижение предельного состояния конструкции по критерию прочности наиболее вероятно произойдет при наибольших уровнях внешних воздействий — статических, вибрационных, ударных, акустических. Соответственно и большая часть расчетных и экспериментальных работ основана на анализе поведения конструкций при этих типах внешних воздействий.

С постепенным ростом заинтересованности в многозатратных ракетных системах и расширением требований по условиям эксплуатации космической техники возникает необходимость более внимательно относиться к тем случаям нагружения конструкций, в которых внешние воздействия

носят длительный случайный колебательный характер. Эти случаи в основном связаны с наземной эксплуатацией — железнодорожным и автомобильным транспортированием изделий.

В данной статье рассматриваются вопросы обеспечения ресурсной прочности конструкций, то есть прочности при повторяющемся нагружении, характерном для транспортировки. В общем случае ресурсная прочность изделий определяется спектром циклического нагружения — количеством циклов нагружения с различными уровнями.

При этом нагрузки для оценки ресурсной прочности должны базироваться не на расчетных уровнях с учетом коэффициентов безопасности, а на эксплуатационных, наиболее близко отражающих условия нагружения в процессе эксплуатации. Это позволяет избежать неоправданного завышения ресурсных нагрузок и заниженной оценки запасов ресурсной прочности конструкций.

Максимальные эксплуатационные нагрузки формируются на основе обобщения длительного опыта натурных измерений внешних воздействий (перегрузок) при транспортировочных испытаниях. Эти уровни формируются из весовой составляющей (в вертикальном направлении) и экстремальных низкочастотных перегрузок в пределах низших тонов колебаний транспортируемого изделия и оборудования. Однако в некоторых случаях достоверные данные о спектрах нагружения на определенных этапах эксплуатации могут отсутствовать.

**2. Основные допущения вероятностно-статического подхода.** В связи с этим предлагается вероятностно-статистический подход к формированию спектров циклического нагружения для отработки и анализа ресурсной прочности изделий. Этот подход базируется на нескольких основных предположениях:

1. Задании коэффициента между среднеквадратичным значением (СКЗ) перегрузки  $\sigma$  и ее максимальным эксплуатационным  $n_{\max}^{expl}$  значением:

$$n_{\max}^{expl} = k\sigma. \quad (2.1)$$

В некоторых случаях величина  $k$  назначается на экспертном уровне с учетом имеющихся прецедентов и опыта.

2. Оценке предельного количества циклов нагружения объекта  $N_{\Sigma}$  с использованием данных о длительности воздействий, характерных частотах колебаний транспортных средств, а также частот наиболее энергоемких тонов колебаний объекта.

3. Применении гипотетического закона распределения перегрузок. При анализе динамических процессов для амплитуд случайных колебаний используется интегральный Рэлеевский закон распределения [1]:

$$P(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (x > 0). \quad (2.2)$$

4. Выборе нормативного значения вероятности непревышения тех или иных параметров внешних воздействий или нагрузок. Как правило, для различных параметров внешних воздействий принимаются следующие уровни вероятности непревышения  $P_{giv}^i$ :

$$\mathcal{P}_{giv}^i = 0.95, 0.99, 0.997 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.3)$$

На основе интегрального закона распределения Рэлея (2.2) определяются максимальные перегрузки, принятые для формирования спектров циклического нагружения при заданных уровнях вероятности неперевышения  $\mathcal{P}_{giv}^i$  (2.3). С учетом (2.2) имеем:

$$1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \mathcal{P}_{giv}^i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Для определенности далее будем рассматривать внешние воздействия в виде линейных перегрузок. Из решения этого трансцендентного уравнения величина перегрузки, которая будет использоваться для оценки количества циклов нагружения при заданной вероятности неперевышения  $\mathcal{P}_{giv}^i$ , определится следующими соотношениями:

$$x_{res}^i = c^i \sigma, \text{ где } c^i = \sqrt{-2 \ln(1 - \mathcal{P}_{giv}^i)} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Отметим, что под корнем стоит положительная величина, так как  $0 < 1 - \mathcal{P}_{giv}^i < 1$ , и, следовательно, логарифм  $\ln(1 - \mathcal{P}_{giv}^i)$  принимает отрицательные значения. При этом величина среднеквадратичного значения  $\sigma$  определяется из соотношения (2.1).

В итоге уровням вероятности неперевышения 0.95, 0.99, 0.997 (2.3) соответствуют следующие уровни перегрузок:

$$\begin{aligned} x_{res}^1 &= 2.448 \cdot \sigma, & c^1 &= 2.448, \\ x_{res}^2 &= 3.035 \cdot \sigma, & c^2 &= 3.035, \\ x_{res}^3 &= 3.409 \cdot \sigma, & c^3 &= 3.409. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, при формировании общего количества циклов нагружения для ресурсных испытаний предлагается учитывать перегрузки разного уровня, не превышающие значения  $x_{res}^i$  (2.4).

**3. Оценка количества эквивалентных циклов нагружения.** Для сокращения количества циклов нагружения и, следовательно, объемов и сроков ресурсных испытаний используется процедура приведения случайных перегрузок, распределенных в соответствии с принятым законом (2.2), к эквивалентным циклам с максимальной амплитудой  $x_{res}^i$ , соответствующей принятому уровню вероятности неперевышения.

Эта задача решается на основе гипотезы эквивалентности вибродинамических воздействий, являющейся следствием усталостной кривой Веллера [2]:

$$(x_j)^4 \cdot N_j = (x_{res}^i)^4 \cdot N_{ji}^{eq}. \quad (3.1)$$

Здесь  $x_j$  — перегрузка  $j$ -го уровня;

$N_j$  — количество циклов перегрузок  $j$ -го уровня;

$N_{ji}^{eq}$  — эквивалентное количество циклов с максимальной перегрузкой, принятой для ресурсных испытаний  $x_{res}^i$ .

Интегральной вероятности закона распределения (2.2) соответствует плотность вероятности:

$$p(x) = \frac{dP}{dx} = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (x > 0). \quad (3.2)$$

С использованием гипотезы эквивалентности (3.1) и выражения для плотности вероятности (3.2) определим количество приведенных циклов, соответствующих максимальной перегрузке  $x_{res}^i$ .

Количество циклов  $dN_x$  с амплитудами, лежащими в диапазоне  $[x, x + dx]$ , определяется равенством:

$$dN_x = N_{\Sigma} \cdot p(x) dx.$$

С учетом соотношения (3.1) количество приведенных к максимальной ресурсной перегрузке  $x_{res}^i$  циклов  $dN_x^{eq}$ , эквивалентных количеству циклов  $dN_x$ , соответствующих текущему значению  $x$ , примет вид:

$$dN_x^{eq} = N_{\Sigma} \cdot \left( \frac{x}{x_{res}^i} \right)^4 \cdot p(x) dx.$$

Общее количество приведенных к максимальной ресурсной перегрузке  $x_{res}^i$  (2.4) циклов  $N_i^{eq}$ , используемых в оценке ресурса при заданной вероятности непревышения  $P_{giv}^i$ , определяется следующим интегралом:

$$N_i^{eq} = \int_0^{x_{res}^i} N_{\Sigma} \cdot \left( \frac{x}{x_{res}^i} \right)^4 \cdot p(x) dx \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.3)$$

С учетом выражения для плотности вероятности (3.2) этот интеграл преобразуется к следующему виду:

$$N_i^{eq} = \frac{N_{\Sigma}}{\sigma^2 \left( x_{res}^i \right)^4} \mathcal{I}_1(x), \quad (3.4)$$

где

$$\mathcal{I}_1(x) = \int_0^{x_{res}^i} x^5 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (3.5)$$

Для вычисления интеграла (3.5) воспользуемся правилом интегрирования по частям, представив его в следующей форме:

$$\mathcal{I}_1(x) = \sigma^2 \int x^4 \cdot \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Тогда будем иметь:

$$\mathcal{I}_1(x) = \sigma^2 \left( -x^4 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + 4\mathcal{I}_2(x) \right), \quad (3.6)$$

здесь

$$\mathcal{I}_2(x) = \int x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Интеграл  $\mathcal{I}_2(x)$  также берется по частям, в результате чего имеем:

$$\mathcal{I}_2(x) = \sigma^2 \left( -x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + 2 \int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \right)$$

Интеграл, входящий в это выражение, элементарно вычисляется, и для интеграла  $\mathcal{I}_1(x)$  с учетом (3.6) окончательно получим выражение:

$$\mathcal{I}_1(x) = \sigma^2 \left( -x^4 - 4\sigma^2 x^2 - 8\sigma^4 \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Тогда выражение для количества приведенных к максимальной перегрузке  $x_{res}^i$  циклов (3.3), используемых в оценке ресурса,  $N_i^{eq}$  для различных уровней вероятности неперевышения  $\mathcal{P}_i$  примет вид:

$$N_i^{eq} = \frac{N_\Sigma}{(x_{res}^i)^4} \left( -\left(x_{res}^i\right)^4 - 4\sigma^2 \left(x_{res}^i\right)^2 - 8\sigma^4 \right) e^{-\frac{(x_{res}^i)^2}{2\sigma^2}} + 8\sigma^4 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Равенство для приведенных циклов  $N_i^{eq}$  с учетом выражения для максимальной перегрузки  $x_{res}^i$  (2.4) запишется так:

$$N_i^{eq} = \frac{N_\Sigma}{(c^i)^4} \left( -\left(c^i\right)^4 - 4\left(c^i\right)^2 - 8 \right) e^{-\frac{(c^i)^2}{2}} + 8 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.7)$$

Таким образом, получена явная зависимость количества приведенных циклов  $N_i^{eq}$  от отношения максимальной перегрузки  $x_{res}^i$ , учитываемой при формировании спектра циклического нагружения, к среднеквадратичному значению перегрузки  $\sigma$ .

При малых уровнях напряженного состояния и уровнях перегрузок допускается использовать пятую степень в гипотезе эквивалентности внешних воздействий (3.1) [3]:

$$x_j^5 \cdot N_j = \left(x_{res}^i\right)^5 \cdot N_{ji}^{eq}.$$



Тогда выражение для количества приведенных циклов примет вид:

$$N_i^{*eq} = \frac{N_\Sigma}{\sigma^2 (x_{res}^i)^5} \mathcal{I}_1^*(x_{res}^i), \quad \text{где} \quad \mathcal{I}_1^*(x_{res}^i) = \int_0^{x_{res}^i} x^6 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (3.8)$$

Для вычисления интеграла  $\mathcal{I}_1^*$  используется троекратное интегрирование по частям. В итоге для неопределенного интеграла  $\mathcal{I}_1^*$  получим выражение:

$$\mathcal{I}_1^*(x) = \sigma^2 \left( -x^5 - 5x^3\sigma^2 - 15x\sigma^4 \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + 15\sigma^6 \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (3.9)$$

Для вычисления значения интеграла  $\mathcal{I}_1^*(x)$  при трех значениях  $x_{res}^i$  (2.4) необходимо определить численное значение интеграла, входящего в (3.9). При значениях верхнего предела  $x_{res}^i$  заменой  $x = t\sigma$  этот интеграл сводится к следующему:

$$\int_0^{x_{res}^i} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma \cdot \mathcal{I}_0^*(c^i), \quad \text{где} \quad \mathcal{I}_0^*(c^i) = \int_0^{c^i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Численные значения интегралов  $\mathcal{I}_0^*(c^i)$  с учетом (2.4) приведены в табл. 1.

В итоге при малых уровнях напряженного состояния и уровнях перегрузок, когда допускается использовать пятую степень в гипотезе эквивалентности внешних воздействий (3.1), количество приведенных циклов к максимальной перегрузке  $x_{res}^i$ , используемой для оценки ресурса при различных уровнях вероятности непревышения  $\mathcal{P}_i$ , примет вид:

$$N_i^{*eq} = \frac{N_\Sigma}{(x_{res}^i)^5} \left[ \left( -(x_{res}^i)^5 - 5\sigma^2 (x_{res}^i)^3 - 15\sigma^4 x_{res}^i \right) e^{-\frac{(x_{res}^i)^2}{2\sigma^2}} + 15\sigma^4 \int_0^{x_{res}^i} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \right].$$

С учетом (2.4) количество приведенных циклов к максимальной перегрузке  $x_{res}^i$  при использовании пятой степени в гипотезе эквивалентности примет вид, аналогичный (3.7):

$$N_i^{*eq} = \frac{N_\Sigma}{(c^i)^5} \left[ \left( -(c^i)^5 - 5(c^i)^3 - 15(c^i) \right) e^{-\frac{(c^i)^2}{2}} + 15 \cdot \mathcal{I}_0^*(c^i) \right] \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.10)$$

Была проведена оценка количества приведенных циклов нагружения  $N_i^{eq}$  (3.7) при использовании четвертой степени в критерии эквивалентности (3.1) и  $N_i^{*eq}$

**Таблица 1.** Численные значения интеграла  $\mathcal{I}_0^*(c^i)$

| i                      | 1        | 2        | 3        |
|------------------------|----------|----------|----------|
| $\mathcal{P}_i$        | 0.95     | 0.99     | 0.997    |
| $c^i$                  | 2.448    | 3.035    | 3.409    |
| $\mathcal{I}_0^*(c^i)$ | 1.235297 | 1.250298 | 1.252496 |

**Таблица 2.** Оценка приведенного количества циклов нагружения к подуровням. Базовое количество циклов нагружения  $N_{\xi} = 10^7$

| $i$                    |                 | 1                           | 2                           | 3                           |
|------------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $\mathcal{P}_i$        |                 | 0.95                        | 0.99                        | 0.997                       |
| $c^i$                  |                 | 2.448                       | 3.035                       | 3.409                       |
| $x_{res}^i$            |                 | $c^1 \cdot \sigma$          | $c^2 \cdot \sigma$          | $c^3 \cdot \sigma$          |
| $N_i^{eq} (3.7)$       |                 | <b>1.283·10<sup>6</sup></b> | <b>7.902·10<sup>5</sup></b> | <b>5.506·10<sup>5</sup></b> |
| $N_{i,j}^{eq} (3.11)$  | $0.3 x_{res}^i$ | $7.352 \cdot 10^5$          | $1.016 \cdot 10^6$          | $1.184 \cdot 10^6$          |
|                        | $0.7 x_{res}^i$ | $1.675 \cdot 10^6$          | $1.507 \cdot 10^6$          | $1.297 \cdot 10^6$          |
|                        | $x_{res}^i$     | $8.752 \cdot 10^5$          | $4.201 \cdot 10^5$          | $2.296 \cdot 10^5$          |
| $N_i^{*eq} (3.10)$     |                 | <b>9.826·10<sup>5</sup></b> | <b>5.565·10<sup>5</sup></b> | <b>3.621·10<sup>5</sup></b> |
| $N_{i,j}^{*eq} (3.11)$ | $0.3 x_{res}^i$ | $6.253 \cdot 10^5$          | $8.602 \cdot 10^5$          | $9.991 \cdot 10^5$          |
|                        | $0.7 x_{res}^i$ | $1.380 \cdot 10^6$          | $1.208 \cdot 10^6$          | $1.016 \cdot 10^6$          |
|                        | $x_{res}^i$     | $7.491 \cdot 10^5$          | $3.514 \cdot 10^5$          | $1.889 \cdot 10^5$          |

(3.10) при использовании пятой степени в (3.1) в соответствии с предлагаемым вероятностно-статистическим подходом. В качестве базового использовалось общее количество циклов нагружения  $N_{\xi} = 10^7$ . Эти результаты приведены в табл. 2.

Определение приведенного количества циклов нагружения на нескольких подинтервалах внутри выбранного для анализа ресурсной прочности интервала уровней нагружений от 0 до  $x_{res}^i$  должно проводиться в соответствии с (3.3), (3.8). Таким образом, например, для подуровня  $[a_j, b_j]$  приведенное количество циклов нагружения запишется в виде:

$$N_{i,j}^{eq} = \frac{N_{\Sigma}}{\sigma^2(b_j)^4} \int_{a_j}^{b_j} x^5 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \quad N_{i,j}^{*eq} = \frac{N_{\Sigma}}{\sigma^2(b_j)^5} \int_{a_j}^{b_j} x^6 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \quad (3.11)$$

при переводе по четвертой и пятой степени соответственно.

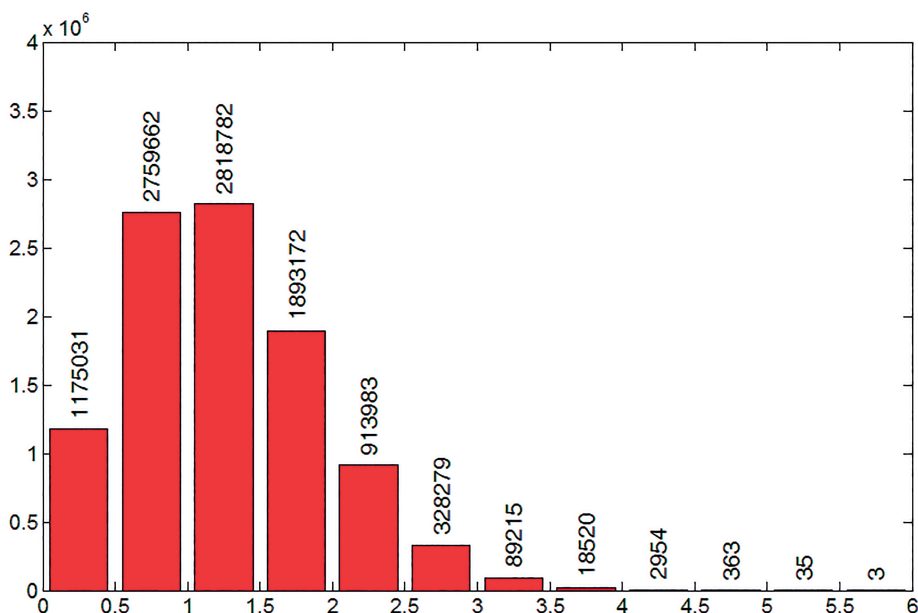


Рис. 1. По оси абсцисс отложен уровень нагружения в среднеквадратических значениях, по оси ординат число циклов нагружения внутри подуровней.

Таблица 3. Оценка приведенного количества циклов нагружения из правой части спектра (3.12) к уровню  $n_{\max}^{ekspl}$ . Базовое количество циклов нагружения  $N_{\xi} = 10^7$

| i                      | 1     | 2     | 3     |
|------------------------|-------|-------|-------|
| $\mathcal{P}_i$        | 0.95  | 0.99  | 0.997 |
| $c^i$                  | 2.448 | 3.035 | 3.409 |
| $N_{\max}^{eq}, k = 6$ | 26182 | 10005 | 4385  |
| $\xi, \%$              | 73.65 | 19.34 | 7.65  |

В табл. 2 приведены результаты оценки количества циклов нагружения при приведении к подуровням 30%, 70%, 100% в подинтервалах [0.0 0.3], [0.3 0.7] и [0.7 1.0] от  $x_{res}^i$ .

Из табл. 2 видно, что разделение на подуровни ведет к увеличению общего числа циклов нагружения (в рассмотренном варианте в 3–6 раз), однако позволяет снизить количество циклов нагружения с максимальным уровнем в соответствии с гипотезой эквивалентности вибродинамических воздействий (3.1).

Следует остановиться также на вопросе учета правой части спектра циклического нагружения, в которой большие уровни нагружения реализуются малое количество раз. В принятых предположениях это часть спектра от  $x_{res}^i$  до максимального эксплуатационного значения перегрузки  $n_{max}^{ekspl}$ :

$$x_{res}^i < x \leq n_{max}^{ekspl}. \quad (3.12)$$

Для этого проведем оценку количества циклов нагружения типового распределения (2.2) с шагом в половину среднеквадратического значения для базового количества циклов нагружения  $N_\varepsilon = 10^7$ . Результаты этой оценки приведены на рис. 1.

Как видно из рисунка, уровни перегрузок более трех среднеквадратических значений (вероятность непревышения которых для Рэлеевского распределения составляет 99%) можно считать достаточно маловероятными.

Была рассчитана величина  $\xi$ , определенная как отношение количества циклов от правой и левой частей спектра относительно  $x_{res}^i$  (для показателя кривой усталости 4), которая в соответствии с (3.3)–(3.5) запишется в виде:

$$\xi = \frac{\int_{x_{res}^i}^{k\sigma} x^5 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx}{\int_0^{x_{res}^i} x^5 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx} \cdot 100\%.$$

Результаты оценки эквивалентного числа циклов нагружения для правой части спектра (3.12), а также величины  $\xi$  при максимальном эксплуатационном уровне перегрузок  $n_{max}^{ekspl} = 6\sigma$  приведены в табл. 3.

Исходя из проведенного анализа можно сделать вывод, что при использовании вероятности непревышения  $P_i = 0.99$  вклад от правой части спектра циклического нагружения в общее количество эквивалентных циклов нагружения может составлять ~20%. Из этого следует, что уровни нагружения, представленные в табл. 3, также должны учитываться при анализе и обработке ресурсной прочности.

При оценке ресурса конструкции проводится симметризация нагрузок, так как наиболее полная информация по ресурсным свойствам материалов существует именно для симметричных циклов. Несимметричность циклов нагружения возникает как правило из-за наличия постоянной статической составляющей в перегрузках. Как правило, для транспортировки это весовая составляющая  $n_{stat} = 1$ .

Максимальное эксплуатационное значение амплитуды эквивалентного симметризованного цикла нагружения  $A_{eq}^i$  по Одингу [3] записывается в виде (в предположении линейной связи между перегрузками и напряжениями):

$$A_{eq}^i = \sqrt{x_{res}^i (x_{res}^i + n_{stat})},$$

где  $x_{res}^i$  — уровень динамической перегрузки, учитываемый при оценке ресурса.

**4. Заключение.** В итоге для случаев транспортировки с учетом принятых допущений разработан способ формирования форсированных уровней перегрузок с заданным уровнем вероятностей не превышения в обеспечение анализа и отработки ресурсной прочности изделий. Это позволяет свести все многообразие случайных разноуровневых циклов нагружения к суммарным циклам форсированных уровней перегрузок.

Таким образом, при проектировании изделий и отработке ресурсной прочности, особенно для изделий многоразового применения, дальность транспортирования которых может быть явно не задана, предлагается ориентироваться на соотношения величин  $\sigma$ ,  $x_{res}^i$  и  $n_{max}^{ekspl}$  с достижением пределов прочности, текучести и выносливости используемых материалов при соответствующих перегрузках. При отсутствии представительных данных по спектрам нагружения рекомендуется, чтобы максимальные уровни перегрузок, используемые для ресурсных испытаний, не превышали перегрузок, задаваемых для проектных прочностных расчетов и не приводили к появлению пластических деформаций в конструкции:

$$\sigma(n_{max}^{ekspl}) \leq \sigma_{0.2}.$$

Для изделий, многократное длительное транспортирование которых не предполагается, это требование может оказаться избыточным — при уровнях перегрузок больше  $x_{res}^i$ , определенной при вероятности не превышения не менее 0.99, в отдельных зонах конструкции могут возникать пластические деформации. Для их учета необходимо в каждом конкретном случае оценивать количество превышений указанного уровня и принимать решение по их включению в спектр циклического нагружения.

Вопрос принятия решения по конкретному уровню вероятности не превышения нагрузок, используемых при ресурсных испытаниях, зависит от степени ответственности рассматриваемого конструктивного объекта и носит нормативный характер. Окончательное определение параметров для формирования спектров циклического нагружения должно проводиться с учетом времени испытаний, возможностей оборудования и параметров нагружения изделия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
2. Гладкий В.Ф. Прочность, вибрация и надежность конструкции летательного аппарата. М.: Наука, 1975. 454 с.
3. Мыльников В.В., Кондрашкин О.Б., Шетулов Д.Б. Циклическая прочность и долговечность конструкционных материалов: монография. Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т Н. Новгород: ННГАСУ, 2018. 177 с.
4. Воробьев А.З., Олькин Б.И. Соппротивление усталости элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1999. 240 с.

UDC 629.7.036.54

# PROBABILISTIC CORRELATIONS FOR RESOURCE LOADING REGIMES DURING TRANSPORTATION

© 2024 г. А. Ю. Bondarenko<sup>a, \*</sup>, А. И. Likhoded<sup>a, \*\*</sup>,

V. A. Titov<sup>a</sup>, S. P. Funtikov<sup>b</sup>, A. N. Shilin<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Central Research Institute for Machine Building, Korolev, Russia

<sup>b</sup>Space Rocket Centre "Progress", Samara, Russia

\*e-mail: andrei.bondarenko@phystech.edu,

\*\*e-mail: likhoded@tsniimash.ru

**Abstract** – There are several cases during exploitation of structures when external loading is random vibration in nature. It is, firstly, automobile and railway transporting regimes. Therefore, during formation of loading regimes for estimation of resource strength of structures probability-statistical approach is used. In this article basic principles of this approach for formation spectrums of cyclic loading for testing and analysis of resource strength are presented. Estimation of levels of cyclic loading is performed, as well as suggestions for possible use of proposed approach when estimating resource strength of structures were provided.

**Keywords:** random vibration, probability-statistical approach, spectrum of cyclic loading, resource strength, transportation of spacecraft

## REFERENCES

1. Bolotin V.V.. Random oscillations of elastic systems (Moscow, Nauka, 1979) [in Russian]
2. Gladkiy V.F. . Strength, vibrations and reliability of spacecraft structure. Moscow, Nauka, 1975 [in Russian].
3. Mylnikov V.V., Kondrashkin O.B., and Shetulov D.B. Cyclic strength and durability of construction materials. Nizhniy Novgorod, Monography of NNGASU, 2018 [in Russian].
4. Vorobiev A.Z., Olkyn B.I. Fatigue resistance of structural elements. Moscow, Mashinostroyeniye, 1999 [in Russian].

УДК 539.3

## СОВМЕСТИНОСТЬ ДЕФОРМАЦИЙ И ТРИЖДЫ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ПОЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

© 2024 г. Д. В. Георгиевский<sup>a, b, c, \*</sup>

<sup>a</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>b</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

<sup>c</sup>Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

\*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 17.08.2023 г.

После доработки 01.09.2023 г.

Принята к публикации 04.09.2023 г.

Обсуждается вопрос о необходимом классе гладкости решений квазистатических задач механики деформируемого твердого тела в терминах перемещений. Показывается, что для того чтобы уравнения совместности деформаций при подстановке в них перемещений стали тождествами, требуется существование некоторых третьих смешанных производных перемещений. Для линейно упругой сжимаемой изотропной упругой среды приводится контрпример, в котором поле перемещений, будучи дважды дифференцируемым решением краевой задачи для системы уравнений Ламе во всей области, не является решением задачи в перемещениях во всех точках этой области.

**Ключевые слова:** постановка в перемещениях, деформация, напряжение, уравнения совместности, непрерывность, дифференцируемость, объемные силы, поверхностные нагрузки

DOI: 10.31857/S1026351924020112, EDN: uvtjmp

**1. Постановка в перемещениях.** Как известно, постановка в перемещениях квазистатической задачи механики деформируемого твердого тела при малых деформациях включает в себя три уравнения равновесия в трехмерной области  $\Omega$  :

$$\sigma_{ij}[\varepsilon(u)]_j + X_i = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon = \text{Def } \mathbf{u}$ , с объемными силами  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ , а также граничные условия на границе  $\partial\Omega = \Sigma_u \cup \Sigma_\sigma$  :

$$u_i = u_i^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_u; \quad \sigma_{ij}[\varepsilon(u)]n_j = P_i^0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_\sigma \quad (1.2)$$

с заданными перемещениями  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$  и нагрузками  $\mathbf{P}^0(\mathbf{x})$ . Векторные поля  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{u}^0$  и  $\mathbf{P}^0$  обычно называют внешними данными задачи. Если оператор

определяющих соотношений  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  таков, что каждое из уравнений (1.1) второго порядка, то решение задачи (1.1), (1.2) при непрерывных внешних данных ищется в классе гладкости  $C_2(\bar{\Omega})$  [1].

Так как тензор  $\varepsilon$  является деформатором векторного поля, шесть уравнений совместности:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha,\beta\beta} + \varepsilon_{\beta\beta,\alpha\alpha} = 2\varepsilon_{\alpha\beta,\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta,\gamma\gamma} + \varepsilon_{\gamma\gamma,\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma,\gamma\beta} + \varepsilon_{\beta\gamma,\gamma\alpha}, \quad (1.3)$$

эквивалентные равенству нулю всех компонент симметричного тензора несовместности Кр  нера  $\text{Ink } \varepsilon$  [2], будут выполнены автоматически в силу тождества

$$\text{Ink Def } \mathbf{u} \equiv 0. \quad (1.4)$$

В уравнениях (1.3) по повторяющимся греческим индексам суммирование не производится. Разным греческим индексам обязательно соответствуют различные числовые значения от 1 до 3.

Наличие тождеств (1.4) дает основание не включать условия совместности деформаций (или выведенные из них условия совместности напряжений) в постановку задачи в перемещениях. Однако шесть уравнений (1.3) станут тождествами при подстановке в них перемещений, только если каждое из слагаемых в (1.3) будет существовать во всех точках, принадлежащих  $\Omega$ . Для этого требуется, чтобы существовали некоторые смешанные производные от  $\mathbf{u}$  третьего порядка, что, вообще говоря, не гарантировано требованием  $\mathbf{u} \in C_2(\bar{\Omega})$ .

Нетрудно видеть, что в число упомянутых смешанных производных третьего порядка входят по шесть производных вида  $u_{\alpha,\alpha\beta\beta}$  и  $u_{\alpha,\beta\beta\gamma}$ , а также три производных вида  $u_{\alpha,\alpha\beta\gamma}$ , т.е. всего 15 из 30 возможных комбинаций. При этом производные вида  $u_{\alpha,\alpha\alpha\alpha}$ ,  $u_{\alpha,\beta\beta\beta}$  и  $u_{\alpha,\alpha\alpha\beta}$  (их всего также 15) в выражениях (1.3) не встречаются.

Таким образом, дополнительным условием, налагаемым на поле  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  в постановке задачи в перемещениях, является существование во всей области  $\Omega$  третьих смешанных производных:

$$u_{\alpha,\alpha\beta\beta}, \quad u_{\alpha,\beta\beta\gamma}, \quad u_{\alpha,\alpha\beta\gamma}. \quad (1.5)$$

**2. Контрпример.** Приведем пример квазистатической задачи в перемещениях с непрерывными внешними данными, решение которой всюду принадлежит классу гладкости  $C_2$ , но в некоторых точках области слагаемые, входящие в уравнения совместности (1.3), не существуют, а значит, эти уравнения не выполняются.

Рассмотрим плоскую деформацию линейно упругой сжимаемой изотропной среды с постоянными Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$  и коэффициентом Пуассона  $\nu < 1/2$  в квадрате

$$\Omega = \{-l < x_1 < l, -l < x_2 < l\} \quad (2.1)$$

с границей  $\partial\Omega = \Sigma_\sigma = \Sigma_{1+} \cup \Sigma_{2+} \cup \Sigma_{1-} \cup \Sigma_{2-}$ , где

$$\Sigma_{1\pm} = \{x_1 = \pm l, -l < x_2 < l\}, \quad \Sigma_{2\pm} = \{-l < x_1 < l, x_2 = \pm l\}. \quad (2.2)$$



Обозначим  $y = x_1 + x_2$  и введем дважды дифференцируемую в  $\Omega$  функцию  $f(y)$ :

$$f(y) = y^2|y|, \quad f'(y) = 3y|y|, \quad f'' = 6|y|. \quad (2.3)$$

Зададим объемные силы в виде:

$$X_1 = -\frac{\mu}{1-2\nu}[(3-4\nu)a_1 + a_2]f'', \quad X_2 = -\frac{\mu}{1-2\nu}[a_1 + (3-4\nu)a_2]f'', \quad (2.4)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — некоторые постоянные с размерностью  $L^{-2}$ . На всей границе  $\Sigma_\sigma$  зададим вектор напряжений с компонентами

$$P_1^0 = 3[(\lambda+2\mu)a_1 + \lambda a_2](l \pm x_2)^2, \quad P_2^0 = 3\mu(a_1 + a_2)(l \pm x_2)^2, \quad x \in \Sigma_{1\pm}$$

$$P_1^0 = 3\mu(a_1 + a_2)(l \pm x_1)^2, \quad P_2^0 = 3[\lambda a_1 + (\lambda + 2\mu)a_2](l \pm x_1)^2, \quad x \in \Sigma_{2\pm}. \quad (2.5)$$

Точное решение уравнений Ламе:

$$\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ij} + u_{i,jj} + \frac{X_i}{\mu} = 0, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad (2.6)$$

удовлетворяющее граничным условиям (2.5), запишется следующим образом:

$$u_i = a_i f(y), \quad i = 1, 2. \quad (2.7)$$

Ненулевые деформации и напряжения, вычисленные по перемещениям (2.7),

$$\varepsilon_{11} = a_1 f'(y), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)f'(y), \quad \varepsilon_{22} = a_2 f'(y), \quad (2.8)$$

$$\sigma_{11} = [(\lambda+2\mu)a_1 + \lambda a_2]f'(y), \quad \sigma_{12} = \mu(a_1 + a_2)f'(y),$$

$$\sigma_{22} = [\lambda a_1 + (\lambda + 2\mu)a_2]f'(y), \quad \sigma_{33} = \lambda(a_1 + a_2)f'(y), \quad (2.9)$$

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)(a_1 + a_2)f'(y)$$

непрерывно дифференцируемы во всем квадрате (2.1), но не имеют вторых производных при  $y = 0$ , т. е. на диагонали  $x_2 = -x_1$ . Следовательно, в точках этой диагонали единственное в плоской задаче уравнение совместности деформаций  $\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}$  не выполняется. Поэтому поле перемещений (2.7), принадлежащее классу  $C_2(\bar{\Omega})$ , несмотря на удовлетворение уравнениям равновесия (2.6) и граничным условиям с нагрузками (2.5), является решением задачи в перемещениях не во всей области  $\Omega$ , а только вне точек отрезка  $x_2 = -x_1$ .

Суть приведенного контрпримера, очевидно, в том, что заданные объемные силы (2.4) непрерывны, но не непрерывно дифференцируемы во всей области  $\Omega$ . Действительно, обратимся к постановке той же самой задачи, но в напряжениях

(постановке Победри [3]). Она включает в себя четыре нетождественных уравнения Бельтрами–Мичелла:

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{\sigma_{kk,ij}}{1+\nu} = -(X_{i,j} + X_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} \mathbf{X} \delta_{ij}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.10)$$

а также выполненные на границе  $\partial\Omega$  уравнения равновесия и граничные условия, в которых заданы нагрузки (2.5).

Правые части уравнений (3.1) в случае объемных сил (2.4) не определены на диагонали  $x_2 = -x_1$ , поэтому точное решение (2.9) задачи в напряжениях заведомо не имеет места в точках данной диагонали. Но постановки одной и той же краевой задачи в терминах напряжений и перемещений, как известно, должны быть эквивалентны в том числе и касательно того, что относится к классам гладкости разыскиваемых векторных и тензорных полей. Поэтому все решение  $\{\mathbf{u}(\mathbf{x}), \varepsilon(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x})\}$  не существует в точках  $x_2 = -x_1$  (еще раз подчеркнем, несмотря на принадлежность поля  $\mathbf{u}$  классу  $\tilde{C}_2$  во всей области  $\Omega$  с замыканием).

Кажущееся противоречие устраняется дополнительным требованием в постановке задачи в перемещениях того, чтобы существовали третьи смешанные производные вида (1.5), хотя формально постановка (1.1), (1.2) таких требований не предполагает.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 24-21-20008).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nowacki W. Teoria sprężystości. Warszawa: PWN, 1973. [Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 832 с].
2. Георгиевский Д.В. Деформаторы высоких рангов и тензоры несовместности Крёнера с двумерной структурой индексов // Докл. РАН. 2019. Т. 486. № 4. С. 430–432.
3. Победра Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 368 с.

---

*UDC 539.3***COMPATIBILITY OF STRAINS AND THE THREE-FOLD  
DIFFERENTIABILITY OF THE DISPLACEMENT FIELD****© 2024 г. D. V. Georgievskii<sup>a, b, c, \*</sup>***<sup>a</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia**<sup>b</sup>Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia**<sup>c</sup>Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia**\*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

**Abstract** — The problem of the necessary class of smoothness of solutions to quasi-static problems of deformable solid mechanics in terms of displacements was discussed. It is shown that in order for the equations of compatibility of deformations to become identities when displacements are substituted in them, the existence of some third mixed derivatives of displacements is required. A counterexample for a linearly elastic compressible isotropic elastic medium was given. In this counterexample, the displacement field, being a doubly differentiable solution to the boundary value problem for the system of Lamé equations in the entire domain, is not a solution to the displacement problem at all points in this domain.

**Keywords:** displacement formulation, deformation, stress, joint equation, continuity, differentiability, volume force, surface load

**REFERENCES**

1. Nowacki W. Teoria sprężystości. Warszawa: PWN, 1973.
2. Georgievskii D.V. High-rank deformators and the Kroener incompatibility tensors with two-dimensional structure of indices // Doklady Physics. 2019. V. 64. № 6. P. 256–257.
3. Pobedria B.E. Numerical Methods in Theory of Elasticity and Plasticity. Moscow: Moscow Univ., 1995. [in Russian]

УДК 539.422.5

## ЭВОЛЮЦИЯ ИНДИКАТОРОВ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ КОМПОЗИЦИОННОЙ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТИЕМ

© 2024 г. А. С. Дзюба<sup>а, \*</sup>, С. И. Елеонский<sup>а, \*\*</sup>,

М. Д. Зайцев<sup>а, \*\*\*</sup>, В. С. Писарев<sup>а, \*\*\*\*</sup>

<sup>а</sup>Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,  
Жуковский, Московская обл., Россия

\*e-mail: dzuba@tsagi.ru,

\*\*e-mail: juzzepka@mail.ru,

\*\*\*e-mail: zaytcev@list.ru,

\*\*\*\*e-mail: VSP5335@mail.ru

Поступила в редакцию 13.07.2024 г.

После доработки 07.09.2024 г.

Принята к публикации 21.09.2024 г.

Разработан новый экспериментальный метод, который обеспечивает количественное описание эволюции индикаторов повреждаемости при циклическом нагружении композиционных образцов с концентраторами напряжений. Параметры повреждаемости определяются как деформационный отклик на нанесение искусственного надреза заданной длины, который распространяется от контура центрального сквозного отверстия в плоском прямоугольном образце при постоянной внешней нагрузке. По результатам испытаний восьми образцов получены текущие величины индикаторов повреждаемости на различных этапах усталостного нагружения. Эти данные выявляют зависимости искомых параметров от количества циклов нагружения. На этой основе для рассмотренного диапазона циклов построена функция накопления повреждений. Установлено, что эта функция относится к первой стадии исследуемого процесса. Полученные результаты являются необходимой основой планирования дальнейших экспериментов.

*Ключевые слова:* композиционные материалы, циклическое нагружение, накопление повреждений, искусственный надрез, спекл-интерферометрия

DOI: 10.31857/S1026351924020128, EDN: uvthua

**1. Введение.** Слоистые композиционные материалы, преимущественно армированные углеродными волокнами, широко применяются в различных отраслях техники, например в авиастроении [1, 2]. Одной из трудностей, которые возникают при проектировании композиционных конструкций, является то, что в ходе циклического нагружения композиционные материалы

постепенно теряют свои прочностные и/или жесткостные характеристики вследствие прогрессирующего процесса накопления повреждений. Во многих случаях этот факт требует значительного количества испытаний образцов и структурных элементов, необходимого для сертификации композиционных конструкций [2]. Поэтому создание и верификация моделей, которые обладают способностью количественного описания момента возникновения и дальнейшей эволюции повреждений, а также их влияния на поля деформаций и напряжений при циклическом нагружении слоистых композиционных материалов, представляет значительный научный и практический интерес [3–6].

В настоящее время в научной литературе рассматриваются несколько методологий моделирования возникновения и развития повреждений в композиционных материалах. Исторически первыми из них являются использование критериев разрушения (*failure criteria*), основанных на анализе напряженного состояния, а также модели, построенные в рамках непрерывной механики повреждений (*continuum damage mechanics* – CDM). Эти два метода часто используются совместно, а именно критерии разрушения служат для предсказания возникновения повреждения, а CDM-модели используются для описания их эволюции [6–8]. В процессе применения стало очевидно, что подобные подходы имеют ряд серьезных ограничений [9–12].

Альтернативой упомянутым выше методологиям может служить дискретная механика повреждений (*discrete damage mechanics* – DDM) [5, 13, 14]. Утверждается, что модели, построенные на основе DDM, обладают, во-первых, способностью надежно предсказывать величину деформации, которая соответствует появлению первой микротрещины. Во-вторых, данная информация позволяет описать эволюцию микротрещин как функцию действующих деформаций и, в-третьих, получить перераспределение напряжений в отдельном слое материала вследствие деградации механических свойств поврежденного слоя.

Главный недостаток всех упомянутых выше подходов состоит в том, что построение любой аналитической, численно-аналитической или численной модели накопления повреждений требует привлечения различных параметров, которые не могут быть получены путем прямых физических измерений. В качестве примера можно, например, упомянуть DDM-модель, которая построена на основе метода конечных элементов [5]. Первым необходимым параметром является растрескивание матрицы, которое количественно характеризуется плотностью микротрещин. Вторым параметром служит момент разрушения отдельного волокна, который определяется на основе критерия максимального напряжения. Совершенно ясно, что корректность задания обоих параметров, которая решающим образом влияет на результаты применения модели, может быть обоснована с непонятной степенью точности и только на основе косвенных данных. Таким образом, количественные оценки накопления повреждений в композиционных материалах, полученные на основе различных моделей, необходимым образом нуждаются в экспериментальном подтверждении. Существующие экспериментальные методы, основанные на анализе макро- и микроизображений не дают исковых количественных характеристик [15, 16].

Для получения необходимых количественных параметров был разработан и верифицирован новый разрушающий метод количественного описания процесса

накопления повреждений в нерегулярных зонах металлических образцов при малоциклового усталости [17, 18]. Данный подход включает предварительное нагружение образцов до заданного количества циклов и последующее определение параметров механики разрушения, относящихся к искусственному надрезу, который наносится при постоянной внешней нагрузке. Измерение деформационного отклика на локальное удаление материала проводится методом электронной спекл-интерферометрии. Эффективность предложенной методологии иллюстрируется при исследовании малоциклового усталости в окрестности свободного и упрочненного отверстий в плоских образцах. Ключевым моментом разработанного подхода является тот факт, что исходные экспериментальные данные, представляющие собой тангенциальные компоненты перемещений в окрестности вершины надреза, и полученные на этой основе величины коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) и Т-напряжений используются в качестве текущих индикаторов повреждаемости. В предыдущей работе показано, что подобный подход можно эффективно использовать, когда искусственный надрез наносится от контура отверстия в плоском образце,

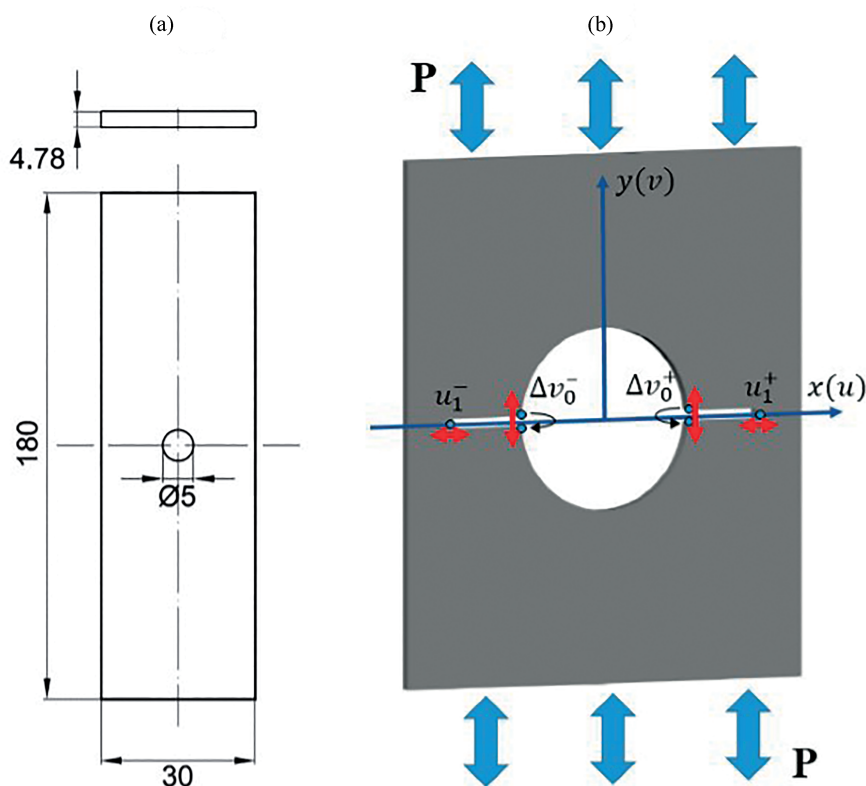


Рис. 1. Схема исследуемых образцов: а) чертёж; б) искусственный надрез, схема нагружения и индикаторы повреждаемости.

изготовленном из композиционного материала [19]. В данной работе разработанная методология применяется для количественного описания процесса накопления повреждений при знакопеременном циклическом нагружении прямоугольной пластины с центральным сквозным отверстием, которая изготовлена из композиционного материала.

**2. Объекты исследования и методика эксперимента.** В качестве объектов исследования используется набор плоских прямоугольных образцов с размерами  $180 \times 30 \times 4.78$  мм, изготовленных из композиционного материала с продольно-поперечной укладкой  $[0/90]_{6S}$ . Общее количество испытанных образцов составляет 8 штук. Купоны вырезаны из одной заготовки размерами  $320 \times 320 \times 4.78$  мм по одинаковой технологии. Все образцы имеют центральное сквозное отверстие диаметром  $2r_0 = 5.0$  мм, как это показано на рис. 1. Первоначальные отверстия выполнены твердосплавным сверлом диаметром 4.80 мм и затем развернуты до диаметра  $2r_0 = 5.0$  мм.

Упругие постоянные ортотропного материала равны: продольный модуль упругости  $E_1 = 73\,100$  МПа; поперечный модуль упругости  $E_2 = 73\,100$  МПа; модуль сдвига  $G_{12} = 5300$  МПа; коэффициенты Пуассона  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.25$ . Обобщенные механические свойства композиционного материала определялись на основе итерационного численного анализа форм колебаний прямоугольных пластин, вызванных точечным импульсным ударом. Краткое описание используемой методологии приведено в работе [19].

Обозначения исследуемых образцов и количество циклов нагружения приведены в табл. 1. Данные для одного из образцов (CDC\_2) получены в исходном состоянии без приложения циклической нагрузки. Соответствующая информация приведена ранее в работе [19] для Образца S\_22. Остальные купоны подвергаются одноосному периодическому растяжению-сжатию при помощи электрогидравлической испытательной машины INSTRON-10 с диапазоном нагружения 0–100 кН. Параметры цикла нагружения составляют: размах напряжений  $\Delta\sigma = 600$  МПа; коэффициент асимметрии  $R = -0.5$ ; максимальное напряжение  $\sigma_{\text{MAX}} = 400$  МПа;  $\sigma_{\text{MIN}} = -200$  МПа;  $\Delta\sigma = \sigma_{\text{MAX}} - \sigma_{\text{MIN}}$ ;  $R = \sigma_{\text{MIN}} / \sigma_{\text{MAX}}$ . Направление внешней нагрузки совпадает с направлением оси  $y$ , как это показано на рис. 1. Количество циклов нагружения указано в табл. 1. Таким образом обеспечивается набор объектов исследования с различным уровнем накопленных повреждений в окрестности отверстия.

**Таблица 1.** Номенклатура образцов и количество циклов нагружения

| Номер образца                                    | CDC_2 | CDC_3 | CDC_4 | CDC_5 | CDC_6 | CDC_7 | CDC_8 | CDC_1 |
|--------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Количество циклов нагружения, $N \times 10^{-4}$ | 0     | 40    | 80    | 120   | 160   | 200   | 240   | 315   |



Последовательность проведения экспериментов, учитывая особенности деформирования композиционного материала, выглядит следующим образом. Первым нагружался Образец CDC\_1 с постоянным контролем состояния поверхности, включая ее температуру. Начальные признаки изменения исходного состояния поверхности и заметное повышение тепловыделения наблюдались при достижении 310 000 циклов. Поэтому нагружение Образца CDC\_1 было прекращено после достижения 315 000 циклов. Затем было проведено последовательное нагружение Образцов CDC\_3–CDC\_8, согласно данным табл. 1. После этого для этих купонов были проведены оптические интерференционные измерения локального деформационного отклика на малое приращение длины надреза при постоянной внешней нагрузке. Образцы с различной степенью поврежденности последовательно устанавливаются в захватах испытательной машины walter+bai ag, Type LFM-L 25, с диапазоном нагружения 0–25 кН. Это нагружающее устройство включено в оптическую схему интерферометра, как это показано в работах [19, 20]. Ключевой особенностью, обеспечивающей получение картин интерференционных полос высокого качества, является наличие мобильного модуля, который удаляется из оптической схемы интерферометра для нанесения надреза и затем с интерференционной точностью возвращается на исходную позицию. Подробное описание данного устройства приведено в работе [20].

Перед нанесением надреза каждый образец нагружается растягивающим усилием. Величина этого усилия должна быть выбрана так, чтобы обеспечить

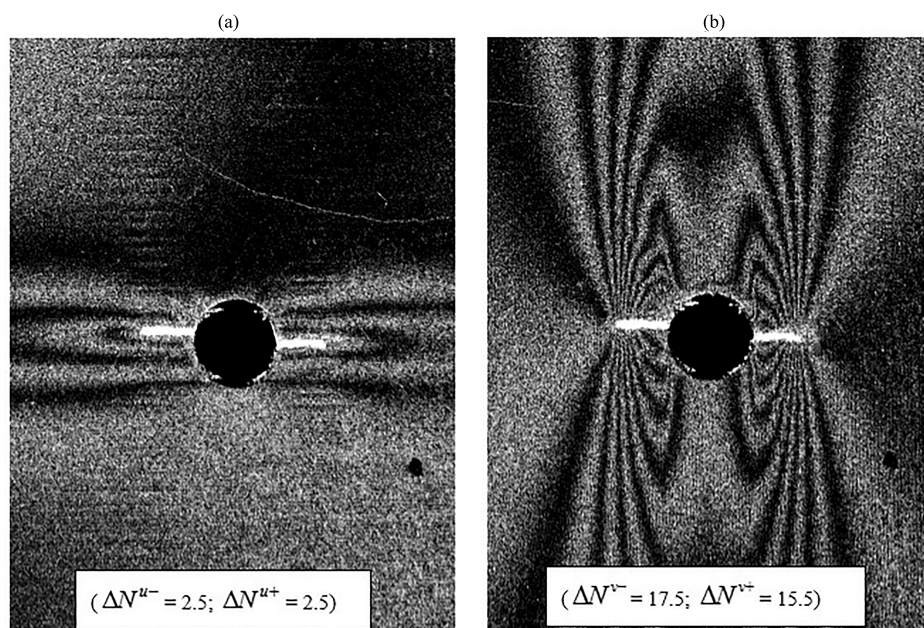


Рис. 2. Образец CDC\_4. Картинки интерференционных полос, полученные в терминах плоской компоненты перемещений  $u$  (a) и  $v$  (b). Исходная длина надреза  $a_0 = 0$  с приращениями  $\Delta a_1^- = 3.01$  мм (левый надрез) и  $\Delta a_1^+ = 2.52$  мм (правый надрез). Средняя длина надреза  $\bar{a}_1 = 2.76$  мм.



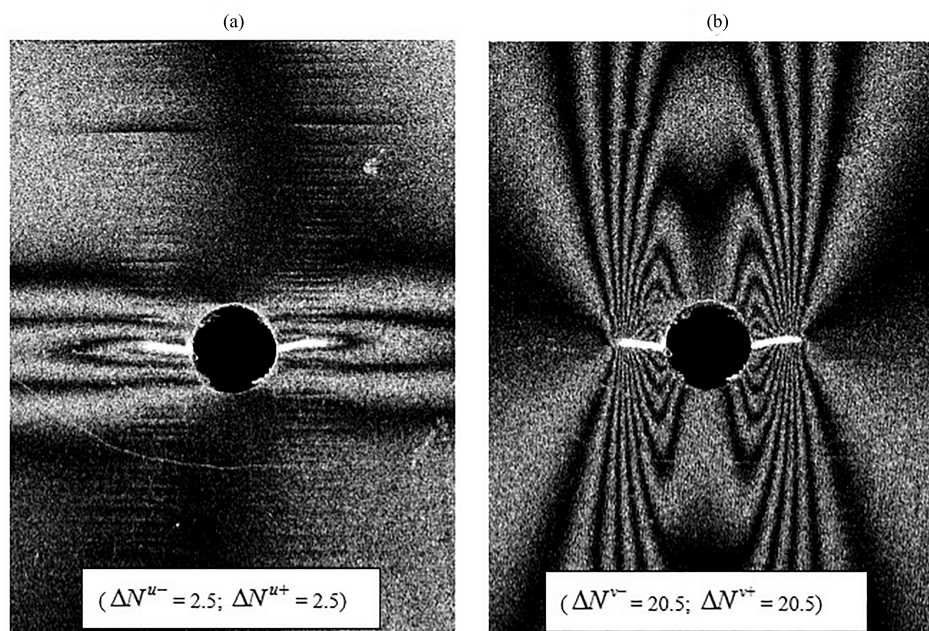


Рис. 3. Образец CDC\_1. Картины интерференционных полос, полученные в терминах плоской компоненты перемещений  $u$  (а) и  $v$  (б). Исходная длина надреза  $a_0 = 0$  с приращениями  $\Delta a_1^- = 2.52$  мм (левый надрез) и  $\Delta a_1^+ = 2.94$  мм (правый надрез). Средняя длина надреза  $\tilde{a}_1 = 2.74$  мм.

оптимальную плотность картин интерференционных полос. Процедура, обеспечивающая корректность такого выбора, а также способ обработки картин интерференционных полос для количественного определения параметров повреждаемости подробно изложены в работах [19, 20]. В результате проведенных исследований установлено, что оптимальная величина внешней нагрузки для надреза длиной  $\tilde{a}_1 = 2.70$  мм соответствует номинальному напряжению  $\sigma = 21.7$  МПа. Именно эти значения использовались при нанесении надреза шириной  $\Delta b = 0.2$  мм во всех образцах.

**3. Результаты определения параметров повреждаемости.** Картины интерференционных полос, полученные для Образца CDC\_2 в результате нанесения первого надреза для величины номинальных напряжений  $\sigma = 21.7$  МПа, приведены в статье [19]. Аналогичные интерферограммы, которые визуализированы для Образца CDC\_4 и Образца CDC\_1, показаны на рис. 2 и 3 соответственно. Начало симметричного надреза расположено в двух точках пересечения оси симметрии образца (оси  $x$ ) с контуром отверстия. Картины интерференционных полос, которые получены для всех образцов, характеризуются практически идеальным качеством и структурой.

Необходимым условием достижения основной цели исследования является получение картин интерференционных полос, которые соответствуют средней длине надреза  $\tilde{a}_1 \approx 2.70$  мм. Поэтому для одного образца регистрируются четыре набора картин интерференционных полос. Первый из них соответствует

специально заниженной величине  $\tilde{a}_{1-1} \approx 2.31$  мм. Затем длина надреза последовательно увеличивается только для одной из ветвей двустороннего надреза, достигая суммарной длины  $\tilde{a}_{1-2}$ ,  $\tilde{a}_{1-3}$  и  $\tilde{a}_{1-4}$ . Исходное состояние поверхности, естественно, регистрируется только один раз и используется при визуализации всех четырех наборов интерферограмм. Получение картин полос высокого качества на всех четырех этапах для каждого образца свидетельствует о практически идеальных характеристиках экспериментальной техники. Полная последовательность процедуры, реализованной для Образца CDC\_4 и Образца CDC\_1, представлена в табл. 2 и 3 соответственно.

**Таблица 2.** Последовательность экспериментальной процедуры для Образца CDC\_4

| Нумерация надрезов         | $a_{1-1}^-$ | $a_{1-1}^+$ |             |             |             |             |             |             |
|----------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $a_{1-1}$ , мм             | <b>3.01</b> | <b>2.52</b> | $a_{1-2}^-$ | $a_{1-2}^+$ |             |             |             |             |
| $a_{1-2}$ , мм             |             |             | 3.01        | 2.66        | $a_{1-3}^-$ | $a_{1-3}^+$ |             |             |
| $a_{1-3}$ , мм             |             |             |             |             | 3.01        | 2.83        | $a_{1-4}^-$ | $a_{1-4}^+$ |
| $a_{1-4}$ , мм             |             |             |             |             |             |             | 2.91        | 3.15        |
| $\tilde{a}_1$ , мм         | <b>2.76</b> |             | 2.84        |             | 2.92        |             | 3.03        |             |
| $\Delta N_0^v$ , полос     | <b>17.5</b> | <b>17.5</b> | 18.0        | 17.0        | 18.0        | 17.0        | 18.0        | 18.0        |
| $\Delta v_0$ , мкм         | <b>6.65</b> | <b>6.65</b> | 6.84        | 6.46        | 6.84        | 6.46        | 6.84        | 6.84        |
| $\Delta \tilde{v}_0$ , мкм | <b>6.65</b> |             | 6.65        |             | 6.65        |             | 6.84        |             |
| $\Delta N_0^u$ , полос     | <b>2.5</b>  | <b>2.5</b>  | 2.5         | 2.5         | 2.5         | 2.5         | 3.0         | 2.5         |
| $u_1$ , мкм                | <b>0.95</b> | <b>0.95</b> | 0.95        | 0.95        | 0.95        | 0.95        | 1.14        | 0.95        |
| $\tilde{u}_1$ , мкм        | <b>0.95</b> |             | 0.95        |             | 0.95        |             | 1.04        |             |

Результаты обработки картин интерференционных полос в терминах индикаторов повреждаемости, полученные для восьми образцов, представлены в табл. 4. Зависимости индикаторов повреждаемости от количества циклов нагружения, построенные по данным табл. 4, показаны на рис. 4. Экспериментальные распределения, приведенные на рис. 4, являются необходимым звеном для построения функции накопления повреждений.

**Таблица 3.** Последовательность экспериментальной процедуры для Образца CDC\_1

| Нумерация надрезов         | $a_{1-1}^-$ | $a_{1-1}^+$ |             |             |             |             |             |             |
|----------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $a_{1-1}$ , мм             | 2.38        | 2.91        | $a_{1-2}^-$ | $a_{1-2}^+$ |             |             |             |             |
| $a_{1-2}$ , мм             |             |             | 2.38        | 2.94        | $a_{1-3}^-$ | $a_{1-3}^+$ |             |             |
| $a_{1-3}$ , мм             |             |             |             |             | 2.52        | 2.94        | $a_{1-4}^-$ | $a_{1-4}^+$ |
| $a_{1-4}$ , мм             |             |             |             |             |             |             | 2.59        | 2.97        |
| $\tilde{a}_1$ , мм         | 2.64        |             | 2.66        |             | 2.73        |             | 2.78        |             |
| $\Delta N_0^v$ , полос     | 19.0        | 19.5        | 20.5        | 20.0        | 20.5        | 20.5        | 21.0        | 21.5        |
| $\Delta v_0$ , мкм         | 7.22        | 7.41        | 7.79        | 7.6         | 7.79        | 7.79        | 7.98        | 8.17        |
| $\Delta \tilde{v}_0$ , мкм | 7.32        |             | 7.69        |             | 7.79        |             | 8.08        |             |
| $\Delta N_0^u$ , полос     | 2.0         | 2.0         | 2.5         | 2.5         | 2.5         | 2.5         | 2.5         | 2.5         |
| $u_1$ , мкм                | 0.76        | 0.76        | 0.95        | 0.95        | 0.95        | 0.95        | 0.95        | 0.95        |
| $\tilde{u}_1$ , мкм        | 0.76        |             | 0.95        |             | 0.95        |             | 0.95        |             |

**Таблица 4.** Эволюция индикаторов повреждаемости

| Номер образца                                   | CDC_2 | CDC_3 | CDC_4 | CDC_5 | CDC_6 | CDC_7 | CDC_8 | CDC_1 |
|-------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Количество циклов нагружения $N \times 10^{-4}$ | 0     | 40    | 80    | 120   | 160   | 200   | 240   | 315   |
| $\Delta \tilde{v}_0$ , мкм                      | 14.44 | 6.98  | 7.08  | 5.00  | 6.06  | 7.49  | 7.74  | 8.02  |
| $\tilde{u}_1$ , мкм                             | 1.8   | 1.09  | 1.01  | 0.9   | 1.05  | 1.21  | 1.09  | 0.98  |

**4. Функция накопления повреждений.** Предлагаемый подход дает возможность получения функции накопления повреждений в явном виде на основе анализа эволюционных зависимостей нормированных значений индикаторов повреждаемости. Для описания накопления повреждений необходимо выбрать

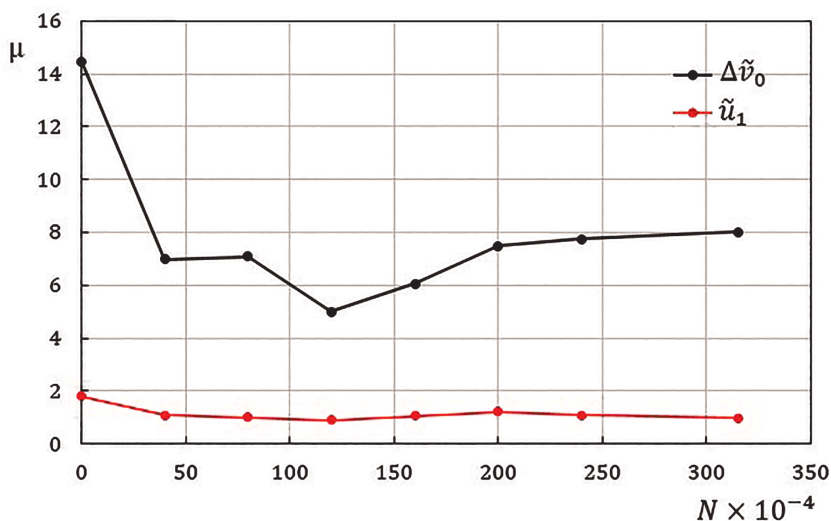


Рис. 4. Зависимости индикаторов повреждаемости  $\mu$  [мкм] от количества циклов нагружения  $N \times 10^{-4}$ .

монотонно меняющийся параметр исследуемого процесса [21–25]. В нашем случае таким параметром является номер цикла нагружения  $N_m$ . В рассмотрение также вводится функция накопления повреждений  $D_m(N_m, Z(N_m))$ , которая характеризует степень поврежденности материала на основе анализа эволюции индикатора повреждаемости  $Z(N_m)$ .

Изменение этой функции при возрастании количества циклов нагружения, которое характеризует скорость накопления повреждений, подчиняется кинетическому уравнению [21–25]:

$$\frac{dD_m(N_m, Z(N_m))}{dN_m} = \Psi(N_m, Z(N_m)). \quad (4.1)$$

Функция накопления повреждений может быть получена путем интегрирования уравнения (4.1):

$$D_m(N_m, Z(N_m)) = \int_0^{N_m} \Psi(N_m, Z(N_m)) dN_m. \quad (4.2)$$

Граничные значения функции накопления повреждений  $D_m(N_m, Z(N_m))$  (4.2) обычно удовлетворяют условиям:

$$D_m(N_m = 0, Z(N_m)) = 0, \quad D_m(N_m = N_L, Z(N_m)) = 1. \quad (4.3)$$

Для металлических материалов предельное состояние  $D_m = 1$  в соотношениях (4.3) при малоцикловой усталости относится к количеству циклов, соответствующих полному разделению образца на две части [17–18]. Также в качестве

предельного состояния можно принять количество циклов, соответствующее моменту зарождения макротрещины, если используемый метод измерения обеспечивает надежную идентификацию такого момента [26,27].

Явный вид функции  $\Psi(N_m, Z(N_m))$  из уравнений (4.1) и (4.2) можно представить в следующем виде [17, 18]:

$$\Psi(N_m, Z(N_m)) = \frac{S_D \times Z(N_m)}{Z(N_m = 0) \times N_L}, \quad (4.4)$$

где  $S_D$  – постоянная величина, определяемая на основе экспериментальных данных;  $Z(N_m)$  – экспериментальные величины индикатора повреждаемости, определенные по достижении  $N_m$ ;  $Z(N_m = 0)$  – экспериментальная величина индикатора повреждаемости для исходного состояния исследуемого объекта;  $N_L$  – количество циклов, соответствующее достижению второго предельного состояния из соотношений (4.3).

Подстановка функции  $\Psi$  (4.4) в соотношение (4.2) дает следующий вид функции накопления повреждений:

$$D_m(N_m, Z(N_m)) = \int_{N_m=0}^{N_m=N_L} \frac{S_D \times Z(N_m)}{Z(N_m = 0) \times N_L} dN_m. \quad (4.5)$$

Замена интегрирования в формуле (4.5) на суммирование по отрезкам  $\Delta N_m = N_{m+1} - N_m$ , в граничных точках которых проводятся измерения индикатора повреждаемости  $Z(N_m)$ , проводится на основе кусочно-линейной аппроксимации экспериментальной зависимости индикатора повреждаемости

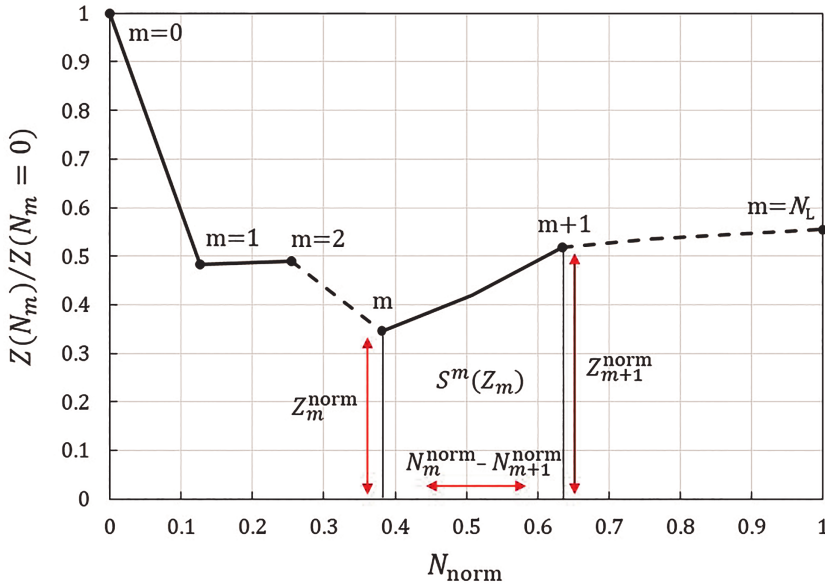


Рис. 5. Численное интегрирование нормированной эволюции параметра повреждаемости.

$Z(N_m)$  от количества циклов нагружения  $N_m$ . В данном случае формулу (4.5) можно представить в следующем виде:

$$D_m(N_m, Z(N_m)) = \sum_{N_m=0}^{N_m=N_L} \frac{S_D \times (Z(N_{m+1}) - Z(N_m)) \times \Delta N_m}{2Z(N_m = 0) \times N_L}, \quad (4.6)$$

где  $\Delta N_m = N_{m+1} - N_m$  – количество циклов нагружения между двумя соседними точками измерения величин параметров повреждаемости  $Z(N_{m+1})$  и  $Z(N_m)$ .

Структура формулы (4.6) показывает, что экспериментальные зависимости параметра повреждаемости от количества циклов нагружения, характерный вид которых приведен на рис. 4, удобнее всего представить в нормированном виде. Иллюстрация применения таких зависимостей для получения функции накопления повреждений (4.6) представлена на рис. 5.

Площадь каждой отдельной трапеции  $S^m(Z_m)$  равна:

$$S^m(Z_m) = \frac{(Z_{m+1}^{\text{norm}} - Z_m^{\text{norm}})}{2} (N_{m+1}^{\text{norm}} - N_m^{\text{norm}}), \quad (4.7)$$

где  $Z_m^{\text{norm}} = Z(N_m) / Z(N_m = 0)$ ,  $N_m^{\text{norm}} = N_m / (N_L)$ .

Таким образом, функцию накопления повреждений (4.6) можно представить в виде:

$$D_m(N_m, Z(N_m)) = \sum_{m=0}^{m=N_L} S_D S^m(Z_m). \quad (4.8)$$

Коэффициент  $S_D$  зависит геометрического размера образцов, механических свойств материала и, естественно, от параметров цикла нагружения. В общем случае величина этого коэффициента определяется путем нормализации соотношения (4.6), с учетом того правая часть уравнения должна быть равна единице. Это условие вытекает из определения предельных значений функции накопления повреждений (4.3). Данный факт означает, что величина коэффициента  $S_D$  определяется следующим образом:

$$S_D = 1 / \sum(Z_m), \quad (4.9)$$

где  $\sum(Z_m) = \sum_{m=0}^{m=N_L} S^m(Z_m)$  обозначает суммарную площадь под нормированной кривой, представленной в виде кусочно-линейной аппроксимации экспериментальных данных. Комбинация соотношений (4.8) и (4.9) дает явный вид функции накопления повреждений, выраженный через величины параметров повреждаемости, которые экспериментально определены на различных уровнях поврежденности образцов:

$$D_m(N_m, Z(N_m)) = \sum_{m=0}^{m=N_L} S^m(Z_m) / \Sigma(Z_m). \quad (4.10)$$

**5. Полученные результаты.** Важная проблема, которая возникает при экспериментальном исследовании процесса накопление повреждений с помощью соотношения (4.10), заключается в выборе количества циклов нагружения  $N_L$ , соответствующем второму предельному состоянию (4.3). Трудности возникают, во-первых, вследствие ограниченного количества образцов, которое равно восьми. Все купоны вырезаны из одной заготовки размерами  $320 \times 320 \times 4.78$  мм по одинаковой технологии. Данный факт дает некоторую уверенность в том, что механические характеристики всех образцов совпадают с минимальным допуском. Второй трудностью является то, что представляемые исследования проводились впервые. Данный факт означает отсутствие данных о том, до какой степени деградации внешнего слоя образца возможна регистрация качественных картин интерференционных полос. Первый Образец CDC\_1 нагружался с постоянным контролем состояния поверхности, включая ее температуру. Первые признаки изменения исходного состояния поверхности и заметное повышение тепловыделения наблюдались при достижении 310 000 циклов. Поэтому нагружение Образца CDC\_1 было прекращено после достижения 315 000 циклов. Процессы циклического нагружения образцов и нанесения искусственного надреза были разнесены по локализации и времени проведения. Поэтому промежуток по количеству циклов между образцами CDC\_1 и CDC\_2

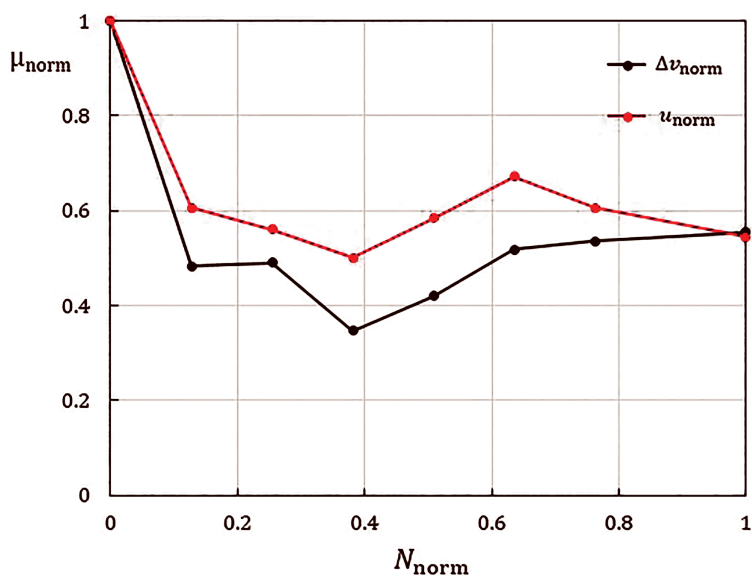


Рис. 6. Нормированные зависимости параметров повреждаемости  $\mu_{\text{norm}}$  от количества циклов нагружения  $N_{\text{norm}}$ .



был равномерно разделен на семь интервалов. Затем остальные образцы были последовательно циклически нагружены, как это указано в табл. 4.

Высокое качество картин интерференционных полос, полученных при нанесении искусственного надреза в Образце CDC\_1 (см. рис. 3), явилось полной неожиданностью. Это свидетельствует, что предельное количество циклов можно было увеличить, но до проведения эксперимента данный факт для конкретного композиционного материала был ранее не известен. Интерферограммы такого же качества были получены для всех остальных образцов. Результаты интерпретации картин интерференционных полос в терминах индикаторов повреждаемости приведены в табл. 4. Нормированные распределения, описывающие эволюцию индикаторов повреждаемости, показаны на рис. 6. В качестве предельного состояния условно принимается значение  $N_L = 315\,000$  циклов. Интересно отметить, что эти зависимости, полученные по исходным данным двух типов, хорошо совпадают. Следует, однако, принять во внимание то, что величины  $\Delta\tilde{v}_0$  значительно превышают величины  $\Delta\tilde{u}_0$ . Это означает, что информационная ценность первого индикатора повреждаемости существенно превышает аналогичную характеристику второго индикатора. Поэтому дальнейший анализ основан на использовании распределения значений  $\Delta\tilde{v}_0$ .

Параметры, необходимые для вычисления функции накопления повреждений на различных уровнях поврежденности, а также результаты этих вычислений представлены в табл. 5. Графическая иллюстрация данных из последней строки табл. 5 приведена на рис. 7.

**Таблица 5.** Текущие параметры и значения функции накопления повреждений

| $m$                                                                  | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
|----------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $N_m^{\text{norm}} \quad (7)$                                        | 0     | 0.127 | 0.254 | 0.381 | 0.508 | 0.635 | 0.762 | 1     |
| $Z_m^{\text{norm}} \equiv \Delta\tilde{v}_0^{\text{norm}} \quad (7)$ | 1     | 0.483 | 0.490 | 0.346 | 0.420 | 0.519 | 0.536 | 0.555 |
| $S^m(Z_m) \quad (7)$                                                 | 0.09  | 0.06  | 0.05  | 0.05  | 0.06  | 0.07  | 0.13  | —     |
| $\Sigma(Z_m) \quad (9)$                                              | 0.514 |       |       |       |       |       |       |       |
| $S_D = 1 / \Sigma(Z_m) \quad (9)$                                    | 1.95  |       |       |       |       |       |       |       |
| $S^m(Z_m) / \Sigma(Z_m) \quad (9)$                                   | 0.184 | 0.121 | 0.104 | 0.095 | 0.116 | 0.131 | 0.253 | —     |
| $D_m(N_m, Z(N_m)) \quad (10)$                                        | 0.184 | 0.308 | 0.412 | 0.507 | 0.623 | 0.754 | 1     | —     |

**6. Краткий анализ и обсуждение результатов.** Данные, приведенные на рис. 7, отражают первую попытку количественно описать процесс накопления повреждений с помощью разрушающего метода. Отличительная особенность предлагаемого подхода заключается в использовании индикаторов повреждаемости, которые могут быть получены на основе прямых физических измерений. Главным условием успешного применения используемого метода является



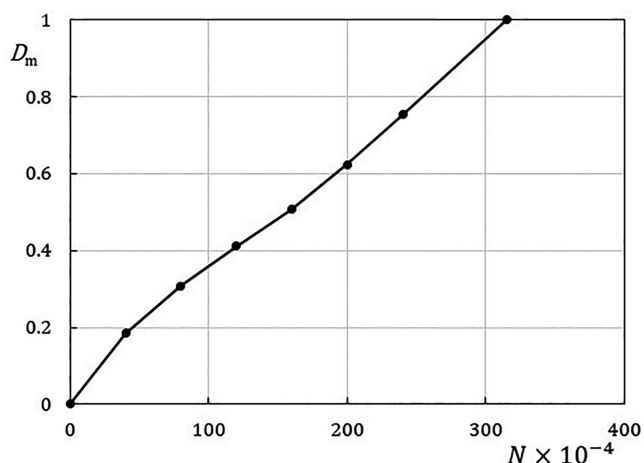


Рис. 7. Зависимость функции накопления повреждений  $D_m$  от количества циклов нагружения  $N \times 10^{-4}$ .

возможность регистрации высококачественных картин интерференционных полос, обусловленных нанесением искусственного надреза при постоянной внешней нагрузке. В данной работе надежно установлено количество циклов нагружения, для которого это условие выполняется. Расширение этого диапазона является задачей последующих исследований. Делать это можно только последовательным увеличением количества циклов нагружения. При этом оптико-интерференционные измерения деформационного отклика необходимо производить для первого “прокаченного” образца до циклического нагружения следующего купона.

Данный процесс можно проиллюстрировать, рассмотрев общепринятый в настоящее время график накопления повреждений в композиционном материале, представленный, например, в работе [28]. Эта зависимость показана на рис. 8. Достаточно очевидно, что Стадия II должна быть исследована достаточно подробно, так как предсказать заранее локализацию на кривой точки **PD**, при достижении которой получение интерферограмм высокого качества станет невозможным, заранее нельзя. Идеальным вариантом с точки зрения применения оптико-интерференционных измерений для установления величин индикаторов повреждаемости было бы расположение точки **PD** как можно ближе к границе между Стадиями II и III. Все вышесказанное справедливо, если кривая на рис. 8 соответствует действительности.

Сравнение зависимостей на рис. 7 и 8 свидетельствует, что полученные в нашей работе данные относятся к Стадии I, количественно описывая функцию накопления повреждений на начальном этапе этого процесса. Более того, можно утверждать, что граница Стадии I еще не достигнута. Подобная информация получена впервые и имеет решающее значение для полного количественного описания функции накопления повреждений.

Схема накопления повреждений, показанная на рис. 8, построена, скорее всего, по результатам численного моделирования. Следует, однако, отметить,

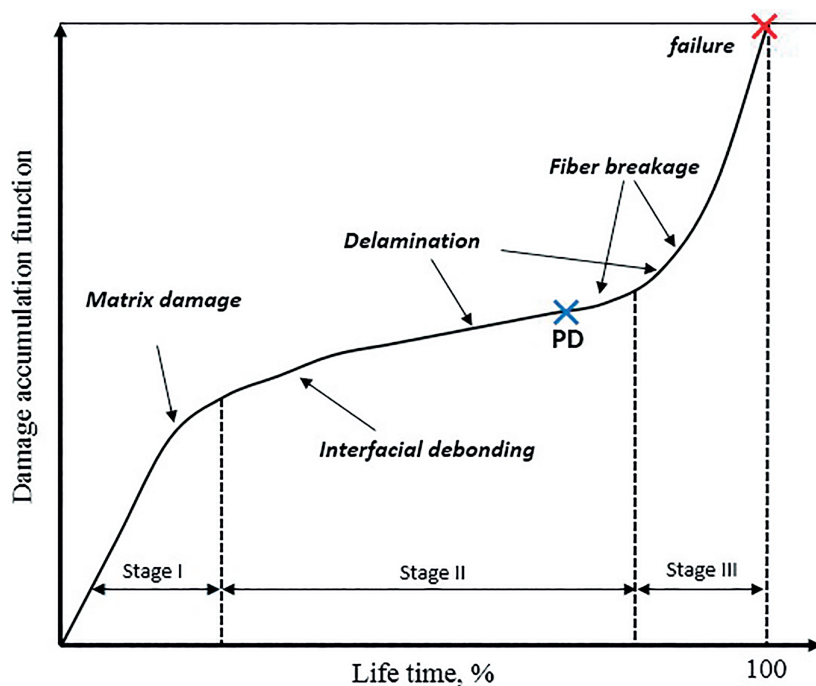


Рис. 8. Традиционная схема, иллюстрирующая накопление повреждений в слоистых композиционных материалах.

что возникают вполне обоснованные сомнения в соответствии приведенной кривой реальной ситуации. В частности, совершенно неочевидным является снижение скорости накопления повреждений на Стадии II, которая относится к различным формам расслоения композиционного материала. Все это еще раз подчеркивает важность проведения экспериментальных исследований, которые относятся к процессу накопления повреждений в слоистых композиционных материалах.

Успешное определение индикаторов повреждаемости на различных этапах циклического нагружения плоских композиционных образцов с отверстиями требует регистрации полного набора картин интерференционных полос высокого качества для всех восьми исследуемых образцов. Это условие выполнено в ходе проведенного исследования, что позволило впервые получить зависимости индикаторов повреждаемости от количества циклов нагружения. Эволюция этих параметров по рассмотренному периоду циклического нагружения является необходимым звеном для получения явного вида функции накопления повреждений и планирования дальнейших экспериментов.

**7. Заключение.** Разработан и реализован на практике новый экспериментальный метод, который обеспечивает количественное описание эволюции индикаторов повреждаемости в нерегулярной зоне в ходе знакопеременного циклического нагружения плоских композиционных образцов с отверстиями. Два индикатора повреждаемости определяются как деформационный отклик

на нанесение искусственного надреза заданной длины от контура центрального сквозного отверстия. Важнейшим фактом является то, что оба индикатора повреждаемости определяются путем прямых физических измерений на основе подсчета количества интерференционных полос. Картины интерференционных полос высокого качества зарегистрированы и визуализированы для всех восьми исследуемых образцов, которые отличаются степенью поврежденности. В результате интерпретации набора интерферограмм получены зависимости индикаторов повреждаемости от количества циклов нагружения. Представлены теоретические основы количественного анализа процесса накопления повреждений. На этой основе для исследованного диапазона построена в явном виде функция накопления повреждений. Установлено, что, согласно принятым в настоящее время представлениям, эта функция относится к первой стадии процесса накопления повреждений. Полученные результаты являются основой планирования дальнейших экспериментов, необходимых для построения полной функции накопления повреждений.

**Финансирование работы.** Исследование выполнено в рамках государственного задания от 28.12.2023 г. № 020-00005-24-00 работа 1. 32 «Формирование общей концепции для критериальной оценки статической прочности металло-композитных авиаконструкций и их соединений с учетом циклического нагружения».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И. Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов. М.: Изд-во Физматлит, 2013. 272 с.
2. Голован В.И., Гришин В.И., Дзюба А.С., Замула Г.Н., Лимонин М.В., Дударьков Ю.И., Писарев В.С., Балунов К.А. Проектирование, расчеты и статические испытания металло-композитных конструкций. М.: Техносфера, 2022. 408 с.
3. Talreja R., Singh C.V. Damage and failure of composite materials. Cambridge University Press, 2012.
4. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов // Математическое моделирование. 2012. Т. 24. № 5. С. 3–20.
5. Moure M.M., Sanchez-Saez S., Barbero E., Barbero E.J. Analysis of damage localization in composite laminates using a discrete damage model // Composites Part B. 2014. V. 66. P. 224–232.  
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.05.015>
6. Долгих Д.А., Ташкинов М.А. Исследование закономерностей накопления повреждений и развития расслоения в полимерных композиционных материалах на основе двухуровневых моделей разрушения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. № 4. С. 74–85.  
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.07>
7. Orifici A.C., Herszberg I., Thomson R.S. Review of methodologies for composite material modelling incorporating failure // Composite Structures. 2008. V. 86. № 1–3. P. 194–210.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.03.007>
8. Liu P., Xing L., Zheng J. Failure analysis of carbon fiber/epoxy composite cylindrical laminates using explicit finite element method // Composites Part B. 2014. V. 56. P. 54–61.  
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.08.017>

9. Zou Z., Reid S.R., Li S. A continuum damage model for delaminations in laminated composites // J. Mech. Phys. Solids. 2003. V. 51. № 2. P. 336–351.  
[http://doi.org/10.1016/S0022-5096\(02\)00075-3](http://doi.org/10.1016/S0022-5096(02)00075-3)
10. Maimi P., Camanho P.P., Mayugo J.A., Davila C.G. A continuum damage model for composite laminates: Part I – Constitutive model // Mechanics of Materials. 2007. V. 39. № 10. P. 897–908.  
<http://doi.org/10.1016/j.mechmat.2007.03.005>
11. Maimi P., Camanho P.P., Mayugo J.A., Davila C.G. A continuum damage model for composite laminates: Part II – Computational implementation and validation // Mechanics of Materials. 2007. V. 39. № 10. P. 909–919.  
<http://doi.org/10.1016/j.mechmat.2007.03.006>
12. Liu P.F., Zheng J.Y. Progressive failure analysis of carbon fiber/epoxy composite laminates using continuum damage mechanics // Materials Science and Engineering: A. 2008. V. 485. № 1–2. P. 711–717.  
<https://doi.org/10.1016/j.msea.2008.02.023>
13. Barbero E.J., Cortes D.H. A mechanistic model for transverse damage initiation, evolution, and stiffness reduction in laminated composites // Composites Part B. 2010. V. 41. № 2. P. 124–132.  
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2009.10.001>
14. Swindeman M.J., Iarve E.V., Brockman R.A., Mollenhauer D.H., Hallett S.R. Strength prediction in open hole composite laminates by using discrete damage modeling // AIAA Journal. 2013. V. 51. № 4. P. 936–945.  
<https://doi.org/10.2514/1.j051773>
15. Sun J., Huang L., Dai Y. Dynamic Response and Damage Accumulation of laminated composites under repeated low-velocity impacts // Materials. 2023. V. 16 (2). P. 778–789.  
<https://doi.org/10.3390/ma16020778>
16. Ajaja J., Barthelat F. Damage accumulation in a carbon fiber fabric reinforced cyanate ester composite subjected to mechanical loading and thermal cycling // Composites Part B. 2016. V. 90. P. 523–529.  
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.09.054>
17. Matvienko Yu.G., Pisarev V.S., Eleonsky S.I. Evolution of fracture mechanics parameters relevant to narrow notch increment as a measure of fatigue damage accumulation // Int. J. Fatigue. 2021. V. 149. P. 106310.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2021.106310>
18. Matvienko Yu.G., Pisarev V.S., Eleonsky S.I. Low-cycle fatigue damage accumulation near the cold-expanded hole by crack compliance data // Int. J. Fatigue. 2022. V. 155. P. 106590.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2021.106590>
19. Дзюба А.С., Елеонский С.И., Писарев В.С., Яшутин А.Г. Влияние длины искусственного надреза в композиционном материале на величины индикаторов повреждаемости // Журнал Технической Физики. 2023. Т. 93. № 3. С. 371–379.  
<https://doi.org/10.21883/JTF.2023.03.54848.272-22>
20. Pisarev V.S., Matvienko Yu.G., Eleonsky S.I., Odintsev I.N. Combining the crack compliance method and speckle interferometry data for determination of stress intensity factors and T-stresses // Eng. Fract. Mech. 2017. V. 179. P. 348–374.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.04.029>
21. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 С.
22. Москвитин В.В. Циклическое нагружение элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 С.
23. Мовчан А.А. Микромеханический подход к проблеме описания накопления анизотропных рассеянных повреждений // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 115–123.

24. Мовчан А.А. Механика накопления рассеянных повреждений в элементах конструкций: Учеб. пособие. М.: Издательство МАИ, 1996. 64 С.
25. Murakami S. Continuum Damage Mechanics. Dordrecht – Heidelberg – London – NY, Springer. 2012. 402 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-94-007-2666-6>
26. Шанявский А.А. Модели зарождения и развития усталостного разрушения под поверхностью металлов // Научный вестник МГТУ ГА. 2012. № 179. С. 32–44.
27. Matvienko Yu.G., Pisarev V.S., Eleonsky S.I. Quantitative description of low-cycle fatigue damage accumulation in contact interaction zone by local strain evolution // Frattura ed Integrità Strutturale. 2022. V. 16. № 62. P. 541–560.  
<https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.62.37>
28. D'Amore A., Grassia L., Ceparano A. Correlations between damage accumulation and strength degradation of fiber reinforced composites subjected to cyclic loading // Procedia Eng. 2016. V. 167. P. 97–102.  
<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.674>

UDC 539.422.5

## DAMAGE INDICATORS EVOLUTION DURING CYCLIC LOADING OF COMPOSITE PLATE WITH HOLE

© 2024 г.    A. S. Dzuba<sup>a, \*</sup>, S. I. Eleonsky<sup>a, \*\*</sup>,  
M. D. Zajtsev<sup>a, \*\*\*</sup>, V. S. Pisarev<sup>a, \*\*\*\*</sup>

*<sup>a</sup>Zhukovsky Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky,  
Moskovskaya obl., Russia*

*\*e-mail: dzuba@tsagi.ru,*

*\*\*e-mail: juzzepka@mail.ru,*

*\*\*\*e-mail: zajtcev@list.ru,*

*\*\*\*\*e-mail: VSP5335@mail.ru*

**Abstract** – Novel experimental method, which provides quantitative description of damage indicators evolution caused by fatigue loading of composite specimens with stress concentrators, was developed. Damage parameters are derived as deformation response to artificial notch inserting. This notch is extended from the edge of central through hole in plane rectangular specimen under constant external load. Current values of damage indicators are obtained at different stages of fatigue loading. These data reveal dependencies of required parameters on loading cycle number. The damage accumulation function for involved cycle range is quantitatively constructed on this base. It is found that this function is related to the first stage of the process investigated. The results obtained represent the essential link in the design of further experiments.

**Keywords:** composite materials, cyclic loading, damage accumulation, artificial notch, damage indicators, speckle-pattern interferometry

## REFERENCES

1. *Grishin V.I., Dzyuba A.S., Dudakov Yu.I.* Strength and stability of elements and joints of aircraft structures made of composites. Moscow: Fizmatlit Publishing House, 2013. 272 p. [in Russian]
2. *Golovan V.I., Grishin V.I., Dzyuba A.S. et al.* Design, numerical analysis and static tests of metallic-composite structures. Moscow: Tekhnosfera, 2022. 408 p. [in Russian]
3. *Talreja R., Singh C.V.* Damage and failure of composite materials. Cambridge University Press, 2012.
4. *Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P.* Multi-scale modeling of elastic composite materials // *Matematicheskoe modelirovanie*. 2003. V. 24. № 5. P. 3–20 [in Russian].
5. *Moure M. M., Sanchez-Saez S., Barbero E., Barbero E.J.* Analysis of damage localization in composite laminates using a discrete damage model // *Composites Part B*. 2014. V. 66. P. 224–232;  
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.05.015>
6. *Dolgikh D.A., Tashkinov M.A.* Investigation of damage accumulation and delamination propagation in polymer composite materials based on two-level fracture models // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2020. № 4. P. 74–85;  
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.07>
7. *Orifici A.C., Herszberg I., Thomson R.S.* Review of methodologies for composite material modelling incorporating failure // *Composite Structures*. 2008. V. 86. № 1–3. P. 194–210;  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.03.007>
8. *Liu P., Xing L., Zheng J.* Failure analysis of carbon fiber/epoxy composite cylindrical laminates using explicit finite element method // *Composites Part B*. 2014. V. 56. P. 54–61;  
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.08.017>
9. *Zou Z., Reid S.R., Li S.* A continuum damage model for delaminations in laminated composites // *J. Mech. Phys. Solids*. 2003. V. 51. P. 336–351.
10. *Maimi P., Camanho P.P., Mayugo J.A., Davila C.G.* A continuum damage model for composite laminates: Part I – Constitutive model // *Mechanics of Materials*. 2007. V. 39. P. 897–908;  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2007.03.005>
11. *Maimi P., Camanho P.P., Mayugo J.A., Davila C.G.* A continuum damage model for composite laminates: Part II – Computational implementation and validation // *Mechanics of Materials*. 2007. V. 39. P. 909–919;  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2007.03.006>
12. *Liu P.F., Zheng J.Y.* Progressive failure analysis of carbon fiber/epoxy composite laminates using continuum damage mechanics // *Mater. Sci. Eng: A*. 2008. V. 485. P. 711–717.
13. *Barbero E.J., Cortes D.H.* A mechanistic model for transverse damage initiation, evolution, and stiffness reduction in laminated composites // *Composites Part B*. 2010. V. 41. P. 124–132;  
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2009.10.001>
14. *Swindeman M.J., Iarve E.V., Brockman R.A., Mollenhauer D.H., Hallett S.R.* Strength Prediction in Open Hole Composite Laminates by Using Discrete Damage Modeling // *AIAA J*. 2013. V. 51. P. 936–945;  
<https://doi.org/10.2514/1.j051773>
15. *Sun J., Huang L., Dai Y.* Dynamic Response and Damage Accumulation of Laminated Composites under Repeated Low-Velocity Impacts // *Materials*. 2023. V. 16. P. 778–789;  
<https://doi.org/10.3390/ma16020778>
16. *Ajaja J., Barthelat F.* Damage accumulation in a carbon fiber fabric reinforced cyanate ester composite subjected to mechanical loading and thermal cycling // *Composites Part B*. 2016. V. 90. P. 523–529;  
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.09.054>

17. *Matvienko Yu.G., Pisarev V.S., Eleonsky S.I.* Evolution of fracture mechanics parameters relevant to narrow notch increment as a measure of fatigue damage accumulation // *Int. J. Fatigue*. 2021. V. 149. 106310; <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2021.106310>
18. *Matvienko Yu.G., Pisarev V.S., Eleonsky S.I.* Low-cycle fatigue damage accumulation near the cold-expanded hole by crack compliance data // *Int. J. Fatigue*. 2022. V. 155. 106590; <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2021.106590>
19. *Dzuba A.S., Eleonsky S.I., Pisarev V.S., Yashutin A.G.* Influence of artificial notch length in composite material on damage indicator values // *Technical Physics*. 2023. V. 93. № 3. P. 371–379; <https://doi.org/10.21883/JTF.2023.03.54848.272-22>
20. *Pisarev V.S., Matvienko Yu.G., Eleonsky S.I., Odintsev I.N.* Combining the crack compliance method and speckle interferometry data for determination of stress intensity factors and T-stresses // *Eng. Fract. Mech.* 2017. V. 179. P. 348–374; <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.04.029>
21. *Rabotnov Yu.N.* Mechanics deformable of solid. Moscow: Nauka. The main editorial office, 1979. 743 p.
22. *Moskvitin V.V.* Cyclic loading of structural elements. Moscow: Nauka, 1981. 344 p. [in Russian].
23. *Movchan A.A.* Micromechanical approach to the problem of describing anisotropic scattered damages // *Izv. AN SSSR. Mekh. Tv. Tela*. 1990. № 3. P. 115–123 [in Russian].
24. *Movchan A.A.* Mechanics of accumulation of scattered damages in structural elements: Textbook. Moscow: Izd. MAI, 1996. 64 p. [in Russian]
25. *Murakami S.* Continuum Damage Mechanics. Springer Dordrecht Heidelberg London NY., 2012. 402 p.; <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2666-6>
26. *Shanyavsky A.A.* Models of the origin and development of fatigue failure under the surface of metals // *Scientific bulletin of MGTU GA*. 2012. V. 179. P. 32–44 [in Russian].
27. *Matvienko Yu.G., Pisarev V.S., Eleonsky S.I.* Quantitative description of low-cycle fatigue damage accumulation in contact interaction zone by local strain evolution // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2022. V. 62. P. 541–560; <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.62.37>
28. *D'Amore A., Grassia L., Ceparano A.* Correlations between Damage Accumulation and Strength Degradation of Fiber Reinforced Composites Subjected to Cyclic Loading // *Procedia Engineering*. 2016. V. 167. P. 97–102; <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.674>



УДК 53.043

**ВЛИЯНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ  
НА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА  
ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ МЕМБРАННЫХ СТРУКТУР**

© 2024 г. Н. А. Дюжев<sup>а</sup>, Е. Э. Гусев<sup>а</sup>\*,

Е. О. Портнова<sup>а</sup>, О. В. Новикова<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Национальный исследовательский университет “МИЭТ”,  
Зеленоград, Москва, Россия

\*e-mail: bubbledouble@mail.ru

Поступила в редакцию 23.08.2023 г.

После доработки 27.09.2023 г.

Принята к публикации 01.10.2023 г.

Впервые предложен, реализован и объяснен принцип модификации механических свойств тонкопленочных мембранных структур произвольной формы бесконтактным способом. Апробация идеи проведена на тонкопленочной мембране алюминия, сформированной магнетронным способом на кремниевой подложке. Внешнее воздействие осуществлялось посредством циклической нагрузки в виде сброса и подачи избыточного давления воздуха на мембрану. В результате многократных воздействий изменяются физические (размер зерен и шероховатость) и механические (внутренние механические напряжения и критическое избыточное давление) свойства материалов. Изменение величины остаточных механических напряжений в материале мембраны позволяет формировать поверхность с требуемым значением кривизны. В данной работе после циклической нагрузки давлением, равным половине от критического давления, выявлены следующие эффекты: прогиб мембраны в отсутствие внешнего воздействия увеличился более чем на порядок, структура перешла в пластический тип деформации, критическое давление разрыва уменьшилось на несколько десятков процентов. Применение данной методологии позволяет создавать новые материалы с уникальными механическими свойствами.

*Ключевые слова:* механические свойства, размер зерен, тонкие пленки, мембраны, механическая прочность, усталость, отказ, циклическая нагрузка

**DOI:** 10.31857/S1026351924020131, **EDN:** uvluo

**1. Введение.** В процессе перехода от макро- к микроразмерам меняются свойства материалов. Известны сравнительные эксперименты [1] для толстой (3000 нм) и тонкой (400 нм) пленок, которые показывают, что с увеличением толщины возрастает размер и количество дефектов. Знание



механических свойств материалов позволяет разработчику более точно рассчитать конструкцию устройства, определить возможный диапазон рабочих параметров при эксплуатации.

Актуальность исследования подтверждается необходимостью минимизировать вероятность отказа при разработке конструкции устройства. Для этого нужно понимать механику различных режимов отказа, т.е. разрушения, усталости и ползучести. Несмотря на то, что причины отказа и поведение материалов могут быть известны, трудно гарантировать предотвращение отказов. Для металлических материалов 90% отказов возникает вследствие усталости [2–5]. При динамической нагрузке разрушение может произойти при уровне напряжения значительно более низком, чем предел прочности при статической нагрузке. Усталостное разрушение носит хрупкий характер даже в пластичных металлах.

Согласно данным [6], механизм разрушения материалов при циклической нагрузке выглядит следующим образом. Часто металлический материал представляет собой набор зерен, упорядоченных между собой и имеющих анизотропные свойства. В процессе циклической нагрузки происходит переход от упругой к пластической деформации, группы дислокаций перемещаются и постепенно концентрируются в локальной области материала. В случае работы с мембранами это означает изменение величины прогиба (разница между максимальной и минимальной величиной рельефа) при различном давлении. Обычно при испытаниях задают от 35 до 60% от максимальной нагрузки [2]. В системе мембрана/подложка область разрыва располагается на границе мембрана/подложка [7]. На следующей стадии возникают линии и плоскости скольжения, запускающие механизм упрочнения зерен кристаллов, что ведет к перераспределению механических напряжений в материале. При достижении максимальных напряжений, вызванных процессом упрочнения в зернах, начинают образовываться зародыши микротрещин по какой-либо плоскости скольжения (в локальной области максимальных напряжений). Обычно распространение микротрещин происходит по границам зерен [2]. Исследованию поведению трещин посвящен ряд работ [8, 9]. На последующих циклах нагрузки размеры зародышей микротрещин увеличиваются, что запускает процесс разрыхления зерна. Эффект разрыхления зерна снижает сопротивление материала к образованию трещины. Затем совокупность микротрещин рождает макротрещину. Причем наличие исходных дефектов в материале увеличивает вероятность возникновения макротрещины. Около 90% циклов нагрузки происходит до момента образования трещины. Остальные 10% циклов нагрузки ведут к критической деформации материала.

Для снижения вероятности отказа устройства повышают исходную механическую прочность наиболее уязвимого мембранного элемента. Известны следующие подходы: формирование мультислойной структуры вместо монослойной при сохранении общей суммарной толщины структуры [7], минимизация остаточных внутренних механических напряжений за счет подбора параметров технологического процесса формирования тонких пленок [10], изменение стехиометрического соотношения между атомами в

материале (например, увеличение концентрации углерода в SiC [11], уменьшение поверхностных дефектов; изменение размера зерен структуры; легирование материала пленки атомами меди, цинка, магния, марганца, кремния, минимизация концентраторов механических напряжений [7]. Нельзя не отметить новый подход к увеличению времени нагрузки — восстановление поверхности материала (минимизация количества и размера трещин) в виде расположения пленки в вакууме (в камере микроскопа). Для платины толщиной 40 нм за 40 мин размер трещины значительно уменьшился [5]. Таким образом, металлы обладают способностью к самовосстановлению в вакууме для материалов наноразмерной толщины. Также в традиционных металлических конструкциях для сопротивления усталости разрабатываются микроструктуры, которые либо останавливают, либо замедляют развитие трещин [5].

Наличие микроскопических дефектов или трещин объясняет разницу между теоретическими (основанные на энергиях связи атомов) и экспериментальными данными механической прочности. К факторам, вызывающим неравномерное распределение напряжений, также относят пустоты и выемки в материале [2]. Следовательно, формируя более сплошную пленку, можно минимизировать концентраторы механических напряжений.

Во всех случаях испытаний на усталость происходит многократное воздействие внешним фактором, например воздействие переменным током [12]. Это вызывает джоулев нагрев и эффект термоциклирования. Из-за разницы тепловых коэффициентов расширения материала возникают термические напряжения, что приводит к изменению топографии поверхности, возникновению неровностей или складок. Также напряжение переменного тока вызывает возникновение дислокаций, рост зерен и их вращение. В некоторых случаях используют короткий лазерный импульс для изменения свойств поверхности [13].

При испытаниях на усталость получают зависимость максимальных напряжений от количества испытаний ( $S-N$ ), что характеризует область эксплуатации материала. Например, для некоторых сплавов железа зависимость  $S-N$  переходит в линейную функцию, что свидетельствует о некотором пределе прочности, ниже которого не произойдет усталостный отказ. Согласно исследованиям, зависимость  $S-N$  продолжает снижаться при увеличении количества циклов для таких металлов, как алюминий, медь, магний [2]. Одним из параметров, влияющих на момент разрушения материала, является амплитуда колебаний. Известно, что чем больше амплитуда при одинаковой максимальной величине нагрузки, тем раньше произойдет деформация.

К сожалению, часто существует разброс в данных по усталости, т.е. изменение измеренного значения  $N$  для ряда образцов, испытанных при одном и том же уровне нагрузки. Это отклонение может привести к значительной неопределенности при проектировании. Разброс результатов является следствием чувствительности усталости к ряду параметров испытаний и материалов, которые крайне сложно точно контролировать. Эти параметры включают изготовление образца и подготовку поверхности, атомный

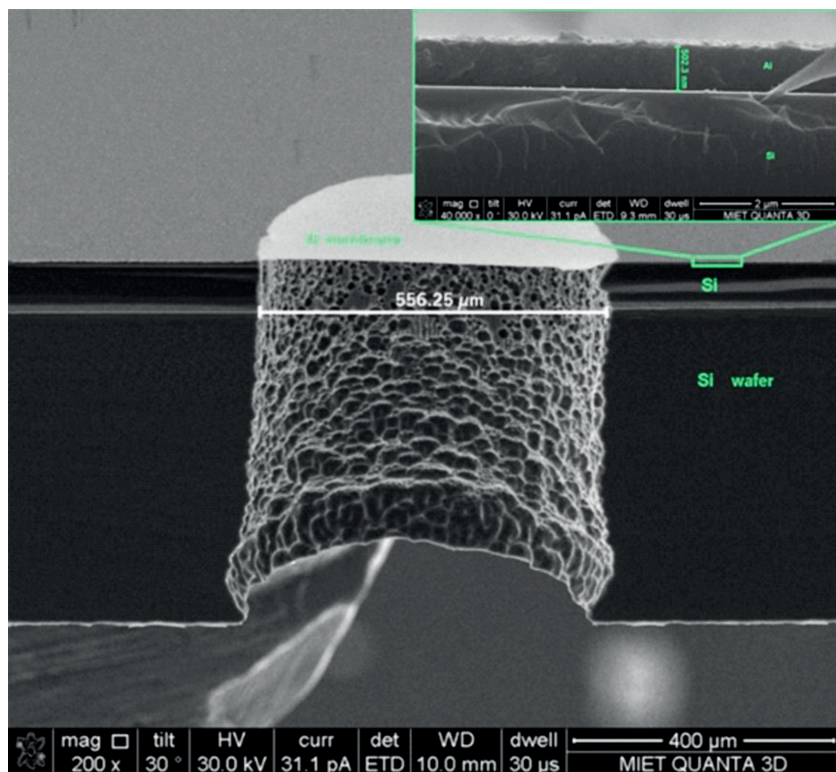


Рис. 1. Изображение мембраны на виде сбоку.

состав сплава металла, выравнивание образца в аппарате, среднее напряжение и частоту испытаний [2, 14].

При величине нагрузки, приводящей к упругой деформации, возникает многоцикловая усталость, значительно возрастает количество циклов до отказа (более чем  $10^4$  циклов) [2]. В данной работе количество циклов составило  $10^3$ , т.е. малоцикловой тип усталости.

**2. Технологический маршрут изготовления тонкопленочного алюминия.** Технологический маршрут изготовления тонкопленочного алюминия представлен в работе [15]. На рис. 1 приведены изображения во вторичных электронах поперечного сечения образцов тонких пленок на кремниевой подложке.

Экспериментальный диаметр мембраны, сформированный после травления Si-подложки, составляет 556 микрон. Толщина пленки монослоя алюминия составляет  $502 \pm 10$  нм.

**3. Измерение механических свойств.** Контроль механических свойств осуществлялся на стенде, описанном в работе [7]. Стенд включает в себя оптический профилометр, манометры, ресивер, магистральную систему подачи избыточного давления воздуха, программный комплекс для управления

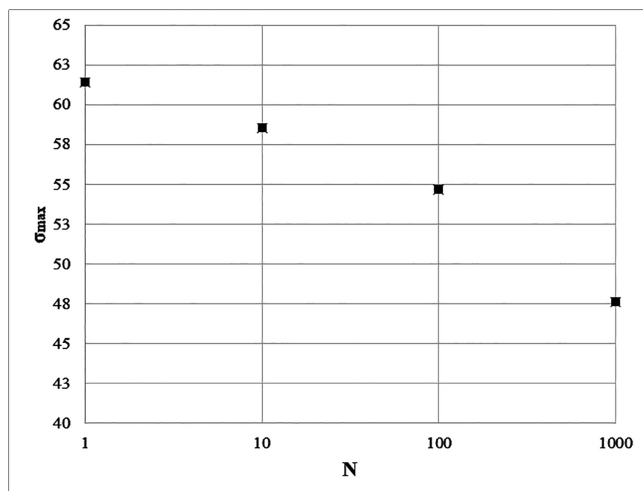


Рис. 2. Характеристика усталости материала. По оси х – N – количество циклов нагрузки (шт). По оси у –  $\sigma_{\max}$  – максимальное напряжение, измеряемое в ГПа.

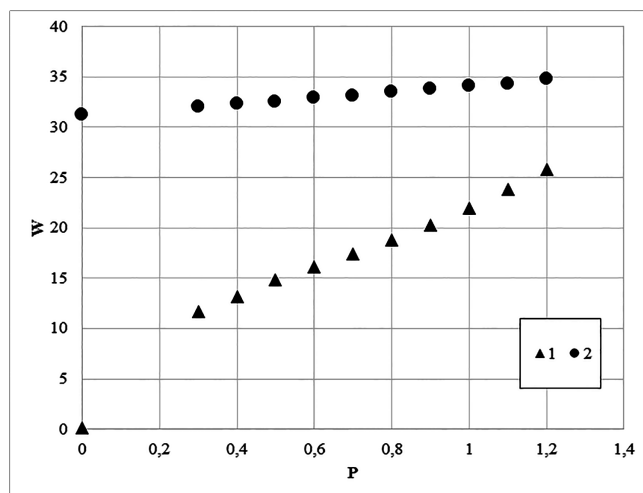


Рис. 3. Сравнение механических свойств до и после циклической нагрузки. По оси х – P – избыточное давление, измеряемое в атм. По оси у – W – прогиб мембраны, измеряемый в мкм. Легенда: 1 – до циклической нагрузки, 2 – после циклической нагрузки.

давлением. В результате, обеспечивая бесконтактное воздействие на мембрану за счет давления воздуха (без внесения дополнительных механических напряжений на структуру), можно получить значение давления разрыва мембраны и величину двухосного модуля упругости.

Механическая прочность кремниевых мембран рассчитывается по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{P_{\text{пр}} \cdot a^2 \cdot B(\mu)}{h^2}, \quad (3.1)$$

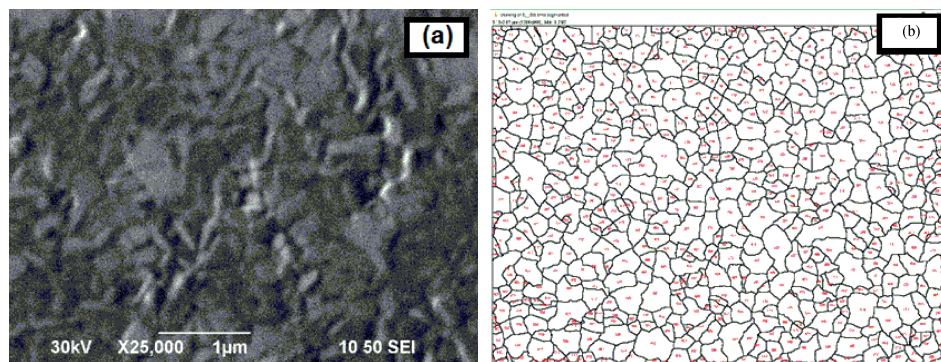


Рис. 4. Анализ размера зерен:

а) фотография с РЭМ; б) результат анализа в программе ImageJ.

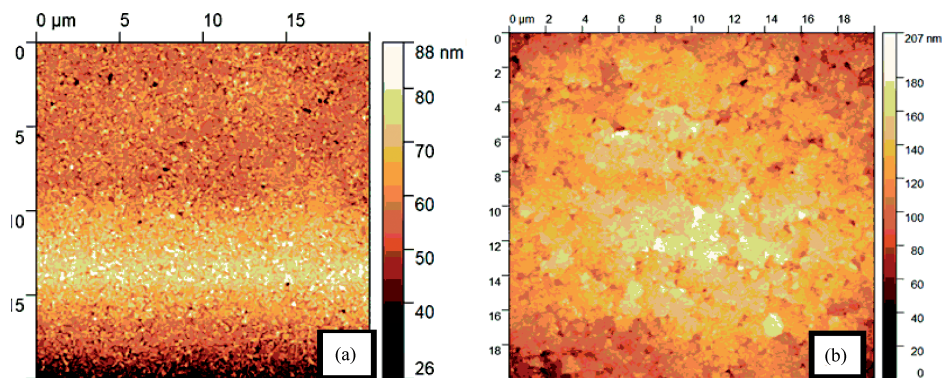


Рис. 5. Анализ шероховатости поверхности:

а) до нагрузки; б) после нагрузки.

где  $P_{пр}$  — избыточное давление критической деформации структуры,  $a$  — радиус мембраны,  $B(\mu)$  — коэффициент,  $h$  — толщина мембраны,  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Коэффициент  $B(\mu)$  рассчитывается как  $\frac{3}{4}\sqrt{1+\mu^2}$ . Итоговое значение механической прочности материала алюминия определялось как среднее арифметическое значение. На рис. 2 показаны результаты измерений механической прочности (максимальное механическое напряжение) в зависимости от количества циклов нагрузки.

На рис. 3 показаны результаты измерения профиля поверхности (величина прогиба — это разница между максимальным и минимальным значением рельефа).

Заметно, что увеличился прогиб мембраны в отсутствие внешнего воздействия с  $0.13 \pm 0.04$  до  $31.22 \pm 0.27$  мкм, структура перешла в пластический тип деформации. Критическое давление разрыва изменилось с  $2.53 \pm 0.04$  до  $1.96 \pm 0.06$  атм. Механическая прочность уменьшилась на 23% (с 61 до 48 ГПа).



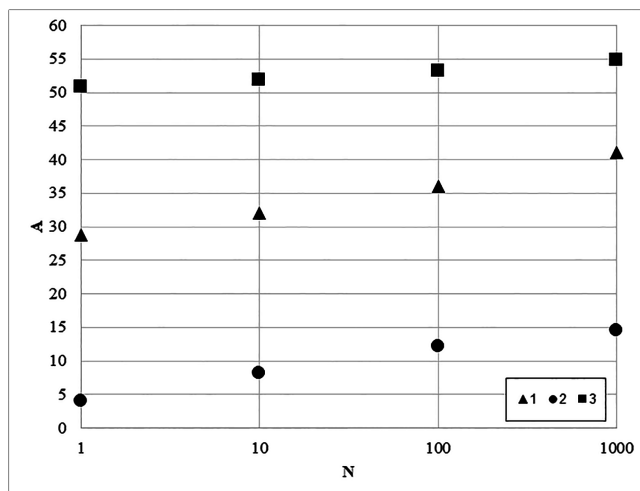


Рис. 6. Зависимость размера зерен и шероховатости поверхности от циклов нагрузки. По оси  $x$  —  $N$  — количество циклов нагрузки (шт). По оси  $y$  —  $A$  — характеристика поверхности, измеряемая в нм. Легенда: 1 — размер зерен, измеренный при помощи РЭМ; 2 — шероховатость мембран, измеренная при помощи АСМ; 3 — размер зерен (ОКР), полученный при помощи рентгеновского дифрактометра.

Известны случаи изменения механических свойств материала после внешнего воздействия. В результатах работы [16] указано, что по результатам моделирования величина удлинения алюминия снижается на 62% после внешнего воздействия в виде облучения материала. В работе [15] указано, что с увеличением дозы радиационного облучения значение механической прочности уменьшается с 61 до 45 ГПа (27%).

С помощью программы ImageJ сделан расчет количества зерен и их площади в области мембран. Изображение для анализа получено на микроскопе. Данная программа используется в мировом сообществе для подсчета количества частиц на образце [17].

Результат анализа размера зерен при фиксированной площади анализа показал, что при увеличении количества циклов нагрузки до  $10^3$  циклов средний размер зерен увеличился с  $28.75 \pm 2.53$  до  $41.0 \pm 0.5$  нм.

Также для определения размера зерен использовался рентгеновский дифрактометр Rigaku с длиной волны излучения  $1,541 \text{ \AA}$ , напряжением на рентгеновской трубке 40 кВ и анодным током 30 мА. Для определения шероховатости поверхности использовался атомно-силовой микроскоп.

Обобщенные результаты характеристики поверхности показаны на рис. 6.

Таким образом, результаты анализа поверхности объясняют эффект уменьшения механической прочности в процессе нагрузки за счет увеличения размера зерна и шероховатости на тонкопленочной алюминиевой мембране. Изменение размера зерна составило с  $28.75 \pm 2.53$  до  $41.0 \pm 0.5$  нм при анализе изображений с микроскопа, с 50.8 до 54.8 нм при анализе размера зерен на дифрактометре. Изменение величины шероховатости поверхности на атомно-силовом микроскопе составило от  $3.99 \pm 0.25$  до  $14.56 \pm 0.44$  нм.

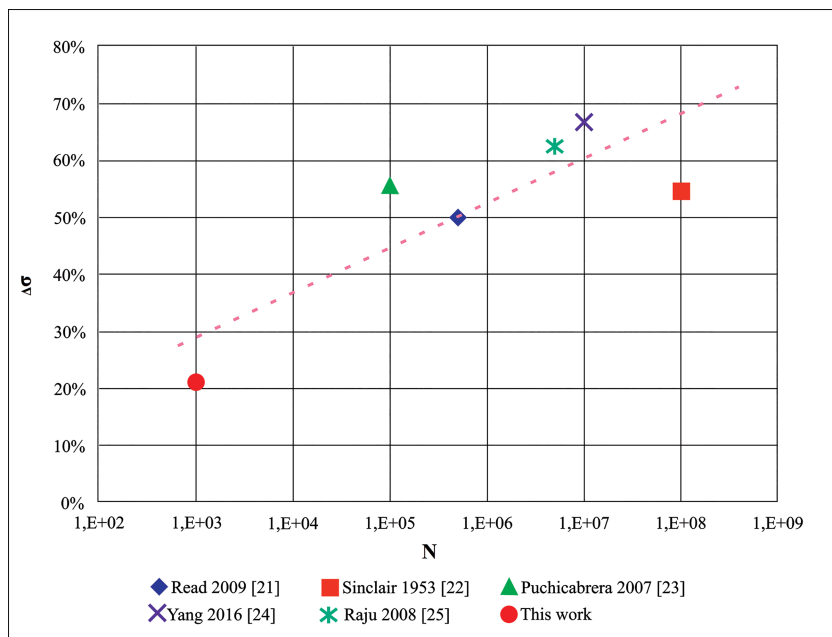


Рис. 7. Изменение прочности алюминия при циклической нагрузке. По оси x –  $N$  – количество циклов нагрузки (шт.). По оси y –  $\Delta\sigma$  – изменение прочности, измеряемое в %.

Различные авторы проводили оценку механической прочности материалов от размера зерен по прямому и обратному закону Холла–Петча [18]. В работе [19] указано, что для диапазона размера зерен металлов от 10 до 35 нм работает обратный закон Холла–Петча. При размере зерен более 35 нм начинает работать прямой закон Холла–Петча, т.е. механическая прочность обратна пропорциональна корню из размера зерна ( $\sigma_{\text{макс}} \sim 1/\sqrt{d}$ ). Полученные тенденции в текущей работе (при размере зерен от 28.75 нм) совпадают с тенденциями работы [19].

В результате сравнительного анализа (рис.7) нельзя не отметить, что подобные эффекты изменения механической прочности от внешнего воздействия были выявлены ранее, но либо для материалов пленок на сплошной подложке, либо изготовленных другим методом, либо определенной формы (например, гантелеобразной). Известно изменение прочности различных пленок: прочность пленки меди уменьшается от 260 до 200 МПа при воздействии  $10^6$  циклов [20], прочность материала титана – от 200 до 100 МПа в течение  $10^6$  циклов [13]; прочность алюминия – с 200 до 100 МПа при вариации количества циклов от  $3 \cdot 10^3$  до  $5 \cdot 10^5$  циклов [21] и с 420 до 190 МПа при вариации количества циклов от  $10^4$  до  $10^8$  циклов [22]; прочность сплава алюминия 7075 толщиной несколько миллиметров изменяется от 450 до 200 МПа при вариации количества циклов от  $10^3$  до  $10^5$  [23]; прочностные характеристики алюминиевых сплавов LY12-CZ, 2024-T4, 7475-T7351 и 7075-T651 уменьшаются от 240 до 80 МПа в течение  $10^7$  циклов нагрузки

[24]; прочность алюминиевого сплава А356.2-Т6 гантелеобразной формы толщиной несколько миллиметров уменьшается от 240 до 90 МПа в течение  $5 \cdot 10^6$  циклов нагрузки [25]. Сравнительный график результатов, полученных в данной работе, и данных в мире показан на рис. 7.

**4. Выводы.** Предложен принцип модификации поверхности тонкопленочных мембранных структур произвольной формы бесконтактным способом. Реализация принципа осуществлена на примере тонкопленочных мембранных структур из алюминия, сформированного магнетронным способом на Si-подложке. Данный принцип объясняется изменением характеристики поверхности. С увеличением количества циклов нагрузки до 1000 значение механической прочности уменьшается с 61 до 48 ГПа (23%). Критическое давление разрыва изменилось с  $2.53 \pm 0.04$  до  $1.96 \pm 0.06$  атм. Данный эффект можно объяснить увеличением размера зерна и шероховатости на тонкопленочной алюминиевой мембране согласно прямому соотношению Холла–Петча. Было выявлено увеличение размера зерна с  $28.75 \pm 2.53$  до  $41.0 \pm 0.5$  нм на микроскопе и с 50.8 до 54.8 нм на дифрактометре. По результатам измерения на атомно-силовом микроскопе величина шероховатости поверхности возросла с  $3.99 \pm 0.25$  до  $14.56 \pm 0.44$  нм.

Сравнивая полученный эффект с результатами работ других исследователей, можно заметить, что подобные эффекты изменения механической прочности от внешнего воздействия были выявлены ранее, но либо для материалов пленок на сплошной подложке, либо изготовленных другим методом.

Предлагаемый метод внешнего воздействия (через избыточное давление) имеет преимущество по сравнению со стандартными методами нагрузки гантелеобразной пленки, т.к. не вносится дополнительного механического напряжения в исследуемый материал при воздействии. Также не происходит тепловой деградации поверхности, как в случае с лазерным облучением. В предлагаемом методе нет необходимости формировать пленку определенной формы.

Изменение величины прогиба мембраны свидетельствует об изменении остаточных механических напряжений в материале мембраны. Это позволяет формировать поверхность с необходимой величиной кривизны. Данный эффект можно использовать для управления исходным прогибом мембраны, что позволяет изменять объем рабочей полости у МЭМС-датчика давления, состоящего из нескольких кристаллов с мембраной. Тем самым улучшается чувствительность прибора, что позволяет расширить диапазон измерения давления.

В мировой практике исследование зависимости механической прочности при многократном бесконтактном воздействии на мембрану из тонкопленочного Al, полученного методом магнетронного осаждения, произвольной формы, проведено ранее не было, что подтверждает новизну данного экспериментального исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российской Федерации в лице Министерства науки и высшего образования, соглашение № 075-15-2021-1350 от 5.10.2021 г. (внутренний номер 15.СИН.21.0004).



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhang G.P., Schwaiger R., Volkert C.A., Kraft O. Effect of film thickness and grain size on fatigue-induced dislocation structures in Cu thin films // *Philos. Mag. Lett.* 2003. V. 83. № 8. P. 477–483.  
<https://doi.org/10.1080/0950083031000151383>
2. Calister W.D. Materials science and engineering: an introduction. 7<sup>th</sup> Edition. NY, 2007.
3. Wang G., Liaw P. Fatigue and fracture behavior // *Bulk metallic glasses*. Boston: Springer, 2008. P. 169–203.  
[https://doi.org/10.1007/978-0-387-48921-6\\_7](https://doi.org/10.1007/978-0-387-48921-6_7)
4. Pan Q., et. al. History-independent cyclic response of nanotwinned metals // *Nature*. 2017. № 551. P. 214–217.  
<https://doi.org/10.1038/nature24266>
5. Barr C.M., Duong T., Bufford D.C. et al. Autonomous healing of fatigue cracks via cold welding // *Nature*. 2023. № 620. P. 552–556.  
<https://doi.org/10.1038/s41586-023-06223-0>
6. Заславский Б.В. Краткий курс сопротивления материалов. Учебник для авиационных специальностей вузов. М.: Машиностроение, 1986. 328 с.
7. Dyuzhev N.A., Gusev E.E., Makhiboroda M.A. Study of the mechanical properties of thin-film membranes made of oxide and silicon nitride. // *Mechanics of Solids*. 2022. V. 57. № 5. P. 1044–1053.
8. Перельмутер М.Н. Анализ трещиностойкости соединений материалов // *Изв. РАН. МТТ*. 2020. № 4. С. 96–114.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922050063>
9. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Трещины нового типа и модели некоторых наноматериалов // *Изв. РАН. МТТ*. 2020. № 5. С. 13–20.  
<https://doi.org/10.31857/S0572329920050025>
10. Novak A.V., Novak V.R., Dedkova A.A., Gusev E.E. Dependence of mechanical stresses in silicon nitride films on the mode of plasma-enhanced chemical vapor deposition // *Semiconductors*. 2018. V. 52. P. 1953–1957.  
<https://doi.org/10.1134/S1063782618150095>
11. Shikunov S.L., Kurlov V.N. SiC-based composite materials obtained by siliconizing carbon matrices // *Technical Physics*. 2017. V. 62. P. 1869–1876.  
<https://doi.org/10.1134/S1063784217120222>
12. Беспалов В.А. и др. Обзор методов исследования механических свойств тонких пленок // *Моделирование систем и процессов*. 2022. Т. 15. № 3. С. 110–128.  
<https://doi.org/10.12737/2219-0767-2022-15-3-110-128>
13. Колобов Ю.Р. и др. Исследование влияния обработки лазерными импульсами наносекундной длительности на микроструктуру и сопротивление усталости технически чистого титана // *Письма в ЖТФ*. 2022. Т. 48 (2). С. 15–19.  
<https://doi.org/10.21883/PJTF.2022.02.51913.19025>
14. Марков В.Ф. Технология тонкопленочных твердотельных сенсоров. Учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2019. 152 с.
15. Дюжев Н.А., Гусев Е.Э., Портнова Е.О., Махиборода М.А. Исследование влияния радиационного облучения на размер зерен и механические свойства тонкопленочного алюминия // *Изв. РАН. МТТ*. 2024. № 1.
16. Nabbi R., Wolters J. Investigation of radiation damage in the aluminum structures of the German FRJ-2 research reactor // *International Atomic Energy Agency (IAEA)*. 1998.

17. *Khan M. et al.* A Study of the structural and surface morphology and photoluminescence of Ni-doped ALN thin films grown by co-sputtering // *Nanomaterials*. 2022. V. 12. № 21. P. 3919. <https://doi.org/10.3390/nano12213919>
18. *Lim Y.Y., Chaudhri M., Enomoto Y.* Accurate determination of the mechanical properties of thin aluminum films deposited on sapphire flats using nanoindentations // *J. Mater. Research*. 1999. V. 14. P. 2314–2327. <https://doi.org/10.1557/JMR.1999.0308>
19. *Quek S.S., et al.* The inverse Hall–Petch relation in nanocrystalline metals: A discrete dislocation dynamics analysis // *J. Mech. Phys. Solids*. 2016. V. 88. P. 252–266. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.12.012>
20. *Akinliwa Y., Suzuki T., Tanaka K.* Evaluation of deformation behavior in Cu thin film under tensile and fatigue loading by X-ray method // *Materials Science Forum*. 2006. V. 524–525. P. 807–812. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.524-525.807>
21. *Read D.T., Volinsky A.A.* Measurements for mechanical reliability of thin films // *NATO Science for Peace and Security Series C: Environmental Security*. 2009. P. 337–358. [https://doi.org/10.1007/978-90-481-2792-4\\_16](https://doi.org/10.1007/978-90-481-2792-4_16)
22. *Sinclair G.M., Dolan T.J.* Effect of stress amplitude on statistical variability in fatigue life of 75S-T6 aluminum alloy // *Trans. ASME*. 1953. V. 75. № 5. P. 867–870. <https://doi.org/10.1115/1.4015460>
23. *Puchi-Cabrera E., et al.* Fatigue behavior of AA7075-T6 aluminum alloy coated with ZrN by PVD // *Int. J. Fatigue*. 2008. V. 30. № 7. P. 1220–1230. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.09.001>
24. *Yang H.H., et al.* Synergistic effect of environmental media and stress on the fatigue fracture behaviour of aluminium alloys // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 2016. V. 39. № 10. P. 1309–1316. <https://doi.org/10.1111/ffe.12457>
25. *Ramamurty Raju P., Satyanarayana B., Ramji K.* Sample Size determination for development of S-N curve of A356.2-T6 aluminum alloy // *SDHM*. 2008. V. 4 (3). P. 161–171. <https://doi.org/10.3970/sdhm.2008.004.161>

## INFLUENCE OF CYCLIC LOADING ON PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF THIN-FILM MEMBRANE STRUCTURES

© 2024 г. N. A. Djuzhev<sup>a</sup>, E. E. Gusev<sup>a</sup> \*,  
E. O. Portnova<sup>a</sup>, O. V. Novikova<sup>a</sup>

<sup>a</sup>National Research University of Electronic Technology (MIET),  
Zelenograd, Moscow, Russia

\*e-mail: bubbledouble@mail.ru

**Abstract** — The principle of modification of mechanical properties of thin-film membrane structures of arbitrary shape by non-contact method was proposed, realized and explained for the first time. The idea was tested on an aluminum thin-film membrane formed by magnetron method on a silicon substrate. The external influence was realized by means of cyclic loading in the form of discharge and supply of excess air pressure to the membrane. As a result of repeated impacts, physical properties of materials (grain size and roughness) and mechanical properties (internal mechanical stresses and critical overpressure) are changed. Changing the magnitude of residual mechanical stresses in the membrane material allows the formation of a surface with a desired curvature value. In this work, after cyclic loading with pressure equal to half of the critical pressure, the following effects were revealed: the deflection of the membrane in the absence of external influence increased by more than an order of magnitude, the structure shifted to the plastic type of deformation, the critical rupture pressure decreased by several tens of percent. Application of this methodology allows to create new materials with unique mechanical properties.

**Keywords:** mechanical properties, grain size, thin films, membranes, mechanical strength, fatigue, failure, cyclic loading

## REFERENCES

1. Zhang G.P., Schwaiger R., Volkert C.A., Kraft O. Effect of film thickness and grain size on fatigue-induced dislocation structures in Cu thin films // *Philosophical Magazine Letters*. 2003. V. 83. № 8. P. 477–483;  
<https://doi.org/10.1080/0950083031000151383>
2. Calister W.D. *Materials Science and Engineering: An Introduction*. 7th Edition. New York, 2007.
3. Wang G., Liaw, P. *Fatigue and fracture behavior* // *Bulk metallic glasses*. Springer, Boston, 2008. P. 169–203;  
[https://doi.org/10.1007/978-0-387-48921-6\\_7](https://doi.org/10.1007/978-0-387-48921-6_7)
4. Pan Q. et.al. History-independent cyclic response of nanotwinned metals // *Nature*. 2017. V. 551. № 7679. P. 214–217;  
<https://doi.org/10.1038/nature24266>

5. Barr C.M., Duong T., Bufford D.C. *et al.* Autonomous healing of fatigue cracks via cold welding // Nature. 2023;  
<https://doi.org/10.1038/s41586-023-06223-0>
6. Zaslavsky B.V. Short course of resistance of materials. Textbook for aviation specialties of universities. Moscow: Mashinostroenie, 1986. 328 p.
7. Dyuzhev N.A., Gusev E.E., Makhiboroda M.A. Study of the Mechanical Properties of thin-film membranes made of oxide and silicon nitride // Mech. Solid. 2022. V. 57. № 5. P. 1044–1053.
8. Perelmuter M.N. Analysis of crack resistance of material joints // Izv. RAS. MTT. 2020. № 4. P. 96–114;  
<https://doi.org/10.31857/S0572329922050063>
9. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. Cracks of a new type and models of some nanomaterials // Izv. RAS. MTT. 2020. № 5. P. 13–20.
10. Novak A.V., Novak V.R., Dedkova A.A., Gusev E.E. Dependence of Mechanical Stresses in Silicon Nitride Films on the Mode of Plasma-Enhanced Chemical Vapor Deposition // Semiconductors. 2018. V. 52. № 15. P. 1953–1957;  
<https://doi.org/10.1134/S1063782618150095>
11. Shikunov S.L., Kurlov V.N. SiC-based composite materials obtained by siliconizing carbon matrices // Technical Physics. 2017. V. 62. № 12. P. 1869–1876;  
<https://doi.org/10.1134/S1063784217120222>
12. Bespalov V.A. *et al.* Review of methods for investigation of mechanical properties of thin films // Model. Syst. Proc. 2022. V. 15. № 3. P. 110–128;  
<https://doi.org/10.12737/2219-0767-2022-15-3-110-128>
13. Kolobov Yu.R. *et al.* Investigation of the influence of nanosecond laser pulse treatment on microstructure and fatigue resistance of technically pure titanium // Letters in ZhTF. 2022. V. 48. № 2. P. 15–19;  
<https://doi.org/10.21883/PJTF.2022.02.51913.19025>
14. Markov V.F. Technology of thin-film solid-state sensors. Textbook. 2019. 152 p.
15. Dyuzhev N.A., Gusev E.E., Portnova E.O., Mahiboroda M.A. Study of the effect of radiation exposure on the grain size and mechanical properties of thin-film aluminum // Izv. RAS. MTT. 2024. № 1.
16. Nabbi R., Wolters J. Investigation of radiation damage in the aluminum structures of the German FRJ-2 research reactor // Int. Atomic Energy Agency (IAEA). 1998
17. Khan M. *et al.* A Study of the Structural and Surface Morphology and Photoluminescence of Ni-Doped AlN Thin Films Grown by Co-Sputtering // Nanomaterials. 2022. V. 12. № 21. P. 3919;  
<https://doi.org/10.3390/nano12213919>
18. Lim Y.Y., Chaudhri M., Enomoto Yu. Accurate determination of the mechanical properties of thin aluminum films deposited on sapphire flats using nanoindentations // J. Mater. Res. 1999. V. 14. P. 2314–2327;  
<https://doi.org/10.1557/JMR.1999.0308>
19. Quek S.S. *et al.* The inverse hall–petch relation in nanocrystalline metals: A discrete dislocation dynamics analysis // J. Mech. Phys. Solids. 2016. V. 88. P. 252–266;  
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.12.012>
20. Akiniwa Y., Suzuki T., Tanaka K. Evaluation of deformation behavior in Cu thin film under tensile and fatigue loading by X-ray method // Mater. Sci. Forum. 2006. V. 524–525. P. 807–812;  
<https://doi.org/DOI:10.4028/www.scientific.net/MSF.524-525.807>
21. Read D.T., Volinsky A.A. Measurements for Mechanical Reliability of Thin Films // NATO Science for Peace and Security Series C: Environmental Security. 2009. P. 337–358;  
[https://doi.org/10.1007/978-90-481-2792-4\\_16](https://doi.org/10.1007/978-90-481-2792-4_16)

- 
22. *Sinclair G.M., Dolan T.J.* Effect of stress amplitude on statistical variability in fatigue life of 75S-T6 aluminum alloy // *Trans ASME*. 1953. V. 75. P. 867–870;  
<https://doi.org/10.1115/1.4015460>
  23. *Puchicabrera E. et.al.* Fatigue behavior of AA7075-T6 aluminum alloy coated with ZrN by PVD // *Int. J. Fatigue*. 2008. V. 30. № 7. P. 1220–1230;  
<https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.09.001>
  24. *Yang H.H. et al.* Synergistic effect of environmental media and stress on the fatigue fracture behaviour of aluminium alloys // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 2016. V. 39. P. 1309–1316;  
<https://doi.org/10.1111/ffe.12457>
  25. *Ramamurty Raju P., Satyanarayana B., Ramji K.* Sample Size Determination for Development of S-N Curve of A356.2-T6 Aluminum Alloy // *SDHM*. 2008. V. 4. № 3. P. 161–171;  
<https://doi.org/10.3970/sdhm.2008.004.161>

УДК 531.38, 531.39

## ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ, В ТРЕХ ОДНОРОДНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ

© 2024 г. Г. В. Горр<sup>а</sup>, \*

<sup>а</sup> Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук,  
Москва, Россия

\*e-mail: gygorr@gmail.com

Поступила в редакцию 05.10.2023 г.

После доработки 14.10.2023 г.

Принята к публикации 14.10.2023 г.

Предметом исследования является задача о прецессиях гиростата с неподвижной точкой в трех однородных силовых полях. Класс рассматриваемых прецессионных движений характеризуется свойствами постоянства угла нутации и соизмеримости скоростей прецессии и собственного вращения гиростата. Уравнения движения гиростата редуцированы к трем дифференциальным уравнениям второго порядка относительно скоростей прецессии и собственного вращения гиростата. Интегрирование этих уравнений проведено в случае прецессионно-изоконических движений (скорости прецессии и собственного вращения равны) и в одном случае резонансных значений скоростей прецессии и собственного вращения (скорость прецессии в два раза больше скорости собственного вращения — резонанс 2:1). Доказано, что полученные в статье решения характеризуются элементарными функциями времени.

*Ключевые слова:* гиростатический момент, прецессии, силовые поля, новые решения

DOI: 10.31857/S1026351924020148, EDN: uvfklv

**1. Введение.** Прецессии гиростата определяются свойством постоянства угла между двумя осями, приходящими через неподвижную точку, первая из которых неизменно связана с гиростатом, а вторая неподвижна в пространстве. Важность для практического применения полученных в этой задаче результатов отмечена в [1]. Математическое моделирование прецессий гиростата проведено во многих задачах динамики гиростата и твердого тела. В задаче о движении тяжелого твердого тела известны регулярные прецессии гироскопа Лагранжа относительно вертикали [2]; регулярные прецессии гироскопа Гриоли [3] относительно наклонной оси; полурегулярные прецессии гироскопа Гесса [4]; прецессии Брессана [5] относительно горизонтальной оси для гироскопа Гесса; прецессии общего вида относительно вертикали, имеющие место в решении А.И. Докшевича [6]. Исследования прецессий гиростата с постоянным

и переменным гиростатическим моментом в полях сложной структуры показали существование многочисленных классов прецессий (см. обзоры [7–9]). Большой интерес представляют и исследования прецессий системы гироскопов Лагранжа и Гесса [10], а также твердых тел с жидким заполнением [11–13].

В задаче о движении твердого тела в двух и трех однородных силовых полях изучены регулярные прецессии [14–16] и прецессии общего вида [17–19]. Эти движения можно отнести к резонансным прецессиям, поскольку для них выполняются равенства: 1.  $\dot{\psi} = \dot{\phi}$ ; 2.  $\dot{\psi} = 2\dot{\phi}$ ; 3.  $\dot{\phi} = 2\dot{\psi}$ . В данных случаях  $\phi(t), \psi(t)$  — эллиптические функции времени. В силу указанных результатов представляется важной следующая задача: изучение условий существования резонансных прецессий гиростата. Выводы по рассмотрению данной проблемы показали не только некоторые аналогии условий на параметры гиростата, но и принципиальные отличия результатов (например, в задаче о движении гиростата  $\phi(t)$  и  $\psi(t)$  — элементарные функции времени).

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим движение твердого тела, имеющего неподвижную точку, в силовом поле, которое является суперпозицией трех однородных и постоянных силовых полей. Обозначим через  $\gamma, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$  единичные векторы, характеризующие направления сил  $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  каждого из полей;  $C, C_1, C_2$  — центры приведения сил;  $\mathbf{s} = P \mathbf{OC}$ ,  $\mathbf{r} = P_1 \mathbf{OC}_1$ ,  $\mathbf{p} = P_2 \mathbf{OC}_2$ ;  $Oxyz$  — подвижная система координат,  $O$  — неподвижная точка. Пусть тензор инерции тела в системе  $Oxyz$  имеет значение  $A = (A_{ij})$  ( $i, j = 1, 3$ ). Тело вращается вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3)$  ( $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  — единичные векторы системы  $Oxyz$ ). Для векторов  $\mathbf{s}, \mathbf{r}, \mathbf{p}$  запишем соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= s_1 \mathbf{i}_1 + s_2 \mathbf{i}_2 + s_3 \mathbf{i}_3, & \mathbf{r} &= r_1 \mathbf{i}_1 + r_2 \mathbf{i}_2 + r_3 \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{p} &= p_1 \mathbf{i}_1 + p_2 \mathbf{i}_2 + p_3 \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Тогда уравнения движения гиростата запишем по аналогии с уравнениями [17, 18]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \times \gamma + \mathbf{r} \times \gamma^{(1)} + \mathbf{p} \times \gamma^{(2)}, \quad (2.2)$$

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\gamma}^{(1)} = \gamma^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\gamma}^{(2)} = \gamma^{(2)} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (2.3)$$

где точка над переменными  $\boldsymbol{\omega}, \gamma, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$  обозначает дифференцирование по времени  $t$ . В формулах (2.2), (2.3) полагаем:

$$\gamma \cdot \gamma^{(1)} = 0, \quad \dot{\gamma}^{(2)} = \gamma \times \gamma^{(1)}, \quad |\gamma| = 1, \quad |\gamma^{(1)}| = 1, \quad (2.4)$$

то есть направления силовых полей будут характеризоваться тройкой  $\gamma, \gamma^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда очевидны равенства  $\mathbf{P} = P \gamma$ ,  $\mathbf{P}_i = P_i \gamma^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ).

Рассмотрим прецессии тела относительно вектора  $\gamma$ . Они характеризуются инвариантным соотношением (ИС):

$$\mathbf{a} \cdot \gamma = a_0 \quad (a_0 = \cos \theta_0), \quad (2.5)$$

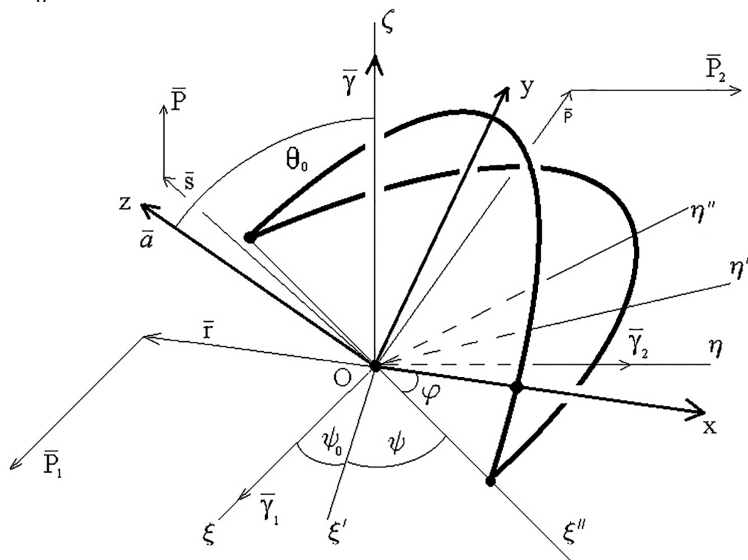
где  $\theta_0$  – угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  ( $\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ ,  $|\mathbf{a}| = 1$ ). Вектор угловой скорости тела на ИС (2.5) представим так [7]:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{a} + \dot{\psi} \boldsymbol{\gamma}. \quad (2.6)$$

Переменные  $\varphi, \psi$  и постоянную  $\theta_0$  можно трактовать как углы Эйлера. Используя метод [7], запишем значение вектора  $\gamma^{(i)}$ :

$$\gamma^{(1)} = b_0[a_0\gamma\sin(\psi + \psi_0) - \mathbf{a}\sin(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a} \times \gamma)\cos(\psi + \psi_0)], \quad (2.7)$$

где  $b_0 = \frac{1}{a'_0}$  ( $a'_0 = \sin \theta_0$ ),  $\psi_0$  – постоянная.



**Рис. 1.** Геометрическая трактовка прецессий твердого тела.

Значение вектора  $\gamma^{(2)}$  найдем по второй формуле системы (2.4):

$$\boldsymbol{\gamma}^{(2)} = b_0 [\mathbf{a} \cos(\psi + \psi_0) - a_0 \boldsymbol{\gamma} \cos(\psi + \psi_0) + (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma}) \sin(\psi + \psi_0)]. \quad (2.8)$$

Таким образом, при получении (2.7), (2.8) полагалось, что  $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$ , то есть случай равномерных вращений тела исключаем из рассмотрения. Подвижную систему координат выберем следующим образом: направим вектор  $\mathbf{i}_3$  по вектору  $\mathbf{a}$ . Тогда в силу ИС (2.5), первого уравнения из (2.3) имеем [7, 8]:

$$\boldsymbol{\gamma} = a'_0 \sin\phi \cdot \mathbf{i}_1 + a'_0 \cos\phi \cdot \mathbf{i}_2 + a_0 \mathbf{i}_3 \quad (\mathbf{i}_3 = \mathbf{a}). \quad (2.9)$$

Учитывая (2.6), (2.9), запишем компоненты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  вектора  $\omega$ :

$$\omega_1 = a_0' \dot{\psi} \sin \varphi, \quad \omega_2 = a_0' \dot{\psi} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\phi} + a_0 \dot{\psi}. \quad (2.10)$$



На рис. 1 приведена геометрическая трактовка прецессий тела относительно вектора  $\gamma$  ( $O\xi\eta\zeta$  — неподвижная система координат).

*Замечание 1.* При описании кинематических свойств в виде соотношений (2.5)–(2.10) использован метод [7], который отличается от методов, применяемых в [14–16].

*Замечание 2.* Уравнения (2.2), (2.3) имеют интеграл энергии

$$A\omega \cdot \omega - 2(\mathbf{s} \cdot \gamma + \mathbf{r} \cdot \gamma^{(1)} + \mathbf{p} \cdot \gamma^{(2)}) = 2E, \quad (2.11)$$

где  $E$  — постоянная. Как показано в [7, 8], нахождение условий существования прецессий в задачах динамики твердого тела на основании (2.11) значительно упрощается.

**3. Преобразование уравнения (2.2) на ИС (2.5).** Внесем в уравнение (2.2) значение  $\omega$  из (2.6) и рассмотрим полученное уравнение в базисе  $\mathbf{a}, \gamma, \mathbf{a} \times \gamma$  с учетом (2.7), (2.8):

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(\mathbf{Aa} \cdot \mathbf{a}) + \ddot{\psi}(\mathbf{Aa} \cdot \gamma) - \dot{\psi}^2[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\gamma \times \gamma)] - \dot{\psi}[\lambda \cdot (\mathbf{a} \times \gamma)] - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{s} \times \gamma)] - \\ - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \gamma) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}] + \mathbf{p} \cdot \gamma\} - \\ - b_0 \cos(\psi + \psi_0) + \{\mathbf{r} \cdot \gamma - a_0[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{p} \times \gamma)]\} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(\mathbf{Aa} \cdot \gamma) + \ddot{\psi}(\mathbf{A}\gamma \cdot \gamma) + 2\dot{\phi}\dot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\gamma \times \gamma)] + \\ + \dot{\phi}^2[\gamma \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{Aa})] + \dot{\phi}[\lambda \cdot (\mathbf{a} \times \gamma)] - \\ - b_0 \sin(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0(\mathbf{p} \cdot \gamma) + [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \gamma) - \\ - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})]\} - b_0 \cos(\psi + \psi_0) \cdot \{a_0(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) + [\mathbf{a} \cdot (\gamma \times \mathbf{p})]\} = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}[\mathbf{Aa} \cdot (\gamma \times \mathbf{a})] + \ddot{\psi}[\mathbf{A}\gamma \cdot (\mathbf{a} \times \gamma)] + \dot{\phi}\dot{\psi}[2(\mathbf{A}\gamma \cdot \gamma) - a_0'^2 \text{Sp}(\mathbf{A}) - 2a_0(\mathbf{Aa} \cdot \gamma)] + \\ + \dot{\psi}^2[a_0(\mathbf{A}\gamma \cdot \gamma) - (\mathbf{Aa} \cdot \gamma)] - \dot{\phi}[a_0(\mathbf{a} \cdot \lambda) - (\lambda \cdot \gamma)] + \dot{\psi}[(\lambda \cdot \mathbf{a}) - a_0(\lambda \cdot \gamma)] - \\ - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}) + a_0(\mathbf{s} \cdot \gamma) - a_0'[(\mathbf{p} \cdot \gamma)\cos(\psi + \psi_0) - (\mathbf{r} \cdot \gamma)\sin(\psi + \psi_0)] = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\text{Sp}(\mathbf{A}) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$  — след матрицы  $\mathbf{A}$ .

По аналогии с (3.1)–(3.3) распишем интеграл (2.10) на ИС (2.5), (2.6):

$$\begin{aligned} (\mathbf{Aa} \cdot \mathbf{a})\dot{\phi}^2 + 2(\mathbf{Aa} \cdot \gamma)\dot{\phi}\dot{\psi} + (\mathbf{Aa} \cdot \gamma)\dot{\psi}^2 - 2\{(\mathbf{s} \cdot \gamma) + b_0[\sin(\psi + \psi_0) \cdot (a_0(\mathbf{r} \cdot \gamma) - \\ - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{p} \cdot (\gamma \times \mathbf{a})) + \cos(\psi + \psi_0) \cdot [\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} - a_0(\mathbf{p} \cdot \gamma) + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \gamma)]]\} = 2E. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} f_0(\varphi) &= a_0'(s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) + a_0 s_3 \\ \tilde{f}_0(\varphi) &= a_0'(s_2 \sin \varphi - s_1 \cos \varphi) \\ f_1(\varphi) &= a_0'[(a_0 r_1 + p_2) \sin \varphi + (a_0 r_2 - p_1) \cos \varphi - a_0' r_3] \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$f_2(\varphi) = a'_0 [(r_2 - a_0 p_1) \sin \varphi - (a_0 p_2 + r_1) \cos \varphi + a'_0 p_3]$$

$$f_3(\varphi) = a'_0 [(p_1 - a_0 r_2) \sin \varphi + (p_2 + a_0 r_1) \cos \varphi]$$

$$f_4(\varphi) = a'_0 [(r_1 + a_0 p_2) \sin \varphi + (r_2 - a_0 p_1) \cos \varphi]$$

$$f_5(\varphi) = a'_0 [a_0(s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) - a'_0 s_3]$$

$$f_6(\varphi) = -a'_0 [a'_0 (r_1 \sin \varphi + r_2 \cos \varphi) + a_0 r_3]$$

$$f_7(\varphi) = a'_0 [a'_0 (p_1 \sin \varphi + p_2 \cos \varphi) + a_0 p_3].$$

Сначала запишем интеграл (3.4) в силу (3.5):

$$(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\dot{\varphi}^2 + 2(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\varphi}\dot{\psi} + (A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma})\dot{\psi}^2 - 2[f_0(\varphi) + b_0(f_1(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) + f_2(\varphi)\cos(\psi + \psi_0))] = 2E. \quad (3.6)$$

Затем обратимся к уравнениям (3.1)–(3.3). На основании (3.5) имеем:

$$\ddot{\varphi}(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) + \ddot{\psi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \dot{\psi}^2[\mathbf{a} \cdot (A\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})] + \ddot{f}_0(\varphi) - \dot{\psi}[\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] - b_0(f_3(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) + f_4(\varphi)\cos(\psi + \psi_0)) = 0, \quad (3.7)$$

$$\ddot{\varphi}(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \ddot{\psi}(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - 2\dot{\varphi}\dot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times A\boldsymbol{\gamma})] - \dot{\varphi}^2[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times A\mathbf{a})] + \dot{\varphi}[\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\gamma})] - \quad (3.8)$$

$$-b_0[f_1(\varphi)\cos(\psi + \psi_0) - f_2(\varphi)\sin(\psi + \psi_0)] = 0,$$

$$\ddot{\varphi}[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times A\mathbf{a})] + \ddot{\psi}[\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times A\boldsymbol{\gamma})] + \dot{\varphi}\dot{\psi}[2(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0^2 Sp(A) - 2a_0(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\varphi}^2[(A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - a_0(A\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})] + \quad (3.9)$$

$$+ \dot{\psi}^2[a_0(A\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (A\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\varphi}[a_0(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\lambda}) - (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + \dot{\psi}[(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a}) - a_0(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma})] + f_5(\varphi) + f_6(\varphi)\sin(\psi + \psi_0) + f_7(\varphi)\cos(\psi + \psi_0) = 0.$$

**4. Первый класс резонансных прецессий гиростата.** Прецессионно-изоконические движения. В статьях [17–19] действительные решения для прецессий тела установлены только в случае, когда тело динамически симметрично, то есть главные моменты инерции удовлетворяют условиям:

$$A_2 = A_1, \quad (4.1)$$

а вектор  $\mathbf{a}$  направлен по оси динамической симметрии:  $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ . Поэтому и для задачи о прецессиях гиростата естественно полагать, что (4.1) сохраняется.

Первый класс прецессии [18] описывается равенством:

$$\dot{\psi} = n\dot{\varphi} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (4.2)$$

Введем обозначения для параметров задачи:

$$\begin{aligned} L_0 &= a_0'^2 n^2 A_1 + (1 + a_0 n)^2 A_3, & M_0 &= (1 + a_0 n) A_3 \\ N_0 &= a_0'^2 A_1 n + a_0 (1 + a_0 n) A_3, & K_0 &= a_0 n A_1 - (1 + a_0 n) A_3, \end{aligned} \quad (4.3)$$

и для функций  $F_i(\varphi)$  ( $i = \overline{1,3}$ ),  $\Phi_i(\varphi)$  ( $i = \overline{1,4}$ ):

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= (a_0 s_3 + E) + a_0' (s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) + b_0 \Phi_2(\varphi) \\ F_2(\varphi) &= a_0' (s_1 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi) + b_0 \Phi_3(\varphi) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$F_3(\varphi) = a_0' [a_0 (s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) - a_0' s_3] + \Phi_4(\varphi);$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(\varphi) &= H_{n+1} \sin(n+1)\varphi + G_{n+1} \cos(n+1)\varphi + H_n \sin n\varphi + G_n \cos n\varphi + \\ &\quad + H_{n-1} \sin(n-1)\varphi + G_{n-1} \cos(n-1)\varphi \\ \Phi_2(\varphi) &= G_{n+1} \sin(n+1)\varphi - H_{n+1} \cos(n+1)\varphi + G_n \sin n\varphi - H_n \cos n\varphi + \\ &\quad + G_{n-1} \sin(n-1)\varphi - H_{n-1} \cos(n-1)\varphi \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\Phi_3(\varphi) = H_{n+1} \sin(n+1)\varphi + G_{n+1} \cos(n+1)\varphi -$$

$$- H_{n-1} \sin(n-1)\varphi - G_{n-1} \cos(n-1)\varphi$$

$$\Phi_4(\varphi) = a_0' [-\tilde{G}_{n+1} \sin(n+1)\varphi +$$

$$+ \tilde{H}_{n+1} \cos(n+1)\varphi + a_0 b_0^2 (G_n \sin n\varphi - H_n \cos n\varphi) -$$

$$-\tilde{G}_{n-1} \sin(n-1)\varphi + \tilde{H}_{n-1} \cos(n-1)\varphi];$$

$$H_{n+1} = (1 + a_0) \tilde{H}_{n+1}, \quad \tilde{H}_{n+1} = \frac{a_0'}{2} [(r_1 + p_2) \cos \psi_0 - (r_2 - p_1) \sin \psi_0]$$

$$G_{n+1} = (1 + a_0) \tilde{G}_{n+1}, \quad \tilde{G}_{n+1} = \frac{a_0'}{2} [(r_1 + p_2) \sin \psi_0 + (r_2 - p_1) \cos \psi_0]$$

$$H_n = a_0'^2 (r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0), \quad G_n = -a_0'^2 (r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0) \quad (4.6)$$

$$H_{n-1} = (1 - a_0) \tilde{H}_{n-1}, \quad \tilde{H}_{n-1} = \frac{a_0'}{2} [(p_1 + r_2) \sin \psi_0 - (p_2 - r_1) \cos \psi_0]$$

$$G_{n-1} = (1 - a_0) \tilde{G}_{n-1}, \quad \tilde{G}_{n-1} = -\frac{a_0'}{2} [(p_1 + r_2) \cos \psi_0 + (p_2 - r_1) \sin \psi_0].$$

Запишем уравнения (3.6)–(3.9) при условиях (4.1), (4.2) и учете соотношений (4.3)–(4.6):

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2F_1(\varphi)}{L_0}, \quad (4.7)$$

$$M_0 \ddot{\varphi} = F_2(\varphi) + a_0' n (\lambda_1 \cos \varphi - \lambda_2 \sin \varphi) \dot{\varphi}, \quad (4.8)$$

$$N_0\ddot{\varphi} = b_0\Phi_1(\varphi) - a'_0(\lambda_1\cos\varphi - \lambda_2\sin\varphi)\dot{\varphi}, \quad (4.9)$$

$$a_0'^2 n K_0 \dot{\varphi}^2 + F_3(\varphi) + a'_0 \dot{\varphi} [a'_0 \lambda_3 n - (1 + a_0 n)(\lambda_1 \sin\varphi + \lambda_2 \cos\varphi)] = 0. \quad (4.10)$$

При анализе (4.7), (4.8), (4.10) будем использовать соотношения:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2b_0}{L_0} (G_{n+1} \sin(n+1)\varphi - H_{n+1} \cos(n+1)\varphi + \dots) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{b_0(a_0 + 1)(n+1)}{L_0} (\tilde{H}_{n+1} \sin(n+1)\varphi + G_{n+1} \cos(n+1)\varphi) + \dots \\ F_2(\varphi) &= b_0(a_0 + 1) (\tilde{H}_{n+1} \sin(n+1)\varphi + \tilde{G}_{n+1} \cos(n+1)\varphi) + \dots \\ \Phi_1(\varphi) &= b_0(a_0 + 1) (\tilde{H}_{n+1} \sin(n+1)\varphi + \tilde{G}_{n+1} \cos(n+1)\varphi) + \dots, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где многоточием обозначены очевидные слагаемые (см. (4.4), (4.5)). Применяя метод [18], разработанный при  $\lambda_i = 0$  ( $i = \overline{1,3}$ ), из (4.7)–(4.10), получим  $G_{n+1} = 0$ ,  $H_{n+1} = 0$  ( $n > 1$ ) или, в силу (4.6), установим условия на параметры  $p_1, p_2, r_1, r_2$ :

$$r_1 = -p_2, \quad r_2 = p_1 \quad (4.13)$$

Уравнение (4.9) будем исключать из рассмотрения, так как в результате исключения из уравнений (4.8), (4.9) функции  $\lambda_1 \cos\varphi - \lambda_2 \sin\varphi$  найдем уравнение, которое следует из (4.7) при дифференцировании его по времени.

Далее положим  $n = 1$  (очевидно, ограничения (4.13) исключаются)

$$\Psi = \varphi. \quad (4.14)$$

В силу условия (4.14) из соотношений (4.3), (4.6) получим:

$$\begin{aligned} L_0 &= (1 + a_0)[(1 - a_0)A_1 + (1 + a_0)A_3], \quad M_0 = (1 + a_0)A_3, \\ N_0 &= (1 + a_0)[(1 - a_0)A_1 + a_0A_3], \quad K_0 = a_0A_1 - (1 + a_0)A_3, \\ H_2 &= (1 + a_0)\tilde{H}_2, \quad \tilde{H}_2 = \frac{a'_0}{2}[(r_1 + p_2)\cos\psi_0 - (r_2 - p_1)\sin\psi_0], \\ G_2 &= (1 + a_0)\tilde{G}_2, \quad \tilde{G}_2 = \frac{a'_0}{2}[(r_1 + p_2)\sin\psi_0 + (r_2 - p_1)\cos\psi_0], \\ H_1 &= a_0'^2(r_3\sin\psi_0 - p_3\cos\psi_0), \quad G_1 = -a_0'^2(r_3\cos\psi_0 + p_3\sin\psi_0), \\ H_0 &= (1 - a_0)\tilde{H}_0, \quad \tilde{H}_0 = \frac{a'_0}{2}[(p_1 + r_2)\sin\psi_0 - (p_2 - r_1)\cos\psi_0], \\ G_0 &= (1 - a_0)\tilde{G}_0, \quad \tilde{G}_0 = -\frac{a_0'^2}{2}[(p_1 + r_2)\cos\psi_0 + (p_2 - r_1)\sin\psi_0]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

В дальнейшем необходимы параметры:

$$S_1 = a'_0 s_1 + b_0 G_1, \quad S_2 = a'_0 s_2 - b_0 H_1, \quad S_0 = a_0 s_3 + E - b_0(1 + a_0)H_0. \quad (4.16)$$

Запишем функции  $\dot{\varphi}^2$ ,  $F_2(\varphi)$ ,  $\Phi_1(\varphi)$ ,  $F_3(\varphi)$ ; используя формулы (4.4), имеем:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{L_0} [b_0(1 + a_0)(\tilde{G}_2 \sin 2\varphi - \tilde{H}_2 \cos 2\varphi) + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0], \quad (4.17)$$

$$F_2(\varphi) = b_0(1 + a_0)(\tilde{H}_2 \sin 2\varphi + \tilde{G}_2 \cos 2\varphi) + a'_0(s_1 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi) - b_0(1 - a_0)\tilde{G}_0 \quad (4.18)$$

$$\Phi_1(\varphi) = (1 + a_0)(\tilde{G}_2 \cos 2\varphi + \tilde{H}_2 \sin 2\varphi) + G_1 \cos \varphi + H_1 \sin \varphi + (1 - a_0)\tilde{G}_0$$

$$F_3(\varphi) = a'_0 \left\{ \tilde{H}_2 \cos 2\varphi - \tilde{G}_2 \sin 2\varphi + a_0[(s_1 + \right. \\ \left. + b_0^2 G_1) \sin \varphi + (s_2 - b_0^2 H_1) \cos \varphi] + (\tilde{H}_0 - s_3) \right\}.$$

Рассмотрим уравнения (4.8), (4.10). В силу того, что тело динамически симметрично (см. (4.1)), не нарушая общности задачи, положим:

$$\lambda_2 = 0. \quad (4.19)$$

Тогда из (4.8), (4.10) получим:

$$(M_0 \ddot{\varphi} - F_2(\varphi))^2 = a_0'^2 \lambda_1^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi, \quad (4.20)$$

$$(a_0'^2 K_0 \dot{\varphi}^2 + F_3(\varphi))^2 = a_0'^2 \dot{\varphi}^2 [a'_0 \lambda_3 - (1 + a_0) \lambda_1 \sin \varphi]^2. \quad (4.21)$$

Подставим  $\dot{\varphi}^2$ ,  $\ddot{\varphi}$ ,  $F_2(\varphi)$  из (4.11) в уравнение (4.20). Поскольку редуцированное уравнение должно быть тождеством по  $\varphi$ , то множители при  $\cos 4\varphi$ ,  $\sin 4\varphi$  необходимо принять равными нулю:

$$a'_0 (A_3 - A_1)^2 (\tilde{G}_2^2 - \tilde{H}_2^2) = -\lambda_1^2 \tilde{H}_2 [(1 - a_0)A_1 + (1 + a_0)A_3], \quad (4.22)$$

$$a'_0 (A_3 - A_1)^2 \tilde{G}_2 \tilde{H}_2 = \lambda_1^2 \tilde{G}_2 [(1 - a_0)A_1 + (1 + a_0)A_3]. \quad (4.23)$$

Если  $\tilde{G}_2 = 0$ ,  $\tilde{H}_2 = 0$ , то рассмотрение уравнений (4.20), (4.21) приводит к равенствам  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 0$ , и из (4.17) следует, что  $\dot{\varphi} = \text{const}$ . Данное равенство исключено в постановке задачи. Положим в (4.23)  $\tilde{G}_2 \neq 0$ . Тогда после исключения из уравнений  $\lambda_1^2$  найдем равенство  $\tilde{G}_2 = 0$ . То есть в дальнейшем необходимо положить  $\tilde{G}_2 = 0$ . Это равенство в первоначальных параметрах таково:

$$\tilde{G}_2 = (r_1 + p_2) \sin \psi_0 + (r_2 - p_1) \cos \psi_0 = 0. \quad (4.24)$$

В силу (4.24) из равенства (4.22) найдем значение  $\lambda_1^2$ :

$$\lambda_1^2 = \frac{a'_0 \tilde{H}_2 (A_3 - A_1)^2}{(1 - a_0)A_1 + (1 + a_0)A_3}. \quad (4.25)$$

Исследование уравнения (4.21) можно провести по аналогии с исследованием уравнения (4.20). Тогда получим:

$$\lambda_1^2 = \frac{a'_0 \tilde{H}_2 \sigma_0^2}{(1 + a_0)^2 [(1 - a_0)A_1 + (1 + a_0)A_3]}, \quad (4.26)$$

где

$$\sigma_0 = 3a_0(A_1 - A_3) - (A_1 + 3A_3). \quad (4.27)$$

Приравнявая значения (4.25), (4.26), установим условие на параметры  $a_0, A_1, A_3$ :

$$a_0 A_1 - (1 + a_0)A_3 = 0. \quad (4.28)$$

Из (4.28) следует, что случай сферического распределения масс гиростата невозможен.

На основании обозначений (4.15) параметр  $K_0 = 0$ . Это равенство в значительной мере упрощает уравнение (4.21), которое запишем в виде:

$$\begin{aligned} & \tilde{H}_2 \cos 2\varphi + a_0(s_1 + b_0^2 G_1) \sin \varphi + a_0(s_2 + b_0^2 H_1) \cos \varphi + (H_0 - s_3)]^2 = \\ & = \frac{2}{L_0} [-b_0(1 + a_0) \tilde{H}_2 \cos 2\varphi + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0] [a'_0 \lambda_3 - (1 + a_0) \lambda_1 \sin \varphi]^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Запишем уравнение (4.20):

$$\begin{aligned} & \{2b_0 \tilde{H}_2 [2(1 + a_0)M_0 - L_0(1 + a_0)] \sin 2\varphi + [M_0 S_1 - a'_0 s_1 (1 + a_0)L_0] \cos \varphi - \\ & - [M_0 S_2 - a'_0 s_2 (1 + a_0)L_0] \sin \varphi + b_0(1 - a_0)L_0 \tilde{G}_0\}^2 = \\ & = 2a_0'^2 L_0 [-b_0(1 + a_0)H_2 \cos 2\varphi + S_1 \cos \varphi - S_2 \sin \varphi + S_0] \lambda_1^2 \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Полагая в (4.30)  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ , найдем условие:

$$M_0 S_2 - a'_0 s_2 (1 + a_0) b_0 L_0 = 0, \quad \tilde{G}_0 = 0. \quad (4.31)$$

При  $\tilde{G}_0 = 0$  имеем в силу (4.15) условие:

$$(p_1 + r_2) \cos \psi_0 + (p_2 - r_1) \sin \psi_0 = 0.$$

рассматривая которое совместно с условием (4.24), установим ограничение на параметры  $p_1, p_2, r_1, r_2$ :

$$p_1 p_2 + r_1 r_2 = 0 \quad (4.32)$$

Учтем в уравнении (4.30) равенства (4.31):

$$\begin{aligned} & \left\{ 2\tilde{H}_2 b_0 [2(1+a_0)M_0 - (1+a_0)L_0] \sin \varphi + [M_0 S_1 - a'_0 s_1 (1+a_0)L_0] \right\}^2 = \\ & = \frac{2a_0'^3 \tilde{H}_2 A_3^2}{a_0^2} \left[ -b_0 (1+a_0)^2 \tilde{H}_2 \cos 2\varphi + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0 \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Из уравнения (4.33), которое должно быть тождеством по  $\varphi$ , следует равенство  $S_2 = 0$ . Рассматривая его совместно с условием (4.31), находим значение  $s_2$ :

$$s_2 = 0. \quad (4.34)$$

Тогда, в силу обозначений (4.16), можно определить дополнительное условие  $H_1 = 0$ , которое запишем с учетом (4.15):

$$r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0 = 0. \quad (4.35)$$

Специальный вид уравнения (4.29) позволяет применить к его исследованию другой подход, основанный на полиномиальной структуре. Примем  $\sin \varphi$  за переменную  $x$  и учтем в (4.29) условия (4.34), (4.35). Тогда уравнение (4.29) запишем так:

$$R^2(x) = \mu_0 F_1^*(x)(x - \mu_1)^2, \quad (4.36)$$

где

$$\begin{aligned} R(x) &= -2\tilde{H}_2 x^2 + r^{(1)}x + r^{(0)}, \quad F_1^*(x) = 2b_0(1+a_0)\tilde{H}_2 + \beta_1 x + \beta_2 \\ r^{(1)} &= a_0(s_1 + b_0^2 G_1), \quad r^{(0)} = \tilde{H}_2 + H_0 - s_3, \quad \beta_1 = S_1, \quad \beta_2 = S_0 - b_0(1+a_0)\tilde{H}_2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\mu_0 = \frac{2(1+a_0)\lambda_1}{L_0}, \quad \mu_1 = \frac{a'_0 \lambda_3}{(1+a_0)\lambda_1}.$$

В силу действительности параметра  $\mu_1$ , указанного в (4.37), из (4.35) следует, что при  $x = \mu_1$ , функция  $R(x)$  обращается в нуль ( $\mu_1$  – корень уравнения  $R(x) = 0$ ). Сокращая левую и правую части (4.35) на  $(x - \mu_1)^2$ , получим:

$$4\tilde{H}_2^2(x - \mu_1)^2 = \mu_0 F^*(x). \quad (4.38)$$

На основании (4.38) и условия  $S_2 = 0$  запишем значение  $\dot{\varphi}^2$  из (4.17):

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{L_0} [-b_0 \tilde{H}_2 (1+a_0) \cos 2\varphi + S_1 \sin \varphi + S_0]. \quad (4.39)$$

Проведенные преобразования (см. формулы (4.35)–(4.38)) позволяют из (4.29) получить условие (4.38) в первоначальных значениях (т.е. значениях по  $\varphi$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{H}_2 \cos 2\varphi + a_0(s_1 + b_0^2 G_1) \sin \varphi + (H_0 - s_3) = \\ = \kappa_0 \left[ -b_0(1 + a_0) \tilde{H}_2 \cos 2\varphi + S_1 \sin \varphi + S_0 \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Из (4.40) следует:

$$\kappa_0 = -\frac{1}{b_0(1 + a_0)}, \quad a_0(s_1 + b_0^2 G_1) = -\frac{S_1}{b_0(1 + a_0)}. \quad (4.41)$$

С помощью первого равенства из (4.16) второе соотношение из (4.4) приведем к виду:

$$S_1(a_0^2 + a_0 + 1) = 0. \quad (4.42)$$

Поскольку  $a_0$  действительный параметр, то из (4.42) следует равенство  $S_1 = 0$ . Тогда из первого равенства системы (4.16) находим значение  $s_1$ :

$$s_1 = -\frac{1}{a_0^2} G_1. \quad (4.43)$$

В силу равенства  $S_1 = 0$  из уравнения (4.33) определим, что и первая компонента вектора  $\mathbf{s}$  имеет значение

$$s_1 = 0. \quad (4.44)$$

Из (4.43) следует равенство  $G_1 = 0$ . Принимая во внимание значение  $G_1$  из (4.15) и условие (4.35), получим  $p_3 = 0$ ,  $r_3 = 0$ . На основании этих равенств и условия (4.32), которое параметризуем в виде  $r_1 = \kappa_0 p_2$ ,  $r_2 = -\kappa_0 p_1$ , запишем векторы

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, 0), \quad \mathbf{r} = \kappa_0(p_2, -p_1, 0) \quad (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 0). \quad (4.45)$$

Отметим преобразованное значение  $\dot{\varphi}^2$  с учетом значения  $S_0 = b_0(1 + a_0)^2 \tilde{H}_2$ , которое следует из (4.33):

$$\dot{\varphi} = \pm \mu_0 \sin \varphi, \quad \mu_0 = 2 \sqrt{\frac{a_0 \tilde{H}_2}{a_0' A_3}}. \quad (4.46)$$

Поскольку уравнение (4.29) рассмотрено частично, то запишем его при найденных условиях на параметры:

$$\left[ \tilde{H}_2 \cos 2\varphi + (H_0 - s_3) \right]^2 = 4b_0(1 + a_0)^2 H_2 \left[ a_0' \lambda_3 - (1 + a_0) \lambda_1 \sin \varphi \right]^2 \sin^2 \varphi. \quad (4.47)$$

При  $\varphi = 0$  из уравнения (4.47) получим:



$$s_3 = H_0 + \tilde{H}_2. \quad (4.48)$$

Учитывая условие (4.48), установим последнее ограничение на параметры

$$\lambda_3 = 0. \quad (4.49)$$

Подставим  $H_0, \tilde{H}_2$  из (4.15) в равенства (4.48):

$$s_3 = \frac{a'_0}{2} \left[ \left( (a_0 + 2)r_1 - a_0 p_2 \right) \cos \psi_0 + \left( (a_0 + 2)p_1 + r_2 \right) \sin \psi_0 \right]. \quad (4.50)$$

Для сравнения полученных результатов и результатов [18] приведем основные формулы данной статьи:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, 0), \quad \mathbf{r} = {}^\circ_0(p_2, -p_1, 0), \quad (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 0) \\ s_2 = 0, \quad s_1 = 0, \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{a_0}{1 + a_0} \quad (A_3 < A_1); \quad a_0 \in (0, 1). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Запишем основные результаты [18]:

$$\begin{aligned} \lambda_i = 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3), \quad \mathbf{r} = (-p_2, p_1, r_3) \quad (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \neq 0) \\ s_i \neq 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad a_0 \in \left( 0, \frac{\sqrt{41} - 5}{2} \right), \quad A_3 < 2A_1, \quad (A_3 = A_1, a_0 = \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Отличия (4.51) от (4.52) очевидны; отметим, что в случае (4.51) вариант  $A_3 = A_1$  невозможен. Кроме этого, решение [18] характеризуется эллиптическими функциями:

$$a_0 \in (0, 1), \quad A_3 < A_1. \quad (4.53)$$

**5. Геометрическая интерпретация движения гиростата в случае  $\psi = \varphi$ .** Без ограничения общности рассмотрим (4.46) только с положительным знаком:

$$\dot{\varphi} = \mu_0 \sin \varphi. \quad (5.1)$$

Вычислим  $\varphi(\tau)$ , где  $\tau = \mu_0 t$ :

$$\varphi(\tau) = 2 \operatorname{arctg} e^\tau. \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует, что  $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$ , при  $\tau \rightarrow \infty$ :  $\varphi(\tau) \rightarrow \pi$ . Рассмотрим подвижный годограф вектора  $\mathbf{E}$  из (2.6) в данном случае:

$$\omega = \mu_0 \sin \varphi(\mathbf{a} + \boldsymbol{\gamma}^{(1)}), \quad (5.3)$$

где

$$\gamma^{(1)} = (a'_0 \sin \varphi, a'_0 \cos \varphi, a_0). \quad (5.4)$$

На основании (5.3), (5.4) находим компоненты  $E$ :

$$\omega_1 = a'_0 \mu_0 \sin^2 \varphi, \quad \omega_2 = a'_0 \mu_0 \sin \varphi \cos \varphi, \quad \omega_3 = \mu_0 (1 + a_0) \sin \varphi. \quad (5.5)$$

Исключим в (5.5) переменную  $\varphi$ :

$$(1 + a_0)(\omega_1^2 + \omega_2^2) - (1 - a_0)\omega_3^2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{a'_0 \omega_3^2}{\mu_0 (1 + a_0)^2}. \quad (5.6)$$

Таким образом, в силу (5.6) подвижный годограф угловой скорости гиростата — линия пересечения конуса второго порядка и параболического цилиндра (образующие его параллельны оси  $Oy$ ). Начальная точка имеет координаты  $a'_0 \mu_0, 0, \mu_0 (1 + a_0)$ , а предельная точка ( $\tau \rightarrow \infty$ ) имеет координаты  $(0, 0, 0)$ . То есть при  $\tau \rightarrow \infty$  конец вектора угловой скорости асимптотически стремится к началу координат.

Запишем неподвижный годограф  $\omega$ :

$$\omega_\zeta = \omega_3, \quad \omega_\xi = -\omega_2, \quad \omega_\eta = \omega_1. \quad (5.7)$$

Формулы (5.7) показывают свойство изоконичности движения гиростата — подвижный и неподвижный годографы симметричны друг другу относительно касательной плоскости. Выше показано, что, кроме данного свойства, движение гиростата — асимптотическое к состоянию покоя.

**6. Прецессионные движения динамически симметричного гиростата в случае, когда скорость прецессии в два раза больше скорости его собственного вращения.**

В силу постановки задачи имеем равенство

$$\psi = 2\varphi. \quad (6.1)$$

При записи (6.1) постоянная, которая может быть введена, принята равной нулю. Запишем обозначения (4.3) при условии  $\psi = 2\varphi$ :

$$\begin{aligned} L_0 &= 4a_0'^2 A_1 + (1 + 2a_0)^2 A_3, & M_0 &= (1 + 2a_0) A_3 \\ N_0 &= 2a_0'^2 A_1 + a_0 (1 + 2a_0) A_3, & K_0 &= 2a_0 A_1 - (1 + 2a_0) A_3. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Сохраняя необходимые аналогии обозначений (4.4), (4.5), для случая (6.1) имеем:

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= b_0 (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + G_2 \sin 2\varphi - \\ &\quad - H_2 \cos 2\varphi) + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} F_2(\varphi) &= a'_0 (s_1 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi) + b_0 [H_3 \sin 3\varphi + G_3 \cos 3\varphi - H_1 \sin \varphi - G_1 \cos \varphi] = \\ &= b_0 (H_3 \sin 3\varphi + G_3 \cos 3\varphi) + \tilde{S}_1 \cos \varphi + \tilde{S}_2 \sin \varphi, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$F_3(\varphi) = a'_0 \left[ \tilde{G}_3 \sin 3\varphi + \tilde{H}_3 \cos 3\varphi + \right. \quad (6.5)$$

$$\left. + a_0 b_0^2 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + S_1^* \sin \varphi + \tilde{S}_2^* \cos \varphi + \tilde{S}_3^* \right],$$

$$\Phi_1 = H_3 \sin 3\varphi + G_3 \cos 3\varphi + H_2 \sin 2\varphi + G_2 \cos 2\varphi + H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi, \quad (6.6)$$

$$\text{где } S_1 = a'_0 s_1 + b_0 G_1, \quad S_2 = a'_0 s_2 - b_0 H_1, \quad S_0 = a_0 s_3 + E \quad (6.7)$$

$$\tilde{S}_1 = a'_0 s_1 - b_0 G_1, \quad \tilde{S}_2 = -(a'_0 s_2 - b_0 H_1),$$

$$S_1^* = a_0 s_1 - \tilde{G}_1, \quad S_2^* = a_0 s_2 + b_0 \tilde{H}_1, \quad \tilde{S}_3^* = -a'_0 s_3 \quad (6.8)$$

$$H_3 = (1 + a_0) \tilde{H}_3, \quad \tilde{H}_3 = \frac{a'_0}{2} [(r_1 + p_2) \cos \psi_0 - (r_2 - p_1) \sin \psi_0],$$

$$G_3 = (1 + a_0) \tilde{G}_3, \quad \tilde{G}_3 = \frac{a'_0}{2} [(r_1 + p_2) \sin \psi_0 + (r_2 - p_1) \cos \psi_0], \quad (6.9)$$

$$H_2 = a_0'^2 (r_3 \sin \psi_0 - p_3 \cos \psi_0), \quad G_2 = -a_0'^2 (r_3 \cos \psi_0 - p_3 \sin \psi_0),$$

$$H_1 = (1 - a_0) \tilde{H}_1, \quad \tilde{H}_1 = \frac{a'_0}{2} [(p_1 + r_2) \sin \psi_0 - (p_2 - r_1) \cos \psi_0] \quad (6.10)$$

$$G_1 = (1 - a_0) \tilde{G}_1, \quad \tilde{G}_1 = -\frac{a'_0}{2} [(p_1 + r_2) \cos \psi_0 + (p_2 - r_1) \sin \psi_0].$$

Запишем интеграл энергии (4.7) и уравнения (4.8), (4.10), приняв во внимание равенство  $\lambda_2 = 0$ , которое можно получить поворотом подвижной системы координат:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2F_1(\varphi)}{L_0}, \quad (6.11)$$

$$M_0 \ddot{\varphi} = F_2(\varphi) - 2\lambda_1 \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad (6.12)$$

$$2a_0'^2 K_0 \dot{\varphi}^2 + F_3(\varphi) = a'_0 \dot{\varphi} [\lambda_1 (1 + 2a_0) \sin \varphi - 2a_0' \lambda_3]. \quad (6.13)$$

Запишем (6.11), уравнение (6.12) и уравнение (6.13). После преобразований последних имеем:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2b_0}{L_0} (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots), \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} b_0 \left[ 3M_0 (G_3 \cos 3\varphi - H_3 \sin 3\varphi + \dots) - L_0 (G_3 \cos 3\varphi - H_3 \sin 3\varphi + \dots) \right]^2 = \\ = 4L_0 a_0'^2 \lambda_1^2 (1 + \cos 2\varphi) (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots), \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \left[ 2a_0'^2 K_0 b_0 (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots) - a_0' L_0 (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots) \right]^2 = \\ = L_0 a_0'^2 b_0 (G_3 \sin 3\varphi - H_3 \cos 3\varphi + \dots). \end{aligned} \quad (6.16)$$

На первом этапе предположим, что  $G_3^2 + H_3^2 = 0$ . Из уравнения (6.15) в силу того, что в левой части старшие гармоники равны шести, в правой части – пяти, получим условие на параметры  $A_1, A_3, a_0$ :

$$2(1 + a_0)A_1 - (1 + 2a_0)A_3 = 0. \quad (6.17)$$

На основании (6.17) значения  $K_0$  и  $L_0$  таковы:

$$K_0 = -2A_1, \quad L_0 = 6(1 + a_0)A_3.$$

Проводя анализ уравнения (6.16) так же, как уравнения (6.15), получим  $1 + a_0 = 0$ , то есть  $a_0 = -1$ ,  $a_0' = 0$ , что невозможно. Итак, в дальнейшем необходимо положить  $G_3 = 0$ ,  $H_3 = 0$ . На основании обозначений (6.9) имеем:

$$r_1 = -p_2, \quad r_2 = -p_1. \quad (6.18)$$

Запишем функции (6.3)–(6.6) при полученных условиях:

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= b_0 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0 \\ F_2(\varphi) &= \tilde{S}_1 \cos \varphi + \tilde{S}_2 \sin \varphi \\ F_3(\varphi) &= a_0' \left[ a_0 b_0^2 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) + S_1^* \sin \varphi + S_2^* \cos \varphi + S_3^* \right] \\ \Phi_1(\varphi) &= \tilde{H}_2 \sin 2\varphi + \tilde{G}_2 \cos 2\varphi + H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Рассмотрим первое уравнение из (6.12); учтя (6.18), имеем

$$M_0^2 b_0 [(G_2 \cos 2\varphi + H_2 \sin 2\varphi) + \dots]^2 = a_0'^2 \lambda_1^2 (G_2 \sin 2\varphi - H_2 \cos 2\varphi) \cos 2\varphi + \dots. \quad (6.20)$$

В случае  $M_0 = 0$  параметр  $a_0$  имеет значение

$$a_0 = -\frac{1}{2},$$

при котором из уравнения (6.20) следуют два варианта:

$$1. \lambda_1 = 0; \quad 2. H_2 = 0, \quad G_2 = 0. \quad (6.21)$$

Полагая в (6.20)  $M_0 \neq 0$ , получим два условия:

$$G_2 (2b_0 M_0^2 H_2 - a_0'^2 \lambda_1^2 L_0) = 0, \quad b_0 M_0^2 (G_2^2 - H_2^2) = -a_0'^2 H_2 \lambda_1^2 L_0. \quad (6.22)$$

Если в уравнениях (6.22) полагать  $G_2 \neq 0$ , то, исключив параметр  $\lambda_1^2$  (полагаем  $\lambda_1 \neq 0$ ), получим  $G_2^2 + H_2^2 = 0$ . Поэтому  $G_2 = 0$  и имеем равенство:

$$H_2(b_0 M_0^2 + a_0'^2 L_0 \lambda_1^2) = 0. \quad (6.23)$$

Таким образом, в (6.22) необходимо положить:

$$1. G_2 = 0, H_2 = 0; 2. G_2 = 0, H_2 \neq 0, \lambda_1^2 = \frac{M_0^2 H_2}{(a_0')^3 L_0}. \quad (6.24)$$

*Случай  $G_2 = 0, H_2 = 0$ .*

Положим в (6.19)  $H_2 = 0, G_2 = 0$ :

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0, & F_2(\varphi) &= \tilde{S}_1 \cos \varphi + \tilde{S}_2 \sin \varphi, \\ F_3(\varphi) &= a_0'(S_1^* \sin \varphi + S_2^* \cos \varphi + S_3^*), & \Phi_1(\varphi) &= H_1 \sin \varphi + G_1 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Функции  $\dot{\varphi}^2(\varphi)$ ,  $\ddot{\varphi}(\varphi)$  таковы:

$$\dot{\varphi}^2(\varphi) = \frac{2(S_1 \sin \varphi + S_2 \cos \varphi + S_0)}{L_0}, \quad \ddot{\varphi}(\varphi) = \frac{1}{L_0}(S_1 \cos \varphi - S_2 \sin \varphi). \quad (6.26)$$

Рассматривая первое уравнение из (6.12), в случае значения функций (6.25), (6.26) и с учетом  $\lambda_1 \neq 0$  находим нулевые значения параметров  $S_1$  и  $S_2$ . В силу первой формулы из (6.26) получим случай регулярной прецессии, который исключается в данной статье.

*Случай  $G_2 = 0, H_2 \neq 0$ .*

Из обозначений (6.9) следует, что параметры  $\psi_0$ ,  $p_3$  и  $r_3$  должны удовлетворять условию:

$$r_3 \cos \psi_0 + p_3 \sin \psi_0 = 0. \quad (6.27)$$

Поскольку вычислительная часть анализа первого уравнения из (6.12) аналогична анализу соответствующего уравнения, которое рассмотрено при  $\psi = \varphi$ , то сформулируем только окончательные результаты. Вначале выпишем условие на  $A_1, A_3, a_0$ :

$$4a_0(1 - a_0)A_1 - (1 - 4a_0^2)A_3 = 0. \quad (6.28)$$

В случае сферического распределения масс гиростата из равенства (6.28) имеем:

$$a_0 = \frac{1}{4} \left( \theta_0 = \arccos \frac{1}{4} \right). \quad (6.29)$$

Таким образом, получен интересный результат, поскольку, как показано в [17], и для аналогичного резонансного случая ( $\psi = 2\varphi$ ) в задаче о движении твердого тела со сферическим распределением масс в трех однородных силовых

полях имеет место равенство (6.29). При произвольном распределении масс полученное условие на параметры не совпадает с (6.28).

В результате изучения первого уравнения из (6.12) найдем другие условия на параметры:

$$s_2 = 0, \quad p_1 \sin \psi_0 - p_2 \cos \psi_0 = 0, \quad (1 + a_0)s_1 = \tilde{G}_1, \\ \lambda_1^2 = \frac{H_2 M_0^2}{(a_0')^3 L_0}, \quad S_1 = \frac{2(1 - a_0)}{a_0'} \tilde{G}_1. \quad (6.30)$$

При выполнении равенств (6.30) для функции  $\varphi(t)$  справедливо дифференциальное уравнение:

$$\dot{\varphi} = \mu_0 (\sin \varphi + \alpha_0), \quad (6.31)$$

где

$$\mu_0 = 2\sqrt{\frac{b_0 H_2}{L_0}}, \quad \alpha_0 = \frac{S_1}{4b_0 H_2}, \quad (6.32)$$

Выпишем остальные условия, которые устанавливаем из уравнения (6.12) и уравнения (6.13):

$$s_3 = \frac{1}{(a_0')^3 H_2} [4a_0'^4 (1 - a_0) \tilde{G}_1 + a_0 H_2], \quad \lambda_3 = -\frac{(1 - a_0)(1 + 2a_0) \tilde{G}_1 \lambda_1}{4H_2} \\ E = -a_0 s_3 + \frac{1}{2b_0' H_2} [a_0'^2 (1 - a_0)^2 \tilde{G}_1^2 + H_2^2]. \quad (6.33)$$

Из равенства (6.27) и второго равенства из (6.30) получим:

$$p_1 r_3 + p_2 p_3 = 0. \quad (6.34)$$

Из уравнения (6.31) имеем:

$$\varphi(\tau) = Q(\tau) \left( Q(\tau) = 2 \arctg \frac{\alpha_0 \operatorname{tg} \tau}{\sqrt{\alpha_0^2 - 1} - \operatorname{tg} \tau}, \quad \tau = \mu_0 t \right). \quad (6.35)$$

Приведем пример действительности полученного решения. Рассмотрим следующие значения параметров:

$$\psi_0 = 0, \quad a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_0' = \frac{1}{4}\sqrt{15}, \quad p_1 > 0, \quad p_3 < 0, \quad 3p_1 + 2\sqrt{15}p_3 > 0.$$

Тогда нетрудно убедиться, что значение  $\mu_0$  из (6.32) действительно, а значение  $\alpha_0$  из (6.32) удовлетворяет условию  $\alpha_0 > 1$ . Следовательно,  $\varphi(\tau)$  — действительная функция; в силу  $\psi(\tau) = 2\varphi(\tau)$  функция  $\psi(\tau)$  имеет такое же свойство.

Отметим, что функция (6.35) отвечает периодическому изменению функции  $\sin \varphi(\tau)$ . В п. 5 доказано свойство асимптотичности гиригастата при  $\psi = \varphi$ . В

случае (6.30) также имеет место аналогичный результат; но чтобы исследовать новый случай (отличный от случая п. 5) и принято предположение  $\alpha_0 > 1$ .

Рассмотрим подвижный годограф угловой скорости (2.6):

$$\omega = \mu_0(\sin \varphi + \alpha_0)(\mathbf{a} + 2\gamma^{(1)}), \quad (6.36)$$

или в скалярной форме из (6.36) имеем:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 2\mu_0 a'_0 (\sin \varphi + \alpha_0) \sin \varphi, \quad \omega_2 = 2\mu_0 a'_0 (\sin \varphi + \\ + \alpha_0) \cos \varphi, \quad \omega_3 = \mu_0(1 + 2a_0)(\sin \varphi + \alpha_0). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Запишем уравнения неподвижного годографа:

$$\begin{aligned} \omega_\xi = \mu_0 a'_0 (\sin \varphi + \alpha_0) \cos 2\varphi, \quad \omega_\eta = -\mu_0 a'_0 (\sin \varphi + \alpha_0) \sin 2\varphi \\ \omega_\zeta = \mu_0(a_0 + 2) \cdot (\sin \varphi + \alpha_0). \end{aligned} \quad (6.38)$$

На основании (6.36) устанавливаем, что подвижный годограф — линия пересечения поверхностей:

$$(1 + 2a_0)^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - 4a_0'^2\omega_3^2 = 0, \quad \omega_1 = \frac{2a_0'^2\omega_3}{\mu_0(1 + 2a_0)^2}[\omega_3 - \alpha_0\mu_0(1 + 2a_0)]. \quad (6.39)$$

Первая поверхность из (6.39) является круговым конусом с вершиной в точке  $O$ ; вторая поверхность — параболический цилиндр с образующими, параллельными оси  $Oy$ .

Исключим переменную  $\varphi$  в параметрических уравнениях (6.37):

$$(a_0 + 2)^2(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) - a_0'^2\omega_\zeta^2 = 0, \quad (6.40)$$

$$\omega_\xi = \frac{a'_0 \omega_\zeta}{\mu_0^2(a_0 + 2)^3}[\mu_0(a_0 + 2) - \omega_\zeta][\mu_0(a_0 + 2) + \omega_\zeta].$$

Как и в случае подвижного годографа из (6.39), первая поверхность из (6.40) также является круговым конусом с вершиной в начальной точке; вторая поверхность из (6.40) — цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси  $O\eta$ , и направляющей кривой третьего порядка.

Таким образом, движение гиростата является периодическим. Для получения его периода применим формулу (6.35), которую запишем в виде:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi(\tau)}{2} = \frac{\alpha_0 \operatorname{tg} \tau}{\sqrt{\alpha_0^2 - 1 - \operatorname{tg} \tau}}.$$

На основании этой формулы установим равенство:

$$\sin \varphi(\tau) = \frac{4\alpha_0 \sin \tau (\sqrt{\alpha_0^2 - 1} \cos \tau - \sin \tau)}{\alpha_0^2 - (\alpha_0^2 + 2) \cos 2\tau - 2\sqrt{\alpha_0^2 - 1} \sin 2\tau}. \quad (6.41)$$

Из соотношений (6.37), (6.38), (6.41) следует, что периоды всех компонент одинаковы и равны  $T = \frac{\pi}{2\mu_0}$ . В силу (6.31) и условия  $\dot{\psi} = 2\dot{\varphi}$  получим, что скорости прецессии и собственного вращения имеют тоже период  $T$ , но углы  $\psi, \varphi$  связаны резонансным условием 1:2.

**7. Сравнительный анализ решения п. 6 с решением [17].** Приведем основные соотношения п. 6:

$$\begin{aligned} \lambda &= (\lambda_1, 0, \lambda_3), \quad \mathbf{s} = (s_1, 0, s_3), \quad p_1 r_3 + p_2 p_3 = 0, \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{r_3}{p_3}, \\ 4a_0(1 - a_0)A_1 - (1 - 4a_0^2)A_3 &= 0, \quad A_3 \neq A_1 : a_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Условия существования решения [17] таковы:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, 0), \quad \mathbf{r} = (-p_2, p_1, 0) \quad (\mathbf{p} \bullet \mathbf{r} = 0), \\ 6a_0^2(A_3 - A_1) + a_0(5A_1 - A_3) + (A_1 - 2A_3) &= 0, \\ \left[ \left( A_3 = A_1 : a_0 = \frac{1}{4} \right), (A_1 = 2A_3 : a_0 = 0), \left( A_1 \neq A_3 : -\frac{1}{6} < a_0 < \frac{1}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

$$s_i \neq 0 \quad (i = \overline{1, 3}) \quad (7.2)$$

Вначале отметим, что при сферическом распределении масс значения  $a_0$  в (7.1), (7.2) совпадают. Отличие состоит в условиях на векторы  $\mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{r}$ , а также во множествах изменения параметров  $a_0$ . Отметим, что в (7.2) возможен случай распределения масс гиростата, который характеризуется условиями Ковалевской ( $A_2 = A_1 = 2A_3$ ) и значением  $\cos \theta_0 = 0$  ( $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ). Принципиальным отличием решения п. 6 и решения [17] является свойство функций  $\varphi(t)$ : в п. 6 решение определено через элементарные функции времени, в [17] решение выражается эллиптическими функциями времени.

**Заключение.** В статье получено два решения в замкнутом виде для уравнений движения гиростата в трех однородных силовых полях. Предполагается, что гиростат обладает свойством динамической симметрии относительно оси, образующей постоянный угол с одной из неподвижных осей в пространстве. Первое решение ( $\psi(t) = \varphi(t)$ ) описывается элементарными функциями времени и характеризуется дополнительным свойством асимптотичности к состоянию покоя. Второе решение  $\psi(t) = 2\varphi(t)$  также описывается элементарными функциями времени,



но дополнительными свойствами могут быть как асимптотические, так и периодические движения гиростата.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-30012.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
2. Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. NY: Johnson reprint corp., 1965. 966 p.
3. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura et Appl. 1947. S. 4. V. 26, fasc. 3–4. P. 271–281. <https://doi.org/10.31857/S003282350002260-6>
4. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 573–587.
5. Bressan A. Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 276–283.
6. Докшевич А.И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. Киев.: Наук. думка, 1992. 168 с.
7. Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: ДонНУ, 2009. 222 с.
8. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 364 с.
9. Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А. Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: ГУ ИПММ, 2017. 250 с.
10. Горр Г.В., Рубановский В.Н. Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел // ПММ. 1988. Т. 52, вып. 5. С. 707–712.
11. Ольшанский В.Ю. О регулярных прецессиях несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 5. С. 559–571.
12. Ol'shanskii V.Yu. New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. № 12. P. 57. [https://ui.adsabs.harvard.edu/link\\_gateway/2019CeMDA.131...57O/doi:10.1007/s10569-019-9929-x](https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/2019CeMDA.131...57O/doi:10.1007/s10569-019-9929-x)
13. Ольшанский В.Ю. Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 5. С. 547–564. <https://doi.org/10.31857/S0032823521040111>
14. Yehia H.M. On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // Egypt. J. Bas. Appl. Sci. 2015. V. 2. № 3. P. 200–205. <https://doi.org/10.1016/j.ejbas.2015.03.002>
15. Yehia H.M. Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egypt. Math. Soc. 2017. V. 25. № 2. P. 216–219. <https://doi.org/10.1016/j.joems.2016.08.001>
16. Ольшанский В.Ю. Регулярная прецессия гиростата в суперпозиции трех однородных полей // ПММ. 2020. Т. 86. № 6. С. 872–885. <https://doi.org/10.31857/S0032823520060121>
17. Горр Г.В. Один класс резонансных прецессионных движений твердого тела под действием трех однородных силовых полей // ПММ. 2023. Т. 87. № 1. С. 3–18. <https://doi.org/10.31857/S0032823523010071>

18. Гопп Г.В. Постановка задачи о прецессиях твердого тела с неподвижной точкой в трех однородных силовых полях. Прецессионно-изоконические движения тела // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 3. С. 123–134.  
<http://doi.org/10.31857/S0572329922600633>
19. Gorr G.V. On a class of precessions of a rigid body with a fixed point under the action of forces of three homogeneous force fields // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2023. V. 19. № 2. P. 249–264.  
<https://doi.org/10.20537/nd230604>

UDC 531.38, 531.39

## PRECESSION MOTIONS OF A GYROSTAT, HAVING A FIXED POINT, IN THREE HOMOGENEOUS FORCE FIELDS

© 2024 г. G. V. Gorr<sup>a</sup>, \*

<sup>a</sup> *Steklov Mathematical Institute of the RAS, Moscow, Russia*

\**e-mail: gygorr@gmail.com*

**Abstract** — The subject of investigation is the problem on precession motions of a gyrostат with a fixed point in three homogeneous force fields. The class of precessions under consideration is characterized by the constancy of the precession angle and by the commensurability of the precession and proper rotation velocities. Equations of a gyrostат motion are reduced to a system of three second order differential equations with respect to velocities of precession and proper rotation. Integration of these equations was conducted in the case of precessionally isoconic motions (the precession velocity equals to the proper rotation velocity) and in the case of 2:1 resonance, when the precession velocity is two times more, than the proper rotation velocity. It was proved that the obtained solutions can be described by elementary functions of time.

**Keywords:** gyrostatic moment; precessions; force fields; new solutions

## REFERENCES

1. *Ishlinskii A. Yu.* Orientation, gyroscopes and inertial navigation. Moscow: Nauka, 1976. 672 p. [in Russian].
2. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. New York e.a. Johnson reprint corp. 1965. 966 p.
3. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. 1947. S. 4. V. 26, fasc. 3–4. P. 271–281.
4. *Gorr G.V.* Precession motions in the rigid body dynamics and in the dynamics of coupled rigid bodies systems // Appl. Math. Mech. 2003. V. 67. № 4. P. 573–587 [in Russian].
5. *Bressan A.* Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 276–283.
6. *Dokshevich A.I.* Finit form solutions of Euler–Poisson equations. Kiev: Nauk. Dumka, 1992. 168 p. [in Russian].

7. *Gorr G.V., Maznev A.V., Shchetinina E.K.* Precession motions in the rigid body dynamics and in the dynamics of coupled rigid bodies. Donetsk: Donetsk National Univ., 2009. 222 p. [in Russian].
8. *Gorr G.V., Maznev A.V.* Dynamics of a gyrostat having a fixed point. Donetsk: Donetsk National Univ., 2010. 364 p. [in Russian].
9. *Gorr G.V., Maznev A.V., Kotov G.A.* The movement of the gyrostat with a variable gyrostatic moment. Donetsk: Publishing House of the Government Institution "Institute of Applied Mathematics and Mechanics". 2017. 250 p.
10. *Gorr G.V., Rubanovskii V.N.* On one new class of motions of a system of rigid bodies coupled by hinges // *Appl. Math. Mech.* 1988. V. 50. № 5. P. 707–712 [in Russian].
11. *Ol'shanskii V.Yu.* On regular precessions of an asymmetrical rigid body with the liquid filling // *Appl. Math. Mech.* 2018. V. 82. № 5. P. 559–571 [in Russian].
12. *Ol'shanskii V.Yu.* New cases of regular precession of an asymmetric liquid-filled rigid body // *Celest. Mech. Dyn Astron.* 2019. V. 131. № 12. Article 57.
13. *Ol'shanskii V.Yu.* Semi-regular precession of an asymmetrical rigid body with the liquid filling // *Appl. Math. Mech.* 2021. V. 85. № 5. P. 547–564 [in Russian].
14. *Yehia H.M.* On the regular precession of an asymmetric rigid body acted upon by uniform gravity and magnetic fields // *Egypt. J. Bas. Appl. Sci.* 2015. V. 2. № 3. P. 200–205.
15. *Yehia H.M.* Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // *J. Egypt. Math. Soc.* 2017. V. 25. № 2. P. 216–219.
16. *Ol'shanskii V.Yu.* Regular precession of a gyrostat in the superposition of three homogeneous force fields // *Appl. Math. Mech.* 2020. V. 86. № 6. P. 872–885.
17. *Gorr G.V.* One class of resonance precession motions of a rigid body under the action of three homogeneous force fields // *Appl. Math. Mech.* 2023. V. 87. № 1. P. 3–18.
18. *Gorr G.V.* Statement of the problem on precessions of a rigid body with a fixed point in three homogenous force fields. Precessional-isoconical motions of the body // *Mech. Solids.* 2023. № 3. P. 123–134 [in Russian].
19. *Gorr G.V.* On a Class of Precessions of a Rigid Body with a Fixed Point under the Action of Forces of Three Homogeneous Force Fields // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* 2023. V. 19. № 2. P. 249–264.

УДК 539.376, 538.951

**О КИНЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТАЛЛОВ, КОНТРОЛИРУЕМОЙ  
ТЕРМОАКТИВИРОВАННЫМ СКОЛЬЖЕНИЕМ ДИСЛОКАЦИЙ**

© 2024 г. В. М. Грешнов<sup>а, \*</sup>, Р. И. Шайхутдинов<sup>а, \*\*</sup>

<sup>а</sup>Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

<sup>\*</sup>e-mail: Greshnov\_VM@list.ru

<sup>\*\*</sup>e-mail: shaykhutdinovri@gmail.com

Поступила в редакцию 10.05.2023 г.

После доработки 27.09.2023 г.

Принята к публикации 16.10.2023 г.

Обоснование перспективности применения физико-математической теории ползучести металлов при проведении проектировочных расчетов на ползучесть проводится сравнительным анализом классической феноменологической и физико-математической теорий ползучести металлов. На примере описания обеими теориями конкретных результатов экспериментального исследования нестационарной ползучести и анализа уравнений теорий показано, что использование физического кинетического уравнения для действительного структурного параметра материала — скалярной плотности неподвижных дислокаций — делает физико-математическую теорию универсальной для решения нестационарных задач ползучести металлов со сложным нагружением, когда изменяются, в том числе скачкообразно, температура, силы и скорости нагружения.

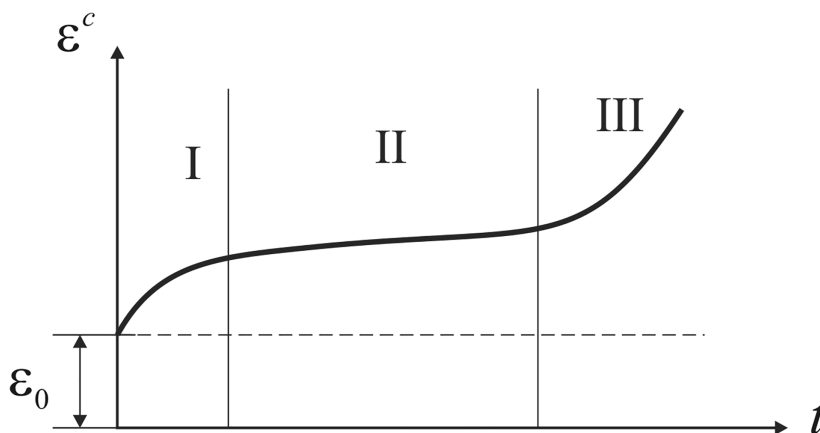
*Ключевые слова:* ползучесть металлов, кривая ползучести, история нагружения, структурный параметр, физическое кинетическое уравнение

DOI: 10.31857/S1026351924020157, EDN: uvcyqp

**1. Введение.** Расчеты деталей на ползучесть являются обязательным элементом при проектировании машин и оборудования в авиакосмической и энергетической отраслях промышленности. Эти расчеты необходимы для деталей, работающих длительное время при высоких температурах.

Ползучесть — явление нарастания деформации нагруженного тела во времени. Закон деформации ползучести описывает кривая ползучести — зависимость деформации  $\epsilon^c$  при постоянных температуре  $T$  и напряжении  $\sigma$  от времени  $t$  (рис. 1).

Теоретические основы расчетных методов были разработаны в 60-х годах прошлого века и изложены в монографиях [1, 2]. Классическая теория ползучести получила развитие в рамках механики сплошной среды с применением



**Рис. 1.** Кривая ползучести: I — первая неустойчивая стадия; II — вторая установившаяся стадия, при которой  $\varepsilon^c = \text{const}$  и имеет минимальное значение; III — третья стадия, заканчивающаяся разрушением образца. На рисунке  $\varepsilon_0 = \varepsilon^c = \sigma_0^c/E$ , где индекс  $c$  означает характеристики ползучести, а индекс  $e$  — характеристики упругой деформации.

феноменологического подхода к исследованию и описанию явлений и процессов в природе.

В 2018 г. опубликована у нас в стране [3] и в 2019 г. издана за рубежом [4] новая физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов, которая включает и кинетическую физико-математическую теорию ползучести. Новизна теории заключается в применении синтетического подхода к описанию процессов необратимых деформаций металлов. Сущностью этого подхода является объединение феноменологического и физического (микроструктурного) подходов, то есть применение для описания необратимых деформаций металлов основных положений и уравнений механики и физики деформируемого твердого тела.

Реализация нового подхода (метода) потребовала введения новых понятий и обобщения некоторых постулатов и принципов феноменологической теории пластичности на упруговязкопластическую среду.

Целью работы является сравнительный анализ феноменологической и физико-математической теорий ползучести металлов с точки зрения их применения для решения прикладных задач. Так как возможности решения задач теоретической схемой обуславливаются допущениями, принимаемыми при формулировании исходных гипотез и положений, коротко излагаются основополагающие положения и уравнения обеих теорий.

Необратимые деформации с термодинамической точки зрения являются неравновесными физическими процессами [5], в которых характеристики процесса зависят не только от текущих термодинамических параметров нагружения, но и от истории их изменения в предыдущие моменты времени. Поэтому одним из основных вопросов, полнота и универсальность решения которого характеризуют применимость теории для решения прикладных задач, является вопрос о способности теории корректно описывать историю нагружения и

нестационарные процессы деформирования. История нагружения при необратимых деформациях в общем случае характеризуется изменениями во время деформирования напряжения, скорости деформации, температуры и характеристик структуры материала.

Теоретические кривые нестационарной ползучести при ступенчатом увеличении и уменьшении напряжения, рассчитанные по уравнениям феноменологической и физико-математической теории ползучести, сравниваются с экспериментальными.

На основе полученных теоретических и заимствованных из литературы результатов, а также анализа уравнений теорий делается заключение о возможности их применения для решения прикладных задач.

**2. Основные положения и уравнения феноменологической теории ползучести металлов.** Центральным понятием в феноменологической теории ползучести является постулированное на основе экспериментальных исследований понятие уравнения состояния ползучести, которое связывает в простейшем случае одноосного растяжения скорость деформации  $\dot{\varepsilon}^c$ , напряжение  $\sigma^c$ , величину деформации  $\varepsilon^c$  и температуру  $T$ :

$$\Phi(\dot{\varepsilon}^c, \sigma^c, \varepsilon^c, T) = 0. \quad (2.1)$$

Так как структура материала и ее изменение при деформации в феноменологическом подходе не учитываются, то (2.1) принимается для структурно устойчивых материалов.

В зависимости от того, какие аргументы в (2.1) варьируются при экспериментальном исследовании деформации, разработаны технические теории ползучести [1, 2]: 1) теория старения предполагает существование при заданной температуре зависимости:

$$\Phi_1(\sigma^c, \varepsilon^c, t) = 0; \quad (2.2)$$

2) теория течения базируется на зависимости при заданной  $T$ :

$$\Phi_2(\dot{\varepsilon}^c, \sigma^c, t) = 0; \quad (2.3)$$

3) в основе теории упрочнения лежит при заданной  $T$  зависимость:

$$\Phi_3(\dot{\varepsilon}^c, \varepsilon^c, \sigma) = 0. \quad (2.4)$$

Ю.Н. Работнов предложил формальный подход для обобщения теорий течения и упрочнения [2]. Он принял, что при определенной температуре скорость деформации ползучести является функцией напряжения и некоторого числа параметров  $q_i$ , которые характеризуют с феноменологических позиций структурное состояние материала:

$$\dot{\varepsilon}^c = \Phi_4(\sigma, q_1, \dots, q_i) = 0. \quad (2.5)$$

Изменение некоторого структурного параметра при деформации описывается кинетическим уравнением:

$$dq_i = a_i d\varepsilon^c + b_i d\sigma + c_i dt + f_i dT, \quad (2.6)$$

где  $a_i, b_i, c_i, f_i$  — некоторые функции от  $\varepsilon^c, \sigma, t$  и  $T$ , а также  $q_1, \dots, q_i$ .

Идея структурных параметров, в феноменологической теории отождествляемых с механическими макровеличинами, на наш взгляд, является несколько искусственной. Основным принятым допущением при построении теории является понятие структурно устойчивого материала. Если же в качестве структурного параметра принимать действительные характеристики структуры материала, то это уже будет совсем другая теория.

Ю.Н. Работнов, следуя идеям Л.М. Качанова, предложил в качестве единственного структурного параметра принять меру поврежденности материала  $\omega$ , понимаемую как степень накопления материалом деформационных микротрещин, которая изменяется в интервале  $[0, 1]$ . Поврежденность  $\omega$  уже характеризует структурное состояние материала. Добавление к уравнению ползучести кинетического уравнения для структурного параметра  $\omega$  позволило развить новое направление в механике — механику континуальных повреждений [6, 7].

Большой вклад в развитие теории и практики ползучести материалов, который признан в мировой науке, внесла целая плеяда отечественных ученых-механиков: Ю.Н. Работнов, Л.М. Качанов, С.А. Шестериков, А.М. Локощенко, О.В. Соснин и др. А.М. Локощенко в своей фундаментальной монографии [8] дает обзор исследований по ползучести за большой промежуток времени, начиная с первых работ Ю.Н. Работнова по настоящее время. Излагается содержание всех основных моделей ползучести с анализом из достоинств и недостатков с указанием вкладов отечественных и зарубежных исследователей.

Расчеты на ползучесть с применением феноменологической теории базируются на результатах экспериментального изучения процесса при одноосном растяжении [9]. Наиболее простыми являются расчеты на установившуюся ползучесть, протекающую с постоянной и минимальной скоростью  $\dot{\varepsilon}_{\min}^c$  (см. рис. 1). В этом случае деформация ползучести определяется как  $\varepsilon^c = \dot{\varepsilon}_{\min}^c t$ .

Наиболее часто используется степенная зависимость минимальной скорости деформации ползучести от напряжения:

$$\dot{\varepsilon}_{\min}^c = \dot{\varepsilon}_{\min 0}^c (\sigma/\sigma_0)^n, \quad (2.7)$$

где  $\sigma_0$  — произвольная величина напряжения, за которую могут быть приняты, например, предел пропорциональности или текучести материала при температуре испытаний или любое значение, например 10 или 100 МПа;  $\dot{\varepsilon}_{\min 0}^c$  и  $n$  для рассматриваемого материала зависят от температуры, причем  $\dot{\varepsilon}_{\min 0}^c$  — минимальная скорость деформации ползучести при напряжении  $\sigma_0$ .

Значения  $\dot{\varepsilon}_{\min 0}^c$  и  $n$  определяются по результатам установочных экспериментов по ползучести и длительной прочности [9, 10]. Поскольку деформации ползучести являются необратимыми, то обобщение одноосных теорий на случай не одноосного напряженного состояния проводится с применением основных гипотез теории пластичности. Принимается, что материал и упрочнение изотропны и изменения объема в процессе ползучести не происходит, тогда коэффициент Пуассона равен 0.5 и  $\dot{\varepsilon}_0^c = \dot{\varepsilon}_{ii}^c/3 = 0$ .

В качестве примера рассмотрим обобщение теории старения (2.2). Теория связывает между собой деформацию, напряжение и время, поэтому, как и в теории пластичности изотропного материала с изотропным упрочнением [3], принимается гипотеза существования потенциала деформации ползучести вида:

$$f_1 = \frac{3}{2} s_{ij}^c s_{ij}^c - \left[ \Phi_1(\varepsilon^c, t) \right] = 0, \quad (2.8)$$

где  $s_{ij}^c = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$  – девиатор тензора напряжений;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;

$\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$  – среднее нормальное напряжение;  $\varepsilon^c = \sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon_{ij}^c \varepsilon_{ij}^c}$  – интенсивность

деформаций ползучести.

Подстановка (2.8) в ассоциированный закон течения дает обобщенное на не-одноосное напряженно-деформированное состояние определяющее уравнение феноменологической теории старения, которое связывает  $\sigma_{ij}^c$  и  $\varepsilon_{ij}^c$  в некоторый момент времени  $t$  [9] и имеет вид:

$$\varepsilon_{ij}^c = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon^c}{\sigma^c} s_{ij}^c, \quad (2.9)$$

где  $\sigma^c = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}^c s_{ij}^c}$  – интенсивность напряжений.

При постановке краевых задач ползучести уравнения (2.9) для определения коэффициента  $\varepsilon^c/\sigma^c$  дополняются экспериментально полученной зависимостью  $\sigma^c = \Phi_1(\varepsilon^c, t)$ .

Аналогично обобщаются на случай не одноосного напряженного состояния теории течения, упрочнения и структурных параметров [2, 9–10].

**3. Основные положения и уравнения кинетической физико-математической теории ползучести металлов, контролируемой термоактивированным скольжением дислокаций.** Различают диффузионную ползучесть, когда необратимая деформация осуществляется диффузионным перемещением ионов кристаллической решетки, и дислокационную ползучесть, атомный механизм которой связан с движением особых дефектов кристаллической решетки – дислокаций [3]. Каждый из перечисленных видов ползучести протекает в определенных диапазонах температур и напряжений. Для достаточно интенсивного скольжения дислокаций необходима диффузионная подвижность ионов, которая повышается с ростом температуры и обеспечивает преодоление скользящими дислокациями барьеров. Дислокационная ползучесть считается наиболее универсальным видом и наблюдается в деталях машин и механизмов, эксплуатируемых в производстве. Этот вид ползучести и является объектом исследования в данной работе. Физико-математическая теория ползучести является составной частью единой физико-математической теории больших необратимых деформаций и вязкого разрушения металлов [3, 4]. Эта теория разработана, как уже отмечалось во введении, в рамках нового синтетического подхода, представляющего собой объединение физического (микроструктурного) и феноменологического подходов. Благодаря этому подходу единая теория позволила решить многие



проблемы феноменологических теорий необратимых деформаций и вязкого разрушения металлов [11–20].

В теории принято кристаллическое строение металлов и единый для необратимых активных деформаций и деформаций ползучести атомный механизм — термоактивированное скольжение дислокаций. Поэтому в ней активные пластические деформации при высоких температурах и деформации ползучести не различаются, то есть это теория вязкопластичности.

Теория носит дедуктивный характер, то есть построена на собственных двух постулатах, на основании которых получено для вязкопластического тела уравнение:

$$\sigma_{(g)} = \sigma_{(g)}^T + d\sigma_{(g)} = \sigma_{(g)}^T + d\sigma_{(g)}^u - d\sigma_{(g)}^r, \quad (3.1)$$

где  $\sigma_{(g)}$  — напряжение деформации на произвольном шаге нагружения  $g$ ;  $\sigma_{(g)}^T$  — предел текучести на шаге  $g$ ;  $d\sigma_{(g)}^u$  — часть приращения напряжения за счет упрочнения (атермическая составляющая  $\sigma_{(g)}$ );  $d\sigma_{(g)}^r$  — термическая составляющая напряжения, зависящая от температуры и скорости деформации (описывает вязкость материала).

Наряду с понятиями нагружения и разгрузки для вязкопластического тела введено понятие термодинамического возврата — разупрочнения, обусловленного повышением температуры и уменьшением скорости деформации в условиях повышенных температур, описываемого составляющей напряжения  $d\sigma_{(g)}^r$  в (3.1).

Дело в том, что для вязкопластического тела понятие разгрузка, принятое в математической теории пластичности [21], не имеет физического смысла. Если при деформации вязкопластического тела на некотором шаге нагружения уменьшить напряжение  $\sigma_{(g)}$ , например за счет повышения температуры при  $\dot{\epsilon}_{(g)} = \text{const}$  или за счет уменьшения  $\dot{\epsilon}_{(g)}$  при  $T = \text{const}$ ,  $d\sigma_{(g)}^r < 0$  в (3.1), тело не перейдет в упругое состояние, как в случае упругопластического упрочняющегося тела [21], а деформация будет продолжаться при меньшем напряжении, то есть при разгрузке за счет уменьшения  $d\sigma_{(g)}^r$  в (3.1) (вектор  $d\sigma_{(g)}^r$  направлен внутрь поверхности нагружения) конец вектора  $\sigma_{(g)}^T - d\sigma_{(g)}^r$  будет лежать на поверхности нагружения, которая сжимается, и условие пластичности будет выполняться.

Скалярное определяющее уравнение для вязкопластического тела будет иметь вид:

$$\sigma = \left[ \beta G b m - \frac{k T m}{b^2} \ln \frac{\dot{\epsilon}_* b \sqrt{\rho_s}}{\dot{\epsilon}} \right] \sqrt{\rho_s}, \quad (3.2)$$

где  $\sigma$  — напряжение течения;  $\beta = 0.38 - 0.58$  — эмпирический коэффициент, зависящий от температуры и деформации в выражении энергии активации самодиффузии  $U = \beta G b^3$ ;  $G$  — модуль сдвига;  $b$  — средний модуль вектора Бюргера дислокаций (в оценках для металлов  $b = 3 \cdot 10^{-8}$  см);  $m$  — фактор Тейлора для поликристаллов (при хаотической разориентировке зерен  $m = 3.1$ );  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана;  $T$  — термодинамическая температура;  $\dot{\epsilon}_*$  — численно равна частоте Дебая  $\nu_D = 10^{12} - 10^{13} \text{ с}^{-1}$  (практически

постоянной для всех металлов частоте тепловых колебаний ионов в кристаллической решетке);  $\rho_s$  — скалярная плотность неподвижных дислокаций в деформируемом материале;  $\dot{\epsilon}$  — скорость деформации.

Оно получено на основе второго постулата физико-математической теории необратимых деформаций металлов [3], утверждающего, что для неравновесного процесса необратимых деформаций металлов взаимосвязь напряжений, скорости деформации и температуры определяется термодинамически активируемыми микромеханизмами упрочнения и разупрочнения и описывается уравнением

$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \exp\left(-\frac{U - \tau V}{kT}\right)$ . С учетом, что скорость при высокотемпературной деформации механизмом скольжения дислокаций контролируется диффузией, энергия активации которой равна  $U = \beta G b^3$  ( $\beta$  — эмпирический коэффициент,  $G$  — модуль сдвига;  $b$  — средний модуль вектора Бюргерса дислокаций, активационный объем равен  $V = b^2/\sqrt{\rho_s}$  — объем дислокационного сегмента (одноатомной цепочки атомов длиной  $1/\sqrt{\rho_s}$ ),  $\tau = \sigma/m$  — интенсивность касательных напряжений,  $\dot{\epsilon}_0 = v_D b \sqrt{\rho_s}$  — максимальная скорость пластической деформации при отсутствии барьеров для скольжения подвижных дислокаций.

Первое слагаемое в (3.2) — напряжение течения материала при температуре 20 °С. Второе слагаемое — уменьшение напряжения за счет протекания при деформации процесса термодинамического возврата.

Необратимая деформация металлов с термодинамической точки зрения является неравновесным процессом, в котором  $\sigma$  зависит не только от значений  $T$  и  $\dot{\epsilon}$  в рассматриваемый конечный момент времени, но и от закона их изменения в предыдущие моменты времени, то есть зависит от истории нагружения. С целью учета истории нагружения модель вязкопластичности формулируется в малых, но конечных приращениях. Дифференцирование (3.2) по  $\rho_s$  на малом отрезке  $d\epsilon$ , на котором считаются  $T$  и  $\dot{\epsilon} = \text{const}$ , дает:

$$d\sigma_{(g)} = \left[ \frac{\beta m G b}{2\sqrt{\rho_{s(g)}}} - \frac{m k T_{(g)}}{2b^2 \sqrt{\rho_{s(g)}}} \left( 1 + \ln \frac{v_D b \sqrt{\rho_{s(g)}}}{\dot{\epsilon}_{(g)}} \right) \right] \sqrt{\rho_{s(g)}}. \quad (3.3)$$

Индекс  $(g)$  здесь и далее обозначает номер расчетного шага  $g = 1, 2, \dots, n$  при пошаговом расчете диаграммы деформирования  $\sigma(\epsilon)$  материала и кривой ползучести  $\epsilon^c(t)$ . При этом на каждом шаге  $g$  интенсивность деформации будет получать малое конечное приращение  $d\epsilon_{(g)} = 0.001 - 0.01$  или малое время  $dt_{(g)}$ . На различных расчетных шагах  $T$  и  $\dot{\epsilon}$  могут принимать различные значения, но в пределах шага из-за малости  $d\epsilon_{(g)}$  и  $dt_{(g)}$  они считаются постоянными.

Уравнение (3.3) дополняется физическим кинетическим уравнением, описывающим изменение на шаге  $d\epsilon_{(g)}$  действительного структурного параметра материала — скалярной плотности неподвижных дислокаций  $\rho_s$  [3, 4]:

$$d\rho_{s(g)} = \left[ \frac{1}{b\lambda} - \frac{\rho_{s(g-1)}^{3/2} v_D b}{\dot{\epsilon}_{(g)}} \exp\left(-\frac{\beta G b^3 - \sigma_{(g-1)} b^2 / m \sqrt{\rho_{s(g-1)}}}{k T_{(g)}}\right) \right] d\epsilon_{(g)}, \quad (3.4)$$

где  $\lambda$  — средняя длина свободного пробега подвижных дислокаций.

Первое слагаемое в (3.4)  $d\varepsilon_{(g)}/b\lambda$  есть приращение плотности неподвижных дислокаций на произвольном расчетном шаге  $g$  при приращении деформации на величину  $d\varepsilon_{(g)}$  в условиях отсутствия процессов термодинамического возврата. Второе слагаемое — скалярная плотность неподвижных дислокаций, которые исчезли на шаге  $g$  за счет работы механизмов термодинамического возврата.

Физическое кинетическое уравнение изменения скалярной плотности неподвижных дислокаций при необратимой деформации (3.4) позволяет учитывать историю нагружения и прогнозировать конечное структурное состояние материала (скалярную плотность дислокаций и линейный размер зерен) и, следовательно, статические характеристики прочности материала после деформации [17–19].

Известно, что для учета при расчетах ползучести истории нагружения разрабатывалась и многие годы совершенствовалась наследственная теория ползучести [8]. Однако установлено, что отклонения теоретических кривых ползучести от экспериментальных при скачкообразном увеличении и уменьшении напряжения при расчетах по наследственной теории ползучести такие же, как и при расчетах по другим феноменологическим теориям [22]. При этом повышение точности решения прикладных задач сопряжено с возрастающими математическими трудностями. В физико-математической теории ползучести [2, 20] используется традиционный математический аппарат, она более физична и, следовательно, более понятна. Ниже будет показано, что она адекватно экспериментальным результатам учитывает историю нагружения и описывает нестационарную ползучесть при скачкообразном изменении  $T$  и  $\sigma$ . Сказанное позволяет полагать, что кинетическая физико-математическая теория ползучести может явиться основой универсального метода решения практических задач ползучести.

На основе (3.1) уравнение для определения  $\sigma_1^T$ , исходного (начального) предела текучести материала, когда  $g = 1$  при конкретных значениях  $\dot{\varepsilon}$  и  $T$  будет иметь вид:

$$\sigma_1^T = \left[ \beta G b m - \frac{k T_{(1)} m}{b^2} \ln \frac{\dot{\varepsilon} b \sqrt{\rho_{s0}}}{\dot{\varepsilon}_{(1)}} \right] \sqrt{\rho_{s0}}, \quad (3.5)$$

где  $\rho_{s0} = \frac{(\sigma_T^{\text{exp}})^2}{(\beta m G b)^2}$  — исходная (до нагрева и деформации) скалярная плотность дислокаций в материале при температуре холодной деформации;  $\sigma_T^{\text{exp}}$  — экспериментально определенный предел текучести материала при температуре холодной деформации (20 °C).

На следующем расчетном шаге  $g = 2$  скорость деформации  $\dot{\varepsilon}$  и температура  $T$  могут измениться. Начальное напряжение течения на произвольном расчетном шаге  $g$  в этом случае будет:

$$\sigma_{(g)}^T = \left[ \beta G b m - \frac{k T_{(g)} m}{b^2} \ln \frac{\dot{\varepsilon} b \sqrt{\rho_{s(g-1)}}}{\dot{\varepsilon}_{(g)}} \right] \sqrt{\rho_{s(g-1)}}. \quad (3.6)$$

В уравнение (3.6) подставляются новые значения  $\dot{\varepsilon}$  и  $T$ , если они изменяются в процессе деформирования.

Из уравнений (3.2), (3.3) и (3.6) следует, что на произвольном расчетном шаге  $g$ , характеризуемом приращением  $d\varepsilon_{(g)}$ , напряжение течения представляется в виде

$$\sigma_{(g)} = \sigma_{(g)}^T + d\sigma_{(g)}. \quad (3.7)$$

Для пошагового расчета диаграмм деформирования  $\sigma(\varepsilon)$  и кривых ползучести  $\varepsilon^c(t)$  уравнения (3.2), (3.3), (3.6) и (3.7) дополняются очевидными соотношениями:

$$\rho_{s(g)} = \rho_{s(g-1)} + d\rho_{s(g)}, \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_{(g)} = \varepsilon_{(g-1)} + d\varepsilon_{(g)}. \quad (3.9)$$

Рассчитанное по (3.7)  $\sigma_{(g)}$  ставится в соответствие определенной по (3.9)  $\varepsilon_{(g)}$ .

Выше отмечалось, что в физико-математической теории необратимых деформаций активные деформации и деформации ползучести не различаются. Поэтому физико-математическая теория ползучести металлов строится на основе уравнений вязкопластичности. Как и модель пластичности, теория ползучести разработана в малых конечных приращениях. Это позволяет при решении практических задач с использованием пошагового метода расчета учитывать по уравнению (3.4) изменение структуры деформируемого материала, связанное с изменениями в процессе деформации скорости деформации и температуры, то есть учитывать историю нагружения.

Для вывода уравнений одноосной ползучести, описываемой кривой ползучести  $\varepsilon^c(t)$ , принимается, что на произвольном расчетном шаге нагружения  $g$ , характеризуемом малым конечным приращением времени  $dt_{(g)}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{(g)}^c$  и  $T_{(g)}$  из-за малости  $dt_{(g)}$  существенно не успевают измениться, то есть  $\dot{\varepsilon}, T = \text{const}$ , но могут принимать различные значения на последующих расчетных шагах  $g$ . Мгновенная на произвольном расчетном шаге  $g$  интенсивность скорости деформации ползучести при заданных  $\sigma$  и  $T$  получается из уравнения (3.1) как:

$$\dot{\varepsilon}_{(g)}^c = \nu_D b \sqrt{\rho_{s(g-1)}} \exp \left( - \frac{\beta(T) G(T) b^3 - \sigma_{(g)}^c b^2 / m \sqrt{\rho_{s(g-1)}}}{k T_{(g)}} \right). \quad (3.10)$$

Основная переменная теории — время  $t$  вводится в модель подстановкой в (3.4)  $d\varepsilon_{(g)}^c = \dot{\varepsilon}_{(g)}^c dt_{(g)}$ , и физическое кинетическое уравнение изменения действительного структурного параметра деформируемого металла — скалярной плотности неподвижных дислокаций при ползучести под действием приложенной интенсивности напряжения  $\sigma_{(g)}^c$  на шаге  $g$  за время  $dt_{(g)}$  примет вид:

$$d\rho_{s(g)} = \left[ \frac{\dot{\varepsilon}_{(g)}^c}{b\lambda} - \rho_{s(g-1)}^{3/2} \nu_D b \exp \left( - \frac{\beta G b^3 - \sigma_{(g)} b^2 / m \sqrt{\rho_{s(g-1)}}}{k T_{(g)}} \right) \right] dt_{(g)}. \quad (3.11)$$

Интенсивность приращения деформации ползучести за  $dt_{(g)}$  с учетом (3.9) определяется как:

$$d\varepsilon_{(g)}^c = \dot{\varepsilon}_{(g)}^c dt_{(g)}. \quad (3.12)$$

Интенсивность деформации ползучести, накопленная за  $g$  шагов, рассчитывается из формулы:

$$\varepsilon_{(g)}^c = \varepsilon_{(g-1)}^c + d\varepsilon_{(g)}^c, \quad (3.13)$$

а время нахождения образца под нагрузкой определяется по уравнению:

$$t_{(g)} = t_{(g-1)} + dt_{(g)}. \quad (3.14)$$

Определенная по (3.13)  $\varepsilon_{(g)}^c$  ставится в соответствие времени  $t_{(g)}$ , определенному по (3.14).

Далее рассчитывается скалярная плотность дислокаций на следующем расчетном шаге  $g + 1$  как:

$$\rho_{s(g+1)} = \rho_{s(g)} + d\rho_{s(g)}. \quad (3.15)$$

Значение  $\rho_{s(g+1)}$  подставляется в (3.10), и находится интенсивность скорости деформации на расчетном шаге  $g + 1$ , и расчетный цикл, включающий формулы (3.11)–(3.15), повторяется. За  $g = n$  расчетных шагов (циклов) строится теоретическая кривая ползучести для конкретного материала при постоянных  $\sigma^c$  и  $T$  или изменяющихся по заданному закону в течении времени деформирования  $t$ .

Уравнение (3.10) является аналогом уравнения состояния ползучести (2.5) в феноменологической теории, а уравнение (3.11) – аналог феноменологического кинетического уравнения (2.6).

Из сравнения (3.10)–(3.14) с уравнениями (2.2)–(2.5) следует, что физико-математическая теория обобщает феноменологические технические теории ползучести.

С научной и практической точек зрения большой интерес представляет установившаяся (стационарная) ползучесть, протекающая при  $T = \text{const}$  с постоянной минимальной скоростью деформации  $\dot{\varepsilon}_{\min} = d\varepsilon^c/dt = \text{const}$ .

В феноменологической теории было высказано предположение вначале Бэйли [23] затем Одингом [24], что скорость ползучести становится постоянной, когда упрочнение и разупрочнение взаимно компенсируются. Однако строго доказать это положение в рамках механической теории невозможно.

В физико-математической теории это положение математически формулируется как  $d\rho_{s(g)} = 0$  в (3.11), то есть первое слагаемое в (3.11) равно второму слагаемому. Из этого равенства получается выражение для минимальной скорости установившейся ползучести при одноосном напряженном состоянии в виде [20]:

$$\dot{\varepsilon}_{\min}^c = \lambda \rho_s^{3/2} v_D b^2 \exp \left( - \frac{\beta(T) G(T) b^3 - \sigma^c b^2 / m \sqrt{\rho_s}}{kT} \right). \quad (3.16)$$

Приравнявая выражения (3.16) и (3.10), получаем уравнение для определения стационарной плотности неподвижных дислокаций  $\rho_s^c$  на установившейся стадии ползучести конкретного материала:

$$\lambda \rho_s^c b = \dot{\epsilon}_* / v_D = C = \text{const}, \quad (3.17)$$

где  $C$  по порядку величины равно единице, так как  $\dot{\epsilon}_* = v_D = (10^{12} - 10^{13})\text{с}^{-1}$ .

Выражение (3.17) связывает характеристики дислокационной структуры при установившейся ползучести и может интерпретироваться как новый (неизвестный ранее) структурный закон дислокационной ползучести: при установившейся дислокационной ползучести металлов с термодинамической активацией скольжения дислокаций произведение трех характеристик дислокационной структуры — длины свободного пробега дислокаций  $\lambda$ , скалярной плотности неподвижных дислокаций  $\rho_s$  и модуля вектора Бюргерса дислокаций  $b$  — является для данного металла величиной постоянной, не зависящей от  $\sigma^c$ ,  $T$  и накопленной  $\epsilon^c$ .

Так как  $b = 3 \cdot 10^{-8}\text{см} = \text{const}$ , то из (3.17) следует:

$$\lambda = \frac{C}{\rho_s b} = \frac{1}{\rho_s^c b}. \quad (3.18)$$

Экспериментальными исследованиями влияния деформации ползучести на структуру металлов установлено, что общей закономерностью является формирование к началу установившейся стадии при  $T, \sigma^c = \text{const}$  субзеренной структуры. В металлофизике известно соотношение для оценки линейного размера  $D$  субзерен [3, 4]:

$$D = B / \sqrt{\rho_s}, \quad (3.19)$$

где  $B$  по порядку величины равно 10.

Из (3.16) следует:

$$\rho_s^c = \frac{1}{\lambda b}. \quad (3.20)$$

Подстановка (3.19) в (3.20) дает:

$$D = 10 \sqrt{b \lambda}. \quad (3.21)$$

Уравнение (3.21) позволяет проводить оценку среднего линейного размера зерен и субзерен в металле при расчете на установившуюся ползучесть.

С целью обобщения одноосной теории ползучести на неодноосное напряженно-деформированное состояние дополнительно к понятию термодинамической разгрузки введены понятия мгновенной функции нагружения и, соответственно, мгновенной поверхности нагружения. Сформулированы и доказаны две теоремы, которые являются обобщением постулата Драккера и принципа максимума Мизеса феноменологической теории пластичности (теории течения) на вязкопластическую среду [3, 4]. Обобщенный закон дислокационной ползучести сформулирован аналогично обобщенному закону вязкопластичности как

$$d\epsilon_{ij(g)}^c = \frac{3}{2} \frac{d\epsilon_{(g)}^c}{\sigma_{(g)}^c} s_{ij(g)}^c, \quad (3.22)$$

где

$$d\varepsilon_{(g)}^c = \dot{\varepsilon}_{(g)}^c dt_{(g)} = v_D b \sqrt{\rho_{s(g-1)}} \exp \left( - \frac{\beta(T) G(T) b^3 - \sigma_{(g-1)}^c b^2 / m \sqrt{\rho_{s(g-1)}}}{k T_{(g)}} \right) dt_{(g)} \quad (3.23)$$

$$\sigma_{(g)}^c = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{x(g)} - \sigma_{y(g)})^2 + (\sigma_{y(g)} - \sigma_{z(g)})^2 + (\sigma_{z(g)} - \sigma_{x(g)})^2} + 6(\tau_{xy(g)}^2 + \tau_{yz(g)}^2 + \tau_{zx(g)}^2) \quad (3.24)$$

$$s_{ij(g)} = \sigma_{ij(g)} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \sigma_0 = (\sigma_{x(g)} + \sigma_{y(g)} + \sigma_{z(g)}) / 3. \quad (3.25)$$

**4. Учет феноменологической и физико-математической теориями ползучести металлов истории нагружения.** Совершенная теория ползучести металлов должна обеспечивать адекватный результатам экспериментальных исследований расчет в самом общем случае нестационарной ползучести, когда в процессе эксплуатации технических устройств изменяются температура, напряжение в деталях и скорости необратимой деформации. При этом градиенты этих параметров могут быть большими. Поэтому в фундаментальных работах [1–3, 25] отмечается важность исследования ползучести при изменении температуры и напряжения.

На рис. 2 приведена заимствованная из работы [25] кривая ползучести алюминиевого сплава Д16Т при температуре 150 °С. Из данной работы заимствованы также результаты расчета процесса ползучести сплава на основе феноменологической теории ползучести металлов.

Авторами [25] отмечается, что феноменологическая теория ползучести (теории старения и упрочнения) описывает адекватно экспериментальным результатам кривые ползучести при постоянном и плавном изменении напряжения с большего на меньшее. При скачкообразном изменении напряжения с меньшего на большее экспериментальная кривая располагается выше расчетной (см. рис. 2), и этот результат является общим [2].

Ниже излагаются результаты расчета кривой ползучести, показанной на рис. 2, в рамках физико-математической теории.

В эксперименте [25] использовали сплав, подвергнутый закалке и естественному старению. Химический состав сплава в %: Al – основа; Fe до 0.5%; Si до 0.5%; Mn 0.3–0.9%; Cr до 0.1%; Ti до 0.15%; Cu 3.8–4.9%; Mg 1.2–1.8%; Zn до 0.25%; прочие примеси до 0.15%.

Расчет кривой ползучести проводили, как описано в разделе 3 по уравнениям (3.10–3.14).

Характеристики механических свойств сплава Д16Т: предел текучести  $\sigma_{02}$  при температуре 20 °С (холодная деформация) – 380.0 МПа; модуль упругости первого рода при  $T = 20$  °С –  $E = 7.02 \cdot 10^4$  МПа,  $T = 150$  °С –  $E = 6.76 \cdot 10^4$  МПа; модуль упругости второго рода  $T = 20$  °С –  $G = 2.64 \cdot 10^4$  МПа,  $T = 150$  °С –  $G = 2.54 \cdot 10^4$  МПа.

Параметры расчетных формул определяли согласно рекомендациям [3, 4]: исходная (до нагрева и деформации) скалярная плотность неподвижных дислокаций в сплаве определялась по формуле:



$$\rho_{s0} = \frac{(\sigma_{02})^2}{(\beta G b m)^2} \text{ см}^{-2},$$

где  $\sigma_{02} = 380,0$  МПа – экспериментальный предел текучести при  $20^\circ\text{C}$ ;  $\beta(T) = 5 \cdot 10^{-5}T + 0.3639 = 0.574$  – коэффициент в выражении энергии активации самодиффузии в сплаве  $U = \beta G b^3$ ;  $G$  – модуль сдвига при  $20^\circ\text{C}$ ;  $b = 3 \cdot 10^{-8}$  см – среднее значение модуля вектора Бюргерса дислокаций в металлах;  $m = 3.1$  – фактор Тейлора для металлов с хаотической разориентировкой зерен;  $T = t^\circ\text{C} + 273 = 150 + 273 = 423\text{K}$ ;  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана;  $kT = 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 423 = 583.74 \cdot 10^{-23}$  Дж;  $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$  см – средняя длина свободного пробега подвижных дислокаций в сплаве при деформации. При выполнении расчетов установлено, что теория адекватно описывает экспериментальную кривую ползучести при  $\beta = 1.71$ , т.е. при значении в три раза больше рассчитанного по вышеприведенной формуле. Повышение энергии активации самодиффузии может быть связано с термической обработкой сплава. Известно, что структура сплава Д16Т после закалки и естественного старения чрезвычайно стабильна.

Результаты расчета кривой ползучести сплава Д16Т при скачкообразном изменении напряжения с меньшего на большее по физико-математической теории приведены в табл. 1.

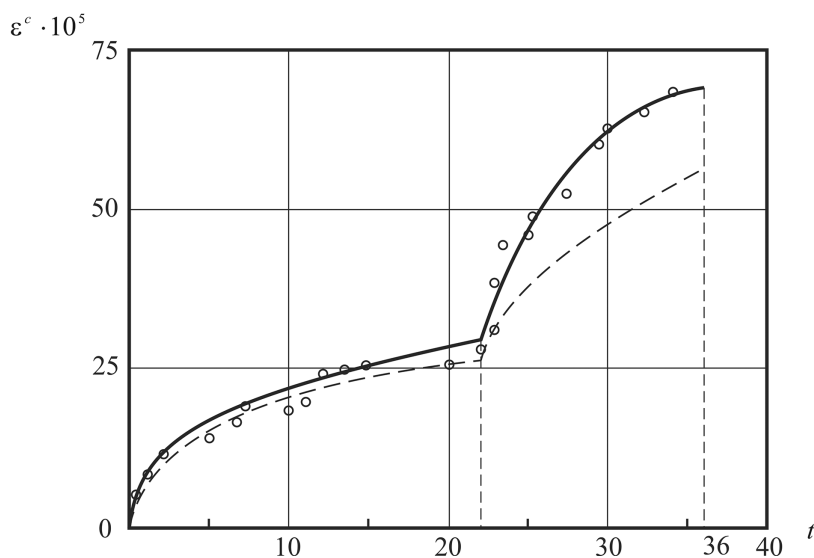
Теоретические кривые приведены на рис. 2. Из него следует, что физико-математическая теория хорошо описывает кривую ползучести сплава до и после скачка напряжения (расчетная кривая идет строго по экспериментальным точкам). Феноменологическая теория ползучести хорошо описывает экспериментальную кривую до скачкообразного увеличения напряжения. После увеличения напряжения расчетная кривая лежит значительно ниже экспериментальной.

Установлено также, что скачкообразное увеличение напряжения с  $\sigma_1 = 292$  МПа до  $\sigma_2 = 340$  МПа обуславливает и скачкообразное увеличение скорости деформации с  $\dot{\epsilon}_{(4)} = 0.2 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$  до  $\dot{\epsilon}_{(5)} = 7.0 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$  (см. табл. 1). Скачкообразное увеличение скорости необратимой деформации приводит

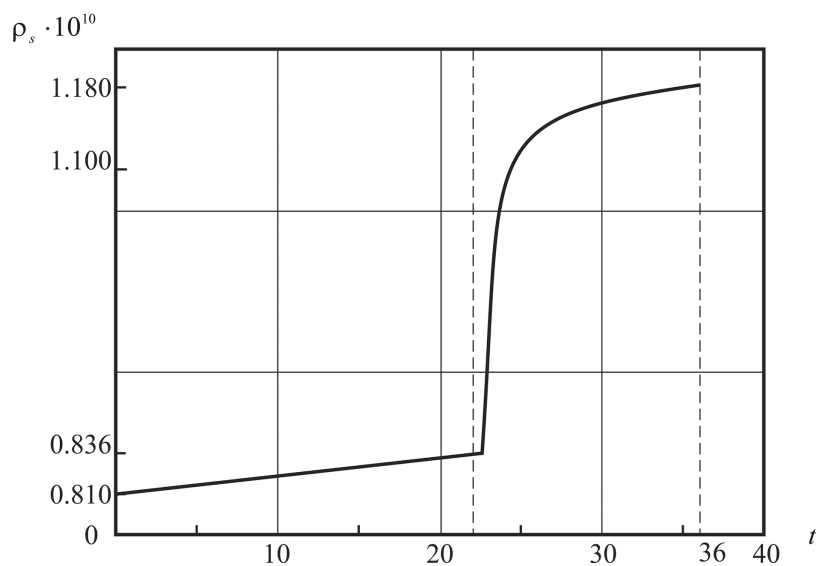
**Таблица 1.** Результаты расчета кривой ползучести на рис. 2 на основе физико-математической теории

| $g$ | $\dot{\epsilon}_{(g)}^c, \text{ с}^{-1}$ | $d\epsilon_{(g)}^c, \%$ | $\epsilon_{(g)}^c, \%$ | $d\rho_s, \text{ см}^{-2}$ | $\rho_s, \text{ см}^{-2}$ | $dt, \text{ ч}$ |
|-----|------------------------------------------|-------------------------|------------------------|----------------------------|---------------------------|-----------------|
| 1   | $1.1 \cdot 10^{-8}$                      | $18.80 \cdot 10^{-5}$   | $18.80 \cdot 10^{-5}$  | $0.013 \cdot 10^{10}$      | $0.823 \cdot 10^{10}$     | 5.0             |
| 2   | $0.6 \cdot 10^{-8}$                      | $10.7 \cdot 10^{-5}$    | $28.7 \cdot 10^{-5}$   | $0.01 \cdot 10^{10}$       | $0.833 \cdot 10^{10}$     | 5.0             |
| 3   | $0.155 \cdot 10^{-8}$                    | $3.60 \cdot 10^{-5}$    | $32.2 \cdot 10^{-5}$   | $0.003 \cdot 10^{10}$      | $0.835 \cdot 10^{10}$     | 5.0             |
| 4   | $0.2 \cdot 10^{-8}$                      | $3.40 \cdot 10^{-5}$    | $35.6 \cdot 10^{-5}$   | $0.03 \cdot 10^{10}$       | $0.836 \cdot 10^{10}$     | 6.25            |
| 5   | $7.0 \cdot 10^{-8}$                      | $17.60 \cdot 10^{-5}$   | $53.1 \cdot 10^{-5}$   | 0.0                        | $1.1 \cdot 10^{10}$       | 0.75            |
| 6   | $7.0 \cdot 10^{-8}$                      | $12.50 \cdot 10^{-5}$   | $65.6 \cdot 10^{-5}$   | 0.0                        | $1.18 \cdot 10^{10}$      | 6.25            |
| 7   | $0.2 \cdot 10^{-8}$                      | $3.60 \cdot 10^{-5}$    | $69.2 \cdot 10^{-5}$   | —                          | —                         | 5.0             |

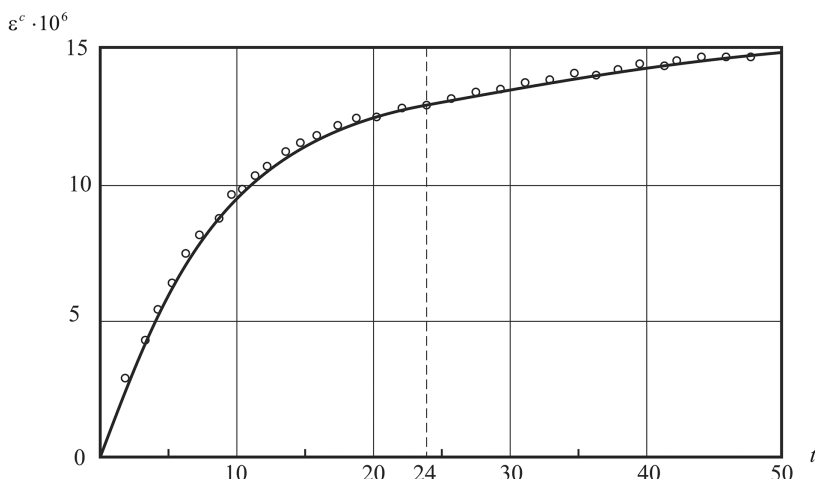




**Рис. 2.** Кривая ползучести ( $\varepsilon^c$  в % от  $t$  в часах) сплава Д16Т при температуре 150 °С и изменении напряжения с меньшего  $\sigma_1 = 292$  МПа (22 ч) на большее  $\sigma_2 = 340$  МПа (14 ч) (точки – эксперимент [25], сплошная линия – расчет по физико-математической теории, пунктирная – по феноменологической теории упрочнения).



**Рис. 3.** Зависимость скалярной плотности неподвижных дислокаций ( $\rho_s$  в  $\text{см}^{-2}$  от  $t$  в часах) при ползучести сплава Д16Т при температуре 150 °С и скачкообразном изменении напряжения с меньшего с  $\sigma_1 = 292$  МПа (22 ч) на большее  $\sigma_2 = 340$  МПа (14 ч) (расчет по физико-математической теории ползучести).



**Рис. 4.** Кривая ползучести ( $\varepsilon^c$  в % от  $t$  в часах) сплава Д16Т при температуре 200 °С и скачкообразном изменении напряжения с большего с  $\sigma_2 = 160$  МПа (24 ч) на меньшее  $\sigma_1 = 120$  МПа (26 ч). Точки – эксперимент [25], сплошная кривая – расчет (расчет по физико-математической теории ползучести).

к скачкообразному увеличению действительного структурного параметра – скалярной плотности неподвижных дислокаций в сплаве с  $\rho_s = 0.836 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$  до  $\rho_s = 1.18 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$  (см. табл. 1 и рис. 3).

Этот впервые установленный результат находит простое объяснение в физико-математической теории. Известно, что скорость необратимой пластической деформации пропорциональна скалярной плотности подвижных дислокаций  $\rho_g$  в металле, которые и ответственны за необратимую деформацию [3, 4], то есть

$$\dot{\varepsilon} = \rho_g b v,$$

где  $v$  – средняя линейная скорость скольжения дислокаций в кристаллической решетке. Подвижные дислокации, пройдя путь свободного пробега  $\lambda$ , останавливаются на барьерах и превращаются в неподвижные. Следовательно, чем больше подвижных дислокаций в металле, тем больше будет неподвижных  $\rho_s$ .

На рис. 3 видно, что скалярная плотность неподвижных дислокаций увеличивается с  $0.836 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$  до  $1.18 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$  за небольшой промежуток времени с момента увеличения напряжения с  $\sigma_1 = 292$  МПа до  $\sigma_2 = 340$  МПа.

С целью проверки адекватности описания ползучести физико-математической теорией при скачкообразном уменьшении напряжения было проведено моделирование результатов другого эксперимента авторов в [25] на сплаве Д16Т при температуре 200 °С, в котором напряжение скачком уменьшалось с  $\sigma_1 = 160$  МПа (24 ч) на  $\sigma_2 = 120$  МПа (26 ч). Результаты расчета показаны на рис. 4. При расчете принимали следующие значения входящих в расчетные формулы величин: модуль упругости второго рода сплава Д16Т при температуре 200 °С:  $G = 2.50 \cdot 10^4$  МПа;  $\beta = 1.15$ ;  $v_D = 5 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ;  $kT = 652.7 \cdot 10^{-23}$  Дж.

Изложенные результаты однозначно свидетельствуют о том, что кинетическая физико-математическая теория ползучести металлов описывает в соответствии с экспериментальными результатами ползучесть со скачкообразными изменениями напряжения как с меньшего на большее, так и наоборот. Следовательно, это единственная на сегодняшний день теория, которая решает основную проблему теоретического описания ползучести — учета истории нагружения. Этот факт свидетельствует о перспективности применения теории в проекторочных расчетах при создании изделий новой техники.

Как отмечалось ранее, в физико-математической теории необратимых деформаций металлов из-за общности атомных механизмов деформации они не подразделяются на активные и деформации ползучести. Анализ определяющих уравнений объемной ползучести (3.22) свидетельствует об их математической аналогичности определяющим уравнениям теории пластичности — теории течения [3]. Поэтому при разработке инженерного программного продукта для решения задач в общем случае неустановившейся ползучести с использованием метода конечных элементов за основу можно взять известный и хорошо зарекомендовавший себя при решении задач пластичности пакет DEFORM-3D. Доработка этого пакета будет связана с разработкой части программы, обеспечивающей при решении задач ползучести учет истории нагружения.

Алгоритм решения этой задачи видится следующим. После определения компонентов напряженно-деформированного состояния в узлах конечно-элементной сетки на расчетном шаге  $g$  с использованием программы DEFORM-3D из уравнений (3.22)–(3.25) рассчитываются изменения в узле, произошедшие на шаге  $(g) - d\rho_{(g)}, d\sigma_{(g)}, dT_{(g)}$ , по формулам (3.2), (3.4). Для определения  $dT_{(g)}$  параллельно с механической задачей необходимо решать тепловую задачу.

После определения изменений параметров, ответственных за историю нагружения, находятся их полные значения для определения характеристик напряженно-деформированного состояния в узле на следующем расчетном шаге  $(g+1)$  по формулам (3.5)–(3.7) и  $T_{(g)} = T_{(g-1)} + dT_{(g)}$ .

Далее по (3.10) находится интенсивность скорости деформации ползучести  $\dot{\epsilon}^c$  на расчетном шаге  $(g+1)$ , задается приращение времени  $dt$ , и с применением формул (3.22–3.25) и пакета DEFORM-3D находятся компоненты напряженно-деформированного состояния при ползучести в узлах конечно-элементной модели на шаге  $(g+1)$ . За  $n$  расчетных шагов получаем полную картину напряженно-деформированного состояния детали за время ее эксплуатации в условиях неустановившейся ползучести.

**5. Заключение.** Описанные закономерности изменения макро- и микрохарактеристик сплава Д16Т при ползучести в условиях скачкообразного изменения напряжения не могут быть установлены и описаны в рамках феноменологической теории ползучести металлов, в которой не учитывается действительная структура и ее изменение при деформации.

Анализ физического кинетического уравнения изменения действительного структурного параметра металлов — скалярной плотности неподвижных дислокаций показывает, что при пошаговом расчете ползучести в малых, но конечных приращениях, возможен последовательный учет истории нагружения.

Предложен возможный вариант алгоритма доработки известного программного продукта DEFORM-3D, обеспечивающего решение задач ползучести.

Из сказанного следует, что физико-математическая теория ползучести металлов может стать эффективным инструментом для проведения проекторочных расчетов при разработке изделий новой техники.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Грешнов В.М. Физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов. М.: Физматлит, 2018. 227 с.
4. Greshnov V.M. Physico-mathematical theory of high irreversible strains in metals. CRC Press, 2019. 254 p.  
<https://doi.org/10.1201/9780429259791>
5. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 2000. 608 с.
6. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. Т. 8. С. 26–31.
7. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
8. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 502 с.
9. Малинин Н. Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. 2-е изд., испр. и доп. Учебное пособие для бакалавриата и магистратуры. Litres, 2022.
10. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Юрайт, 2020.
11. Грешнов В. М., Пучкова И. В. Модель пластичности металлов при циклическом нагружении с большими деформациями // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т. 51. № 2. С. 160–169.
12. Greshnov V.M. Physical-mathematical theory of irreversible strains in metals // Mechanics of solids. 2011. Т. 46. №. 4. С. 544–553.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654411040054>
13. Грешнов В.М. и др. Математическое моделирование многопереходных процессов холодной объемной штамповки на основе физико-математической теории пластического формообразования металлов. Ч. 1. Расчет напряженно-деформированного состояния // Кузнечно-штамповочное пр-во. Обработка металлов давлением. 2001. № 8. С. 33.
14. Грешнов В.М. и др. Математическое моделирование многопереходных процессов холодной объемной штамповки на основе физико-математической теории пластического формообразования металлов. Ч. 2. Расчет деформационной поврежденности и прогнозирование макроразрушения // Кузнечно-штамповочное пр-во. Обработка металлов давлением. 2001. № 10. С. 33–39.
15. Грешнов В.М. Модель вязкопластического тела с учетом истории нагружения // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 2. С. 117–125.
16. Грешнов В.М., Пятаева И.В., Сидоров В.Е. Физико-математическая теория пластичности и ползучести металлов // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2007. Т. 9. № 6. С. 143–152.
17. Грешнов В.М., Шайхутдинов Р.И., Пучкова И.В. Кинетическая физико-феноменологическая модель длительной прочности металлов // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 1. С. 189–198.

18. *Greshnov V.M., Safin F.F., Puchkova I.V.* Plastic structure formation of the 1570R alloy (Al–Mg–Sc) using the physico-mathematical theory of metal plasticity // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2022. V. 63. № 4. P. 669–675.  
<https://doi.org/10.1134/S0021894422040149>
19. *Greshnov V.M. et al.* Al–Mg–Sc (1570) Alloy Structure Formation Process // *Proceedings of the International Conference on Aerospace System Science and Engineering 2021*. Singapore: Springer Nature Singapore, 2022. P. 547–554.  
[https://doi.org/10.1007/978-981-16-8154-7\\_41](https://doi.org/10.1007/978-981-16-8154-7_41)
20. *Грешнов В.М., Шайхутдинов Р.И.* Физико-феноменологическая модель дислокационной ползучести металлов // *Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета*. 2013. Т. 17. № 1 (54). С. 33–38.
21. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 701 с.
22. *Наместников В.С., Работнов Ю.Н.* О наследственных теориях ползучести // *ПМТФ*. 1961. Т. 2. № 4. С. 148–150.
23. *Bailey R.W.* The utilization of creep test data in engineering design // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. 1935. Т. 131. № 1. С. 131–349.
24. *Одинг И.А.* Механизм ползучести металлов // *Металлург*. 1934. № 1.
25. *Наместников В.С., Хвостунков А.А.* Ползучесть дуралюмина при постоянных переменных нагрузках // *ПМТФ*. 1960. № 4. С. 90–95.

UDC 539.376, 538.951

## ON THE KINETIC PHYSICAL AND MATHEMATICAL METAL CREEP THEORY CONTROLLED BY THERMALLY ACTIVATED DISLOCATION SLIDING

© 2024 г. V. M. Greshnov<sup>a, \*</sup>, R. I. Shaikhutdinov<sup>a, \*\*</sup>

<sup>a</sup>Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

\*e-mail: [Greshnov\\_VM@list.ru](mailto:Greshnov_VM@list.ru)

\*\*e-mail: [shaykhutdinovri@gmail.com](mailto:shaykhutdinovri@gmail.com)

**Abstract** — The rationale for the prospects of using the physical and mathematical theory of metal creep in creep computations is carried out by a comparative analysis of the classical phenomenological and physical and mathematical metal creep theories. On the example of the description by both theories specific results of non-stationary creep experiments and analysis of the theories equations it is shown that implementing the physical kinetic equation for the actual structural parameter of the material, namely the scalar density of immobile dislocations, makes the physical and mathematical theory universal for solving non-stationary metal creep problems with multiaxial loading, when change, including abruptly, temperature, forces and loading rates.

**Keywords:** creep of metals, creep curve, loading history, structural parameter, physical kinetic equation

## REFERENCES

1. *Kachanov L.M.* Theory of creep. Moscow: Fizmatgiz, 1960.
2. *Rabotnov Yu.N.* Creep of structural elements. M.: Nauka, 1966.
3. *Greshnov V.M.* Physico-mathematical theory of large irreversible deformations of metals // M.: Fizmatlit, 2018.
4. *Greshnov V.M.* Physico-Mathematical Theory of High Irreversible Strains in Metals, CRC Press, 2019.
5. *Rumer Yu.B., Ryvkin M.Sh.* Thermodynamics. Statistical physics and kinetics. Novosibirsk: Siberian University Edition, 2001. 608 p.
6. *Kachanov L.M.* On the time of destruction under creep conditions // *Izv. Academy of Sciences of the USSR. OTN.* 1958. V. 8. P. 26–31.
7. *Rabotnov Yu.N.* On the mechanism of long-term destruction // *Issues of strength of materials and structures.* M.: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1959. P. 5–7.
8. *Lokoshchenko A.M.* Creep and long-term strength of metals. M.: Fizmatlit, 2016.
9. *Malinin N.* Calculations for creep of elements of mechanical engineering structures, 2nd ed., rev. and additional Textbook for bachelor's and master's degrees, Litres, 2022.
10. *Malinin N.N.* Applied theory of plasticity and creep, 2020.
11. *Greshnov V.M., Puchkova I.V.* Model of plasticity of metals under cyclic loading with large deformations // *Appl. Mech. Tech. Phys.* 2010. V. 51. № 2. P. 160–169.
12. *Greshnov V.M.* Physical-mathematical theory of irreversible strains in metals // *Mech. Solids.* 2011. V. 46. № 4. P. 544–553.
13. *Greshnov V.M.* et al. Mathematical modeling of multi-transition processes of cold die forging based on the physical and mathematical theory of plastic shaping of metals. Part 1. Calculation of the stress-strain state // *Forging and stamping production. Metal forming.* 2001. № 8. P. 33.
14. *Greshnov V.M.* et al. Mathematical modeling of multi-transition processes of cold die forging based on the physical and mathematical theory of plastic shaping of metals. Part 2. Calculation of deformation damage and prediction of macrofracture // *Forging and stamping production. Metal forming.* 2001. № 10. P. 33–39.
15. *Greshnov V.M.* Model of a viscoplastic body taking into account the history of loading // *News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids.* 2005. № 2. P. 117–125.
16. *Greshnov V.M., Pyataeva I.V., Sidorov V.E.* Physico-mathematical theory of plasticity and creep of metals // *Bulletin of the Ufa State Aviation Technical University.* 2007. V. 9. № 6. P. 143–152.
17. *Greshnov V.M., Shaikhutdinov R.I., Puchkova I.V.* Kinetic physical and phenomenological model of long-term strength of metals // *Appl. Mech. Tech. Phys.* 2017, V. 58. № 1. P. 189–198.
18. *Greshnov V.M., Safin F.F., Puchkova I.V.* Plastic Structure Formation of the 1570R Alloy (Al–Mg–Sc) Using the Physico-Mathematical Theory of Metal Plasticity // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2022. V. 63. № 4. P. 669–675;  
<https://doi.org/10.1134/S0021894422040149>
19. *Greshnov V.M. et al.* Al-Mg-Sc (1570) Alloy Structure Formation Process // *Proceedings of the International Conference on Aerospace System Science and Engineering 2021, Singapore: Springer Nature Singapore*, 2022. P. 547–554;  
[https://doi.org/10.1007/978-981-16-8154-7\\_41](https://doi.org/10.1007/978-981-16-8154-7_41)
20. *Greshnov V.M., Shaikhutdinov R.I.* Physico-phenomenological model of dislocation creep of metals // *Bulletin of the Ufa State Aviation Technical University.* 2013. V. 17. № 1 (54). P. 33–38.
21. *Ishlinsky A.Yu., Ivlev D.D.* Mathematical theory of plasticity. M.: Fizmatlit, 2003. 701 p.

22. *Namestnikov V.S., Rabotnov Yu. N.* On hereditary theories of creep // Appl. Mech. Tech. Phys. 1961. V. 2. № 4. P. 148.
23. *Bailey R.W.* The utilization of creep test data in engineering design // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. 1935. V. 131. № 1. P. 131–349.
24. *Oding I.A.* Mechanism of creep of metals // Metallurgist. 1934. № 1.
25. *Namestnikov V.S., Khvostunkov A.A.* Creep of duralumin under constant variable loads // Appl. Mech. Tech. Phys. 1960. № 4. P. 90–95.

УДК 539.3

## НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ДЛИННОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

© 2024 г. Д. А. Шляхин<sup>а, \*</sup>, В. А. Юрин<sup>а, \*\*</sup>

*<sup>а</sup>Самарский государственный технический университет, Самара, Россия*

*\*e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru,*

*\*\*e-mail: get8ack@mail.ru*

Поступила в редакцию 30.09.2023 г.

После доработки 30.10.2023 г.

Принята к публикации 07.11.2023 г.

Построено новое замкнутое решение неосесимметричной связанной нестационарной задачи термоэлектродупругости для длинного пьезокерамического цилиндра при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го и 3-го рода. Цилиндрические поверхности элемента электродированы и подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением. Ограничение скорости изменения температурного поля на внутренней поверхности цилиндра позволяет включить в математическую формулировку задачи уравнения равновесия, электростатики и теплопроводности. Для исследования полученной несамосопряженной системы уравнений и построения замкнутого решения применяется обобщенное биортогональное конечное интегральное преобразование. Полученные зависимости позволяют определить температурное, электрическое и упругое поля в пьезокерамическом цилиндре, а также разность потенциалов между его электродированными поверхностями при действии нестационарного неосесимметричного температурного “воздействия”.

*Ключевые слова:* неосесимметричная задача термоэлектродупругости, длинный пьезокерамический цилиндр, биортогональные конечные интегральные преобразования

**DOI:** 10.31857/S1026351924020161, **EDN:** uuzej

**1. Введение.** Для описания и усовершенствования работы приборов, принцип действия которых основывается на взаимном влиянии термоэлектродупругих полей [1–4], используются различные математические теории [5–7]. При этом достаточно слабый эффект влияния скорости изменения объема тела на температурное поле удается учесть только с помощью построенных замкнутых решений. В этом случае для преодоления математических проблем при интегрировании системы несамосопряженных дифференциальных



уравнений, как правило, рассматриваются задачи в осесимметричной постановке. Здесь можно отметить работы, в которых исследуются задачи для градиентно-неоднородного пьезокерамического слоя [8, 9], длинного цилиндра [10–17] и полый сферы [18, 19].

В настоящее время можно отметить небольшое количество исследований в неосесимметричной постановке, в основном статических задач термоэлектроупругости. В частности, в работах [20–22] рассматриваются задачи для функционально-градиентного пьезокерамического длинного цилиндра при отсутствии потенциала на его электродированных поверхностях. В статьях [23, 24] анализируется характер изменения термоэлектроупругих полей в цилиндре, подверженном температурному и механическому воздействиям. Здесь также можно отметить задачу для длинного пьезокерамического цилиндра под нестационарным температурным воздействием [25], для которой было построено замкнутое решение в несвязанной постановке.

Целью настоящей работы является разработка алгоритма решения связанной неосесимметричной задачи термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра в случае удовлетворения на его поверхностях граничных условий 1-го и 3-го рода. Ограничение скорости изменения температуры на внутренней поверхности элемента дает возможность не учитывать его инерционные характеристики, что позволяет использовать при формулировке задачи уравнения равновесия, электростатики и теплопроводности. Замкнутое решение строится обобщенным методом биортогональных конечных интегральных преобразований.

**2. Постановка задачи.** Рассматривается полый длинный пьезокерамический цилиндр (расчетная схема представлена на рис. 1), занимающий в цилиндрической системе координат область  $\Sigma = \{(r_*, \varphi, z_*) \mid r_* \in [a; b], \varphi \in [0; 2\pi), z_* \in R\}$ .

В общем случае разработанный ниже алгоритм расчета позволяет удовлетворить произвольные граничные условия теплопроводности. Рассматриваемый в работе частный случай предполагает удовлетворение на внутренней поверхности ( $r_* = a$ ) граничного условия 1-го рода в виде неосесимметричной нестационарной функции температуры  $\omega_1^*(\varphi, t_*)$ . На внешней поверхности ( $r_* = b$ ) задано граничное условие 3-го рода — закон конвективного теплообмена при известной температуре окружающей среды  $\vartheta^*$ . Поверхности цилиндра имеют электродное покрытие и подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением. При этом внутренняя поверхность заземлена.

Математическая формулировка задачи в безразмерной форме включает дифференциальные уравнения равновесия, электростатики, теплопроводности и краевые условия для радиально поляризованного пьезокерамического материала с гексагональной кристаллической решеткой класса  $6mm$  [26, 27]:

$$L_{m+1}(U) + L_{m+2}(V) + L_{m+3}(\Phi) + L_{m+4}(\Theta) = 0, \text{ при } m = 0, 4, 8, \quad (2.1)$$

$$L_{13}(\Theta) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \Theta + a_{12} \nabla U + a_{12} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - a_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0, \quad (2.2)$$

$$r = R, 1: \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{a_3}{r} \left( U + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Theta = 0, \quad r \frac{\partial V}{\partial r} - V + \frac{\partial U}{\partial \varphi} + a_{14} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.3)$$

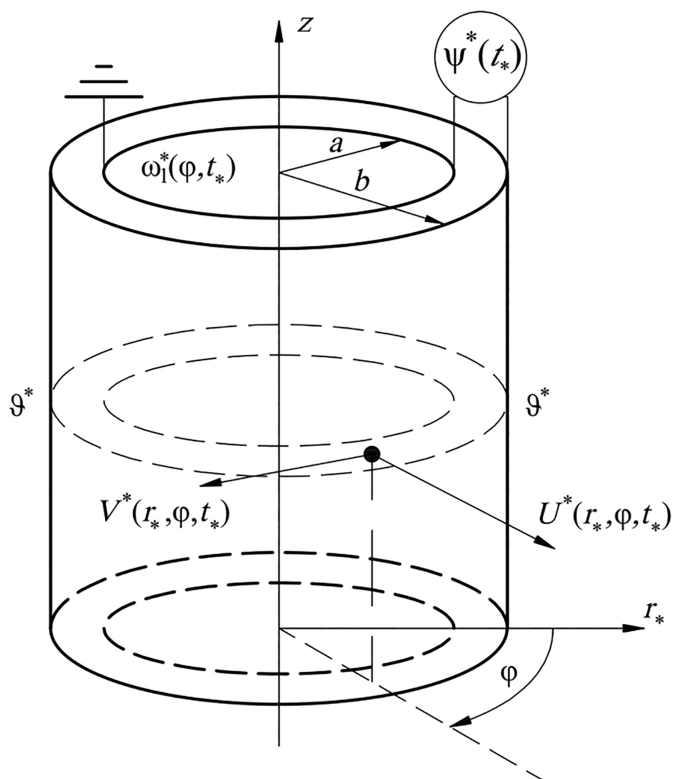


Рис. 1. Расчетная схема.

$$\Phi|_{r=R} = 0, \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + a_8 \frac{\partial U}{\partial r} + a_9 \frac{U}{r} + a_9 \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + a_{11} \Theta \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad (2.4)$$

$$\Theta|_{r=R} = \omega_1, \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r} + a_{15} \Theta \right) \Big|_{r=1} = a_{15} \vartheta \quad (2.5)$$

$$m = \overline{1, \infty} : \{U, V, \Phi, \Theta\}_{|\varphi=0} = \{U, V, \Phi, \Theta\}_{|\varphi=2\pi m},$$

$$\frac{\partial \{U, V, \Phi, \Theta\}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial \{U, V, \Phi, \Theta\}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=2\pi m}, \quad (2.6)$$

$$t = 0 : U = V = \Phi = \Theta = 0, \quad (2.7)$$

где

$$L_1 = \nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_1}{r^2} + a_2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_2 = \frac{1}{r} \left[ (a_2 + a_3) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(a_1 + a_2)}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$L_3 = \nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_4}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_5}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad L_4 = \frac{a_6}{r} - \nabla, \quad L_5 = \frac{1}{r} \left( a_2 \nabla + a_3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$L_6 = a_2 \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{a_2}{r^2}, \quad L_7 = \frac{1}{r} \left( a_4 \frac{\partial}{\partial r} + a_5 \nabla \right) \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$L_8 = -a_6 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad L_9 = a_8 \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_9}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_{10}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$L_{10} = \frac{1}{r} \left[ (a_{10} + a_9) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_{10}}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad L_{11} = -\nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_7}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad L_{12} = a_{11} \nabla,$$

$$L_{13} = \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}; \quad \{U, V, r, R\} = \{U^*, V^*, r_*, a\} / b,$$

$$\Phi = \frac{e_{33}}{bc_{33}} \Phi^* \quad \{\Theta, \omega_1, \vartheta\} = \frac{\gamma_{33}}{c_{33}} \left\{ \Theta^* - T_0, \omega_1^* - T_0, \vartheta^* - T_0 \right\}; \quad t = \frac{\Lambda}{kb^2} t_*; ,$$

$$a_4 = \frac{e_{31}}{e_{33}} \quad a_5 = \frac{e_{15}}{e_{33}}, \quad a_6 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}}, \quad a_7 = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}}, \quad \{a_8, a_9, a_{10}\} = \{e_{33}, e_{31}, e_{15}\} \frac{e_{33}}{c_{33} \varepsilon_{33}},$$

$$a_{11} = \frac{e_{33} g_3}{\varepsilon_{33} \gamma_{33}}, \quad a_{12} = T_0 \frac{\gamma_{33}}{c_{33} k}, \quad a_{13} = T_0 \frac{\gamma_{33} g_3}{k e_{33}}, \quad a_{14} = \frac{a_5}{a_2}, \quad a_{15} = \alpha \frac{b}{\Lambda}.$$

В системе (2.1)–(2.7)  $U^*(r_*, \varphi, t_*)$ ,  $V^*(r_*, \varphi, t_*)$ ,  $\Phi^*(r_*, \varphi, t_*)$ ,  $\Theta^*(r_*, \varphi, t_*)$  – компоненты вектора перемещений, потенциал электрического поля и температура тела в размерной форме;  $T_0$  – температура первоначального состояния тела;  $c_{ms}$ ,  $e_{ms}$ ,  $\varepsilon_{ms}$  – модули упругости, пьезомодули и коэффициенты диэлектрической проницаемости пьезокерамического материала при  $\{m, s\} = 1, 5$ ;  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{33}$  – компоненты тензора температурных напряжений ( $\gamma_{11} = c_{11} \alpha_t$ ,  $\gamma_{33} = c_{33} \alpha_t$ );  $g_3$  – пироккоэффициент;  $\Lambda$ ,  $k$ ,  $\alpha_t$  – коэффициенты теплопроводности, объемной теплоемкости и линейного температурного расширения материала;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи.

С учетом того, что внутренняя поверхность элемента заземлена, напряжение холостого хода  $\Psi^*(t_*)$  определяется путем осреднения потенциала по его внешней поверхности:

$$\Psi^*(t_*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^*(1, \varphi, t_*) d\varphi. \quad (2.8)$$

**3. Построение общего решения.** На первом этапе решения задачи (2.1)–(2.7) применяется конечное косинус- и синус-преобразования Фурье [28] при использовании следующих трансформант и формул обращения:

$$\{U_H(r, n, t), \Phi_H(r, n, t), \Theta_H(r, n, t)\} = \int_0^{2\pi} \{U(r, \varphi, t), \Phi(r, \varphi, t), \Theta(r, \varphi, t)\} \cos(n\varphi) d\varphi \quad (3.1)$$

$$V_H(r, n, t) = \int_0^{2\pi} V(r, \varphi, t) \sin(n\varphi) d\varphi$$

$$\{U(r, \varphi, t), \Phi(r, \varphi, t), \Theta(r, \varphi, t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \{U_H(r, n, t), \Phi_H(r, n, t), \Theta_H(r, n, t)\} \cos(n\varphi) d\varphi \quad (3.2)$$

$$V(r, \varphi, t) = \pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} V_H(r, n, t) \sin(n\varphi) d\varphi$$

$$(n = 0 : \Omega_n = (2\pi)^{-1}; n \neq 0 : \Omega_n = \pi^{-1}).$$

При реализации преобразования (3.1), (3.2) с учетом периодичности решения (2.6) в пространстве изображений получается следующая начально-краевая задача:

$$\tilde{L}_{m+1}(U_H) + \tilde{L}_{m+2}(V_H) + \tilde{L}_{m+3}(\Phi_H) + \tilde{L}_{m+4}(\Theta_H) = 0, \text{ при } m = 0, 4, 8 \quad (3.3)$$

$$\tilde{L}_{13}(\Theta_H) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \Theta_H + a_{12} \nabla U_H + a_{12} n \frac{V_H}{r} - a_{13} \frac{\partial \Phi_H}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$r = R, 1 : \frac{\partial U_H}{\partial r} + a_3 \frac{U_H}{r} + a_3 n \frac{V_H}{r} + \frac{\partial \Phi_H}{\partial r} - \Theta_H = 0,$$

$$r \frac{\partial V_H}{\partial r} - V_H - n U_H - a_{14} n \Phi_H = 0 \quad (3.5)$$

$$\Phi_H|_{r=R} = 0, \left( -\frac{\partial \Phi_H}{\partial r} + a_8 \frac{\partial U_H}{\partial r} + a_9 \frac{U_H}{r} + a_9 n \frac{V_H}{r} + a_{11} \Theta_H \right)_{|r=1} = 0. \quad (3.6)$$

$$\Theta_H|_{r=R} = \omega_{1H}, \left( \frac{\partial \Theta_H}{\partial r} + a_{15} \Theta_H \right)_{|r=1} = a_{15} \vartheta_H, \quad (3.7)$$

$$t = 0 : U_H = V_H = \Phi_H = \Theta_H = 0, \quad (3.8)$$

где

$$\{\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_4, \tilde{L}_9, \dots, \tilde{L}_{13}\} = \int_0^{2\pi} \{L_1, \dots, L_4, L_9, \dots, L_{13}\} \cos(n\varphi) d\varphi,$$

$$\left\{ \tilde{L}_5, \dots, \tilde{L}_8 \right\} = \int_0^{2\pi} \left\{ L_5, \dots, L_8 \right\} \sin(n\varphi) d\varphi$$

$$\left\{ \omega_{1H}(n, t), \vartheta_H \right\} = \int_0^{2\pi} \left\{ \omega_1(\varphi, t), \vartheta \right\} \cos(n\varphi) d\varphi.$$

Далее производится приведение неоднородных граничных условий (3.5)–(3.7) к однородным с применением следующих разложений:

$$U_H(r, n, t) = H_1(r, n, t) + u_H(r, n, t), \quad V_H(r, n, t) = H_2(r, n, t) + v_H(r, n, t) \quad (3.9)$$

$$\Phi_H(r, n, t) = H_3(r, n, t) + \phi_H(r, n, t), \quad \Theta_H(r, n, t) = H_4(r, n, t) + T_H(r, n, t),$$

где

$$\left\{ H_1(r, n, t), H_2(r, n, t), H_3(r, n, t), H_4(r, n, t) \right\} =$$

$$= \left\{ f_1(r), \dots, f_4(r) \right\} \omega_{1H}(n, t) + \left\{ f_5(r), \dots, f_8(r) \right\} \vartheta_H$$

$f_1(r) \dots f_8(r)$  – дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (3.9) в (3.3)–(3.8) при выполнении условий

$$r = R, 1: \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_3 \frac{H_1}{r} + a_3 n \frac{H_2}{r} + \frac{\partial H_3}{\partial r} - H_4 = 0,$$

$$r \frac{\partial H_2}{\partial r} - H_2 - n H_1 - a_{14} n H_3 = 0 \quad (3.10)$$

$$H_{3|r=R} = 0, \quad \left( -\frac{\partial H_3}{\partial r} + a_8 \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_9 \frac{H_1}{r} + a_9 n \frac{H_2}{r} + a_{11} H_4 \right)_{|r=1} = 0$$

$$H_{4|r=R} = \omega_{1H}, \quad \left( \frac{\partial H_4}{\partial r} + a_{15} H_4 \right)_{|r=1} = a_{15} \vartheta_H$$

позволяет преобразовать задачу (3.5)–(3.7) к стандартной форме относительно функций  $u_H$ ,  $v_H$ ,  $\phi_H$ ,  $T_H$ :

$$\tilde{L}_{m+1}(u_H) + \tilde{L}_{m+2}(v_H) + \tilde{L}_{m+3}(\phi_H) + \tilde{L}_{m+4}(T_H) = \{F_1, F_2, F_3\},$$

при  $m = 0, 4, 8$  (3.11)

$$\tilde{L}_{13}(T_H) - \frac{\partial}{\partial t} \left( T_H + a_{12} \nabla u_H + a_{12} n \frac{v_H}{r} - a_{13} \frac{\partial \phi_H}{\partial r} \right) = F_4 \quad (3.12)$$

$$r = R, 1: \frac{\partial u_H}{\partial r} + a_3 \frac{u_H}{r} + a_3 n \frac{v_H}{r} + \frac{\partial \phi_H}{\partial r} - T_H = 0,$$

$$r \frac{\partial v_H}{\partial r} - v_H - n u_H - a_{14} n \phi_H = 0 \quad (3.13)$$

$$\phi_H|_{r=R} = 0, \left( -\frac{\partial \phi_H}{\partial r} + a_8 \frac{\partial u_H}{\partial r} + a_9 \frac{u_H}{r} + a_9 n \frac{v_H}{r} + a_{11} T_H \right) \Big|_{r=1} = 0 \quad (3.14)$$

$$T_H|_{r=R} = 0, \left( \frac{\partial T_H}{\partial r} + a_{15} T_H \right) \Big|_{r=1} = 0 \quad (3.15)$$

$$t = 0 : \{u_H, v_H, \phi_H, T_H\} = -\{H_1(r, n, 0), H_2(r, n, 0), H_3(r, n, 0), H_4(r, n, 0)\} \quad (3.16)$$

где

$$F_p = -\left[ \tilde{L}_{m+1}(H_1) + \tilde{L}_{m+2}(H_2) + \tilde{L}_{m+3}(H_3) + \tilde{L}_{m+4}(H_4) \right],$$

$$F_4 = -\tilde{L}_{13}(H_4) + \frac{\partial}{\partial t} \left( H_4 + a_{12} \nabla H_1 + a_{12} n \frac{H_2}{r} - a_{13} \frac{\partial H_3}{\partial r} \right),$$

при  $\{p\} = 1, 2, 3$ ,  $\{m\} = 0, 4, 8$  соответственно.

Для решения системы (3.11)–(3.16) применяется биортогональное конечное интегральное преобразование (КИП) с неизвестными компонентами собственных вектор-функций  $K_1(\lambda_{in}, n, r) \dots K_4(\lambda_{in}, n, r)$  и  $N_1(\mu_{in}, n, r) \dots N_4(\mu_{in}, n, r)$ :

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_R \left[ T_H + a_{12} \nabla u_H + a_{12} n \frac{v_H}{r} - a_{13} \frac{\partial \phi_H}{\partial r} \right] r K_4(\lambda_{in}, n, r) dr \quad (3.17)$$

$$\{u_H, v_H, \phi_H, T_H\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \frac{\{N_1(\mu_{in}, n, r), N_2(\mu_{in}, n, r), N_3(\mu_{in}, n, r), N_4(\mu_{in}, n, r)\}}{\|K_{in}\|^2} \quad (3.18)$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_R K_4(\lambda_{in}, n, r) N_4(\mu_{in}, n, r) r dr,$$

где  $\lambda_{in}$ ,  $\mu_{in}$  – собственные значения функций  $K_k(\lambda_{in}, n, r)$  и  $N_k(\mu_{in}, n, r)$  при  $k = 1 \dots 4$ .

Особенностью биортогонального КИП является то, что трансформанта (3.17) и формула обращения (3.18) содержат две ядровые вектор-функции: сопряженные  $K_k(\lambda_{in}, n, r)$  и инвариантные  $N_k(\mu_{in}, n, r)$ .

При биортогональном КИП формируется счетное множество задач для трансформанты  $G(\lambda_{in}, n, t)$ :

$$\left( \frac{d}{dt} + \lambda_{in}^2 \right) G(\lambda_{in}, n, t) = F_H(\lambda_{in}, n, t), \text{ при } i = \overline{1, \infty}; n = \overline{0, \infty}$$

$t = 0 : G(\lambda_{in}, n, 0) = G_{0H}$ ,  
решение которых имеет вид:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = G_{0H} \exp(-\lambda_{in}^2 t) + \int_0^t F_H(\lambda_{in}, n, \tau) \exp[\lambda_{in}^2 (\tau - t)] d\tau,$$

где

$$F_H(\lambda_{in}, n, t) = - \int_R^1 (F_1 K_{1in} + F_2 K_{2in} + F_3 K_{3in} + F_4 K_{4in}) r dr,$$

$$G_{0H} = - \int_R^1 \left( H_4 + a_{12} \nabla H_1 + a_{12} n \frac{H_2}{r} - a_{13} \frac{\partial H_3}{\partial r} \right) r K_{4in} dr.$$

Также формируются две однородные задачи. Первая – относительно функций  $K_1(\lambda_{in}, n, r) \dots K_4(\lambda_{in}, n, r)$ :

$$\tilde{L}_1(K_{1in}) + \tilde{L}_2(K_{2in}) + \left( a_8 \nabla \frac{d}{dr} - a_9 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{a_{10} n^2}{r^2} \right) K_{3in} - \lambda_{in}^2 a_{12} \frac{dK_{4in}}{dr} = 0 \quad (3.19)$$

$$\tilde{L}_6(K_{2in}) + \tilde{L}_2(K_{1in}) + \tilde{L}_{10}(K_{3in}) - 2n \left[ (a_2 + a_3) \frac{1}{r} \frac{dK_{1in}}{dr} + (a_9 + a_{10}) \frac{1}{r} \frac{dK_{3in}}{dr} \right] + \lambda_{in}^2 a_{12} n \frac{K_{4in}}{r} = 0$$

$$\tilde{L}_{11}(K_{3in}) + \tilde{L}_3(K_{1in}) - \tilde{L}_7(K_{2in}) + 2a_4 \frac{1}{r} \frac{dK_{1in}}{dr} - 2a_5 n \frac{K_{2in}}{r^2} + \lambda_{in}^2 a_{13} \nabla K_{4in} = 0$$

$$\tilde{L}_{13}(K_{4in}) + \frac{dK_{1in}}{dr} + a_6 \frac{K_{1in}}{r} + \tilde{L}_8(K_{2in}) - a_{11} \frac{dK_{3in}}{dr} + \lambda_{in}^2 K_{4in} = 0$$

$$r = R, 1: \quad \frac{dK_{1in}}{dr} + a_3 \frac{K_{1in}}{r} + a_3 n \frac{K_{2in}}{r} + a_8 \frac{dK_{3in}}{dr} - \lambda_{in}^2 a_{12} K_{4in} = 0 \quad (3.20)$$

$$r \frac{dK_{2in}}{dr} - K_{2in} - n K_{1in} - \frac{a_{10}}{a_2} n K_{3in} = 0, \quad K_{3in}|_{r=R} = K_{4in}|_{r=R} = 0$$

$$\left( -\frac{dK_{3in}}{dr} + \frac{dK_{1in}}{dr} + a_4 \frac{K_{1in}}{r} + a_4 n \frac{K_{2in}}{r} + \lambda_{in}^2 a_{13} K_{4in} \right) \Big|_{r=1} = 0,$$

$$\left( \frac{dK_{3in}}{dr} + a_{15} K_{3in} \right) \Big|_{r=1} = 0.$$

Вторая – относительно функций  $N_1(\mu_{in}, n, r) \dots N_4(\mu_{in}, n, r)$ :

$$\tilde{L}_{n+1}(N_{1in}) + \tilde{L}_{n+2}(N_{2in}) + \tilde{L}_{n+3}(N_{3in}) + \tilde{L}_{n+4}(N_{4in}) = 0,$$

$$\text{при } n = 0, 4, 8 \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{13}(N_{4in}) + \varphi_{in}^2 \left( N_{4in} + a_{12} \nabla N_{1in} + a_{12} n \frac{N_{2in}}{r} - a_{13} \frac{dN_{3in}}{dr} \right) &= 0 \\ r = R, 1: \frac{\partial N_{1in}}{\partial r} + a_3 \frac{N_{1in}}{r} + a_3 n \frac{N_{2in}}{r} + \frac{\partial N_{3in}}{\partial r} - N_{4in} &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} r \frac{\partial N_{2in}}{\partial r} - N_{2in} - n N_{1in} - a_{14} n N_{3in} &= 0, \quad N_{3in|r=R} = N_{4in|r=R} = 0 \\ \left( -\frac{\partial N_{3in}}{\partial r} + a_8 \frac{\partial N_{1in}}{\partial r} + a_9 \frac{N_{1in}}{r} + a_9 n \frac{N_{2in}}{r} + a_{11} N_{4in} \right)_{|r=1} &= 0, \\ \left( \frac{dN_{4in}}{dr} + a_{15} N_{4in} \right)_{|r=1} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_H(\lambda_{in}, n, t) &= - \int_R^1 (F_1 K_{1in} + F_2 K_{2in} + F_3 K_{3in} + F_4 K_{4in}) r dr, \\ G_{0H} &= - \int_R^1 \left( H_4 + a_{12} \nabla H_1 + a_{12} n \frac{H_2}{r} - a_{13} \frac{\partial H_3}{\partial r} \right)_{|t=0} r K_{4in} dr. \end{aligned}$$

В краевых задачах (3.19), (3.20) и (3.21), (3.22) при вычислении первых членов ряда (3.18), обеспечивающих его сходимость, коэффициенты  $\{\lambda_{in}^2 a_{12}, \lambda_{in}^2 a_{13}, \mu_{in}^2 a_{12}, \mu_{in}^2 a_{13}\} \ll \{a_1 \dots a_{11}\}$  (для пьезокерамических материалов  $\{a_{12}, a_{13}\} = (1 \div 5) \times \{10^{-4}, 10^{-6}\}$ ). Учитывая малость  $a_{12}$  и  $a_{13}$ , при решении (3.19)–(3.22) можно пренебречь слагаемыми при данных коэффициентах и получить следующие выражения для функций  $K_1(\lambda_{in}, n, r) \dots K_4(\lambda_{in}, n, r)$  и  $N_1(\mu_{in}, n, r) \dots N_4(\mu_{in}, n, r)$ :

$$\{K_1(\lambda_{in}, n, r), K_2(\lambda_{in}, n, r), K_3(\lambda_{in}, n, r)\} = \sum_{p=1}^6 D_{pn} \{1, A_{1pn}, B_{1pn}\} r^{m_p}$$

$$K_4(\lambda_{in}, n, r) = - \sum_{p=1}^6 D_{pn} (m_p + a_6 + a_6 n A_{pn} -$$



$$-a_{11}B_{pn}m_p)\lambda_{in}^{-m_p-1}G_{n,m_p}(\lambda_{in}r) + D_{7n}J_n(\lambda_{in}r) + D_{8n}Y_n(\lambda_{in}r)$$

$$\{N_1(\varpi_{in}, n, r), N_2(\varpi_{in}, n, r), N_3(\varpi_{in}, n, r)\} = \\ = \sum_{s=1}^6 E_{pn} \{1, A_{2pn}, B_{2pn}\} r^{m_s} + \sum_{s=1}^6 V_p(r) \{1, A_{2pn}, B_{2pn}\} r^{m_s}$$

$$N_4(\varpi_{in}, n, r) = E_{7n}J_n(\varpi_{in}r) + E_{8n}Y_n(\varpi_{in}r),$$

где  $V_p = n_{2p-1}r^{1-s_p}N_{4in} + (n_{2p-1}s_p + n_{2p}) \int r^{-s_p} N_{4in} dr$  при  $p = \overline{1, 6}$ ;  $J_n(\dots)$ ,  $Y_n(\dots)$  – функции Бесселя I и II родов порядка  $n$  [30];  $G_{n,m_p}(\dots)$  – неэлементарные функции Ломмеля;  $m_1 \dots m_6$ ,  $s_1 \dots s_6$  – действительные корни двух бикубических уравнений;  $A_{1pn}$ ,  $A_{2pn}$ ,  $B_{1pn}$ ,  $B_{2pn}$ ,  $n_1 \dots n_{12}$  – коэффициенты, сформированные при решении (3.19), (3.21).

Подстановка  $K_k(\lambda_{in}, n, r)$ ,  $N_k(\mu_{in}, n, r)$  в (3.20), (3.22) позволяет определить постоянные  $D_{1n} \dots D_{4n}$ ,  $E_{1n} \dots E_{4n}$  и сформировать трансцендентные уравнения для определения собственных значений  $\lambda_{in}$ ,  $\mu_{in}$ .

При применении к трансформанте  $G(\lambda_{in}, n, t)$  формул обращения (3.2), (3.18) с учетом (3.9) определяются окончательные выражения для  $U(r, \varphi, t)$ ,  $V(r, \varphi, t)$ ,  $\Phi(r, \varphi, t)$ ,  $\Theta(r, \varphi, t)$ :

$$U(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[ H_1(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_1(\mu_{in}, n, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi) d\varphi \\ V(r, \varphi, t) = \pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ H_2(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2(\mu_{in}, n, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \sin(n\varphi) d\varphi \\ \Phi(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[ H_3(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_3(\mu_{in}, n, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi) d\varphi \\ \Theta(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[ H_4(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_4(\mu_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi) d\varphi.$$

Функции  $f_1(r) \dots f_8(r)$  определяются из системы уравнений

$$\tilde{L}_{n+1}(H_1) + \tilde{L}_{n+2}(H_2) + \tilde{L}_{n+3}(H_3) + \tilde{L}_{n+4}(H_4) = 0, \text{ при } n = 0, 4, 8 \\ \tilde{L}_{13}(H_4) = 0$$

и удовлетворяют (3.10), что позволяет упростить (3.11), (3.12).

**4. Численный анализ результатов.** В качестве образца рассматривается полый цилиндр ( $b = 0.02$  м,  $a = 0.005$  м) изготовленный из пьезокерамики PZT-4, имеющий следующие характеристики [27, 31]:

$\{c_{11}, c_{13}, c_{33}, c_{44}\} = \{13.9, 7.43, 11.5, 2.56\} \times 10^{10}$  Па,  $\rho = 7600$  кг/м<sup>3</sup>,  
 $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{6.45, 5.62\} \times 10^{-9}$  Ф/м,  $\{e_{15}, e_{31}, e_{33}\} = \{12.7, -5.2, 15.1\}$  Кл/м<sup>2</sup>,  
 $k = 3 \times 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>×К),  $\Lambda = 1.6$  Вт/(м×К),  $\alpha_t = 0.4 \times 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>,  
 $g_3 = -0.6 \times 10^{-6}$  Кл/(м<sup>2</sup>×К). Коэффициент теплоотдачи в случае естественной конвекции:  $\alpha = 5.6$  Вт/(м<sup>2</sup>×К).

Изменение температуры  $\omega_1^*(\varphi, t_*)$  задается в виде следующей зависимости:

$$\omega_1^*(\varphi, t_*) = Y(t_*) \left[ H\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right) + H\left(\varphi + \frac{\theta}{2} - 2\pi\right) \right] + T_0 \left[ H\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right) - H\left(\varphi + \frac{\theta}{2} - 2\pi\right) \right]$$

где  $Y(t_*) = T_{\max} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right]$ ;  $\theta$  – угол охвата участка изменения температуры, представлен на рис. 2;  $H(\dots)$  – единичная функция Хэвисайда;  $T_{\max}$ ,  $t_{\max}^*$  – максимальное значение функции температуры и соответствующий ему момент времени ( $T_{\max} = 373$  К (100 °С);  $T_0 = 293$  К (20 °С);  $t_{\max}^* = 1$  с).

Температура воздуха  $\vartheta^*$  соответствует температуре исходного состояния тела  $T_0$ , т.е.  $\vartheta = 0$ .

На рис. 3, 4 изображены графики изменения функций  $\Theta(r, \varphi, t_*)$ ,  $U(r, \varphi, t_*)$  и  $V(r, \varphi, t_*)$  по  $\varphi$  в момент времени  $t_* = 500t_{\max}^*$  при  $\theta = \pi/2$  (установившийся температурный режим). Рис. 3 иллюстрирует распределение температуры на внешней ( $r = 1$ ) и внутренней ( $r = R$ ) поверхностях. На рис. 4 цифрами 1 и 2

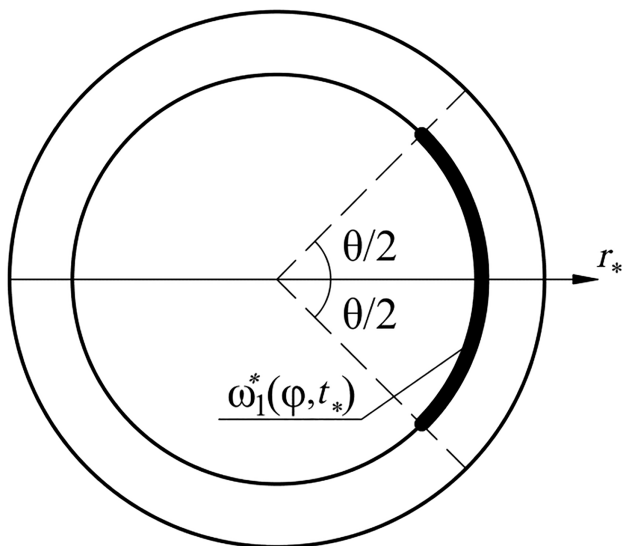


Рис. 2. Участок изменения температуры на внутренней поверхности полого цилиндра.

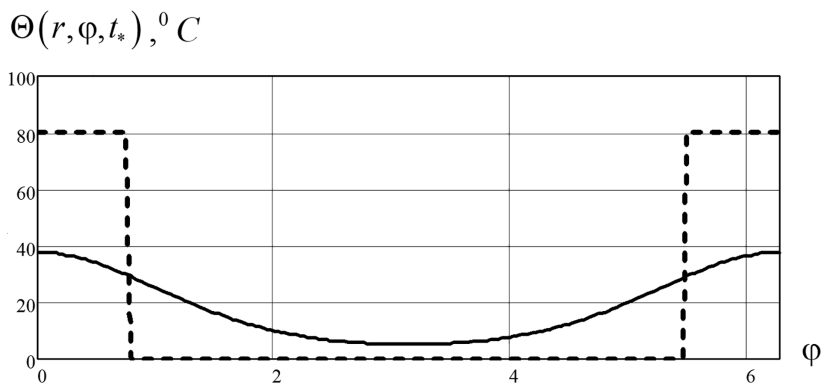


Рис. 3. Изменение температуры  $\Theta(r, \varphi, t_*)$  по угловой координате  $\varphi$  при  $t_* = 500t_{\max}^*$ : сплошная линия –  $r = 1$ , пунктир –  $r = R$ .

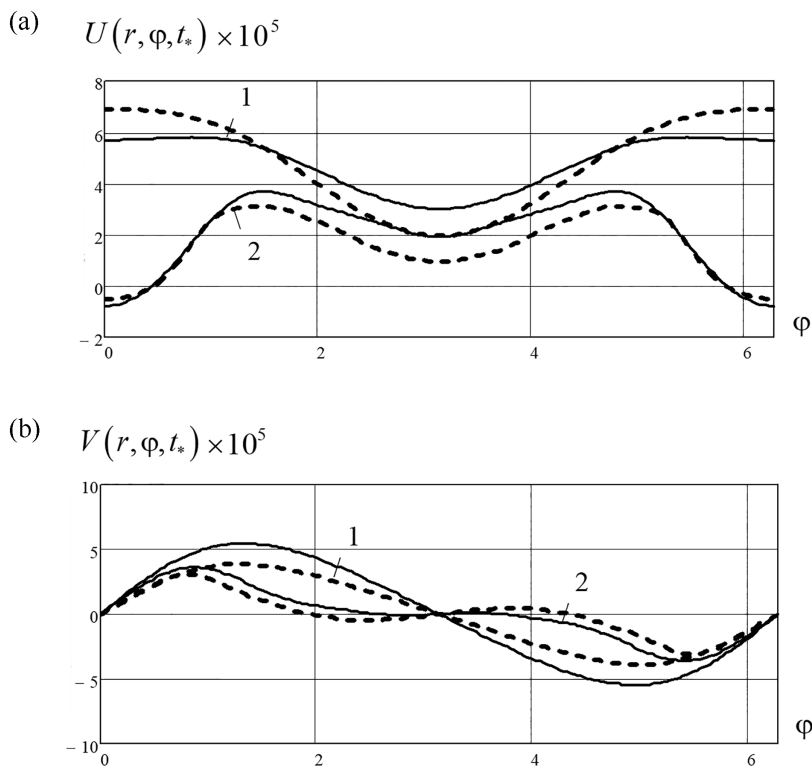


Рис. 4. Изменение радиального  $U(r, \varphi, t_*)$  и тангенциального  $V(r, \varphi, t_*)$  перемещений по угловой координате  $\varphi$  при  $t_* = 500t_{\max}^*$ : 1 –  $r = 1$ ; 2 –  $r = R$ ; сплошная линия – с учетом, пунктир – без учета электрического поля.

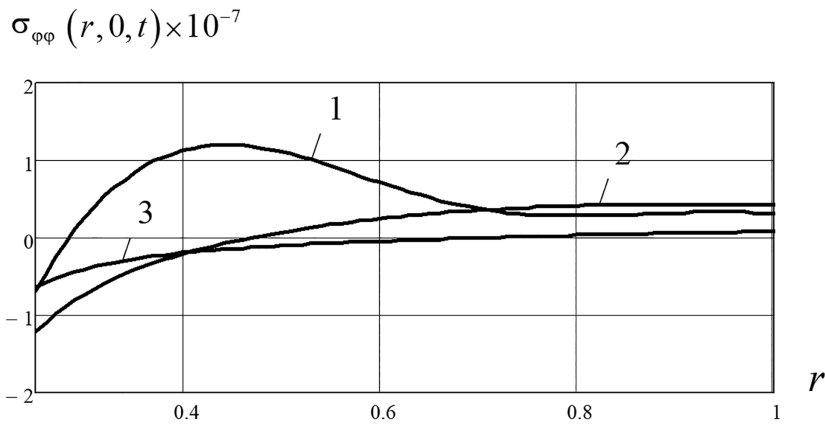


Рис. 5. Изменение окружных нормальных напряжений  $\sigma_{\phi\phi}(r, 0, t_*)$  [Па] по радиальной координате  $r$ : 1 –  $t_* = t_{\max}^*$ ; 2 –  $t_* = 300t_{\max}^*$ ; 3 –  $t_* = 500t_{\max}^*$ .

обозначены графики при  $r = 1, R$ , а сплошной линией и пунктиром – с учетом

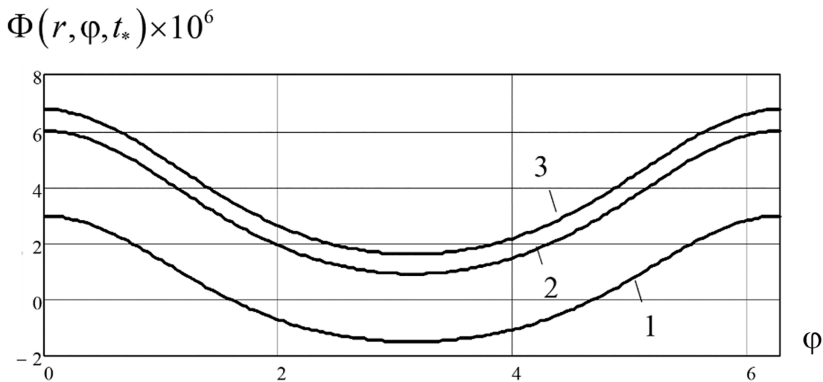
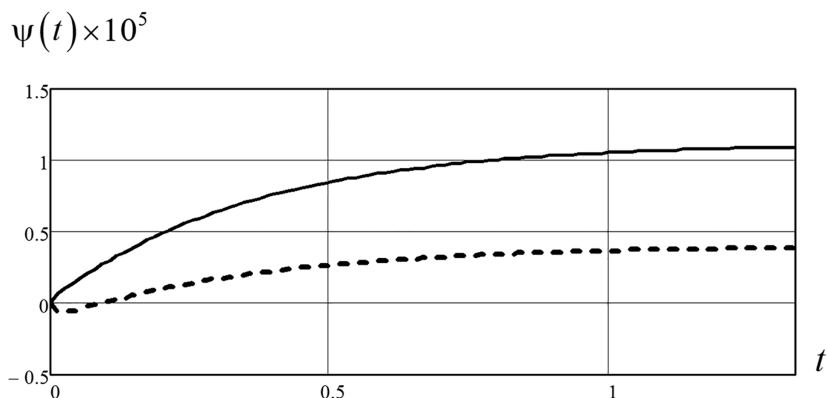


Рис. 6. Изменение электрического потенциала  $\Phi(r, \varphi, t_*)$  по угловой координате  $\varphi$ : 1 –  $t_* = 100t_{\max}^*$ ; 2 –  $t_* = 300t_{\max}^*$ ; 3 –  $t_* = 500t_{\max}^*$ .

и без учета электрического поля соответственно.

На основании анализа полученных результатов можно сформулировать следующие выводы:

1) при изменении температуры на части ( $\theta = \pi/2$ ) внутренней поверхности цилиндра ( $r = R$ ) функция приращения температуры на внешней поверхности ( $r = 1$ ) изменяется от 6 до 38 °С. При этом увеличение  $\theta$  приводит к росту  $\Theta(1, \varphi, 500t_*)$ , и в случае  $\theta = 2\pi$  (осесимметричная задача) величина данной функции будет постоянной и равной 73 °С;



**Рис. 7.** Изменение разности потенциалов  $\psi(t)$  по времени: сплошная линия — разрезной электрод, пунктир — непрерывное электродное покрытие.

2) влияние электроупругих полей на температурное учитывается в алгоритме решения с помощью трансформанты нагрузки  $G(\lambda_{in}, n, t)$  и проявляется в том случае, когда коэффициенты связанности  $\{a_{12}, a_{13}\} \geq 10^{-2}$ . Поэтому при исследовании пьезокерамических элементов, для которых параметры  $a_{12}$ ,  $a_{13}$  существенно меньше, в случае определения температурного поля можно исследовать только уравнение теплопроводности (2.2) в несвязанной постановке;

3) радиальная поляризация материала и образование электрического поля в процессе деформирования цилиндра приводит к увеличению его жесткости в данном направлении. Поэтому на участке  $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$  увеличение толщины стенки пьезокерамического элемента существенно ниже по сравнению с результатами, полученными для материала с аналогичными механическими характеристиками. На других участках толщина стенки цилиндра отличается незначительно (см. рис. 4, а);

4) при определении тангенциальных перемещений  $V(r, \varphi, t_*)$  наблюдается обратная картина: наличие электрического поля приводит к их увеличению (см. рис. 4, б).

На рис. 5 приведены эпюры, характеризующие изменение окружных нормальных напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi, t_*)$  вдоль радиальной координаты. Цифрами 1, 2 и 3 обозначены результаты для  $t_* = t_{\max}^*$ ,  $t_* = 300t_{\max}^*$ ,  $t_* = 500t_{\max}^*$  соответственно.

Из анализа зависимостей следует, что на первом этапе деформирования ( $t_* = t_{\max}^*$ ) рассматриваемого элемента наблюдаются наибольшие напряжения  $\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi, t_*)$  вследствие неравномерного распределения температуры по толщине стенки. Дальнейший прогрев конструкции приводит к снижению  $\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi, t_*)$ . При этом зона сжимающих напряжений при установившемся температурном режиме растет.

На рис. 6 отображен характер изменения потенциала  $\Phi(1, \varphi, t_*)$  по  $\varphi$  в различные моменты времени. Цифрами 1, 2, 3 обозначены результаты для  $t_* = 100t_{\max}^*$ ,  $t_* = 300t_{\max}^*$ ,  $t_* = 500t_{\max}^*$  соответственно.

Здесь следует отметить, что потенциал электрического поля неравномерно распределен по угловой координате, принимая наибольшее значение в области  $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$ . Таким образом, для более эффективного определения разности

потенциалов  $\psi^*(t_*)$  необходимо использовать на внешней поверхности цилиндра не сплошное электродное покрытие, а разрезной по высоте электрод, расположенный на участке  $[-\pi/4, \pi/4]$ .

В качестве подтверждения данных выводов на рис. 7 представлены графики изменения разности потенциалов электрического поля в безразмерной форме  $\psi(t) = e_{33}(bc_{33})^{-1} \psi^*(t)$ . Пунктиром и сплошной линией соответственно обозначены результаты для сплошного электродного покрытия, полученные на основании соотношения (2.8), и для разрезного электрода — с помощью следующего выражения:

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \Phi(1, \varphi, t) d\varphi.$$

**5. Заключение.** Полученное замкнутое решение неосесимметричной связанной задачи позволяет определить все компоненты температурного, электрического и упругого полей в длинном полом пьезокерамическом цилиндре, а также напряжение между его электродированными поверхностями. Преимущество представленного алгоритма расчета перед решением несвязанной задачи [25] состоит в том, что при исследовании уравнений равновесия и электростатики не требуется проводить аппроксимацию функции температуры, то есть принимается фактический нелинейный характер ее изменения, соответствующий физической природе нагрева тел.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ионов Б.П., Ионов А.Б.* Спектрально-статистический подход к бесконтактному измерению температуры // Датчики и системы. 2009. № 2. С. 9–11.
2. *Казарян А.А.* Тонкопленочный датчик давления и температуры // Датчики и системы. 2016. № 3. С. 50–56.
3. *Паньков А.А.* Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектрוליуми-несцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. № 2. С. 72–82.  
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>
4. *Kalmova M.* The scope of application of devices whose operation is based on taking into account the connectivity of thermoelectroelastic fields // Austrian J. Technical and Natural Sciences. 2022. V. 3. № 4. P. 14–16.  
<https://doi.org/10.29013/AJT-22-3.4-14-16>
5. *Mindlin R.D.* Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // Int. J. Solids Struct. 1974. V. 10. № 6. P. 625–637.  
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X)
6. *Lord H.W., Shulman Y.* A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. № 5. P. 299–309.  
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5)
7. *Green A.E., Naghdi P.M.* Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. V. 31. P. 189–208.  
<http://dx.doi.org/10.1007/BF00044969>

8. Ватulyan A.O., Hecтеров C.A. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10. № 2. С. 117–126.  
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>
9. Babeshko V.A., Ratner S.V., Syromyatnikov P.V. On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions // Doklady Physics. 2007. V. 52. P. 90–95.  
<https://doi.org/10.1134/S102833580702005X>
10. Saadatfar M., Razavi A.S. Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient // J. Mech. Sci. Technol. 2009. V. 23. P. 45–53.  
<https://doi.org/10.1007/s12206-008-1002-8>
11. Akbarzadeh A.H., Babaei M.H., Chen Z.T. The thermo-electromagnetoelastic behavior of a rotating functionally graded piezoelectric cylinder // Smart Mater. Struct. 2011. V. 20. № 6.  
<https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/6/065008>
12. Rahimi G.H., Arefi M., Khoshgoftar M.J. Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads // Appl. Math. Mech. 2011. V. 32. № 8. P. 997–1008.  
<https://doi.org/10.1007/s10483-011-1475-6>
13. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 14. № 4. С. 677–691.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1781>
14. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного цилиндра // Вестник ПНИПУ. Механика. 2021. № 2. С. 181–190.  
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.16>
15. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Связанная динамическая осесимметричная задача термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического цилиндра // Adv. Eng. Res. (Rostov-on-Don). 2022. Т. 22. № 2. С. 81–90.  
<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-2-81-90>
16. Dai H.L., Wang X., Dai Q.H. Thermoelectroelastic responses in orthotropic piezoelectric hollow cylinders subjected to thermal shock and electric excitation // J. Reinf. Plast. Compos. 2005. V. 24. № 10. P. 1085–1103.  
<https://doi.org/10.1177/0731684405048834>
17. Dai H.L., Wang X. Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures // Int. J. Solids Struct. 2005. V. 42. № 3–4. P. 1151–1171.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.06.061>
18. Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Therm. Stresses. 1994. V. 17. № 3. P. 471–487.  
<https://doi.org/10.1080/01495739408946273>
19. Chen W.Q., Shioya T. Piezothermoelastic behavior of a pyroelectric spherical shell // J. Therm. Stresses. 2001. V. 24. № 2. P. 105–120.  
<https://doi.org/10.1080/01495730150500424>
20. Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R. General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to non-axisymmetric steady-state loads // J. Appl. Mech. 2003. V. 70. № 1. P. 111–118.  
<https://doi.org/10.1115/1.1509484>
21. Arian A., Fesharaki J.J., Majzoobi G.H., Sheidaee M. Effects of electric potential on thermomechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder under non-axisymmetric loads // Int. J. Mech., Aero., Indust., Mechatr. Manufacturing Eng. 2011. V. 5. № 11. P. 2441–2444.  
<https://doi.org/10.5281/zenodo.1060363>

22. Dai H.L., Luo W.F., Dai T., Luo W.F. Exact solution of thermoelectroelastic behavior of a fluid-filled FGPM cylindrical thin-shell // Compos. Struct. 2017. V. 162. P. 411–423.  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.002>
23. Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. A general solution technique for electroelastic fields in piezoelectric bodies with  $D_\infty$  symmetry in cylindrical coordinates // J. Wood Sci. 2016. V. 62. P. 29–41.  
<https://doi.org/10.1007/s10086-015-1524-5>
24. Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. Analytical technique for thermoelectroelastic field in piezoelectric bodies with  $D_\infty$  symmetry in cylindrical coordinates // J. Therm. Stresses. 2017. V. 41. № 1. P. 1–20.  
<https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1368052>
25. Шляхин Д.А., Юрин В.А. Неосесимметричная нестационарная задача термоэлектростатической упругости для длинного пьезокерамического цилиндра // Инженерный журнал: наука и инновации. 2023. № 7. С. 677–691.  
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-7-2288>
26. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 307 с.
27. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 470 с.
28. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. М.: Иностранная литература, 1955. 668 с.
29. Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985. 174 с.
30. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
31. Hong C.H., Kim H.P., Choi B.Y., Han H.S., Son J.S., Ahn C.W., Jo W. Lead-free piezoceramics – Where to move on? // J. Materiomics. 2016. V. 2. № 1. P. 1–24.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmat.2015.12.002>

UDC 539.3

## NON-AXISYMMETRIC COUPLED NON-STATIONARY PROBLEM OF THERMOELECTROELASTICITY FOR A LONG PIEZOCERAMIC CYLINDER

© 2024 г. D. A. Shlyahin<sup>a</sup>, \*, V. A. Jurin<sup>a</sup>, \*\*

<sup>a</sup>Samara Polytech, Samara, Russia

\*e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru,

\*\*e-mail: get8ack@mail.ru

**Abstract** – A new closed solution to the non-axisymmetric coupled non-stationary problem of thermoelectroelasticity was constructed for a long piezoceramic cylinder for the case of satisfaction of the first and the third kind boundary conditions. Cylindrical surfaces were made as electrodes and connected to a measurement device with large input resistance. Limitation of a temperature change “load” rate made it possible to include equations of statics, electrostatics and thermal conductivity in the initial formula. The finite biorthogonal transforms are applying to explore a non-selfadjoint system of differential equations and to develop a closed



solution. The obtained relations made it possible to determine the temperature and electric fields, and the stress-strain state in the piezoceramic cylinder, as well as the potential difference between cylindrical surfaces (electrodes) under non-stationary non-axisymmetric temperature impact.

**Keywords:** non-axisymmetric problem of thermoelectroelasticity, long piezoceramic cylinder, finite biorthogonal integral transforms

## REFERENCES

1. *Ionov B.P., Ionov A.B.* Statistic-spectral approach to noncontact temperature measurement // *Sensors and Systems*. 2009. V. 2. P. 9–11.
2. *Kazaryan A.A.* Fine-film captive pressure and temperature // *Sensors and Systems*. 2016. V. 3. P. 50–56.
3. *Pan'kov A.A.* Resonant diagnostics of temperature distribution by the piezo-electro-luminescent fiber-optical sensor according to the solution of the Fredholm integral equation // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2018. V. 2. P. 72–82; <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>.
4. *Kalmova M.* The scope of application of devices whose operation is based on taking into account the connectivity of thermoelectroelastic fields // *Austrian Journal of Technical and Natural Sciences*. 2022. V. 3. № 4. P. 14–16; <https://doi.org/10.29013/AJT-22-3.4-14-16>.
5. *Mindlin R.D.* Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // *International Journal of Solids and Structures*. 1974. V. 10. № 6. P. 625–637; [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X).
6. *Lord H.W., Shulman Y.* A generalized dynamical theory of thermoelasticity // *J. Mech. Phys. Solids*. 1967. V. 15. № 5. P. 299–309; [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5).
7. *Green A.E., Naghdi P.M.* Thermoelasticity without energy dissipation // *J. Elasticity*. 1993. V. 31. P. 189–208.
8. *Vatulyan A.O., Nesterov S.A.* The dynamic problem of thermoelectroelasticity for functionally graded layer // *Computational Continuum Mechanics*. 2017. V. 2. № 10. P. 117–126; <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>.
9. *Babeshko V.A., Ratner S.V., Syromyatnikov P.V.* On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions // *Doklady Physics*. 2007. V. 52. P. 90–95; <https://doi.org/10.1134/S102833580702005X>.
10. *Saadatfar M., Razavi A.S.* Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient // *J. Mech. Sci. Technol.* 2009. V. 23. P. 45–53; <https://doi.org/10.1007/s12206-008-1002-8>.
11. *Akbarzadeh A.H., Babaei M.H., Chen Z.T.* The thermo-electromagnetoelastic behavior of a rotating functionally graded piezoelectric cylinder // *Smart Materials and Structures*. 2011. V. 20. № 6; <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/6/065008>.
12. *Rahimi G.H., Arefi M., Khoshgoftar M.J.* Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads // *Appl. Math. Mech.* 2011. V. 32. № 8. P. 997–1008; <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1475-6>.

13. *Shlyakhin D.A., Kal'mova M.A.* The coupled non-stationary thermo-electro-elasticity problem for a long hollow cylinder // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 4. № 14. P. 677–691;  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1781>.
14. *Shlyakhin D.A., Kal'mova M.A.* The nonstationary thermoelectric elasticity problem for a long piezoceramic cylinder // PNRPU Mechanics Bulletin. 2021. V. 2. P. 181–190;  
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.16>.
15. *Shlyakhin D.A., Kal'mova M.A.* Related dynamic axisymmetric thermoelectroelasticity problem for a long hollow piezoceramic cylinder // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2022. V. 2. № 22. P. 81–90;  
<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-2-81-90>.
16. *Dai H.L., Wang X., Dai Q.H.* Thermoelectroelastic responses in orthotropic piezoelectric hollow cylinders subjected to thermal shock and electric excitation // J. Reinfor. Plast. Comp. 2005. V. 24. № 10. P. 1085–1103;  
<https://doi.org/10.1177/0731684405048834>.
17. *Dai H.L., Wang X.* Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures // Int. J. Solids Struct. 2005. V. 42. № 3–4. P. 1151–1171;  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.06.061>.
18. *Obata Y., Noda N.* Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Therm. Stresses. 1994. V. 17. № 3. P. 471–487;  
<https://doi.org/10.1080/01495739408946273>.
19. *Chen W.Q., Shioya T.* Piezothermoelastic behavior of a pyroelectric spherical shell // J. Therm. Stresses. 2001. V. 24. P. 105–120;  
<https://doi.org/10.1080/01495730150500424>.
20. *Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R.* General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to non-axisymmetric steady-state loads // J. Appl. Mech. 2003. V. 70. № 1. P. 111–118;  
<https://doi.org/10.1115/1.1509484>.
21. *Atrian A., Fesharaki J.J., Majzoobi G.H., Sheidaee M.* Effects of electric potential on thermo-mechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder under non-axisymmetric loads // Int. J. Mech., Aerospace, Indust., Mech. Manufac. Eng. 2011. V. 5. № 11. P. 2441–2444;  
<https://doi.org/10.5281/zenodo.1060363>.
22. *Dai H.L., Luo W.F., Dai T., Luo W.F.* Exact solution of thermoelectroelastic behavior of a fluid-filled FGPM cylindrical thin-shell // Compos. Struct. 2017. V. 162. P. 411–423;  
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.002>.
23. *Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y.* A general solution technique for electroelastic fields in piezoelectric bodies with  $D_\infty$  symmetry in cylindrical coordinates // J. Wood Sci. 2016. V. 62. P. 29–41;  
<https://doi.org/10.1007/s10086-015-1524-5>.
24. *Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y.* Analytical technique for thermoelectroelastic field in piezoelectric bodies with  $D_\infty$  symmetry in cylindrical coordinates // J. Therm. Stresses. 2017. V. 41. № 6. P. 1–20;  
<https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1368052>.
25. *Shlyakhin D.A., Yurin V.A.* Non-axisymmetric non-stationary problem of thermoelectroelasticity for a long piezoceramic cylinder // Eng. J.: Sci. Innov. 2023. V. 7. P. 677–691;  
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-7-2288>.
26. *Kovalenko A.D.* Fundamentals of Thermoelasticity. Kiev: Naukova Dumka, 1970. 307 p.
27. *Parton V.Z., Kudryavtsev B.A.* Electromagnetoelasticity: Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids. Moscow: Science, 1988, 470 p.

28. *Sneddon I.N.* Fourier Transforms. Moscow: Foreign Literature, 1955. 668 p.
29. *Senitsky Y.E.* Study of the Elastic Deformations of Structural Elements Under Dynamic Influences by the Method of Finite Integral Transformations. Saratov. Saratov University, 1985. 174 p.
30. *Yanke E., Emde F., Lesh F.* Special functions. Moscow: Science, 1977. 342 p.
31. *Hong C.H., Kim H.P., Choi B.Y. et al.* Lead-free piezoceramics – Where to move on? // *J. Materiomics*. 2016. V. 2. № 1. P. 1–24;  
<https://doi.org/10.1016/j.jmat.2015.12.002>